

Monografía sobre combinaciones, permutaciones y conteo

Monograph on combinations, permutations and counting

Valentina Varela Alzate

Risaralda, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia

valentina.varela@utp.edu.co

Resumen— Las técnicas de conteo son una serie de métodos de probabilidad para contar el número posible de arreglos dentro de un conjunto o varios conjuntos de objetos. Estas se usan cuando realizar las cuentas de forma manual se convierte en algo complicado debido a la gran cantidad de objetos y/o variables.

Palabras clave— técnicas de conteo, combinaciones, permutaciones, conjuntos.

Abstract— Counting techniques are a series of probability methods for counting the possible number of arrangements within a set or several sets of objects. These are used when making the accounts manually becomes complicated due to the large number of objects and / or variables.

Key Word —counting techniques, combinations, permutations, sets

I. INTRODUCCIÓN

Los métodos de conteo son estrategias utilizadas para determinar el número de posibilidades diferentes que existen al realizar un experimento y son utilizados en Probabilidad y Estadística para determinar el número total de resultados.

El conteo es una de las habilidades numéricas más tempranas en el desarrollo infantil y en nuestra sociedad, principalmente en la familia, ya que en forma involuntaria se involucra al niño desde muy temprana edad a este sistema.

Según Piaget “existe una estrecha relación entre la construcción del concepto numérico y las experiencias de conteo”.

Para Ed. Labinowicz, “El conteo es un proceso que el niño va construyendo gradualmente en estrecha relación con el lenguajes cultural de su entorno”.

Se les denomina técnicas de conteo a: las combinaciones, permutaciones y diagrama de árbol, cabe destacar que éstas nos proporcionan la información de todas las maneras posibles en que ocurre un evento determinado.

Los métodos de conteo son una de las herramientas útiles en cálculo de probabilidades, ya que con un buen manejo de estos no es necesario enlistar por completo los elementos del espacio muestral de un experimento aleatorio específico, sino que se puede calcular la cantidad total de elementos y el número de éstos que cumplen con la condición específica que se quiere estudiar.

II. CONTENIDO

Las técnicas de conteo son aquellas que son usadas para enumerar eventos difíciles de cuantificar. La enumeración de puntos muestrales en un espacio muestral, en ocasiones es difícil y laboriosa por la cantidad de puntos a contar o enumerar, propiciando que se puedan cometer errores al emprender esa tarea.

En estos casos se recurre al análisis combinatorio, que es una manera más sofisticada de contar. Principio fundamental del conteo. Si un evento puede suceder o realizarse de n maneras diferentes y si, continuando el procedimiento un segundo ejemplo puede realizarse de n_1 maneras diferentes y así sucesivamente, entonces el número de maneras en que los eventos pueden realizarse en el orden indicado es el producto de $n_1 * n_2 * n_3 \dots$

Estas técnicas son varias, pero las más importantes se dividen en dos principios básicos, que son el multiplicativo y el aditivo; las permutaciones y las combinaciones.

A. Principio multiplicativo.

El principio multiplicativo, junto con el aditivo, son básicos para entender el funcionamiento de las técnicas de conteo. En el caso del multiplicativo, consiste en lo siguiente:

Imaginemos una actividad que conlleva un número concreto de pasos (el total lo marcamos como " r "), donde el primer paso puede hacerse de N_1 formas, el segundo paso de N_2 , y el paso " r " de N_r formas. En este caso, la actividad podría realizarse del número de formas resultante de esta operación: $N_1 \times N_2 \times \dots \times N_r$ formas.

Es por ello que este principio se llama multiplicativo, e implica que todos y cada uno de los pasos que se necesitan para llevar a cabo la actividad deben de realizarse uno tras otro.

Si un evento E puede ocurrir de m formas, e independiente de este evento un evento F puede ocurrir de n formas, entonces los eventos juntos pueden ocurrir un total de $m \times n$ formas.

- EJEMPLO: una persona quiere construir un colegio. Para ello, considera que la base del edificio puede construirse de dos maneras distintas, cemento o concreto. En cuanto a las paredes, pueden ser de adobe, cemento o ladrillo.

