

FRANCISCO RUBIO ROYO
CATEDRATICO DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO
DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO DE FISICA
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

FISICA
CONCEPTOS BASICOS



EDITORIAL INTERINSULAR CANARIA, S. A.

EDITORIAL INTERINSULAR CANARIA, S. A.
GARCILASO DE LA VEGA, 15
SANTA CRUZ DE TENERIFE
(CANARIAS)

PRIMERA EDICION, 1980
SEGUNDA EDICION, 1984
TERCERA EDICION, 1985

Imprime: LITOGRÁFIA A. ROMERO, S. A.
Avda. Angel Romero, s/n.
Santa Cruz de Tenerife (España)
ISBN 84-85543-17-3
ISBN 84-85543-18-1 (Tomo I)
Depósito Legal: TF. 596-1980

Esta obra quiere ser una aportación del Departamento y del Seminario Permanente de Física de la Universidad de La Laguna, al desarrollo del país canario, cooperando a la formación humana y científica de las jóvenes generaciones..

*A Constanza, Ignacio,
Gustavo y Almudena
A mis padres*

PROLOGO

Nos hemos propuesto desarrollar un texto de introducción a los conceptos básicos de la Física, en el que por vez primera se enfrente el alumno con un cierto grado de formalización de los mismos, que sea adecuado a su nivel de formación. Ahora bien, la formalización de los conceptos no debe ir nunca en detrimento de su significado físico; por ello, se ha atendido de forma especial este aspecto.

La formalización no es posible, ni adecuada, realizarla al mismo nivel en toda la Física. Hay capítulos que por su complejidad, y también por la novedad de sus contenidos, no se pueden presentar con la misma abstracción que aquellos que son más familiares. Tradicionalmente, la enseñanza de la Física en España se encuentra influenciada por la tradición racionalista francesa; como consecuencia, la Mecánica se estudia con un grado de formalización que no suele aparecer en niveles equivalentes de los currícula anglosajones. Además, las otras partes de la Física apenas se tratan en la enseñanza preuniversitaria y en el primer curso de la universitaria.

En el texto, conservando esta tradición española, se pretende iniciar al alumno en los aspectos menos conocidos de la Física: el Electromagnetismo, las Ondas, el Atomo y el Núcleo, y la Electrónica. Todo ello, con una presentación que resalte las características físicas de los fenómenos que implican, los modelos que utiliza la Física para su interpretación, y la unidad metodológica con que suele abordarlos.

La elección de los contenidos, la hemos hecho sin atender a ningún programa oficial concreto. Nos hemos guiado, simplemente, por nuestra visión acerca de cuáles son los conceptos básicos de la Física. Estos los hemos dividido en dos niveles: uno incluye aquellos apartados que se pueden estudiar en un primer contacto con el texto; el otro (*), los que se pueden posponer para una segunda lectura. Normalmente, los primeros se pueden estudiar sin referencia a los segundos; a lo sumo, el alumno tiene que recordar las nociones más básicas que aprendió en sus estudios elementales. Creemos que el primer nivel es adecuado para el año preuniversitario; el segundo, para el primer curso en Universidades y Escuelas Técnicas.

En el capítulo I, se introducen las bases del álgebra vectorial; las definiciones del análisis vectorial, más abstractas y desconocidas, se introducen a lo largo del texto, en el momento que es necesario utilizarlas. Este procedimiento lo consideramos más adecuado desde el punto de vista metodológico, que definir todas las operaciones matemáticas, que se van a necesitar en la obra, en un primer capítulo de introducción.

En los capítulos II y III, se caracteriza el movimiento desde el punto de vista cinemático. A continuación, se introducen las leyes de la Mecánica Clásica; en el capítulo IV, las leyes del movimiento y las de fuerzas en la naturaleza, en el V. La presentación del capítulo IV se aparta de la tradicional en los textos de este nivel, puesto que no se sigue la que New-

ton hizo en el s. XVII. En un primer estudio se recomienda no abordar este capítulo, sino utilizar las leyes de Newton como se conocen de cursos elementales, y resolver los ejercicios propuestos en él.

En los capítulos VI, VII, VIII, IX, X se consideran las leyes de conservación de diferentes magnitudes físicas, tanto para la partícula, como para los sistemas. Enfasis especial se hace en la conservación de la energía; la cual se generaliza en el capítulo X, para incluir a los sistemas que sufren cualquier tipo de evolución temporal. El estudio de las leyes o teoremas de conservación es importante, puesto que permiten resolver el problema fundamental de la Mecánica, sin tener que resolver la llamada segunda ley de Newton.

Se trata la teoría de campos, como modelo matemático que utiliza la Física para interpretar los fenómenos de interacción en la naturaleza. Esta teoría se introduce de forma gradual a lo largo de los capítulos VII y XI; y se aplica, a diferentes campos, en los capítulos XII, XIV y XV. El XIII se dedica a la caracterización y análisis de los circuitos de *CC*; este análisis se realiza a partir del principio de conservación de la energía.

En el capítulo XVI se introduce otro modelo del que hace uso la Física, para explicar la propagación de una perturbación en el espacio: las Ondas. En el XVII, se aplica el modelo a dos fenómenos de especial importancia: el sonido y las ondas electromagnéticas.

Una zona del espectro de ondas electromagnéticas de gran relevancia es la visible, también denominada luz. A sus aspectos conceptuales más importantes, se dedica el capítulo XVII y XVIII. El tratamiento de este último, se hace desde la perspectiva de la evolución histórica de las teorías acerca de la naturaleza de la luz.

La composición microscópica de la materia se aborda a nivel elemental en los capítulos XIX y XX. En la presentación, se destaca la necesidad del uso de la Mecánica Cuántica y Relativista para su tratamiento. Se describen las características, interpretación elemental y aplicaciones de los espectros atómicos. En el XX se consideran las desintegraciones radiactivas, así como los aspectos energéticos relacionados con las reacciones nucleares, especialmente con las de fisión y fusión.

El último capítulo se dedica a una introducción elemental y práctica de la Electrónica. En ella destaca el tratamiento sobre las funciones básicas que forman parte de los sistemas electrónicos. Estas funciones se realizan físicamente, mediante unos sencillos montajes prácticos con transistores, diodos y circuitos lógicos integrados.

Cada capítulo comienza con una introducción, que recomendariamos leer, en la que se da una visión conjunta de sus contenidos, nivel a que se van a abordar, conocimientos previos que se suponen, así como la incidencia que tendrán estos contenidos en los capítulos posteriores. A continuación, se desarrollan con detalle los diferentes apartados que configuran el capítulo; se ha procurado resolver un ejercicio después de cada concepto fundamental introducido. Esta resolución es, en la mayoría de los casos, detallada y razonada, para que el alumno vea con claridad el significado y aplicación de lo estudiado. Los ejercicios propuestos, se ha intentado, bien que no sean demasiado triviales, bien que aborden casos particulares que se utilizan posteriormente en el texto.

Al final de cada capítulo se incluye una pequeña colección de cuestión teórico-prácticas y de problemas. Queremos resaltar el carácter complementario de las cuestiones, en el sentido que en ocasiones se utilizan para ampliar o aclarar conceptos que se han tratado en el desarrollo de los contenidos. En algunos capítulos se incluye texto con letra más pequeña; el criterio seguido ha sido imprimir con este tamaño las demostraciones de ciertas expresiones, las ampliaciones que pueden considerar de nivel superior o los detalles que no son fundamentales. Todo ello, para indicar que se puede omitir en las primeras lecturas del libro.

Este libro no es una edición reducida de la obra en dos volúmenes publicada anteriormente. Tanto la estructura como los contenidos son, en general, diferentes; los capítulos I, II, III, IV, V, X y XIX son completamente nuevos. El VII se ha modificado con objeto de clarificar el concepto de energía potencial y de potencial, para los tipos de fuerzas conservativas más usuales; en este sentido destacamos el ejercicio 7.2. Los capítulos VIII y IX son una adaptación de los de igual contenido del tomo (*), en los que se han eliminado los conceptos que no son absolutamente necesa-

rios para el nivel del libro. Los capítulos XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI y XX se han reestructurado y adaptado a las necesidades reales de un texto, que se quiere tenga utilidad para el alumno en su año preuniversitario y en el primero de sus estudios superiores.

El capítulo XVII es prácticamente nuevo, destacando el teorema de conservación de la energía electromagnética y la forma en que se presenta la Optica. En el XVIII, se han redactado de nuevo los apartados correspondientes a la etapa precientífica y al s. XVII; el resto se ha adaptado, para hacerlo comprensible para los alumnos. El mismo criterio hemos seguido en el capítulo XX, en el que se ha prescindido de todo aquello que no es absolutamente imprescindible para este nivel. El capítulo dedicado a la Electronica se ha adaptado por completo, destacando la inclusión –a nivel práctico– de los transistores y diodos.

Como indicaba en el prólogo de la obra anterior, expreso una vez más mi profundo agradecimiento y cariño a mis maestros, los Profesores José García Santesmases y Salvador Velayos Hermida, por la ayuda e influencia que han tenido en mi formación y vocación por la Física.

También quiero agradecer públicamente la ayuda recibida por mi amigo Luis Arés Escolar. El me sugirió la estructura y orientación que le podía dar al libro, para plasmar la idea que ambos tenemos de la Física a estos niveles. Mi gratitud y cariño para el Prof. Roberto Moreno Díaz, que ha sido desde hace

casi veinte años mi amigo, y el que me ha dirigido en toda mi labor investigadora y profesional; con él sigo, y seguiré, colaborando en nuestros trabajos sobre Cibernética. Sus orientaciones y amplios conocimientos en Electrónica me han sido de gran utilidad para redactar el capítulo correspondiente.

Quiero agradecer a mi amigo Vicente Rodríguez Lozano, Catedrático de Filosofía, las críticas y sugerencias que me ha hecho en los aspectos relacionados con la Historia de la Ciencia, especialmente en los capítulos XI y XVIII. También mi reconocimiento al Dr. José Antonio Bonet Navarro, compañero en las tareas docentes y persona muy preocupada por los aspectos metodológicos de la Física; sus comentarios, críticas y sugerencias sobre los capítulos de Mecánica, han permitido mejorarlos considerablemente en relación con los correspondientes del libro anterior. Finalmente, pero no el último, mi gratitud para mi compañero y amigo el Prof. José Victoria Díaz, quien desde su incorporación al Departamento se ha integrado de forma entusiasta en nuestra labor; con su crítica, estímulo y ayuda ha hecho posible este libro.

Mi agradecimiento también, a la colaboración y estímulo prestado por todos los compañeros del Seminario Permanente de Física de la Universidad de La Laguna. Este libro puede considerarse como una realización más del citado Seminario, que se complementa con la Guía Didáctica para el profesor, que se ha desarrollado en él.

F. Rubio Royo

La Laguna
Agosto, 1980

INDICE GENERAL

Prólogo

CAPITULO I VECTORES

§ 1.1	Vectores y Escalares	
§ 1.2	Operaciones básicas del Algebra Vectorial	
§ 1.3	Vectores en el sistema de coordenadas cartesianas	
	Representación de un vector. Componentes	1
	Suma y resta de vectores	5
	Multiplicación de un vector por un escalar. Vectores unitarios fundamentales	7
§ 1.4	Producto escalar de dos vectores	9
§ 1.5	Producto vectorial de dos vectores	10
§ 1.6	Introducción al cálculo diferencial vectorial	11
	Derivada de un vector respecto de un escalar	14
	Cuestiones	15
	Problemas	

CAPITULO II CINEMATICA DEL PUNTO

§ 2.1	Aproximación de punto material	16
	Caracterización del movimiento	17
§ 2.2	Vector velocidad y vector aceleración	19
§ 2.3	Componentes intrínsecas del vector aceleración	20
§ 2.4	Clasificación de los movimientos a partir de las componentes intrínsecas de la aceleración	21
	Cuestiones	25
	Problemas	26

CAPITULO III MOVIMIENTO RELATIVO

§ 3.1	Velocidad y aceleración relativas	29
§ 3.2	Movimiento relativo y de arrastre	33
§ 3.3	Composición de velocidades en el movimiento relativo	34
§ 3.4	Composición de aceleraciones	35
§ 3.5	Transformaciones de Galileo	36
	Cuestiones	37
	Problemas	38

CAPITULO IV LEYES CLASICAS DEL MOVIMIENTO

§ 4.1	Mecánica Clásica	40
§ 4.2	Primera ley de Newton	42
§ 4.3	Masa inerte	44
§ 4.4	Segunda ley de Newton	45
§ 4.5	Tercera ley de Newton	47
§ 4.6	Sistemas de referencia no inerciales. Fuerzas de inercia	50
	Cuestiones	53
	Problemas	53

CAPITULO V LEYES DE FUERZAS DE LA NATURALEZA

§ 5.1	Fuerzas gravitatorias	56
§ 5.2	Masa gravitatoria. Peso	58
§ 5.3	Fuerzas electromagnéticas	60
§ 5.4	Fuerzas nucleares	61
§ 5.5	Fuerzas de contacto	62
§ 5.6	Fuerzas elásticas	62
§ 5.7	Fuerzas de rozamiento	64
	Cuestiones	66
	Problemas	66

CAPITULO VI **DINAMICA DEL PUNTO.**
TEOREMAS DE CONSERVACION (I)

§ 6.1	Problema fundamental de la Dinámica	68
§ 6.2	Momento lineal. Teorema de conservación	71
§ 6.3	Momento angular. Teorema de conservación	71
§ 6.4	Trabajo realizado por una fuerza	74
	Potencia	78
§ 6.5	Teorema del trabajo y la energía cinética	78
	Cuestiones	80
	Problemas	80

CAPITULO VII **DINAMICA DEL PUNTO.**
TEOREMAS DE CONSERVACION (II)

§ 7.1	Introducción a la teoría de campos. Campos escalares y vectoriales	84
§ 7.2	Fuerzas conservativas	87
§ 7.3	Concepto de energía potencial y de potencial	92
§ 7.4	Teorema de conservación de la energía	96
§ 7.5	Curvas de energía potencial	98
	Cuestiones	101
	Problemas	102

CAPITULO VIII **DINAMICA DE LOS SISTEMAS DE PUNTOS MATERIALES**

§ 8.1	Sistemas de partículas	105
§ 8.2	Fuerzas interiores y exteriores	107
§ 8.3	Momento lineal de un sistema de partículas Centro de masas	109
§ 8.4	Teorema de conservación del momento lineal	113
§ 8.5	Momento angular de un sistema de partículas Teorema de conservación	115
§ 8.6	Energía cinética de un sistema Teorema del trabajo y la energía cinética	120
§ 8.7	Energía potencial. Teorema de conservación de la energía	122
	Cuestiones	123
	Problemas	123

CAPITULO IX **INTRODUCCION AL MOVIMIENTO DEL SOLIDO RIGIDO**

§ 9.1	Movimientos elementales de un sólido	128
	Movimiento de traslación	129
	Movimiento de rotación	129
§ 9.2	Movimiento de rotación de un sólido alrededor de un eje	129
	Ecuación del movimiento	130
	Trabajo y energía cinética de rotación	130
	Teorema de conservación del momento angular	130
§ 9.3	Movimientos combinados de traslación y rotación en un sólido	131
§ 9.4	Condiciones de equilibrio de un sólido	132
	Cuestiones	132
	Problemas	132

CAPITULO X **GENERALIZACION DE LA LEY DE CONSERVACION DE LA ENERGIA**

§ 10.1	Definiciones fundamentales	141
	Equilibrio	141
	Procesos reversibles e irreversibles	141
§ 10.2	Concepto de temperatura	143
§ 10.3	Calor y trabajo	148
§ 10.4	Primera ley de la Termodinámica	150
	Cuestiones	150
	Problemas	150

CAPITULO XI **CAMPO GRAVITATORIO**

§ 11.1	Campos de fuerzas centrales: características generales	157
§ 11.2	Caracterización del campo gravitatorio	162
§ 11.3	Ecuaciones fundamentales del campo Teorema de Gauss	166
	Resumen sobre las teorías acerca del movimiento de los planetas	172
	Cuestiones	174
	Problemas	176

CAPITULO I

VECTORES

Sabemos que en Física, existen observables que para estar completamente especificados es necesario conocer tanto su dirección, como su valor. Estos observables reciben el nombre de **magnitudes vectoriales** o, simplemente, **vectores**. Los observables físicos que no necesitan asociarles una dirección, para que queden completamente especificados, se denominan **magnitudes escalares** o **escalares**. En cursos anteriores, se ha establecido el carácter escalar o vectorial de las diferentes magnitudes, que se introdujeron a lo largo de la disciplina. Así el alumno ya sabe que la velocidad, el desplazamiento, la fuerza, etc. son magnitudes vectoriales; el trabajo, la masa, la potencia, etc. escalares.

En este primer capítulo, queremos recordar algunas cuestiones que el alumno ya ha estudiado en cursos anteriores, para que se familiarice con el uso de los vectores. Al mismo tiempo, queremos plantearle cuestiones más fundamentales, sobre el uso de los vectores en Física. Se trata de un capítulo, cuyos contenidos se van a utilizar a lo largo de toda la obra. Hemos querido introducir sólo aquellas operaciones con vectores, que se vayan a utilizar en los capítulos inmediatos del libro o que ya son conocidos por los alumnos. Las operaciones que se utilicen en algún tema específico, sobre todo las referentes al análisis vectorial, se introducirán en el momento en que se necesiten.

§ 1.1. VECTORES Y ESCALARES

Las leyes físicas presentan unas propiedades de **simetría**, que queremos comentar. La palabra «simetría» seguramente resulta nueva para el alumno, por lo que consideramos adecuado fijar su significado. Una cosa es simétrica si podemos someterla a una cierta operación y aparece exactamente igual después de la operación. Por ejemplo, sea la rueda de seis radios representada en la Fig. 1.1.; si se le hace girar, alrededor de su eje, cualquier ángulo que sea un múltiplo de 60° , la rueda quedará en una posición que será indistinguible de la inicial, indicada en la figura. Se dice, en este caso, que la rueda es simétrica respecto de las rotaciones, alrededor de su eje, que sean múltiplos de 60° . También podemos decir que la rueda es **invariante** bajo dicha operación de simetría.

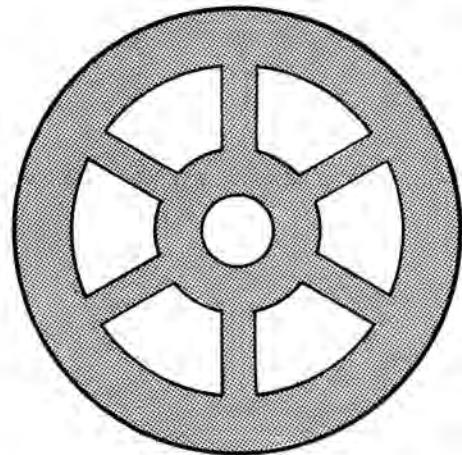


FIG. 1.1

Las leyes de la Física, por ejemplo la segunda ley de Newton: $F = m \cdot a$, son invariantes (o simétricas) frente a traslaciones y rotaciones de ejes. ¿Qué quiere decir ésto?: que no cambian de forma cuando se realiza una traslación o una rotación de los ejes de coordenadas. Estas propiedades son tan importantes, que se ha desarrollado una técnica matemática para aprovecharlas en la escritura y uso de las leyes físicas. Esta técnica matemática desarrollada, es el análisis vectorial.

El uso de los vectores presenta dos importantes propiedades:

- a) La formulación de las leyes físicas en términos de vectores es independiente de la elección de unos ejes de coordenadas. La notación vectorial es un lenguaje en el que las relaciones entre magnitudes, tienen un contenido físico sin que sea necesario introducir un sistema de coordenadas.
- b) La notación vectorial es concisa. Las leyes físicas presentan formas más simples y claras, cuando se expresan en éste lenguaje, que cuando se escriben en términos de un determinado sistema de coordenadas.

Para ilustrar estos puntos, consideraremos la ley de Newton: $F = m \cdot a$. Esta ecuación es válida tanto si F tiene una dirección horizontal, vertical o formando

un ángulo arbitrario; la aceleración siempre tendrá la dirección y el sentido de la fuerza. La expresión de dicha ley en función de las componentes de los vectores, sabemos que puede ser complicada o simple, dependiendo de la orientación relativa de las fuerzas respecto de los ejes. En la Fig. 1.2, se resume esta afirmación, para los dos ejes OXY y $OX'Y'$, cuando sobre un punto material actúan las fuerzas F , P y N , y está obligado a moverse sobre el plano inclinado:

$$OXY: F \cos \beta + P \operatorname{sen} \vartheta = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$N - P \cos \vartheta = 0$$

$$OX'Y': F - P \operatorname{sen} (\beta - \vartheta) + N \operatorname{sen} \beta = m \frac{d^2x'}{dt^2}$$

$$N \cos \beta - P \cos (\beta - \vartheta) = m \frac{d^2y'}{dt^2}$$

Por lo tanto, siempre que sea posible hay que plantear las leyes de la Física en forma vectorial, en vez de trabajar con sistemas específicos de coordenadas. Algunas de las leyes son muy complicadas, y no pueden expresarse en forma vectorial, expresándose en función de otro tipo de magnitudes denominadas tensoriales. Un **tensor** es una generalización de un vector, que lo incluye como caso particular. Este tipo de magnitudes no las consideraremos en este texto, por no ser su tratamiento adecuado para los alumnos a los que va dirigido.

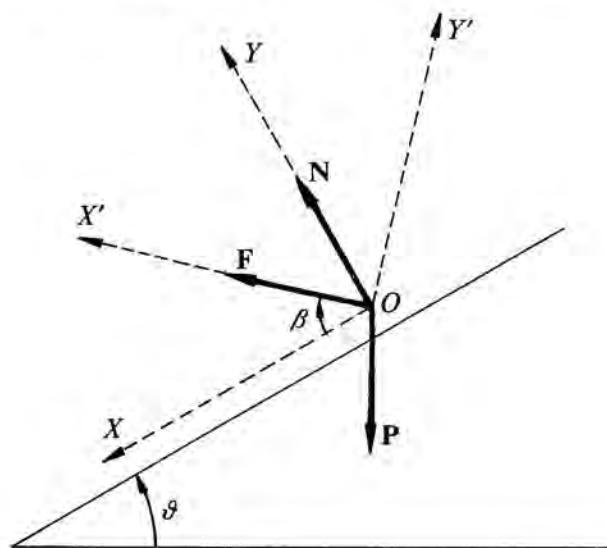


FIG. 1.2

Un **vector** es un segmento orientado; toda magnitud vectorial puede representarse por un vector, cuya longitud sea proporcional a la intensidad (al valor) de dicha magnitud; y cuya dirección y sentido sean los correspondientes a la misma, Fig. 1.3. Se representa por una letra mayúscula o minúscula en negrita, A.



FIG. 1.3

Se llama **módulo** de un vector a la longitud del segmento orientado que lo define. El módulo siempre es un número positivo. Se representa por la misma letra que el vector, colocada entre dos barras verticales, $|A|$; por comodidad tipográfica se suele escribir, también por la misma letra sin que sea negra, A.

El alumno debe percatarse que en la definición de vector dada, no hay en absoluto referencia a ningún sistema específico de coordenadas. La dirección del vector se puede definir, en algunos casos con respecto a la clase; en otros, con referencia a estrellas fijas. Como luego indicaremos, no toda magnitud caracterizada por un valor y una dirección es necesariamente un vector.

Un **escalar** es un observable físico que está completamente especificado sin tener asociado una dirección. En los cursos anteriores, nos han indicado que una magnitud escalar es aquella que viene caracterizada por un número. Ahora bien, para que sea un escalar, dicha magnitud debe tener un valor que no dependa del sistema de coordenadas elegido. Así por ejemplo, el módulo de un vector es un escalar; la coordenada x de un cierto punto fijo no es un escalar ya que su valor depende del sistema de coordenadas elegido, Fig. 1.4. La temperatura es un escalar, ¿por

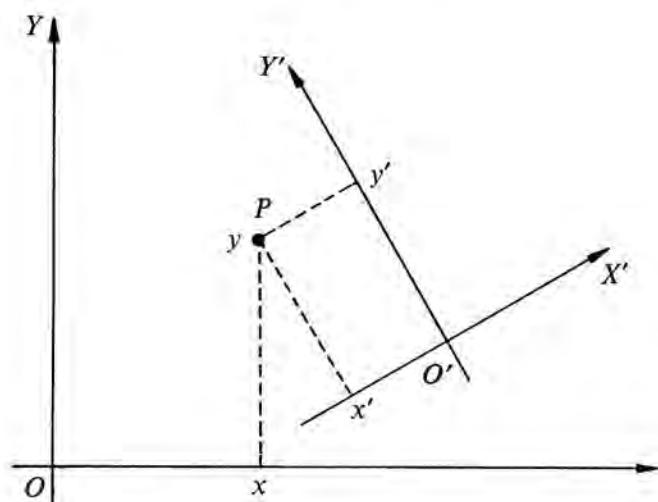


FIG. 1.4

dria el alumno citar ejemplos de otras magnitudes escalares, que ha estudiado en cursos anteriores y que cumplan la condición indicada?

§ 1.2. OPERACIONES BASICAS DEL ALGEBRA VECTORIAL

Vamos a recordar las operaciones matemáticas más importantes que se definen entre vectores, y que ya se conocen de cursos anteriores; para ello hay que desarrollar un conjunto de definiciones y reglas específicas, que se conocen con el nombre de **Algebra Vectorial**. Esta presenta analogías con el álgebra de los números reales (escalares), pero en ella se definen además nuevas operaciones.

Igualdad de vectores. Dos vectores son iguales cuando tienen el mismo módulo y la misma dirección y sentido, Fig. 1.5.

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{B}} \quad (1.1)$$

Hay que hacer notar, que con este criterio de igualdad la localización del vector no es significativa. Se trata de los llamados **vectores libres**. Dos vectores de esta clase pueden compararse aunque representen a magnitudes físicas definidas en diferentes puntos del espacio y de tiempo.

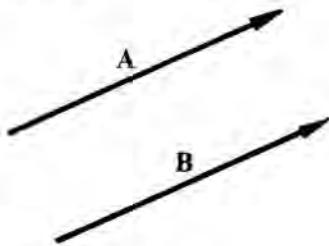


FIG. 1.5

Adición de vectores. La suma de dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , es otro vector $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ que se define mediante la construcción geométrica conocida por el nombre de la regla del paralelogramo, que los alumnos conocen de cursos anteriores, Fig. 1.6. A partir de la construcción de la figura, se comprueba que la adición de vectores cumple la **propiedad aditiva**:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (1.2)$$

Para sumar tres, o más vectores, se sigue el mismo criterio anterior: se lleva el origen de uno al extremo del precedente, el vector que une el origen del primero con el extremo del último, es el vector suma. En la Fig. 1.7. se ilustra el procedimiento para el caso de tres vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} .

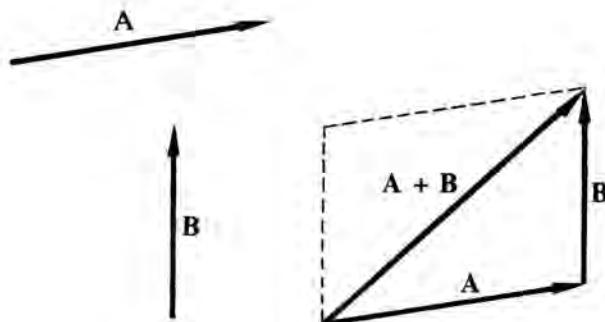


FIG. 1.6

La adición de vectores cumple, también, la **propiedad asociativa**,

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad (1.3)$$

¿cómo la demostraría el alumno?

Esta propiedad indica que la suma de un cierto número de vectores es independiente del orden en que se suman.

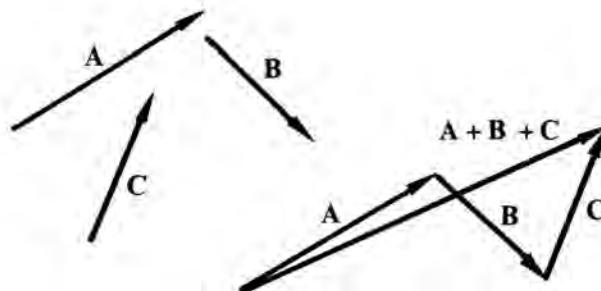


FIG. 1.7

Vectores opuestos. Dado un vector \mathbf{A} , se denomina opuesto al que tiene el mismo módulo y la misma dirección, pero sentido contrario, Fig. 1.8.

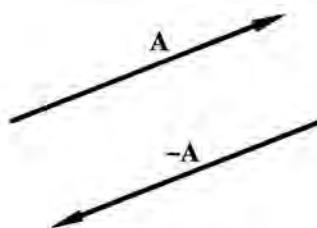


FIG. 1.8

Resta de vectores. La diferencia $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ de dos vectores es igual a la suma del vector \mathbf{A} y del vector $-\mathbf{B}$, opuesto a \mathbf{B} . Fig. 1.9.

La suma de un vector y de su opuesto es el **vector cero**

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad (1.4)$$

A lo largo del texto, haremos uso muchas veces de este vector, cuya notación le extrañará al alumno, pero hay que tener en cuenta que la suma de dos vectores que se anulan, nunca puede ser igual a cero, que es un escalar, sino al vector cero $\mathbf{0}$.

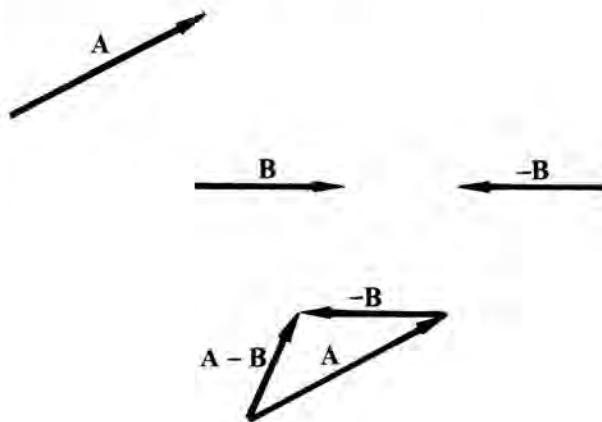


FIG. 1.9

Producto de un escalar por un vector. El producto de un vector \mathbf{A} por un escalar λ , $\lambda \geq 0$, es un vector cuyo módulo es $|\lambda|$ veces el de \mathbf{A} , dirección la de \mathbf{A} y sentido el de \mathbf{A} si $\lambda > 0$, ó el opuesto si $\lambda < 0$; por $|\lambda|$ representamos el valor absoluto del escalar λ . Fig. 1.10.

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{A} \quad (1.5)$$

Esta operación presenta la **propiedad distributiva respecto de la suma**:

$$\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B} \quad (1.6)$$

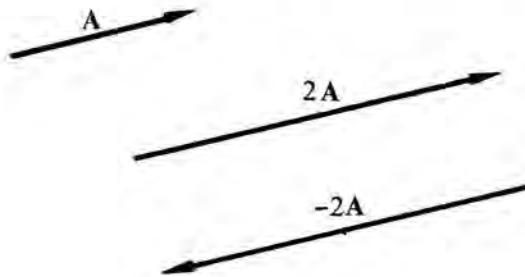


FIG. 1.10

como fácilmente se puede justificar.

La **división por un escalar** es equivalente a multiplicar el vector por el inverso del escalar. El cociente de un vector \mathbf{A} por un escalar λ es otro vector \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{A} \quad (1.7)$$

cuya definición le dejamos al alumno.

A partir de esta definición, se puede introducir la de **vector unitario**, que es aquel cuyo módulo vale la unidad. Estos vectores sirven (§ 1.3) para definir una dirección en el espacio; por ejemplo, dado un vector \mathbf{A} un vector unitario en la dirección definida por \mathbf{A} , será:

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{A} / |\mathbf{A}| \quad (1.8)$$

el alumno puede comprobar que su dirección es la de \mathbf{A} , y su módulo la unidad.

Ahora ya estamos en condiciones de contestar a una pregunta, que antes dejamos pendiente: ¿cuándo una magnitud física es representable mediante un vector?. Para ello ha de cumplir dos condiciones:

- Debe satisfacer la ley del paralelogramo para la adición.
- Debe tener un valor y una dirección independientes del sistema de coordenadas que se elija.

§ 1.3. VECTORES EN EL SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS.

En el apartado anterior hemos introducido el concepto de vector y las operaciones algebraicas básicas entre vectores, independientemente de cualquier sistema concreto de coordenadas. Nuestro propósito ha sido destacar esta propiedad fundamental de los vectores (§ 1.2.).

En este apartado, queremos referir los vectores al sistema de coordenadas más conocido por los alumnos, el cartesiano rectangular. Por ello, nos hemos apartado en la exposición de la forma tradicional, y en cierto modo vamos a ser reiterativos respecto a la pregunta anterior; pero creemos que desde el punto de vista metodológico se justifica, pues pretendemos que el alumno capte esta propiedad fundamental de los vectores.

En las preguntas siguientes, al definir las operaciones que son características de los vectores y en la introducción al cálculo vectorial diferencial, seguiremos la pauta tradicional. En cada uno de los apartados, daremos primero la definición y propiedades sin hacer referencia a ningún sistema de coordenadas; y posteriormente las aplicaremos para el sistema cartesiano rectangular.

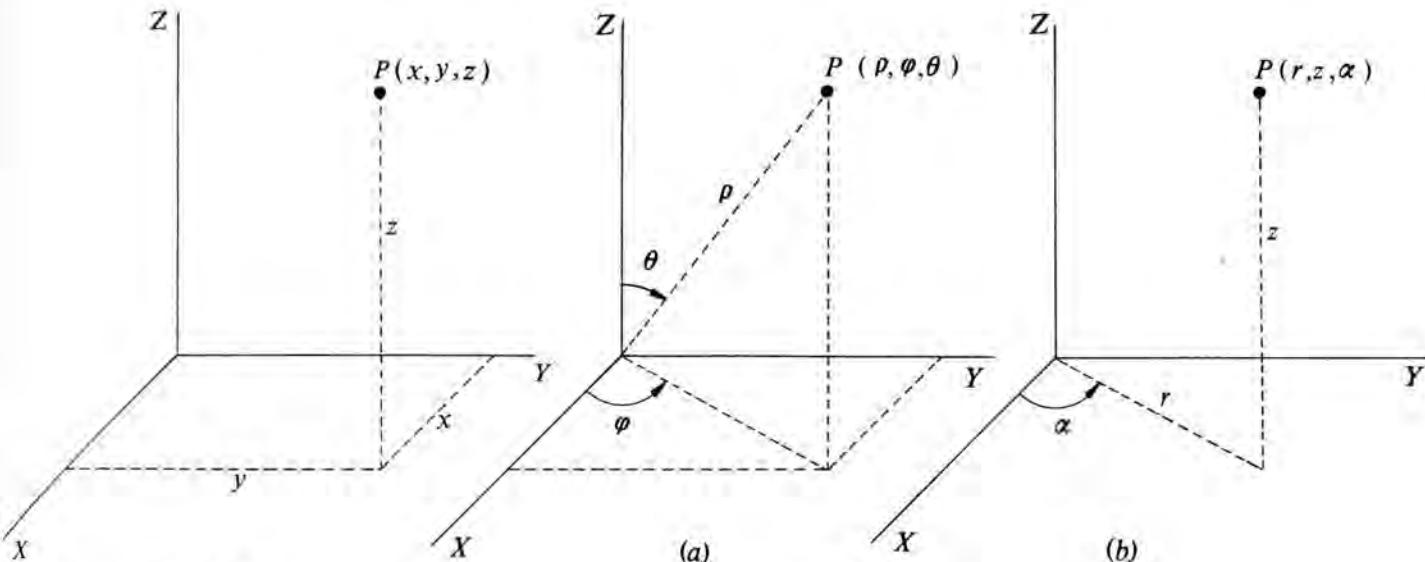


FIG. 1.11

FIG. 1.12

El sistema de coordenadas cartesianas es el más simple y de más utilidad en Física. En este sistema, como sabemos, la posición de un punto P viene determinada por las coordenadas (x, y, z) , Fig. 1.11.

Conviene hacer notar, que dados unos ejes tridimensionales (lo que en el capítulo siguiente denominaremos **sistema de referencia**), la posición de un punto con respecto a los mismos se puede especificar de diversas maneras. Antes hemos indicado una, que es la más familiar al alumno; en la Fig. 1.12 (a) y (b) se indican otras dos. Cada una de estas «maneras» de caracterizar la posición de un punto, mediante un conjunto de parámetros o de coordenadas, define un **sistema de coordenadas**.

No creemos oportuno seguir insistiendo en este punto, porque prácticamente en toda la obra, sólo vamos a utilizar el sistema de coordenadas cartesianas. Pero es importante que el alumno sea consciente de la importancia, y simplificación que supone, el definir las relaciones vectoriales sin referencia específica a ningún sistema de coordenadas; de estos sistemas hay numerosos, nosotros hemos ilustrado los tres más usuales para la resolución de problemas físicos.

Representación de un vector. Componentes

Sea un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, $OXYZ$; sean $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ el origen y el extremo, respectivamente, de un cierto vector \mathbf{A} , Fig. 1.13.

Se llaman **componentes** de un vector \mathbf{A} , respecto del sistema $OXYZ$, a las proyecciones de \mathbf{A} sobre los ejes de coordenadas, es decir:

$$A_x = x_2 - x_1 \quad A_y = y_2 - y_1 \quad A_z = z_2 - z_1 \quad (1.9)$$

En la Fig. 1.13 hemos trazado el paralelepípedo formado por dichas proyecciones, para que el alumno vea más claramente su significado. En general, se suele escribir $\mathbf{A} (A_x, A_y, A_z)$ para indicar que A_x, A_y, A_z son las componentes del vector \mathbf{A} .

Como consecuencia de la definición anterior y de la definición de igualdad de vectores (§ 1.2), **dos vectores iguales tienen las mismas componentes respecto del mismo sistema de coordenadas**, cualquiera que sea éste. ¿Podría justificarlo el alumno?

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \rightarrow A_x = B_x, A_y = B_y, A_z = B_z \quad (1.10)$$

Análogamente, dos vectores opuestos tienen las componentes iguales en valor absoluto, pero de signos contrarios

$$\mathbf{A} (A_x, A_y, A_z), \quad -\mathbf{A} (-A_x, -A_y, -A_z) \quad (1.11)$$

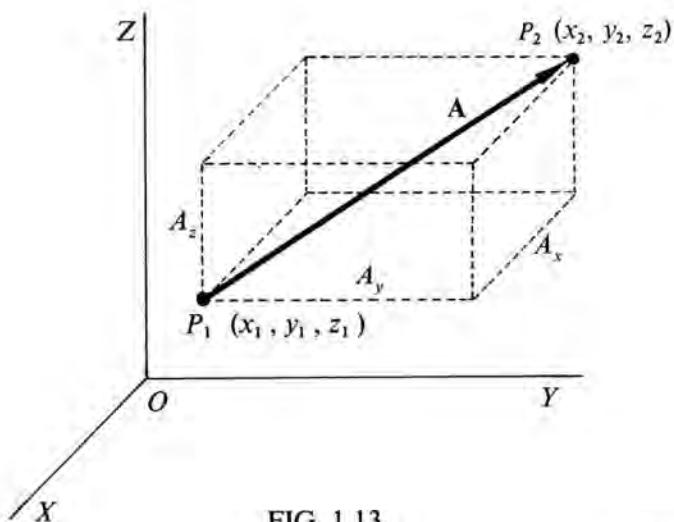


FIG. 1.13

A partir de la Fig. 1.13 y de la definición de módulo de un vector (§ 1.2), se verifica:

$$\text{módulo de } \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.12)$$

esta expresión nos da el módulo de un vector en función de sus componentes.

Los cosenos de los ángulos que forma el vector con el sentido positivo de cada uno de los ejes de coordenadas, se llaman **cosenos directores** del vector. Si representamos mediante α , β y γ a los cosenos directores del vector \mathbf{A} , es inmediato comprobar que se verifica, Fig. 1.13,

$$\left. \begin{array}{l} A_x = A \cos \alpha \\ A_y = A \cos \beta \\ A_z = A \cos \gamma \end{array} \right\} \rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1.13)$$

esta es la relación fundamental que verifican los cosenos directores de un vector.

El alumno puede comprobar, que conocidas las componentes de un vector se puede calcular tanto su módulo como sus cosenos directores. Los cosenos directores nos permiten determinar tanto la dirección de un vector, como su sentido. ¿cómo a partir de dichos cosenos, se puede calcular el sentido de un vector?. Como consecuencia de todo lo anterior, podemos concluir que **un vector queda completamente determinado (en módulo, dirección y sentido) por sus componentes**.

Ejercicio 1.1.

Un vector tiene de origen, respecto de un cierto sistema, el punto $P_1 (-1, 0, 2)$ y de extremo, respecto al mismo sistema, el $P_2 (2, -3, 0)$. Calcular: a) Componentes del vector $\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 = \mathbf{A}$. Dibujarlo. b) Coordenadas de los puntos origen y extremo, de un vector igual al \mathbf{A} . c) Componentes de un vector de la misma dirección que \mathbf{A} , pero de sentido contrario. d) Módulo del vector \mathbf{A} . e) Cosenos directores de \mathbf{A} . f) Proyección de \mathbf{A} sobre el plano XY . Dibujar dicha proyección.

Solución

Este ejercicio es una mera aplicación de las definiciones dadas en este apartado.

a) Haciendo uso de (1.9)

$$\left. \begin{array}{l} A_x = x_2 - x_1 = 2 + 1 = 3 \\ A_y = y_2 - y_1 = -3 - 0 = -3 \\ A_z = z_2 - z_1 = 0 - 2 = -2 \end{array} \right\} \mathbf{A} (3, -3, -2)$$

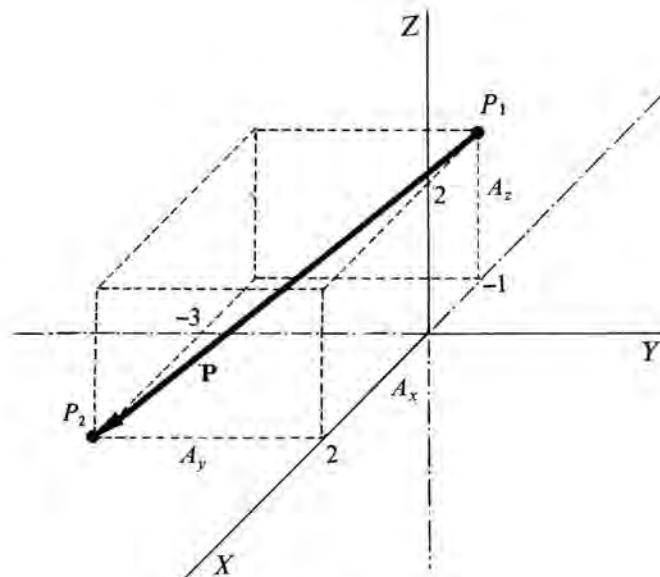


FIG. 1.14

¿qué significado tiene una componente negativa? La representación gráfica del vector es inmediata, Fig. 1.14.

b) Un vector igual al \mathbf{A} , debe tener sus mismas componentes (1.10); y puede tener su origen en cualquier punto, ya que estamos tratando con vectores libres. Elegimos un origen arbitrario, por ejemplo, el $(0, 0, 0)$, las coordenadas del extremo serán (1.8):

$$x_2 = A_x + x_1 = 3 + 0 = 3, \quad y_2 = A_y + y_1 = -3 + 0 = -3$$

$$z_2 = A_z + z_1 = -2 + 0 = -2$$

luego un vector que tenga de origen el punto $(0, 0, 0)$ y de extremo el $(3, -3, -2)$ es igual al vector \mathbf{A} . Es evidente que podríamos elegir infinitos vectores libres iguales al \mathbf{A} , ¿por qué?

c) Según se indicó, dicho vector tendrá de componentes $(-3, 3, 2)$. Un posible origen de dicho vector sería el punto $P_2 (2, -3, 0)$ y extremo el $P_1 (-1, 0, 2)$.

d) El módulo se calcula de forma inmediata, a partir de (1.12)

$$A = \sqrt{9 + 9 + 4} = \sqrt{22}$$

e) Los cosenos directores se pueden determinar a partir de (1.13)

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{22}}$$

$$\cos \beta = \frac{-3}{\sqrt{22}}$$

$$\cos \gamma = \frac{-2}{\sqrt{22}}$$

¿qué significa un coseno director negativo? ¿sabría calcular el alumno a qué ángulos corresponden los cosenos anteriores?

f) A partir de la Fig. 1.14, podemos dibujar la proyección del vector \mathbf{P} sobre el plano XY , Fig. 1.15. Este será un vector, \mathbf{P}_{xy} , de componentes $(3, -3, 0)$. ¿Porqué la tercera componente es nula?

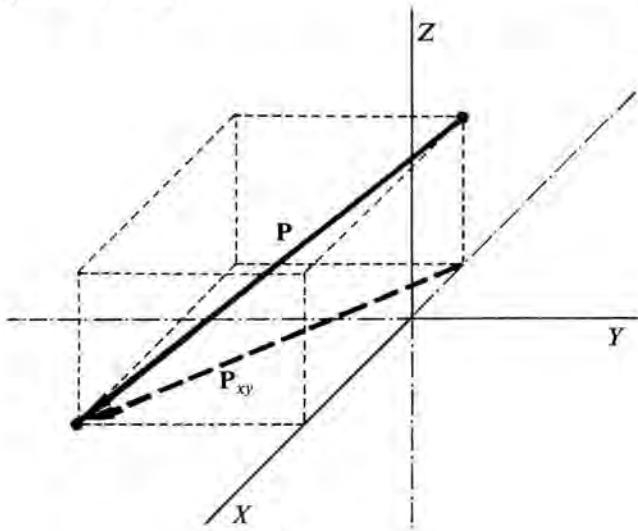


FIG. 1.15

Suma y resta de vectores.

A partir de la definición dada en § 1.2, en que se indica la forma gráfica de calcular la suma de dos vectores, se puede comprobar que la suma de dos vectores es otro vector cuyas componentes son la suma de las componentes, expresadas respecto al mismo sistema de coordenadas, de los vectores que sumamos:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} (A_x, A_y, A_z) & , \quad \mathbf{B} (B_x, B_y, B_z) \\ \mathbf{A} + \mathbf{B} (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) & \\ (1.14) \end{aligned}$$

En la construcción de la Fig. 1.16 se puede comprobar la justificación de la afirmación anterior.

Una propiedad importante, que se deduce por ser \mathbf{A} , \mathbf{B} y $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ los lados de un triángulo, es que se cumple la desigualdad:

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| \quad (1.15)$$

que nos indica que el módulo de la suma de dos vectores es siempre menor, o igual, que la suma de los módulos de los sumandos. ¿De qué propiedad de los triángulos se ha hecho uso?, ¿cuándo se verifica el signo de igualdad?

Con los mismos argumentos, se puede justificar que la *resta* de dos vectores es otro vector cuyas componentes son la resta de las componentes, expresadas respecto al mismo sistema de coordenadas, de los vectores que restamos.

$$\mathbf{A} (A_x, A_y, A_z) , \quad \mathbf{B} (B_x, B_y, B_z)$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} (A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z) \quad (1.16)$$

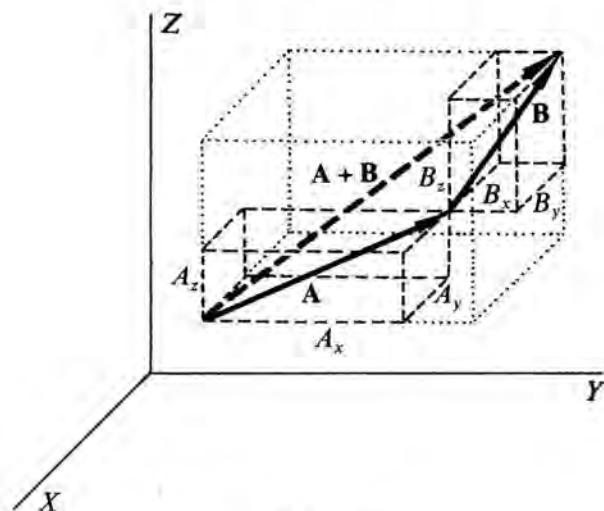


FIG. 1.16

Al expresar los vectores en un sistema de coordenadas cartesianas, podemos indicar que el *vector cero* (1.4) es aquel cuyas componentes son todas nulas $(0, 0, 0)$.

Ejercicio 1.2.

Un vector, \mathbf{A} , tiene de origen, respecto de un cierto sistema de coordenadas cartesianas, el punto $P_1 (-1, 0, 2)$ y de extremo el $P_2 (2, -3, 0)$. Otro vector \mathbf{B} tiene de módulo 5 y cosenos directores proporcionales a $(3, 4, 0)$. Calcular:

- a) El vector suma de los dos dados, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.
- b) El módulo del vector suma y la suma de los módulos de los vectores que sumamos. ¿Qué consecuencia se extrae a partir del resultado obtenido?
- c) Vector resta $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.
- d) ¿Qué vector hay que sumarle al \mathbf{B} para obtener el vector nulo?

Solución:

Lo primero que tenemos que calcular, son las componentes de los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , puesto que sabemos que éstas caracterizan completamente a un vector. Hay que notar que cada uno de los vectores está caracterizado de una manera, el \mathbf{A} dando las coordenadas de los puntos que corresponden a su origen y a su extremo. El \mathbf{B} dando su módulo y unos números proporcionales a sus cosenos directores. El paso de una caracterización a otra, para un mismo vector, es inmediata; ¿sabrá hacerlo el alumno?

En el ejercicio 1.1 ya habíamos calculado las componentes del vector $\mathbf{A} (3, -3, -2)$. Para calcular las del \mathbf{B} tenemos que determinar en primer lugar sus cosenos directores, y posteriormente hacer uso de (1.13)

$$\frac{\cos \alpha}{3} = \frac{\cos \beta}{4} = \frac{\cos \gamma}{0} = k$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Por lo tanto, (1.13):

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha = 3k \\ \cos \beta = 4k \\ \cos \gamma = 0 \end{array} \right\} \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$k = \pm \frac{1}{5}$$

¿Qué significado tiene el doble signo de k ? Tomando su valor positivo, los cosenos directores de \mathbf{B} serán: $(3/5, 4/5, 0)$; y sus componentes (1.13):

$$B_x = 3, B_y = 4, B_z = 0; \mathbf{B} (3, 4, 0)$$

- a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ es un vector de componentes $(3+3, -3+4, -2+0)$, es decir: $\mathbf{A} + \mathbf{B} (6, 1, -2)$.

