Solutions prolongeables de l'équation de Legendre
Version préliminaire non relus

Valentin Kilian
Ecole Normale Supérieure de Rennes

10 août 2022

Table des matières

1 Introduction

L'equation de Legendre est l'équation différentielle

$$(1-t^2)y''(t) - 2ty'(t) + v(v+1)y(t) = 0 \text{ où } v \in \mathbb{R} \text{ et } t \in]-1,1[. \qquad (\mathcal{L})$$

Cette équation apparait naturellement dans plusieurs domaines de la physique dès lors que l'on souhaite résoudre l'équation de Laplace en coordonnée sphérique. Les seules solutions physiquement acceptables sont les solutions globales prolongeables par continuités en -1 et1. Un résultat bien connus des physiciens énonce que de telles solutions n'existe que si v est entier et qu'alors les solutions sont des polynômes. Il n'existe, a notre connaissance, aucune preuve rigoureuse de cette affirmation, nous en proposons donc ici une preuve.

Dans un premier temps nous montrerons qu'étant donnée des conditions initiales il n'existe qu'une seule solution maximale à l'équation de Legendre et que de plus cette solution est globale (2). Une preuve de ceci est présenté dans l'excellent [1] mais les éditions actuelles comportent plusieurs erreurs qui ont été signalé à l'auteur et devrait disparaitre dans de futur édition. Dans un second temps nous démonterons l'énoncé des physiciens (3).

2 Solutions Globales

Posons

$$F(y', y, t) = \begin{pmatrix} \frac{2t}{1-t^2}y' - \frac{v(v+1)}{1-t^2}y \\ y' \end{pmatrix}.$$

On définit ainsi une fonction C^1 $F : \mathbb{R}^2 \times]0,1[\longmapsto \mathbb{R}^2$. L'équation ($\mathcal{L}$) se réécrit alors

$$Y' = F(Y, t) \text{ où on a noté } Y = (y', y).$$

La fonction F étant suffisamment régulière le théorème de Cauchy-Lipschitz conclut qu'étant donnée $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution maximal y de ($\mathcal{L}$) tel que

$$y(0) = x_0 \text{ et } y'(0) = x_1.$$

Puisque les coefficients de l'équation de Legendre sont développables en séries entières (DSE) alors on cherche l'unique solution maximale sous la forme d'une fonction DSE, ie une fonction de la forme $y = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ sur un intervalle $]-R, R[$ où $0 < R < 1$. On procède par analyse synthèse.

Analyse Supposons qu'il existe une solution maximal DSE, alors par dérivation des séries entières on obtient pour le premier terme de l'équation :

$$\begin{aligned}(1-t^2)y'' &= (1-t)^2\sum_{n\geq 0} a_n n(n-1)t^{n-2}\\ &= \sum_{n\geq 0}\left[a_{n+2)}(n+2)(n+1) - a_n n(n-1)\right]t^n.\end{aligned}$$

Les autres termes conduisent à

$$\begin{aligned}-2ty'(t) + v(v+1)y(t) &= -2t\sum_{n\geq 0} a_n n t^{n-1} + v(v+1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\\ &= \sum_{n\geq 0}\left[-2a_n n + v(v+1)a_n\right]t^n\end{aligned}$$

Par suite si y est solution de ($\mathcal{L}$) alors pour tout $t \in \left]-R, R\right[$

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_n n(n-1) - 2a_n n + v(v+1)a_n\right)t^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_{n+2}(n+2)(n+1) + (v(v+1) - n(n+1))a_n\right)t^n.\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, y est solution de l'equation de Legendre si et seulement si

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) + (v(v+1) - n(n+1))a_n = 0, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Remarquons que $v(v+1) - n(n+1) = (v+n+1)(v-n)$, on peut alors réécrire la condition sous la forme

