Annale 1

Un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles ont la même mesure.

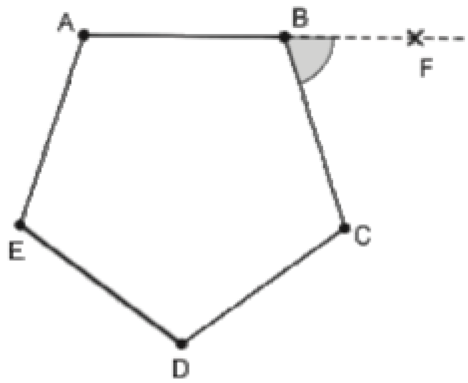
Au cours de cet exercice, on pourra utiliser le résultat admis suivant : « La somme des mesures en degré des angles d'un polygone régulier à n côtés vaut $180n - 360$. »

1. Déterminer, sans justifier, la nature des deux figures tracées lorsqu'on exécute le **programme A et le programme B**

Programme A

Programme B

2. On considère le pentagone régulier ABCDE ci-dessous. F est un point de la droite (AB) n'appartenant pas à la demi-droite [BA).



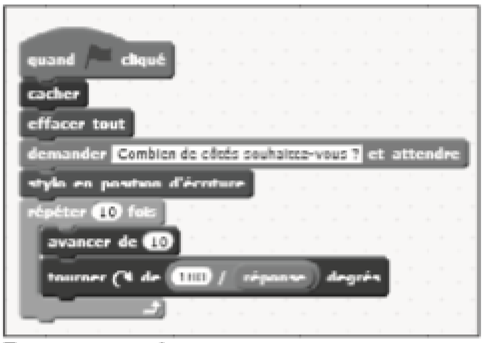
a. Démontrer que $\widehat{FBC} = 72°$.

b. En déduire les modifications à apporter au **programme A** pour que la figure tracée soit un pentagone régulier.

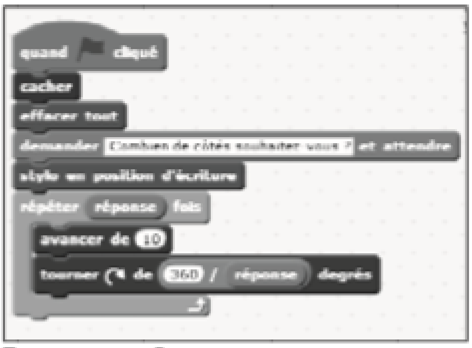
Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout polygone régulier, l'angle $\widehat{FBC}$ est égal à 360 divisé par le nombre de côtés de ce polygone.

3. On souhaite maintenant réaliser un **programme** qui, lorsqu'on l'exécute, permet d'obtenir le tracé d'un polygone régulier dont le nombre de côtés est choisi par l'utilisateur. Voici les programmes élaborés par quatre élèves.

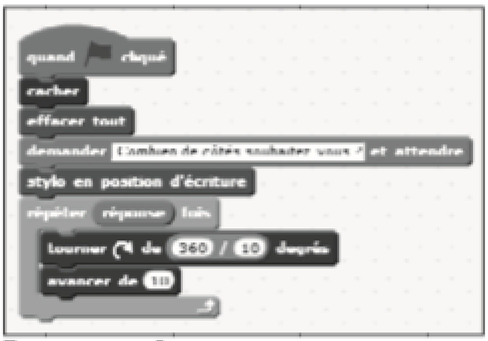
Lequel de ces quatre programmes permet de réaliser le tracé souhaité ? Préciser pourquoi les autres ne conviennent pas.



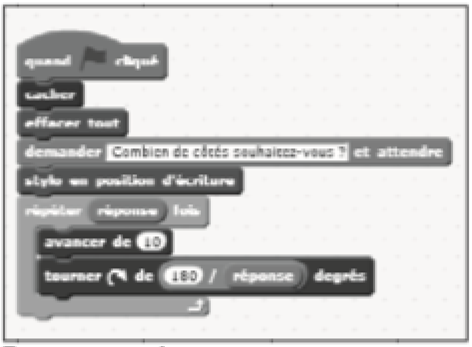
Programme 1



Programme 2



Programme 3



Programme 4

<u>Rappel</u> :
Une fois que l'utilisateur a répondu à la question « Combien de côtés souhaitez-vous ? », la valeur indiquée est stockée dans la variable 

.

4. Le programme Scratch ne permet pas de tracer facilement un cercle. Comment peut-on utiliser le travail mené dans cet exercice pour construire, avec Scratch, une figure ayant l'apparence d'un cercle à l'écran ?