Conviene insistir que a efectos prácticos es más cómodo utilizar la expresión (1.14), para calcular el vector suma, que la construcción gráfica de la Fig. 1.6, sobre todo cuando los vectores no son perpendiculares, y para su tratamiento analítico no se puede aplicar el teorema de Pitágoras, sino el del coseno y otras consideraciones trigonométricas.

Queremos llamar la atención sobre una equivocación que se comete a menudo. Para calcular el vector suma de dos vectores hay que dar tanto su módulo como su orientación; no basta con el módulo, como muchos alumnos erróneamente creen. También hay que insistir sobre otro error bastante frecuente, la suma de dos vectores es un vector, cuyo módulo no es –en general– igual a la suma de los módulos de aquéllos. ¿Cuándo coinciden ambos?

b) $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = \sqrt{36 + 1 + 4} = 6,40; |\mathbf{A}| = 4,69, |\mathbf{B}| = 5$

a partir de estos resultados, comprobamos la desigualdad (1.15).

$$|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| = 9,69 > 6,40 = |\mathbf{A} + \mathbf{B}|$$

Ahora puede contestar el alumno, a la pregunta que le hicimos en el apartado anterior, ¿no?

c) Según (1.16), $\mathbf{A} - \mathbf{B} (0, -7, -2)$

d) Para obtener el vector cero, hay que sumarle a un vector su opuesto (1.4), por lo tanto a \mathbf{B} hay que sumarle el $-\mathbf{B} (-3, -4, 0)$.

Multiplicación de un vector por un escalar. Vectores unitarios fundamentales.

Como ya sabemos (1.5), el producto de un vector \mathbf{A} por un escalar $\lambda, \lambda \geq 0$, es un vector de componentes $(\pm \lambda A_x, \pm \lambda A_y, \pm \lambda A_z)$. ¿Podría justificar el alumno que esta forma de expresar el producto, es una consecuencia de (1.5) y de lo expuesto anteriormente en este apartado?

También es inmediata la expresión de las componentes de un vector unitario (1.8) en función de las componentes del vector dado \mathbf{A} .

Entre los vectores unitarios, son especialmente importantes tres –para los ejes coordenados cartesianos– dirigidos en la dirección de cada uno de dichos ejes, Fig. 1.17, y cuyo sentido coincide con el sentido

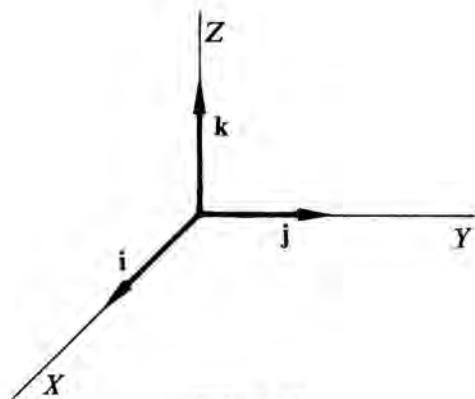


FIG. 1.17

positivo de los mismos. La notación para designarlos, que ha sido casi universalmente sancionada, es mediante las letras i, j, k . Las componentes de estos vectores unitarios son:

$$i (1, 0, 0), j (0, 1, 0), k (0, 0, 1)$$

Con la introducción de estos vectores unitarios fundamentales y de las definiciones dadas anteriormente obtenemos una forma alternativa de representar a un vector en función de sus componentes:

$$\mathbf{A} = A_x i + A_y j + A_z k \quad (1.17)$$

ya que según las reglas de suma de vectores y de multiplicación de los mismos por un escalar, el vector del segundo miembro tiene por componentes A_x, A_y, A_z , que son las del vector \mathbf{A} . Esta descomposición de un vector como suma de tres vectores en la dirección de los ejes de coordenadas, es muy importante y útil como tendremos ocasión de comprobar a lo largo del texto.

Para cada sistema de coordenadas, Fig. 1.12, se definen unos vectores unitarios fundamentales diferentes. No creemos que para el nivel que va dirigido este texto, se deba entrar ahora en la definición de los mismos.

Ejercicio 1.3.

Dados los vectores de componentes $\mathbf{A} (3, -1, -4)$, $\mathbf{B} (-2, 4, -3)$ y $\mathbf{C} (1, 2, -1)$, calcular: a) El vector $2\mathbf{A} - \mathbf{B} + 3\mathbf{C}$. b) $|\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{C}|$. c) Un vector unitario en la dirección del $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + 4\mathbf{C}$, pero de sentido contrario.

Solución:

Comenzaremos, aunque no sea necesario para la resolución del ejercicio, escribiendo cada uno de los vectores en función de los unitarios i, j, k :

$$\mathbf{A} = 3i - j - 4k, \mathbf{B} = -2i + j - 3k, \mathbf{C} = i + 2j - k$$

a) $2\mathbf{A} - \mathbf{B} + 3\mathbf{C} = 2(3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}) - (-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) +$

$+ 3(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 11\mathbf{i} - 8\mathbf{k}$

luego el vector pedido tiene de componentes $(11, 0, -8)$.

b) $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + 4\mathbf{C} = 17\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$. Su módulo valdrá: 19,95.
¿Por qué?

c) $\mathbf{u} = \frac{3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + 4\mathbf{C}}{|3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + 4\mathbf{C}|} = 0,05(17\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 10\mathbf{k})$

éste tiene el sentido del vector $(3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + 4\mathbf{C})$, para que tenga el sentido contrario, hay que calcular el vector opuesto, que tendrá de componentes $(-0,85, 0,15, 0,50)$.

§ 1.4 PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

Vamos a comenzar con las operaciones propias de los vectores, es decir aquellas que son específicas de este tipo de magnitudes.

Dados dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} se define como su **producto escalar**, a un *escalar* que es igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman (Fig. 1.18).

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta\end{aligned}\quad (1.18)$$

El ángulo θ se puede medir en cualquiera de los dos sentidos: $\cos \theta = \cos(2\pi - \theta) = \cos(-\theta)$.

El significado geométrico es que dicho producto es igual al *módulo de uno de ellos*, por ejemplo el \mathbf{A} , por la proyección del otro sobre él (Fig. 1.18). Como caso particular podemos indicar: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = A_x$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = A_y$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = A_z$.

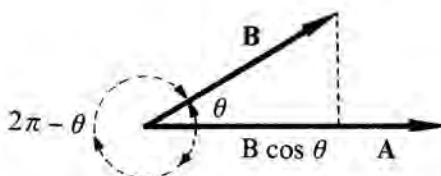


FIG. 1.18

A partir de la definición se deduce de forma inmediata:

- a) El *producto escalar de dos vectores perpendiculares es nulo*. Esta es la condición necesaria y suficiente de perpendicularidad, por ejemplo, entre rectas.

- b) El *producto escalar de un vector por sí mismo es igual al cuadrado de su módulo*: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$. En algunos textos se suele utilizar la notación $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$, que no pensamos sea demasiado correcta.

Propiedades del producto escalar:

Verifica la propiedad **comutativa**:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1.19)$$

lo cual es evidente a partir de la definición (1.18). Y la propiedad **distributiva respecto de la suma**:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (1.20)$$

La definición dada de producto escalar (1.18) es independiente del sistema de coordenadas elegido, ¿por qué?. Vamos a expresarlo ahora en función de las componentes cartesianas de los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} ; hemos de tener en cuenta, como hemos indicado ya innumerables veces, que si eligiésemos otro sistema de coordenadas su expresión sería diferente.

Teniendo en cuenta que: $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$, escribiendo los vectores de la forma (1.17) y aplicando la propiedad distributiva, se obtiene:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.21)$$

A lo largo del texto tendremos ocasión de comprobar la utilidad de esta operación. Una aplicación para la que se usa a menudo es para calcular el ángulo que forman dos vectores:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{AB} \quad (1.22)$$

Ejercicio 1.4.

Dados los vectores $\mathbf{A} (3, -3, -2)$ y $\mathbf{B} (3, 4, 0)$, calcula:
a) Su producto escalar, b) El ángulo que forman, c) Proyección de \mathbf{B} sobre \mathbf{A}

Solución:

- a) En la mayoría de los casos prácticos, resulta cómodo calcular el producto escalar a partir de (1.21)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 9 - 12 = -3$$

¿qué significado tiene el signo menos?

- b) A partir de (1.18) y (1.21) se puede calcular (1.22) el coseno del ángulo que forman ambos vectores

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} \approx 0,13$$

Al ser el coseno negativo, el ángulo está comprendido entre: $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$, ¿Por qué? $\theta = 97^\circ 31'$

c) La proyección de \mathbf{B} sobre \mathbf{A} vale, Fig. 1.18: $\mathbf{B} \cos \theta = 0,65$

¿Porqué para calcular la proyección, se ha prescindido del signo menos?

Ejercicio 1.5.

Para qué valores de a son perpendiculares los vectores $\mathbf{A} = a\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 2a\mathbf{i} + a\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$?

Solución:

Sabemos que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es nulo, (1.18). Haciendo uso de (1.21)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 = 2a^2 - 2a - 4$$

Luego son perpendiculares para $a = 2$ y $a = -1$.

§ 1.5. PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES.

Dados dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} se define como su **productor vectorial** a un vector, \mathbf{C} , perpendicular al plano determinado por ellos dos, módulo el producto de sus módulos por el seno del ángulo que forman y sentido tal que los vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} formen un triángulo orientado de la misma forma que un sistema de coordenadas XZY (ejes dextrógiros). Una definición equivalente es que su sentido sea el indicado por el dedo pulgar de la mano derecha (regla de la mano derecha), cuando el resto de los dedos se encuentran dirigidos desde \mathbf{A} a \mathbf{B} (Fig. 1.19):

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{AB} \sin \theta \quad (1.23)$$

El ángulo θ se debe medir siempre, y es un convenio, en sentido contrario a las agujas de un reloj a partir del primero de los vectores que figuren en el producto, Fig. 1.19. Hemos de resaltar que existe en la definición de este nuevo vector \mathbf{C} , una ambigüedad: su sentido, que hemos resuelto eligiéndolo de forma arbitraria.

Propiedades del producto vectorial: No verifica la propiedad conmutativa:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1.24)$$

ya que los vectores del primer y segundo miembro son opuestos y, por lo tanto, no iguales.

Presenta la propiedad distributiva respecto de la suma

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1.25)$$

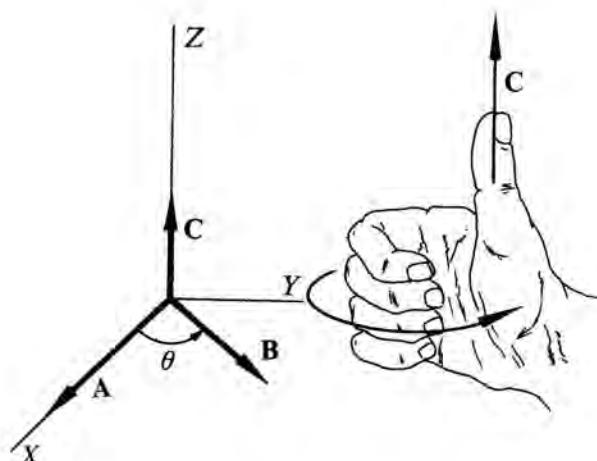


FIG. 1.19

La interpretación geométrica del producto vectorial, es que su módulo representa el área del paralelogramo formado por los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} (Fig. 1.20). Como la dirección de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es perpendicular a dicho paralelogramo, el producto vectorial se puede utilizar para representar áreas planas de forma unívoca.

Para expresar el producto vectorial en función de las componentes cartesianas de los vectores, tenemos en cuenta:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & , \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}, & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & , \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & , \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{array} \quad (1.26)$$

y aplicamos la propiedad distributiva al producto vectorial de los dos vectores, escritos de la forma (1.17),

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = & (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + \\ & + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.27)$$

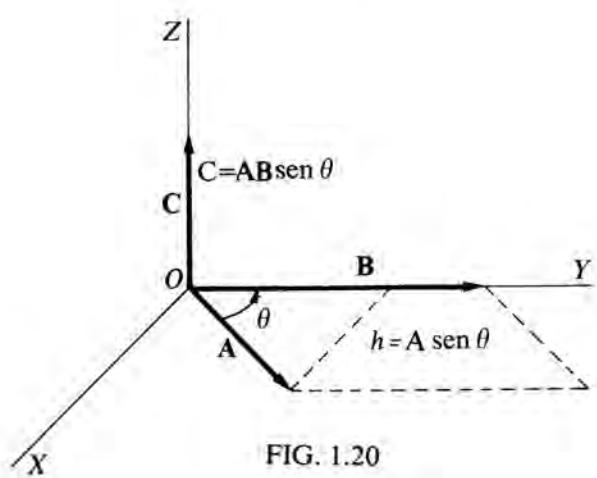


FIG. 1.20

que se puede escribir de forma más compacta:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.28)$$

sin más que recordar la forma de desarrollar los determinantes. A lo largo del texto tendremos ocasión de utilizar esta operación, para definir diversas magnitudes físicas.

El producto vectorial de dos vectores paralelos es el vector nulo, esta es la condición necesaria y suficiente –expresada en forma vectorial– para que dos rectas sean paralelas. También se deduce de su definición que el producto vectorial de un vector por sí mismo es el vector nulo.

Ejercicio 1.6.

Dados los vectores $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, calcular: a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$. b) Área del paralelogramo formado por ambos vectores. c) Un vector de módulo 3, perpendicular al plano formado por \mathbf{A} y \mathbf{B} . d) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B})$.

Solución:

a) Calculando el producto vectorial en función de las componentes (1.28):

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 21\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 8\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 21\mathbf{k}$$

Luego hemos comprobado, para este caso concreto, que no se verifica la propiedad commutativa (1.24), ya que

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$$

b) Hemos justificado, Fig. 1.20, que el módulo del producto vectorial representa el área del paralelogramo formado por ambos vectores, por lo tanto:

$$\text{Área paralelogramo} = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = 23,25$$

c) Un vector perpendicular al plano formado por \mathbf{A} y \mathbf{B} , tiene la dirección de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, o la de $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$. Para que tenga de módulo 3, calcularemos un vector unitario (\mathbf{u}) en dicha dirección y posteriormente lo multiplicaremos por tres.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|} = \pm 0,13(8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 21\mathbf{k})$$

¿Por qué hemos introducido el doble signo?

d) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{A} - \mathbf{B} = -7\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 16\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 42\mathbf{k}$$

Este apartado, también se puede resolver haciendo uso de la propiedad distributiva respecto de la suma (1.25):

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{A} - \mathbf{B} \times \mathbf{B}$$

ahora bien: $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, ¿Por qué? Por lo tanto:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = -2\mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$-2\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -2 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -2(-8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 21\mathbf{k})$$

resultado que coincide, como cabía esperar, con el obtenido por el primer procedimiento.

§ 1.6. INTRODUCCION AL CALCULO DIFERENCIAL VECTORIAL. DERIVADA DE UN VECTOR RESPECTO DE UN ESCALAR.

De la misma manera que se desarrolla un cálculo para las funciones reales de los números reales (escalares), donde se define la derivación, integración, diferenciación, etc., es posible hacerlo con las funciones vectoriales que dependen de un escalar. No vamos a definir las principales operaciones del cálculo diferencial vectorial, tan sólo lo haremos para la derivada, puesto que encuentra aplicación inmediata en la Cinemática, que es la parte siguiente de la Física que abordaremos. Las restantes operaciones las iremos introduciendo a medida que vaya surgiendo su necesidad a lo largo del texto.

En este libro sólo trataremos, además, de la integración de funciones vectoriales, y del gradiente de un escalar; el resto del cálculo diferencial vectorial no lo consideramos necesario, ni adecuado, para el nivel de formación matemática de los alumnos a los que va dirigido este texto.

Derivada de un vector respecto de un escalar

Sea una magnitud vectorial, $\mathbf{h}(\lambda)$, que depende de un escalar λ ; normalmente en la Física, el escalar es

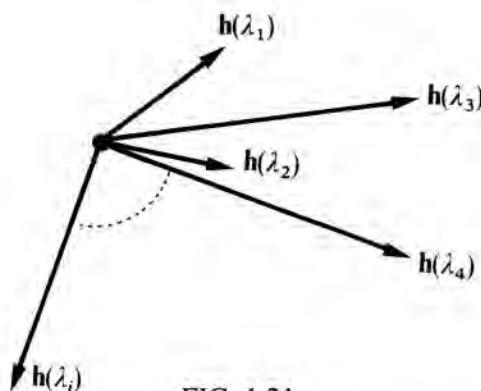


FIG. 1.21

el tiempo. Que \mathbf{h} es función λ , significa que el vector varía, en módulo y/o dirección, al hacerlo el escalar (Fig. 1.21).

Consideremos, respecto de un sistema de referencia la curva que describen los extremos del vector \mathbf{h} al variar, por hacerlo el escalar del que depende (Fig. 1.22). Representemos dos posiciones del mismo, una la correspondiente al valor λ del escalar: $\mathbf{h}(\lambda)$ y la otra al $\lambda + \Delta\lambda$: $\mathbf{h}(\lambda + \Delta\lambda)$.

$$\Delta\mathbf{h} = \mathbf{h}(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{h}(\lambda) \quad (1.29)$$

es un vector que tiene la dirección de la cuerda AB . Multipliquemos dicho vector por el escalar $1/\Delta\lambda$ (1.7). Este vector $\Delta\mathbf{h}/\Delta\lambda$ tendrá la misma dirección que $\Delta\mathbf{h}$. Si tomamos el límite de dicho vector, cuando la variación del escalar tiende a cero:

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{h}}{\Delta\lambda} \quad (1.30)$$

$B \rightarrow A$, a medida que $\Delta\lambda \rightarrow 0$. (Fig. 1.22). Pensemos, para visualizarlo, que en este proceso de tomar $\Delta\lambda$ cada vez más pequeño, $\Delta\mathbf{h}/\Delta\lambda$ cambia continuamente de dirección y módulo (Fig. 1.23). En el límite, B se encuentra muy cercano a A , y el vector $\Delta\mathbf{h}/\Delta\lambda$ coincide en dirección con la tangente en A , a la curva

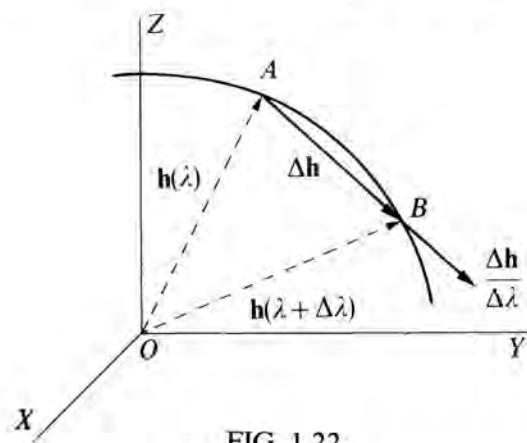


FIG. 1.22

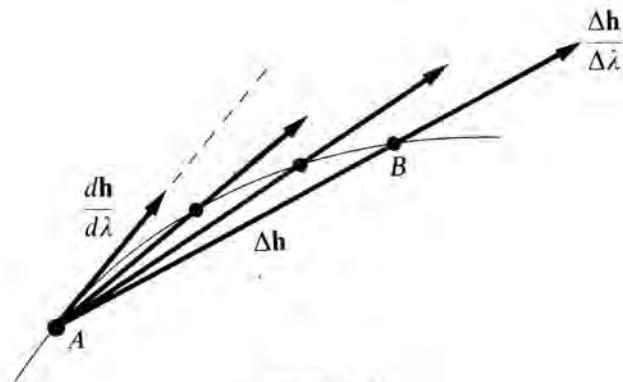


FIG. 1.23

descrita por los extremos de $\mathbf{h}(\lambda)$. Ahora bien:

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{h}}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbf{h}(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{h}(\lambda)}{\Delta\lambda} = \frac{d\mathbf{h}}{d\lambda} \quad (1.31)$$

Por analogía con la definición de derivada de una función escalar definimos la derivada de una función vectorial a partir de (1.31).

Por consiguiente, y para un sistema de coordenadas cartesianas: «la derivada de un vector \mathbf{h} respecto de un escalar λ , es un vector, cuya dirección es tangente a la curva descrita por los extremos del vector \mathbf{h} , en el punto considerado, y cuyas componentes son las derivadas, respecto del escalar, de las componentes de \mathbf{h} » (Fig. 1.24).

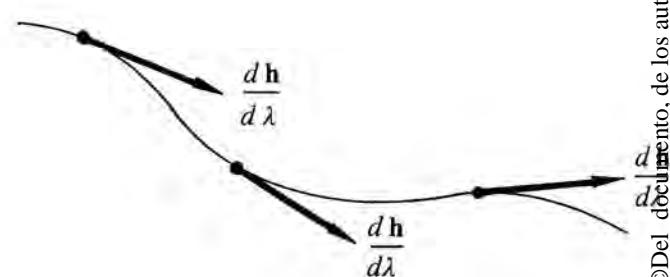


FIG. 1.24

$$\frac{d\mathbf{h}}{d\lambda} = \frac{dh_x}{d\lambda} \mathbf{i} + \frac{dh_y}{d\lambda} \mathbf{j} + \frac{dh_z}{d\lambda} \mathbf{k} \quad (1.32)$$

Esta expresión (1.32) se deduce directamente de la definición (1.31) y de (1.7).

Analicemos algunas consecuencias inmediatas de esta definición:

- a) Si el vector \mathbf{h} sólo varía en dirección, al hacerlo el escalar, pero no en módulo, sus extremos describirán una circunferencia: \mathbf{h} y $\frac{d\mathbf{h}}{d\lambda}$ serán perpendiculares.

- b) Si el vector \mathbf{h} sólo varía en módulo, pero no en dirección, sus extremos describen una recta, que es la que contiene a todos los vectores, luego: \mathbf{h} y $d\mathbf{h}/d\lambda$ tienen la misma dirección.

- c) Sea el vector $\mathbf{h} = h\mathbf{u}$, donde \mathbf{u} es un vector unitario en la dirección de \mathbf{h} . Derivemos dicha expresión, teniendo en cuenta que las reglas del cálculo diferencial, que conocen los alumnos, se pueden aplicar formalmente, sin modificarse a las funciones vectoriales:

$$\frac{d\mathbf{h}}{d\lambda} = \frac{dh}{d\lambda}\mathbf{u} + h \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \quad (1.33)$$

Matemáticamente nos indica, que la derivada de un vector se puede descomponer como suma de dos vectores, uno que lleva la dirección del vector sin derivar y el otro una dirección perpendicular (Fig. 1.25) ¿por qué?

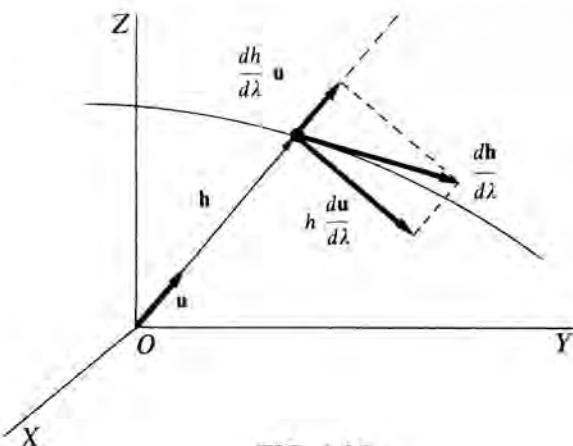


FIG. 1.25

El significado físico es mucho más interesante, ya que dicha descomposición nos permite separar las variaciones en el módulo de \mathbf{h} : $dh/d\lambda$ de las variaciones dirección: $d\mathbf{u}/d\lambda$. Hay que resaltar que el vector $d\mathbf{u}/d\lambda$ no es unitario.

Debemos señalar que esta descomposición, así como sus consecuencias, es independiente del sistema de coordenadas que se elija

Ejercicio 1.7

Dados los vectores: $\mathbf{A} = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 5t^2 \mathbf{i} + \mathbf{j} - t^3 \mathbf{k}$, calcular:

a) $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$	b) $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$	c) $\frac{d \mathbf{A} }{dt}$
$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$	$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$	$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})$

Solución:

Se trata de un ejercicio exclusivamente de cálculo, y cuyo objetivo es que el alumno desarrolle su capacidad para derivar funciones vectoriales que dependen de un escalar, y cuyo uso es muy amplio a lo largo de toda la Física. Al mismo tiempo, queremos que se familiarice con algunas propiedades de la derivación de funciones vectoriales, que son análogas a las que conoce para las funciones escalares.

a)

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \frac{d\mathbf{B}}{dt} = 10t \mathbf{i} + \mathbf{j} - 3t^2 \mathbf{k}$$

b)

$$\left| \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right| = 1,4$$

el módulo del vector derivado, en este caso, no es función del tiempo.

c) $|\mathbf{A}| = (1+t^2)^{1/2} \quad \frac{d|\mathbf{A}|}{dt} = t(1+t^2)^{-1/2}$

Luego vemos que, por lo menos para este caso,

$$\frac{d|\mathbf{A}|}{dt} \neq \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

Es decir, que la derivada del módulo de un vector no es igual, en general, al módulo de la derivada (problema 24).

$$d) \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} \quad (1.34)$$

para comprobar esta propiedad de la derivación de un producto escalar, calcularemos ambos miembros

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \frac{d}{dt} (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) = \\ &= \frac{d}{dt} (5t^2 \sin t + t \cos t - t^4) = 9t \sin t + (5t^2 + 1) \cos t - 4t^3 \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} = 10t \sin t + \cos t - 3t^3 \quad (1.36)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} = 5t^2 \cos t - t \sin t - t^3 \quad (1.37)$$

Sumando (1.36) y (1.37) se obtiene (1.35), con lo que queda comprobada la expresión (1.34).

$$e) \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (1.38)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sin t & \cos t & t \\ 5t^2 & t & -t^3 \end{vmatrix} =$$

$$= -t^2(1 + \cos t)\mathbf{i} + t^3(5 + \sin t)\mathbf{j} + t(\sin t - 5t \cos t)\mathbf{k}$$

Derivando este vector,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= -t(2 + 3t \cos t - t^2 \sin t)\mathbf{i} + \\ &+ t^2(15 + 3 \sin t + \cos t)\mathbf{j} + (-9t \cos t + (1+5t^2) \sin t)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos t & -\sin t & 1 \\ 5t^2 & t & -t^3 \end{vmatrix} =$$

$$= t(-1 + t^2 \sin t)\mathbf{i} + t^2(5 + t \cos t)\mathbf{j} + t(\cos t + 5t^2 \sin t)\mathbf{k} \quad (1.40)$$

$$\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sin t & \cos t & t \\ 10t & 1 & -3t^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -t(1 + 3t \cos t)\mathbf{i} + t^2(10 + 3 \sin t)\mathbf{j} + (\sin t - 10t \cos t)\mathbf{k} \quad (1.41)$$

Sumando (1.40) y (1.41) se obtiene (1.39), con lo que queda justificada (1.38).

f) Haciendo uso de (1.34) se obtiene:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A} = 2\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

$$\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \sin t \cos t - \cos t \sin t + t = t$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = 2t$$

CUESTIONES

1. ¿Cuándo se dice que una cierta figura geométrica presenta simetría, frente a una cierta operación de transformación?
2. ¿Qué operaciones de simetría conoces, aparte de las citadas en el texto?
3. ¿Qué es una magnitud vectorial? ¿y una escalar?
4. ¿Qué ventajas presenta la formulación de las leyes físicas mediante vectores?
5. ¿Cuálquier número es un escalar? Justificar la respuesta.
6. ¿Recuerda el alumno, la definición axiomática de vector, estudiada en matemáticas? Compárala con la introducida en este capítulo.
7. ¿Cuándo una magnitud física se puede representar mediante un vector?
8. Las componentes de un vector, ¿dependen del sistema de coordenadas elegido?, ¿y el módulo?, ¿y la dirección?. Justificar la respuesta.
9. ¿Cuál es la utilidad de los vectores unitarios?
10. ¿Sabrías escribir la ecuación vectorial de una recta?
11. En qué se diferencia un sistema de referencia de un sistema de coordenadas.
12. ¿Qué significado tiene un coseno director negativo?
13. ¿Cómo se puede caracterizar un vector, una vez elegido un sistema de coordenadas?
14. ¿Qué representan los vectores unitarios $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$?
15. Definir el producto vectorial de dos vectores.
16. ¿Por qué se dice en el texto que en la definición del producto vectorial de dos vectores, que es otro vector, hay una ambigüedad?. Razonarlo. ¿Se podría evitar?
17. ¿Por qué $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$?

18. ¿Qué significa que un vector es función de un escalar?
 19. La derivada de un vector de módulo constante, ¿es necesariamente nula? Razonar la respuesta.
 *20. Demostrar que si $\mathbf{A}(t)$:

$$\frac{d|\mathbf{A}|}{dt} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

PROBLEMAS

1. Representar gráficamente los siguientes vectores en el plano:
 a) Uno de módulo 10 unidades y que forma un ángulo de 30° con el sentido positivo del eje de abscisas.
 b) Uno cuyo origen sea el punto $(-1, 2)$ y extremo el $(3, -4)$.
 c) Uno cuyas componentes sean $(3, 2)$ y origen el punto $(1, 1)$.
2. Siendo \mathbf{A} y \mathbf{B} dos vectores, demostrar las desigualdades
 $(a) |\mathbf{A} + \mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$, $(b) |\mathbf{A} - \mathbf{B}| \geq |\mathbf{A}| - |\mathbf{B}|$
- *3. Dados dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , demostrar que $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ tiene el mismo módulo y dirección, respecto de los dos sistemas de referencia indicados en la Fig. 1.27.
4. Hallar un vector unitario, cuya dirección y sentido sea el de la resultante de los vectores $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.
5. Siendo $\mathbf{A} (3, -1, -4)$, $\mathbf{B} (-2, 4, -3)$ y $\mathbf{C} (1, 2, -1)$, calcular: (a) $2\mathbf{A} - \mathbf{B} + 3\mathbf{C}$, (b) $|\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}|$, (c) $|3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + 4\mathbf{C}|$, (d) un vector unitario con la dirección y sentido del $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + 4\mathbf{C}$.
6. Si $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$, demostrar que: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$.
7. Hallar el ángulo formado por los vectores $\mathbf{A} (2, 2, -1)$ y $\mathbf{B} (6, -3, 2)$.
8. Hallar la proyección del vector $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ según la dirección de $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$.

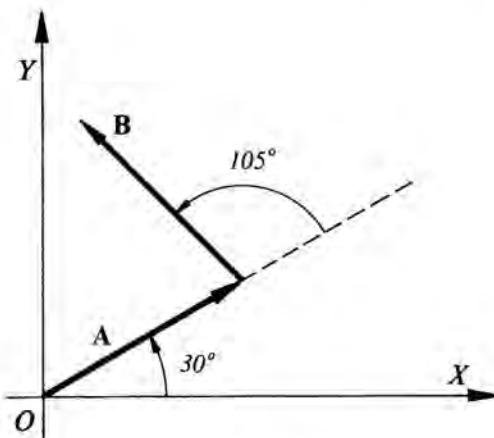


FIG. 1.26

9. Determinar el vector unitario perpendicular al plano formado por $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.
- *10. Demostrar que el valor absoluto de $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ es igual al volumen de un paralelepípedo de aristas \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} .
- *11. Hallar los cosenos directores de la recta que pasa por los puntos $(3, 2, -4)$ y $(1, -1, 2)$.
12. Hallar las componentes del vector de módulo 2 situado en el plano XY , que forma un ángulo de 30° con el eje X .

- *13. Calcular el ángulo que forman dos diagonales de un cubo.
- *14. Dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} tienen el mismo módulo, por ejemplo de 10 unidades. Están orientados de la forma indicada en la Fig. 1.26; su suma es el vector \mathbf{S} . Calcular: (a) las componentes del vector \mathbf{S} , (b) el módulo de \mathbf{S} , y (c) el ángulo que forma \mathbf{S} con el eje X .

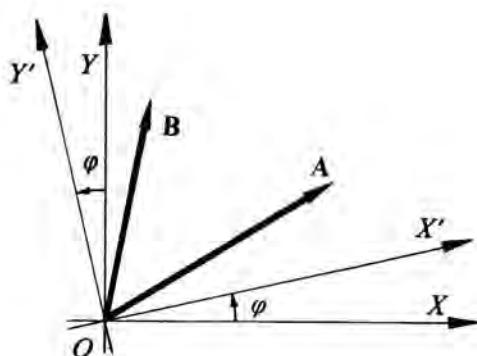


FIG. 1.27

- *15. Dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} forman un ángulo θ . Demostrar que el módulo del vector resultante es:
 $S = (\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + 2\mathbf{AB} \cos\theta)$.
- *16. Utilizando cálculo vectorial, calcular: (a) las longitudes de las diagonales de un cubo, (b) los ángulos que forman éstos con los lados adyacentes, (c) los ángulos de las diagonales con caras adyacentes, (d) los ángulos entre diagonales.
17. Calcular la proyección del vector $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ sobre la recta que pasa por los puntos $(2, 3, -1)$ y $(-2, -4, 3)$.
- *18. Calcular la distancia desde el punto $P (4, 5, -7)$ a la línea recta que pasa por el punto $Q (-3, 6, 12)$ y es paralela al vector $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Calcular también la distancia desde el punto P al plano en que se encuentra Q y es perpendicular a \mathbf{A} .
19. Un vector tiene de módulo 5, y sus tres componentes son iguales. ¿Cuánto valen éstas?
20. Si $\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 12$, y $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$, ¿cuánto vale \mathbf{B} ?
21. Dados dos vectores $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, calcular: (a) el módulo de cada uno, (b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, (c) el ángulo que forman, (d) cosenos directores de cada uno, (e) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, (f) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.
22. Hallar el área del paralelogramo cuyos lados son los vectores $\mathbf{A} (1, -1, 2)$ y $\mathbf{B} (-3, 0, 2)$.
23. Los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} forman entre sí un ángulo de 45° y el módulo de \mathbf{A} vale 3. Hallar cuál debe ser el módulo de \mathbf{B} para que $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ sea perpendicular a \mathbf{A} .
- *24. Analizar en qué casos, la derivada del módulo de un vector coincide con el módulo de la derivada.
25. Siendo $\mathbf{A} = t^2 \mathbf{i} - t \mathbf{j} + (2t + 1)\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = (2t - 3)\mathbf{i} + \mathbf{j} - t\mathbf{k}$, calcular:

- $\frac{d\mathbf{A}}{dt}, \frac{d\mathbf{B}}{dt}$
- $\frac{d|\mathbf{A}|}{dt}$
- $\left| \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|$
- $\frac{d}{dt} |\mathbf{A} + \mathbf{B}|$
- $\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt})$

para $t = 1$

CAPITULO II

CINEMATICA DEL PUNTO

El problema del movimiento es uno de los más fundamentales con que se enfrenta la actividad humana. A su estudio dedica la Física un apartado: la **Mecánica**. En este capítulo, abordaremos la caracterización del movimiento, sin preocuparnos de las causas que lo producen o que lo alteran. La parte de la Física cuyo objetivo es éste, se denomina **Cinemática**. En el capítulo VI, iniciaremos el estudio de la **Dinámica**, que estudia el movimiento en relación con las causas que lo producen (las fuerzas).

Se comienza (§ 2.1) por establecer la aproximación de punto material, así como la definición y caracterización básica de su movimiento. Para lograr esta caracterización no es suficiente conocer, en cada instante, su posición respecto de un cierto sistema de referencia; por ello, para que sea completa se introducen los conceptos de velocidad y aceleración (§ 2.2). A continuación, se estudian las componentes intrínsecas del vector aceleración (§ 2.3), que nos servirán para caracterizar, de forma inequívoca, a los movimientos (§ 2.4). De todos los movimientos se estudian con detalle los rectilíneos y circulares, tanto uniformes como uniformemente acelerados, ya que son los más utilizados en el nivel a que va dirigida esta obra.

Este capítulo, cuyos contenidos se utilizan prácticamente en toda la Física, se complementa con el siguiente. Es indudable, que el **movimiento es un concepto relativo**, en el sentido que siempre se caracte-
riza en relación a un cierto sistema de referencia, elegido por el observador. Ahora bien, es posible que un mismo movimiento esté descrito, o sea necesario estudiarlo, desde diferentes sistemas de referencia; por lo tanto, necesitamos conocer cómo se relacionan las descripciones que, de un mismo movimiento, hacen diferentes observadores. A esta problemática dedicamos el capítulo III. Por razones metodológicas, hemos creído conveniente separar ambos capítulos.

§ 2.1 APROXIMACION DE PUNTO MATERIAL

Comenzamos estudiando la Cinemática del **punto material** o de la **partícula**. Se trata de un ente ideal que tiene una cierta masa y no ocupa volumen en el

espacio; como consecuencia, no tiene ni estructura física, ni extensión. Por supuesto, estos entes no existen en la naturaleza, sin embargo se trata de una noción muy útil y conveniente. Su localización se puede hacer de forma muy simple, en términos de sus coordenadas como punto geométrico. Ahora bien, estos argumentos por sí solos no justifican su introducción. El punto material es la representación o **modelo** más simple que se puede elegir, para estudiar la evolución temporal de un cuerpo de dimensiones finitas. Esta aproximación, la de no considerar las dimensiones del cuerpo que se mueve, es válida. Su validez depende del grado de precisión que se desee, o pueda obtenerse, en la determinación de la posición geométrica del cuerpo, cuyo movimiento se quiere describir.

La *aproximación de punto material* es válida cuando las dimensiones del cuerpo son despreciables frente a las de la trayectoria que describe. Por ejemplo, si observamos el firmamento en una noche clara, veremos que las estrellas o incluso algunos planetas (por ejemplo, Venus) aparecen como puntos luminosos cuyo diámetro es mucho más pequeño que la distancia entre ellos; si la situación se trata desde una perspectiva científica, es todavía más impresionante: la distancia del Sol a la estrella más cercana, la Centauro Alfa, es alrededor de treinta millones de veces el diámetro del Sol. Por lo tanto, no es de extrañar que al estudiar el movimiento de los cuerpos celestes, éstos se pueden considerar, en primera aproximación, como puntos materiales.

El mismo razonamiento se puede aplicar al estudio, en la aproximación clásica, de las partículas que forman la materia: electrones, protones y neutrones, ya que sus dimensiones son despreciables frente a los desplazamientos que experimentan. Así, los protones y neutrones forman el núcleo, que ocupa una región en el centro del átomo cuyo diámetro es, aproximadamente, de 10^{-12} cm. El electrón tiene un diámetro de 10^{-13} cm y se encuentra aproximadamente a 10^{-8} cm del núcleo. Por lo tanto, el átomo es casi 10^4 veces mayor que el núcleo y 10^5 que el electrón; el átomo, como el sistema solar, está formado en su mayor parte por espacio no ocupado. No es de extrañar pues, que en primera aproximación estas partículas sean asimilables a puntos materiales.

Ejercicio 2.1.

Comparar el carácter puntual de un satélite de 1 m de diámetro, en su órbita alrededor de la Tierra, a 6.000 km de altura, con el de un electrón que describe una trayectoria circular, de radio 1 cm, en el interior de un campo magnético. El diámetro del electrón es aproximadamente 10^{-13} cm.

¿Puede considerarse como puntual una pelota de tenis en las trayectorias que le imprimen los jugadores? ¿y la Tierra en su movimiento alrededor del Sol? Radio de la órbita terrestre $\approx 1,5 \times 10^{11}$ m.

Solución:

El valor del cociente entre las dimensiones características del objeto y las dimensiones características de la trayectoria nos dará el grado de bondad de la aproximación de considerar a aquél como un punto material.

$$\text{Satélite: } \frac{1}{12 \times 10^6} \approx 10^{-7}$$

$$\text{Electrón: } \frac{10^{-15}}{2 \times 10^{-2}} = 5 \times 10^{-12}$$

$$\text{Pelota de tenis: } \left\{ \begin{array}{l} \text{diámetro} \sim 6 \times 10^{-2} \text{ m} \\ \text{recorrido característico} \sim 20 \text{ m} \end{array} \right. \quad \frac{6 \times 10^{-2}}{20} = 3 \times 10^{-3}$$

$$\text{Tierra: } \frac{6 \times 10^6}{1,5 \times 10^{11}} = 4 \times 10^{-5}$$

Luego el electrón aparece como el cuerpo que más carácter puntual tiene y la pelota de tenis como el más voluminoso, relativamente. Por otra parte, el satélite tiene más carácter puntual en su órbita terrestre, que la Tierra en su órbita solar.

En muchos casos, sin embargo, se puede estudiar el movimiento de un cuerpo, considerado como punto material, sin que sea aplicable el criterio anterior. Posteriormente estudiaremos que a todo cuerpo material se le puede asociar un punto característico, denominado *centro de masas* (§ 6.5), cuyo movimiento caracteriza al del cuerpo, considerado como un todo. En este sentido el movimiento de cualquier cuerpo se puede analizar en términos del movimiento de este «punto material» asociado. Piénsese, por ejemplo, en el movimiento de un coche o de un bloque sobre un plano, que recorren distancias del orden de magnitud de sus propias dimensiones. En estos casos la aproximación es válida, como veremos, siempre que en el movimiento del cuerpo no intervengan rotaciones (§ 9.1) alrededor de un eje, es decir, el movimiento sea exclusivamente de traslación (§ 9.1). Por ejemplo, la Tierra puede ser considerada, en primera aproximación, como un punto material en su movi-

miento alrededor del Sol; esta aproximación no es válida, por supuesto, en el caso de que interese estudiar el movimiento de rotación de la Tierra, alrededor de su eje.

Por lo tanto, *el asimilar un cuerpo en movimiento a un punto material es una aproximación válida en aquellos casos en que la precisión en la localización geométrica del cuerpo sea del orden de las dimensiones de éste. Este tratamiento también es válido en los casos en que no se cumpla la condición anterior, pero el movimiento del cuerpo sea exclusivamente de traslación.*

En muchas ocasiones, sin embargo, el grado de detalle que se desea conocer, acerca del movimiento del cuerpo, es tal que no es posible la aproximación anterior. O el cuerpo tiene un movimiento que no es sólo de traslación. En ambos casos, es necesario tomar en consideración las dimensiones del cuerpo, es decir, su estructura interna. Estos problemas los trataremos en el capítulo VIII.

CARACTERIZACION DEL MOVIMIENTO

La idea intuitiva que todos nosotros tenemos acerca del espacio y el tiempo, coincide con la que Newton introdujo en el s. XVII. El espacio, según Newton, es *absoluto*, en el sentido que existe permanente e independientemente de si hay cualquier cuerpo en él o moviéndose en su seno. El espacio es una especie de matriz tridimensional, en la que se pueden colocar objetos o a través de la cual los cuerpos se pueden mover, sin que exista interacción entre éstos y el espacio. Cada cuerpo en el universo se encuentra en un punto determinado en el espacio y en el tiempo. Si está en movimiento, cambia continuamente su posición con el tiempo. Además, las medidas físicas que se realicen en este espacio, verifican los teoremas de la geometría euclídea; por lo tanto, el espacio se considera euclídeo.

El tiempo, bajo la perspectiva de Newton, también es *absoluto* y transcurre independientemente de cualquier objeto o acontecimiento físico. No se puede ni aumentar, ni disminuir, el ritmo al que transcurre el tiempo; este transcurrir es uniforme en todo el universo. Relojes situados en los diferentes planetas y estrellas, que se sincronicen simultáneamente en un instante dado, al cabo de un cierto intervalo temporal, seguirán sincronizados, ya que el tiempo es absoluto.

Los dos párrafos anteriores describen, en un lenguaje un tanto coloquial, algunas nociones de «sentido común», acerca de la naturaleza del espacio y el tiempo. La Teoría de la Relatividad demuestra que las ideas de espacio y tiempo no son tan simples, como se puede pensar a primera vista. Muchas de las ideas expresadas anteriormente, aunque intuitivamente parezcan correctas, dan lugar a consecuencias que son inconsistentes con la experiencia. Esto se comprobó, a finales del s. XIX y principios del XX, al analizar movimientos que tenían lugar a velocidades próximas a la de la luz (~ 300.000 kms $^{-1}$), así como fenómenos del Electromagnetismo. Einstein, al desarrollar su Teoría de la Relatividad Especial, indicó las limitaciones más importantes de las ideas clásicas, y como debían modificarse éstas, especialmente el concepto de tiempo (§ 18.4).

Ahora bien, una cosa son los conceptos abstractos del espacio y tiempo absolutos, y otra describir el movimiento real de un cuerpo, en función de los cambios de posición medidos durante intervalos de tiempo, también medidos. Nuestra atención, dentro del marco de la **Mecánica Clásica**, se centra en la única base que disponemos para describir el movimiento: la observación de lo que un punto material hace con relación a otros.

Decimos que una partícula se mueve, cuando cambia su posición respecto de otra. Por lo tanto, resulta evidente que este concepto, expresado de ese modo, es poco preciso y por consiguiente de poca utilidad. Cuando decimos que una partícula se mueve, *tene mos que especificar claramente respecto de quién se mueve*. La descripción del movimiento depende fundamentalmente del punto o referencia que tomemos para describirlo. Así por ejemplo, una casa está en reposo respecto a la Tierra, pero se mueve con relación al Sol. Al recorrer una autopista con un coche, nos parece como si los que se moviesen fuesen los árboles, las casas, las personas, etc.; pero para un hombre situado en el campo, el que se mueve es el coche; así podríamos citar innumerables ejemplos.

Para describir el movimiento, por lo tanto, el observador debe definir un **sistema de referencia**, respecto del cual analizar el movimiento. El movimiento de una partícula P sería descrito de forma diferente por dos observadores que se encontrasen en diferentes sistemas de referencia, a menos que uno de ellos se encontrase en reposo (quieto) respecto del otro (Fig. 2.1). Como ejemplo para fijar las ideas, consideremos

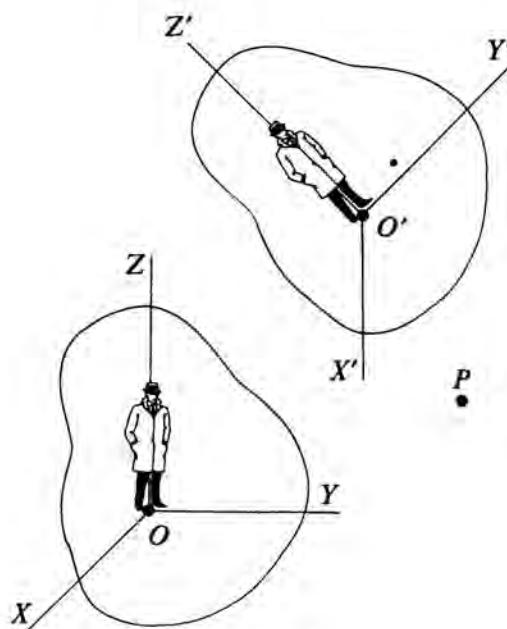


FIG. 2.1

dos observadores, uno situado en la Tierra y el otro en el Sol y que ambos deseen analizar el movimiento de la Luna. Para el situado en la Tierra (sistema de referencia $O' X' Y' Z'$), la Luna tiene un movimiento circular; para el observador solar (sistema de referencia $O X Y Z$), la Luna parece describir una especie de sinusóide (Fig. 2.2). Si los observadores conocen el movimiento de un sistema de referencia respecto del otro, fácilmente pueden relacionar los resultados obtenidos por cada uno de ellos (§ 3.3 y 3.4).

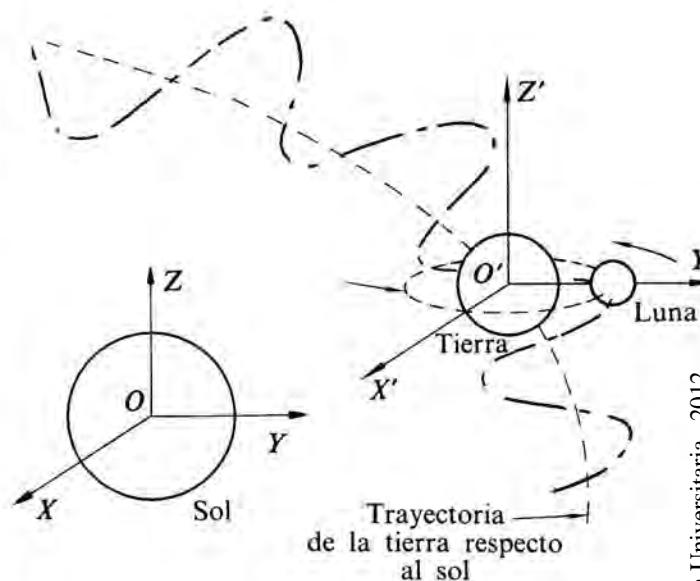


FIG. 2.2

La elección de un sistema de referencia específico es una cuestión de gusto y conveniencia; aunque resulta ventajoso a menudo, elegir aquél respecto del cual, la descripción del movimiento es la más simple posible. Sobre este punto volveremos posteriormente (§ 4.2), ya que desde el punto de vista dinámico existen razones teóricas importantes para preferir unos sistemas de referencias a otros.

Como ya indicamos en el capítulo anterior (§ 1.3), se puede caracterizar la posición de un punto, respecto de un sistema de referencia, de diversas maneras. Cada una de ellas da lugar a un **sistema de coordenadas** diferente. Nosotros seguiremos utilizando, en general, el cartesiano rectangular, que es el más simple y de mayor utilidad, por lo menos para la descripción y análisis de los fenómenos objeto de este libro. En él, la posición de un punto está definida por las tres coordenadas (x, y, z) , Fig. 1.11. Estas se pueden considerar las componentes de un vector (§ 1.3), que recibe el nombre de **vector de posición**: $\mathbf{r}(t)$, Fig. 2.3.

La curva descrita por los extremos del vector de posición recibe el nombre, por definición, de **trayectoria**.

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (2.1)$$

¿Será ésta la ecuación vectorial de la curva?

Las componentes del vector de posición son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria.

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (2.2)$$

Ahora bien, la trayectoria, por si sola, no caracteriza al movimiento, ya que una misma trayectoria se

puede recorrer de muy diversas maneras (p.e.: un punto con movimiento rectilíneo uniforme, uniformemente acelerado o vibratorio armónico, todos describen la misma trayectoria) y también distintas trayectorias pueden corresponder a movimientos que tengan cierta similitud. Resulta, por tanto, necesario introducir magnitudes que pongan de manifiesto estos aspectos: la velocidad y la aceleración, con objeto de tener completamente caracterizado el movimiento.