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) + (v+n+1)(v-n)a_n = 0, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Ou encore

$$a_{n+2} = -a_n\frac{(v+n+1)(v-n)}{(n+2)(n+1)}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Puisque $y(0) = a_0 = x_0$ et $y'(0) = a_1 = x_1$ alors on a ainsi déterminé les coefficients de la série entière y par double récurrences

Synthèse Pour achever la preuve de l'existence d'une telle solution, il reste à montrer que le rayon de convergences de la série entière définie dans l'analyse est strictement positif. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $u_p = a_p t^p$. on procède alors par disjonction de cas sur la valeur de v pour traiter séparément les cas où $(a_n)_{n\geq 0}$ s'annule à partir d'un certain rang :

- ▶ **Si v n'est pas un entier positif pair ou un entier négatif impair** on peut écrire :

$$\frac{|u_{2p+2}|}{|u_{2p}|} = \frac{|(v+2p+1)(v-2p)|t^2}{(2p+1)(2p+2)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} t^2,$$

  ainsì par le critère de d'Alembert pour les séries numériques, $\Sigma\,|u_{2p}|$ converge pour $t^2 < 1$ et diverge pour $t^2 > 1$. Ainsi la série entière $\sum a_{2p}t^{2p}$ a un rayon de convergence ≥ 1.

- ▶ **Si v n'est pas un entier positif impair ou un entier strictement négatif pair** alors on peut écrire :

$$\frac{|u_{2p+3}|}{|u_{2p+1}|} = \frac{|(v+2p+2)(v-2p-1)|t^2}{(2p+3)(2p+2)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} t^2,$$

  ainsi par le critère de d'Alembert pour les séries numériques, $\Sigma\,|u_{2p+1}|$ converge pour $t^2 < 1$ et diverge pour $t^2 > 1$. Ainsi la série entière $\sum a_{2p+1}t^{2p=1}$ a un rayon de convergence ≥ 1.

- ▶ **Si v est un entier positif pair ou un entier négatif impair** alors la suite $(a_{2p})_{p\geq 0}$ est nulle à partir d'un certain rang et la série entière $\sum a_{2p}t^{2p}$ a un rayon de convergence infini.

- **Si v est un entier positif impair ou un entier strictement négatif pair** alors la suite $(a_{2p+1})_{p\geq 0}$ est nulle à partir d'un certain rang et la série entière $\sum a_{2p+1}t^{2p+1}$ a un rayon de convergence infini.

Dans tous les cas, si $t \in]-1,1[$ la série

$$\sum_{n\geq 0} a_n t^n = \sum_{n\geq 0} a_{2p}t^{2p} + \sum_{n\geq 0} a_{2p+1}t^{2p+1}$$

converge, c'est bien que la série entière $\sum a_n t^n$ à un rayon de convergence au moins égal à 1. Ainsi en posant $a_0 = x_0$ et $a_1 = x_1$ on a trouvé l'unique solution maximale. On remarque qu'en plus on a démontré que cette solution était globale. Finalement on peut énoncé le résultat suivant :

Théorème 2.1. *Soit $v \in \mathbb{R}$, soient $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} (1-t^2)y''(t) - 2ty'(t) + v(v+1)y(t) = 0 \ \ pour \quad t \in]-1,1[\\ y(0) = x_0, \ \ y''(0) = x_1 \end{cases} \tag{$\mathcal{C}$}$$

admet pour unique solution maximale la série entière $y(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ où $(a_n)_{n\geq 0}$ est définis par la relation de récurrence

$$\begin{cases} a_{n+2} = -a_n \frac{(v+n+1)(v-n)}{(n+2)(n+1)}, \quad pour\ tout\ n \in \mathbb{N} \\ a_0 = x_0, \ a_1 = x_1 \end{cases}.$$

De plus cette solution est globale.