En cuanto al techo, este puede construirse de cemento o lámina galvanizada. Finalmente, la pintura final sólo puede realizarse de una forma. La pregunta que se plantea es la siguiente: ¿Cuántas formas tiene de construir el colegio?

En primer lugar, consideramos el número de pasos, que serían la base, las paredes, el tejado y la pintura. En total, 4 pasos, por lo que $r=4$.

Lo siguiente sería enumerar las N :

- ✓ N_1 = formas de construir la base = 2
- ✓ N_2 = formas de construir las paredes = 3
- ✓ N_3 = formas de hacer el tejado = 2
- ✓ N_4 = formas de realizar pintura = 1

Por lo tanto, el número de formas posibles se calcularía mediante la fórmula antes descrita:

$$N_1 \times N_2 \times N_3 \times N_4 = 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12 \text{ formas de realizar el colegio.}$$

Si un experimento aleatorio consta de r pasos distintos donde el primero tiene n_1 formas de realizarse, el segundo tiene n_2 formas, el tercero tiene n_3 formas diferentes,... y el r -ésimo paso tiene n_r formas diferentes de realizarse, la cantidad total de posibles maneras de completar el experimento se calcula multiplicando.



B. Principio aditivo.

Este principio es muy simple, y consiste en que, en el caso de existir varias alternativas de realizar una misma actividad, las formas posibles consisten en la suma de las distintas formas posibles de realizar todas las alternativas.

Dicho de otra forma, si queremos realizar una actividad con tres alternativas, donde la primera alternativa puede realizarse de M formas, la segunda de N formas y la última de W formas, la actividad puede realizarse de: $M + N + \dots + W$ formas.

Una primera tarea puede realizarse de m formas y una segunda tarea puede realizarse de n formas, y no es posible realizar ambas tareas de manera simultánea, entonces para realizar cualquiera de ellas pueden utilizarse cualquiera de $m + n$ formas.

- EJEMPLO: una persona quiere comprar una raqueta de tenis. Para ello, tiene tres marcas a elegir: Wilson, Babolat o Head.

Cuando va a la tienda ve que la raqueta Wilson puede comprarse con el mango de dos tamaños distintos, L2 o L3 en cuatro modelos distintos y puede ser encordada o sin encordar.

La raqueta Babolat, en cambio, tiene tres mangos (L1, L2 y L3), hay dos modelos diferentes y puede también ser encordada o sin encordar.

La raqueta Head, por su parte, sólo está con un mango, el L2, en dos modelos diferentes y sólo sin encordar. La pregunta es: ¿Cuántas formas tiene esta persona de comprar su raqueta?

- ✓ $M =$ Número de formas de seleccionar una raqueta Wilson
- ✓ $N =$ Número de formas de seleccionar una raqueta Babolat
- ✓ $W =$ Número de formas de seleccionar una raqueta Head

Realizamos el principio multiplicador:

- ✓ $M = 2 \times 4 \times 2 = 16$ formas
- ✓ $N = 3 \times 2 \times 2 = 12$ formas
- ✓ $W = 1 \times 2 \times 1 = 2$ formas

$M + N + W = 16 + 12 + 2 = 30$ formas de elegir una raqueta.

Para saber en qué momento hay que utilizar el principio multiplicativo y el aditivo, únicamente hay que fijarse en si la actividad tiene una serie de pasos para realizarse, y si existen varias alternativas, el aditivo

$$p(\text{diamante}) = \frac{\text{número de cartas que tienen diamantes}}{\text{número de cartas totales}} = \frac{13}{52}$$

$$p(\text{corazón}) = \frac{\text{número de cartas que tienen corazones}}{\text{número de cartas totales}} = \frac{13}{52}$$

$$p(\text{diamante o corazón}) = p(\text{diamante}) + p(\text{corazón}) = \frac{13}{52} + \frac{13}{52}$$

C. Permutaciones

Una permutación, en cambio, sería un arreglo de elementos en los cuales sí nos interesa la posición que ocupa cada uno de ellos.

Se le llama permutación a cualquier ordenamiento de un conjunto de n objetos en un orden dato. Un ordenamiento de r de éstos objetos se denomina permutación r o permutación de n objetos tomados r a la vez.

La siguiente fórmula aplica...

