Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное   
учреждение высшего образования

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Институт информационных технологий, математики и механики

**Отчет по лабораторной работе**

**«Метод Гаусса-Жордана решения систем  
линейных алгебраических уравнений»**

**Выполнил**:

студент группы 3823Б1ПМ1-1

Загрядсков М.А.

**Проверил**:

преподаватель каф. ВВСП,

Волокитин В.Д.

Нижний Новгород

2024

**Содержание**

[Постановка задачи 3](#_Toc166522324)

[Метод решения 4](#_Toc166522325)

[Руководство пользователя 6](#_Toc166522326)

[Описание программной реализации 7](#_Toc166522327)

[Подтверждение корректности 8](#_Toc166522328)

[Результаты экспериментов 9](#_Toc166522329)

[Заключение 13](#_Toc166522330)

[Приложение 14](#_Toc166522331)

[Источники 15](#_Toc166522332)

# Постановка задачи

Требовалось:

1. Реализовать метод Гаусса-Жордана решения систем линейных алгебраических уравнений. Получить общие решения для систем линейных алгебраических уравнений в форме зависимостей связанных переменных от свободных, либо в форме числового вектора.
2. В процессе реализации использовать следующие средства программирования: наследование, шаблоны, исключения.

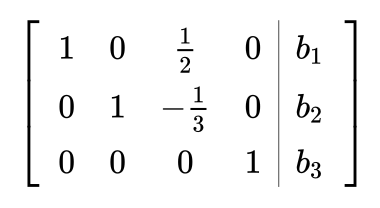
# Метод решения

Метод **Гаусса-Жордана** является модификацией метода Гаусса. Назовём «**элементарными строчечными преобразованиями**» следующие 3 типа преобразований со строками расширенной матрицы системы линейных алгебраических уравнений (ниже СЛАУ):

* замена местами двух строк матрицы;
* умножение каждого элемента строки матрицы на определенное число;
* прибавление к строке матрицы другой строки, умноженной на число.

Доказано, что данные преобразования не меняют множества решений СЛАУ (общего решения), а также что с помощью данных преобразований можно преобразовать матрицу к «**приведенной ступенчатого вида по строкам**», характеризующийся тремя свойствами:

* все ненулевые строки (имеющие по крайней мере один ненулевой элемент) располагаются над всеми нулевыми строками;
* ведущий элемент (первый ненулевой элемент строки при отсчёте слева направо) каждой ненулевой строки располагается строго правее ведущего элемента в строке, расположенной выше данной;
* каждый ведущий элемент ненулевой строки — это единица, и он является единственным ненулевым элементом в своём столбце[[1]](#_Источники).

Рис. 1. Пример приведенной по строкам матрицы ступенчатого вида.

Если такой матрице соответствовала какая-либо расширенная матрица СЛАУ, то приведя матрицу к такому виду легко получить общее решение системы. Пусть каждому столбцу соответствует переменная с номером столбца, тогда «**связанными**» будут переменные, которым соответствуют столбцы с ведущими элементами (столбы с единственным элементом единицей и остальными элементами нулями), а «**свободными**» - оставшиеся. Если решение системы происходит, например, над полем рациональных чисел, тогда свободные переменные могут принимать любые значения из данного поля, а каждому набору свободных переменных будет соответствовать набор зависимых от них связанных переменных. В приведенном примере, – связанные, а – свободная. зависят от следующим образом:

Это и есть общее решение СЛАУ, задаваемой расширенной системой[[2]](#_Источники).

Для вычислений с плавающей точкой алгоритм Гаусса-Жордана обладает численной неустойчивостью в случаях, если происходит деление на малые по модулю числа, то есть числа на главной диагонали по модулю малы. Для большей устойчивости алгоритм модифицирован таким образом, чтобы ведущий элемент выбирался наибольшим по модулю в столбце.

Чтобы избежать ошибок в точности вычислений и сделать вектор невязки нулевым, были реализованы классы так называемой «длинной арифметики»: «длинных целых чисел» и «длинных дробей». Основное отличие таких чисел от стандартных числовых типов данных – динамическое расширение диапазона значений числа без потери абсолютной точности посредством увеличения объема занимаемой им памяти.