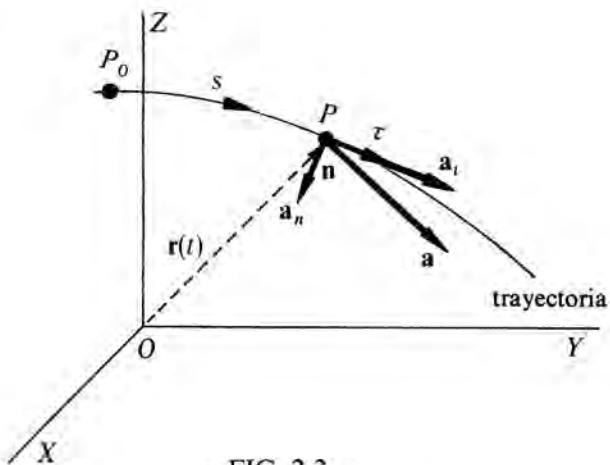


FIG. 2.3

§ 2.2 VECTOR VELOCIDAD Y VECTOR ACCELERACION

El vector velocidad se define como:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (2.3)$$

teniendo en cuenta (§ 1.6), conocemos perfectamente toda la información que encierra dicha definición. Es un vector tangente a la trayectoria; en función de sus componentes cartesianas:

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \quad (2.4)$$

Sus dimensiones y unidades, en el SI, son: [L] [T]⁻¹ y ms⁻¹, respectivamente.

En (§ 11.1), cuando surja la necesidad por el problema físico que tratemos, consideraremos las componentes de este vector en coordenadas polares.

Una expresión alternativa para el vector velocidad es:

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \tau = v \tau \quad (2.5)$$

donde s es la variable que indica el arco recorrido por la partícula sobre la trayectoria; τ es un vector unitario en la dirección de la tangente, en cada punto a la trayectoria. (Fig. 2.3).

La equivalencia entre (2.3) y (2.5) se establece fácilmente, si se tiene en cuenta la definición de elemento de arco ds de una curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ en el punto correspondiente al valor t del parámetro, como el módulo del vector $d\mathbf{r} = \frac{dr}{dt} dt$ para el valor t .

Se tiene por tanto:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \quad (2.6)$$

La longitud de un arco de curva es la integral de ds extendida al mismo. Estas definiciones son puramente matemáticas, por eso se han incluido en letra más pequeña. Desde el punto de vista físico, la integral de (2.6), $s(t)$, nos indica la longitud de arco de trayectoria recorrida por el punto, en un intervalo de tiempo determinado. Hay que hacer notar, la dificultad de utilizar analíticamente, (2.5) en problemas concretos, ¿has pensado cómo se puede calcular τ^2 ? De todas formas no hay que preocuparse, ya que son nociones que debido a su complejidad no corresponden al nivel de este libro. Lo que si queremos destacar es que (2.5) está definida respecto de la trayectoria y (2.3) respecto de un sistema de referencia ajeno, o extrínseco, a la misma.

El vector aceleración se define como:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2.7)$$

teniendo en cuenta (§ 1.6) conocemos, también, toda la información que encierra esta definición. Es un vector que, en general, no es tangente a la trayectoria; según la definición de derivada de un vector respecto de un escalar (el tiempo): \mathbf{a} es tangente a la curva descrita por los extremos del vector velocidad, pero esta curva no es la trayectoria. Respecto de ésta, \mathbf{a} tiene una dirección arbitraria (Fig. 2.3).

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k} = \\ &= \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.8)$$

estas son las componentes del vector aceleración respecto del sistema de referencia $OXYZ$. Sus dimensiones y unidades, en el SI, son: [L] [T]⁻² y ms⁻², respectivamente. En § 11.1 expresaremos el vector aceleración en función de sus coordenadas polares.

Una vez definidas las tres magnitudes que proporcionan toda la información necesaria, desde el punto de vista físico, para la carac-

terización del movimiento, pasaremos a considerar el **problema fundamental de la Cinemática**: *conocida la aceleración de un punto material, calcular la trayectoria que describe*

$$\mathbf{a}(t) \rightarrow \mathbf{v}(t) \rightarrow \mathbf{r}(t) \quad (2.9)$$

Este problema, que es inverso al seguido para definir las diferentes magnitudes, implica dos integraciones:

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t) dt + \text{cte}, \quad \mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t) dt + \text{cte} \quad (2.10)$$

Las constantes arbitrarias de integración, que en definitiva determinan el tipo concreto de trayectoria, representan normalmente las **condiciones iniciales** del problema: es decir el valor que toman \mathbf{v} y \mathbf{r} en el instante $t=0$; en ocasiones, las constantes se determinan dando el valor específico de \mathbf{v} y \mathbf{r} , en cualquier instante arbitrario de tiempo.

La integral de una función vectorial, que no se introduce en § 1.6, puede definirse utilizando las integrales de las componentes.

* Ejercicio 2.2

La aceleración de un punto material, que se mueve a lo largo de una recta, viene dada por la función: $a = 4 - t^2$, donde a se expresa en m s^{-2} y t en s. Si en el instante inicial, $t=0$, su posición y su velocidad son respectivamente: 1.º $x(0)=0$, $v(0)=0$, 2.º $x(0)=1\text{ m}$, $v(0)=1\text{ m s}^{-1}$; calcular $x(t)$ y $v(t)$, para cada una de dichas condiciones iniciales.

Solución:

No se trata de un problema de Física, sino más bien de Matemática Aplicada, que se ha propuesto para comprobar, en un caso concreto, la importancia de las condiciones iniciales en la determinación de las características del movimiento.

Al ser un problema unidimensional, ¿por qué?, (2.10) se convierte en :

$$v(t) = \int a(t) dt + \text{cte}, \quad x(t) = \int v(t) dt + \text{cte} \quad (2.11)$$

Calculemos, en primer lugar, su velocidad:

$$v(t) = \int (4-t^2) dt + \text{cte}, \quad v(t) = 4t - \frac{t^3}{3} + \text{cte}$$

El valor de la constante de integración, para cada una de las condiciones iniciales, es:

1.º $0 = \text{cte}$, 2.º $1 = \text{cte}$; por lo tanto, llevando cada uno de estos valores a las correspondientes expresiones anteriores, obtenemos:

$$1.º) \quad v(t) = 4t - \frac{1}{3}t^3 \quad 2.º) \quad v(t) = 4t - \frac{1}{3}t^3 + 1 \quad (2.12)$$

La distancia recorrida sobre la trayectoria, $x(t)$, será –para cada uno de los dos casos– (2.11):

$$1.º) \quad x(t) = 2t^2 - 0.08t^4, \quad x(t) = 2t + 2t^2 - 0.08t^4 + 1 \quad (2.13)$$

donde ya hemos introducido las condiciones iniciales.

¿Qué conclusiones extraes, a partir de (2.12) y (2.13), para los dos movimientos, que presentando la misma aceleración, tienen diferentes condiciones iniciales?

§ 2.3 COMPONENTES INTRÍNSECAS DEL VECTOR ACCELERACIÓN

Teniendo en cuenta (2.5) y la definición del vector aceleración:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \tau + \mathbf{v} \frac{d\tau}{dt} \quad (2.14)$$

este resultado es el correspondiente al (1.33), para estos vectores específicos.

La expresión (2.14) representa la separación del vector aceleración en dos componentes: una tangencial $\frac{d\mathbf{v}}{dt} \tau$ y la otra normal $\mathbf{v} \frac{d\tau}{dt}$, a la trayectoria. ¿Por qué?

Realmente, existen infinitas normales –todas las contenidas en un plano– a la tangente en cualquier punto de la curva (trayectoria). Ahora bien, sólo una de ellas, la «*normal principal*» cuya dirección se caracteriza por el vector unitario \mathbf{n} , se encuentra en el plano definido por «las tangentes sucesivas» (es decir, un plano definido por $\tau(t)$ y $\tau(t+\Delta t)$, cuando $\Delta t \rightarrow 0$). Las correspondientes «normales principales sucesivas» $\mathbf{n}(t)$, $\mathbf{n}(t+\Delta t)$ se cortarán en un cierto punto C , Fig. 2.4, cuando $\Delta t \rightarrow 0$; la distancia ρ desde el «*centro de curvatura*» C , al punto en movimiento se denomina «*radio de curvatura*», que en general variará de unos tramos de la trayectoria a otros.

El desplazamiento $\Delta s = v \Delta t$ subtiende un ángulo, $\Delta\theta = \Delta s / \rho$, desde el centro de curvatura; además, $|\Delta\tau| = \Delta\theta$, como se observa en la Fig. 2.4, teniendo en cuenta que la cuerda y el arco son infinitésimos equivalentes. Por lo tanto,

$$\frac{d\tau}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta t}$$

tiene la dirección de \mathbf{n} , como ya sabíamos, y su módulo es:

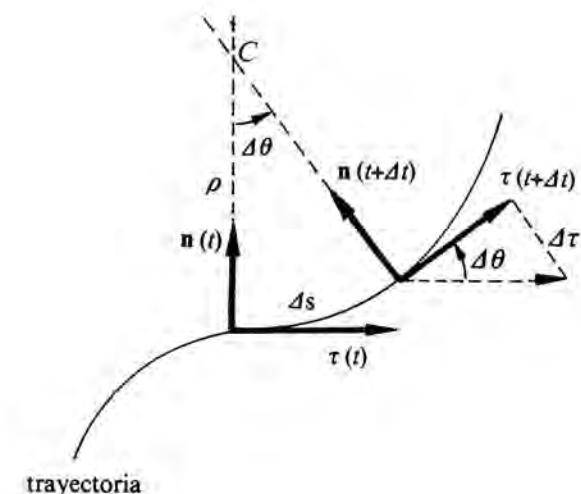


FIG. 2.4

$$\left| \frac{d\tau}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \theta|}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{\rho} v \quad (2.15)$$

Por lo tanto, (2.14) se puede escribir como:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \tau + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} \quad (2.16)$$

La interpretación física de esta expresión es de gran importancia, en el estudio de la Cinemática. El primer sumando recibe el nombre de **aceleración tangencial** y *v* mide las variaciones en módulo del vector

velocidad: $\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \tau$. El segundo, **aceleración normal**

y mide las variaciones en dirección (2.3) del vector velocidad:

$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}$. ρ es el radio de curvatura de la trayectoria – concepto puramente geométrico – que, para una curva arbitraria, es una función que toma un valor diferente en cada punto; \mathbf{n} es un vector unitario en la dirección normal, en cada punto, a la trayectoria (perpendicular a la tangente), (Fig. 2.5). La condición $\rho=\infty$ caracteriza a las rectas.

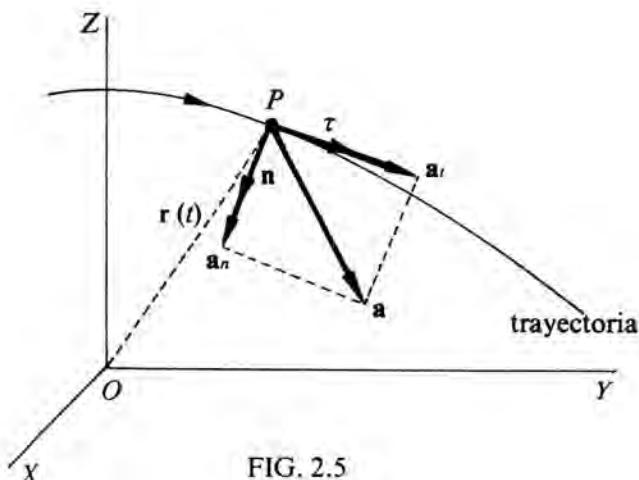


FIG. 2.5

A a_t y a_n se les llama **componentes «intrínsecas» de la aceleración**; es decir unas componentes cuyas direcciones, en cada punto, no las fija el observador situado en el sistema de referencia, sino la propia trayectoria. Son unas componentes referidas a un referencial situado sobre la trayectoria (vectores unitarios: \mathbf{n} y τ). Estos resultados son válidos tanto si ésta es plana, como si es alabeada.

Somos conscientes de la dificultad para el alumno, del concepto de radio de curvatura; se trata de un

concepto geométrico que a nivel práctico, no vamos a utilizar en todo el texto, ya que nos limitaremos al estudio de movimientos rectilíneos ($\rho=\infty$) y circulares ($\rho=\text{cte}$), pero no curvilíneos en general ($\rho \neq \text{cte}$). Sin embargo, ha sido necesario introducir este concepto, para justificar que \mathbf{a}_n mide las variaciones en dirección del vector velocidad, ¿lo puedes justificar?

§ 2.4 CLASIFICACION DE LOS MOVIMIENTOS A PARTIR DE LAS COMPONENTES INTRINSECAS DE LA ACCELERACION

Vamos a clasificar los movimientos, a partir de los diferentes valores que pueden tomar las componentes intrínsecas de la aceleración. No creemos necesario, ser demasiado específicos para calcular $s(t)$, $v(t)$ en los diferentes casos, pues ya hemos indicado la pauta en el ejercicio 2.2; los resultados que se resumen, se obtienen de forma directa a partir de (2.10) y (2.16).

a) *Respecto a la aceleración tangencial.* Como su dirección siempre será tangente a la trayectoria, nos fijaremos exclusivamente en su módulo.

a.1-. $a_t = 0$, $v = \text{cte}$, **M. UNIFORME**

$$s = v_0 t + s_0$$

a.2-. $a_t = \text{cte}$, $\text{cte} \leq 0$ **M. UNIFORMEMENTE ACCELERADO O DESACCELERADO**

A partir de (2.16) podemos calcular el módulo del vector velocidad:

$$\frac{dv}{dt} = a_t = \text{cte} , \quad v = a_t t + v_0 \quad (2.17)$$

donde v_0 es el valor que toma su módulo en el instante inicial. A partir de (2.5) se puede calcular cómo varía el arco recorrido por la partícula sobre la trayectoria (¡qué no es la ecuación de la trayectoria!).

$$\frac{ds}{dt} = a_t t + v_0 , \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2 \quad (2.18)$$

a.3.- $a_t \neq \text{cte}$

M. VARIADO SIN UNIFORMIDAD

no se puede calcular $v(t)$, ni $s(t)$ mientras no nos especifiquen la forma cómo a_t varía con el tiempo. Un ejemplo típico de movimiento de este tipo es el vibratorio armónico: $a_t = -\omega^2 x = -\omega^2 A_0 \sin(\omega t + \theta_0)$.

b) *Respecto de la aceleración normal*, en cuanto a su módulo:

b.1.-. $\rho = \infty$, $a_n = 0$, **M. RECTILINEO**
 b.2.-. $\rho = \text{cte} = R$, $a_n \neq 0$, **M.CIRCULAR**

en general esta condición no implica que el módulo de la aceleración normal sea constante, ¿por qué?

b.3.-. $a_n \neq 0$, $\rho \neq \text{cte}$

M. CURVILINEO

la forma particular de trayectoria depende de la forma cómo varie el radio de curvatura: $\rho(x, y, z)$. Recibiendo en cada caso un nombre específico: elíptico, parabólico, helicoidal, etc.

A partir de esta clasificación se pueden extraer, de forma inmediata, algunas conclusiones:

1.º) Movimiento rectilíneo uniforme:

$$a_n = 0 \quad , \quad a_t = 0 \quad , \quad \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \quad (2.19)$$

$$x = x_0 + v_0 t$$

2.º) Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado o desacelerado:

$a_n = 0$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_t = \text{cte}$, el vector aceleración tiene la dirección del vector velocidad; entonces se dice –en los libros elementales– que es «tangente» a la trayectoria.

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_t t + \mathbf{v}_0 \quad (2.20)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2 \quad (2.21)$$

donde x representa la distancia a que se encuentra la partícula, en cada instante, del origen; está medida sobre la trayectoria ($x \equiv s$). Ahora aparece con toda claridad que (2.21) no representa la ecuación de la trayectoria, que es una recta, sino la forma en que la recorre (la dependencia $x(t)$ es parabólica).

3.º) Movimiento circular uniforme:

$$\rho = R = \text{cte} \text{ (circular)} ;$$

$$a_t = 0 \quad , \quad \mathbf{v} = \text{cte} \text{ (uniforme)} \rightarrow a_n = \text{cte}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad , \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_n \quad ,$$

$$\mathbf{v} = v_0 \tau \rightarrow \quad s = v_0 t + s_0 \quad (2.22)$$

s representa el arco recorrido, por el punto, sobre la

circunferencia en el tiempo t .

4.º) Movimiento circular uniformemente acelerado o desacelerado:

$$\rho = R = \text{cte} \quad , \quad a_t = \text{cte} \quad , \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_t t \quad (2.23)$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2 \quad , \text{ como } \mathbf{v} \neq \text{cte} \rightarrow a_n \neq \text{cte}$$

El valor de la aceleración normal varía de unos instantes a otros. Como consecuencia, el módulo de la aceleración total no es constante, aunque lo sea la tangencial.

Aunque ya tenemos totalmente caracterizado el movimiento circular (2.22) y (2.23), sabemos de cursos anteriores que su estudio se puede plantear, también, en función de magnitudes características del mismo (θ, ω, α), en vez de utilizar las lineales (s, v, a), como hicimos anteriormente.

Para simplificar el tratamiento, y por ser el único caso adecuado para los niveles a que va dirigida esta obra, supondremos que *el plano en que se encuentra la trayectoria tiene una orientación fija en el espacio*. En este caso ω y α tienen la misma dirección, que coincide con la perpendicular a dicho plano por el centro de la trayectoria, Fig. 2.6. Por lo tanto, no es necesario considerar su carácter vectorial y se pueden considerar como si fuesen magnitudes escalares:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (2.24)$$

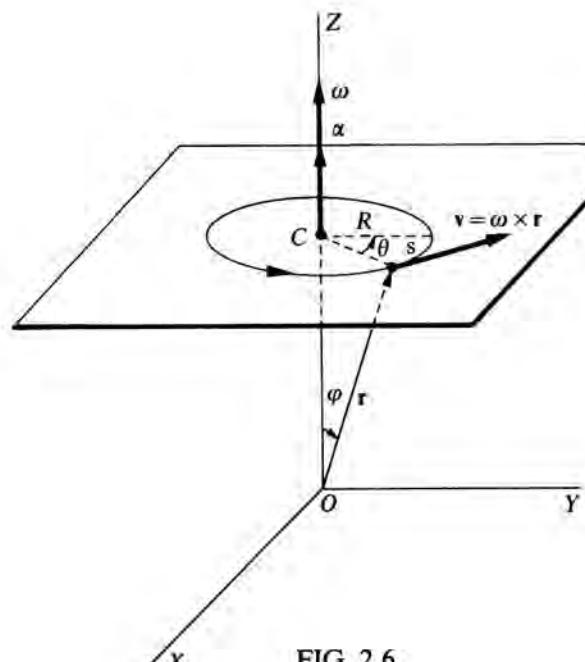


FIG. 2.6

¿Cómo definirías ω y α ? ¿Cuáles son las dimensiones y unidades, en el SI, de cada una de estas magnitudes?

Supongamos una partícula que describe un movimiento circular, Fig. 2.6. Teniendo en cuenta (2.5):

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega \quad (2.25)$$

en la Fig. 2.6, $R = r \operatorname{sen}\varphi$, luego: $\mathbf{v} = r\omega \operatorname{sen}\varphi$. Recordando (§1.5) y la definición de ω , podemos escribir la siguiente relación vectorial:

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} \quad (2.26)$$

la validez de la cual se puede comprobar de forma inmediata.

A partir de la definición de vector aceleración (2.7) y aplicando las reglas de derivación de las funciones vectoriales (Ejercicio 1.7),

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(\omega \times \mathbf{r}) = \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} + \omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \alpha \times \mathbf{r} + \omega \times \mathbf{v} \quad (2.27)$$

El primer sumando es un vector perpendicular al plano formado por α y \mathbf{r} (que es el mismo que forman ω y \mathbf{r}), por lo tanto de la misma dirección que \mathbf{v} (2.26), tangente a la trayectoria de la partícula: aceleración tangencial. El segundo, $\omega \times \mathbf{v}$, está dirigido hacia el centro de la trayectoria: aceleración normal (Fig. 2.7). Luego:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n, \quad \mathbf{a}_t = \alpha \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{a}_n = \omega \times \mathbf{v} \quad (2.28)$$

Veamos las aplicaciones concretas de estas magnitudes características, al estudio del movimiento circular:

1.º Movimiento circular uniforme:

$$\mathbf{a}_t = 0, \quad \alpha = 0, \quad \Rightarrow \omega = \omega_0 = \text{cte}, \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t \quad (2.29)$$

$$\mathbf{a}_n = \text{cte}, \quad \mathbf{a}_n = \frac{\mathbf{v}^2}{R} = \omega^2 R$$

Si al tiempo que tarda la partícula en dar una vuelta

completa se le llama periodo T , se verifica: $2\pi = \omega T$. ¿Por qué?

2.º) Movimiento circular uniformemente acelerado o desacelerado

$$a_t = \text{cte}, \quad a_t = \alpha R, \quad \alpha = \text{cte}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}, \quad \omega = \alpha t + \omega_0 \quad (2.30)$$

análogamente integrando $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, con las condiciones iniciales adecuadas,

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (2.31)$$

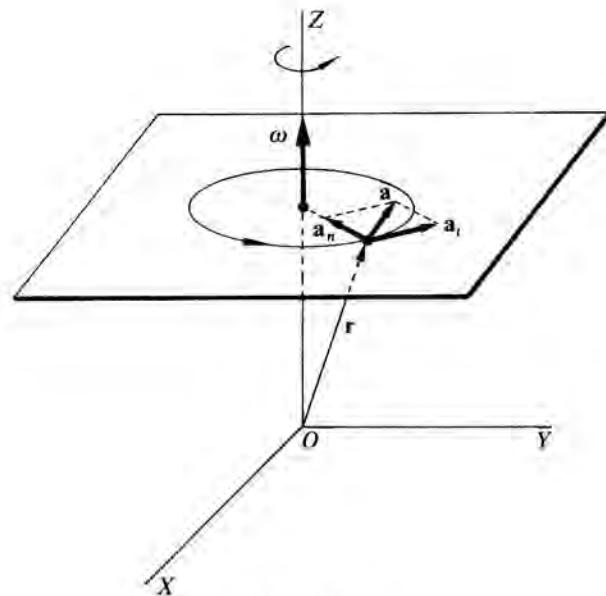


FIG. 2.7

Se puede observar que multiplicando (2.29), (2.31) por R en ambos miembros, se obtienen (2.22) y (2.23), respectivamente. Luego se trata de descripciones alternativas del mismo movimiento, bien en función de magnitudes angulares (2.29), (2.31) ó de lineales (2.22), (2.23).

Ejercicio 2.3.

Un circuito tiene la forma y dimensiones indicadas en la Fig. 2.8. Un ciclista lo recorre en sentido contrario a las agujas del reloj, partiendo del punto A y estando inicial-

mente en reposo. Durante 5 s acelera a razón de $1,2 \text{ m s}^{-2}$; a continuación, recorre con velocidad constante 120 m; en un cierto instante frena para entrar en la curva (D) con una velocidad de 4 m s $^{-1}$. El tramo circular DE lo recorre con velocidad constante, asimismo recorre con movimiento uniforme el tramo recto EF.

El tramo circular FA comienza a recorrerlo con velocidad constante, pero al llegar a un cierto punto (X) del mismo, y durante 5 s, comienza a frenar de modo que al llegar al punto de partida se encuentra en reposo. Se pide: 1.) Tipo de movimiento que lleva el ciclista en cada tramo del circuito. Razonar la respuesta. Dibujar aproximadamente $v(t)$, $a_t(t)$, $a_n(t)$ y $a(t)$. 2.) Tiempo que tarda en recorrer el tramo AD. 3.) Aceleración en el tramo DE. 4.) Velocidad angular en dicho tramo. Tiempo que tarda en recorrerlo. 5.) Aceleración angular en el tramo FA. 6.) Espacio que recorre sobre la curva desde que empieza a frenar (X) hasta que se para (A). 7.) Aceleración normal al cabo de 2 s de comenzar a frenar. Expresión de a_n durante el trayecto XA. 8.) Tiempo total que tarda en recorrer el circuito.

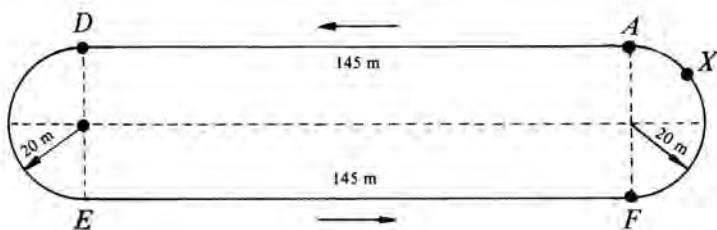


FIG. 2.8

Solución:

Somos conscientes que este problema puede «asustar» al alumno, por la longitud de su enunciado. Sin embargo, creemos que es preferible incluir en un mismo problema todos los contenidos correspondientes a un mismo apartado, que resolver muchos que atiendan sólo a ciertos aspectos. De este modo, además, se le puede quitar a ciertos alumnos la sicciosis normal de colecciónar problemas de Física, como el mejor método para resolver uno dado.

Los problemas de este tipo, o sea los que tienen un enunciado largo, hay que comenzar por leerlos completos, para tener una idea –aunque sea vaga– de lo que tratan. Posteriormente, se vuelven a leer con más atención, y se van resolviendo por apartados. En todo problema de Cinemática, es esencial saber identificar, en cada momento, el tipo de movimiento que lleva el móvil, y una vez hecho ésto aplicar las ecuaciones correspondientes.

- 1.) En el tramo AD, el móvil presenta tres tipos diferentes de movimiento rectilíneo, como fácilmente se infiere del enunciado. Estos se resumen en el esquema siguiente:

AD	$AB: 0 < t \leq 5 \text{ s}$	M.R.U.A.
	$BC: \text{al recorrer los } 120 \text{ m siguientes}$	M.R.U.
	$CD: \text{cuando emplea el freno, hasta llegar a } D.$	M.R.U.R.

En el tramo AB: $a_t = \text{cte} > 0$, en el BC: $a_t = 0$, y en el CD: $a_t = \text{cte} < 0$. En todos ellos $a_n = 0$, por tratarse de un movimiento rectilíneo.

En el tramo semicircular DE, el movimiento es circular uniforme, por lo tanto: $a_n = \text{cte}$, $a_t = 0$. En el EF, rectilíneo uniforme: $a_t = 0$, $a_n = 0$. El FA es, quizás el más difícil de resolver:

$$FA \left\{ \begin{array}{l} FX: \text{Desde que entra en la curva, M.C.U. hasta que comienza a frenar} \\ XA: \text{Desde que comienza a frenar, hasta que se para en } A \quad \text{M.C.U.R.} \end{array} \right.$$

En el tramo FX: $a_n = \text{cte}$, $a_t = 0$, en el XA: $a_t = \text{cte} < 0$, $a_n \neq \text{cte}$, ya que el módulo de la velocidad no es constante. ¿Por qué?

Hay que tener presente que el módulo del vector aceleración, en función de las componentes intrínsecas, vale:

$$a = (a_t^2 + a_n^2)^{1/2} \quad (2.32)$$

por lo tanto, su valor en los diferentes tramos vendrá dado por las expresiones:

$$\begin{array}{ll} AB: a = \text{cte} > 0 & DE: a = \text{cte} > 0 \\ BC: a = 0 & EF: a = 0 \\ CD: a = \text{cte} < 0 & FX: a = \text{cte} < 0 \end{array}$$

en el XA la situación es un poco más compleja:

$$v = v_x - a_t t, \quad v_x: \text{velocidad con que llega al punto } X$$

$$a_n = \frac{(v_x - a_t t)^2}{R}, \quad a_t = \text{cte} < 0$$

luego a es de la forma, (2.32)

$$a = \left(k_1^2 + \frac{(k_2 - k_1 t)^2}{k_3^2} \right)^{1/2}$$

donde k_1 , k_2 y k_3 son constantes que representan a a_t , v_x , R , respectivamente.

El dibujo, aproximado, de $v(t)$, $a_t(t)$, $a_n(t)$ y $a(t)$ es ahorrado inmediato y se representa en la Fig. 2.9. En la ordenada $a_t(t)$ no hemos representado su módulo, sino la componente correspondiente al vector \mathbf{a}_n , con objeto de poder distinguir entre el movimiento uniformemente acelerado (M.U.A.) y el retardado (M.U.R.).

$$2.) t_{AD} = t_3 = t_{AB} + t_{BC} + t_{CD} = 5 + t_{BC} + t_{CD} \quad (2.33)$$

Tramo AB: aplicando (2.20) y (2.21), con las condiciones iniciales correspondientes a este tramo,

$$AB = 15 \text{ m} \quad v_B = 6 \text{ m s}^{-1}$$

Tramo BC : aplicando (2.19), $t_{BC} = 20$ s

Tramo CD : aplicando (2.20) y (2.21), para el caso desacelerado,

$$10 = 6 t_{CD} - \frac{1}{2} a_{CD} t_{CD}^2 \quad , \quad 2 = a_{CD} t_{CD}$$

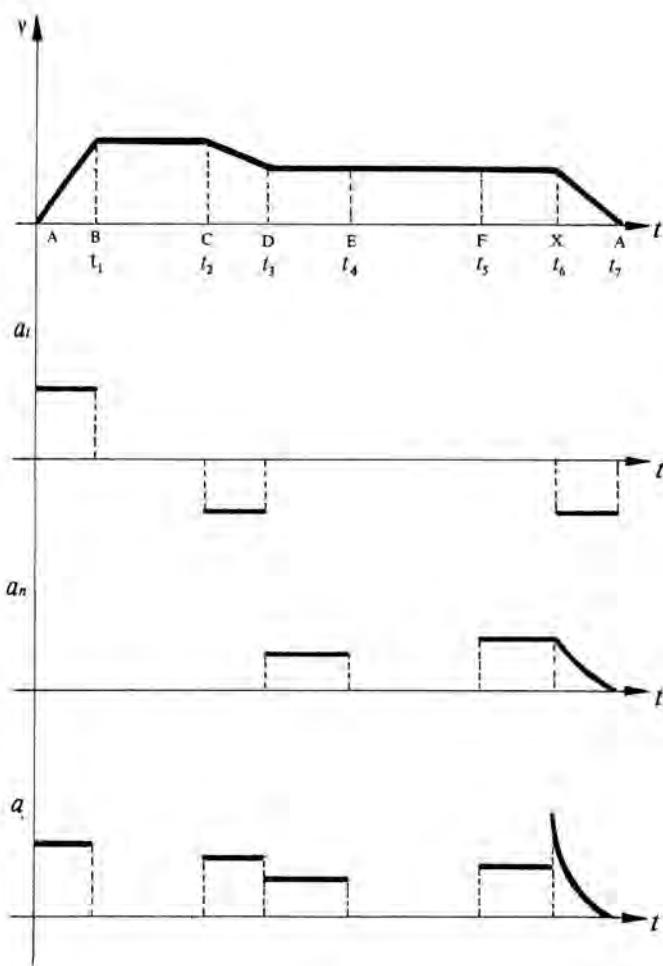


FIG. 2.9

resolviendo el sistema se obtiene: $t_{CD} = 2$ s , $a_{CD} = 1 \text{ ms}^{-2}$.

Sustituyendo en (2.33), los diferentes tiempos parciales calculados, se obtiene: $t_{AD} = t_3 = 27$ s.

3.) En todo este tramo: $v = 4 \text{ m s}^{-1}$, por ser el movimiento uniforme. El móvil sólo presenta, como ya hemos dicho, aceleración normal, que es constante.

$$a = a_n = 0,80 \text{ m s}^{-2}$$

4.) Aplicando (2.25): $\omega = 1/5 \text{ rad s}^{-1}$. Al ser el movimiento uniforme, la aceleración angular es nula (2.29). Haciendo uso de (2.29): $t_{DE} = 5\pi = 15,7$ s

También se puede calcular a partir de (2.22), ¿cómo lo harías?

Como al final pide el tiempo total que tarda en recorrer el circuito, calcularemos el que invierte en el tramo EF , con objeto de llevar una cierta sistemática en la resolución. A partir de (2.19): $t_{EF} = 36,3$ s.

5.) En el tramo FA , el móvil lleva dos tipos de movimiento, cuyas ecuaciones respectivas son:

$$\widehat{FX} = 4t_{FX}, \quad v_x = 4 \quad (2.34)$$

$$4 = a_t t_{XA}, \quad \widehat{XA} = 4t_{XA} - \frac{1}{2} a_t t_{XA}^2, \quad t_{XA} = 5 \text{ s} \quad (2.35)$$

Por lo tanto (2.29) y (2.30), en el tramo FX la aceleración angular es nula, ¿por qué?. En el XA es constante, y vale: $a_t = 0,80 \text{ m s}^{-2} \rightarrow \alpha = 0,04 \text{ rad s}^{-2}$, teniendo en cuenta que el movimiento es retardado.

6.) Haciendo uso de (2.35), $XA = 10 \text{ m}$.

7.) En el tramo XA , la aceleración normal no es constante, ¿por qué?. Para calcularla, en un instante dado, tenemos que determinar previamente la velocidad lineal, o la angular, en dicho instante

$$v = 2,4 \text{ m s}^{-1}, \quad a_n = 0,3 \text{ m s}^{-2}$$

En este tramo, la expresión de $a_n(t)$ es:

$$a_n(t) = \frac{(v_x - a_t t)^2}{R}, \quad a_n(t) = 32 \times 10^{-3} (5 - t)^2$$

8.) Para conocer el tiempo total, sólo nos falta calcular t_{FX} . A partir de (2.34):

$$FX = FA - XA = 62,8 - 10 = 52,8 \text{ m}; \quad t_{FX} = 13,2 \text{ s}$$

Por lo tanto, $t_7 = 27 + 15,7 + 36,3 + 13,2 + 5 = 97,2 \text{ s}$

Cuestiones

1. ¿Bajo qué circunstancias es válida la aproximación de punto material, en el estudio de la Cinemática? ¿Es necesario, siempre, que se cumplan dichas circunstancias?. Razonarlo.
2. ¿En qué casos puede considerarse la Tierra como un punto material? ¿En cuáles no?.
3. ¿Qué diferencia existe entre sistema de referencia y sistema de coordenadas?
4. ¿En qué casos a y v tienen la misma dirección?

5. ¿Cómo se puede pasar de las ecuaciones paramétricas de la trayectoria (2.2), a la ecuación vectorial (2.1)? ¿Qué representa $s(t)$? $s(t)$: arco recorrido por el móvil, sobre la trayectoria, en función del tiempo.
6. ¿Puede el vector velocidad variar de dirección, sin cambiar de módulo? En caso afirmativo, dar un ejemplo.
7. ¿Qué relación existe, para un movimiento unidimensional de una partícula, entre la pendiente de la curva $x(t)$ y su velocidad? ¿Qué se puede decir, acerca de la velocidad de una partícula, en un punto de $x(t)$, en que la pendiente es positiva? y en el que la pendiente sea nula?
8. ¿Es posible que un móvil tenga velocidad nula y aceleración no nula?. Dibujar una gráfica $v(t)$ y $a(t)$ en que esto ocurra.
9. ¿Puede cambiar la dirección de la velocidad de una partícula, si su aceleración es constante?. Razonar la respuesta.
10. ¿A qué se llaman condiciones iniciales en la resolución de un problema de Cinemática? ¿Cómo influyen en la resolución del mismo?
11. Diferencias y analogías entre las componentes extrínsecas (2.8) y las intrínsecas (2.16) del vector aceleración.
12. ¿Por qué, en general, $a \neq \frac{dv}{dt}$? ¿Cuándo se verifica la igualdad?
13. Significado físico de la aceleración tangencial y de la aceleración normal?
- *14. ¿Por qué la aceleración normal siempre está dirigida hacia la concavidad de la trayectoria?
15. Indicar las características de las componentes intrínsecas del vector aceleración de una partícula, si su movimiento es: a) rectilíneo uniformemente variado, b) circular uniformemente retardado, c) circular, d) armónico simple.
16. ¿Puede cambiar el sentido del vector aceleración en: a) un movimiento uniformemente acelerado, b) un movimiento rectilíneo de carácter general? Razonar cuidadosamente la respuesta.
17. Clasificar el movimiento de caída libre de un punto material en las proximidades de la superficie, según el estudio realizado en § 2.4. Ecuaciones de dicho movimiento.
- *18. Una partícula se lanza verticalmente hacia arriba. Un observador que se encuentra en el suelo afirma que su aceleración es positiva, y otro -también localizado en el suelo- que es negativa. Razonar por qué ambos pueden tener razón (!) ¿Toman ambos la velocidad inicial como positiva?
19. ¿Puede tener la aceleración sentido opuesto a la velocidad? Razonar la respuesta.
20. ¿Qué aspectos del vector velocidad permanecen constantes, y cuáles cambian, en un movimiento circular uniforme?
- *21. Un punto material se lanza verticalmente hacia arriba. Tomando en cuenta la resistencia del aire, ¿cabe esperar que el tiempo que tarda en subir hasta una cierta altura, sea mayor o menor que el que tarda en bajar?
- *22. ¿Puede existir un movimiento en dos dimensiones, con una aceleración actuando sólo en una dimensión? En caso afirmativo, dar diferentes ejemplos en que ocurra.

Problemas

1. Dibujar las gráficas correspondientes a la velocidad y al espacio recorrido, en función del tiempo, para una partícula en movimiento si su aceleración viene dada gráficamente por: a) Fig. 2.10 (a), b) Fig. 2.10 (b), c) Fig. 2.10 (c).

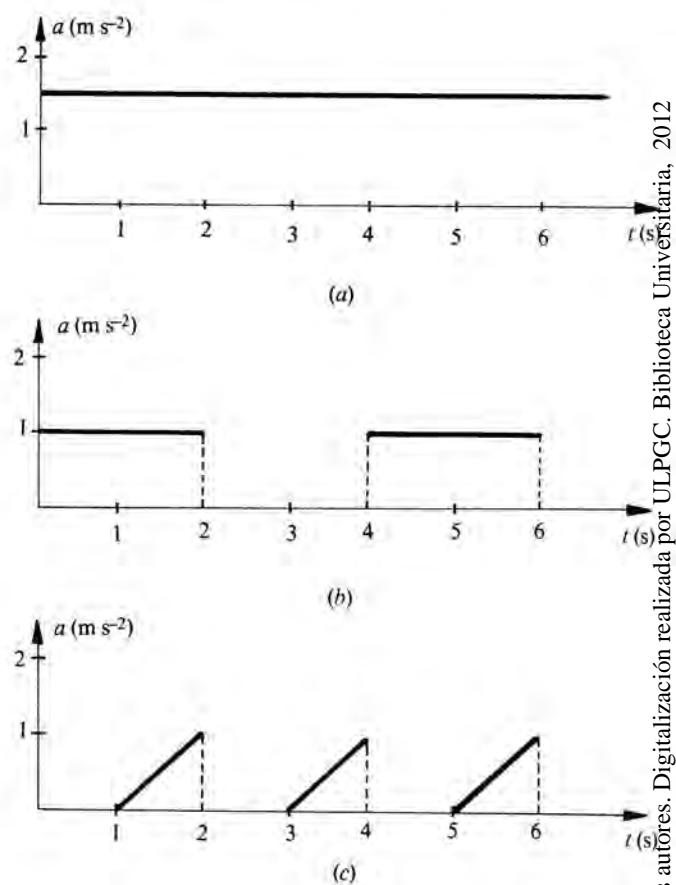


FIG. 2.10

2. Dibujar las gráficas de la aceleración y del espacio recorrido, en función del tiempo, si su velocidad viene dada gráficamente en la Fig. 2.11.

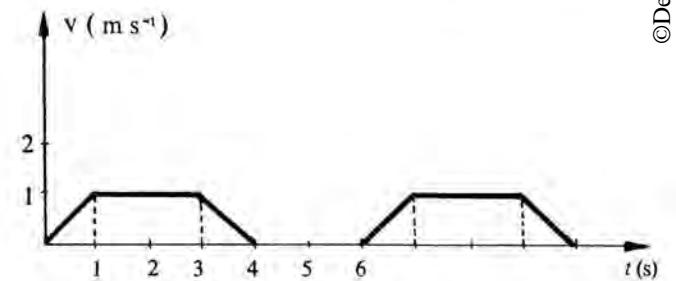


FIG. 2.11

3. Un punto material tiene un movimiento rectilíneo. Si x_0 , a , v_0 , β y γ son constantes, calcular $v(t)$ y $a(t)$ para cada una de las siguientes funciones que indican

el espacio recorrido en función del tiempo:

a) $x(t) = \beta t = -\gamma t^3$,

b) $x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$,

c) $x(t) = x_0 - 3t^2$

Dimensiones y unidades, en el SI, de cada una de las constantes anteriores, en los tres apartados del problema.

- * 4. Una partícula parte del reposo y acelera de forma no uniforme, según la expresión: $a(t) = bt$. (a) Si a se expresa en m s^{-2} ¿qué unidades tiene la constante b ? (b) Justificar que la velocidad es proporcional a t^2 ; calcular la constante de proporcionalidad. (c) ¿Qué distancia recorre, en función de b , durante los 10 primeros segundos?
5. Un coche parte del reposo y se mueve durante 1 s, con una aceleración de 1 m s^{-2} . Entonces desconecta el motor y, como consecuencia del rozamiento, se encuentra sometido a una aceleración negativa (¿qué significa ésto?) de $5 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$, durante 10 s. Al cabo de este tiempo, frena y se para en 5 s más. Calcular el espacio total recorrido por el coche. Representar gráficamente x , v y a en función del tiempo.
6. Un coche se encuentra parado delante de un semáforo que está en rojo. Cuando cambia a verde, acelera uniformemente, durante 6 s, con una aceleración de 2 m s^{-2} ; a partir de este momento se mueve con velocidad uniforme. En el instante que el coche inició su movimiento en el semáforo, lo adelanta un camión que se mueve en su misma dirección; el camión llevaba una velocidad uniforme de 10 m s^{-1} . ¿Al cabo de cuánto tiempo, y a qué distancia del semáforo, el coche adelanta al camión? Resolver el problema analíticamente y gráficamente.
7. Una persona corre a la máxima velocidad que puede, de 4 m s^{-1} , con objeto de llegar a tiempo de subir a un autobús. Cuando se encuentra a 6 m de éste se pone en marcha y acelera de forma constante a razón de 1 m s^{-2} . (a) ¿Cuánto tiempo tarda la persona en alcanzar el autobús? (b) Si el viajero se encontrase a 10 m del vehículo, cuando éste se pone en marcha, ¿allegaría a alcanzarlo? En caso negativo, calcular la distancia mínima a que llegan a estar el viajero y el autobús. (c) Dibujar la variación de la distancia en función del tiempo, entre ambos, para los casos (a) y (b).
8. Por una carretera recta van dos coches en el mismo sentido. Cada uno de ellos lleva una velocidad de 22 m s^{-1} ($\sim 80 \text{ km h}^{-1}$) y la distancia entre ellos es de 28 m . El conductor del que va detrás decide adelantar al primero y lo hace acelerando a razón de 2 m s^{-2} , hasta que alcanza la velocidad de 31 m s^{-1} ($\sim 120 \text{ km h}^{-1}$); a partir de este instante, sigue con esta velocidad, hasta que se encuentra a 28 m del coche que ha adelantado. ¿Qué tiempo invierte en la maniobra de adelantamiento? Supongamos ahora que al iniciar el adelantamiento, divisa a un tercer coche, que se acerca en sentido contrario, a la velocidad de 27 m s^{-1} ($\sim 96 \text{ km h}^{-1}$). ¿Cuál

será la distancia mínima a que debe encontrarse este tercer coche, para efectuar, con toda seguridad, la maniobra de adelantamiento?

9. Un punto material, inicialmente en reposo, adquiere un movimiento circular acelerado. El radio de la trayectoria vale $1,3 \text{ m}$, y la aceleración varía según la función: $\alpha(t) = 120t^2 - 48t + 16$. Calcular: $\theta(t)$, $\omega(t)$, $a_r(t)$ y $a_n(t)$.
10. Una partícula se mueve en el sentido de las agujas del reloj, en una circunferencia de 1 m de radio, y centro el punto $(1,0)$. En el instante inicial se encuentra en reposo. Su aceleración lineal, a partir de dicho instante, vale $\frac{\pi}{2} \text{ ms}^{-2}$. (a) ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer la mitad de la circunferencia? (b) ¿Cuál es su velocidad lineal, v , en dicho instante? (c) ¿Y la aceleración normal? Calcular la aceleración tangencial. (d) En dicho instante, calcular \mathbf{a} .
11. Un punto se mueve en una circunferencia de 5 cm de radio. El ángulo que describe en t segundos es: $\theta = 18t$ rad. Calcular el período T , $\omega(t)$ y $\alpha(t)$. Expresiones para $v(t)$ y $a(t)$, y su valor en el instante $t = 1/3 \text{ s}$. Si el origen de coordenadas se encuentra en el centro de la circunferencia, y en el instante inicial se encuentra en el punto $(5,0)$, calcular $x(t)$, $y(t)$; $v_x(t)$, $v_y(t)$; $a_x(t)$, $a_y(t)$. Determinar su valor en el instante $t = 1/3 \text{ s}$.
12. Una partícula se mueve con velocidad constante en una circunferencia de 3 m de radio, efectuando una revolución en 20 s , Fig. 2.12. A partir del origen O calcular: (a) el vector de posición, \mathbf{r} , a los 5 s , $7,5 \text{ s}$ y 10 s , de haber iniciado el movimiento; inicialmente la partícula se encuentra en el punto A . (b) el vector velocidad media en el intervalo de 5 s , comprendido entre el quinto y el décimo segundo. (c) el vector velocidad instantánea, al principio y al final de este intervalo. (d) el vector aceleración instantánea, en los mismos instantes. ¿Cómo se modifica el problema si la partícula se encuentra, inicialmente en el punto B ?

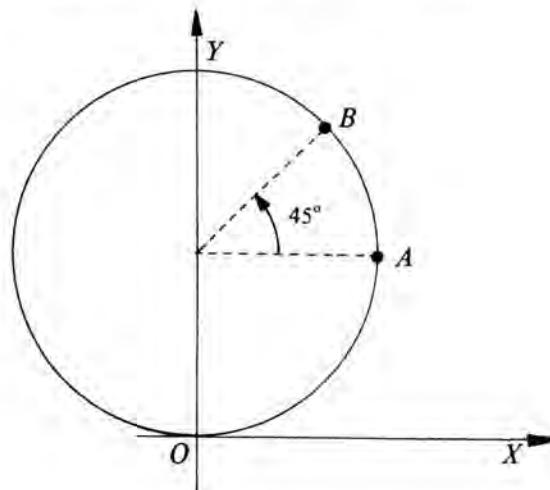


FIG. 2.12

13. Una piedra cae desde una ventana, que se encuentra a 25 m del suelo. ¿A qué distancia del punto de caída se encuentra al cabo de 1 s?, y al cabo de 2 s?. Velocidad de la piedra en estos dos instantes. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo? ¿Con qué velocidad llega?
- *14. Se lanza una piedra, desde una altura de 100 m, con una velocidad inicial *hacia abajo* de 2 m s^{-1} . Al cabo de 1 s, se lanza otra, también hacia abajo y desde el mismo sitio, con una velocidad inicial v_0 . (a) ¿Cuánto tiempo tarda la primera en llegar al suelo?. (b) ¿Qué valor debe tener v_0 , para que la primera piedra alcance a la primera, justo en el instante en que ésta llega al suelo?. (c) Velocidades de ambas piedras en el instante de la colisión.
- *15. Dos cuerpos se lanzan simultáneamente desde una torre, con la misma velocidad inicial v_0 : uno verticalmente hacia arriba y el otro verticalmente hacia abajo. ¿Cómo varía la distancia entre ambos cuerpos en función del tiempo?
16. Un objeto, que cae libremente, tarda 0,15 s en pasar por delante de una ventana que tiene 2 m de altura. Si se supone que partió del reposo, calcular desde qué altura —sobre la ventana— se dejó caer.
- *17. Un coche puede acelerar a razón de 20 cm s^{-2} y retardar su movimiento con una aceleración negativa de 100 cm s^{-2} . Calcular el tiempo mínimo que pude invertir el coche, para desplazarse entre dos ciudades que se encuentran a 2 km de distancia.
18. Un motorista entra en una curva de 150 m de radio, con una velocidad de 70 km h^{-1} . Frena y disminuye constantemente su velocidad, a razón de $1,5 \text{ m s}^{-2}$. Calcular el módulo de la aceleración total de la moto cuando su velocidad es de 60 km h^{-1} .
- *19. Un motorista marcha a 80 km h^{-1} , cuando ve que un semáforo situado a 250 m delante de él cambia al rojo. El sabe que el semáforo permanece en rojo durante 15 s. ¿Qué debe hacer para pasar el semáforo a 80 km h^{-1} , justamente cuando cambie al verde de nuevo?. Dibujar el diagrama $v - t$, eligiendo la solución que requiera la aceleración y desaceleración menores posibles, y determinar (a) el valor común de ambas, (b) velocidad mínima que llega a alcanzar el motorista.
- *20. Un avión de entrenamiento aterriza en un portaviones y es detenido en 3 s por el dispositivo de frenado del portaviones. Un acelerómetro (dispositivo para medir gráficamente la variación de la aceleración con el tiempo) unido al avión da el registro que se muestra en la Fig. 2.13. Determinar, por procedimientos aproximados, (a) la velocidad inicial del avión con respecto a la pista, (b) el espacio que recorre el avión en la pista, antes de detenerse.

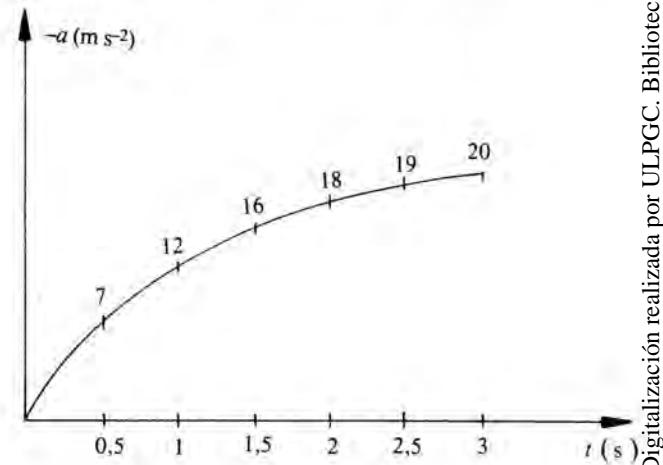


FIG. 2.13

CAPITULO III

MOVIMIENTO RELATIVO

Ya indicamos en el capítulo anterior que el movimiento es un concepto relativo. Un mismo movimiento puede ser analizado por dos observadores, que se encuentren en diferentes sistemas de referencia (referenciales), uno de los cuales se mueve respecto del otro. Por ello, es conveniente introducir unas definiciones y desarrollar unos conceptos que nos permitan relacionar la descripción que ambos observadores hacen de un mismo movimiento.