Si existe n elementos diferentes disponibles. (No aplica si algunos elementos son iguales)

Se selecciona r de los n elementos

Los reordenamientos de los mismos elementos se consideran secuencias diferentes

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Las permutaciones de un número n de objetos de un conjunto es cualquiera de las diferentes maneras de ubicar esos objetos en un orden definido. Se utiliza el símbolo ${}_nP_n$ o $P(n)$ cuando se toman las permutaciones de igual número n de elementos u objetos del conjunto. Si se desean ordenar n objetos diferentes en una línea, el primero objeto se puede escoger de n maneras, el segundo de $n-1$; y el tercero de $n-2$ y así, sucesivamente, hasta 1. ${}_nP_n = P(n) = (n)(n-1)(n-2)\dots(1) = n!$

- EJEMPLO: una clase con 35 alumnos, y con las siguientes situaciones:
- ✓ 1. El profesor quiere que tres de sus alumnos le ayuden a mantener la clase limpia o entregar materiales a los otros alumnos cuando lo necesite.
- ✓ 2. El profesor quiere nombrar a los delegados de clase (un presidente, un asistente y un financiero).

La solución sería la siguiente:

1. Imaginemos que por votación se elige a Juan, María y Lucía para limpiar la clase o entregar los materiales. Obviamente, podrían haberse formado otros grupos de tres personas, entre los 35 alumnos posibles. Debemos preguntarnos lo siguiente: ¿es importante el orden o la posición que ocupa cada uno de los alumnos a la hora de seleccionarlos?

Si lo pensamos, vemos que realmente no es importante, ya que el grupo va a encargarse de las dos labores por igual. En este caso, se trata de una combinación, ya que no nos interesa la posición de los elementos.

2. Ahora imaginemos que se eligen a Juan como presidente, a María como asistente y a Lucía como financiera. En este caso, ¿importaría el orden? La respuesta es sí, ya que si cambiamos los elementos, cambia el resultado. Es decir, si en vez de poner a Juan como presidente, le ponemos como asistente, y a María como presidente, el resultado final cambiaría. En este caso se trata de una permutación.

Una vez comprendida la diferencia, vamos a obtener las fórmulas de las permutaciones y de las combinaciones. Sin embargo, antes hay que definir el término “ $n!$ ” ya que se utilizará en las distintas fórmulas.

$n!$ = al producto desde 1 hasta n .

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$$

Utilizándolo con números reales:

$$10! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 10 = 3,628,800$$

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 5 = 120$$

La fórmula de las permutaciones sería la siguiente:

$$nPr = n! / (n-r)!$$

Con ella podremos averiguar los arreglos donde el orden es importante, y donde los n elementos son distintos.

Permutación		Resultado
A $\begin{cases} B \\ C \end{cases}$	C	ABC
	B	ACB
B $\begin{cases} A \\ C \end{cases}$	C	BAC
	A	BCA
C $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$	B	CAB
	A	CBA

D. Combinaciones.

Las combinaciones son los arreglos en donde no nos importa el la posición de los elementos. Revisión de tema.

Cuando se desea conocer el número de permutaciones de un conjunto de objetos, algunos de los cuales son iguales.

La siguiente fórmula aplica cuando...

Existen n elementos disponibles, y algunos de ellos son idénticos a otros

Seleccionamos todos los n elementos (sin reemplazo)

Consideramos que los reordenamientos son secuencias diferentes.

Una combinación es cualquier selección de objetos en la que no importa el orden, a diferencia de una permutación, donde el orden si es importante. Por ejemplo, ABC, ACB y BAC son permutaciones distintas; mientras que, por contener los mismos elementos, se pueden considerar como una misma combinación. Por lo tanto, hay más permutaciones que combinaciones de un número n de objetos, tomados de tamaño r en r . Las combinaciones de n objetos, tomados en r en r , se representa por nCr , $C(n,r)$ o Cn,r y se obtiene mediante las operaciones: $nCr = C(n,r) = Cn,r$ == El número de combinaciones nCr está relacionado con los subconjuntos de un conjunto.

