Marches aléatoires, dualité et loi forte des grands nombres

Valentin KILIAN
ENS Rennes × Université Paris Saclay

28 janvier 2023

L'un des résultats les plus importants de toute la théorie des probabilités est sans aucun doute la loi des grands nombres. Le but premier de cette théorie était d'expliquer mathématiquement l'observation de la convergence de la moyenne empirique vers l'espérance. Il existe plusieurs démonstrations de ce résultat, on propose ici une démonstration originale qui repose sur l'étude des marches aléatoires. Cette preuve est extraite du cours sur les graphes aléatoires donné par Nicolas CURIEN à l'institut de mathématiques d'Orsay, elle à aussi fait l'objet d'un cours article par le même auteur [1].

Table des matières

1 Marches aléatoires unidimensionnelles

Définition 1.1. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d de loi μ que l'on voit comme les incréments du processus discret $(S_n : n \geq 0)$ défini par :*

$$S_0 = 0 \text{ et } \; S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

Le processus (S) est appelé marche aléatoire *de distribution de pas μ ou simplement μ-*marche aléatoire.

2 Lemme de dualité

Proposition 2.1. *Si (S) est une marche aléatoire alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$(S_0, S_1, \dots, S_n) \overset{d}{=} (S_n - S_n, S_n - S_{n-1}, \dots, S_n - S_0)$$

Démonstration. Les incréments de la marche $(S_n - S_n, S_n - S_{n-1}, ..., S_n - S_0)$ sont $(X_n, X_{n-1}, ...X_1)$ vecteur qui, par identique distribution et indépendance des X_i, a la même loi que $(X_1, X_2, ..., X_n)$. ■

Application Pour $A \subset \mathbb{R}$ on notera $T_A(S) = \inf\{i \geq 0 : S_i \in A\}$ le temps de première entrée dans A. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le processus considéré on ne précise pas la dépendance en S.

Soit $n \in \mathbb{N}$, en appliquant le lemme de dualité on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{\mathbb{R}_{<0}} > n) &= \mathbb{P}(S_0 = 0, S_1 \geq 0, \dots, S_n \geq 0) \\ &= \mathbb{P}(S_n - S_n = 0, S_n - S_{n-1} \geq 0, \dots, S_n - S_0 \geq 0)\end{aligned}$$

$$= \mathbb{P}(S_n \geq S_{n-1}, \dots S_n \geq S_0)$$
$$= \mathbb{P}(n \text{ est un temps de record ascendant large})$$

Où on dit que n est un temps de record ascendant large si $S_n = max\{S_i : i \leq n\}$
En sommant cette dernière égalité pour $n \geq 0$ on obtient :

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(T_{\mathbb{R}_{<0}} > n) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(n \text{ est un temps de record ascendant large})$$
$$\mathbb{E}[T_{\mathbb{R}_{<0}}] = \mathbb{E}[\sharp \text{ record ascendant large}]$$

3 Loi forte des grands nombres

Théorème 3.1. *Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}$ admettant moment d'ordre 1. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d de même loi que X. Soit $(S_n)_n$ défini par $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Alors*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[X]$$

Lemme 3.2. *Soit Y une variable aléatoire réelle admettant moment d'ordre 1 et telle que $\mathbb{E}[Y] < 0$. Soit $(Y_i)_{i\geq 0}$ une suite de v.a. i.i.d. selon Y alors $\sup\{Y_1 + \cdots + Y_n : n \geq 1\} < \infty$ p.s.*

Démonstration du théorème. Soit $\epsilon > 0$. On considère la suite de variables aléatoires

$$(S_n - (\mathbb{E}[X] + \epsilon)n)_{n\geq 0}$$

On a $\mathbb{E}[X - (\mathbb{E}[X] + \epsilon] = -\epsilon < 0$. Donc par le lemme :

$$\sup_{n\geq 0} \{S_n - (\mathbb{E}[X] + \epsilon)n\} < \infty \text{ p.s.}$$

Ainsi

$$\forall \epsilon > 0,\ \epsilon \in \mathbb{Q} \quad \overline{lim}_n \frac{S_n}{n} \leq \mathbb{E}[X] + \epsilon \text{ p.s.}$$

