Problème 2 Eml 2021

Pour tout (a,b,c) de $\mathbf{R}^3$, on définit la matrice $M(a,b,c)$ par :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

Pour tout (a,b,c) de $\mathbf{R}^3$, on appelle cardinal de l'ensemble $\{a,b,c\}$, noté $Card\big(\{a,b,c\}\big)$, le nombre d'éléments distincts de cet ensemble.
Par exemple, si $a=b=c$, alors $Card\big(\{a,b,c\}\big)=1$; si $a=b$ et $a\neq c$, alors $Card\big(\{a,b,c\}\big)=2$.

Pour tout (a,b,c) de $\mathbf{R}^3$, on s'intéresse dans ce problème au nombre de valeurs propres distinctes de la matrice $M(a,b,c)$ et on souhaite démontrer la propriété $(*)$ suivante :

$$(*) \qquad M(a,b,c) \text{ est nversible } \Leftrightarrow \ ab+bc+ac+abc\neq 0$$

Partie A : Généralités

1. Justifier que, pour tout (a,b,c) de $\mathbf{R}^3$, la matrice $M(a,b,c)$ est diagonalisable.
2. Soit $(a,b,c)\in\mathbf{R}^3$.
   (a) Montrer que la matrice $M(a,b,c)$ ne peut pas admettre une unique valeur propre.
   On pourra par exemple raisonner par l'absurde.
   (b) En déduire que la matrice $M(a,b,c)$ admet soit deux soit trois valeurs propres distinctes.
3. Soient $(a,b,c)\in\mathbf{R}^3$ et $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
   On pose f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $M(a,b,c)$.
   (a) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'=(e_2,e_1,e_3)$.
   (b) En déduire que les matrices $M(a,b,c)$ et $M(b,a,c)$ ont les mêmes valeurs propres.
   (c) De la même façon, montrer que les matrices $M(a,b,c)$ et $M(a,c,b)$ ont les mêmes valeurs propres.

Ces deux derniers résultats permettent de justifier que les valeurs propres de la matrice $M(a,b,c)$ ne dépendent pas de l'ordre des réels du triplet (a,b,c).

Partie B : Cas où $Card\big(\{a,b,c\}\big)=1$

4. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $a=b=c=0$ et on note $J=M(0,0,0)$.
   (a) Calculer J^2. Déterminer alors un polynôme annulateur de J.
   (b) En déduire les valeurs propres de J et préciser une base des sous-espaces propres de J.

(c) Déterminer une matrice P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que : $J = PDP^{-1}$.

5. Soit $a \in \mathbf{R}$.
   (a) Vérifier : $M(a,a,a) = P\,(a\,I_3 + D)\,P^{-1}$.
   (b) En déduire que la matrice $M(a,a,a)$ admet exactement deux valeurs propres distinctes et les déterminer en fonction de a.
   (c) Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a,a,a)$.

Partie C : Cas où *Card*$\big(\{a,b,c\}\big) = 2$

6. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $a = b = 0$ et que $c \in \mathbf{R}^*$. On note $C = M(0,0,c)$.
   (a) Justifier que 0 est une valeur propre de C.
   (b) Soit λ un réel non nul.
      i. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Montrer l'équivalence :
      $$CX = \lambda X \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ z = (\lambda - 2)\,x \\ \big(\lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c\big)\,x = 0 \end{array} \right.$$
      ii. En déduire : λ est une valeur propre de $C \ \Leftrightarrow\ \lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c = 0$.
   (c) Montrer alors que C admet trois valeurs propres distinctes.
7. Soit $(a,c) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a \neq c$.
   (a) Exprimer $M(a,a,c)$ comme une combinaison linéaire de I_3 et de $M(0,0,c-a)$.
   (b) En déduire que la matrice $M(a,a,c)$ admet trois valeurs propres distinctes.
   (c) Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a,a,c)$.
8. Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ tel que $Card\big(\{a,b,c\}\big) = 2$.
   À l'aide de la conclusion de la question 3., montrer que la matrice $M(a,b,c)$ admet trois valeurs propres distinctes et vérifier la propriété $(*)$ dans ce cas.

Exercice 1 Ecricome 2016

Partie A

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}.$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbf{R}$:

$$E = \{M(x,y), \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2\}.$$

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. En déterminer une base et donner sa dimension.
2. Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés. A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et telle que :
$$A = PD_AP^{-1} \qquad \text{où} \qquad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
4. Déterminer P^{-1} (faire figurer le détail des calculs sur la copie).
5. En notant X_1, X_2 et X_3 let trois vecteurs colonnes formant la matrice P, calculer BX_1, BX_2 et BX_3.
En déduire l'existence d'une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que :
$$B = PD_BP^{-1}.$$
6. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que :
$$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}.$$
7. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.
8. Montrer que B^2 est un élément de E. La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

Partie B

On souhaite dans cette partie étudier les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= 3a_n + 4b_n - c_n \\ b_{n+1} &= -4a_n - 5b_n + c_n \\ c_{n+1} &= -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Que vaut X_0 ?
2. Déterminer une matrice C telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on ait :

$$X_{n+1} = CX_n.$$

   Déterminer ensuite deux réels x et y tels que $C = M(x, y)$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = C^n X_0$.
4. A l'aide des résultats de la partie A, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n.