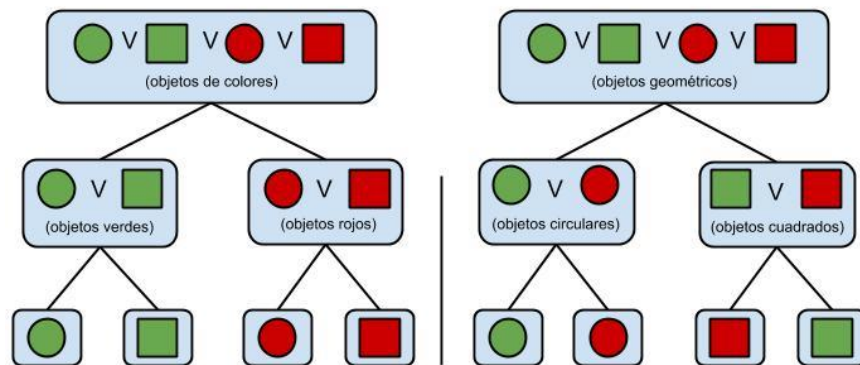
$$nCr = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

- EJEMPLO: Si existen 14 alumnos que quieren ser voluntarios para limpiar el aula, ¿cuántos grupos de limpieza podrán formarse cada grupo ha de ser de 5 personas?

La solución, por tanto, sería la siguiente:

$$n = 14, r = 5$$

$${}^{14}C_5 = 14! / (14 - 5)!5! = 14! / 9!5! = 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9! / 9!5! = 2002 \text{ grupos}$$



III. CONCLUSIONES

La importancia de la probabilidad radica en que, mediante este recurso matemático, es posible ajustar de la manera más exacta posible los imponderables debidos al azar en los más variados campos tanto de la ciencia como de la vida cotidiana. En efecto, La probabilidad es una estrategia mediante la cual se intenta estimar la frecuencia con la que se obtiene un cierto resultado en el marco de una experiencia en la que se conocen todos los resultados posibles. Así, el ejemplo más tradicional consiste en definir cuál es la prevalencia de obtener un número al arrojar un dado. Sobre seis resultados posibles (todas las caras), sólo es posible lograr un número por cada vez que el dado es arrojado. En este caso, la probabilidad puede expresarse como uno en seis, un sexto, la sexta parte o, en términos matemáticos precisos, 0.16 ó 16%

.La Teoría de la probabilidad, en especial en el marco de sistemas más complejos, se aplica en áreas variadas del conocimiento, como las ciencias exactas (estadística, matemática pura y aplicada, física, química, astronomía), las ciencias sociales(sociología, psicología social, economía), la astronomía, la meteorología y, en especial en forma más reciente, la biomedicina. La importancia esencial de la aplicación de los métodos de cálculo de

La probabilidad reside en su capacidad para estimar o predecir eventos.

Cuanto mayor sea la cantidad de datos disponibles para calcular la probabilidad de un acontecimiento, más preciso será el resultado calculado. Dada la complejidad de los sistemas en los que suele aplicarse la teoría de la probabilidad, se requiere de modelos informáticos y estadísticos de gran elaboración, que serían imposibles de no contarse con los modernos recursos tecnológicos relacionados con la computación

La teoría de la probabilidad resulta de gran importancia, ya que intenta ajustar en conceptos matemáticos cual será el devenir de los acontecimientos para calcular, por ejemplo, la producción final de cereales, combustibles fósiles y otros recursos de un área geográfica. Por lo tanto, la probabilidad es una herramienta fundamental en la planificación estratégica de los movimientos sociales, económicos y laborales de toda la comunidad.

WEBGRAFIA

- <https://sites.google.com/site/estadisticalasalle/temas-proprios-de-estadistica/tecnicas-de-conteo>
- <https://es.scribd.com/doc/154870808/Como-Ayudan-Las-Tecnicas-de-Conteo-a-Los-Ingenieros>
- <https://naps.com.mx/blog/tecnicas-de-conteo-en-probabilidad-y-estadistica/>
- <https://www.monografias.com/trabajos93/tecnicas-conteo/tecnicas-conteo.shtml>
- <https://www.lifeder.com/tecnicas-de-conteo/>
- <http://examendocente.com/02-primaria/1matematica/4problemasdegestion/5%20Metodo%20de%20conteo,%20Diagrama%20del%20arbol.pdf>