Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$
Version préliminaire non relus

Valentin KILIAN
Ecole Normale Supérieure de Rennes

10 août 2022

Table des matières

Théorème 0.1. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \ldots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $\{\pm e_1, \ldots, \pm e_d\}$. On définie la chaine de Markov $(S_n)_{n\geq}$ par*

$$S_0 = 0 \ \text{ et } \ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

alors le nombre moyen de passages en 0 est fini si et seulement si $d \geq 3$, autrement dit

$$\Sigma := \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{(S_n=0)}\right) < +\infty \iff d \geq 3$$

Démonstration.
Etape 1 : On a par théorème de Fubini-Tonnelli dans $\overline{\mathbb{R}_+}$:

$$\Sigma = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{(S_n=0)}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(S_n = 0\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(S_{2n} = 0\right)$$

En effet pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}\left(S_{2n+1} = 0\right) = 0$ car on ne peut pas revenir à 0 en un nombre impaire d'étape, il faut se rapprocher autant de fois que l'on s'est éloigné de l'origine.

On considère pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \varphi_{S_n}(2\pi x) \end{array} \right.$$

Or, pour $x \in \mathbb{R}^d$, par théorème de transfert,

$$f_n(x) = E\left(e^{2i\pi < S_n, x>}\right) = \sum_{k\in Z^d \cap \bar{B}(0,n)} \mathbb{P}\left(S_n = k\right) e^{2i\pi <k,x>}$$

Puis, comme $\mathbb{Z}^d \cap \bar{B}(0,n)$ est fini, par linéarité de l'intégrale

$$\int_{[0,1]^d} f_n(t)dt = \sum_{k\in Z^d \cap \bar{B}(0,n)} \mathbb{P}\left(S_n = k\right) \underbrace{\int_{[0,1]^d} e^{2i\pi\langle k,x\rangle} dx}_{=\delta_0(k)} = \mathbb{P}\left(S_n = 0\right)$$

De plus, par indépendance et identique distribution des X_k, on a

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(2\pi x) = \left(\varphi_{X_1}(2\pi x)\right)^n$$

On considère maintenant

$$\left|\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} \\ \qquad x \longmapsto \varphi_{X_1}(2\pi x) \end{array}\right.$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}^d$, on a, toujours par théorème de transfert,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{2d}\left(e^{2i\pi x_j} + e^{-2\,\mathrm{ii}\pi\, x_j}\right) = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} \cos\left(2\pi x_j\right)$$

En particulier f est à valeurs dans $[-1,1]$ et $f_{2n} = (f^n)^2$ à valeurs positives. Ainsi par Fubini-Tonelli

$$\Sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(S_{2n}=0\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{[0,1]^d} f_{2n}(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{[0,1]^d} (f(t))^{2n}dt = \int_{[0,1]^d}\sum_{n=0}^{+\infty}(f(t))^{2n}dt$$

Puis comme $f^2 \neq 1$ presque partout,

$$\Sigma = \int_{[0,1]^d} \frac{1}{1-(f(t))^2}dt$$

Etape 2 : Ainsi on est ramené à l'étude de l'intégralité de $t \longmapsto \frac{1}{1-(f(t))^2}$ sur $[0,1]^d$. Par périodicité de f il suffit d'étudier l'intégrabilité en $t=0$.

Remarquons que $f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\left(1-2\pi^2 x_j^2 + o\left(x_j^2\right)\right) = 1 - \frac{2\pi^2}{d}\|x\|_2^2 + o\left(\|x\|_2^2\right)$, d'où

$$(f(x))^2 \underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{2\pi^2}{d}\|x\|_2^2 + o\left(\|x\|_2^2\right)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{4\pi^2}{d}\|x\|_2^2 + o\left(\|x\|_2^2\right)$$

Ainsi

$$1-(f(x))^2 \underset{x\to 0}{=} \frac{4\pi^2}{d}\|x\|_2^2 + o\left(\|x\|_2^2\right)$$

puis

$$1-(f(x))^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{4\pi^2}{d}\|x\|_2^2.$$

Ainsi $\frac{1}{1-f^2}$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $\frac{1}{\|x\|_2^2}$ l'est.

