

Exercice 2 Eml 2017

On note $E = \mathbf{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E .

Pour tout polynôme P de E , on note indifféremment P ou $P(X)$.

Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3$, la dérivée P' du polynôme $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ est le polynôme $P' = \beta + 2\gamma X$ et la dérivée seconde P'' de P est le polynôme $P'' = 2\gamma$.

On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(P) = P - XP', \quad b(P) = P - P', \quad c(P) = 2XP - (X^2 - 1)P'$$

Par exemple, $a(X^2) = X^2 - X(2X) = -X^2$.

Enfin, on note $f = b \circ a - a \circ b$.

Partie I : Étude de a

1. Montrer que a est un endomorphisme de E .
2. (a) Montrer que la matrice de A de a dans la base \mathcal{B} de E est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
(b) Déterminer le rang de la matrice A .
3. L'endomorphisme a est-il bijectif ? Déterminer $\text{Ker}(a)$ et $\text{Im}(a)$.

On admet, pour la suite de l'exercice, que b et c sont des endomorphismes de E .

On note B et C les matrices, dans la base \mathcal{B} de E , de b et c respectivement.

Partie II : Étude de b

4. Montrer que b est bijectif et que, pour tout Q de E , on a : $b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$.
5. (a) Montrer que b admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci.
(b) L'endomorphisme b est-il diagonalisable ?

Partie III : Étude de c

6. Montrer : $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. L'endomorphisme c est-il bijectif ?

Partie IV : Étude de f

8. Montrer que $\forall P \in E, f(P) = P'$.
9. En déduire : $(BA - AB)^3 = 0$.

Exercice 1 Edhec 2020

On note tB la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire. On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f , qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = ({}^tA)M + MA$$

2. (a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.
- (b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. On considère les trois matrices

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$
- (b) Montrer que \mathcal{B} est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$
4. (a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.
- (b) En déduire une base de $\text{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de \mathcal{B}
- (c) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ puis en donner une base.
5. (a) Écrire la matrice F de f dans la base \mathcal{B} . On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1; 0\}$
- (b) En déduire les valeurs propres de f
- (c) On note Id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de $f + Id$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.