# Руководство пользователя

Взаимодействие с программой осуществляется через консоль. Программа позволяет выбрать среди двух различных типов вычислений: при помощи чисел с плавающей точкой или при помощи длинных рациональных дробей. В первом случае, возможен ввод только через десятичную форму числа, во втором – только через неправильную дробь. Также программа позволяет выбрать способ ввода расширенной матрицы системы: через файл или через консоль. В обоих случаях нужно вводить матрицу по строкам целиком, включая свободные коэффициенты.

Например, системе:

соответствует матрица:

Тогда в консоль или в файл записать нужно следующий набор чисел:

# Описание программной реализации

В папке проекта доступны следующие файлы:

1. Заголовочный файл с описанием и реализацией некоторых шаблонных функций классов длинных чисел (biguint, bigint и bigrational) bignum.hpp
2. Файл реализации этих функций bignum.cpp.
3. Файл решения Visual Studio Gauss-Jordan.sln.
4. Файл проекта Visual Studio Gauss-Jordan.vcxproj.
5. Файл описания класса floating\_zero для обобщения сравнений различных типов данных с нулем universal\_zero.hpp.
6. Файл реализации функций этого класса universal\_zero.cpp.
7. Файл main.cpp – код программы, позволяющей взаимодействовать с пользователем через консоль и выводить общее решение на экран.
8. Файл test\_main.cpp – код программы, позволяющий взаимодействовать с пользователем через консоль, и выводить на экран число максимальное по модулю число в векторе невязки.
9. Файл mathvector\_realization.hpp – описание и реализация функций шаблонного класса математического вектора.
10. Файл mathvector\_realization.hpp – описание и реализация функций шаблонного класса математической матрицы.
11. Файл simple\_error.hpp – описание класса простых исключений.
12. Файл simple\_error.сpp – реализация этого класса.
13. Файл с описанием и реализацией функций решения СЛАУ методом Гаусса-Жордана solver.hpp.
14. Файл Отчет\_лабораторная\_МетодГауссаЖордана\_Загрядсков\_Максим\_3823Б1ПМ1-1.docx – этот файл с текстом отчёта.

# Подтверждение корректности

Для подтверждения корректности в программе были проведены тесты на различных матрицах. Вот некоторые из них:

1. Из банка задач на решение СЛАУ были взяты некоторые матрицы, после чего решались при помощи алгоритма. Проверка выходных данных осуществлялась через открытый сайт для решения систем линейных алгебраических уравнений[[3]](#_Источники).
2. Процедурно генерировались матрицы полного ранга с различными элементами, после чего исходная матрица умножалась на вектор решений, из результата вычитался вектор свободных коэффициентов. Ошибкой считалась величина максимального по модулю значения (отклонения) среди полученных значений. Для типа данных с плавающей точкой двойной точности ошибка составляла . Для типа данных с реализованной длинной арифметикой при любых входных данных ошибка .

Таким образом, была подтверждена корректность программы.

# Результаты экспериментов

Чтобы понять, какова возможная максимальная ошибка для типа данных double, а также как отличается скорость выполнения метода Гаусса-Жордана для типов данных double и типа данных с длинной арифметикой (дальше bigrational), был проведен ряд экспериментов.

Пусть – число, являющееся модулем разности абсолютных значений максимального и минимального элементов расширенной матрицы системы. Поскольку зачастую это число будет слишком большим, будет рассматриваться количество разрядов этого числа. Поскольку от значения этого числа будет меняться как время работы программы при использовании типа данных bigrational, так и ошибка при использовании типа данных double, будут рассматриваться зависимости именно от значений этого числа. Всего в каждом эксперименте было по 10 итераций.

**Эксперимент 1**. В ходе генерации в исходной матрице системы:

каждый элемент первого столбца, соответствующего переменной , умножался сам на себя каждую итерацию. После 10 итераций, величина являлась числом, состоящим из 1197 цифр.

**Эксперимент 2:** в ходе генерации в исходной матрице системы каждый элемент первой строки, соответствующий первому уравнению системы, умножался сам на себя каждую итерацию.

**Эксперимент 3:** в ходе генерации в исходной матрице системы каждый элемент главной диагонали умножался сам на себя каждую итерацию.

Ниже приведены графики зависимости времени работы программы для bigrational и ошибки для double в зависимости от величины значения M:

Рис. 2. Диаграмма зависимости времени исполнения программы, использующей длинную арифметику, от количества разрядов в абсолютной величине разности максимального и минимального по модулю элементов матрицы системы линейных алгебраических уравнений. Линии синего, оранжевого и красного цветов соответствуют описанным выше экспериментам 1, 2, и 3 соответственно.