3 Solutions prolongeables

Comme précisé dans l'introduction les seules solutions physiquement admissibles sont celle qui se prolonge par continuité en -1 et 1. Afin de terminer qu'elles sont ces solutions (quand elles existent) nous avons d'abord besoins d'établir un critère de convergence pour les séries. Ce critère est interessant en lui même puisque qu'il induit de nombreux critères connus comme par exemple le critère de d'Alembert que nous avant utilisé dans la partie 2.

3.1 Critère de convergence de Kummer

Théorème 3.1 (Critère de Kummer [2]). *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement positive.*

1. *$\sum u_n$ converge si et seulement s'il existe une suite positive $(k_n)_{n\geq 0}$ et une constante $\delta > 0$ telles qu'à partir d'un certain rang,*

$$k_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - k_{n+1} \geq \delta.$$

2. *$\sum u_n$ diverge si et seulement s'il existe une suite (k_n) strictement positive telle que $\sum \frac{1}{k_n} = +\infty$ et telle qu'à partir d'un certain rang,*

$$k_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - k_{n+1} \leq 0.$$

Démonstration.

1. Soient $\delta > 0$ et $(k_n)_{n\geq 0}$ une suite positive tel que à partir d'un certain rang N on a

$$k_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - k_{n+1} \geq \delta > 0$$

alors

$$\delta u_{n+1} \leq k_n u_n - k_{n+1} u_{n+1}$$

donc

$$\sum_{m>N} u_m \leq \frac{k_N u_N}{\delta} < +\infty.$$

Réciproquement, si $\sum u_n$ converge alors, en posant $k_n := \frac{1}{u_n}\sum_{k>n} u_k$, on a $k_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - k_{n+1} = 1$.

2. Soit $(k_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement positive tel que à partir d'un certain rang N on a

$$k_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - k_{n+1} \leq 0$$

alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{1/k_{n+1}}{1/k_n}. \qquad (\mathcal{E})$$

Montrons maintenant par récurrence que pour tout $n \geq N$ on a

$$\frac{1}{k_n} \leq M u_n, \quad \text{où} \quad M = \frac{1}{k_N a_N}.$$

C'est évidement vrai au rang N. Supposons que la propriété est vrai à un rang $n \geq N$ alors avec $\mathcal{E}$ on obtient

$$\frac{1}{k_{n+1}} \leq \frac{1}{k_n}\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

On donc par hypothèse de récurrence

$$\frac{1}{k_{n+1}} \leq M u_{n+1}$$

Par suite si $\sum \frac{1}{k_n} = +\infty$ alors $\sum u_n$ diverge.
Réciproquement, si $\sum u_n$ diverge alors, en posant $k_n := \frac{1}{u_n}$, on a $\sum \frac{1}{k_n} = +\infty$ et

$$k_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - k_{n+1} = 0.$$

■

Le critère de Kummer est l'un des critères de convergence des séries sur les générales ainsi on en déduit facilement plusieurs critères usuels :

Corollaire 3.2 (Critère de Raabe-Duhamel). *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement positive.*

1. *S'il existe $b > 1$ tel que (à partir d'un certain rang) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \frac{b}{n}$ alors $\sum u_n$ converge ;*
2. *Si (à partir d'un certain rang) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$, alors $\sum u_n$ diverge.*

Démonstration.

1. on applique le premier point du critère de Kummer avec $k_n = n - b$.
2. on applique le second point du critère de Kummer avec $k_n = n - 1$.

■

Corollaire 3.3 (Critère de Bertrand). *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement positive.*

1. *S'il existe $b > 1$ tel que (à partir d'un certain rang) $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 1 + \frac{1}{n} + \frac{b}{n \ln n}$, alors $\sum u_n$ converge ;*
2. *Si (à partir d'un certain rang) $\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n}$, alors $\sum u_n$ diverge.*

Démonstration. On applique le critère de Kummer avec $k_n = n\ln(n)$ ■

Corollaire 3.4 (Critère de d'Alembert). *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement positive.*

1. *S'il existe $\delta > 1$ tel que (à partir d'un certain rang) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1-\delta$ alors $\sum u_n$ converge ;*
2. *Si (à partir d'un certain rang) $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.*

Démonstration.