No nos preocupa, como luego veremos, la existencia de un **sistema de referencia absoluto**, es decir uno que no se mueva respecto de nada en el Universo. Su existencia y cómo se podría elegir es un problema filosófico que para nosotros carece de interés.

Iniciamos el capítulo estudiando el movimiento de dos puntos respecto de un mismo sistema de referencia, y definiendo la velocidad y aceleración de uno de ellos con relación al otro (§ 3.1). Este problema se puede resolver dentro del estudio general del movimiento relativo que se aborda a continuación, pero hemos creído conveniente presentarlo separadamente, para facilitar la comprensión del capítulo por parte del alumno. Al mismo tiempo, nos permite introducir el principio de composición de movimientos, que tan útil es para analizar diferentes situaciones reales.

Con objeto de estudiar el movimiento relativo, se introducen unas definiciones básicas de los distintos movimientos en que puede considerarse compuesto aquél (§ 3.2) El análisis del movimiento de un punto respecto de dos sistemas de referencia, uno de los cuales se encuentra en movimiento respecto del otro, no lo hacemos en el caso más general, sino sólo para el particular que vamos a necesitar a lo largo del texto. Se trata de aquél en que la *orientación de los ejes del sistema móvil*, respecto a los del que se considera como fijo, *no cambia en el transcurso del tiempo*. Es decir su movimiento es sólo de traslación y no de rotación (§ 9.1).

Para este caso, estudiamos la composición de velocidades (§ 3.3) y de aceleraciones (§ 3.4). Por último, como aplicación de lo anterior a sistemas de referencia no acelerados, se estudian las transformaciones de Galileo y su principio de relatividad (§ 3.5).

Los contenidos de este capítulo tienen aplicación en el IV (§ 4.6), VIII (§ 8.3) y XVIII (§ 18.4), como tendremos ocasión de comprobar.

§ 3.1 VELOCIDAD Y ACCELERACION RELATIVAS

Sean los puntos materiales *A* y *B* que se mueven respecto de un sistema de referencia *OXYZ*, Fig. 3.1. En un cierto instante sus vectores de posición respectivos serán: $\mathbf{r}_A(t)$ y $\mathbf{r}_B(t)$. Sus velocidades (2.3) respecto al sistema de referencia elegido:

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt}, \quad \mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} \quad (3.1)$$

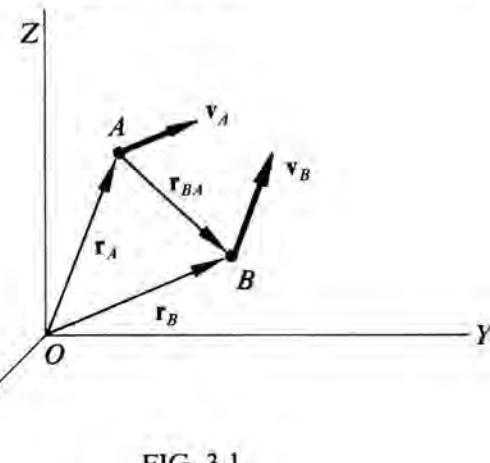


FIG. 3.1

Queremos calcular la velocidad relativa de *B* respecto de *A*, y la de *A* respecto de *B*. Para ello, definiremos la posición relativa de uno respecto al otro, y aplicaremos la definición de velocidad (2.3):

$$\mathbf{r}_{BA} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \quad , \quad \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = -\mathbf{r}_{BA} \quad (3.2)$$

por lo tanto:

$$\mathbf{v}_{AB} = \frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} \quad , \quad \mathbf{v}_{BA} = \frac{d\mathbf{r}_{BA}}{dt} \quad (3.3)$$

como consecuencia de (3.2):

$$\mathbf{v}_{BA} = -\mathbf{v}_{AB} \quad (3.4)$$

la velocidad relativa de *B* respecto de *A* es igual y de sentido contrario a la de *A* respecto de *B*.

Derivando (3.2) respecto del tiempo y haciendo uso de (3.1) y (3.3), obtenemos las relaciones entre las

velocidades relativas y las de cada punto respecto al referencial $OXYZ$:

$$\frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_B}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_A}{dt}$$

$$\mathbf{v}_{AB} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B, \quad \mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A \quad (3.5)$$

De forma análoga se obtienen las relaciones entre las aceleraciones. Derivando (3.5) y aplicando la definición de aceleración (2.7):

$$\frac{d\mathbf{v}_{AB}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_B}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_B}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_A}{dt}$$

$$\mathbf{a}_{AB} = \mathbf{a}_A - \mathbf{a}_B, \quad \mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A \quad (3.6)$$

por lo tanto:

$$\mathbf{a}_{BA} = -\mathbf{a}_{AB} \quad (3.7)$$

la aceleración relativa de B respecto de A es igual y de sentido contrario a la de A respecto de B .

Ejercicio 3.1

Una persona puede remar en un bote a razón de $6,44 \text{ km h}^{-1}$ en aguas tranquilas. (a) Si está cruzando un río cuya corriente es de $3,22 \text{ km h}^{-1}$, ¿en qué dirección debe apuntar su bote, si desea llegar a un punto situado directamente opuesto al de partida?. (b) Si el río tiene $6,44 \text{ km}$ de anchura, ¿qué tiempo tardará en cruzarlo?. (c) ¿Qué tiempo tardará en remar $3,22 \text{ km}$ río abajo y después regresar a su punto de partida?. (d) ¿Qué tiempo tardará en remar $3,22 \text{ km}$ aguas arriba del río y después volver a su punto de partida?. (e) ¿En qué dirección debe apuntar el bote, si desea cruzar el río en el menor tiempo posible?

Solución

Tenemos que comenzar por identificar, en este problema, los diferentes conceptos teóricos introducidos anteriormente. El sistema de referencia $OXYZ$ lo localizamos en la orilla, Fig. 3.2; los «puntos materiales» B y A serán, en este caso, el bote y las aguas del río, respectivamente. La expresión (3.5) la podemos escribir con la siguiente notación alternativa:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{BA} + \mathbf{v}_A, \quad \mathbf{v}_{\text{bote respecto al suelo}} = \mathbf{v}_{\text{bote respecto al agua}} + \mathbf{v}_{\text{agua respecto al suelo}} \quad (3.8)$$

El módulo de $\mathbf{v}_{\text{bote - agua}}$ es $6,44 \text{ km h}^{-1}$, ¿por qué? Esta es la velocidad que es capaz de desarrollar la persona remando en cualquier circunstancia. En aguas tranquilas, $\mathbf{v}_{\text{agua - suelo}} = 0$, coincide con $\mathbf{v}_{\text{bote - suelo}}$. Los diferentes movimientos que intervienen en este ejercicio son rectilíneos y uniformes, ¿no?

- a) La persona parte del punto D y quiere llegar al E , Fig. 3.2. Teniendo en cuenta (3.8), debe dirigir su bote en

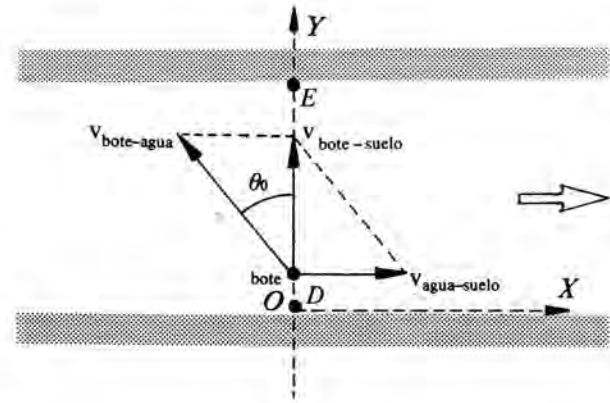


FIG. 3.2

una dirección que forme un ángulo θ_0 , con la perpendicular a la dirección de la corriente del río, Fig. 3.2. ¿Por qué? Por lo tanto:

$$v_{\text{agua - suelo}} = v_{\text{bote - agua}} \sin \theta_0, \quad \theta_0 = 30^\circ$$

- b) Para determinar el tiempo que tarda en cruzarlo, hemos de calcular $v_{\text{bote - suelo}}$. Al ser un movimiento rectilíneo uniforme, se verifica:

$$DE = v_{\text{bote - suelo}} t, \quad v_{\text{bote - suelo}} = v_{\text{bote - agua}} \cos \theta = 5,60 \text{ km h}^{-1}$$

$$\text{por lo tanto: } t = 1,15 \text{ h.}$$

- c) Cuando va río abajo: $v_{\text{bote - suelo}} = v_{\text{bote - agua}} + v_{\text{agua - suelo}}$; río arriba: $v_{\text{bote - suelo}} = v_{\text{bote - agua}} - v_{\text{agua - suelo}}$, en ambos casos hemos hecho uso de (3.8). Como es un movimiento rectilíneo uniforme:

$$t_{\text{total}} = \frac{2 v_{\text{bote - agua}}}{v_{\text{bote - agua}}^2 - v_{\text{agua - suelo}}^2}$$

sustituyendo los valores numéricos: $t_{\text{total}} = 1,33 \text{ h}$. Obsérvese que tarda menos tiempo en recorrer una distancia dada, en la dirección perpendicular a la corriente, que la misma distancia, yendo la mitad del trayecto a favor de la corriente, y la otra mitad en contra.

- d) El mismo que en el apartado anterior. ¿Por qué?
e) Queremos que sea mínimo el tiempo que invierte en atravesar el río, independientemente del punto al que llegue en la orilla opuesta. Supongamos que el ángulo θ es arbitrario, es decir, no tiene el valor calculado en a), Fig. 3.3; podemos escribir:

$$DE = v_{\text{bote - agua}} \cos \theta \quad (3.9)$$

Hay que hacer notar que DE no representa, ahora, el trayecto que recorre el bote dentro del río. Representa la proyección de la trayectoria real, en la dirección perpendicular a la orilla, ¿por qué?

Derivando (3.9) respecto de θ , podemos calcular el valor de θ que hace mínimo el tiempo que tarda en atravesar el río:

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{DE}{v_{\text{bote - agua}}} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} = 0 \rightarrow \theta = 0$$

Calculando la segunda derivada, se comprueba que este valor de θ corresponde a un mínimo de t . Ahora bien,

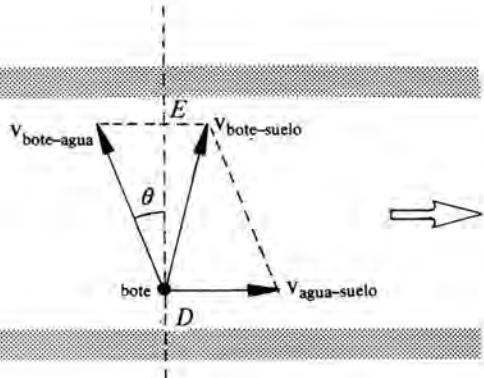


FIG. 3.3

no es necesario realizar este cálculo, ya que físicamente se observa, Fig. 3.4, que el tiempo será mínimo cuando sea máxima la componente de $v_{\text{bote-agua}}$ perpendicular a la orilla. En esta situación, la proyección del espacio recorrido, en dicha dirección, es mínima.

A partir de la Fig. 3.4 se obtiene:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_{\text{bote-agua}}}{v_{\text{agua-suelo}}} = 2 \rightarrow \varphi = 63^{\circ}43'$$

el espacio que recorre el bote es: $DE' = DE / \operatorname{sen} \varphi$, $DE' = 7,20 \text{ km}$; y el tiempo que invierte en la travesía:

$$DE' = v_{\text{bote-suelo}} t \quad , \quad v_{\text{bote-suelo}} = 7,20 \text{ km h}^{-1}$$

luego: $t = 1 \text{ h}$.

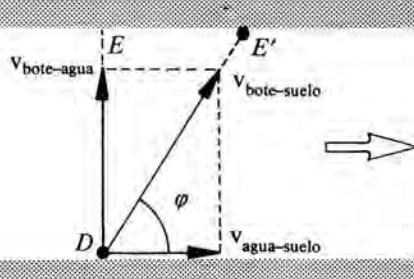


FIG. 3.4

Este ejercicio que acabamos de resolver, también se puede interpretar de otra forma. El bote se encuentra sometido a dos movimientos simultáneos e independientes (el de los remos y el de la corriente del río), como resultado de los cuales realiza un *movimiento compuesto*, que resulta de la combinación de aquéllos. Esta composición se realiza considerando que en cada instante el *vector de posición*, que determina el movimiento resultante, es la suma vectorial de los vectores de posición de los dos movimientos componentes. Esta regla de composición está basada en el principio de Galileo o de la **independencia de los movimientos**. Este principio dice: *Cuando un punto se encuentra sometido, por dos causas distintas, a dos movimientos simultáneos, su cambio de posición es*

independiente de que los dos movimientos actúen sucesiva o simultáneamente.

Si \mathbf{r} es el vector de posición correspondiente al movimiento resultante, y \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 los de cada uno de los movimientos independientes, se verifica:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \quad (3.10)$$

según hemos indicado anteriormente. Derivando (3.10) respecto al tiempo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad (3.11)$$

Compara esta relación con la (3.8), ¿qué consecuencia deduces?. Derivando (3.11) con relación al tiempo:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \quad (3.12)$$

Las relaciones (3.11) y (3.12) nos indican, respectivamente, que *la velocidad (aceleración) en un movimiento compuesto es, en cada instante, la suma vectorial de las velocidades (aceleraciones) de los movimientos componentes*.

Estas afirmaciones, que parecen tan «evidentes», dejan de ser ciertas cuando alguna de las velocidades componentes se aproxima al valor de la velocidad de propagación de la luz (capítulo XVIII). Es decir dentro del marco de la Mecánica Relativista; pero ésto es una cuestión que queda fuera de los objetivos de este libro.

El principio de la independencia de los movimientos nos permite interpretar un gran número de situaciones reales: movimiento de aviones en la atmósfera, de barcos en ríos, de proyectiles, de cuerpos en planos inclinados, etc.

Ejercicio 3.2

Se lanza un electrón, con una velocidad inicial de $2 \times 10^7 \text{ ms}^{-1}$, a lo largo del eje equidistante de las placas (A y B), de un tubo de rayos catódicos, Fig. 3.5. Entre las placas existe un campo electrostático uniforme, de intensidad: $E = 20.000 \text{ NC}^{-1}$ y dirigido hacia arriba. Si la aceleración que adquiere el electrón ($e < 0$), por efecto del campo, viene dada por la relación:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \quad (3.13)$$

Se pide: a) Justificar el movimiento del electrón dentro y fuera de la región comprendida entre las placas. b) ¿A qué distancia del punto medio, abandona el electrón las placas?. c) ¿Qué ángulo forma su dirección de salida con el eje del tubo?. d) ¿A qué distancia, por debajo del eje, incidirá en la pantalla fluorescente P ? Se supone despreciable la aceleración debida a la fuerza de atracción de la Tierra sobre el electrón (\mathbf{g}), frente a la de origen electrostático.

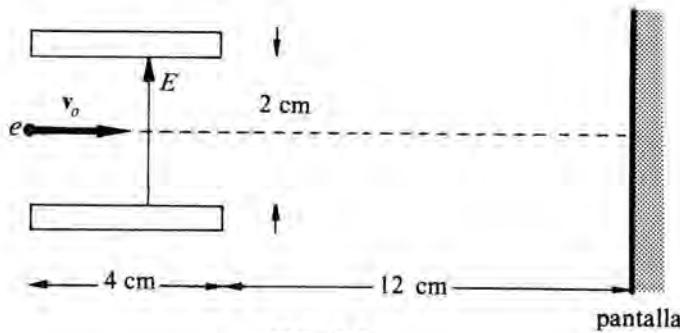


FIG. 3.5

Solución:

Puede parecer, a primera vista, que este ejercicio corresponde más a la Electrostática que a la Cinemática. Para resolverlo no hay que recordar ningún concepto estudiado en cursos anteriores. Lo único que necesitamos saber es la aceleración que adquiere el electrón por efecto del campo electrostático. Esta aceleración es la indicada en (3.13).

El ejercicio está basado en la aplicación de los conceptos estudiados en esta pregunta y en el capítulo anterior.

Tampoco importa no saber lo que es un tubo de rayos catódicos, basta saber que entre sus placas el electrón se encuentra sometido a la aceleración dada por (3.13).

- a) Si entre las placas no existiese un campo electrostático ($E = 0$), el electrón seguiría en línea recta mientras se encontrase en el interior de la región limitada por las placas, ¿por qué? Ahora bien, al existir un campo se encontrará sometido a una aceleración (3.13), que es perpendicular a la dirección de su velocidad inicial. Luego, el electrón se encuentra sometido a dos movimientos simultáneos e independientes: uno rectilíneo y uniforme, según el eje OX ; y otro rectilíneo uniformemente acelerado, en la dirección OY , Fig. 3.6. Su movimiento compuesto o resultante será la combinación vectorial, en cada instante, de éstos.

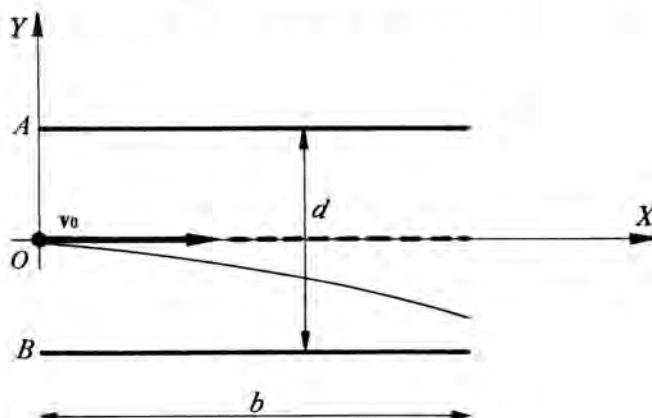


FIG. 3.6

La aceleración del electrón en el movimiento compuesto valdrá (3.12): $\mathbf{a} (0, -|e| E / m_e)$ ¿Por qué? Su velocidad (3.11):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0 \quad (3.14)$$

donde \mathbf{v}_1 es la velocidad que adquiere el electrón, como

consecuencia de estar sometido a un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, según el eje OY . La velocidad del electrón en el movimiento compuesto tendrá como componentes: $v (v_0, -|e| E t / m_e)$ ¿Por qué?

Para calcular la trayectoria, trabajaremos con las ecuaciones paramétricas de ésta (2.2), ya que resulta más fácil para el alumno que utilizar la ecuación vectorial (3.10). Con el sistema de referencia elegido, Fig. 3.6, y recordando (2.20) y (2.21), respectivamente,

$$x = v_0 t \quad , \quad y = -1/2 \frac{|e| E}{m_e} t^2 \quad (3.15)$$

Para obtener la ecuación normal de la trayectoria, despejamos t de la primera y sustituimos en la segunda:

$$y = -\frac{|e| E}{2 m_e v_0^2} x^2$$

Esta ecuación es del tipo: $y = -cte x^2$, que representa —como el alumno sin duda recuerda— a una *parábola* deje OY , cuya concavidad está dirigida hacia el eje negativo de ordenadas. Luego, el electrón describe un *movimiento parabólico*, Fig. 3.6.

Este tipo de movimiento se explica en muchos textos bajo el epígrafe de movimiento de proyectiles. Los proyectiles presentan un movimiento parabólico cuando se lanzan con un cierto ángulo respecto al suelo y se desprecia el efecto de la resistencia del aire. Sin embargo, creemos más adecuada la nomenclatura utilizada por nosotros, ya que el de proyectiles es uno de los muchos movimientos parabólicos que existen.

Cuando el electrón abandona la región limitada por las placas, ya no se encuentra sometido a la aceleración \mathbf{a} , ¿por qué? Por lo tanto, describirá un movimiento rectilíneo uniforme, cuya dirección estará definida por la de la velocidad con que abandona la región limitada por las placas, Fig. 3.7. Hay que resaltar que se supone despreciable la acción gravitatoria sobre el electrón, tal como se indica en el enunciado.

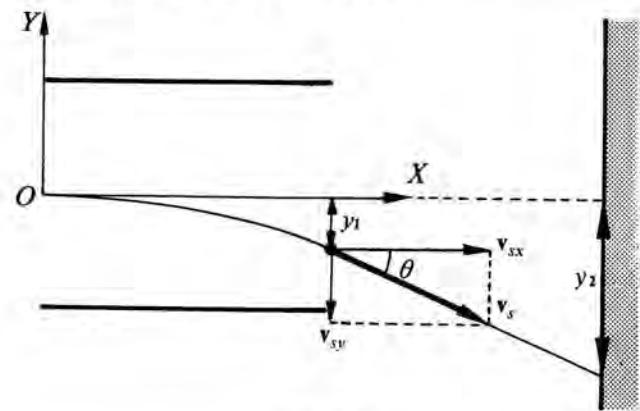


FIG. 3.7

- b) Nos piden la ordenada del electrón, cuando abandona la región limitada por las placas. Comenzaremos por sustituir los datos numéricos del ejercicio en (3.15). La carga y masa del electrón son unas constantes físicas básicas, que se encuentran al alcance de los alumnos, y

que por lo tanto se consideran como datos:

$$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}, m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\text{por lo tanto: } x = 2 \times 10^7 t, y = -18 \times 10^{14} t^2 \quad (3.17)$$

Cuando el electrón abandona las placas $x = l = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, sustituyendo en (3.17): $t = 2 \times 10^{-9} \text{ s}$.

¿qué representa este tiempo? La ordenada que corresponde a este valor del tiempo es, (3.17), $y_1 = -0,72 \text{ cm}$ (Fig. 3.7).

- c) La dirección de salida viene definida por la velocidad que posee el electrón, en el instante que abandona las placas. A partir de (3.14):

$$\mathbf{v} = v_0 \mathbf{i} - \frac{|e| E}{m_e} t \mathbf{j} = v_{ox} \mathbf{i} + v_{oy} \mathbf{j}$$

sustituyendo el valor de t calculado anteriormente,

$$\mathbf{v} = 2 \times 10^7 \mathbf{i} - 0,7 \times 10^7 \mathbf{j} \quad (3.18)$$

y el ángulo que forma con el eje OX , Fig. 3.7: $\theta = 19^\circ 17' 24''$

- d) Como ya dijimos, fuera del tubo de rayos catódicos, el electrón presenta un movimiento rectilíneo uniforme. Las ecuaciones del movimiento son:

$$x = y_{sx} t + x_{0s}, \quad x = 2 \times 10^7 t + 4 \cdot 10^{-2}$$

$$y = -v_{sy} t - y_{0s}, \quad y = -0,7 \times 10^7 t - 72 \cdot 10^{-4}$$

cuando llega a la pantalla: $x = 12 \times 10^{-2} \text{ m}$. El tiempo que tarda en llegar:

$$12 \times 10^{-2} = 2 \times 10^7 t + 4 \times 10^{-2}, \quad t = 4 \times 10^{-9} \text{ s}$$

la ordenada correspondiente será: $y_2 = -3,52 \times 10^{-2} \text{ m}$.

§ 3.2 MOVIMIENTO RELATIVO Y DE ARRASTRE

Vamos a sentar las bases para el estudio del movimiento relativo en toda su generalidad. Se trata de analizar el movimiento de un punto respecto de dos observadores que se encuentran en sendos referenciales, uno de los cuales se mueve respecto del otro. También queremos relacionar la descripción que ambos observadores hacen del movimiento del punto.

Para el caso particular que abordaremos en las dos preguntas siguientes, y que ya indicamos en la introducción del capítulo, no hace falta este planteamiento tan general, sino que basta con los conocimientos introducidos en § 3.1. Hemos querido, no obstante, hacerlo de este modo para abrirle una perspectiva al alumno que le permita, en cursos posteriores, avanzar en el estudio de estos problemas. No obstante, intentaremos relacionar los conceptos nuevos que se in-

troduzcan con los desarrollados en § 3.1.

Comenzaremos introduciendo unas definiciones básicas de los diferentes movimientos en que puede considerarse compuesto el que presenta un punto material, cuando se intenta relacionar la descripción que hacen del mismo dos observadores, uno en movimiento respecto del otro.

Para establecer dichas definiciones nos apoyaremos en un caso concreto e intuitivo. Imaginemos un autobús y una persona que se mueve en su interior; podemos distinguir tres movimientos, el del autobús respecto a la carretera, el de la persona respecto al autobús considerado inmóvil, y el de la persona respecto a la carretera. En este caso concreto, al primero se le llama movimiento de *arrastre*, al segundo *relativo* y al último *absoluto*. Generalicemos estos resultados.

Sea una partícula P que se mueve en el espacio y su movimiento es descrito por dos observadores, uno que se encuentra en un referencial $OXYZ$ y el otro en el $O'X'Y'Z'$ (Fig. 3.8). Este segundo referencial se mueve respecto del primero con un movimiento todo

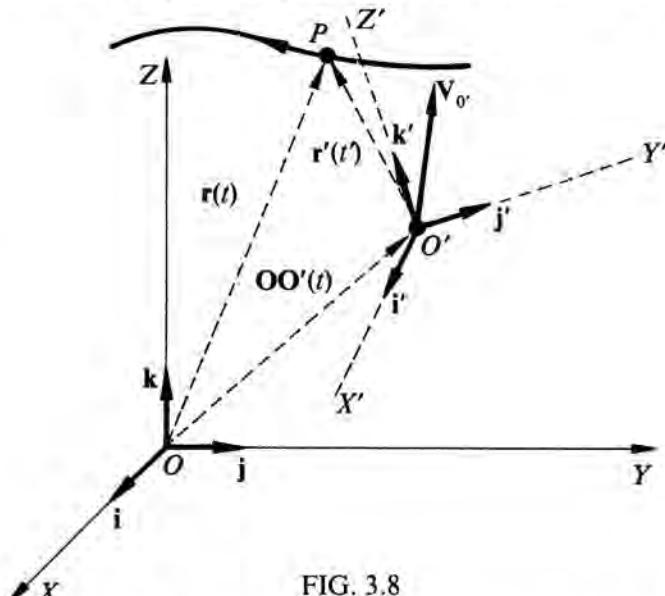


FIG. 3.8

lo complicado que queramos. Introduzcamos una serie de definiciones:

- a) **Movimiento absoluto**, es el que posee la partícula P respecto de un observador situado en el referencial $OXYZ$. Este referencial se considera fijo, prescindiendo de la realidad física de dicha inmovilidad. Por lo tanto, no se trata de un movimiento respecto de un referencial absoluto, en el sentido indicado en la introducción del capítulo.
- b) **Movimiento relativo**, es el que posee la partícula respecto al referencial móvil $O'X'Y'Z'$. Para el cálculo del movimiento relativo, el referencial $O'X'Y'Z'$ se considera como si no se movie. El sistema $O'X'Y'Z'$ cambia de posición, y en

general de orientación, en el transcurso del tiempo respecto de los ejes que se toman como fijos, por eso se dice que es un sistema de referencia móvil.

- c) **Movimiento de arrastre**, es el que posee la partícula respecto del referencial $OXYZ$, pero considerando que se encuentra rigidamente unida a los ejes móviles $O'X'Y'Z'$. En estas condiciones es arrastrada por el movimiento de éstos y teniendo, por lo tanto, ella misma un movimiento. En general el movimiento de arrastre de la partícula no coincide con el de los ejes. Este es un error que cometan, a menudo, los alumnos.

Para fijar estos conceptos consideremos un ejemplo: supongamos una plataforma que se encuentra girando ($O'X'Y'Z'$), por ejemplo un tiovivo; una persona se mueve sobre la plataforma, dirigiéndose en línea recta desde su periferia al centro. Otra persona la observa desde el suelo ($OXYZ$).

Movimiento relativo es el que tiene la persona respecto de la plataforma, suponiendo que ésta no se mueva, se trata del movimiento que percibiría un observador situado en el centro de la plataforma. En el ejemplo considerado, este movimiento sería rectilíneo, acelerado o no dependiendo de la velocidad con que se desplazase.

Movimiento de arrastre, en un instante, es el que posee la persona –respecto del observador que está fuera de la plataforma– suponiendo que en dicho instante no varie su posición respecto de ésta; es decir, que se encuentre a una distancia d_1 del centro de la plataforma, $d_1 = \text{cte}$. En estas condiciones la persona es arrastrada por el movimiento del referencial móvil (la plataforma); el observador situado en $OXYZ$ ve que se mueve. En nuestro ejemplo el movimiento de arrastre sería circular de radio d_1 , para el instante considerado. Este es el movimiento que, en general, más difícil de identificar le resulta al alumno.

Movimiento absoluto es el que tiene la persona para el observador situado en $OXYZ$; es un movimiento, en nuestro ejemplo, complicado. Se demuestra que éste puede expresarse como combinación vectorial de los dos anteriores, esa es la ventaja que ofrece la introducción de los conceptos de movimiento relativo y de arrastre. En realidad, se trata de una aplicación de la regla de composición de movimientos, basada en el principio de Galileo (§ 3.1).

¿Podrías identificar estos tres movimientos para el bote del ejercicio 3.1?

*§ 3.3 COMPOSICIÓN DE VELOCIDADES EN EL MOVIMIENTO RELATIVO

Sea un punto P , Fig. 3.8, que tiene un movimiento arbitrario tanto respecto al referencial $OXYZ$, como al $O'X'Y'Z'$. Su vector de posición respecto al

referencial fijo es:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (3.19)$$

y respecto al móvil:

$$\mathbf{r}'(t') = x'(t')\mathbf{i}' + y'(t')\mathbf{j}' + z'(t')\mathbf{k}' \quad (3.20)$$

entre ambos existe la relación vectorial instantánea (3.10):

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t') + \mathbf{OO}'(t) \quad (3.21)$$

En la Mecánica Clásica (§ 2.1): $t=t'$; $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ son los vectores unitarios asociados a $O'X'Y'Z'$.

Por definición de movimiento absoluto y de velocidad:

$$\mathbf{v}_A(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz(t)}{dt}\mathbf{k} \quad (3.22)$$

por definición de movimiento relativo y de velocidad:

$$\mathbf{v}_r(t) = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{dx'(t)}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'(t)}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'(t)}{dt}\mathbf{k}' \quad (3.23)$$

fijémonos que en el cálculo de la velocidad relativa (3.23), el referencial $O'X'Y'Z'$ se considera *como si no se moviese*: $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ se toman constantes en dirección –que es lo significativo, puesto que de módulo lo son siempre al tratarse de vectores unitarios– por consiguiente, en el movimiento relativo:

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \mathbf{0}, \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \mathbf{0}, \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \mathbf{0}.$$

Las velocidades (3.22) y (3.23) serían las que medirían los observadores situados en los ejes fijos y móviles respectivamente. Queremos buscar la relación entre ambas.

Derivamos (3.21) respecto al tiempo, teniendo en cuenta (3.20):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{dx'(t)}{dt}\mathbf{i}' + x'(t)\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \frac{dy'(t)}{dt}\mathbf{j}' + y'(t)\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \\ &+ \frac{dz'(t)}{dt}\mathbf{k}' + z'(t)\frac{d\mathbf{k}'}{dt} + \frac{d\mathbf{OO}'(t)}{dt} \end{aligned} \quad (3.24)$$

introduciendo (3.22) y (3.23) en (3.24) queda:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_r + \frac{d\mathbf{OO}'(t)}{dt} + x'(t)\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'(t)\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'(t)\frac{d\mathbf{k}'}{dt} \quad (3.25)$$

En el movimiento de arrastre el punto P se considera solidario con el sistema móvil, es decir su dis-

tancia al origen O' no varía en el transcurso del tiempo; por lo tanto, sus coordenadas (x' , y' , z') han de considerarse constantes en este movimiento. La *velocidad de arrastre* \mathbf{v}_a será (3.24):

$$\mathbf{v}_a(t) = \frac{d\mathbf{OO}'(t)}{dt} + x'(t)\frac{di'}{dt} + y'(t)\frac{dj'}{dt} + z'(t)\frac{dk'}{dt} \quad (3.26)$$

esta es la velocidad de P , supuesto solidario con los ejes móviles y arrastrado por el movimiento de éstos respecto de los ejes fijos.

Sustituyendo (3.26) en (3.25):

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_a \quad (3.27)$$

esta relación indica que, la velocidad absoluta de P respecto de $OXYZ$ es igual a la relativa (respecto de $O'X'Y'Z'$ considerados como fijos) más la de arrastre.

La relación (3.27) es válida sea cual fuere el movimiento de los ejes móviles. Supongamos ahora que los ejes móviles se muevan sin cambiar su orientación respecto de los fijos, es decir su movimiento sea simplemente de traslación (§ 9.1). En este caso:

$$\frac{di'}{dt} = 0, \quad \frac{dj'}{dt} = 0, \quad \frac{dk'}{dt} = 0$$

¿por qué? Por lo tanto de (3.26):

$$\mathbf{v}_a(t) = \frac{d\mathbf{OO}'}{dt} \quad (3.28)$$

luego observamos: 1.º La velocidad de arrastre de P no coincide, en general, con la velocidad de los ejes móviles (es decir la de O'), según se observa en (3.26). 2.º Si la orientación de los ejes móviles no varía, respecto de los fijos, el movimiento de arrastre de P coincide con el de los ejes móviles y sus velocidades son iguales (3.28).

En este caso particular:

$$\mathbf{v}_a(t) = \mathbf{v}_r(t) + \mathbf{V}_{O'}(t) \quad (3.29)$$

donde $\mathbf{V}_{O'}(t)$ es la velocidad de los ejes móviles respecto de los fijos, Fig. 3.8. Al ser un movimiento de traslación todos los puntos del sistema de referencia tienen, en un instante, la misma velocidad, como demostraremos en § 9.1.

¿Podrías identificar en el ejercicio 3.1 las diferentes magnitudes que aparecen en la relación (3.29)?

§ 3.4 COMPOSICIÓN DE ACCELERACIONES

Queremos plantearnos respecto de las aceleraciones, el mismo problema que abordamos en la pregunta anterior, en relación con las velocidades. Para

ello derivamos la expresión (3.24) respecto al tiempo, y agrupamos los términos semejantes:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d^2x'(t)}{dt^2}\mathbf{i}' + \frac{d^2y'(t)}{dt^2}\mathbf{j}' + \frac{d^2z'(t)}{dt^2}\mathbf{k}' + \frac{d^2\mathbf{OO}'(t)}{dt^2} + \\ &+ x'(t)\frac{d^2\mathbf{i}'}{dt^2} + y'(t)\frac{d^2\mathbf{j}'}{dt^2} + z'(t)\frac{d^2\mathbf{k}'}{dt^2} + \\ &+ 2\left(\frac{dx'(t)}{dt}\frac{di'}{dt} + \frac{dy'(t)}{dt}\frac{dj'}{dt} + \frac{dz'(t)}{dt}\frac{dk'}{dt}\right) \quad (3.30) \end{aligned}$$

Por definición de movimiento absoluto y de aceleración:

$$\mathbf{a}_A = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\mathbf{k} \quad (3.31)$$

por definición de movimiento relativo y de aceleración:

$$\mathbf{a}_r = \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \frac{d^2x'(t)}{dt^2}\mathbf{i}' + \frac{d^2y'(t)}{dt^2}\mathbf{j}' + \frac{d^2z'(t)}{dt^2}\mathbf{k}' \quad (3.32)$$

expresión que hemos obtenido derivando \mathbf{v}_r (3.23) respecto al tiempo, considerando \mathbf{i}' , \mathbf{j}' y \mathbf{k}' constantes.

Las aceleraciones (3.31) y (3.32) serían las que medirían los observadores situados en los ejes fijos y móviles, respectivamente.

La aceleración de arrastre se obtiene derivando (3.26) respecto del tiempo, manteniendo x' , y' , z' constantes, ¿por qué? Por consiguiente:

$$\mathbf{a}_a = \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d^2\mathbf{OO}'(t)}{dt^2} + x'(t)\frac{d^2\mathbf{i}'}{dt^2} + y'(t)\frac{d^2\mathbf{j}'}{dt^2} + z'(t)\frac{d^2\mathbf{k}'}{dt^2} \quad (3.33)$$

Comparando (3.31), (3.32) y (3.33) con (3.30), podemos escribir:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_a + \mathbf{a}_{complementaria} \quad (3.34)$$

el tercer sumando engloba al último término del segundo miembro de (3.30). Como no vamos a estudiar el caso general, no juzgamos necesario analizar el significado de esta aceleración, que recibe el nombre de complementaria o de Coriolis. Lo que resulta evidente es que en general:

$$\mathbf{a}_A \neq \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_a$$

Si los ejes móviles sólo tienen movimiento de traslación (no de rotación), el término complementario es nulo, ¿por qué? En este caso, y sólo en él:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_a \quad (3.35)$$

Ahora bien, si la orientación de los ejes móviles respecto a los fijos no varía:

$$\frac{di'}{dt} = \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \frac{dk'}{dt} = \mathbf{0}$$

y de (3.33) se obtiene:

$$\mathbf{a}_A = \frac{d^2\mathbf{OO}'(t)}{dt^2} \quad (3.36)$$

en este caso la aceleración de arrastre de P coincide con la del referencial móvil. En esta caso particular:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_{g'}. \quad (3.37)$$

Estos conceptos los utilizaremos en el capítulo IV y en el VIII, donde elegiremos como punto O' el CDM del sistema de partículas.

Ejercicio 3.3

Un muchacho anda de un lado a otro de una plataforma que se mueve lentamente, tardando 3 s en cruzarla. La anchura de la plataforma es de 3 m y se mueve a lo largo de una carretera recta horizontal con una velocidad de 2 m s^{-1} . (a) Identificar el movimiento relativo, de arrastre y absoluto del muchacho. (b) Dibujar la trayectoria del muchacho respecto al suelo. (c) ¿Qué distancia recorrerá el muchacho respecto al suelo, en el tiempo que tarda en atravesar la plataforma? (d) ¿Cuál será su velocidad respecto a tierra?

Solución:

Hay que comenzar por identificar los diferentes sistemas de referencia; sean éstos los indicados en la Fig. 3.9. Supongamos que para $t=0$ coinciden los ejes fijos (ligados al suelo) y los móviles (ligados a la plataforma); el eje de abscisas define la dirección de la carretera.

- a) El movimiento relativo del muchacho (P) es rectilíneo uniforme a lo largo de $O'Y'$, con una velocidad de 1 m s^{-1} . El de arrastre es también rectilíneo uniforme, a lo largo de una recta paralela al eje OX y con una velocidad de 2 m s^{-1} . El absoluto es la combinación vectorial de ambos, según (3.21) y (3.29). La dirección de los ejes móviles no cambia en el transcurso del tiempo, ¿por qué? por ello utilizamos (3.29) en vez de (3.27).

$$\mathbf{r}'(t) = v_r t \mathbf{j}' \quad \mathbf{OO}'(t) = v_{g'} t \mathbf{i} \quad (3.38)$$

como tarda 3 s en cruzar la plataforma y ésta tiene 3 m de anchura, su velocidad relativa es de 1 m s^{-1} . Según (3.21):

$$\mathbf{r}(t) = 2t \mathbf{i} + t \mathbf{j} \quad (3.39)$$

¿Por qué hemos cambiado \mathbf{j}' por \mathbf{j} en (3.39)? Segundo (3.29):

$$\mathbf{v}_A = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad (3.40)$$

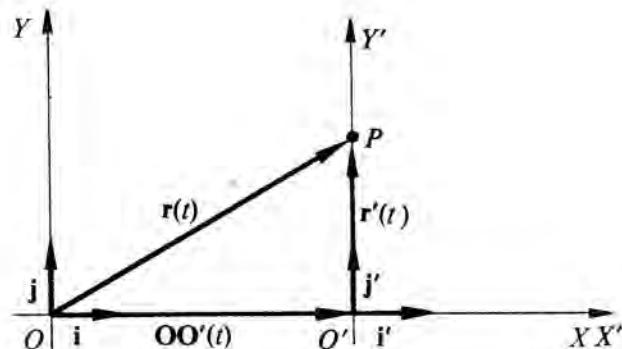


FIG. 3.9

(3.39) y (3.40) caracterizan el movimiento absoluto del muchacho.

- b) La ecuación vectorial de la trayectoria del muchacho respecto al suelo es (3.39). Las ecuaciones paramétricas son: $x = 2t$, $y = t$; y la ecuación normal: $x = 2y$, que representamos en la Fig. 3.10.

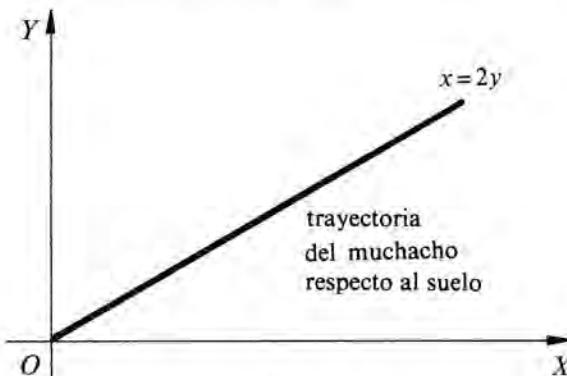


FIG. 3.10

- c) En cruzar la plataforma tarda 3 s, en este tiempo recorre -respecto al suelo- una distancia (3.39): $x = 6 \text{ m}$, $y = 3 \text{ m}$, $r = 6,71 \text{ m}$.
- d) Su velocidad respecto a tierra ya la hemos calculado (3.40), su módulo es $v_A = 2,24 \text{ m s}^{-1}$.

§ 3.5 TRANSFORMACIONES DE GALILEO

Supongamos, como caso particular de lo tratado en (§ 3.3) y (§ 3.4), que *los ejes móviles se mueven respecto de los fijos con movimiento de traslación uniforme*, es decir cualquier punto del referencial $O'X'Y'Z'$ tiene un movimiento rectilíneo uniforme. Supongamos que los dos referenciales son los indicados en la Fig. 3.11, y que en el instante inicial coinciden los orígenes de ambos. El elegirlos de este modo particular no restringe la validez de los resultados físicos que obtengamos, y evitamos una complicación matemática innecesaria.

En este caso (3.37) se reduce a:

$$\mathbf{a}_A(t) = \mathbf{a}_r(t) \quad (3.41)$$

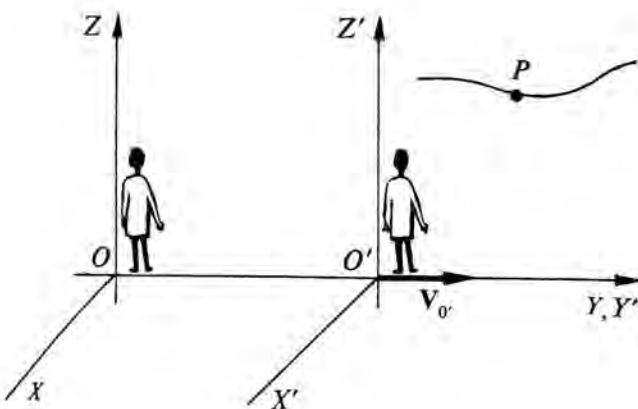


FIG. 3.11

Luego, en estas condiciones, los dos observadores (O y O') miden la misma aceleración para el punto P . La relación (3.29) toma la forma:

$$\mathbf{v}_A(t) = \mathbf{v}_r(t) + \mathbf{V}_0 \quad (3.42)$$

Tengamos en cuenta que aún en el caso particular que estamos estudiando, y con los referenciales elegidos, \mathbf{v}_A y \mathbf{v}_r son, en general, vectores tridimensionales y dependientes del tiempo; mientras que \mathbf{V}_0 , es un vector constante, ¿cuál?

La ecuación vectorial de la trayectoria (3.21), expresada en función de sus proyecciones sobre los ejes, será:

$$\begin{aligned} x(t) &= x'(t) \\ y(t) &= y'(t) + V_0 t \\ z(t) &= z'(t) \end{aligned} \quad (3.43)$$

¿qué representan estas ecuaciones?. Ellas constituyen las transformaciones de Galileo, para los referenciales elegidos. ¿Cómo se modificarían si los ejes $O'X'Y'Z'$ se hubiesen elegido en una posición arbitraria, respecto a los fijos?

Vamos a interpretar físicamente los resultados obtenidos, que es donde radica el interés y la razón de ser de este apartado. Según (3.41), la aceleración de la partícula es la misma para todos los observadores, que se encuentren en sistemas de referencia que se muevan unos respecto de otros, con movimiento de traslación uniforme. La aceleración, en este caso, es un **invariante**. Este es el primer ejemplo en el que comprobamos que una magnitud física permanece invariante frente a una transformación (§ 1.1). Posteriormente encontraremos otras que se comportan de la misma manera. Este resultado, como veremos, tiene una influencia profunda en la formulación de las leyes físicas.

Multitud de ejemplos confirman la afirmación anterior; así, al andar dentro de un avión de pasajeros, cuando va a la velocidad de crucero, podemos mover-

nos lo mismo que si lo hiciésemos en tierra. Más aún, si no miramos hacia abajo buscando un punto de referencia, no podremos saber si el avión está quieto o se mueve. Sólo podremos percibir las aceleraciones del avión o las sacudidas bruscas, que corresponden a movimientos de nuestras coordenadas, ligadas al aparato que no son uniformes respecto a la Tierra.

Es evidente que los fenómenos físicos mecánicos, que dependen de la aceleración del cuerpo, serán invariantes ante una transformación de Galileo, ¿por qué?. Como consecuencia: *Todas las leyes básicas de la Mecánica son idénticas en todos los sistemas de referencia que se muevan unos respecto de otros, con movimiento rectilíneo uniforme*. Este hecho recibe el nombre de **principio de la relatividad de Galileo**, y establece la falta de significado físico del movimiento absoluto, entendiendo como tal el de un cuerpo respecto de un referencial absoluto. ¿Por qué?.

A los sistemas de referencia respecto de los cuales se cumplen las transformaciones de Galileo, que desde el punto de vista físico son totalmente equivalentes, se les llama **sistemas inerciales**; en la § 4.2 los consideraremos con mayor atención, y daremos su definición.

Es evidente que si un fenómeno físico depende de la velocidad del cuerpo, no es invariante ante una transformación de Galileo, ¿por qué?. Por ejemplo, las leyes del electromagnetismo dependen de la velocidad de los cuerpos cargados y por lo tanto no deberían ser invariantes frente a una transformación de Galileo, o dicho de forma distinta serían diferentes medidas desde dos sistemas de referencia inerciales. Experimentalmente se demostró (s. XIX) que si permanecían invariantes cuando se observaban desde dichos diferenciales. Esto llevó a Einstein (1905) a postular que *todas las leyes físicas son invariantes cuando se miden desde sistemas de referencia inerciales*. Para que el postulado fuese cierto, las ecuaciones que describen la transformación de coordenadas o de velocidades entre referenciales inerciales no pueden ser las de Galileo. La búsqueda de unas transformaciones adecuadas llevó a las ecuaciones o **transformaciones de Lorentz**. Esta nueva transformación de coordenadas constituye la base de la *teoría especial de la relatividad*. Sin embargo, en la Mecánica, las diferencias entre las transformaciones de Galileo y Lorentz no son significativas, mientras las velocidades de los cuerpos no se aproximen a la de la luz.

CUESTIONES

1. Un pájaro vuela horizontalmente y con velocidad constante respecto al suelo. ¿En qué condiciones aparecerá quieto, para un observador que viaja en un coche, a lo largo de una carretera? ¿Para qué observador parecería que el pájaro vuela en sentido contrario al caso anterior?
2. Un coche, que se desplaza paralelamente a otro que lleva un movimiento rectilíneo uniforme, es contemplado por dos observadores O_1 , O_2 . O_1 va en el segundo coche y O_2 se encuentra en tierra. El primer coche, de repente, adquiere una aceleración a_0 . (a) ¿Qué aceleración percibe O_1 ? (b) ¿Y O_2 ? (c) ¿Con qué aceleración se desplazan O_1 y O_2 para el conductor del primer coche?
3. Cuando la velocidad de un río aumenta, dentro de ciertos límites, ¿un mismo nadador tarda más o menos tiempo en cruzarlo? Razonar la respuesta.
4. ¿Por qué cuando llueve, aunque no haya viento, llevamos el paraguas inclinado hacia adelante?
5. Un autobús, con un parabrisas vertical, se mueve en medio de un aguacero con una velocidad v_c . Las gotas caen verticalmente con velocidad v_g . ¿Con qué ángulo inciden las gotas contra el parabrisas?

6. Un punto material se lanza con una velocidad inicial v_0 , y formando un ángulo θ con la horizontal. Se encuentra sometido exclusivamente a la aceleración de la gravedad (g). Justificar razonadamente la trayectoria que describe. Indicar las características fundamentales de su movimiento.
- *7. ¿Se podría representar la aceleración del punto material de la cuestión anterior, en función de las componentes intrínsecas, en cada punto de la trayectoria? Dibujarlas para diferentes puntos. ¿Tiene alguna ventaja esta representación?
- *8. Un proyectil se lanza horizontalmente desde la cima de una colina. Describir la variación del ángulo que forman su aceleración y su velocidad, hasta que llega al suelo.
9. Cuando se lanza un proyectil con un ángulo arbitrario θ , ¿para qué punto de su trayectoria su velocidad es mínima?. Razonar la respuesta.
- *10. Desde un barco que se aleja de un puerto se dispara un proyectil hacia el embarcadero, con la misma velocidad que lleva el barco. ¿Cómo interpretan dos observadores, uno en el barco y el otro en el puerto, el hecho de que el proyectil no llegue al objetivo?
11. Una persona está sentada en un autobús que se mueve con un movimiento rectilíneo uniforme. En un cierto instante lanza una pelota al aire, verticalmente hacia arriba. ¿Dónde caerá la pelota? ¿Qué ocurrirá si el coche acelera hacia adelante o toma una curva, mientras la pelota está en el aire?
- *12. Un niño, que viaja en una plataforma animada de movimiento rectilíneo uniforme, deja caer una piedra desde el borde de la plataforma. Justificar la trayectoria que describe la piedra para: (a) un observador que se encuentra en la plataforma, (b) una persona que se encuentra en el suelo, y (c) un observador que va en un coche, en sentido contrario a la plataforma.
- *13. Una partícula P se desplaza a lo largo de un segmento OA , Fig. 3.12, con velocidad uniforme u . El segmento está situado en el plano OXY , y gira alrededor del eje OZ , que es perpendicular al plano anterior, con velocidad angular constante ω . Caracterizar el movimiento relativo, de arrastre y absoluto del punto P .