En remplaçant X par $-X$ dans les calculs précédents on obtient le résultat symétrique

$$\forall \epsilon > 0 \quad \underline{lim}_n \frac{S_n}{n} \geq \mathbb{E}[X] - \epsilon \text{ p.s.}$$

Ainsi $\forall \epsilon > 0,\ \epsilon \in \mathbb{Q}$ on a

$$\mathbb{E}[X] - \epsilon \leq \underline{lim}_n \frac{S_n}{n} \leq \overline{lim}_n \frac{S_n}{n} \leq \mathbb{E}[X] + \epsilon \text{ p.s.}$$

Et puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable alors presque surement $\forall \epsilon > 0,\ \epsilon \in \mathbb{Q}$ on a

$$\mathbb{E}[X] - \epsilon \leq \underline{lim}_n \frac{S_n}{n} \leq \overline{lim}_n \frac{S_n}{n} \leq \mathbb{E}[X] + \epsilon$$

La loi des grands nombres s'en déduit immédiatement. ■

Démonstration du lemme. Supposons $\mathbb{E}[Y] < 0$.
Alors on dispose de $C > 0$ tel que

$$\mathbb{E}\left[Y \mathbb{1}_{Y>-C}\right] < 0$$

En effet $Y\mathbb{1}_{Y>-C}$ converge simplement vers Y et est majorée en valeur absolue par $|Y|$ qui est intégrable par hypothèse donc par convergence dominée

$$\mathbb{E}\left[Y \mathbb{1}_{Y>-C}\right] \underset{C\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[Y] < 0.$$

Construisons le processus $Z_n = Y_1 \mathbb{1}_{Y_1 > -C} + \cdots + Y_n \mathbb{1}_{Y_n > -C}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $Y_1 + \cdots + Y_n < Z_n$

On veut donc montrer que (Z) est majoré. C'est en particulier le cas si la marche aléatoire (Z) présente un nombre fini de records ascendants larges. C'est donc en particulier le cas si

$$\mathbb{E}[T_{\mathbb{R}_{<0}}(Z)] = \mathbb{E}[\sharp \text{ record ascendant large}] < \infty$$

Reste donc à démontrer que $\mathbb{E}[T_{\mathbb{R}_{<0}}(Z)] < \infty$

Considérons la suite de v.a. $Z_n - n\mathbb{E}\left[Y \mathbb{1}_{Y > -C}\right]$

C'est une martingale pour la filtration canonique associée aux X_i donc d'après le théorème d'arrêt :

$$\mathbb{E}\underbrace{\left[Z_{n \wedge T_{\mathbb{R}_{<0}}(Z)}\right]}_{>-C} = \mathbb{E}[n \wedge T_{\mathbb{R}_{<0}}(Z)] \underbrace{\mathbb{E}[Z_1]}_{<0}$$

En effet la marche (Z) ne peut pas descendre de plus de C à la fois donc lorsqu'elle atteint les négatifs pour la première fois c'est nécessairement en un point supérieur à $-C$.

On en déduit

$$\mathbb{E}[n \wedge T_{\mathbb{R}_{<0}}(Z)] \leq \frac{-C}{\mathbb{E}[Z_1]} := K^2$$

Or par convergence monotone le terme de gauche converge vers $\mathbb{E}[T_{\mathbb{R}_{<0}}(Z)]$ on obtient donc

$$\mathbb{E}[T_{\mathbb{R}_{<0}}(Z)] \leq K^2$$

Ce qui achève la preuve. ■

Références

[1] Nicolas Curien. Yet another proof of the strong law of large numbers, 2021.