1. on applique le premier point du critère de Kummer avec $k_n = 1-\delta$.
2. on applique le second point du critère de Kummer avec $k_n = 1$.

■

3.2 Polynômes de Legendre

Tout d'abord si $v \in \mathbb{R}$ est quelconque et que $x_0 = x_1 = 0$ alors la solution de $\mathcal{C}$ est la fonction nulle qui est évidement physiquement admissible puisqu'elle se prolonge sans problème en -1 et 1.

Si $v \in \mathbb{Z}$ alors on a déjà démontré qu'un bon choix de condition initiale (x_0, x_1) permet d'obtenir des solutions globales polynomiales et donc prolongeables en -1 et 1. Il suffit de choisir les conditions initiale comme dans le tableau suivant :

v	x_0	x_1
$2\mathbb{N}$	$\in \mathbb{R}$	0
$-2\mathbb{N}+1$		
$2\mathbb{N}+1$	0	$\in \mathbb{R}$
$-2\mathbb{N}^*$		

Regardons par exemple la première ligne du tableau. Si $v \in 2\mathbb{N}$ et que $x_1 = 0$ alors d'après la partie 2 la solution globale du problème de Cauchy $\mathcal{C}$ est de la forme

$$y(t) = \sum_{2n\geq 0} a_{2n} t^{2n}$$

En effet puisque $x_1 = 0$ alors les a_{2p+1} sont tous nuls. Mais puisque $v \in 2\mathbb{N}$ alors la suite $(a_{2p})_{p\geq 0}$ est nulle à partir d'un certain rang et par suite y est un polynôme. Les autres lignes du tableau se traite de manière parfaitement similaire.

Si de plus $x_0 = 1$ et qu'on note $v := n$ alors y est appelé le *n-ième polynome de Legendre*. Ces polynômes interviennent dans de nombreux domaines de la physique théorique et du calcul numérique où il apparaissent de façons parfois très différentes.

On souhaite maintenant montrer que dans tous les autre cas il n'existe pas de solution prolongeable en -1 et 1, c'est lors de cette étape que nous allons utiliser le critère de convergence précédemment établis. On suppose donc que l'on ne se trouve dans aucun des cas décris précédement. Nous allons d'abord l'appliquer à la suite $(a_{2p})_{p\geq 0}$.

A partir d'un certain rang la suite des $(a_{2p})_{p\geq 0}$ est de signe constant (car le rapport de deux termes consécutifs est positif apdcr), quitte à factoriser par -1 on peut supposer que cette suite est positive à partir de ce rang. Dans un premier temps on effectue le calcul suivant où les développements sont asymptotiques :

$$\frac{a_{2p}}{a_{2p+2}} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{(2p+1+v)(2p-v)} = \frac{\left(1+\frac{1}{2p}\right)\left(1+\frac{1}{p}\right)}{\left(1+\frac{1+v}{2p}\right)\left(1-\frac{v}{2p}\right)}$$

$$= \left(1+\frac{1}{2p}\right)\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1+v}{2p}+O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)\left(1+\frac{v}{2p}+O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)$$

$$= \left(1+\frac{3}{2p}+O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)\left(1-\frac{1+v}{2p}+O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)\left(1+\frac{v}{2p}+O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{p}\left(\frac{3}{2} - \frac{1+v}{2} + \frac{v}{2}\right) + O\left(\frac{1}{p^2}\right) = 1 + \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