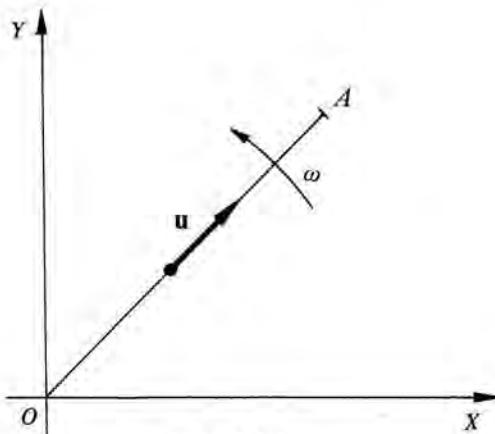


FIG. 3.12

- *14. Un niño, que se encuentra en el borde de un tiovivo en movimiento, lanza una pelota verticalmente hacia arriba. Observa que ésta, para él, no parece ascender, ni descender, verticalmente. Dar una explicación para esta observación.
- *15. ¿Qué trayectoria describe la pelota de la cuestión anterior, para un observador que se encuentre en tierra? Justificar la respuesta.
16. Dos observadores O_1 y O_2 miden la velocidad de una partícula y obtienen el mismo resultado. A partir de este dato, ¿qué se puede afirmar acerca del movimiento relativo de O_1 y O_2 ?
17. Supongamos ahora que los observadores de la cuestión anterior miden diferentes valores para la velocidad, pero iguales para la aceleración. ¿Qué se puede afirmar acerca del movi-

miento relativo de O_1 y O_2 ? ¿Y si también miden diferentes valores para la aceleración?

- *18. El principio de la relatividad de Galileo afirma que por procedimientos mecánicos es imposible determinar de dos cuerpos que se mueven, cuál de los dos está en reposo y cuál en movimiento de traslación uniforme y rectilínea. ¿Se opone también a que se pueda determinar por procedimientos físicos de otra índole, p.e.: ópticos, eléctricos, etc? Razonar la respuesta.

PROBLEMAS

- Dos coches A y B se desplazan en la misma dirección, a las velocidades de 70 km h^{-1} y 90 km h^{-1} , respectivamente. Calcular la velocidad relativa de B respecto de A , tanto si van en el mismo sentido, como si van en sentidos opuestos. Repetir el problema si las direcciones de ambos coches forman un ángulo de 60° .
- Un coche pasa por delante de una casa a la velocidad de 30 ms^{-1} . Una pelota se desliza por el suelo del coche a la velocidad de 15 ms^{-1} , en la dirección: a) del movimiento del coche y en el mismo sentido, b) en sentido opuesto, c) perpendicular a la del coche. Calcular, en cada caso, la velocidad de la pelota respecto de un observador que se encuentre en la puerta de la casa.
- Una persona conduce un coche, a la velocidad de 80 km h^{-1} , a través de una tormenta, y observa que las gotas de lluvia dejan trazas, en las ventanillas laterales, que forman un ángulo de 80° con la vertical. Cuando detiene el coche advierte que la lluvia cae realmente vertical. Calcular la velocidad relativa de la lluvia respecto del coche, cuando éste se encontraba en movimiento y cuando está parado.
4. Una persona quiere cruzar un río de 500 m de anchura. Su velocidad de remo, con relación al agua, es de $0,83 \text{ m s}^{-1}$. La velocidad de la corriente del río es de $0,33 \text{ m s}^{-1}$. Si andando por la orilla la persona puede caminar a razón de $1,39 \text{ ms}^{-1}$. Calcular: a) la trayectoria que debe seguir, combinando el remado y la marcha, para llegar al punto de la orilla opuesto al de partida en el tiempo más corto posible, b) cuánto tiempo tardará?
- Dos aviones A y B vuelan a la altura constante de 1.000 m . El A vuela hacia el este a una velocidad constante de 500 km h^{-1} y el B hacia el sudeste a una velocidad constante de 700 km h^{-1} . Calcular la variación de la posición del B respecto al A , que tiene lugar durante un intervalo de 2 min .
- Se dispara un proyectil, con un ángulo ϕ respecto de la horizontal y velocidad inicial v_0 . Investigar analíticamente su movimiento, si se desprecia la resistencia del aire y la curvatura de la superficie terrestre. Dibujar las relaciones funcionales que se obtengan. Seguir la pauta siguiente: 1.) Calcular las componentes vertical y horizontal del vector velocidad, así como su módulo, en función del tiempo. 2.) El tiempo que el proyectil se encuentra en el aire. 3.) El ángulo θ entre el vector velocidad y la horizontal, en función del tiempo. 4.) Componentes cartesianas del vector de posición del proyectil en función del tiempo. 5.) Encontrar la ecuación, $y = f(x)$, de su trayectoria. 6.) Máxima altura que alcanza el proyectil, respecto al suelo. 7.) Alcance horizontal en función del ángulo de tiro y de la velocidad inicial. ¿Para qué ángulo de tiro, θ^* , será máximo este alcance, si la velocidad inicial se mantiene constante?
- Se lanza una partícula, desde el suelo, con una velocidad de 10 m s^{-1} , en una dirección que forma un ángulo de 45° con la horizontal. Calcular: a) Altura máxima, respecto al suelo, que alcanza la partícula. b) Tiempo que tarda en alcanzarla. c) Velocidad en dicho instante. d) Alcance horizontal de la partícula. e) Tiempo que está en el aire.
- Una roca se encuentra en la ladera de una montaña, tal como se indica en la Fig. 3.13. Al final de la ladera existe un barranco de 400 m , en cuyo fondo se encuentra una laguna y un pueblo. La laguna es circular, de 200 m de diámetro, y su extremo se encuentra a 100 m del borde del barranco; las casas del pueblo están junto a la laguna. Si la roca rodase por la ladera, saldría despedida con una velocidad de 50 ms^{-1} . Se

pide: a) Describir el movimiento de la roca, una vez ha abandonado la ladera. b) ¿Caerá el peñasco dentro de la laguna? Justificar numéricamente la respuesta. c) Velocidad de la roca en el momento de llegar al suelo. d) ¿Qué ángulo formará, en dicho instante, con el suelo? e) Tiempo que estará el peñasco en el aire.

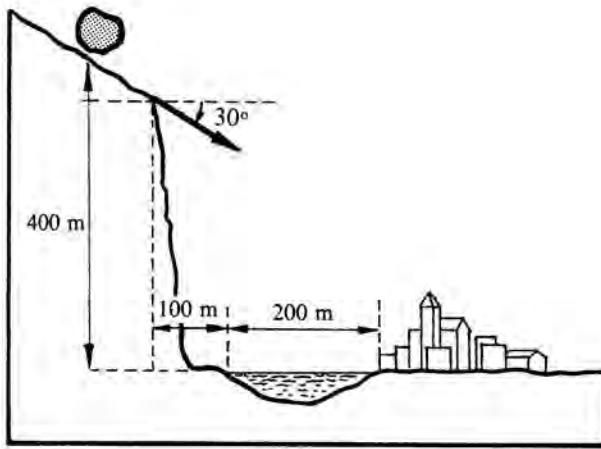


FIG. 3.13

- *9. Se dispara un proyectil con una velocidad inicial de 248 ms^{-1} contra un blanco situado a 620 m de altura con respecto al arma y a una distancia horizontal de 3.720 m. Despreciando la resistencia del aire, determinar el valor del ángulo de tiro α .
- *10. Un cañón antiaéreo dispara un proyectil cuando un avión pasa justamente por la vertical del lugar. El avión vuela a una altura de 2.000 m. La velocidad inicial del proyectil es de 500 ms^{-1} . Sabiendo que el avión vuela horizontalmente al suelo, a la velocidad de 700 km h^{-1} , calcular: a) el ángulo de tiro necesario para que el proyectil alcece al avión, b) velocidad y aceleración del proyectil respecto al avión en el momento del impacto.
- *11. Un ascensor sube con una aceleración constante de 3 ms^{-2} . Tres segundos después de haber partido del reposo, un pasajero deja caer una moneda desde una altura de 1 m sobre el suelo del ascensor. Calcular el tiempo transcurrido hasta que la moneda alcance el suelo. Resolver este problema primero

respecto de un observador situado en tierra, y después respecto de uno situado en el ascensor.

- *12. Una persona se encuentra en la parte de atrás de una plataforma, que tiene una altura de 1,5 m sobre el suelo. Esta se desplaza, con movimiento rectilíneo y uniforme (traslación uniforme) a la velocidad de 90 km h^{-1} . La persona lanza, desde el suelo de la plataforma, un objeto en sentido contrario al de su movimiento, con una velocidad respecto de la plataforma de 10 ms^{-1} y con un ángulo de 37° respecto de la horizontal. a) Calcular v_0 para un observador situado en tierra. b) Respecto de este observador, ¿qué distancia recorre el objeto, y en qué dirección, antes de llegar al suelo?
- *13. Un avión de hélice vuela horizontalmente con velocidad constante v . Respecto de un sistema de referencia situado en el avión, cada paleta de la hélice describe una circunferencia de radio R , a la velocidad de n revoluciones por segundo. Calcular la ecuación de la trayectoria de una paleta de la hélice, para un observador situado en tierra. Identificar el movimiento relativo y de arrastre de las paletas.
- 14. Una plataforma giratoria de 16 m de radio da una vuelta cada 8 s. Sobre su superficie, exenta de rozamientos, desliza una partícula con una velocidad de 4 ms^{-1} , respecto de un observador fijo situado en tierra; la partícula pasa a menos de 4 m del centro. Dibujar la trayectoria de la partícula respecto de un referencial situado en la plataforma. Repetir el problema si la velocidad de ésta fuese de una vuelta cada 16 s y de una vuelta cada segundo.
- *15. Un disco de radio r metros parte desde el reposo y gira en torno a un eje con aceleración angular constante de $n \text{ rad s}^{-2}$. Un punto se mueve en sentido opuesto a lo largo de la circunferencia del disco, con una velocidad constante de $n \text{ m s}^{-1}$ con relación al disco. Calcular la velocidad y aceleración absolutas del punto.
- *16. Un punto se mueve con velocidad constante v a lo largo de una cuerda de un disco. El disco gira con una velocidad constante ω alrededor de su eje. Calcular la velocidad y aceleración del punto respecto de un observador fijo en tierra. La distancia más corta del punto al centro del disco es h y el radio de éste es b . Para $t=0$, el punto se encuentra en el borde del disco y la cuerda es paralela al eje OY .
- 17. El vector de posición de una partícula respecto al referencial $OXYZ$, Fig. 3.11, es: $\mathbf{r}(t)=t^2 \mathbf{i} + 3t^3 \mathbf{j}$, donde r se expresa en metros y t en segundos. Admitiendo que es válida la transformación de Galileo. a) Cuál es el vector de posición para un observador que se mueve respecto del referencial anterior con una velocidad uniforme $\mathbf{V}_0' = 2 \mathbf{i} \text{ m s}^{-1}$? Supóngase que para $t=0$, $\mathbf{r}=\mathbf{r}'=0$. b) Repetir el caso a) si $\mathbf{V}_0' = -3 \mathbf{i} \text{ m s}^{-1}$.

CAPITULO IV

LEYES CLASICAS DEL MOVIMIENTO

En los dos capítulos anteriores hemos estudiado el movimiento de una partícula, sin preocuparnos de las causas que lo originan. A partir de éste, lo trataremos con relación a las causas que lo producen. Seguimos con la aproximación de punto material (§ 2.1).

En este capítulo queremos presentar las leyes clásicas del movimiento; para que el alumno se haga una idea de su contenido, diremos que trata de lo que ha estudiado en cursos anteriores bajo el título de leyes de Newton. En la mayor parte de textos de Física, se suelen presentar los fundamentos de la Dinámica de la misma forma que los expuso Newton, hace ya más de dos siglos y medio. En dicha presentación quedan sin definir de forma explícita magnitudes importantes, tales como la fuerza y la masa, así como la elección de un sistema de referencia «adecuado».

Nuestra intención es presentar las leyes básicas de la Mecánica Clásica de la forma como se entienden en el momento actual. Somos conscientes que el objetivo es arriesgado, pero creemos que vale la pena intentarlo. Pensamos que es posible dar un enunciado correcto de dichas leyes, con un planteamiento consistente y *directamente aplicable*, que pueda ser comprendido por la mayor parte de los estudiantes que inician su primer encuentro formal con la Física.

No obstante, a nivel de la estructura del capítulo, seguiremos la nomenclatura tradicional ya que es la más familiar para los alumnos. Debemos resaltar, sin embargo, que nuestros enunciados (definiciones y leyes experimentales) no coinciden con los que Newton hizo en su tiempo.

Este capítulo se complementa con el siguiente, en el que estudiaremos los tipos básicos de fuerzas que existen en la naturaleza. De esta forma podremos disponer de una teoría (leyes del movimiento y leyes de las fuerzas) satisfactoria para el estudio de la Mecánica.

Suponemos que los alumnos tienen una idea intuitiva acerca del efecto estático de las fuerzas, como causas capaces de deformar un cuerpo. También que son magnitudes vectoriales, lo que habrán comprobado mediante experimentos realizados con dinamómetros. Por último, presuponemos que conocen, aunque no lo entiendan, el enunciado tradicional de las leyes de Newton.

Comenzamos el capítulo planteando las limitaciones, objetivos y forma de alcanzarlos, de la Mecánica Clásica (§ 4.1). A continuación, se desarrolla la «primera ley de Newton» (§ 4.2), que establece la existencia de unos sistemas de referencia «especiales» (que llamaremos inerciales), respecto de los cuales se verifican las leyes clásicas del movimiento. Introducimos, seguidamente, el concepto de masa inerte (§ 4.3), como una medida que caracteriza a toda partícula en sus interacciones con el medio que le rodea. La introducción de este concepto nos permite establecer la «segunda ley de Newton» (§ 4.4), que en realidad es una definición dinámica de fuerza. La «tercera ley de Newton» (§ 4.5) se plantea como una ley experimental que rige la interacción entre partículas.

Por último, se tratan las leyes del movimiento respecto de sistemas de referencia acelerados (que llamaremos no inerciales, § 4.6). Al estudiar el movimiento de una partícula respecto de ellos, no se cumplen las leyes anteriormente enunciadas; buscaremos la manera de plantear la segunda ley respecto de un observador no inercial, de la misma forma que lo hacíamos para uno inercial. Veremos que para ello hay que introducir unas fuerzas llamadas de inercia, que no presentan las fuerzas de reacción correspondientes; para ellas no se verifica la tercera ley de Newton.

Somos conscientes de la dificultad de este capítulo en cuanto a sus contenidos, y a la forma en que se presentan. No obstante, *incidiremos de forma especial en la aplicación de los resultados finales a la resolución de ejercicios prácticos*, con objeto de que el alumno termine por dominarlos.

* § 4.1 MECANICA CLASICA

El movimiento de una partícula depende de su «naturaleza» y de la localización de los otros cuerpos que están a su alrededor. Estos forman el *el medio o entorno* de la partícula, y pueden estar lejos o cerca de ella. Sin embargo, es un hecho experimental que los cuerpos más alejados tienen una influencia muy pequeña en el movimiento de una partícula determinada, y por tanto, no hace falta considerarlos como parte de este medio. Por ejemplo: al estudiar el movi-

miento de un punto material en las proximidades de la Tierra, no consideramos el efecto de los otros planetas del sistema solar; el medio está formado exclusivamente por la Tierra.

Estas consideraciones forman parte de las observaciones que preceden a cualquier presentación que se haga de la teoría formal. También se supone, como acuerdo previo de partida, que se dispone de procedimientos para medir tiempos y longitudes, y por lo tanto velocidades y aceleraciones; se acepta la aproximación de partícula o de punto material (§ 2.1), y que el espacio es euclídeo.

Vamos a estudiar las leyes del movimiento de cuerpos relativamente grandes, que se muevan con velocidades pequeñas comparadas con la de propagación de la luz en el vacío (c). Precisamos el tamaño de los cuerpos, para *excluir* los que pertenecen a la escala atómica o subatómica. Su estudio constituye el objetivo de la **Mecánica Clásica**. El análisis de movimientos a velocidades extremadamente elevadas ($v > 0,1 c$) requiere modificar los conceptos de espacio y de tiempo, como se hace en la *teoría de la relatividad especial* de Einstein. Para el análisis de fenómenos a escala atómica o subatómica, deben hacerse modificaciones todavía más drásticas, tal como ocurre en la *teoría cuántica*. Por ahora, no consideraremos estas teorías, de las cuales la Mecánica Clásica es un caso particular.

La Mecánica Clásica, a pesar de estas limitaciones, permite analizar y predecir el movimiento de los cuerpos en un enorme rango y variedad de situaciones, desde los átomos hasta las galaxias. Su rango de validez, y sus limitaciones, se indican cualitativamente en la Fig. 4.1.

El problema central de la Mecánica Clásica se puede de plantear de la manera siguiente: a) Se parte de una partícula cuyas características relevantes para su movimiento, se conocen. b) Colocada esta partícula, con una posición y velocidad iniciales conocidas, en un medio del cual se tiene una descripción completa, ¿seguirá moviéndose?. Por características relevantes se entienden aquellas que son necesarias para conocer la ley de fuerzas que ocasiona el movimiento de la partícula; pueden ser la masa, la carga, el momento dipolar eléctrico, el magnético, etc.

Para resolver este problema, de acuerdo con la visión actual de la Mecánica, se comienza por establecer un conjunto de definiciones. Estas tienen su origen remoto en la observación de los fenómenos naturales; se ha llegado a ellas mediante un largo proceso de inducción y comprobaciones experimentales, junto con un gran espíritu crítico. Estas definiciones, aunque parezcan de una gran abstracción, son el resultado del proceso que hemos esbozado.

A partir de las definiciones, se deducen consecuencias que deben ser capaces de describir y predecir los fenómenos físicos. En esta descripción debe existir la mayor coincidencia posible con la observación de los mismos; con respecto a la predicción, los experimentos posteriores que se realicen deben comprobar la bondad de la misma.

Este conjunto de definiciones fundamentales constituyen los axiomas, postulados o principios de la Mecánica. Su elección debe estar determinada únicamente por el criterio de construir un modelo, a partir del cual se pueda describir el mayor número posible de fenómenos físicos, con la máxima coincidencia posible entre la observación y los resultados del modelo. También ha de procurarse que dichos postulados sean los menos posibles y aquellos que den lugar a la expresión más «simple» de las leyes de la Mecánica.

En nuestro caso, y siguiendo la pauta indicada en la introducción, llegaremos a las leyes clásicas del movimiento, a través de los siguientes pasos: 1.º Enunciaremos el *principio de la inercia*, que establece que todo punto material aislado tiene una aceleración

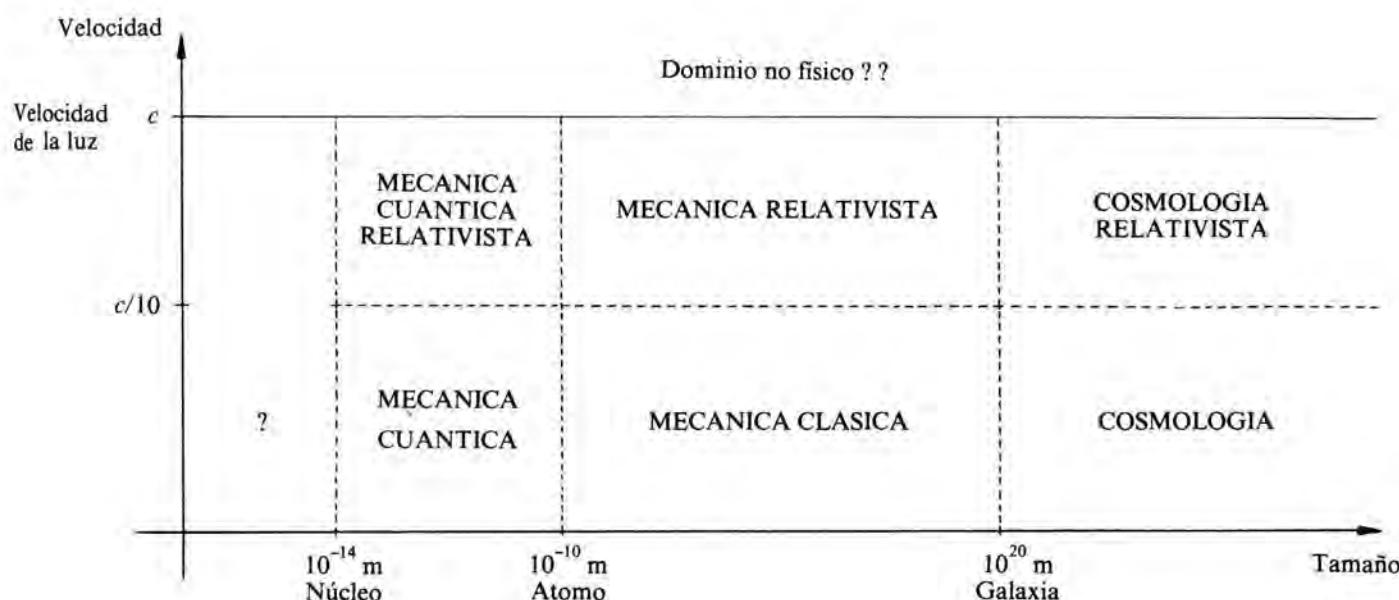


FIG. 4.1

nula. 2.) Desarrollaremos un procedimiento para asignar un número (*masa inerte*) a cada partícula, con objeto de tomar en consideración el hecho experimental de que diferentes partículas de la misma naturaleza, experimentan distintas aceleraciones cuando se encuentran en el mismo medio. 3.) Definiremos el *concepto dinámico de fuerza*; postularemos la igualdad de las medidas estática y dinámica de las fuerzas; y, finalmente, también postularemos el *principio de superposición* de las mismas. Ya en el capítulo siguiente: 4.) Investigaremos las *leyes de las fuerzas*; y por último: 5.) Definiremos la *masa gravitatoria*, como un número que caracteriza a toda partícula sometida a interacción gravitatoria; estableceremos su relación con la masa inerte, llegando a la conclusión de que ambas se miden por el mismo número. De esta forma llegaremos a la noción de *masa*, como característica intrínseca de toda partícula.

Ahora bien, para que las definiciones y proposiciones anteriores tengan sentido, es necesario especificar el sistema de referencia respecto del que se verifican. En Cinemática todos los sistemas son equivalentes; sin embargo, en Mecánica no sucede lo mismo, ya que la aceleración juega un papel esencial y tendremos que referirnos sólo a determinados ejes (§ 4.2).

Resaltamos que los enunciados básicos de la Mecánica no se pueden comprobar por separado. Las **leyes de la Mecánica** (leyes del movimiento y leyes de las fuerzas) forman una unidad; su bondad ha de establecerse comparando los resultados que de **ellas** se deducen con los observados experimentalmente, y verificando el grado de coincidencia entre ambos.

* § 4.2 PRIMERA LEY DE NEWTON

Una **partícula libre** se define como aquella cuyo movimiento no es perturbado por el medio que le rodea; en otras palabras, no está sujeta a interacciones (influencias) por parte de los entes que forman su entorno. De la definición se infiere que no puede existir, estrictamente, una partícula libre; la ausencia de interacciones implica que está completamente aislada (infinitamente alejada de todos los cuerpos que forman su medio), o que es la única partícula del universo. Además, una partícula libre, sería imposible observar, ya que la presencia de un observador implicaría una interacción entre éste y la partícula.

En la práctica y dentro de la precisión en la medida de las magnitudes relevantes, algunas partículas pueden ser consideradas como libres. Esta aproximación se puede establecer bien porque todas las demás que forman su medio se encuentran muy alejadas (§4.1), en cuyo caso las interacciones son despreciables; bien porque se cancelen las interacciones de los diferentes cuerpos que forman su entorno.

Una vez sabemos lo que se entiende por partícula libre, introduciremos una *definición* que constituye el primer paso en la formulación de las leyes clásicas del movimiento:

I. Existen ciertos sistemas de referencia, respecto de los cuales una partícula libre se encuentra en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme.

Estos referenciales reciben el nombre de Sistemas de Referencia Inerciales (*SRI*). A continuación, comentaremos esta definición y la relacionaremos con los conocimientos aprendidos en cursos anteriores.

En los textos elementales se hace el siguiente enunciado: *todo cuerpo sobre el que no actúa ninguna fuerza, seguirá en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme*. Este enunciado se suele conocer como la *primera ley de Newton* o *ley de la Inercia de Galileo*. ¿Qué analogías y diferencias existen entre esta ley y la definición dada?. Otra cuestión que creemos se debe resaltar: al enunciar dicha ley en los textos indicados, ¿se ha definido previamente el concepto de fuerza?

Al enunciar la Primera Ley de la forma tradicional, se omite una precisión importante. Sabemos que el movimiento es relativo (§ 2.1), por lo tanto al enunciarla hay que especificar respecto de qué sistema de referencia se verifica. Esto es lo que hemos hecho en la definición I; además de afirmar, por supuesto, que por lo menos existe un *SRI*.

Newton era consciente de la necesidad de un referencial «especial», respecto del cual se verificasen sus leyes, pero no lo indica de forma explícita cuando las enuncia. Para Newton este referencial era su «espacio absoluto»; para E. Mach, físico y filósofo del s. XIX, uno rigidamente unido a las llamadas «estrellas fijas».

En el momento actual, carece de sentido plantearse cómo elegir el citado sistema o cuál es, ya que dicho planteamiento contiene elementos metafísicos. Un *SRI* sería, estrictamente, uno que se encontrase aislado del resto del universo, es decir localizado a su vez en una partícula libre, ¿por qué?

El planteamiento de la búsqueda de un *SRI* debe ser pragmático: experimentalmente se encuentra que existen referenciales los cuales, bajo ciertas circunstancias generales, se aproximan con bastante precisión a un *SRI*. Ahora bien, bajo otras circunstancias no pueden considerarse, ni aún aproximadamente, como inerciales. La Tierra, por ejemplo, se puede tomar como *SRI* para el estudio de movimientos terrestres suficientemente limitados en extensión espacial y en duración temporal; sin embargo, para otros movimientos, la Tierra no sirve como tal (p.e. en el estudio de la navegación giroscópica). Aún las denominadas «estrellas fijas», cuando se consideran los movi-

mientos relativos extraordinariamente duraderos de las estrellas entre sí, no pueden ser consideradas como *SRI*.

Veamos estas afirmaciones con un cierto detalle. Un referencial situado en la Tierra, en un laboratorio situado en un punto λ (Fig. 4.2 a) presenta una aceleración, como consecuencia de la rotación de la Tierra, igual a: $a_1 = \omega^2 R \cos \lambda = 3,4 \times 10^{-2} \cos \lambda \text{ m s}^{-2}$. Aún sin considerar la rotación alrededor de su eje, la Tierra no sería tampoco un *SRI* en sentido estricto; en su movimiento alrededor del Sol presenta una aceleración: $a_2 = \omega^2 R = 5,9 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$ (Fig. 4.2 b). Por otra parte, las llamadas «estrellas fijas» y el mismo Sol realizan un movimiento de rotación conjunto de toda la galaxia, con una aceleración dirigida hacia su centro del orden de: $a_3 = 10^{-10} \text{ m s}^{-2}$ (Fig. 4.2 c). Podríamos extender aún más la búsqueda de un referencial no acelerado, pero no creemos que se pueda llegar a una solución, ni que éste sea el problema real a plantearnos, como ya hemos indicado.

La definición I no proporciona en general, un *criterio práctico* para determinar por sí misma si un cierto sistema es un *SRI* o no lo es. Para ello, es necesario hacer uso de la totalidad de las leyes generales del movimiento (§ 4.2, § 4.4, § 4.5), junto con las leyes de fuerzas establecidas empíricamente (Capítulo V).

De la definición primera se deduce que cualquier sistema de referencia que tenga un movimiento de traslación uniforme respecto de un *SRI*, (§ 9.1), y no de rotación, también es inercial. Una partícula que se mueve con velocidad constante respecto de uno de ellos, también se mueve con velocidad constante respecto al segundo (§ 3.5). Observadores situados en ambos referenciales, relacionan sus observaciones a través de las transformaciones de Galileo (3.42) y (3.43). La definición I lo que afirma en realidad es que existe por lo menos un *SRI*, ya que asegurada la existencia de uno, se pueden construir infinitos a partir de dichas transformaciones.

Como consecuencia de todo lo anterior, un *SRI* es uno para el que se verifica experimentalmente la primera ley de Newton. Las partículas libres, respecto de estos sistemas, permanecen en reposo o en su estado de movimiento rectilíneo y uniforme. Esta característica se suele tomar en consideración asignando a las partículas una propiedad llamada **inercia** (§ 4.3). Esta es la razón del nombre alternativo para la primera ley de Newton y para los referenciales respecto de los cuales se verifica.

Podemos preguntarnos qué ocurre si se elige un sistema de referencia no inercial (*SRNI*), es decir uno con movimiento de rotación o de traslación no uniforme (§ 9.1) respecto de un *SRI*. Aunque la contestación la desarrollaremos en (§ 4.6), indicaremos que para analizar los movimientos desde *SRNI* hay que introducir unas ciertas fuerzas llamadas de inercia. Estas fuerzas no obedecen a ninguna ley empírica de fuerzas, y dependen exclusivamente del movimiento de la partícula respecto al *SRNI*. En (§ 4.6) comprobaremos que para los *SRI* las leyes de las fuerzas pre-

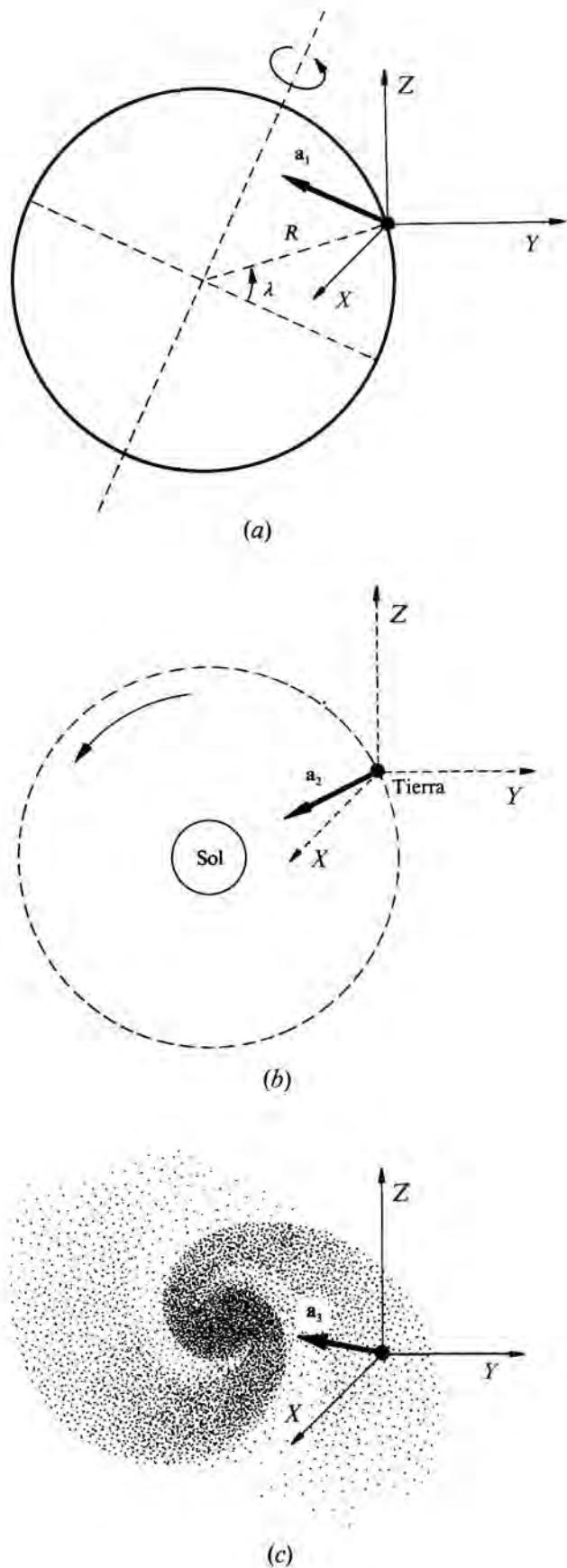


FIG. 4.2

sentan la formulación más simple posible. Todas las leyes del movimiento las desarrollaremos para *SRI*.

La realización de un experimento, en cualquier laboratorio terrestre, que pusiese de manifiesto la primera ley de Newton resultaría difícil. Podríamos pensar, por ejemplo, en una bola moviéndose o en reposo sobre una superficie horizontal lisa; somos conscientes de la dificultad de su realización, por la imposibilidad de eliminar la acción de las fuerzas de rozamiento (§ 5.7), ¿por qué? De todos modos no debe preocuparnos demasiado; la comprobación de las leyes de la Mecánica no debe hacerse una a una, sino en conjunto. Esta comprobación a nivel global es la que debe confirmar la bondad de las mismas, verificando si son capaces de interpretar y predecir los fenómenos de la naturaleza.

* § 4.3 MASA INERTE

A partir de ahora, consideramos que la partícula no está aislada, sino que interacciona con su medio; se trata de una situación más real que la anterior. Como consecuencia de esta interacción, la partícula puede cambiar su estado de movimiento. Al estudio de dicha situación dedicamos los tres próximos apartados.

Comenzamos introduciendo una serie de leyes experimentales y de definiciones, para caracterizar la resistencia que presenta un cuerpo a ser acelerado, cuando existe una interacción entre él y su medio. Introduzcamos las *definiciones* siguientes:

- IIa. Siempre que dos partículas aisladas (P_1 y P_2) influencien mutuamente sus movimientos, es decir interaccionen, el cociente entre los módulos de sus aceleraciones presenta en cada instante de tiempo, el mismo valor constante, finito y distinto de cero, que sólo depende del par de partículas que interaccionan.

Es decir, Fig. 4.3,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a'_1}{a'_2} = \alpha_{12}, \quad \alpha_{12} > 0 \quad (4.1)$$

- II b. Las partículas de la definición II a determinan una sobre otra aceleraciones en la dirección de la recta que las une y sentidos contrarios, Fig. 4.3

- II c. Si existe una tercera partícula (P_3), además de las dos anteriores (P_1 y P_2), y llamamos α_{13} al cociente constante de las aceleraciones que pue-

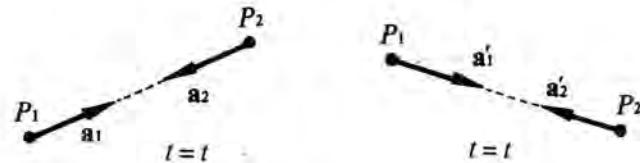


FIG. 4.3

den comunicarse P_1 y P_3 , el valor de α_{13} , cociente de las aceleraciones determinadas por las partículas P_2 y P_3 , es igual a:

$$\alpha_{13} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{12}} \quad (4.2)$$

donde α_{12} está definida como en (4.1).

Por último introduzcamos también la siguiente *ley experimental*:

- III. Si a_1 es la aceleración que determina sobre la partícula P , la presencia aislada de otra partícula P_1 ; a_2 la que determina la presencia exclusiva de P_2 , etc. Se verifica que cuando P está influenciada por la presencia simultánea de las partículas P_1, P_2, \dots, P_n , adquiere una aceleración que es la suma de las aceleraciones debidas a cada una de las partículas P_i actuando por separado.

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (4.3)$$

Compara este enunciado con el principio de independencia de los movimientos, enunciado por Newton (§ 3.1). ¿A qué conclusión llegas?

En ocasiones, los enunciados anteriores se suelen introducir como leyes físicas, en vez de hacerlo como definiciones. Para ello se argumenta que se demuestran mediante experimentos *conceptuales* simples, tales como movimientos de proyectiles, cuerpos unidos a resortes, sistema solar, etc. Realmente se trata de experimentos que hay que imaginar, y que requieren el mismo esfuerzo mental que admitir las definiciones y comprenderlas, por ello hemos adoptado esta segunda alternativa.

A partir de estas definiciones, y mediante un razonamiento lógico, vamos a caracterizar a las partículas, independientemente de las propiedades del medio en que se encuentren.

Si a diversas partículas P_2, P_3, \dots, P_i puestas sucesivamente en presencia de una partícula P_1 les corresponden los valores $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{1i}$ (4.1) podemos asignarles a cada una de ellas, unos números m_2, m_3, \dots, m_i de la forma siguiente:

$$P_1 \rightarrow m_1, P_2 \rightarrow m_2 = \alpha_{12} m_1, P_3 \rightarrow m_3 = \alpha_{13} m_1, \dots$$

$$P_i \rightarrow m_i = \alpha_{1i} m_1 \quad (4.4)$$

para ello basta con elegir arbitrariamente el valor m_1 . Es evidente que los números (escalares) m_i serán positivos, ¿Por qué?

A cada uno de estos números $m_1, m_2, m_3, \dots, m_i$ se les llama por definición **masa de inercia**, o **inerte**, de la partícula considerada. Vemos que están determinadas salvo un factor de proporcionalidad. De (4.1) y (4.4) se deduce:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}, \frac{m_3}{m_1} = \frac{a_1}{a_3}, \dots, \frac{m_i}{m_1} = \frac{a_1}{a_i} \quad (4.5)$$

A partir de la definición II b y de (4.5) se puede establecer el siguiente enunciado:

IV *Siempre que dos partículas aisladas interaccionan entre sí se verifica, en cualquier instante de tiempo, que el cociente entre los módulos de sus aceleraciones es igual a la inversa del cociente entre sus masas respectivas. Además se verifica que: $ma_1 = -ma_2$.*

Se puede demostrar que la partícula P_1 no desempeña, en (4.5), un papel privilegiado, ya que si elegimos P_2 , por ejemplo, como partícula a la que asignar una masa arbitraria, se llega a las mismas expresiones que en el caso anterior. Por lo tanto, la masa inerte unidad será la de una partícula P_j tal que:

$$\alpha_{1j} m_1 = 1$$

¿Por qué?; en el caso particular de que $P_j \equiv P_1$ la justificación es inmediata, ¿no? De esta manera quedan definidas las masas inertes de las diferentes partículas, al haber elegido una masa unidad.

En el sistema internacional de unidades la masa unidad es la de un cilindro de platino iridiado que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas de París. A esta unidad de masa se le asigna el valor de 1 kg. La masa, como ya sabemos, es una unidad fundamental en el SI, y se mide en **kilogramos** (kg).

La definición de masa inerte dada no se emplea generalmente en la medida directa de dicha magnitud. Las determinaciones prácticas se realizan a partir de las leyes generales del movimiento, junto con ciertas propiedades que se extraen de la ley de gravitación universal (§ 5.2).

Resumiendo: *la masa inerte es la medida de una propiedad constante y característica de una partícula o de un cuerpo. Representa un papel en la determinación de aceleraciones de la partícula, que es independiente de las propiedades del medio que la rodea. A esta propiedad se le asigna un valor numérico eligiendo una partícula estandar y definiendo su masa como unidad.*

En (§ 5.2) consideraremos otra propiedad de las partículas, relacionada con su interacción gravitatoria (§ 5.1), que llamaremos masa gravitatoria o pesante, y la relacionaremos con la masa inerte. A partir de esta relación convergeremos en el concepto de masa que el alumno ha utilizado desde sus primeros contactos con la Física.

* § 4.4 SEGUNDA LEY DE NEWTON

Seguimos con la construcción formal de las leyes del movimiento, por ello introducimos una nueva *definición*:

V. *El vector fuerza total que actúa sobre una partícula en cualquier instante, se define como el producto de la masa de la partícula por el vector aceleración que la partícula experimenta en dicho instante*

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} \quad (4.6)$$

Esta expresión (4.6) es la que se conoce con el nombre de *segunda ley de Newton*, pero como vemos es más una definición que una ley. Hay que resaltar, una vez más, que la definición anterior está referida a un SRI.

La definición cuantitativa de masa inerte (4.5) permite asignar un valor numérico a la influencia del medio sobre las partículas. Según (4.5), para un medio dado, el producto de la masa inerte por la aceleración es el mismo, independientemente de la partícula de que se trate. Este producto caracteriza, por consiguiente, al medio independientemente de la partícula específica sobre la que «actúe»; a dicho producto le hemos llamado, por definición, fuerza.

Al proceder de esta forma, podemos clasificar a los medios según el tipo de fuerzas a que den lugar. Esta clasificación da lugar a unas pocas leyes básicas de fuerzas, que además son de una gran simplicidad, como tendremos ocasión de comprobar en el capítulo siguiente.

En el enunciado de la definición V hemos empleado la palabra «actúa», la cual es un tanto equívoca, ya que sugiere la idea de algo aplicado a la partícula. La fuerza es un concepto matemático que, por definición, es igual a la masa, por la derivada temporal de la velocidad de la partícula de que se trate. Esta variación es debida a la interacción de la partícula con las otras que forman su medio. Por lo tanto, desde el punto de vista físico, se puede considerar a la fuerza

como la expresión de una interacción.

La fuerza es una magnitud física cuyas dimensiones en el SI son (4.6): $[F] = [M][L][T]^2$ y su unidad, en el mismo sistema, el **newton** (N). ¿Cómo definirías el newton?

Con objeto de introducir la ley de superposición de fuerzas, comenzaremos por definir la fuerza ejercida por un determinado agente individual sobre una partícula. Esta definición es un tanto redundante con la ley III, después de haber introducido la definición de fuerza (4.6), pero creemos que los contenidos le deben resultar tan nuevos al alumno, que es rentable ser repetitivos.

- VI La fuerza (vector) ejercida por un cierto agente individual A sobre una partícula P en un instante dado de tiempo t , es el producto de la masa de P por la aceleración (vector) que experimentaría P en el instante t , si se anulase en dicho instante, la influencia sobre el movimiento de P de todos los demás agentes que interactúan con ella, a excepción de la de A .

Esta es una puntualización que no se incluye en la mayoría de los textos, que se limitan –en el mejor de los casos– a enunciar la ley III. Nosotros hemos querido introducirla para clarificar el significado práctico de cada uno de los sumandos a_i en (4.3); así como el de las fuerzas (4.6) ejercidas por diferentes agentes, que actúan simultáneamente, sobre una partícula dada.

Ejercicio 4.1

Un bloque se apoya sobre una mesa horizontal lisa. El bloque se encuentra en reposo respecto de un SRI localizado en la mesa. Calcular la fuerza que ejerce sobre el bloque cada uno de los agentes que forman su medio. Aplicar la definición VI.

Solución:

El medio para el bloque lo forman la mesa y la Tierra. La interacción del primero da lugar a la fuerza N y la del segundo a P , Fig. 4.4. Queremos calcular el valor de cada una de ellas haciendo uso de la definición anterior. El cálculo de P es inmediato, aunque nosotros todavía no hemos introducido el concepto de peso (§ 5.2), por ello lo dejamos como ejercicio para el alumno.

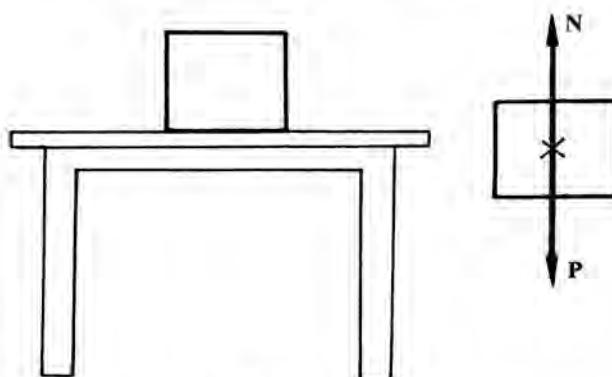


FIG. 4.4

Nos preguntamos, ¿qué fuerza ejerce la mesa sobre el bloque (N)? No nos preocupamos de la naturaleza física de dicha fuerza, que estudiaremos en el capítulo siguiente, sino sólo de calcular su valor. No preguntamos cuál es la fuerza total sobre el bloque cuando no está presente la Tierra, ya que en estas circunstancias la fuerza pedida sería nula (!), ¿por qué? Lo que pedimos es la fuerza total

(ma) sobre el bloque en el **instante** en que anulamos la influencia de la Tierra sobre éste. En dicho instante, el bloque experimentaría una aceleración a hacia arriba, debida a la resistencia a la deformación de la mesa, y a la suya propia.

Este sencillo ejemplo ilustra de una forma quizás un tanto enfática la necesidad, en la definición anterior, de las expresiones: «en un instante dado de tiempo», «experimentaría en el instante t » y «si se anulase instantáneamente». Desde luego, la idea de anular instantáneamente la acción de un agente sobre el movimiento de una partícula es una idealización bastante extrema.

Ahora estamos en condiciones de introducir la **ley de superposición de fuerzas**:

- VII La fuerza total sobre una partícula P en un instante t , es igual a la suma vectorial de todas las fuerzas ejercidas sobre P , por todos los agentes que influyen sobre el movimiento de P en el instante t .

Esta ley considera la aplicación simultánea sobre una partícula de diferentes interacciones del medio, que se conocen por separado. Resulta extremadamente útil que en la superposición de los efectos de un medio, cada uno de ellos produce su propia fuerza, sin que interfieran debido a la presencia simultánea. Cada interacción da lugar a su propia contribución a la aceleración total. Las fuerzas se suman, por consiguiente, de la misma forma que las aceleraciones (4.3). Esta es la conocida «regla del paralelogramo» para la composición de fuerzas, en la nomenclatura de Mach. Para una partícula dada:

$$\left. \begin{array}{l} F_1 \rightarrow a_1 \\ F_2 \rightarrow a_2 \end{array} \right\} F_1 + F_2 \rightarrow a_1 + a_2$$

Esta ley permite predecir las fuerzas que actuarán sobre una partícula, cuando se encuentre en un entorno nuevo, compuesto por diferentes medios de los cuales se conoce su efecto individual sobre la partícula. Ahora bien, la superposición lineal de fuerzas, que le puede parecer evidente al alumno, hay ocasiones en que no se cumple; pero ésto ocurre en casos que escapan al nivel de este texto.

El problema de la **medida dinámica de fuerzas** está resuelto si sabemos medir aceleraciones y masas (4.6). Como hemos indicado en la introducción del capítulo, el alumno sabe medir fuerzas por el efecto estático que producen (son los experimentos con dinamómetros que se hicieron en los cursos elementales).

En Mecánica se suele admitir implícitamente otro postulado: los métodos estáticos de medida de fuerzas conducen al mismo resultado que el que se obtendría por la determinación directa de la aceleración. Este postulado de la **igualdad de las medidas estáticas y**

dinámicas de fuerzas facilita enormemente el estudio dinámico del movimiento. En efecto, frecuentemente disponemos de medios para medir estáticamente las fuerzas, el resultado con ellos obtenidos puede servirnos para predecir el movimiento que producirán, lo que no sería posible si tuviésemos que determinar en cada momento la aceleración y aplicar la ecuación (4.6).

* § 4.5 TERCERA LEY DE NEWTON

Realmente esta ley ya la tenemos introducida en las definiciones anteriores, por lo que no debe considerarse como un concepto teórico nuevo. A partir del enunciado IV y de la definición (4.6) podemos establecer la que recibe el nombre de *tercera ley de Newton*: *Cuando dos partículas, P_1 y P_2 , interactúan, la fuerza que ejerce P_1 sobre P_2 , \mathbf{F}_{21} , es igual y opuesta a la que ejerce P_2 sobre P_1 , \mathbf{F}_{12} : $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$. Las fuerzas \mathbf{F}_{21} y \mathbf{F}_{12} se encuentran sobre la misma recta, que es la que une a ambas partículas*, Fig. 4.5.

Una de las dos fuerzas, indistintamente, se suele llamar de *acción* y la otra de *reacción*. Esta es la razón por la cual el enunciado anterior se conoce también como *ley de acción y reacción*. Estas fuerzas implican una interacción simultánea mutua.

Hay que resaltar que las fuerzas de acción y reacción actúan sobre cuerpos distintos. Así \mathbf{F}_{21} , Fig. 4.5, actúa sobre P_2 ; \mathbf{F}_{12} sobre P_1 . Al aplicar (4.6), si \mathbf{F}_{21} y \mathbf{F}_{12} son las únicas fuerzas que actúan sobre cada una de las respectivas partículas: $\mathbf{F}_{21} = m_2 \mathbf{a}_2$, $\mathbf{F}_{12} = m_1 \mathbf{a}_1$; \mathbf{F}_{12} no influye en la aceleración de la partícula P_2 , ni \mathbf{F}_{21} en la de P_1 .

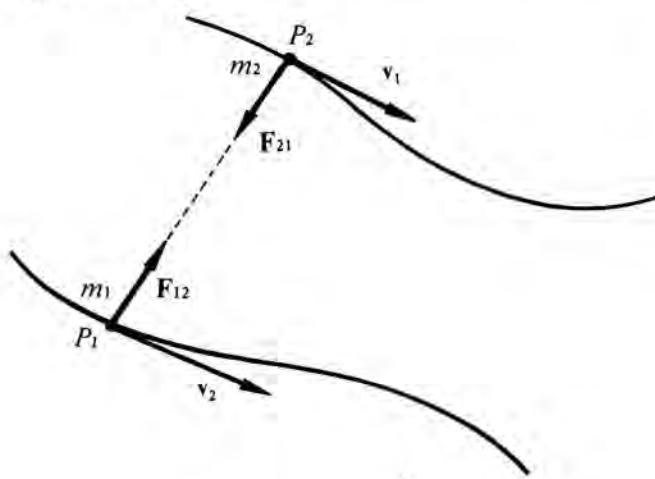


FIG. 4.5

Esta ley nos indica que las fuerzas de la naturaleza siempre se presentan a pares, por consiguiente es imposible la existencia de una sola fuerza aislada.

La Tercera Ley también es una indicación adicional de la importancia de los SRI. Cuando se analiza el movimiento de una partícula desde un SRI, hay que introducir unas fuerzas de inercia (§ 4.6), que dependen de la posición y la velocidad de la partícula respecto a dicho referencial. Estas fuerzas no son debidas a ninguna ley empírica de fuerzas y además no presentan la correspondiente fuerza de reacción. Por lo tanto, la importante simplicidad que representa esta ley (las fuerzas se presentan siempre a pares), sólo se verifica cuando se estudia el movimiento respecto de un SRI.

Vamos ahora a resolver una serie de ejercicios, una vez expuestas las leyes clásicas del movimiento, aunque somos conscientes de que todavía no hemos introducido las leyes de las fuerzas. En estos ejercicios utilizaremos los resultados a que hemos llegado en los apartados anteriores, sin preocuparnos ya de la construcción formal seguida a lo largo del capítulo.

Ejercicio 4.2

Una persona tira horizontalmente, a través de una cuerda inextensible y de masa despreciable, de un bloque de masa M que se encuentra sobre una superficie horizontal lisa, Fig. 4.6. La persona ejerce sobre la cuerda una fuerza constante \mathbf{F}_{CP} . Calcular la fuerza que actúa sobre el bloque si: a) éste no se mueve, b) se mueve. Razonar brevemente cómo se modifica el problema, si la masa de la cuerda (m_c) no es despreciable.