Рис. 3. Диаграмма зависимости погрешности результата, полученного программой, использующей тип данных с плавающей точкой двойной точности, от количества разрядов в абсолютной величине разности максимального и минимального по модулю элементов матрицы системы линейных алгебраических уравнений.

Рис. 4. Диаграмма зависимости погрешности результата, полученного программой, использующей тип данных с плавающей точкой двойной точности, от количества разрядов в абсолютной величине разности максимального и минимального по модулю элементов матрицы системы линейных алгебраических уравнений. Маркеры синего и красного цветов соответствуют описанным выше экспериментам 2, и 3 соответственно.

Таким образом, по данным диаграммам можно сделать следующие выводы:

* Поскольку метод Гаусса-Жордана работает в среднем за а умножение длинных чисел , где ранг матрицы, а – количество разрядов числа в системе счисления с основанием , то при изменении время должно расти одинаково, причем квадратично, для длинной арифметики. Но по диаграммам можно сделать вывод, что для различных матриц с сопоставимым значением время выполнения программы различается довольно сильно. К тому же, хоть деление и асимптотически растет медленнее умножения, тем не менее, при достаточно небольших значениях деление выполняется гораздо дольше умножения. В то же время, операции с плавающей точкой выполняются всегда практически моментально.
* Несмотря на то, что в большинстве случаев погрешность для double не превышала , в ходе первого эксперимента была достигнута погрешность около 3. Во всех трех экспериментах при достаточно больших числах в матрице ответ не мог быть получен в числах с плавающей точкой, что вырождалось в ответ . Не стоит также забывать, что хоть при умножении матрицы на полученный ответ погрешность была по модулю невелика, для каждого числа в этом ответе и в матрице тип данных с плавающей точкой мог опустить тысячи значащих цифр, которые всегда полностью учитываются в процессе вычислений в типе данных bigrational.

Также был проведен еще один эксперимент, в ходе которого элементы главной диагонали каждую итерацию уменьшались в раз. В ходе эксперимента погрешность для чисел с плавающей точкой двойной точности не превышала величины . Никаких других данных получено не было, поэтому этот эксперимент в диаграммах не приводится. В течение всех экспериментов время выполнения программы для чисел double не превышало

16 микросекунд. Ошибка для типа данных bigrational всегда равнялась нулю.

# Заключение

По результатам тестирования и проведенных экспериментов были сделаны следующие выводы:

* По результатам проверки корректности, реализация метода Гаусса-Жордана работает корректно.
* Длина вектора невязки для вычислений с плавающей точкой достаточно мала, чтобы использовать результирующие значения метода Гаусса-Жордана в дальнейших задачах, не требующих нулевой погрешности.
* По результатам тестирования вычисления с длинной арифметикой работают корректно, хотя в пределе от величины по модулю чисел скорость таких вычислений в раз больше, чем для чисел с плавающей точкой, и даже для маленьких размеров матриц вычисления могут занимать около часа.

Таким образом, реализацию метода Гаусса-Жордана можно использовать как для получения приближенного, так и для получения точного ответа для чисел, числитель и знаменатель которых достаточно по модулю малы (числа содержат менее 500 знаков), или матрица системы достаточно мала (). В случаях, когда числа по модулю не превосходят и не меньше стоит использовать модификацию алгоритма с числами с плавающей точкой.

# Приложение

Код алгоритма метода Гаусса-Жордана:

template <class T>

void trans\_gauss\_jordan(mathmatrix<T>& matrix) {

mathvector<T> res;

size\_t max\_ind, col, i, row;

for (col = 0, row = 0; row < matrix.vecsize() - 1 && col < matrix.size(); ++col, ++row) {

max\_ind = max\_index(matrix, row, col);

if (matrix[max\_ind][row] == ZERO) {

--col;

continue;

}

std::swap(matrix[max\_ind], matrix[col]);

for (i = 0; i < matrix.size(); ++i) {

if (i == col || matrix[i][row] == ZERO) continue;

matrix[i] -= matrix[col] \* (matrix[i][row] / matrix[col][row]);

}

matrix[col] /= T(matrix[col][row]);

}

# Источники

1. Ступенчатый вид матрицы <https://ru.wikipedia.org/wiki/Ступенчатый_вид_матрицы>
2. Метод Гаусса-Жордана <https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Гаусса_—_Жордана>
3. Сайт для решения систем линейных алгебраических уравенний <https://matrixcalc.org/ru/slu.html>