Correction :

Polygone régulier

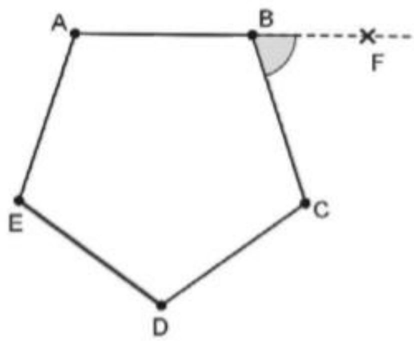
Un **polygone régulier** est un polygone convexe dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles ont la même mesure.

Au cours de cet exercice, on pourra utiliser le résultat admis suivant :
« La somme des mesures en degré des angles d'un polygone régulier à n côtés vaut $(n \times 180° - 360°)$. »

1. Déterminer, sans justifier, la nature des deux figures programme A et le programme B.

Le programme A va donner un <u>carré de côté 100</u> et programme B va donner un <u>triangle équilatéral de côté 100</u>.

2. On considère le pentagone régulier ABCDE ci-dessous. F est un point de la droite (AB) n'appartenant pas à la demi-droite [BA).



2. a. Démontrer que $\widehat{FBC} = 72°$.

La somme des mesures en degré des angles du pentagone régulier ABCDE (à $n = 5$ côtés) vaut

$$n \times 180° - 360° = 5 \times 180° - 360° = 540°$$

De ce fait, les 5 angles du pentagone régulier étant de même mesure :

$$\widehat{ABC} = \frac{540}{5} = 108°$$

Par ailleurs l'angle $\widehat{ABF}$ étant plat on a :

$$\boxed{\widehat{FBC} = 180° - 108° = 72°}$$

2. b. En déduire les modifications à apporter au programme A pour que la figure tracée soit un pentagone régulier.

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout polygone régulier, l'angle $\widehat{FBC}$ est égal à 360 divisé par le nombre de côtés de ce polygone.

3. **On souhaite maintenant réaliser un programme qui, lorsqu'on l'exécute, permet d'obtenir le tracé d'un polygone régulier dont le nombre de côtés est choisi par l'utilisateur. Voici les programmes élaborés par quatre élèves. Lequel de ces quatre programmes permet de réaliser le tracé souhaité ? Préciser pourquoi les autres ne conviennent pas.**

    - C'est le programme 2 qui convient. Le nombre de côtés est stocké dans la variable réponse, la boucle va se répéter autant de fois que le nombre entré. Par ailleurs l'angle est bien égale à 360/réponse.
    - Dans le programme 1, la boucle est répétée 10 fois ce qui conduira au tracé de 10 segments.
    - Dans les programme 3 et 4 c'est l'angle qui est incorrect.

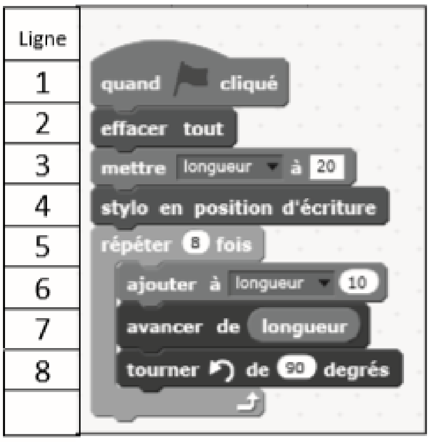
4. **Le programme Scratch ne permet pas de tracer facilement un cercle. Comment peut-on utiliser le travail mené dans cet exercice pour construire, avec Scratch, une figure ayant l'apparence d'un cercle à l'écran ?**
    Il suffit de prendre un nombre important de côtés, de faire tendre le nombre de côtés vers l'infini. Le polygone inscrit va alors se "rapprocher" du cercle qui le contient.

    Remarque : c'est ainsi que le célèbre Archimède (287-212 av. J.C.) parvint à donner des approximations du nombre π. Archimède établit un encadrement du périmètre du cercle à l'aide des périmètres des polygones réguliers inscrit et circonscrit au cercle et possédant 96 côtés.

Annale 2

EXERCICE 1 :

Le programme ci-dessous a été écrit avec le logiciel Scratch pour tracer une figure. Il utilise une variable appelée « longueur ». L'unité de longueur est le pixel.



