

# Kit de survie pour la réduction des matrices carrées

Valentin KILIAN (IPESUP)

## 1 Changement de base

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ .

**Définition 1.1.** Soient  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  deux bases de  $E$ . On appelle matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  et on note  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  la matrice carrée d'ordre  $n$  dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{B}'$  exprimées dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Proposition 1.2.** Quand  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont deux bases de  $E$  alors  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  est inversible et  $(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ .

**Proposition 1.3.** Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de l'espace vectoriel  $E$  et  $x \in E$ . Soit  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$  et  $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$  matrices colonnes des coordonnées du vecteur  $x$  dans  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ . On a alors :  $X = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot X'$  et  $X' = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \cdot X = (P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} \cdot X$ .

**Proposition 1.4.** (Changement de base pour un endomorphisme) Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Soient  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  et  $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$  et  $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ . On a alors :  $A = P \cdot A' \cdot P^{-1}$  et  $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$ .

**Définition 1.5.** Deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sont dites semblables s'il existe une matrice inversible  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que :  $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$ .

**Proposition 1.6.** Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

## 2 Diagonalisation

### 2.1 Valeurs propres et vecteurs propres

**Définition 2.1.** On dit que  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une valeur propre de la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  s'il existe un vecteur colonne  $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  **non nul** tel que  $A \cdot U = \lambda U$ .

Un tel vecteur  $U$  non nul est appelé vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice  $A$  est appelé le spectre de  $A$  on note  $\text{Sp}(A)$ .

Notation Soit  $\lambda$  un réel, on notera  $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / AX = \lambda \cdot X\}$

**Proposition 2.2.**  $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda \cdot I_n)$  est un sous-espace vectoriel  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

**Définition 2.3.** Si  $\lambda$  est une valeur propre de la matrice  $A$  alors  $E_\lambda$  est appelé espace propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**Proposition 2.4.**  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  si et seulement si  $E_\lambda \neq \{0_E\}$ .

**Remarque**

- $\lambda$  est une valeur propre de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si et seulement si  $A - \lambda \cdot I_n$  n'est pas inversible.
- $f \in \mathcal{L}(E)$  est bijective si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de  $f$ .

## 2.2 Propriétés

**Proposition 2.5.** Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres

**Proposition 2.6.** Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

**Corollaire 2.7.** Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension  $n$  (resp. une matrice carrée d'ordre  $n$ ) possède au plus  $n$  valeurs propres distinctes.

**Proposition 2.8.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que dans une base  $\mathcal{B}$  donnée la matrice de  $f$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & .. & .. & * \\ 0 & \lambda_2 & * & & .. \\ . & 0 & . & . & .. \\ . & . & . & . & * \\ 0 & . & . & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Alors  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont les valeurs propres de  $f$ .

## 2.3 Conditions de diagonalisation

**Définition 2.9.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

- On dit que  $f$  est diagonalisable s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & .. \\ . & 0 & . & . & .. \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

notée  $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  matrice diagonale avec les valeurs  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sur la diagonale.

- Diagonaliser un endomorphisme c'est trouver une telle base.
- Soit  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  une base de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Alors  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a :  $f(u_i) = \lambda_i \cdot u_i$

**Définition 2.10.** Diagonaliser une matrice c'est trouver une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale telles que :  $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

**Proposition 2.11.** Si  $f \in \mathcal{L}(E)$  possède  $n$  valeurs propres distinctes alors  $f$  est diagonalisable.

**Théorème 2.12.** (Théorème spectral) Toute matrice symétrique est diagonalisable.

## 2.4 Polynôme annulateur

**Définition 2.13.** Soit  $P : x \mapsto \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$  un polynôme non nul. On dit que  $P$  est un polynôme annulateur de la matrice  $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$  si  $P(A) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot A^i = 0_k$ .

**Proposition 2.14.** Soit  $P$  un polynôme annulateur d'une matrice  $A$ . Toute valeur propre de  $A$  est racine de  $P$ .

**Remarque :** Par conséquent les valeurs propres possibles d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée sont à rechercher dans les racines d'un polynôme annulateur.