Finalement on a donc :

$$\begin{aligned}
& p\ln(p)\frac{a_{2p}}{a_{2p+2}} - (p+1)\ln(p+1) && = \ln(p)\left(p+1+O\left(\frac{1}{p}\right)\right) + O\left(\frac{\ln(p)}{p}\right) \\
&= (p+1)\ln\left(\frac{p}{p+1}\right) + O\left(\frac{\ln(p)}{p}\right) && = (p+1)\ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{p}}\right) + O\left(\frac{\ln(p)}{p}\right) \\
&= (p+1)\ln\left(1 - \frac{1}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right) + O\left(\frac{\ln(p)}{p}\right) && = (p+1)\left(-\frac{1}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right) + O\left(\frac{\ln(p)}{p}\right) \\
&= -1 + o(1)
\end{aligned}$$

Ainsi, à partir d'un certain rang on obtient

$$p\ln(p)\frac{a_{2p}}{a_{2p+2}} - (p+1)\ln(p+1) < 0$$

Le second point du critère de Kummer (3.1) appliqué avec $k_p = p\ln(p)$ (autrement dit le critère de Bertrand) démontre que si la suite $(a_{2p})_{p\geq 0}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang alors la série des $\sum a_{2p}$ diverge. De plus, puisque la suite est constante à partir d'un certain rang alors cela signifie que la suite des sommes partielles tends vers $-\infty$ ou $+\infty$.

De la même manière on peut démontrer que si la suite $(a_{2p+1})_{p\geq 0}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang alors la série des $\sum a_{2p+1}$ diverge et que la suite des sommes partielles tends vers $-\infty$ ou $+\infty$. La démonstration étant vraiment similaire on ne détail que le premier développement asymptotique :

$$\frac{a_{2p+1}}{a_{2p+3}} = \frac{(2p+2)(2p+3)}{(2p+2+v)(2p+1-v)} = \frac{\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{3}{2p}\right)}{\left(1+\frac{2+v}{2p}\right)\left(1+\frac{1-v}{2p}\right)}$$

$$= \left(1 + \frac{5}{2p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)\left(1 - \frac{2+v}{2p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)\left(1 - \frac{1-v}{2p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{p}\left(\frac{5}{2} - \frac{2+v}{2} - \frac{1-v}{2}\right) + O\left(\frac{1}{p^2}\right) = 1 + \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

Ainsi dans les cas non traité précédment deux phénomènes peuvent être observé :

- Si une (et une seule) des suites $(a_{2p})_{p\geq 0}$ et $(a_{2p+1})_{p\geq 0}$ s'annule à partir d'un certain rang alors la solution globale de $\mathcal{C}$ est la somme d'un polynôme et d'une série entière qui diverge en -1 et en 1 d'après la discussion ci dessus. Ainsi la solution diverge également en -1 et en 1 et n'est donc pas physiquement admissible

- Si aucune des deux suites ne s'annule à partir d'un certain rang alors la solution globale de $\mathcal{C}$ et la somme de deux séries entières (l'un composé des termes pair et l'autre des termes impaires) qui divergent toutes les deux en -1 et en 1 d'après la discussion précédente. Cependant on ne peut a priori rien dire du comportement de la somme des deux séries au voisinage de -1 et 1 puisque des phénomènes de compensation pourrait se produire. Enfaite il existe toujours un point où un tel phénomène ne peut pas être observé. En effet on a déjà montré que dans le cas où l'on s'est placé les suites des sommes partiels $(\sum_{k=0}^{n} a_{2k})_{n\geq 0}$ et $(\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1})_{n\geq 0}$ divergent en tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$ ainsi :

  — Si ces deux suites tendent vers le même infini alors la solution diverge en 1 et n'est donc pas physiquement admissible

  — Si ces deux suites tendent vers des infinis différent avec la solution diverge en -1 et n'est donc pas physiquement admissible non plus

Finalement les seules solutions physiquement admissibles sont bien les multiples réels des polynômes de Legendre.

Références

[1] F. Berthelin. *Équations différentielles*. Cassini, 2021.

[2] E.E. Kummer. Uber die convergenz und divergenz der unendlichen reihen. *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, 1835(13) :171–184, 1835.