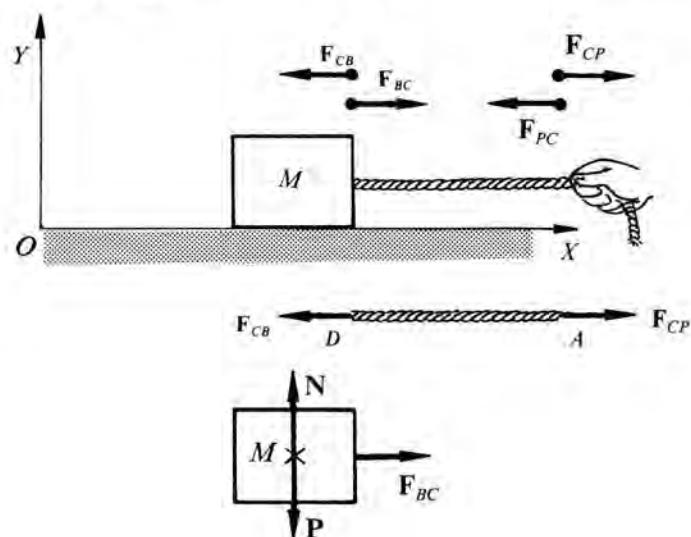


FIG. 4.6

Solución:

Para resolver cualquier problema de Mecánica es conveniente comenzar aislando la «partícula» de su medio. Por «partícula» entendemos el ente cuyo movimiento o estado de reposo (§ 9.4) interese estudiar en cada momento. Al aislar la partícula hay que sustituir cada agente del medio por la fuerza que ejerce sobre ella.

En este ejercicio podemos distinguir las «partículas» y medios indicados en el cuadro siguiente:

«La Particula»	El medio
La cuerda	La persona El bloque
	La Tierra (?)
El bloque	La cuerda, la superficie horizontal la Tierra

Resolvemos el ejercicio respecto de un *SRI* (*OXY*) situado en la superficie horizontal, Fig. 4.6.

Consideremos en primer lugar la *cuerda*, con ella interactúan la mano de la persona y el bloque. Si su masa es despreciable, no sufre interacción por parte de la Tierra (§ 5.2), por ello le hemos puesto una interrogación en el apartado correspondiente del cuadro anterior. Según la tercera ley de Newton, la fuerza que ejerce la mano de la persona sobre la cuerda (\mathbf{F}_{CP}) es igual y de sentido contrario a la que ejerce la cuerda sobre la persona (\mathbf{F}_{PC}). La primera actúa sobre la cuerda, y la segunda sobre la mano, Fig. 4.6.

Realmente \mathbf{F}_{CP} actuará sobre el extremo *A* de la cuerda; cualquier tramo o punto de ésta estará sometido a dos fuerzas: Sea el tramo *BC*, por ejemplo, sobre el extremo *B* del mismo actuará \mathbf{F}_1 , que será la fuerza debida al trozo de cuerda que se encuentra a su derecha, Fig. 4.7; sobre el otro extremo *C*, \mathbf{F}'_1 , debida al tramo de cuerda que se encuentra a su izquierda, Fig. 4.7. Aplicando la segunda ley (4.6) al tramo *BC* de cuerda, Fig. 4.7:

$$\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}'_1 = m_{BC} \mathbf{a}_{BC} \quad (4.7)$$

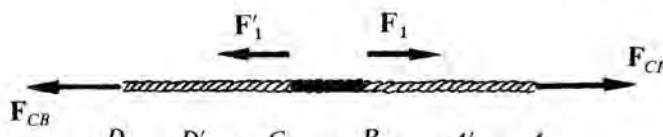


FIG. 4.7

al escribir esta relación hemos supuesto que la cuerda se mantiene horizontal, y que todos los vectores se encuentran en la misma dirección; (4.7) es la proyección de la correspondiente expresión vectorial en dicha dirección.

Como $m_{BC}=0$, $F_1=F'_1$; téngase en cuenta que hubiésemos llegado al mismo resultado si la cuerda estuviese en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme, aunque $m_{BC}\neq 0$. Este punto lo consideraremos posteriormente.

El argumento anterior se puede aplicar a cualquier tramo de la cuerda, entre ellos al *AA'* y al *DD'*; *A* y *D* son los extremos de la cuerda, Fig. 4.6, $\mathbf{F}_{CP}=-\mathbf{F}_{CB}=\mathbf{T}$. Luego, la fuerza ejercida en el extremo de una cuerda, que se denomina **tensión de la cuerda**, se transmite sin modificarse a todos los puntos de la misma, si ésta es de masa despreciable, está en reposo o se mueve sin aceleración. ¿Cómo se podría medir la tensión de una cuerda?

Sobre el *bloque* actúa \mathbf{F}_{BC} , ¿cuál es la fuerza de reacción a ésta y sobre quién actúa? Realmente también actúan en la dirección vertical, \mathbf{P} su peso y \mathbf{N} acción de la superficie horizontal sobre el bloque, Fig. 4.6. Según (4.6):

$$\mathbf{F}_{BC} + \mathbf{P} + \mathbf{N} = M \mathbf{a}_B \quad (4.8)$$

Proyectando esta ecuación en las direcciones de los ejes *XY*, Fig. 4.6:

$$F_{BC} = M a_B, \quad P = N \quad (4.9)$$

Al ser la cuerda inextensible, es decir de longitud constante, experimentan –en cualquier instante de tiempo– el mismo desplazamiento el bloque que un tramo arbitrario de cuerda, por lo tanto sus aceleraciones son iguales: $a_B = a_C$. Luego, la aceleración de los cuerpos unidos por una cuerda inextensible es al misma.

a) Si el bloque no se mueve: $a_B = 0$.

$$\mathbf{F}_{BC} = 0, \quad \mathbf{F}_{BC} = \mathbf{F}_{CB}, \quad \mathbf{F}_{CB} = \mathbf{F}_{CP}, \quad \mathbf{F}_{CP} = \mathbf{F}_{PC} \rightarrow \mathbf{F}_{CP} = 0$$

¿Por qué son iguales \mathbf{F}_{BC} y \mathbf{F}_{CB} ? ¿ \mathbf{F}_{CB} y \mathbf{F}_{CP} ? ¿ \mathbf{F}_{CP} y \mathbf{F}_{PC} ? Vemos que se llega a un resultado absurdo: $\mathbf{F}_{CP} = 0$, puesto que la persona ejerce una fuerza sobre la cuerda. Por lo tanto, y en ausencia de fuerza de rozamiento, es imposible que el bloque se encuentre en reposo, si la persona ejerce una fuerza sobre la cuerda. El adjetivo lisa, al referirse a una superficie, indica normalmente que se considera despreciable la fuerza de rozamiento sobre el cuerpo que se apoya en ella.

b) Si el bloque se mueve con movimiento uniformemente acelerado: $a_B = cte$.

$$\mathbf{F}_{BC} = \mathbf{F}_{CP}, \quad a_B = \frac{F_{BC}}{M} = \frac{F_{CP}}{M}$$

Cuando el bloque se acelera y la masa de la cuerda no es despreciable, la tensión en la cuerda disminuye continuamente desde su valor más grande, F_{CP} hasta F_{CB} en el extremo izquierdo. El análisis de la tensión en cada punto de la cuerda es un problema complicado, que queda fuera del nivel de esta obra. En este caso sobre la cuerda actúa también su peso; ahora bien, si las fuerzas \mathbf{F}_{CP} y \mathbf{F}_{CB} son horizontales, ¿por qué la cuerda no tiene una aceleración en el sentido negativo del eje *OY*? La respuesta, naturalmente, es que \mathbf{F}_{CP} y \mathbf{F}_{CB} nunca pueden ser estrictamente horizontales. La cuerda toma la forma de una curva simétrica (llamada catenaria) bajo la influencia de su peso; las fuerzas en los extremos serán tangentes a esta curva, Fig. 4.8.

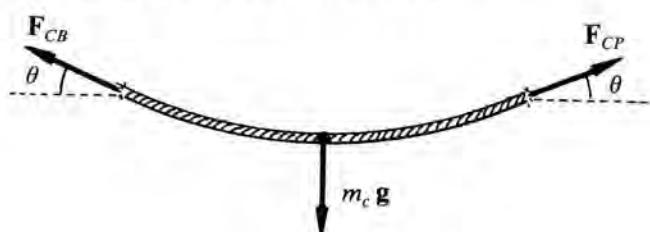


FIG. 4.8

Aplicando (4.6) en la dirección OY y teniendo en cuenta que $a_{Cy} = 0$:

$$F_{CP} \sin \theta + F_{CB} \sin \theta - m_C g = 0$$

si suponemos que las fuerzas en los extremos no difieren mucho:

$$\sin \theta = \frac{m_C g}{2F_{CP}} \quad (4.10)$$

Si la masa de la cuerda es pequeña, y F_{CP} razonablemente grande, θ es un ángulo muy pequeño: el análisis anterior no es afectado significativamente. De forma estricta (4.10) indica que ninguna fuerza, independientemente de su valor, puede estirar una cuerda hasta ponerla perfectamente horizontal. ¿Contradice este resultado a nuestra propia experiencia?

Ejercicio 4.3

Una partícula de 3 kg de masa está sometida a dos fuerzas F_1 y F_2 , como se indica en la Fig. 4.9. Calcular la aceleración de la partícula (a) si $F_1 = 2,2$ N y $F_2 = 2$ N. ¿Qué fuerza adicional hay que aplicarle, para que: a) su movimiento no sea acelerado, b) tenga una aceleración de 2 m s^{-2} a lo largo del eje OX negativo?

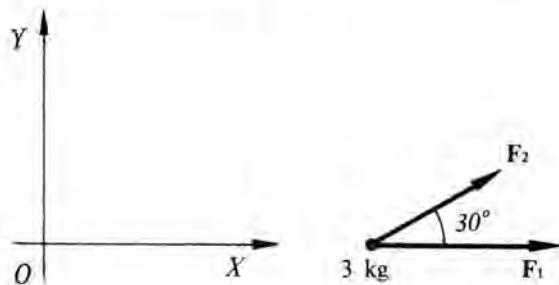


FIG. 4.9

Solución:

Resolvemos el ejercicio respecto del SRI indicado en la Fig. 4.9. Haciendo uso de la segunda ley de Newton (4.6):

$$\mathbf{F}_{\text{total}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = m\mathbf{a} \quad (4.11)$$

Expresando vectorialmente las fuerzas:

$$\mathbf{F}_1 = 2,2\mathbf{i}, \quad \mathbf{F}_2 = 2(\cos 30^\circ \mathbf{i} + \sin 30^\circ \mathbf{j})$$

y sustituyendo en (4.11): $\mathbf{a} = 1,31\mathbf{i} + 0,33\mathbf{j} \text{ m s}^{-2}$ (4.12)

Su módulo es $1,35 \text{ m s}^{-2}$ y el ángulo que forma con el sentido positivo del eje de abscisas: $14^\circ 8' 24''$. ¿Cómo se calculan estos valores?

Este apartado también se puede resolver haciendo uso de la ley de superposición de fuerzas (VII). La fuerza \mathbf{F}_1 le producirá en un instante arbitrario de tiempo una aceleración \mathbf{a}_1 , que se calcula anulando en dicho instante la influencia

que ejerce \mathbf{F}_2 sobre el movimiento de la partícula:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{F}_1}{m} = 0,73 \mathbf{i} \text{ m s}^{-2}$$

análogamente \mathbf{F}_2 :

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{F}_2}{m} = (0,58 \mathbf{i} + 0,33 \mathbf{j}) \text{ m s}^{-2}$$

actuando simultáneamente le producirán una aceleración (4.3):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = (1,31 \mathbf{i} + 0,33 \mathbf{j}) \text{ m s}^{-2}$$

resultando que como cabía esperar coincide con el (4.12).

En la segunda parte del ejercicio, la partícula está sometida a las fuerzas \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 y \mathbf{F}_3 , ésta última es desconocida:

a) No debe tener aceleración. Según (4.6):

$$\mathbf{F}_{\text{total}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{F}_3 = -(F_1 + F_2)$$

por lo tanto $\mathbf{F}_3 = -(3,94\mathbf{i} + \mathbf{j}) \text{ N}$, Fig. 4.10

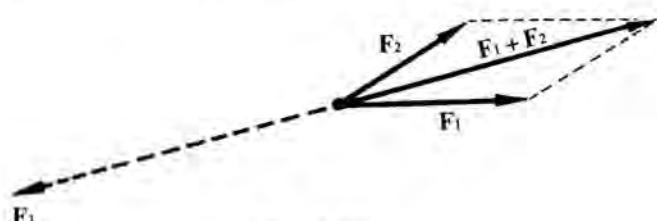


FIG. 4.10

b) Tenga una aceleración: $\mathbf{a} = -2\mathbf{i}$

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = m\mathbf{a}, \quad \mathbf{F}_3 = -(9,94\mathbf{i} + \mathbf{j}) \text{ N}$$

Ejercicio 4.4

Seis cubos iguales de un kilogramo de masa cada uno, se encuentran sobre una mesa horizontal, completamente lisa. Sobre el primer cubo actúa una fuerza constante de 1 N, en la dirección indicada en la Fig. 4.11. Dibujar un diagrama esquemático de las fuerzas que actúan sobre cada cubo. Calcular la fuerza total \mathbf{f} , que actúa sobre cada cubo. ¿Qué fuerza ejerce cada cubo sobre el siguiente?

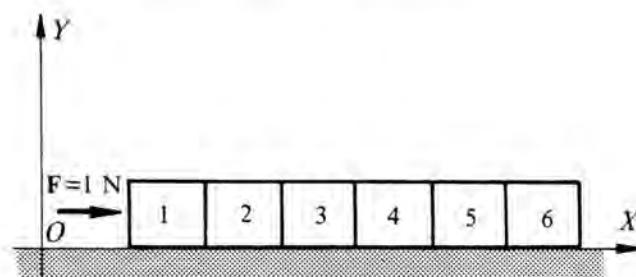


FIG. 4.11

Solución:

En este caso interesa considerar aislados los seis cubos («partículas»), ya que estamos interesados en estudiar el movimiento de cada uno de ellos. Siguiendo la pauta indicada en el ejercicio 4.2, las fuerzas que actúan sobre cada cubo son las representadas esquemáticamente en la Fig. 4.12. Hay que resaltar que éstas, y no otras, son las fuerzas que intervienen sobre cada uno de los cubos.

La acción de contacto (§ 5.5) sobre cada cubo (i), debida al anterior ($f_{i,i-1}$) o al siguiente ($f_{i,i+1}$) se ha sustituido por la fuerza equivalente. Sobre cada uno sólo actúan las fuerzas de contacto de los cuerpos adyacentes y las debidas a alguna ley física de fuerzas (en este caso la de atracción gravitatoria o peso). Obsérvese que la fuerza F sólo actúa, en esta descomposición, sobre el cubo al que está *directamente*

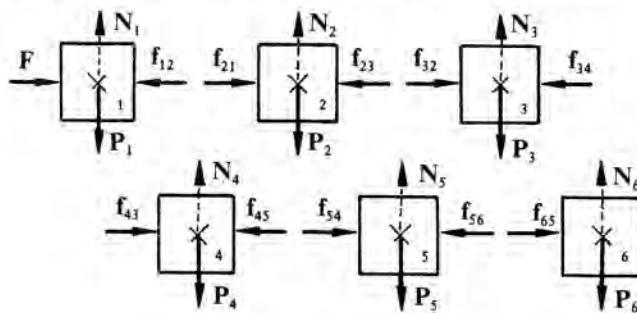


FIG. 4.12

aplicada (el primero); su efecto sobre los demás, que el sentido común nos dice que existe, tiene lugar a través de las diferentes fuerzas de contacto entre los cubos (!).

Aplicando la segunda ley de Newton, respecto de un *SRI* situado sobre la mesa, a cada uno de los cubos de la Fig. 4.12:

$$\begin{aligned} F - f_{12} &= m_1 a_1 & f_{43} - f_{45} &= m_4 a_4 \\ f_{21} - f_{23} &= m_2 a_2 & f_{54} - f_{56} &= m_5 a_5 \\ f_{32} - f_{34} &= m_3 a_3 & f_{65} &= m_6 a_6 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Como los cubos no tienen aceleración en la dirección del eje OY , ya que están obligados a moverse sobre la mesa: $P_1 - N_1 = m_1 a_1 \rightarrow P_1 = N_1$, análogamente para los restantes.

Parece razonable suponer, aunque el enunciado no afirme explícitamente, que los cubos son *indeformables*, por consiguiente todos ellos tienen en cualquier instante la misma aceleración, ¿Por qué? $a_1 = a_2 = \dots = a_6 \equiv a$. En este ejercicio todos los cubos son de la misma masa: $m_1 = m_2 = \dots = m_6 \equiv m$. Como consecuencia de estas dos propiedades, la fuerza total que actúa sobre cada cubo es la misma

$$\begin{aligned} f_{T1} &= F - f_{12} = m a \\ f_{T2} &= f_{21} - f_{23} = m a & f_{T1} = f_{T2} = f_{T3} = \dots = f_{T6} = f_T \\ &\vdots \\ f_{T6} &= f_{56} = m a \end{aligned} \quad (4.14)$$

evidentemente ésto no es cierto, si los cubos son de masas diferentes. ¿Podrías indicar los diferentes pares de fuerzas de acción y reacción presentes?

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (4.14), y teniendo en cuenta las fuerzas de acción y reacción, se obtiene:

$$F = 6 m a \quad a = 0,17 \text{ m s}^{-2}$$

La fuerza neta sobre cada cubo vale (4.14):

$$f_T = m a = 0,17 \text{ N}, \quad f_T = 0,17 i \text{ N}$$

y la que ejerce cada cubo sobre el siguiente (4.14):

$$f_{12} = F - m a = 0,83 \text{ N}, \quad f_{45} = f_{34} - m a = 0,32 \text{ N}$$

$$f_{23} = f_{12} - m a = 0,66 \text{ N}$$

$$f_{34} = f_{23} - m a = 0,49 \text{ N}, \quad f_{56} = m a = 0,17 \text{ N}$$

a partir de estos resultados, ¿qué consecuencia se puede deducir?. ¿Cómo se modificaría el ejercicio si los cubos fuesen de masa diferente?.

* § 4.6 SISTEMAS DE REFERENCIA NO INERTIALES. FUERZAS DE INERCIA.

Ya hemos indicado que las leyes clásicas del movimiento de una partícula presentan los enunciados estudiados para un observador localizado en un *SRI*. En este apartado queremos plantear dichas leyes para uno que se encuentre en un *SRNI*.

Ya dijimos (§ 4.2), que un *SRNI* es el que tiene una cierta aceleración respecto de un *SRI*. Es decir, los ejes de dicho sistema tienen un movimiento de traslación no uniforme o de rotación respecto de los inertiales.

El plantearnos el estudio dinámico del movimiento de una partícula, para un observador localizado en un *SRNI* es importante, puesto que en ocasiones no es posible considerar la aproximación de *SRI*. Por ejemplo, la Tierra no se puede tomar como un *SRI* para el estudio de las rotaciones de los ciclones en los hemisferios terrestres norte y sur, o para el estudio del movimiento de un satélite en el momento de su lanzamiento, etc. En otras ocasiones, resulta necesario relacionar las medidas que hacen dos observadores, del movimiento de una partícula, uno situado en un *SRI* y el otro en uno no inercial.

La segunda ley de Newton enunciada respecto de un observador inercial es (4.6):

$$F = m a$$

donde a representa la aceleración de la partícula respecto del observador localizado en el *SRI*. Vamos a cambiar la notación para hacer patente este hecho, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{SRI}$:

$$F = m \mathbf{a}_{SRI} \quad (4.15)$$

\mathbf{F} es la fuerza total sobre la partícula, calculada en general, como superposición (§ 4.4) de los diferentes agentes que actúan sobre ella. Cada uno de estos agentes da lugar a una interacción, que obedece a una determinada ley empírica de fuerzas (gravitacionales, electromagnéticas, de contacto, etc.).

Si el movimiento de la partícula lo está contemplando también un observador situado en un SRNI, la relación entre la aceleración que él mide (\mathbf{a}_{SRNI}) y la medida por el observador situado en el SRI (\mathbf{a}_{SRI}) es (3.34):

$$\mathbf{a}_{SRI} = \mathbf{a}_{SRNI} + \mathbf{a}_a + \mathbf{a}_{\text{complementaria}} \quad (4.16)$$

donde hemos cambiado ligeramente la notación respecto de la utilizada en, (3.34): $\mathbf{a}_{SRI} = \mathbf{a}_A$, $\mathbf{a}_{SRNI} = \mathbf{a}_r$.

Razonar físicamente su validez.

Si nos limitamos al caso particular de que el SRNI sólo tenga movimiento de traslación y no de rotación (3.37):

$$\mathbf{a}_{SRI} = \mathbf{a}_{SRNI} + \mathbf{a}_{a_r} \quad (4.17)$$

¿qué representa \mathbf{a}_{a_r} ?

Sustituyendo (4.17) en (4.15):

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}_{SRNI} + m \mathbf{a}_{a_r} \quad (4.18)$$

Si queremos seguir manteniendo la segunda ley de la misma forma (4.6), independientemente del sistema de referencia inercial o no inercial respecto del que se exprese, escribiremos (4.18) de la forma siguiente:

$$\mathbf{F} - m \mathbf{a}_{a_r} = m \mathbf{a}_{SRNI} \quad (4.19)$$

Por mantener la misma expresión formal para los dos sistemas, entendemos que en ambos casos aparece en el segundo miembro, el producto de la masa por la aceleración de la partícula respecto del referencial desde el que se observa su movimiento.

Si hacemos por definición:

$$\mathbf{F}_{\text{inercia}} \equiv -m \mathbf{a}_{a_r} \quad (4.20)$$

(4.19) se escribirá:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{inercia}} = m \mathbf{a}_{SRNI} \quad (4.21)$$

Llamando $\mathbf{F}_{\text{total}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{inercia}}$, (4.21) se convierte en:

$$\mathbf{F}_{\text{total}} = m \mathbf{a}_{SRNI} \quad (4.22)$$

Interpretemos físicamente estos resultados. Introduciendo las fuerzas de inercia (4.20) hemos conseguido que la expresión formal de la segunda ley, sea la misma para un observador inercial (4.15) que para

uno no inercial (4.22). Ahora bien, para el no inercial las fuerzas que actúan sobre la partícula son tanto las que obedecen a leyes físicas (\mathbf{F}), como las de inercia.

Para el observador no inercial, las fuerzas de inercia actúan realmente, es decir no se trata de un mero truco matemático. Por actuar realmente queremos decir que son capaces de deformar resortes, tal como hacen las fuerzas que obedecen a leyes físicas. Todos hemos sufrido el efecto de estas fuerzas al ir en un vehículo, que en un cierto instante sufre una aceleración positiva o negativa. Por ello, puede conducir a error la nomenclatura de «fuerzas ficticias» o «seudofuerzas» con que designan a estas fuerzas muchos autores.

Conviene insistir que las fuerzas de inercia sólo hay que introducirlas cuando se estudia el movimiento de una partícula respecto de un SRNI, y son fuerzas que tienen la misma dirección que la aceleración del SRNI, sentido contrario y módulo $m a_{a_r}$, donde m es la masa de la partícula y a_{a_r} la aceleración del SRNI.

Este concepto que le parece tan complicado al alumno, lo ha utilizado solapadamente, en los cursos elementales, como veremos en el ejercicio siguiente.

Ejercicio 4.5

Una partícula O' de masa M tiene un movimiento circular uniforme, con velocidad v_0 , sobre un plano horizontal. El radio de la trayectoria es R . Justificar cómo describiría el movimiento, a partir de la segunda ley de Newton, un observador inercial situado en el centro de la trayectoria O y cómo lo haría uno que se moviese con la partícula, Fig. 4.13

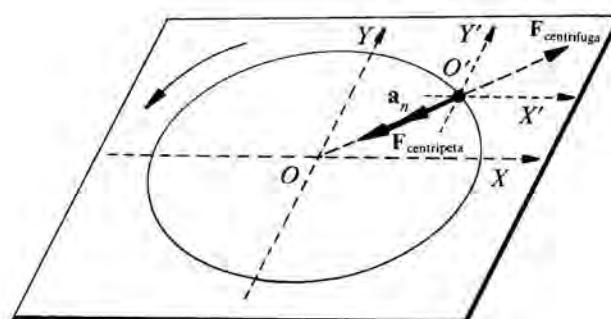


FIG. 4.13

Solución:

Para un observador situado en el *SRI* (OXY), la Segunda Ley se expresa según (4.15). Al tener la partícula un movimiento circular uniforme (2.22): $a_t = 0$, $a_n = v_0^2/R = \text{cte}$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n$, por lo tanto:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_n, F = mv_0^2/R \quad (4.23)$$

fuerza llamada **centrípeta** por estar dirigida hacia el centro de la trayectoria.

Para el observador situado en el *SRNI* ($O'X'Y'$), la Segunda Ley se expresa según (4.21). Hemos de calcular en primer lugar el valor de la fuerza de inercia para él (4.20):

$$\mathbf{F}_{\text{inercia}} = -m\mathbf{a}_n$$

$$\mathbf{F}_{\text{inercia}} = -m\mathbf{a}_n, F_{\text{inercia}} = mv_0^2/R \quad (4.24)$$

cuyo sentido es opuesto al de \mathbf{a}_n (Fig. 4.13). Al estar situado el *SRNI* en la partícula que se mueve, la velocidad de ésta respecto de aquél será constantemente nula y $\mathbf{a}_{\text{SRNI}} = \mathbf{0}$, luego:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{inercia}} = \mathbf{0} \quad (4.25)$$

Esta fuerza de inercia es la que de forma tan «alegre» se introduce en los primeros cursos de Física, bajo el nombre de **fuerza centrífuga**. Por la complejidad de este concepto, y por no ser fundamental, es por lo que resulta conveniente en los primeros cursos referir siempre el movimiento a un *SRI*.

* Ejercicio 4.6

Un cuerpo de masa M_1 cuelga, mediante una cuerda inextensible y de masa despreciable, del techo de un ascensor de masa M_2 . Este sube con una cierta aceleración como consecuencia de una fuerza aplicada F ($F > (M_1 + M_2)g$), que es constante. El cuerpo de masa M_1 se encuentra inicialmente a una distancia s del suelo del ascensor, Fig 4.14.

- a) Calcular la aceleración del ascensor.
 - b) Tensión de la cuerda que une el cuerpo de masa M_1 al techo del ascensor.
 - c) Si de repente se rompe la cuerda, ¿cuál es la aceleración del ascensor en el instante inmediatamente después de romperse? ¿Cuál es la aceleración del cuerpo de masa M_1 ? d) ¿Cuánto tiempo tarda M_1 en llegar al suelo del ascensor?
- Resolver el ejercicio tanto respecto de un *SRI*, como de un *SRNI*.

Solución:

Comenzaremos por fijar los sistemas de referencia respecto de los cuales resolveremos el ejercicio. Uno localizado en el suelo (OXY) será inercial; el situado en el ascensor ($O'X'Y'$) no inercial, ¿por qué?

- a) Respecto del *SRI* la aceleración del ascensor será (4.15):

$$a_{\text{SRI}} = \frac{F - (M_1 + M_2)g}{M_1 + M_2} \quad (4.26)$$

ya que F y los pesos son las únicas fuerzas debidas a leyes empíricas que actúan sobre el ascensor. ¿Por qué hemos in-

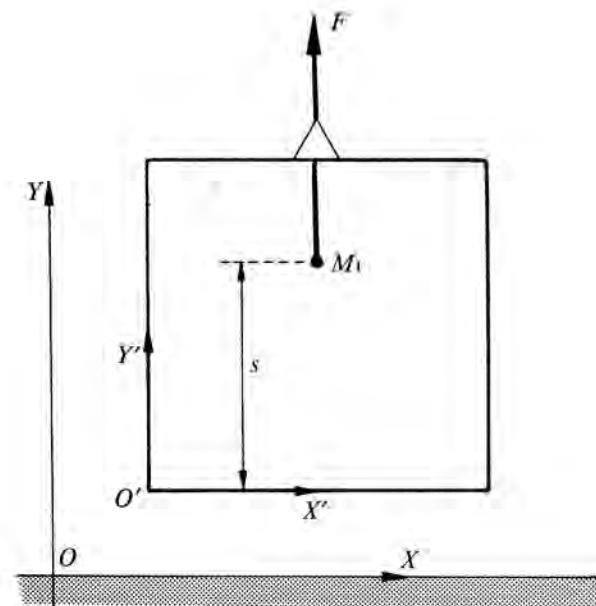


FIG. 4.14

cluido el peso $M_1 g$? Respecto del *SRNI* su aceleración es nula, ¿por qué?

- b) Para un observador situado en el *SRI* (4.15):

$$T - M_1 g = M_1 a_{\text{SRI}} \quad (4.27)$$

¿por qué M_1 lleva, para este observador, la aceleración del ascensor? Sustituyendo (4.26) en (4.27) se obtiene:

$$T = \frac{M_1}{M_1 + M_2} F \quad (4.28)$$

Para un observador no inercial, sobre M_1 actúan T , $M_1 g$ y la fuerza de inercia ($M_1 a_{\text{SRI}}$). Como su aceleración respecto de $O'X'Y'$ es nula, se verifica según (4.21):

$$T - M_1 g - M_1 a_{\text{SRI}} = 0$$

Llegándose, como era de esperar, al mismo resultado que el obtenido por el observador inercial. Ahora bien, el razonamiento de ambos observadores es diferente, ¿es consciente de ello el alumno?

- c) El enunciado pregunta la aceleración de M_1 y del ascensor *inmediatamente* después de romperse la cuerda. Se indica inmediatamente para estar seguros que M_1 no ha llegado todavía al suelo del ascensor.

Para un observador inercial, la aceleración del ascensor es:

$$a_{\text{SRI}}^* = \frac{F - M_2 g}{M_2} \quad (4.29)$$

para el no inercial la aceleración es nula.

Aplicamos la expresión (4.15) al cuerpo de masa M_1 , que nos permitirá conocer su aceleración respecto del *SRI*. Para un observador situado en este referencial, la única fuerza que actúa sobre M_1 es su peso (!); por lo tanto, su aceleración será: $\mathbf{a}_{\text{SRI}}^* = g\mathbf{j}$.

Sobre M_1 , para un observador no inercial, actúan las siguientes fuerzas: su peso ($M_1 g$) y la fuerza de inercia ($M_1 a_{\text{SRI}}^*$). Utilizando (4.21):

$$-M_1 g - M_1 a_{\text{SRI}}^* = M_1 a_{\text{SRNI}}' \quad (4.30)$$

sustituyendo (4.29) en (4.30) se obtiene:

$$\mathbf{a}'_{SRNI} = -\frac{F}{M_2} \mathbf{j} \quad (4.31)$$

Comprueba, utilizando (4.17), la coherencia de los valores calculados.

d) El tiempo que tarda en caer es mucho más fácil de calcular para el observador no inercial que para el inercial. Para el primero (*SRI*) el cuerpo cae con movimiento uniformemente acelerado (4.31) y recorre una distancia s antes de llegar al suelo:

$$s = \frac{1}{2} \mathbf{a}'_{SRNI} t^2 \quad t = \left(\frac{2 M_2 s}{F} \right)^{1/2} \quad (4.32)$$

Para el *SRI*, M_1 recorre una distancia: $s - 1/2 a'^*_{SRI} t^2$ antes de que alcance el suelo del ascensor, ¿Por qué? Como el movimiento también es uniformemente acelerado:

$$s - \frac{1}{2} a'^*_{SRI} t^2 = \frac{1}{2} g t^2 \quad (4.33)$$

Sustituyendo (4.29) en (4.33) se obtiene, como cabía esperar, el mismo valor que para el observador no inercial. Una vez más comprobamos que el razonamiento de ambos observadores es completamente diferente.

CUESTIONES

1. Citar diferentes ejemplos de «partículas» y de su correspondiente medio o entorno.
2. ¿Qué se entiende por Mecánica Clásica?. Limitaciones que tiene.
- * 3. ¿Qué se entiende por procedimiento inductivo en la elaboración de una teoría científica?
- * 4. ¿Qué es una definición? ¿Y un axioma?. ¿Qué se entiende por teorema?
5. Concepto de ley científica. Como caso particular considera el de ley física.
6. ¿Qué es una teoría científica?
7. ¿Qué es una partícula «libre»? ¿Cómo se puede reconocer experimentalmente que una partícula es «libre»?
8. Según la primera ley de Newton, no es posible distinguir entre una partícula que se encuentre en reposo y otra que se mueva con velocidad (v) constante. Razonar la respuesta.
9. ¿Qué es un *SRI*? Su importancia en la Mecánica Clásica.
10. ¿Qué se entiende por masa inerte?
11. Relación entre los conceptos «interacción» y «fuerza».
- * 12. La masa de un cuerpo al que se encuentre rigidamente ligado un *SRI* debe considerarse como infinita, de lo contrario se violaría la ley IV. ¿Por qué?
- * 13. Demostrar la invariancia de (4.6) frente a traslaciones y rotaciones del sistema de referencia.
14. Citar diversos ejemplos en los que se haga uso de la ley de superposición de fuerzas.
15. Indicar para los casos siguientes, los pares de fuerzas de acción y reacción: a) una pelota golpeada por una raqueta; b) una gota de lluvia que cae sobre el paraguas; c) un automóvil que acelera en una autopista; y

d) un avión en vuelo que cambia de dirección, e inicia una trayectoria circular.

16. ¿Qué es un *SRNI*? Ejemplos de tales sistemas.
17. ¿Qué son las fuerzas de inercia?. Describe algunas situaciones reales en que las hayas percibido.
- * 18. Se coloca una moneda sobre el plato de un tocadiscos. Al poner en marcha el motor se observa, que antes de alcanzar su velocidad constante de rotación, la moneda sale despedida. Explicar lo que ocurre.

PROBLEMAS

NOTA: Considérese en todos los problemas, aunque no se indique, que las cuerdas son inextensibles y de masa despreciable; que las poleas son ideales: su masa es despreciable, así como el rozamiento con la cuerda que pasa por ellas. Todas las superficies se consideran lisas.

1. Un cuerpo de 1 kg se encuentra sobre una superficie inclinada 30° respecto de la horizontal. ¿Cuál será su aceleración si sobre él actúa una fuerza de 8 N, paralela a la superficie y dirigida: a) hacia arriba, b) hacia abajo?

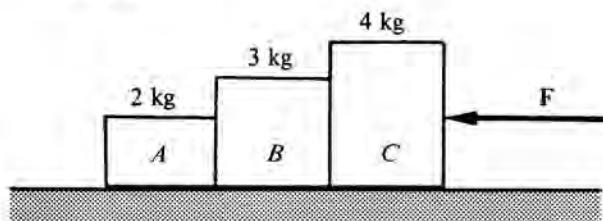


FIG. 4.15

2. Tres bloques *A*, *B* y *C* se encuentran sobre una superficie horizontal, Fig 4.15. a) ¿Qué fuerza *F* hay que aplicarle a *C* para que los bloques adquieran una aceleración constante de 2 m s⁻²? b) Fuerza que *B* ejerce sobre *A* y *A* sobre *B*. c) Fuerza que ejerce *B* sobre *C*.
3. Repetir el problema anterior si ahora la fuerza *F* se aplica al bloque *A*. Comentar las diferencias entre ambos resultados.
4. Tres bloques idénticos de 300 gr se apoyan sobre una superficie horizontal y están conectados mediante cuerdas, Fig. 4.16. Respecto de un observador inercial tienen una aceleración de 2 m s⁻², debida a la acción de una fuerza *F*. a) Calcular *F*, b) la tensión en cada tramo de cuerda.

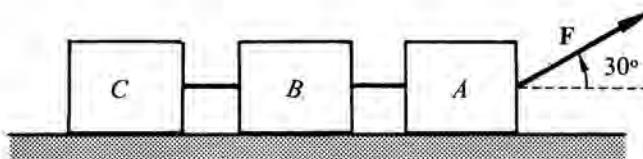


FIG. 4.16

5. Calcular las aceleraciones de los cuerpos de la Fig. 4.17, así como las tensiones en los diferentes tramos de cuerda. Calcular los resultados para los siguientes valores numéricos: $M_1 = 200 \text{ g}$, $M_2 = 180 \text{ g}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$. Particularizar los resultados para $\beta = 90^\circ$ y comprobarlos por resolución directa del «nuevo» problema.

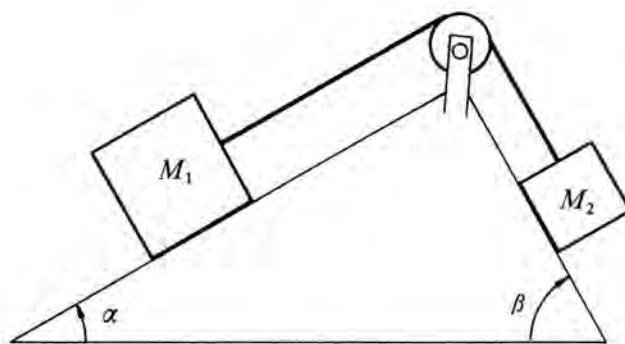


FIG. 4.17

6. Calcular las aceleraciones de los cuerpos de masas M_1 y M_2 , Fig. 4.18, así como las tensiones en los diferentes tramos de cuerda.

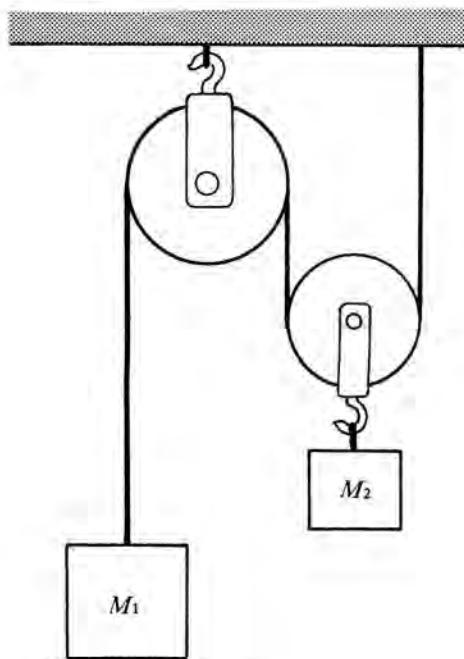


FIG. 4.18

- * 7. Un cuerpo A de 5,4 kg cuelga de un punto Z y se apoya sobre una superficie cónica lisa, Fig. 4.19. Esta superficie gira alrededor del eje ZZ' con una velocidad angular de $1/6 \text{ rad s}^{-1}$. Calcular: a) velocidad lineal del cuerpo, b) reacción de la superficie sobre el cuerpo, c) tensión de la cuerda, y d) velocidad angular para la que el cuerpo se separa de la superficie cónica.

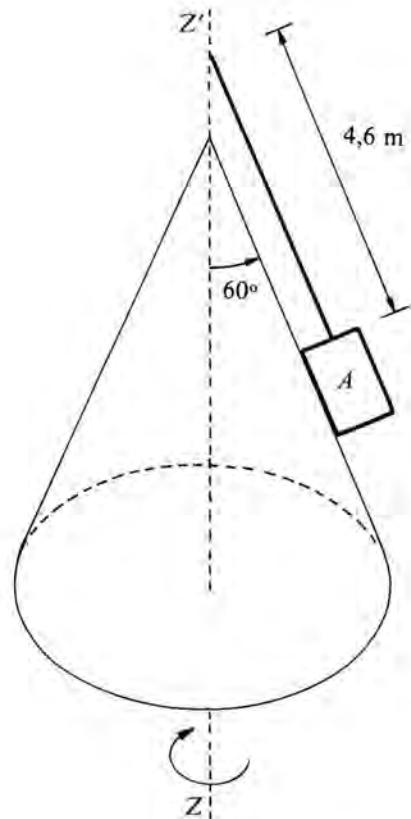


FIG. 4.19

8. Una persona de 90 kg se encuentra en un ascensor. Calcular la fuerza que ejerce el suelo sobre él en los siguientes casos: a) El ascensor asciende con velocidad constante, b) desciende con velocidad constante, c) asciende con una aceleración constante de 3 m s^{-2} , d) desciende con la misma aceleración, y e) se rompe el cable y el ascensor cae libremente.

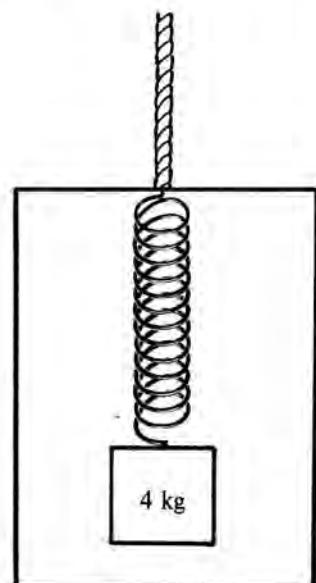


FIG. 4.20

- *9. Del resorte colgado del techo de un ascensor se suspende un cuerpo de 4 kg, Fig. 4.20. Cuando el ascensor se encuentra parado, el resorte sufre un alargamiento de 40 cm como consecuencia del cuerpo que está colgado en su extremo. Se pone en movimiento el ascensor y se observa un alargamiento suplementario de 8 cm, que se mantiene constante. a) El ascensor *¿Sube o baja?* b) Su movimiento *¿es uniforme o uniformemente acelerado?* c) En el primer caso calcular la velocidad, en el segundo la aceleración. d) Tensión del resorte.
- *10. Para cada uno de los siguientes casos, calcular la posición de equilibrio, así como la tensión de la cuerda que lo une al techo, de un péndulo de longitud L . El péndulo se encuentra: 1) En un coche que se mueve con aceleración a por una carretera horizontal. 2) En un coche que asciende por una carretera que forma un ángulo θ con la horizontal: 2.1) si su movimiento es uniforme, 2.2) si es uniformemente acelerado, de aceleración a . 3) En un ascensor que desciende con aceleración a .
- *11. Un ascensor tiene una aceleración hacia abajo igual a $g/3$. En su interior se encuentra montada una polea de la que cuelgan dos cuerpos, tal como se indica en la Fig. 4.21. a) Calcular la aceleración de los cuerpos respecto de un observador situado en el ascensor. b) Calcular la fuerza que ejerce el techo sobre la polea. c) Tensión de la cuerda.

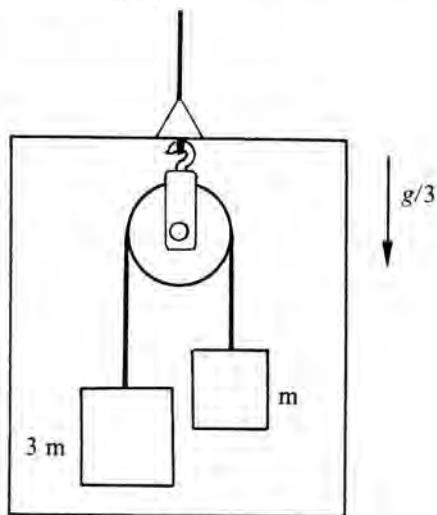


FIG. 4.21

- *12. *¿Qué fuerza constante F hay que aplicarle al carrito de masa M , Fig. 4.22, para que los carritos de masa M_1 y M_2 no se muevan con relación a él?*
- *13. Un coche parte del reposo y acelera a razón de 3 m s^{-2} , en el sentido positivo del eje de abcisas. Tres segundos después de arrancar, un pasajero deja caer una moneda desde una altura de 1 m sobre el suelo del coche. a) En el sistema de referencia solidario al coche, calcular la fuerza de inercia que se ejerce sobre la moneda. b) Calcular, respecto de dicho referencial, el tiempo que tarda la moneda en alcanzar el suelo. c) Calcular la distancia que recorre hacia la parte delantera o trasera del coche durante su caída. Resolver el problema respecto de un observador situado en un SRI.

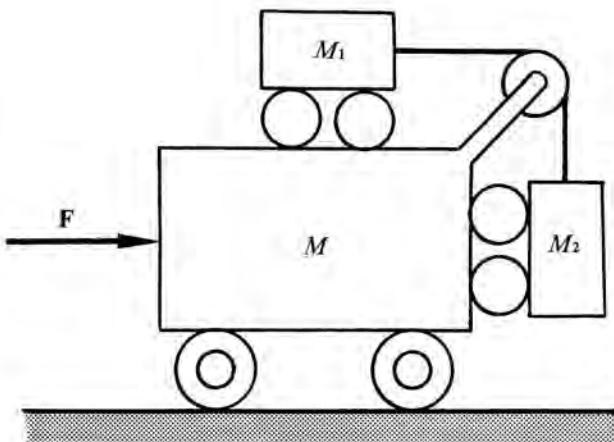


FIG. 4.22

- *14. Dado el sistema de la Fig. 4.23, en el que la polea móvil tiene una masa M_p , se pide: a) Razonar cualitativamente el movimiento que adquieren los bloques A, B y C. b) Aceleración de los tres bloques y de la polea móvil respecto de un SRI. b) Tensiones de las cuerdas. Datos numéricos: $M_A = 20 \text{ kg}$, $M_B = 10 \text{ kg}$, $M_C = 3 \text{ kg}$, $M_p = 5 \text{ kg}$.

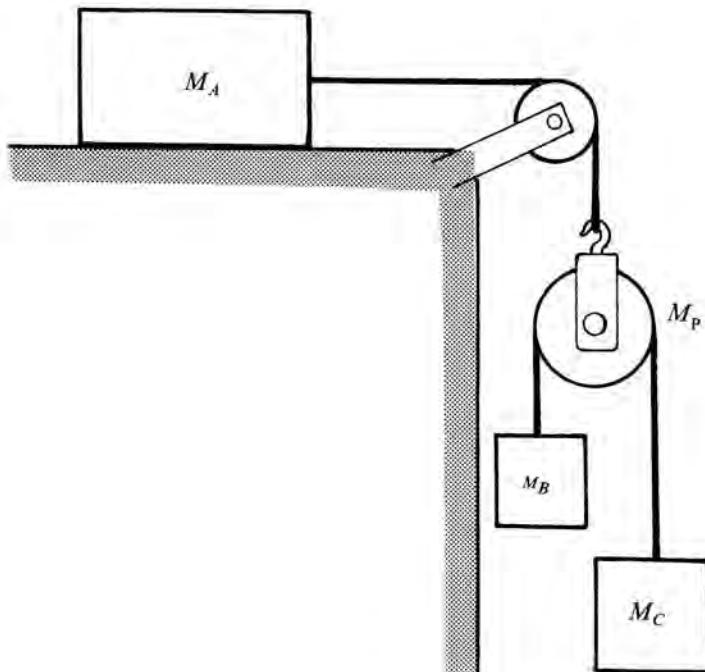


FIG. 4.23

CAPITULO V

LEYES DE FUERZAS EN LA NATURALEZA

Las leyes del movimiento establecen una relación entre los valores instantáneos de las fuerzas y el de la aceleración (5.6). Sin embargo, no dan información alguna acerca de la naturaleza de las fuerzas. Es decir, dada una partícula y su entorno no conocemos qué tipo de interacción existe entre ambos. Por lo tanto, para llegar a las leyes de la Mecánica necesitamos conocer las leyes de las fuerzas, como ya indicamos en el capítulo anterior.

Por *leyes de las fuerzas* entendemos los procedimientos mediante los cuales podemos calcular la fuerza que actúa sobre una determinada partícula o cuerpo (§ 2.1), en función de las propiedades de éste y las de su medio. La expresión (5.6) no es una ley de la naturaleza, sino una definición de fuerza. *Se verifica para todo tipo de fuerzas sea cual fuere su origen o naturaleza.*

El número de medios posibles para una partícula es tan grande, que no es factible estudiar detalladamente todas las leyes de las fuerzas. No obstante, todas las fuerzas de la naturaleza pueden explicarse, a nivel microscópico, en función de cuatro interacciones fundamentales: la gravitatoria (§ 5.1), la electromagnética (§ 5.3) y la nuclear, fuerte y débil (§ 5.4).

En este capítulo queremos dar una idea elemental y breve de cada una de ellas. En capítulos posteriores las trataremos con mayor extensión, e incluso bajo otros aspectos. De todas ellas, las que presentan menos interés desde el punto de vista de la Mecánica Clásica son las nucleares, ¿Por qué?

Para la Mecánica Clásica es útil e importante añadir a las anteriores una serie de fuerzas: de contacto (§ 5.5), elásticas (§ 5.6) y de rozamiento (§ 5.7), que aparecen en la mayor parte de situaciones prácticas. Estas son simplemente la *manifestación macroscópica* de las fuerzas electromagnéticas entre gran número de átomos. Como son las utilizadas para describir las interacciones más familiares en los fenómenos mecánicos, las hemos considerado por separado. Algunas de ellas, ya las hemos utilizado en el capítulo anterior a nivel de ejercicios y problemas. Lo hicimos basándonos en la idea intuitiva que los alumnos tienen de ellas.

Aprovechamos este capítulo para ampliar el concepto de masa (§ 4.3). Introducimos el de masa pesante o gravitatoria (§ 5.2), como característica de una partícula sometida a un tipo específico de interacción: la gravitatoria. Establecemos su relación con la masa inerte, para converger en la caracterización de una partícula sometida a interacción mediante un concepto único: el de masa. También de forma natural se introduce el concepto de peso.

A nivel de ejercicios y de problemas incidiremos especialmente en los relacionados con las fuerzas gravitatorias y las de carácter macroscópico. En capítulos posteriores, tendremos ocasión de resolver ejercicios relacionados con el resto de fuerzas básicas de la naturaleza.

§ 5.1 FUERZAS GRAVITATORIAS

Nuestra experiencia nos indica que la interacción gravitatoria entre objetos materiales es un fenómeno universal. Newton descubrió la ley que la rige estudiando el movimiento de los planetas; posteriormente la generalizó a cualquier par de objetos materiales. Nosotros vamos a proceder de forma diferente a Newton, sugiriendo que la interacción gravitatoria entre dos objetos cualesquiera puede deducirse a partir de experimentos. Este punto de vista diferente está motivado por el planteamiento que nos hemos propuesto para presentar las leyes de la Mecánica.

Sabemos que la Tierra interacciona con cualquier partícula que se encuentra en sus proximidades. Esta interacción se manifiesta tanto acelerando partículas, como estirando muelles de los que cuelgan partículas materiales, Fig. 5.1.