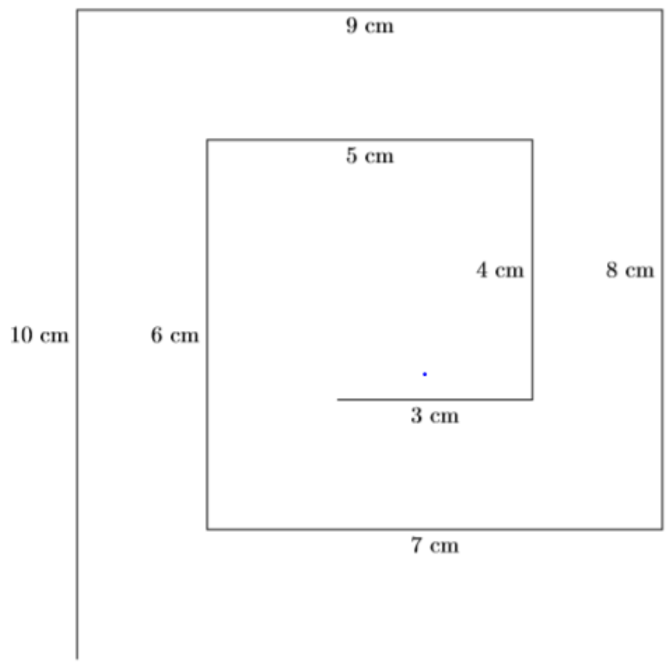
On suppose que le premier tracé se fait horizontalement vers la droite.

1. Construire sur la copie la figure obtenue en lançant le programme, en prenant 1 cm pour 10 pixels.
2. Quelle figure obtient-on si on supprime la ligne 6 du programme ?
3. Que doit-on modifier dans le programme précédent pour construire un octogone régulier ayant des côtés de longueur 40 pixels ?
   On rappelle qu'un polygone régulier est un polygone convexe dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles ont la même mesure.

Correction

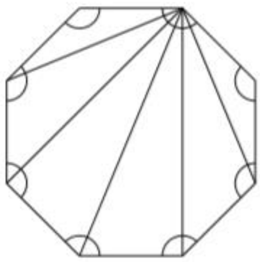
Exercice 1 :

1. Voici la figure :



1. J'utilise ici le vocabulaire de l'auteur du sujet. Mais il commet une erreur : ce ne sont pas des droites, mais des segments de droites, car il est ici question du graphe de fonctions sur un intervalle. En outre, comme le prix de la livraison varie en fonction du nombre de camions nécessaires, les fonctions f et g ne sont pas affines, mais affines par morceaux ; leurs graphes sont constitués de segments de droites.

2. Si on supprime cette ligne, tous les segments construits auraont la même longueur de 20 pixels, soit 2 cm. La figure sera de ce fait un carré de 2 cm de côté (dont chaque côté aura été tracé deux fois par le programme).
3. Pour répondre à cette question, il faut connaître la mesure des angles d'un octogone régulier, par exemple en utilisant la formule qui donne la somme des angles d'un polygone (non croisé) à n côtés , à savoir $(n-2)\times 180°$, et donc, en particulier pour un octogone, $6\times 180° = 1080°$. **Cette formule ne fait pas partie des programmes du collège.** Elle était d'ailleurs donnée dans les sujets d'autres groupements académies. Elle peut se justifier comme suit (dans le cas d'un octogone, pour simplifier) : si on choisit un sommet de l'octogone et qu'on le relie aux cinq sommets qui ne lui sont pas adjacents, on crée six triangles, dont la somme des angles (soit 6 fois 180 degrés) est égale à celle des angles de l'octogone (la figure est faite dans le cas d'un octogone régulier).

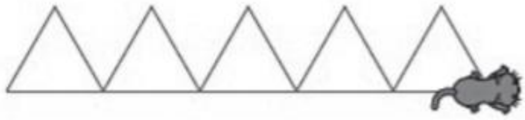


Les huit angles d'un octaèdre régulier étant de même mesure, et leur somme étant de 1080 degrés, cahcun de ces angles mesure donc $1080° : 8 = 135°$.
Par ailleurs (et cela, ça fait bien partie du programme), pour tracer un angle à la manière de Scratch, il faut se tourner non pas de cet angle, mais bien de son supplémentaire. Ici, $180° - 135° = 45°$. Dès lors, les modifications à faire sont :
— Changer la ligne 3 en « mettre longueur à 40 » ;
— Supprimer la ligne 6 ;
— Changer la ligne 8 en « tourner dans le sens inverse des aiguilles d'une montre de 45 degrés ».
ou encore
— Supprimer les lignes 3 et 6 ;
— Changer la ligne 7 en « Avancer de 40 pixels » ;
— Changer la ligne 8 en « tourner dans le sens inverse des aiguilles d'une montre de 45 degrés ».

Annale 3 :

EXERCICE 3

La figure ci-contre a été réalisée à l'aide du logiciel de programmation Scratch.



1. Parmi les programmes proposés ci-dessous, quel est celui qui permet de tracer ce dessin ? Aucune justification n'est demandée.