Pour $r>0$ notons $V_d(r) = \lambda_d(B_d(r))$ le volume de la boule unité en dimension d. On rappel que par changement de variable on a $V_d(r) = r^d V_d(1)$. Soit $\epsilon > 0$, notons $E = B_d(1)\setminus B_d(\epsilon)$. Enfin notons $g: t \longmapsto \frac{1}{t^2}$

$$\int_E g(\|x\|)dx = \int_E \left(1 - \int_{\|x\|}^{1} g'(t)dt\right)dx$$

$$= (1-\epsilon^d)V_d(1) - \int_E\int_{\|x\|}^{1} g'(t).\mathbb{1}_{t\geq \|x\|}.dx.dt$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} (1-\epsilon^d)V_d(1) - \int_{\|x\|}^{1} g'(t)\left(\int_E \mathbb{1}_{t\geq\|x\|}dx\right)dt$$

$$= (1-\epsilon^d)V_d(1) - \int_{\|x\|}^{1} g'(t)\left(V_d(t) - V_d(\epsilon)\right)dt$$

$$= (1-\epsilon^d)V_d(1) - V_d(1)\int_{\|x\|}^{1} g'(t)\left(t^d - \epsilon^d\right)dt$$

$$\underset{\text{IPP}}{=} (1-\epsilon^d)V_d(1) - V_d(1)\left[g(t)(t^d-\epsilon^d)\right]_\epsilon^1 + V_d(1)\int_{\|x\|}^1 g(t)d.t^{d-1}dt$$

$$= d.V_d(1)\int_{\|x\|}^1 \frac{1}{t^{3-d}}dt$$

En faisant $\epsilon \longrightarrow 0$ on constate alors que $x \in \mathbb{R}^d \longmapsto \frac{1}{\|x\|^2}$ est intégrable en 0 si et seulement si $d \geq 3$. Par conséquent $\frac{1}{1-f^2}$ est intégrable sur $[0,1]^d$ si et seulement si $d \geq 3$, ce qui montre bien

$$\Sigma < +\infty \Longleftrightarrow d \geq 3$$

■

Corollaire 0.2. *Si $d \geq 3$ alors presque surement la marche aléatoire part à l'infini ie*

$$\mathbb{P}\left(\|S_n\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\right) = 1$$

Démonstration. Comme $d \geq 3$, on a, d'après le théorème précúdent, $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) < +\infty$. Donc, d'après le lemme de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}\geq n}(S_m = 0)\right) = P\left(\limsup_{n\to+\infty}(S_n = 0)\right) = 0$$

Autrement dit l'état 0 est un état transcient. Or la marche aléatoire est irréductible, donc tous les états sont transcients :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}m\geq n}\bigcup(S_m = k)\right) = 0$$

Ainsi, pour tout $q \in N^*$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}m\geq n}(\|S_m\|_1 < q)\right) = \sum_{k\in B(0,A)\cap Z^d}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}m\geq n}(S_n = k)\right) = 0$$

D'où

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}\geq n}(\|S_m\|_1 \geq q)\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}\geq\geq n}(\|S_m\|_1 < q)\right) = 1 - 0 = 1$$

Ce qui montre bien, par intersection dénombrable d'événements presque sûrs, que

$$\mathbb{P}\left(\|S_n\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{q\in Q_+}\bigcup_{n\in\mathbb{N}m\geq n}(\|S_m\|_1 \geq q)\right) = 1$$

■

Corollaire 0.3. *Si $d \leq 2$ alors presque sûrement la marche passe une infinité de fois par 0, ie*

$$\mathbb{P}(\sup(n\in\mathbb{N}, S_n = 0) = +\infty) = 1$$

Démonstration. On note $T = \sup(n\in\mathbb{N}, S_n = 0)$, alors on a $\mathbb{P}(T < +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(T = n)$. Or, pour $n \in \mathbb{N}$, par indépendance

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}\left((S_n = 0)\cap\bigcap_{m>n}\left(\sum_{j=n+1}^m X_j \neq 0\right)\right) = \mathbb{P}(S_n = 0)\,\underbrace{\mathbb{P}\left(\left(\sum_{j=n+1}^m X_j \neq 0\right)\right)}_{=\mathbb{P}\left(\prod_{m>0}\left(\sum_{j=1}^m X_j\neq 0\right)\right)}$$

Donc

$$\mathbb{P}(T<+\infty)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{m>0}\left(\sum_{j=1}^{m}X_j\neq 0\right)\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(S_n=0\right)=\mathbb{P}(T=0)\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{1}_{(S_n-0)}\right)$$

Or, comme $d\leq 2, \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{1}_{(S_n-0)}\right)=+\infty$, donc comme l'égalité précédente a lieu dans $[0,1]$, on a $\mathbb{P}(T=0)=0$ puis $\mathbb{P}(T<+\infty)=0$. Par consíquent $\mathbb{P}(T=+\infty)=1$. ∎