Utilicemos para medir la fuerza debida a la interacción gravitatoria, un experimento conceptual: su efecto de deformación de un muelle. Para una partícula dada P dicha fuerza, Fig. 5.2, siempre es de la forma:

$$\mathbf{F} = -\frac{\eta}{r^2} \mathbf{u}_r , \quad u_r = 1 \quad (5.1)$$



FIG. 5.1

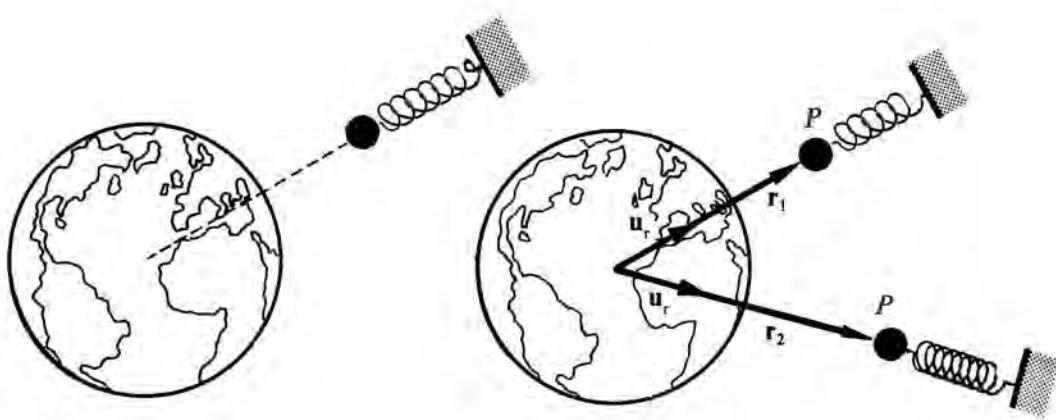


FIG. 5.2

donde η es un parámetro que sólo depende de la partícula P utilizada. La fuerza siempre es atractiva e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Determinemos ahora las fuerzas que actúan sobre diferentes partículas: P_1, P_2, \dots, P_j colocadas sucesivamente en el mismo punto r :

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{\eta_1}{r^2} \mathbf{u}_r, & F_2 &= -\frac{\eta_2}{r^2} \mathbf{u}_r, & \dots \\ \dots, & F_j = \frac{\eta_j}{r^2} \mathbf{u}_r & & & \end{aligned} \quad (5.2)$$

se verifica por lo tanto:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\eta_2}{\eta_1}, \quad \frac{F_3}{F_1} = \frac{\eta_3}{\eta_1}, \quad \dots, \quad \frac{F_j}{F_1} = \frac{\eta_j}{\eta_1} \quad (5.3)$$

Luego le podemos asignar a cada partícula un número m_{Gj} :

$$\frac{\eta_1}{\eta_1} \equiv m_{G1}, \quad \frac{\eta_2}{\eta_1} \equiv m_{G2}, \quad \dots, \quad \frac{\eta_j}{\eta_1} \equiv m_{Gj} \quad (5.4)$$

este número caracteriza únicamente a la fuerza gravitatoria que actúa sobre cada partícula. Por definición, le llamamos **masa gravitatoria** de la partícula. Sustituyendo (5.4) en (5.2):

$$F_2 = -\eta_1 \frac{m_{G2}}{r^2} \mathbf{u}_r, \quad F_3 = -\eta_1 \frac{m_{G3}}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (5.5)$$

En estas expresiones hemos elegido como unidad de masa gravitatoria, de forma arbitraria, la correspondiente a P_1 . Por lo tanto m_G tiene dimensiones [M], a pesar de que las expresiones (5.4) parecen indicar que no tiene dimensiones; debemos hacer constar que en (5.4) no se ha introducido de forma explícita la masa correspondiente a P_1 : $m_{G1} = 1$ unidad de masa.

Esta forma de introducir la masa hace de ella una magnitud fundamental, ya que no la hemos referido a ninguna otra; la medimos utilizando un patrón de masas.

A partir de su definición, se infiere que asignamos la misma masa gravitatoria a partículas que situadas en el mismo punto son atraídas con la misma fuerza. También es fácil comprobar experimentalmente que m_G es una magnitud aditiva. ¿Qué significa que es aditiva? ¿Cómo lo harías?

Experimentos muy sensibles permiten detectar efectos como el que acabamos de estudiar (interacción Tierra-partículas), entre dos partículas cualesquiera. Utilizando los valores de m_G antes calculados, se puede comprobar que las fuerzas entre dos partículas arbitrarias P_1 y P_2 , Fig. 5.3, verifican las relaciones:

$$F_{12} = -\frac{k_2 m_{G1}}{r_{12}^2} \mathbf{u}_r, \quad F_{21} = -\frac{k_1 m_{G2}}{r_{12}^2} \mathbf{u}_r \quad (5.6)$$

Por la tercera ley de Newton: $F_{12} = -F_{21}$, por lo tanto:

$$\frac{k_1}{m_{G1}} = \frac{k_2}{m_{G2}} = \dots = \frac{k}{m_{Gj}} \equiv G \quad (5.7)$$

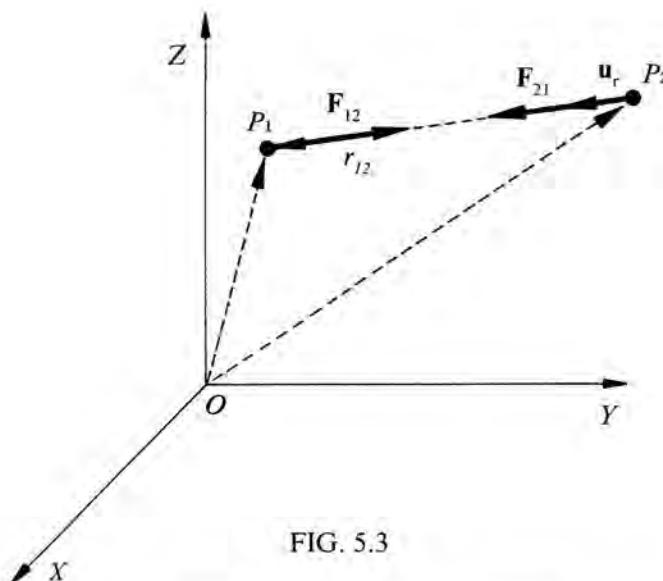


FIG. 5.3

luego el cociente (k_i / m_{Gi}) es el mismo para todas las parejas de partículas que podamos elegir, su valor G es una constante de proporcionalidad que recibe el nombre de **constante de gravitación universal**. Su valor se puede determinar experimentalmente con gran precisión utilizando una balanza especial. El valor más reciente medido ha sido (1969):

$$G = (6,674 \pm 0,012) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad (5.8)$$

Ahora ya estamos en condiciones de resumir los resultados anteriores y enunciar la **ley de Newton de la gravitación universal**: «La interacción gravitatoria entre dos partículas cualesquiera de masas m_{1G} y m_{2G} , separadas una distancia r_{12} , se expresa mediante una fuerza atractiva, dirigida a lo largo de la línea que las

une y cuyo módulo vale: $G \frac{m_{1G} m_{2G}}{r^2}$. G es una constante universal, que tiene el mismo valor para todos los pares de partículas». En forma vectorial se escribe, Fig. 5.3:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_{1G} m_{2G}}{r_{12}^2} \mathbf{u}_r \quad (5.9)$$

Esta ley no es una ecuación de definición de ninguna de las magnitudes que en ella intervienen (ni de fuerza, ni de masa, ni de longitud). Simplemente afirma que la fuerza sobre una partícula está relacionada de forma simple con propiedades medibles de la partícula. La constante G debe determinarse experimentalmente; una vez hallado su valor para un par de partículas, se puede utilizar en la ley de gravitación, para determinar la fuerza de atracción gravitatoria entre cualquier otro par de cuerpos.

La ley (5.9) se refiere a fuerzas entre masas puntuales, su aplicación a cuerpos extensos la trataremos

posteriormente y veremos que el problema es, fundamentalmente, de tipo matemático.

Las fuerzas gravitatorias son extraordinariamente pequeñas para los experimentos que se puedan realizar en los laboratorios, en los que interactúan objetos relativamente pequeños. Como consecuencia, la detección y medida de dichas fuerzas es una tarea muy delicada. Por ejemplo, la fuerza gravitatoria entre dos esferas de plomo, una de 15 g y la otra de 1,5 kg situadas a la distancia de 5 cm, es de unos 6×10^{-10} N (!).

Aunque la interacción gravitatoria es intrínsecamente débil, su importancia a escala astronómica es muy grande, tanto porque los objetos que interactúan presentan elevadas masas, como por la ausencia práctica de otros tipos de fuerzas.

§ 5.2 MASA GRAVITATORIA. PESO

En § 4.3 definimos la masa inerte de una partícula como la medida de una propiedad constante y característica de la misma, que indicaba su resistencia a ser acelerada cuando sobre ella actuaba una fuerza.

En este apartado, consideraremos el segundo aspecto bajo el que se presenta la interacción gravitatoria: el de acelerar partículas libres que se encuentren en las proximidades de su superficie. Hacemos uso del postulado de la igualdad de medidas estática y dinámica de las fuerzas (§ 4.4). Es decir, medimos las fuerzas gravitatorias por la deformación que producen en un muelle, en cuyo extremo se encuentra la partícula en estudio (§ 5.1); los valores obtenidos en estas medidas los utilizamos en las relaciones que manifiestan este segundo aspecto de la interacción gravitatoria (5.11).

$$\text{Haciendo uso de (4.6): } \mathbf{F} = m_i \mathbf{a} \quad (5.10)$$

ya que allí m era estrictamente la masa inerte de la partícula. Sería interesante buscar una relación entre estas dos medidas (m_G y m_i) características de una partícula en su interacción con el medio.

Consideraremos la interacción entre la Tierra y diferentes partículas P_1, P_2, \dots, P_j . Teniendo en cuenta la ley experimental encontrada por Galileo: *Todos los cuerpos caen, en las proximidades de la superficie terrestre con la misma aceleración g* , podemos escribir:

$$\mathbf{F}_1 = m_{i1} \mathbf{g}, \mathbf{F}_2 = m_{i2} \mathbf{g}, \mathbf{F}_3 = m_{i3} \mathbf{g}, \dots \quad (5.11)$$

pero las fuerzas vienen dadas por (5.9):

$$\mathbf{F}_1 = G \frac{M_T m_{1G}}{R_T^2} \mathbf{u}_r, \mathbf{F}_2 = -G \frac{M_T m_{2G}}{R_T^2} \mathbf{u}_r, \dots \quad (5.12)$$

donde M_T y R_T son la masa y radio de la Tierra, respectivamente.

Comparando (5.11) y (5.13) resulta,

$$\frac{m_{G1}}{m_{i1}} = \frac{m_{G2}}{m_{i2}} = \frac{m_{G3}}{m_{i3}} = \dots = \text{cte} \quad (5.13)$$

luego: el cociente entre el número que mide la masa gravitatoria y el que mide su masa inerte es el mismo para todos los cuerpos.

De forma estricta en (5.9) y (5.10) no están definidas las dimensiones de F , ni de G . Es por tanto posible fijar arbitrariamente las de una de dichas magnitudes y a partir de (5.9) y (5.10) deducir las de las restantes. La mayor simplificación se obtiene si se hacen coincidir las dimensiones de m_G con las de m_i . Una vez hecha esta elección, el valor de la constante de proporcionalidad entre m_i y m_G depende de la elección de G . El valor dado en (5.8) y que se determina experimentalmente, es el que hace que dicha constante (5.13) sea igual a la unidad.

De esta forma, mediante una elección adecuada de las dimensiones de m_G , y tomando para G el valor (5.8), podemos utilizar el mismo número para medir la masa gravitacional y la masa inerte de un cuerpo. Por consiguiente, en todo el resto de la obra utilizaremos el término **masa** para referirnos a cualquiera de ellas, ya que son indistinguibles. Realmente ésto ya lo hicimos en el capítulo anterior, al resolver y proponer diferentes problemas. Nos apoyábamos simplemente en la idea intuitiva y familiar que sobre dicha magnitud tenían los alumnos; ahora sin embargo, ya podemos utilizarla con toda propiedad.

Conviene insistir, una vez más, que la masa es una magnitud constante que caracteriza a una partícula en sus interacciones con el medio. Es independiente en la Mecánica Clásica, del estado de movimiento de la partícula ($m \neq f(v)$) y, además se conserva en el transcurso de dicho movimiento.

Resumiendo: hemos comenzado por introducir la unidad de masa (§ 4.3), a continuación la de fuerza y el postulado de que los métodos estáticos de medida de fuerzas, conducen al mismo resultado que el que se obtendría por la determinación de la aceleración (§ 4.4). Por último, hemos indicado que se determina experimentalmente el valor de G , de modo que la constante (5.13) sea igual a la unidad.

Veamos un *método práctico para la medida directa de masas*. Queremos determinar las masas m y m' de dos partículas, utilizando una tercera de masa M como referencia, Fig. 5.4. Según (5.9):

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \quad F' = G \frac{Mm'}{r^2}$$

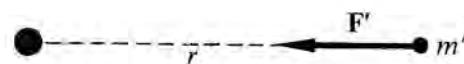


FIG. 5.4

si la distancia de m a M es la misma que de m' a M , el cociente entre las dos fuerzas es igual al cociente entre las masas: $F/F' = m/m'$. Por consiguiente, si disponemos de un método para comparar fuerzas, sin necesidad de medir cada una de ellas, podremos comparar masas. El principio de funcionamiento de la balanza, ¿cuál es?, nos permite utilizar este método, cuando el cuerpo de referencia es la Tierra. La balanza, como sabemos, alcanza el equilibrio cuando las fuerzas en ambos platillos es la misma, de esta forma las masas también son iguales, Fig. 5.5. Si en uno de los platillos tenemos el cuerpo de masa unidad (§ 4.3), podemos medir valores numéricos de masas.

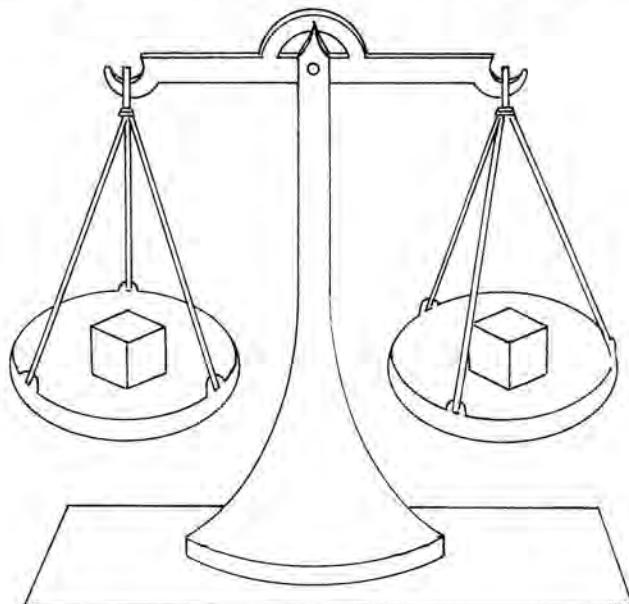


FIG. 5.5

Terminaremos recordando la definición de **peso** de un cuerpo, que sin lugar a dudas recuerda el alumno. El peso es la fuerza con que la Tierra atrae a un cuerpo situado en las proximidades o sobre su superficie. La dirección de este vector es la dirección de la fuerza gravitatoria, es decir hacia el centro de la Tierra. Al ser una fuerza se medirá en el SI en Newton. Teniendo en cuenta (5.11):

$$\mathbf{P} = m \mathbf{g} \quad (5.14)$$

La aceleración de caída libre de los cuerpos (g) varía con la altitud, es decir con la distancia del cuerpo al centro de la Tierra, y con la latitud del lugar como consecuencia de la rotación de la Tierra. ¿Qué significa latitud del lugar?. Las variaciones de g con la altitud, hasta unos pocos miles de metros, son tan pequeñas que puede considerarse prácticamente constante para una latitud dada. Por lo tanto, el peso de un cuerpo no es estrictamente constante, ¿Por qué?

Como consecuencia de la rotación de la Tierra, la dirección del peso no es exactamente hacia su centro, pero ésto es una precisión de orden superior que queda fuera del nivel de este texto.

El concepto de peso es el fundamento del método estático para la medida de fuerzas, junto con el corolario que se deduce de la primera ley de Newton: si un cuerpo se encuentra en reposo, la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre él es nula. El instrumento que se puede utilizar para medir fuerzas mediante este método es el *dinamómetro* como ya indicamos en el capítulo anterior.

§ 5.3 FUERZAS ELECTROMAGNETICAS

Las fuerzas electromagnéticas son las debidas a la interacción entre partículas cargadas eléctricamente. Por motivos metodológicos consideramos primero las que actúan entre partículas cargadas *en reposo*; posteriormente haremos una breve introducción a las que aparecen entre partículas cargadas *en movimiento*. Estos conceptos los desarrollaremos con mayor detalle en los capítulos XII y XIV.

La ley que rige la interacción entre cargas eléctricas en reposo fue enunciada por Ch. de Coulomb (1736–1806), que la determinó experimentalmente al medir las atracciones y repulsiones entre pequeños cuerpos cargados eléctricamente. Su enunciado es el siguiente: «**La interacción electroestática entre dos partículas cargadas q_1 y q_2 , separadas por una distancia r_{12} , es atractiva o repulsiva –dependiendo de que las cargas sean de distinto o del mismo signo–, dirigida a lo largo de la línea que las une y cuyo módulo vale**

$$K_e \frac{q_1 q_2}{r^2}, K_e \text{ es una constante cuyo valor depende del}$$

sistema de unidades elegido. En forma vectorial se expresa, Fig. 5.6 a y b:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{u}_r = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \quad (5.15)$$

En la expresión anterior *hay que introducir*, en cada caso práctico, *el correspondiente signo de las cargas*.

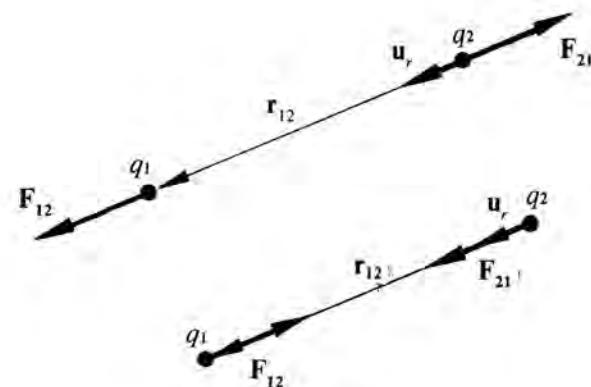


FIG. 5.6

Veamos algunas características de esta ley. Se puede establecer experimentalmente mediante una balanza de torsión semejante, hasta cierto punto, a la de Cavendish utilizada para medir G . Ahora bien, la forma estricta de la ley, no puede estar basada en los experimentos de Coulomb. Las medidas utilizando balanzas de torsión son difíciles de realizar con un error inferior al 1%. Dichas medidas no pueden asegurar, por ejemplo, que el exponente de r en el denominador no sea 2,01 en vez de 2. Las medidas más recientes dan para dicho exponente un valor comprendido entre los límites $2 \pm 3 \times 10^{-6}$, ¿Por qué este problema no se plantea en la ley de gravitación universal?

La constante K_e es similar a G en (5.9) sin embargo hay una diferencia fundamental. En la ley de gravedad las unidades de masa, longitud y fuerza estaban definidas de antemano, y el valor de G se determinaba experimentalmente. En el caso de la ley de Coulomb, las unidades de fuerza y de longitud están definidas, pero no la de carga (en el SI el culombio es una unidad derivada). El camino que se sigue es asignarle a K_e un cierto valor y fijar de este modo la unidad de carga.

En el SI, $K_e \approx 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$ por razones prácticas y tradicionales K_e se suele expresar de la forma:

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (5.16)$$

donde ϵ_0 se denomina **permisividad o constante dielectrica del vacío**, su valor es:

$$\epsilon_0 \approx 8,85 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$$

El factor $1/4\pi$ se introduce con objeto de simplificar las expresiones que van surgiendo en el electromagnetismo, como tendremos ocasión de comprobar. Los sistemas de unidades que introducen este factor se denominan *racionalizados*, en § 12.2 comprobaremos la ventaja de su uso.

Resaltamos que *las fuerzas gravitatorias siempre son atractivas*, mientras que *las electrostáticas pueden ser atractivas* (si las cargas son de signo diferente) o *repulsivas* (si son del mismo signo).

Es interesante comparar la intensidad de las fuerzas gravitatorias frente a las electrostáticas. Consideremos el caso de dos protones ($m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg, $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C) y calculemos el cociente de (5.15) y (5.9):

$$\frac{F_e}{F_G} = \frac{K_e q_1 q_2}{G m_1 m_2} \approx 10^{36} \quad (5.17)$$

para dos electrones este cociente, ¿es mayor o menor que para los protones?. En el ejemplo anterior podemos apreciar lo inmensas que son las fuerzas electrostáticas, frente a las gravitatorias. ¿Recuerdas la aproximación que establecimos en el ejercicio 3.2?

Aunque la interacción gravitatoria se encuentra siempre presente, las fuerzas electrostáticas son las responsables de todos los fenómenos químicos y biológicos y de las interacciones entre objetos materiales de tamaño relativamente pequeño (es decir, fuera del dominio astronómico). Son las fuerzas que mantienen unidos a los átomos, las que proporcionan las propiedades mecánicas a los objetos materiales, y las únicas que intervienen en las reacciones químicas.

Entre las partículas eléctricas en movimiento también existen interacciones de tipo eléctrico. Pero además surge una interacción adicional, que recibe el nombre de fuerza magnética. Esta presenta el interés, desde el punto de vista de la Mecánica, de depender de la velocidad de las partículas que interaccionan. En el capítulo XIV las estudiaremos con mayor detalle; ahora simplemente indicaremos que la fuerza, llamada de Lorentz, tiene por expresión:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{eléctrica}} + \mathbf{F}_{\text{magnética}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.18)$$

En el Electromagnetismo, la interacción entre partículas se describe mediante la introducción del concepto de campo (§ 7.1). En (5.18) \mathbf{E} representa la intensidad del campo electrostático (§ 12.2) y \mathbf{B} el vector inducción magnética (§ 14.1).

* § 5.4 FUERZAS NUCLEARES

Las fuerzas electromagnéticas que acabamos de considerar no son capaces de explicar la estabilidad del núcleo, ¿por qué?

En el núcleo existen unas fuerzas de naturaleza diferente a las anteriores, conocidas como **interacciones fuertes**. Estas son las que mantienen «unidos» a los

nucleones (partículas que forman el núcleo: protones y neutrones). Se trata de unas interacciones extremadamente complejas, que hasta época reciente eran poco conocidas. Resumamos algunas de sus características más importantes:

- Son *fuerzas independientes de la carga eléctrica*, es decir la fuerza nuclear entre protones y neutrones es la misma que entre protones o que entre neutrones.
- Son *fuerzas de muy corto alcance*. Para distancias superiores a 10^{-13} cm (!) son prácticamente despreciables; para distancias inferiores predominan sobre todas las demás interacciones entre nucleones.
- Dependencia compleja con la distancia*: son atractivas hasta distancias del orden de 4×10^{-14} cm para distancias inferiores se convierten en repulsivas. (Fig. 20.1).
- Son fuerzas que no están dirigidas a lo largo de la línea que une a las «partículas», es decir se trata de *fuerzas no centrales*.
- Sólo actúan entre una cierta familia de partículas elementales denominada *hadrones*. Esta familia además de los nucleones incluye a otras partículas elementales, tales como los mesones y bariores.

Otro tipo de fuerza asociada con las interacciones nucleares son las denominadas **interacciones débiles**. Su naturaleza no es todavía bien conocida. El rango de estas fuerzas aún es menor que el de las interacciones fuertes; su intensidad es aproximadamente 10^{-15} veces menor que la de aquéllas. Este tipo de interacción sólo es importante en ciertos fenómenos nucleares, por ejemplo, la desintegración β (§ 20.2).

Realmente, como ya indicamos en la introducción, no tiene sentido estudiar estas fuerzas dentro del contexto de la Mecánica Clásica. Aún más, no sabemos hasta qué punto tiene sentido emplear la palabra «fuerza» para designar las interacciones nucleares. Al contrario de las dos anteriores, no se pueden observar directamente; se puede obtener información acerca de ellas, bombardeando nucleones o núcleos con neutrones, protones y otras partículas (experimentos de difusión) y observando y analizando los resultados. El estudio de estas interacciones requiere el uso de la Mecánica Cuántica (§ 19.1).

Para finalizar, resumimos en la tabla 5.1 las propiedades más importantes asociadas a cada una de las interacciones fundamentales:

TABLA 5.1

Nombre	Intensidad relativa	Rango	Signo
Nuclear Fuerte	1	$\sim 10^{-15}$ m	Atractivas (con núcleo repulsivo)
Electromagnética	10^{-2}	Largo ($\sim 1/r^2$)	Atractivas o repulsivas
Nuclear Débil	10^{-12}	$< 10^{-17}$ m ?	No aplicable
Gravitatoria	10^{-40}	Largo ($\sim 1/r^2$)	Atractiva siempre

* § 5.5 FUERZAS DE CONTACTO

La mayor parte de sistemas físicos con los que vamos a tratar son objetos que forman parte de nuestra vida cotidiana. Sobre ellos actúan fuerzas tales como las de rozamiento, esfuerzos debidos a contracciones y alargamientos de estructuras, tensiones ejercidas a través de cuerdas, alambres y cables, etc. Cada una de estas fuerzas implica un *contacto* físico con el cuerpo objeto de estudio.

Para fijar ideas consideremos, por ejemplo, un bloque que se apoya sobre una mesa horizontal. La presencia de la mesa impide que el bloque caiga verticalmente, como consecuencia de su peso. Por lo tanto, debe existir una fuerza sobre el bloque ejercida por la mesa N, que equilibre el peso (P). Este es el razonamiento que hacemos a nivel macroscópico; la fuerza N es de contacto. Ahora bien, para investigar la naturaleza de esta fuerza debemos razonar a nivel microscópico. El bloque se mantiene en la superficie horizontal, por la suma total de las innumerables interacciones electromagnéticas, que actúan entre los átomos de las capas superficiales adyacentes del bloque y de la mesa. Un análisis microscópico de estas interacciones es imposible de realizar, por su complejidad. En la mayoría de aplicaciones, ignoramos dicha complejidad y concentraremos las interacciones en una única fuerza N que denominamos de contacto.

La mayor parte de las fuerzas de la naturaleza mecánica que nos resultan familiares, son fuerzas de contacto en el sentido que acabamos de indicar. Se trata de una categoría bastante artificial, pero de gran utilidad.

Entre los átomos existen interacciones eléctricas, a pesar de su neutralidad. Son debidas a la distribución espacial de sus cargas positivas y negativas, así como a la distorsión que sufren estas distribuciones, como consecuencia de la presencia de otro átomo. Somos conscientes de la dificultad de estos conceptos, cuya interpretación se encuentra fuera del nivel de este texto.

Por lo tanto, estas fuerzas de contacto aparecen cuando un cuerpo se encuentra en contacto con otro, provocando (a nivel microscópico) una distorsión en las distribuciones de las cargas eléctricas positivas y negativas de los átomos.

Estas fuerzas varían con la distancia entre los cuerpos mucho más rápidamente que $1/r^2$, que es la dependencia característica de los cuerpos que presentan una carga neta. Las fuerzas de contacto son, por lo tanto, de muy corto alcance; llegan a ser despreciables cuando los cuerpos se encuentran a distancias aproximadamente iguales a un diámetro atómico.

A continuación presentaremos dos fuerzas que pertenecen a esta categoría, que son de gran utilidad en el estudio de la Física. Su estudio lo plantearemos a nivel macroscópico y fenomenológicamente.

§ 5.6 FUERZAS ELÁSTICAS

Desde cursos elementales sabemos que al actuar una fuerza sobre un cuerpo le produce una deformación o una aceleración. Las deformaciones se clasifican, a grosso modo, en elásticas y plásticas. En las primeras, la deformación desaparece cuando cesa la fuerza que la produjo; en las segundas, el cuerpo ya no recobra la forma primitiva, aunque se suprima la fuerza que la originó,

En los cuerpos elásticos, la deformación es proporcional a la fuerza, generalmente de contacto, que la produce. Para un cuerpo dado, a mayor fuerza mayor deformación.

Eligiremos como prototipo de los cuerpos elásticos a un alambre rígido arrollado en hélice, que llamaremos *resorte* o *muelle*. Si un resorte se comprime o se estira y se deja posteriormente libre, vuelve a su posición original *siempre que la deformación no haya sido demasiado grande*. Existe un límite para las deformaciones, y por lo tanto para las fuerzas que las producen, más allá de las cuales el resorte no recobra su longitud original, sino que permanece deformado

permanentemente. Esta deformación máxima determina el *límite de elasticidad* del resorte.

En los capítulos anteriores, ya hicimos uso implícitamente de esta propiedad elástica de los resortes, al tratar de la medida estática de fuerzas y de los dinamómetros.

La ley que relaciona las deformaciones con la fuerza elástica asociada a ellas fue enunciada por R. Hooke en el s. XVII. Su enunciado es de todos conocido: *Si se deforma un resorte, comprimiéndolo o estirándolo, la fuerza recuperadora es proporcional a la deformación. Su sentido es tal que tiende, en todo momento, a que el resorte recobre su longitud original.* Esta ley la cumplen los resortes reales para un limitado rango de deformaciones, Fig. 5.7.

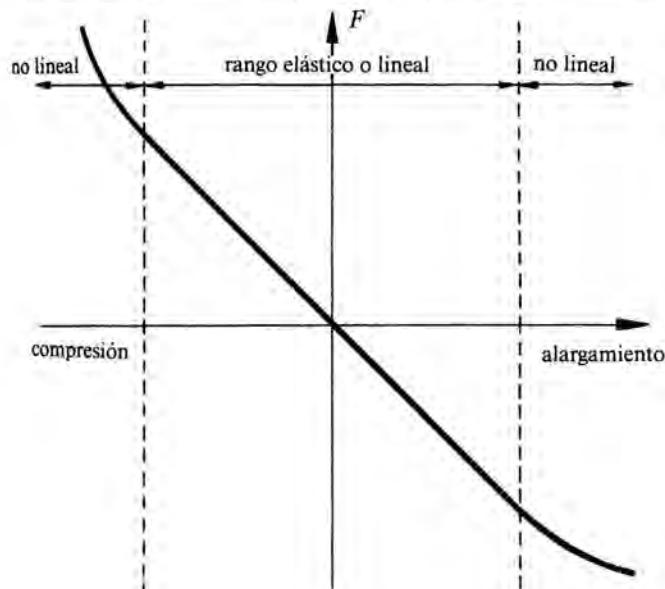


FIG. 5.7

Expresemos matemáticamente esta ley e interpretemos su significado, pues aquí es donde suelen tener los alumnos grandes confusiones. Sea el resorte representado en la Fig. 5.8. Si con la mano, por ejemplo, lo estiramos hasta que tenga una longitud r , y el resorte queda en reposo o por lo menos no está acelerado, se verificará:

$$\mathbf{F}_{\text{deformadora}} = -\mathbf{F}_{\text{recuperadora}} \quad (5.19)$$

de acuerdo con la tercera ley de Newton. La fuerza deformadora es la que ejerce la mano sobre el resorte; la recuperadora la del resorte sobre la mano. Según la ley de Hooke la fuerza recuperadora o elástica es proporcional a la deformación y tiende a que el resorte recobre su longitud original, por lo tanto:

$$\mathbf{F}_{\text{recuperadora}} = -k(r - r_0)\mathbf{u}_r \quad (5.20)$$

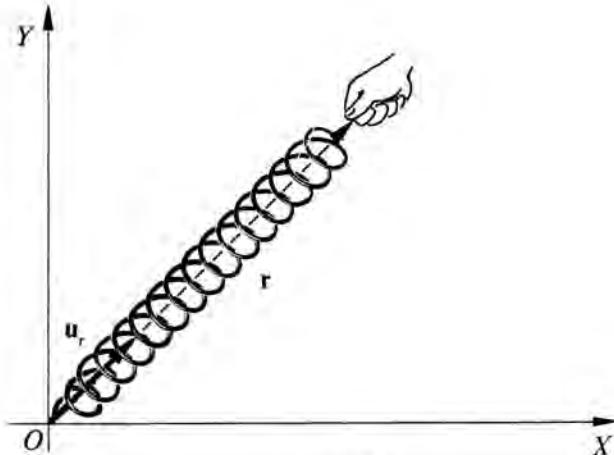


FIG. 5.8

donde k es la llamada *constante del resorte*, ¿cuáles son sus dimensiones y unidades en el SI?. r_0 representa la longitud original del resorte, o sea la que posee cuando no está deformado; \mathbf{u}_r es un vector unitario que define la dirección en que se encuentra el resorte.

Se puede comprobar que al comprimir el resorte ($r < r_0$), la fuerza recuperadora cambia de sentido y la deformadora también (5.19), como cabe esperar. También es interesante darse cuenta que la deformación es $r - r_0$, no r .

Si el resorte se encuentra a lo largo del eje OX , que es una situación muy corriente en problemas, (5.20) se convierte en:

$$\mathbf{F}_{\text{recuperadora}} = -k(x - x_0)\mathbf{i} \quad (5.21)$$

¡Cuidado que en esta expresión x no es la deformación, sino la longitud total del resorte como consecuencia de la fuerza deformadora aplicada!. La deformación es: $\Delta x = x - x_0$.

Si una vez deformado el resorte se deja libre, $\mathbf{F}_{\text{deformadora}}$ desaparece pero $\mathbf{F}_{\text{recuperadora}}$ sigue actuando. Su valor no es constante, sino que varía en el transcurso del tiempo, ¿por qué?

EJERCICIO 5.1

La constante de un resorte es $k = 2 \text{ N cm}^{-1}$; de su extremo se suspende un cuerpo cuya masa es 5 kg. Cuando el cuerpo se encuentre en reposo, calcular: a) Valor de todas las fuerzas que actúan sobre él, b) deformación del resorte.

SOLUCION :

Suponemos que no colgamos bruscamente el cuerpo del extremo del resorte, ya que en tal caso adquiriría un movimiento armónico simple. Si se desprecia el efecto de la resistencia del aire, el movimiento no se amortiguaría jamás y seguiría con él indefinidamente.

Para evitar estas complicaciones, suponemos que el conjunto cuerpo-resorte llega a su estado final de reposo, pasando por un gran número de posiciones intermedias en las que también se encuentra en reposo. Esto se puede conseguir, por ejemplo, colgando el cuerpo y manteniéndolo al mismo tiempo en la palma de la mano. Luego se baja lentamente la mano hasta que se alcanza la posición final de reposo.

a) En esta situación, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son su peso (\mathbf{P}) y la fuerza elástica del resorte ($\mathbf{F}_{\text{recuperadora}}$), Fig. 5.9. El peso es la fuerza deformadora que ha dado lugar al alargamiento del resorte.

A partir de (4.6):

$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_{\text{recuperadora}} = m \mathbf{a} \quad (5.22)$$

como el cuerpo se encuentra en reposo:

$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_{\text{recuperadora}} = 0, \quad mg - k\Delta x = 0 \quad (5.23)$$

¿Cómo pasamos de la expresión vectorial a la escalar? Por lo tanto, el valor de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo será: $\mathbf{P} = 49 \text{ j N}$ y, según (5.23), $\mathbf{F}_{\text{recuperadora}} = -49 \text{ j N}$.

b) A partir de (5.23), $\Delta x = l - l_0$ vale: $\Delta x = 24,5 \text{ cm}$

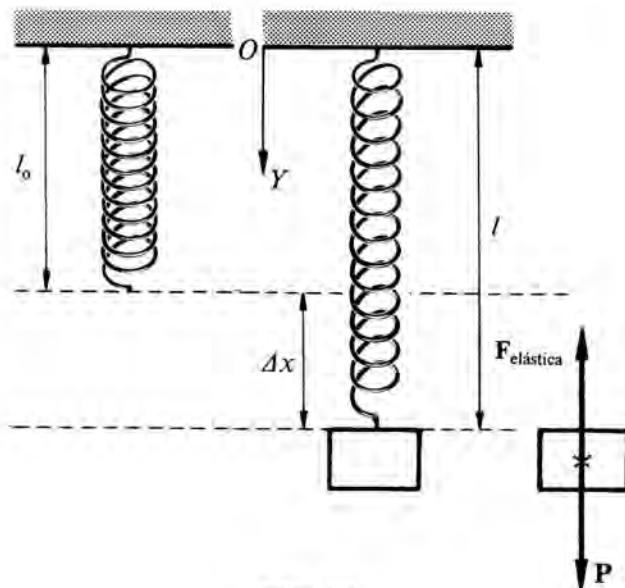


FIG. 5.9

§ 5.7 FUERZAS DE ROZAMIENTO

Como ejemplo típico de fuerzas de contacto, hemos citado la que aparece entre un bloque y la mesa sobre la que se apoya (§ 5.5). Esta fuerza es perpendicular a la superficie común a la mesa y al bloque, y por ello se le suele llamar fuerza normal o simplemente **normal**. Su origen reside en la deformación elástica de los cuerpos que están en contacto, puesto que dichos cuerpos nunca son, en realidad, completamente rígidos.

Sin embargo, otras fuerzas también de contacto que aparecen entre el bloque y la mesa son mucho más importantes y presentan un mayor interés que las anteriores. Estas fuerzas son las denominadas **fuerzas de rozamiento**.

En este apartado abordaremos las fuerzas de rozamiento que aparecen cuando un cuerpo **desliza** sobre otro, es decir cuando la velocidad del punto (o de los puntos) de contacto entre los dos cuerpos es distinta de cero. Esto significa que no nos preocuparemos de las fuerzas de rozamiento a la rodadura, que las consideramos fuera del nivel a que va dirigido este texto.

Veamos las características generales, a nivel macroscópico, de las fuerzas de rozamiento:

- Siempre que exista un deslizamiento relativo entre dos cuerpos en contacto, aparece sobre cada uno de ellos una fuerza de este tipo.
- Son paralelas a la superficie de contacto entre ambos cuerpos. Por lo tanto, son perpendiculares a \mathbf{N} .
- Tienen sentido contrario al de la velocidad relativa de un cuerpo respecto del otro. Se trata de fuerzas que siempre se oponen al movimiento. Su valor es independiente de dicha velocidad relativa.
- Son independientes, aproximadamente, del área de contacto entre los cuerpos. Esta independencia se manifiesta dentro de amplios límites.
- Aunque no haya deslizamiento relativo entre los cuerpos en contacto, puede existir fuerza de rozamiento entre ellos.
- Son proporcionales a \mathbf{N} .

Las fuerzas de rozamiento nos son familiares a todos y desempeñan un papel muy importante en nuestra vida cotidiana. ¿Puedes citar algunos ejemplos en que se pongan de manifiesto? Como sabemos el rozamiento entre partes móviles de máquinas conviene reducirlo al máximo, ya que significa una disminución en su rendimiento y un deterioro, ésta es la razón del uso de los lubricantes. Su efecto no siempre es pernicioso: las fuerzas de rozamiento nos permiten caminar como lo hacemos, nos permiten sostener un lápiz entre las manos y escribir, posibilitan el transporte con ruedas, etc.

En este desarrollo nos interesa sobre todo aprender a hacer uso de las fuerzas de rozamiento en situaciones prácticas. Por consiguiente, evitamos toda referencia a su naturaleza microscópica.

El rozamiento es un concepto estadístico, que macroscópicamente se caracteriza mediante una fuerza \mathbf{F}_r , que representa la suma de las innumerables interacciones –de tipo electromagnético– entre las moléculas de los dos cuerpos en contacto. Es imposible tener en cuenta, como ya dijimos, las interacciones moleculares individuales, de modo que a nivel macros-

cópico se caracterizan por su valor estadístico medio, que llamamos F_r .

Estudiemos el comportamiento de estas fuerzas con un cierto detalle. Supongamos un bloque sobre una superficie horizontal, al que le aplicamos una pequeña fuerza f_1 bajo la acción de la cual no se pone en movimiento. La segunda ley de Newton (5.6) nos dice que debe actuar sobre el bloque una fuerza igual de sentido contrario que llamaremos *fuerza de rozamiento estática* f_{r1} . Si aplicamos una fuerza un poco mayor, f_2 , y el cuerpo tampoco se pone en movimiento, podemos argumentar de la misma manera: aparece una fuerza de rozamiento estática, f_{r2} , mayor que la anterior, ya que: $f_2 > f_1 \rightarrow f_{r2} > f_{r1}$. Y así sucesivamente, hasta que apliquemos una fuerza F_n , tal que si se aumenta ésta muy poco, el cuerpo se pone en movimiento, Fig. 5.10. Por definición a la fuerza de rozamiento opuesta a F_n se le llama **Fuerza de rozamiento estática máxima**, F_{rest} y su valor, encontrado empíricamente, es igual a:

$$F_{rest} = \mu_{est} N \quad (5.24)$$

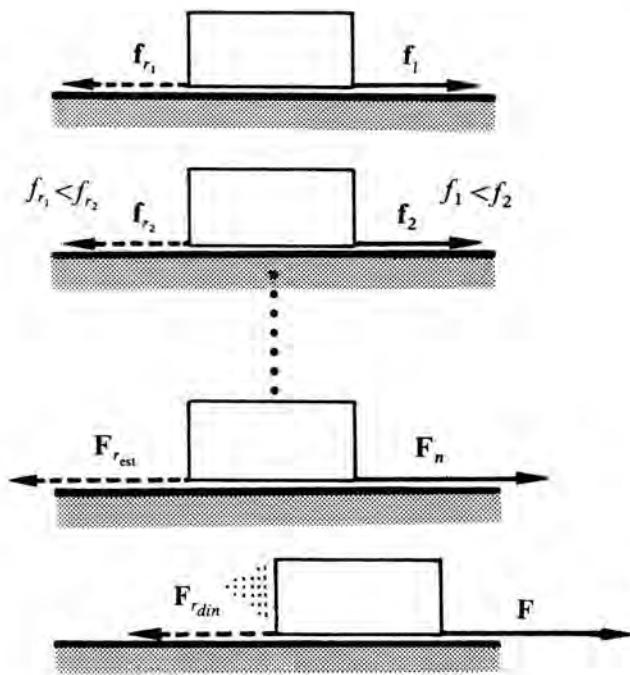


FIG. 5.10

donde μ_{est} se denomina *coeficiente estático de rozamiento* y es una propiedad característica de las superficies en contacto (de su naturaleza, del acabado de dichas superficies, temperatura, grado de contaminación, etc.). Esta fuerza representa la mínima que hay que aplicarle a un cuerpo para ponerlo en movimien-

to relativo respecto de otro, cuando se encuentran en contacto e inicialmente en reposo.

Por lo tanto la fuerza de rozamiento estático al deslizamiento no tiene un valor único, sino que se ajusta al de las fuerzas aplicadas, mientras no exista un movimiento relativo entre los cuerpos en contacto. Sólo su valor máximo se puede expresar de la forma (5.24); N representa la fuerza normal a la superficie de contacto, que se calcula a partir de (4.6).

Una vez el cuerpo ya se encuentra en movimiento, la fuerza de rozamiento disminuye y toma un valor constante, independiente de la fuerza aplicada, igual a:

$$F_{din} = \mu_{din} N \quad (5.25)$$

$$\mu_{est} > \mu_{din} \quad (5.26)$$

ésta recibe el nombre de **fuerza de rozamiento dinámica**. En la Fig. 5.11 se representan gráficamente las consideraciones que hemos expuesto. En la tabla 5.2 se representan valores típicos de ambos coeficientes de rozamiento.

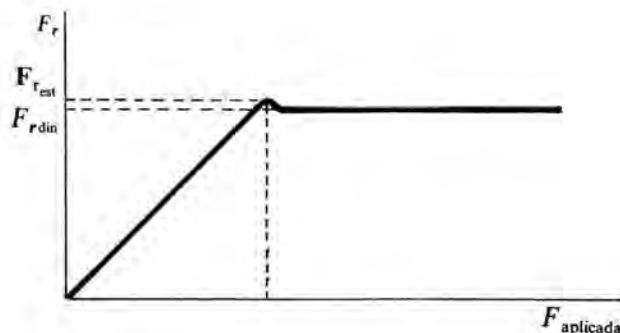


FIG. 5.11

TABLA 5.2

Materiales	μ_{est}	μ_{din}
Acero sobre acero	0,78	0,42
Níquel sobre níquel	1,10	0,53
Teflón sobre teflón	0,04	0,04
Hierro sobre hierro	1,10	0,15
Madera sobre madera	0,40	0,30
Neumático sobre asfalto seco	-	0,70
Neumático sobre asfalto húmedo	-	0,50

* Ejercicio 5.2

Un cuerpo de 300 kg se encuentra sobre un plano inclinado 37° respecto de la horizontal. Se le aplica, en la dirección del plano, una fuerza de 980 N. Los coeficientes de rozamiento estático y dinámico entre el cuerpo y el plano son: 0,25 y 0,20, respectivamente. a) Justificar razonadamente que el cuerpo no puede estar en equilibrio. b) Calcular la fuerza de rozamiento que actúa sobre él. c) Aceleración con la que desciende.

Solución:

Dibujemos en primer lugar las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Estas serán \mathbf{F} , \mathbf{N} , \mathbf{P} y \mathbf{F}_r , Fig. 5.12.

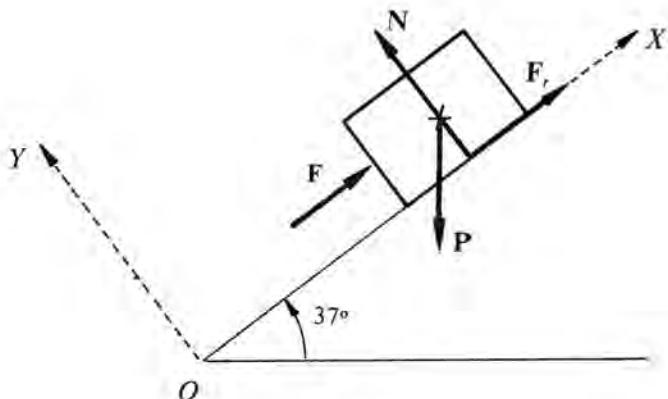


FIG. 5.12

a) El cuerpo estará en equilibrio, es decir no se moverá (por cierto, cuando un cuerpo está en equilibrio, ¿siempre podemos afirmar que no se mueve?) cuando se cumpla:

$$\mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_r + \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (5.27)$$

¿Por qué? La fuerza de rozamiento la hemos dibujado, Fig. 5.12, en un sentido arbitrario. Al suponer el cuerpo en equilibrio no conocemos su dirección a priori. Proyectando (5.27) según los ejes de la Fig. 5.12:

$$\left. \begin{aligned} F - Mg \sin 37^\circ + F_r &= 0 \\ N - Mg \cos 37^\circ &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} F_r &= 789,34 \text{ N} \\ N &= 2348 \text{ N} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Luego, la fuerza de rozamiento necesaria para mantener el equilibrio es: $F_r = 789,34 \text{ N}$. Si hubiésemos elegido para ella el otro sentido, al calcularla nos saldría su proyección sobre OX negativa; por eso si se supone que el cuerpo está en equilibrio y no se mueve, se le puede asignar a priori un sentido arbitrario.

El módulo de la fuerza de rozamiento estática máxima (5.24) es:

$$F_{rest} = 0,25 \times 2348 = 587 \text{ N} \quad (5.29)$$

Como el valor de la fuerza de rozamiento estática necesaria para mantener el equilibrio (789,34 N) es mayor que el valor máximo que puede presentar ésta (587 N), no puede darse la situación de equilibrio. *El cuerpo deslizará, descendiendo por el plano.* También se prodaría haber resuelto con el siguiente razonamiento: el cuerpo estará en equilibrio si se cumple, $F_{rest} \geq P_x - F$. Como no se verifica, se encuentra en movimiento.

b) Al estar en movimiento actúa la fuerza de rozamiento dinámica (5.35):

$$F_{dyn} = 469,60 \text{ N}, \quad F_{dyn} = 469,60 \text{ i}$$

c) Aplicando al cuerpo la segunda ley de Newton y proyectando la ecuación vectorial según los ejes de la Fig. 5.12:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{dyn} + \mathbf{P} &= ma \\ N - Mg \cos 37^\circ &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Mgs \operatorname{sen} 37^\circ - F - F_{dyn} &= ma \\ N - Mg \cos 37^\circ &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto: $a = 1,07 \text{ m s}^{-2}$.

CUESTIONES

1. ¿Qué representan k_1 y k_2 en (5.6)? Relacionar cualitativamente esta expresión con (5.5) para justificar su utilización.
 2. ¿Es lo mismo escribir: $G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, que $G = (6,674 \pm 0,012) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$? Razonar la respuesta.
 3. Justificar las dimensiones y unidades de G en el SI.
 4. ¿Qué significa el signo menos en (5.9)? Justificar que también se puede escribir dicha expresión como:
- $$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \quad ?$$
5. Justificar que la masa es una medida de una propiedad característica y constante de un cuerpo, mientras que el peso no lo es.
 6. El peso (\mathbf{P}) y la normal (\mathbf{N}), son fuerzas de acción y reacción? Razonar la respuesta.
 7. Describir un procedimiento para calibrar un resorte y utilizarlo como dinamómetro, en la medida estática de fuerzas.
 8. ¿Qué representa físicamente la constante de un resorte? ¿De qué depende? Justificar qué debe ser un número positivo.
 9. En muchos libros la fuerza recuperadora se define mediante la relación: $F = -kx$, donde x es la deformación. Significado de F en esta expresión.
 10. Razonar cualitativamente el significado de la gráfica representada en la Fig. 5.7.
 11. ¿Existe alguna relación específica entre la dirección y sentido de F_{dyn} y la de v para un cuerpo? ¿Su sentido, el de \mathbf{F}_r , está relacionado con el de \mathbf{a} ?
 12. Un bloque de masa M se apoya sobre una superficie rugosa que forma un ángulo θ con la horizontal. Comparar la fuerza mínima necesaria para que el bloque comience a moverse hacia abajo, con la necesaria para hacer que empiece a moverse hacia arriba. ¿Cómo son dichas fuerzas comparadas con la mínima fuerza horizontal que puede hacer que el bloque se mueva hacia abajo del plano?