2. Dans ces programmes, l'angle de rotation est de 120°. Expliquer pourquoi.

Programme A

Programme B

Programme C

Programme D

3. Tracer à main levé les figures obtenues avec chacun des programmes non retenus à la question 1.

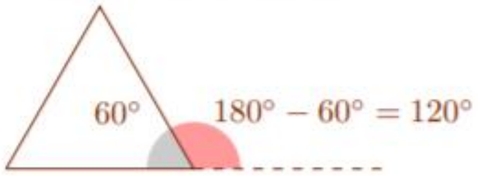
Correction :

Exercice 3.

1. Le programme C permet de tracer la figure souhaitée.

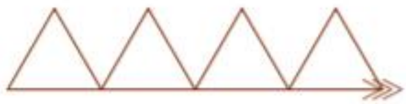
2. Expliquons l'angle.

   Un petit schéma valant mieux qu'un long discours (et puisque nou souhaitons tracer des triangles équilatéraux d'angles 60°) :

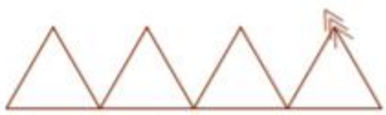


3. Le $\ggg$ représente l'emplacement du lutin à la fin du tracer.

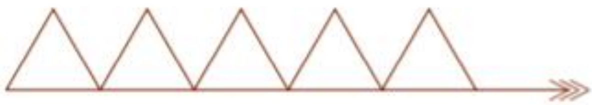
   * Programme A.



   * Programme B.



   * Programme C.



Annale 4 :

EXERCICE 3 :

On dispose des deux programmes de calcul ci-dessous :

Programme A

Programme B

1. Différents nombres sont entrés dans le programme A.

a. Montrer que quand on entre le nombre 5, la réponse obtenue est le nombre 27.

b. Quel nombre est obtenu quand on entre le nombre $\frac{7}{10}$? Justifier la réponse.

2. Quel nombre faut-il entrer dans le programme B pour que le résultat affiché soit égal à 0,69 ?

3. Prouver que quand on entre un nombre impair dans le programme B, le nombre obtenu est toujours un multiple de 6.

4. Existe-t-il des nombres qui permettent d'avoir le même résultat affiché avec les deux programmes ? Si oui, déterminer tous ces nombres.

Correction :

Exercice 3.

1. (a) $5 \times 4 + 7 = 27$.

   En entrant 5 le programme renvoie 27.

   (b) $\frac{7}{10} \times 4 + 7 = 9{,}8$.

   En entrant $\frac{7}{10}$ le programme renvoie 9,8.

2. Déterminons le nombre à entrer en raisonnant par analyse-synthèse.

   * Analyse.
     Supposons qu'il existe un nombre x qui entré dans le programme renvoie 0,69.
     Autrement dit :

     $$x \times 9 - 3 = 0{,}69$$

     ce qui équivaut successivement à

     $$\begin{aligned} 9x - 3 + 3 &= 0{,}69 + 3 \\ 9x &= 3{,}69 \\ \frac{9x}{9} &= \frac{3{,}69}{9} \\ x &= 0{,}41 \end{aligned}$$

     Donc s'il existe un tel nombre x ce ne peut être que 0,41.
   * Synthèse.
     Nous vérifions que, puisque $0{,}41 \times 9 + 3 = 0{,}69$, donc 0,41 convient.

Pour que le programme affiche 0,69 il faut entrer le nombre 0,41.

3. Montrons que si le nombre entré est pair alors le programme renvoie un multiple de 6.

   Soit n un entier.
   Déterminons ce que renvoie le programme si nous entrons $2n+1$ un nombre impair).

$$\begin{aligned}(2n+1)\times 9-3 &= (2n)\times 9+1\times 9-3\\ &= 18n+9-3\\ &= 18n+6\\ &= 6\times 2n+6\times 1\\ &= 6(2n+1)\end{aligned}$$

   Donc

   le programme renvoie un multiple de 6 si le nombre de départ est impair.

4. Déterminons les nombres qui renvoie le même résultat avec les deux programmes en raisonnant par analyse synthèse.

   * Supposons qu'il existe un nombre x pour lequel les programmes renvoient le même résultat. Autrement dit :

$$4x+7=9x-3$$

     Il s'agit d'une équation linéaire du premier degré que nous allons résoudre en isolant l'inconnue en travaillant par équivalences.

$$\begin{aligned}4x+7-9x &= 9x-3-9x\\ -5x+7 &= -3\\ -5x+7-7 &= -3-7\\ -5x &= -10\\ \frac{-5x}{-5} &= \frac{-10}{-5}\\ x &= 2\end{aligned}$$

     Donc s'il y a une solution au problème ce ne peut être que 2.
   * Il est aisé de vérifier que si le nombre choisi est 2 les deux programmes renvoient bien le même nombre 15.

   Il existe un unique nombre pour lequel les deux programmes affichent le même résultat, il s'agit de 2.