

Entrainement au calcul

Valentin KILIAN

25 octobre 2022

Posologie : 10 min par jour tous les jours

Exercice 1. Calculer les primitives suivantes par intégration par parties.

1. $\int x^2 \ln x \, dx$
2. $\int x \arctan x \, dx$
3. $\int \ln x \, dx$ puis $\int (\ln x)^2 \, dx$
4. $\int \cos x \exp x \, dx$

Exercice 2. Calculer les primitives suivantes par changement de variable.

1. $\int (\cos x)^{1234} \sin x \, dx$
2. $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx$
3. $\int \frac{1}{3 + \exp(-x)} \, dx$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} \, dx$

Exercice 3. Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs :

1. $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4} \, dx$
2. $\int \frac{x-1}{x^2+x+1} \, dx$
3. $\int \sin^8 x \cos^3 x \, dx$
4. $\int \frac{1}{\sin x} \, dx$
5. $\int \frac{3 - \sin x}{2 \cos x + 3 \tan x} \, dx$

Exercice 4. Déterminez les limites lorsque n tend vers l'infini des suites ci-dessous ; pour chacune, essayez de préciser en quelques mots la méthode employée.

1. $2/1 ; 4/3 ; 6/5 ; \dots ; 2n/(2n-1) ; \dots$
2. $0,23 ; 0,233 ; \dots ; 0,233\dots 3 ; \dots$
3. $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}$
4. $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$
5. $\frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$
6. $\frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$
7. $(1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n)$
8. $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
9. $\frac{n \sin(n!)}{n^2 + 1}$
10. Démontrez la formule $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$; déduisez-en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$$

Exercice 5. Calculez lorsqu'elles existent les limites suivantes

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$
- d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$ f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n - 1}$

Exercice 6. Trouvez pour $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 7. Déterminez les limites suivantes, en justifiant tes calculs.

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x + \sqrt{x})$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x \ln x}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln(x+1)}$
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} \ln\left(\frac{x^3+4}{1-x^2}\right)$
8. $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^2 - 1) \ln(7x^3 + 4x^2 + 3)$
9. $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \ln(x^3 - 8)$
10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^x - 1)}{\ln(x+1)}$
11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x \ln(x+2))$
12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2 - x}$
13. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x}$
14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$
15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$
16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}}$
17. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(1+x))^{\frac{1}{\ln x}}$
18. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}}$
19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$
20. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$

Exercice 8 (Recherche d'équivalents). Donnes des équivalents simples pour les fonctions suivantes :

1. $2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$, en 0
2. $(\cos x)^{\sin x} - (\cos x)^{\tan x}$, en 0
3. $\arctan x + \arctan \frac{3}{x} - \frac{2\pi}{3}$, en $\sqrt{3}$
4. $\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$, en $+\infty$
5. $\operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$, en 0

Source : Exo7