PROBLEMAS

1. Calcular la interacción gravitatoria entre el protón y el electrón en un átomo de hidrógeno, suponiendo que el electrón describe una órbita circular de radio $0,53 \times 10^{-10} \text{ m}$. Calcular

- la interacción eléctrica entre ambas partículas. Se supone que se analiza el comportamiento del sistema en la aproximación clásica.
2. Dos partículas cargadas eléctricamente, de 10 g de masa cada una, se suspenden de un punto común mediante dos hilos de longitud $l = 50$ cm. Cuando su carga es q , alcanzan el equilibrio para un ángulo de los hilos con la vertical igual a 10° . Determinar el valor de q .
 - * 3. Un bloque de 2 kg de masa se apoya sobre un plano inclinado liso, $\theta = 30^\circ$, y se encuentra unido a través de un resorte con una superficie vertical, Fig. 5.13. En la posición de equilibrio el alargamiento del resorte es de 3 cm, ¿cuál es la constante del muelle? Si el bloque sufre un alargamiento adicional de 3 cm hacia abajo en el plano inclinado, y se deja posteriormente en libertad, ¿cuál será su aceleración?

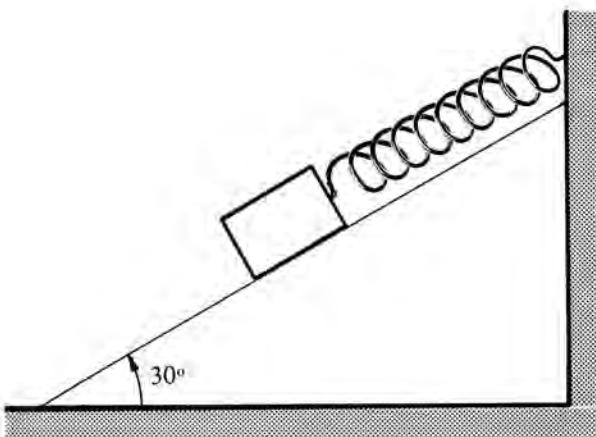


FIG. 5.13

4. Un cuerpo de 50 kg de masa se apoya sobre una superficie inclinada un ángulo $\alpha = 20^\circ$ respecto de la horizontal. El coeficiente estático de rozamiento entre el cuerpo y la superficie es de 0,25. Calcular la fuerza F necesaria, Fig. 5.14, para: a) Iniciar el movimiento ascendente del cuerpo por la superficie y b) para evitar que el bloque descienda.

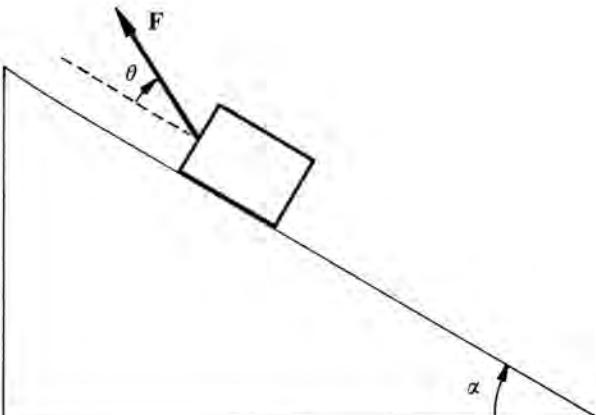


FIG. 5.14

5. Una fuerza horizontal F de 53,4 N empuja un bloque de 22,2 N de peso contra una pared horizontal, Fig. 5.15. Los coeficientes de rozamiento entre el bloque y la pared son: $\mu_{est} = 0,60$, $\mu_{din} = 0,40$. Si el bloque se encuentra inicialmente en reposo: a) ¿comenzará a moverse?, b) fuerza que ejerce la pared sobre el bloque.

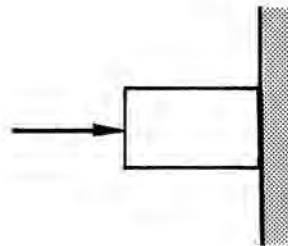


FIG. 5.15

- * 6. Un bloque se corta en dos partes según se indica en la Fig. 5.16 a; se le aplica a la parte superior una fuerza horizontal F . El coeficiente estático de rozamiento entre las dos porciones del bloque es $\mu_{est} = 1/2$, y entre la inferior y el suelo $\mu_{est} = 1/4$. a) Dibujar y razonar las fuerzas que intervienen sobre cada parte del sistema. b) ¿Sobre qué superficie se iniciará primero el movimiento?, es decir, entre los dos bloques o entre el inferior y el suelo. c) Determinar, para la respuesta obtenida en el apartado anterior, el valor mínimo de F para que se inicie el movimiento. d) También para el caso anterior, calcular la aceleración del bloque que se mueve primero; en el momento que empieza a deslizar, μ_{din} para las dos superficies vale $1/6$. Repetir el problema si se intercambian los bloques, Fig. 5.16 b y F sigue actuando sobre el superior.

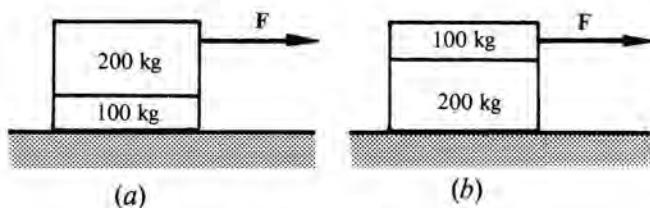


FIG. 5.16

CAPITULO VI

DINAMICA DEL PUNTO TEOREMAS DE CONSERVACION (I)

Una vez establecidas las leyes de la Mecánica, vamos a estudiar la forma de aplicarlas para conocer la evolución temporal de una partícula. Comenzaremos por plantear el problema fundamental de la Dinámica (§ 6.1): determinar las ecuaciones finitas del movimiento de un punto material de masa dada, cuando se conocen las leyes de las fuerzas que actúan sobre él.

El problema se soluciona de *forma directa* resolviendo la ecuación vectorial que representa la segunda ley de Newton (4.6). Ahora bien, la solución de dicha ecuación en el caso general es de gran complejidad, como tendremos ocasión de comprobar. Por ello, la Física introduce ciertas magnitudes que permiten abordar y simplificar dicho problema, sin necesidad de recurrir a la solución de aquella ecuación.

Estas magnitudes son: el momento lineal, el angular, el trabajo y la energía. Se trata de magnitudes que bajo ciertas condiciones *se conservan*; es decir, que en el transcurso del tiempo permanecen constantes, aunque la partícula evolucione.

Podríamos preguntarnos que tienen de común todos estos observables, y otros que no hemos citado, para que se conserven. Efectivamente existe «algo» común a todos ellos, que no se restringe al caso específico del movimiento que aquí nos preocupa. Ya lo apuntamos timidamente en § 1.1.

Siempre que las leyes físicas que rigen un determinado fenómeno representan ciertas simetrías (§ 1.1), existe un observable físico que se mantiene constante en el transcurso del mismo. Ahora bien, esta correspondencia sólo aparece de forma natural dentro del marco de la Mecánica Cuántica (§ 3.1), en donde *para cada una de las reglas de simetría hay una ley de conservación correspondiente*. Esta característica parece ser un atributo esencial de la naturaleza. Y no podemos, a este nivel, decir nada más; sólo hemos intentado abrirle perspectivas al alumno, para sus encuentros posteriores con la Física.

En este capítulo introduciremos el momento lineal (§ 6.2) y el angular (§ 6.3), así como sus correspondientes teoremas de conservación. El concepto de trabajo (§ 6.4) y el de energía cinética (§ 6.5) también se definen, quedando para el siguiente el teorema de la conservación de la energía.

La mayor parte de estos conceptos ya son conocidos por los alumnos. Ahora los introduciremos con un mayor grado de formalismo, definiéndolos de forma diferencial. Esto nos permitirá presentarlos en el caso más general, quedando englobados los aspectos más conocidos por los alumnos como casos particulares de éste.

*§ 6.1 PROBLEMA FUNDAMENTAL DE LA DINAMICA

En la introducción ya hemos indicado cuál es el problema fundamental de la Dinámica. Vamos ahora a plantearlo con mayor detalle y a indicar cómo puede resolverse.

Se trata de *calcular la trayectoria de un punto material de masa m, conocidas las fuerzas que actúan sobre él*. Para abordarlo se hace uso de la segunda ley de Newton (4.6):

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (6.1)$$

Esta ecuación, como sabemos, se plantea respecto de un cierto SRI; proyectándola sobre sus ejes se obtiene:

$$X = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad Y = m \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad Z = m \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (6.2)$$

donde X, Y y Z son las componentes de F. En el caso más general estas componentes serán función de la posición del punto (x, y, z), de su velocidad ($dx/dt, dy/dt, dz/dt$) y del instante de tiempo que se considere (t). Las expresiones (6.2) forman un sistema de ecuaciones diferenciales, que generalmente será muy difícil de integrar.

Una *ecuación diferencial* es una ecuación en que la variable que se desea conocer se encuentra en forma de derivada de cualquier orden, pudiendo aparecer también en la ecuación sin estar afectada por la derivación. Se trata de una clase de ecuaciones que los alumnos no conocen y cuyos métodos de resolución forman una parte del Análisis Matemático. A nosotros, no nos debe preocupar el no saber resolverlas, aún las más sencillas; ya que su utilización corresponde a un nivel superior al que va dirigido este texto. No obstante, comentaremos algunas cuestiones relacionadas con las mismas, para que el alumno sea consciente de la complejidad del problema.

En las ecuaciones (6.2), las incógnitas a determinar mediante integración son $x(t), y(t), z(t)$, que constituyen las ecuaciones paramétricas de la trayectoria (2.2). Hay que tener en cuenta que en (6.2) estas incógnitas *pueden* aparecer también en los primeros miembros como ya hemos indicado, dificultando extraordinariamente la resolución de las mismas. Al integrar las ecuaciones diferenciales aparecen unas constantes, igual que al integrar cualquier función, que hay que determinar. Su cálculo se realiza dando en el planteamiento del problema unas condiciones complementarias, que normalmente son para las (6.2): la posición y velocidad del punto en un instante inicial (*condiciones iniciales*). Este tipo de problemas ya los tratamos en Cinemática (Ejercicio 2.2). Hay que tener en cuenta que para llegar a la solución en (6.2) hay que integrar dos veces, ¿por qué? Al integrar por vez primera se obtiene la velocidad, es decir:

$$X' + cte = m \frac{dx}{dt}$$

escribiendo sólo la ecuación correspondiente a la componente x de (6.1). Al integrar la ecuación anterior, o por segunda vez (6.2), como se suele decir en el vocabulario de las ecuaciones diferenciales, se obtiene la trayectoria.

Para evitar, o disminuir, estas dificultades la Física introduce diversas magnitudes que permiten calcular, sin tener que integrar una vez el sistema (6.2), la velocidad de la partícula en función del tiempo. Estas magnitudes son: el momento lineal, el angular y la energía. Se trata de magnitudes que bajo ciertas condiciones se conservan, es decir permanecen constantes en el transcurso del movimiento de la partícula. Desde el punto de vista matemático se dice que sus teoremas de conservación proporcionan **integrales primarias del movimiento**. Pero éste es un aspecto que no nos interesa demasiado.

Para finalizar este planteamiento general, y tan abstracto para el alumno, insistiremos en que la resolución del problema fundamental de la Dinámica es extrictamente matemático. La Física analiza el fenómeno, determina qué fuerzas actúan sobre el punto y a partir de la segunda ley de Newton, establece (6.1). Una vez resuelto el problema matemático, interpreta físicamente el resultado.

Hay ocasiones en que el problema fundamental de la Dinámica se plantea en forma inversa: *conocida la trayectoria de una partícula de masa m , calcular las fuerzas que actúan sobre ella*. En estos casos el problema se simplifica proyectando (6.1) no sobre un sistema de referencia cualquiera, sino sobre un sistema de ejes intrínseco (es decir, unido al móvil), formado por la tangente a la trayectoria, su normal principal y su binormal (perpendicular a los dos anteriores) en el punto que en cada instante coincide con el móvil (§ 2.3). Entonces se obtienen las *ecuaciones intrínsecas del movimiento*:

$$\begin{aligned} F_t &= m a_t \quad , \quad F_t = m \frac{d^2 s}{dt^2} \\ F_n &= m a_n \quad , \quad F_n = \frac{m}{\rho} \frac{d^2 s}{dt^2} \\ F_b &= 0 \quad , \quad F_b = 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

que hay que resolver. En (6.3) F_t y F_n representan las componentes de la fuerza sobre la tangente y la normal a la trayectoria, respectivamente. Este problema, aunque más sencillo que el directo, sigue siendo complicado; además sólo es de utilidad en casos muy particulares, por ejemplo cuando se conoce previamente la trayectoria.

A nuestro nivel, nunca nos encontraremos con una situación tan general como la que acabamos de describir. En la mayoría de ocasiones las fuerzas son constantes, y cuando no lo son se trata de funciones sencillas, tales como: $F(x)$, caso de las fuerzas elásticas; $F(r)$, fuerzas gravitatorias y electrostáticas, etc. La solución en estos casos es simple; no creemos que tenga sentido ir analizando uno por uno todos ellos, ya que se trata de meros ejercicios de matemática aplicada. Sin embargo, si que insistiremos en la *importancia de las condiciones iniciales* (r_0 y v_0) en la resolución de todo problema de Dinámica. Por ejemplo, una partícula sobre la que actúa una fuerza constante (como podría ser su peso), no describe la misma trayectoria si se lanza con una velocidad inicial perpendicular al suelo, que si se lanza con una que forme un cierto ángulo con él. ¿Qué trayectoria describe en cada caso?

Para aclarar estas ideas resolveremos el ejercicio siguiente.

Ejercicio 6.1

Un cuerpo de masa m está unido a un resorte de masa despreciable y constante k . A partir de su posición de equilibrio se deforma, por ejemplo estirándolo, y posteriormente se deja libre. Si la deformación en el instante inicial es x_0 y su velocidad v_0 , calcular la ecuación de movimiento del cuerpo $[x(t)]$. El sistema resorte-cuerpo se encuentra sobre una superficie horizontal lisa, Fig. 6.1a.

¿Cómo se modifica el resultado si el resorte se encuentra suspendido verticalmente, Fig. 6.1b?

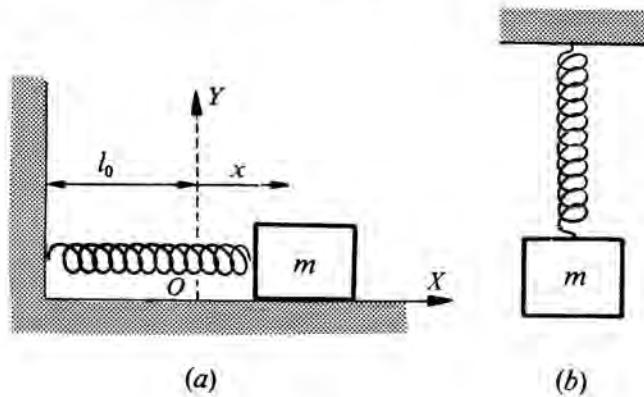


FIG. 6.1

Solución:

En la posición de equilibrio, las únicas fuerzas que actúan sobre el cuerpo son P y N . Se verifica: $P + N = 0$, ¿por qué? El resorte no está deformado, su longitud es la original l_0 . A partir de esta posición se estira y posteriormente se deja libre; cuando se está estirando actúa sobre él: $F_{\text{deformadora}}$ (ejercida por la mano, por ejemplo) y la $F_{\text{elástica}}$. Al dejarlo libre, la única fuerza es la elástica, que tiende a que el resorte recobre su longitud original. El movimiento del cuerpo lo queremos estudiar en estas condiciones.

Aplicando (4.6):

$$F_{\text{elástica}} = m a \quad , \quad -kx = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (6.4)$$

donde hemos proyectado la ecuación vectorial sobre el eje OX , Fig. 6.1a. En esta ecuación x representa la deformación del resorte, respecto de su posición de equilibrio. ¡Cuidado que no tiene el mismo significado que en (5.21)! La constante k/m tiene dimensiones de $[T]^{-2}$ y se suele escribir como: $\omega^2 = k/m$. Su significado físico lo trataremos posteriormente, pero desde luego no se trata de una velocidad angular, ¿por qué? Introduciendo esta nueva constante en (6.4):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (6.5)$$

Esta ecuación diferencial, con las condiciones iniciales indicadas en el enunciado, es la que hay que resolver para obtener la ecuación de movimiento del cuerpo: $x(t)$.

No creemos adecuado, desde el punto de vista metodológico, aplicar los métodos de la teoría de ecuaciones diferen-

ciales para resolver (6.5), aunque se trate de uno de los tipos cuya solución es más simple. Por ello, daremos directamente la solución y el alumno puede comprobar que verifica a (6.5):

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) \quad (6.6)$$

¿Por qué no pruebas si también puede ser solución otra función que elijas arbitrariamente?

En (6.6) A y φ_0 son dos constantes arbitrarias que hay que determinar a partir de las condiciones iniciales. Haciendo uso de ellas:

$$\begin{aligned} x_0 &= A \operatorname{sen} \varphi_0 \\ v_0 &= \left(\frac{dx}{dt} \right)_0 = \omega A \cos \varphi_0 \\ A &= [x_0^2 + (v_0/\omega)^2]^{1/2} \quad , \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \omega x_0 / v_0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

por lo tanto:

$$x(t) = [x_0^2 + (v_0/\omega)^2]^{1/2} \operatorname{sen}(\omega t + \operatorname{arc tg}(\omega x_0/v_0)) \quad (6.8)$$

Esta solución, a pesar de su complejidad aparente, es de la forma indicada en (6.6). Para interpretarla físicamente consideramos el caso más usual: $v_0 = 0$; con esta condición (6.8) queda:

$$x(t) = x_0 \operatorname{sen}(\omega t + \pi/2) = x_0 \cos \omega t = A \cos \omega t \quad (6.9)$$

Esta es la ecuación característica del denominado **movimiento armónico simple (MAS)**, Fig. 6.2; cualquier sistema físico sea cual fuere su naturaleza, que obedezca a una ecuación del tipo (6.4) y como consecuencia su evolución temporal sea de la forma (6.9), se dice que es un **oscilador armónico**.

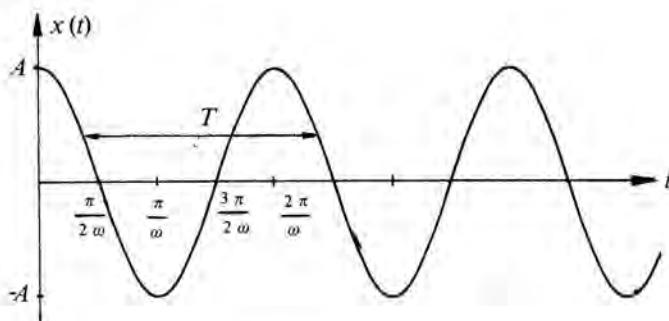


FIG. 6.2

La constante A se denomina **amplitud** del movimiento, y representa el valor máximo de la deformación del resorte (6.9): $A = x_0$. El instante inicial, $t = 0$, era totalmente arbitrario en el caso general (6.8); es decir, no coincidía con el instante en que dejaba de actuar la fuerza deformadora. En estas condiciones: $A \neq x_0$, como claramente aparece en (6.7).

El argumento de la función armónica en (6.8) ó (6.9) recibe el nombre de **fase instantánea** del movimiento, φ . Su valor para $t = 0$ recibe el nombre de **fase inicial** φ_0 .

El **MAS** se caracteriza también por su **periodo** T , ya que (6.9) es una función periódica. Se define como el intervalo mínimo de tiempo que transcurre entre dos instantes para los cuales el desplazamiento y la velocidad del móvil toman los mismos valores. A partir de (6.9):

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x(t+T), \quad t = t_1 \rightarrow \varphi_1 = \omega t_1 \\ t &= t_2 = t_1 + T \rightarrow \varphi_2 = \omega(t_1 + T) + 2\pi \end{aligned} \right\} 2\pi = \omega T$$

Sustituyendo ω por su valor:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi(m/k)^{1/2} \quad (6.10)$$

La inversa del periodo recibe el nombre de **frecuencia**: $v = 1/T$, y se mide en s^{-1} o en **hertz (Hz)**. Físicamente representa el número de oscilaciones, o ciclos completos, que describe el móvil en la unidad de tiempo, ¿Por qué? ω es la llamada **frecuencia angular** y se mide en rad s^{-1} , ¿Por qué?

Cuando el resorte se encuentra suspendido verticalmente, Fig. 6.3, las únicas fuerzas que actúan son P y $F_{\text{elástica}}$. En este caso se encuentra deformado, a pesar de estar en equilibrio:

$$P + F_{\text{elástica}} = 0, \quad mg = ky_0 \quad (6.11)$$

¿Qué representa y_0 ? A partir de esta posición, en la que el resorte ya no tiene su longitud original, se estira y posteriormente se deja libre. Al dejarlo libre, actúan sobre él su peso y la fuerza elástica, que es proporcional a la deformación del resorte *respecto de su longitud original* (l_0), Fig. 6.3, ¿Por qué? Por lo tanto, localizando los ejes en la pos-

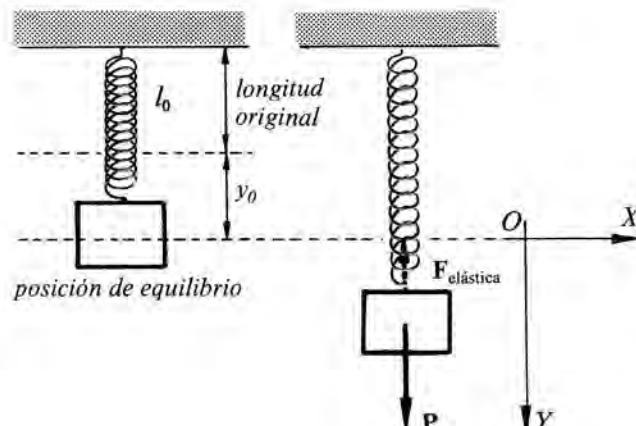


FIG. 6.3

ción de equilibrio y no en aquella en la que el resorte se encuentra sin deformar, Fig. 6.2b:

$$\begin{aligned} F_{\text{elástica}} &= -k(l_0 + y_0 + y - l_0)\mathbf{j} = -k(y_0 + y)\mathbf{j}, \\ mg - k(y_0 + y) &= m \frac{d^2y}{dt^2} \end{aligned} \quad (6.12)$$

teniendo en cuenta (6.11) queda:

$$-ky = m \frac{d^2y}{dt^2} \quad (6.13)$$

Comparando (6.13) con (6.4) encontramos que la ecuación de movimiento es la misma en ambos casos, siempre que x en (6.4) represente el *desplazamiento del cuerpo a partir de la posición de equilibrio*.

§ 6.2 MOMENTO LINEAL. TEOREMA DE CONSERVACION

Se define el **momento lineal** de una partícula como el *producto de su masa por su velocidad*:

$$\mathbf{p} = mv \quad (6.14)$$

Se trata de una magnitud vectorial. Depende, además, del sistema de referencia respecto del cual se determina, ¿por qué?. Sus dimensiones son: $[p] = [M][L][T]^{-1}$, y sus unidades: kg m s^{-1} .

Derivando los dos miembros de (6.14) respecto del tiempo y recordando (4.6):

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (6.15)$$

que nos indica: « *la variación temporal del momento lineal de una partícula es igual a la fuerza total que actúa sobre la misma* ». Este enunciado suele denominarse: **Teorema del momento lineal para una partícula**. Newton enunció su segunda ley haciendo intervenir el momento lineal, y con una nomenclatura moderna dicha ley sería la expresada en (6.15). ¿Podrías enunciarla en función de esta nueva magnitud?

La expresión (6.15) nos indica que para que varíe el momento lineal de una partícula, tiene que actuar sobre la misma una fuerza neta distinta de cero. Por consiguiente: *Si la fuerza neta que actúa sobre una partícula es nula, su momento lineal permanece constante en el transcurso del tiempo*. Esta consecuencia se conoce con el nombre de: **Teorema de conservación del momento lineal para una partícula**.

Realmente, este teorema para el caso de una partícula sola no aporta ninguna información nueva, respecto a la proporcionada por las leyes de Newton, ¿por qué?. El teorema de conservación del momento lineal adquiere su verdadera dimensión al estudiar la dinámica de los sistemas de partículas (§ 8.4). Este teorema, como el del momento angular, suministra integrales primeras del sistema de ecuaciones diferenciales (6.2), facilitando la resolución del problema fundamental de la Dinámica.

No creemos interesante resolver ejercicio alguno referente a este apartado, por las razones apuntadas anteriormente, los pospondremos para el capítulo VIII.

§ 6.3 MOMENTO ANGULAR. TEOREMA DE CONSERVACION

Se define el **momento angular** de una partícula respecto de un punto O , Fig. 6.4, al *producto vectorial de su vector de posición respecto del SRI elegido por el vector momento lineal*:

$$\mathbf{l}_o = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times mv \quad (6.16)$$

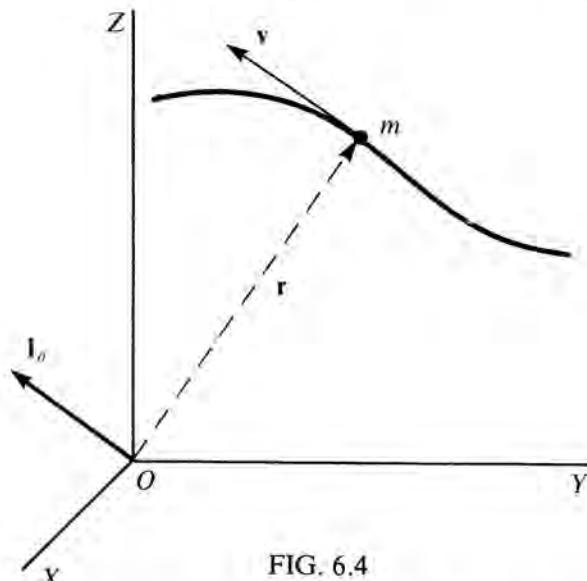


FIG. 6.4

Aplicando la definición de producto vectorial (§ 1.5) tenemos perfectamente conocido al vector \mathbf{l}_o .

Hay que resaltar que el momento angular se calcula siempre respecto de un punto, que hay que especificar claramente; por ello en (6.16) le hemos puesto un subíndice al vector \mathbf{l}_o .

Sus dimensiones son: $[l] = [M][L]^2[T]^{-1}$, y sus unidades: $\text{kg m}^2\text{s}^{-1}$.

Una pregunta que surge de forma inmediata es: ¿qué relación existe entre el momento angular de una partícula tomado respecto de un punto O , y el de la misma partícula tomado respecto de otro punto O' ? Sean \mathbf{l}_o y $\mathbf{l}_{o'}$ los momentos cinéticos respectivo de ambos puntos (Fig. 6.5). Supongamos que el punto O' no se mueve respecto del O , en este caso se verifica:

$$\mathbf{l}_o = \mathbf{l}_{o'} + \mathbf{OO}' \times \mathbf{p} \quad (6.17)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_o &= \mathbf{r} \times mv = (\mathbf{OO}' + \mathbf{r}') \times mv = \mathbf{OO}' \times mv + \\ &+ \mathbf{r}' \times mv = \mathbf{OO}' \times \mathbf{p} + \mathbf{l}_{o'} \end{aligned}$$

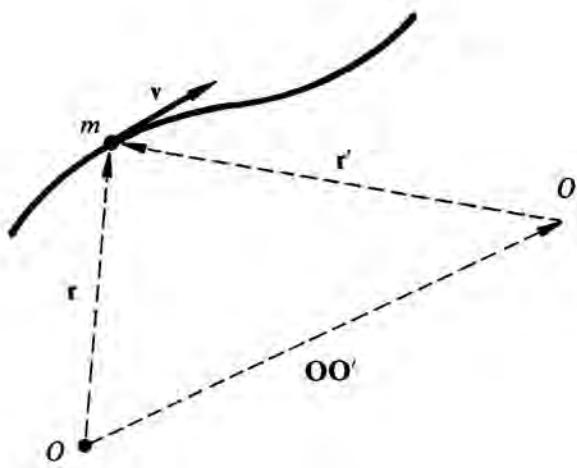


FIG. 6.5

A continuación definiremos una nueva operación vectorial, para la cual encontraremos de inmediato una aplicación e interpretación física. Se define el **momento de una fuerza F** respecto de un punto *O*, Fig. 6.6, como:

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (6.18)$$

La caracterización de este nuevo vector está perfectamente establecida, sin más que aplicar en (6.18) la definición de producto vectorial. El momento de una fuerza también depende del punto específico del espacio respecto del que se calcula. ¿Cuáles son sus dimensiones y unidades, en el SI?

Supongamos que sobre la partícula actúan diferentes fuerzas: $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots, \mathbf{F}_n$, el **momento resultante o total** de estas fuerzas respecto de *O* se define como:

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_3 + \dots = \sum_i \mathbf{r} \times \mathbf{F}_i \quad (6.19)$$

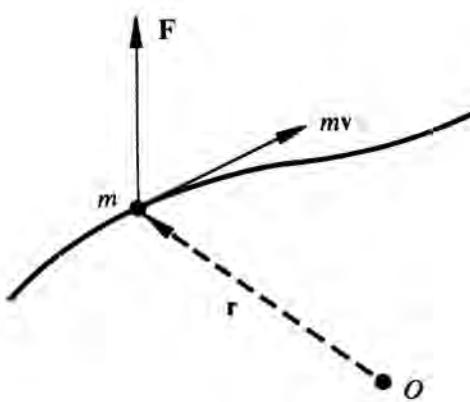


FIG. 6.6

Para captar el interés físico de esta nueva definición sustituiremos (6.15) en (6.18):

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \quad (6.20)$$

En esta última expresión hemos hecho uso de (1.38). ¿Por qué en la derivada del producto vectorial se anula el sumando: $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v}$?

Luego según (6.19),

$$\mathbf{M}_o = \frac{d\mathbf{l}_o}{dt} \quad (6.21)$$

donde el momento de la fuerza y el momento angular están definidos respecto al mismo punto. La expresión (6.20) se conoce con el nombre de **teorema del momento angular para una partícula** y expresa que *la variación temporal del momento angular de una partícula respecto de un punto O es igual al momento resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula, tomando dicho momento respecto del mismo punto O*. Por lo tanto, para que varíe el momento angular el momento total de las fuerzas debe ser distinto de cero.

El nombre de momento angular \mathbf{l}_o le proviene de que representa un papel formalmente análogo en la dinámica de rotación de los sistemas de partículas (capítulo IX), al del momento lineal en la de traslaciones (capítulo VIII). La ecuación (6.15) es la fundamental para estudiar el movimiento de traslación de un sistema de partículas; mientras que la (6.21) lo es para el estudio del movimiento de rotación. Obsérvese la analogía formal entre \mathbf{F} y \mathbf{M}_o , y \mathbf{p} y \mathbf{l}_o en ambas expresiones. Estos aspectos los desarrollaremos con mayor detalle en el capítulo VIII, allí percibiremos toda su utilidad y el significado físico que encierra.

Hay que resaltar que (6.21) se verifica para un punto *O* situado en un SRI, que normalmente tomamos como origen del mismo. ¿Por qué hay que hacer esta puntualización?, tener en cuenta que hemos hecho uso de (4.6) para su deducción.

Ejercicio 6.2

El vector de posición respecto de un SRI de un punto material de 6 kg de masa es: $\mathbf{r}(t) = (3t^3 - 6t)\mathbf{i} - 4t^2\mathbf{j}\text{m}$

Calcular: 1.^o Fuerza que actúa sobre el punto. 2.^o Momento de dicha fuerza respecto del origen de coordenadas. 3.^o El momento lineal y angular del punto respecto a dicho origen.

Solución:

1.º Según la segunda ley de Newton, expresada para un sistema de referencia inercial (4.6):

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (6.22)$$

conociendo el vector de posición se puede calcular la aceleración

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 6\mathbf{i} - 24t\mathbf{j} \text{ m s}^{-2}$$

Al calcular $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ o $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ se ha tomado $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \mathbf{0}$,

¿puede el alumno justificarlo? Obsérvese también que el movimiento del punto no es uniformemente acelerado, ¿por qué?

La fuerza vale (6.22): $\mathbf{F} = 36\mathbf{i} - 144t\mathbf{j} \text{ N}$

2.º Según (6.18) y (1.28):

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3t^2 - 6t & -4t^3 & 0 \\ 36 & -144t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-288t^3 + 864t^2)\mathbf{k} \text{ N m}$$

3.º A partir de (6.14) y (6.16):

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = 36(t-1)\mathbf{i} - 72t^2\mathbf{j} \text{ kg m s}^{-1}$$

$$\mathbf{l}_o = \mathbf{r} \times \mathbf{mv} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3t^2 - 6t & -4t^3 & 0 \\ 36(t-1) & -72t^2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-72t^4 + 288t^3)\mathbf{k} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Si calculamos:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 36\mathbf{i} - 144t\mathbf{j} \text{ N}, \quad \frac{d\mathbf{l}_o}{dt} = -288t^3 + 864t^2 \text{ N m}$$

quedan justificadas las expresiones (6.15) y (6.21) para este ejercicio concreto.

Si el momento resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula es nulo, su momento angular permanece constante en el transcurso del tiempo. Esta consecuencia de (6.21):

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{l}_o = \text{cte} \quad (6.23)$$

se conoce con el nombre de **teorema de conservación del momento angular para una partícula**. Tal como dijimos para el momento lineal, este teorema adquiere su verdadera dimensión al estudiar la dinámica de los sistemas de partículas.

Ejercicio 6.3

En el modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno, se supone que el electrón se mueve en una órbita circular de radio r_o alrededor del núcleo. La fuerza de atracción entre el protón y el electrón es de tipo electrostático (5.15). Suponiendo conocidas la carga del electrón y el protón (e), y sus masas respectivas: m_e y m_p , $m_p > > m_e$.

- Existe un momento, respecto al núcleo, de la fuerza que actúa sobre el electrón? ¿Cuál es el momento angular del electrón respecto al núcleo? ¿Se conserva? Justificar la respuesta.
- Si el momento angular del electrón es $\mathbf{l}_o = \hbar$, calcular la velocidad v en función del radio de la órbita r_o , \hbar y m .
- A partir del resultado obtenido en b) y de la expresión de la fuerza electrostática, calcular r_o y v en función de e , \hbar y m .

Solución:

Se trata de estudiar el comportamiento del electrón, que será nuestro punto material, en su interacción con el núcleo. La partícula significativa del núcleo, desde el punto de vista del ejercicio, es el protón; ya que es la única que tiene carga eléctrica, propiedad que no presenta el neutrón. Supongamos que analizamos el comportamiento del electrón en la aproximación clásica (§ 4.1).

Sobre el electrón actúa una fuerza \mathbf{F}_e , que constantemente pasa por un punto, el núcleo (Fig. 6.7). En Física este tipo de fuerzas, denominadas **fuerzas centrales**, juegan un papel fundamental, (5.9) y (5.15). El movimiento de las partículas sometidas a este tipo de fuerzas presenta una serie de propiedades que se estudiarán en (§11.1), pero se puede aprovechar este ejercicio para conocer ya algunas.

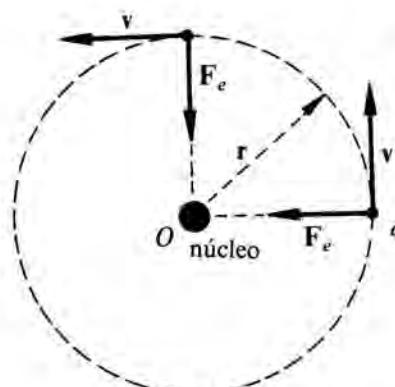


FIG. 6.7

- a) Por definición de momento de una fuerza respecto de un punto:

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_e = \mathbf{0} \quad (6.22)$$

ya que ambos vectores tienen la misma dirección. Según (6.16)

$$\mathbf{l}_o = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = rm\mathbf{v}\mathbf{k} \quad (6.23)$$

donde \mathbf{k} es un vector unitario perpendicular al plano del dibujo y saliendo de él. La velocidad lineal del electrón se puede calcular a partir de la segunda ley de Newton (4.6), escrita para un observador inercial situado en O :

$$F_e = m a_n, \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r},$$

$$v = \frac{e}{(4\pi\epsilon_0 rm)^{1/2}} \quad (6.24)$$

por lo tanto, el momento angular valdrá (6.23):

$$l_o = e \left(\frac{rm}{4\pi\epsilon_0} \right)^{1/2} \mathbf{k} \quad (6.25)$$

Según (6.21) el momento angular se conserva al ser $M_o = 0$, luego $l_o = \text{cte}$. Por consiguiente, la trayectoria siempre estará en el mismo plano (que equivale a afirmar que la dirección y sentido de l_o permanece constante) y $l_o = \text{cte}$. A partir de (6.25) se observa que si el módulo de l_o ha de ser constante, ha de serlo r que es la única magnitud que podría variar, luego $r = r_o$ que es el radio de la órbita que corresponde al estado fundamental en el modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno.

b) Si $l_o = \hbar$ se obtiene de (6.23):

$$v = \hbar / r_o m \quad (6.26)$$

\hbar es igual a la constante de Plank (h) dividida por 2π .

c) A partir de (6.24) y (6.26) se obtiene:

$$r_o = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{m e^2} \quad (6.27)$$

sustituyendo en (6.26):

$$v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar} \quad (6.28)$$

Si ahora se introdujese el postulado de Bohr (de la llamada «antigua teoría cuántica», hoy superada) de que el momento angular de un electrón en una órbita circular está cuantificado, $l_o = n\hbar$, donde n es un número entero, $n = 1, 2, 3, \dots$ Se obtendrían a partir de (6.27) los radios de las órbitas permitidas para el electrón; y a partir de (6.28) las velocidades en dichas órbitas. Para $n = 1$ se dice que el electrón

se encuentra en el **estado fundamental** (que es el de menor energía), por lo tanto, el radio calculado en (6.27) corresponde al de dicha órbita. Si se sustituyen en (6.27) los valores de las magnitudes que en ella aparecen, se obtiene $r_o = 0,53 \times 10^{-10} \text{ m}$, valor que el alumno habrá manejado en Química, junto a la teoría anterior. En (§ 19.3) volveremos con más detalle sobre ella.

§ 6.4 TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA

El término «trabajo» no tiene el mismo significado en Física que el utilizado en el lenguaje coloquial; esto ocurre a menudo con las magnitudes físicas que se denominan de la misma manera que ciertas palabras que se utilizan en el lenguaje cotidiano (por ejemplo, la fuerza). Cuando se introduce una magnitud física hay que dar una definición de la misma que tenga el mismo significado para todo el mundo, y no quede su interpretación al criterio subjetivo de las personas.

Introducimos la definición de trabajo en *forma diferencial*, para que sea lo suficientemente general, que incluya todos los casos que se puedan presentar. En los estudios elementales no se ha podido introducir de esta forma, porque la formación del alumno en el cálculo diferencial no lo aconsejaba.

Se define el **trabajo elemental o infinitesimal realizado por una fuerza F variable** a lo largo de un desplazamiento diferencial $d\mathbf{r}$ al producto escalar:

$$d\mathcal{W} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (6.29)$$

La fuerza en general varía con el tiempo y la trayectoria es de forma arbitraria (Fig. 6.8). Se trata por consiguiente de un concepto estrictamente matemático, basado en el producto escalar de dos vectores (§ 1.4). Esta expresión nos indica que si la fuerza, por ejemplo, tiene una cierta dirección y la partícula sobre la que actúa se desplaza en otra, sólo la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento

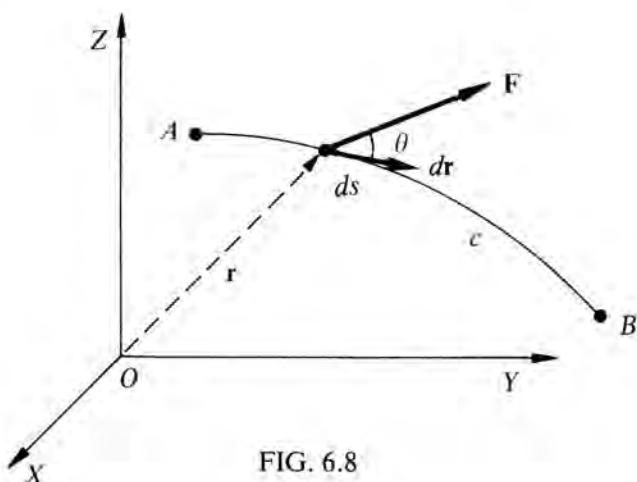


FIG. 6.8

efectúa trabajo. A partir de la definición de producto escalar (1.18):

$$d\mathcal{F} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F ds \cos \theta \quad (6.30)$$

o también (1.21):

$$d\mathcal{F} = Xdx + Ydy + Zdz \quad (6.31)$$

El vector desplazamiento elemental $d\mathbf{r}$ tiene por módulo el arco ds recorrido, en el intervalo dt , por la partícula sobre la que actúa la fuerza \mathbf{F} ; su dirección es tangente a la curva descrita por la partícula en su movimiento, y el sentido el del recorrido (2.6).

En (6.30) hemos utilizado una notación no convencional en el texto: $|d\mathbf{r}|$, para designar el módulo del vector $d\mathbf{r}$. La razón es que necesitamos distinguir, ya que lo necesitaremos posteriormente, entre el módulo de dicho vector y la diferencial del módulo de \mathbf{r} , $d|\mathbf{r}|$. Como ya indicamos (ejercicio 1.7 y problema 21) ambos no son, en general, equivalentes.

Las componentes de $d\mathbf{r}$ son (dx, dy, dz) , y las del vector fuerza (X, Y, Z) .

Si se trata de evaluar el **trabajo finito desde un punto A hasta otro B, a lo largo de la curva c**:

$$\mathcal{F}_{A \rightarrow B, c} = \int_{A \rightarrow B, c} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A \rightarrow B, c} (Xdx + Ydy + Zdz) \quad (6.32)$$

este tipo de integrales reciben el nombre de **integrales de línea o curvilíneas**, su valor no depende sólo de la función que se integra, ni del punto inicial A y final B, sino también de la curva que siga la partícula material sobre la que actúa la fuerza \mathbf{F} , para desplazarse desde A hasta B. No se trata por consiguiente de una integral definida, sino de otra clase diferente de inte-

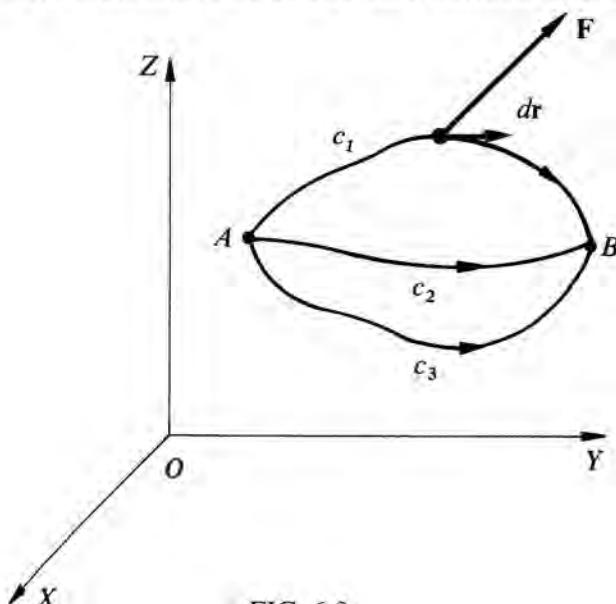


FIG. 6.9

grales, que el alumno todavía no ha estudiado en matemáticas, y que posiblemente no tratará hasta dentro de algunos cursos. Por lo tanto, el *trabajo realizado por una fuerza para desplazar una partícula desde un punto A hasta otro B depende de la trayectoria seguida* (Fig. 6.9); esta propiedad es una consecuencia de la propia definición de trabajo (6.32)

$$\int_{A \rightarrow B, c_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{A \rightarrow B, c_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{A \rightarrow B, c_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (6.33)$$

Ejercicio 6.4

Una fuerza tiene de componentes $(xy, 0, 0)$, calcular el trabajo realizado por la misma al desplazar una partícula material desde el punto $A(2,0)$ al $B(0,2)$ a lo largo de: a) un arco de circunferencia de centro el origen de coordenadas y de extremos los puntos A y B . b) a lo largo del segmento AB .

Solución:

Según el enunciado $\mathbf{F} = xy \mathbf{i}$, donde x e y son las coordenadas del punto del plano, en las que en cada instante se encuentre la partícula sobre la que actúa \mathbf{F} . Se trata pues de una fuerza variable en el tiempo. Aplicando (6.32):

$$\mathcal{F}_{A \rightarrow B, c} = \int_{A \rightarrow B, c} xy dx \quad (6.34)$$

En este ejemplo concreto observamos porqué las integrales de línea y, por lo tanto, el trabajo, dependen de la curva a lo largo de la cual se calcule (o dicho en términos de Física, de la trayectoria seguida por la fuerza en su desplazamiento). En el integrando existen dos variables x e y y la diferencial de una de ellas, dx ; dicha integral no se puede evaluar a menos que conozcamos la relación de y con x , relación que proporciona la ecuación de la curva que se recorra para ir de A hasta B . Dependiendo, por consiguiente, de la ecuación de la curva, el integrando será de una forma u otra, y por lo tanto, el resultado de la integral.

- a) A lo largo del arco de circunferencia AB (Fig. 6.10). La ecuación paramétrica de esta circunferencia es:

$$x = 2 \cos \lambda \quad y = 2 \sin \lambda \quad (6.35)$$

eliminando λ , obtenemos su ecuación cartesiana: $x^2 + y^2 = 4$

Según (6.34),

$$\mathcal{F}_{A \rightarrow B, c_1} = \int_{(2,0)c_1}^{(0,2)} xy dx = -8 \int_0^{\pi/2} \cos \lambda \sin^2 \lambda d\lambda \quad (6.36)$$

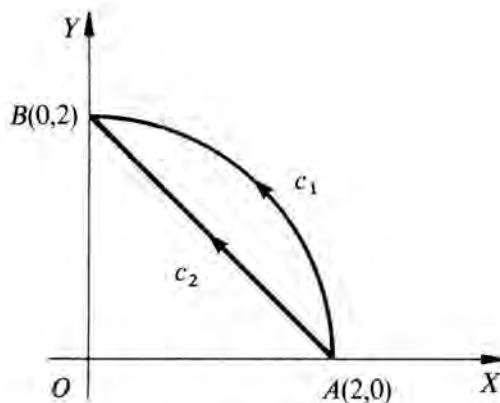


FIG. 6.10

donde x , y , dx se han sustituido por sus expresiones correspondientes en función del parámetro λ . Los límites de integración, son los valores de λ que corresponden a los puntos A y B , respectivamente. Obsérvese que al relacionar x e y a través de la ecuación de la trayectoria, la integral de línea se ha convertido en una integral definida.

La (6.36) se puede escribir:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{A \rightarrow B, c_1} &= -8 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \lambda d(\sin \lambda) = \\ &= -8 \frac{\sin^3 \lambda}{3} \Big|_0^{\pi/2} = -8/3 \text{ J}\end{aligned}\quad (6.37)$$

El alumno puede comprender ahora la razón de haber utilizado la ecuación paramétrica de la circunferencia en vez de la cartesiana. De haber utilizado ésta la integral que resulta es más complicada de resolver que la (6.36) :

$$\mathcal{T}_{A \rightarrow B, c_1} = \int_{(2,0)}^{(0,2)} x (4-x^2)^{1/2} dx$$

- b) A lo largo del segmento AB (Fig. 6.10). La ecuación de esta recta es: $y = 2 - x$, por lo tanto:

$$\mathcal{T}_{A \rightarrow B, c_2} = \int_2^0 x(2-x)dx = \int_2^0 2xdx - \int_2^0 x^2 dx = -4/3 \text{ J}$$

Luego: $\mathcal{T}_{A \rightarrow B, c_1} \neq \mathcal{T}_{A \rightarrow B, c_2}$, el trabajo depende de la trayectoria.

Si sobre una partícula actúan varias fuerzas, el trabajo total realizado por las mismas al desplazar la partícula se obtiene, o bien sumando los trabajos realizados por cada una de ellas, o bien calculando previamente la fuerza neta y computando el trabajo de dicha fuerza. La demostración es elemental:

$$\begin{aligned}d\mathcal{T} &= d\mathcal{T}_1 + d\mathcal{T}_2 + d\mathcal{T}_3 + \dots = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{r} + \dots = \\ &= (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots) \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}_{\text{neta}} \cdot d\mathbf{r}\end{aligned}\quad (6.38)$$

El trabajo elemental, y por supuesto el finito, es un escalar que puede ser nulo ($\theta = \pi/2$), positivo ($\pi/2 > \theta \geq 0$) o negativo ($\pi/2 < \theta \leq \pi$); ejemplos de cada uno de estos casos se consideran en el ejercicio siguiente.

Ejercicio 6.5

Un cuerpo de masa m se encuentra sobre un plano inclinado un ángulo θ respecto de la horizontal. Bajo la acción de diferentes fuerzas sube por el mismo, recorriendo una distancia e a lo largo del mismo, desde una altura y_0 hasta otra y_1 ($y_1 > y_0$). Sobre el cuerpo actúa una fuerza constante \mathbf{F} , aplicada en el sentido y dirección indicado en la Fig. 6.11. El coeficiente dinámico de rozamiento entre el cuerpo y el plano μ_{din} . Calcular: a) Expresión vectorial de cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. b) Trabajo realizado por la fuerza constante. c) Trabajo realizado por la fuerza de rozamiento. d) Trabajo realizado por la fuerza de la gravedad. e) Trabajo total realizado por todas las fuerzas que actúan.

Particularizar los resultados para los siguientes valores numéricos: $m = 2 \text{ kg}$, $\theta = 30^\circ$, $e = 10 \text{ m}$, $F = 100 \text{ N}$, $\mu_{\text{din}} = 0,20$

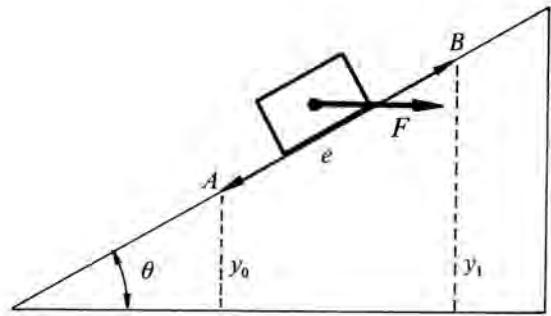


FIG. 6.11

Solución:

- a) En primer lugar determinaremos las fuerzas que actúan sobre el cuerpo (Fig. 6.12): \mathbf{N} , \mathbf{F}_{din} , \mathbf{P} , \mathbf{F} . Respecto del sistema de referencia elegido, la expresión vectorial de éstas es:

$$\mathbf{F} = F(\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j}), \mathbf{P} = -mg(\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \quad (6.39)$$

Las restantes fuerzas hay que calcularlas a partir de la segunda ley de Newton, proyectada según el eje OY , Fig. 6.12:

$$N - F \sin \theta - mg \cos \theta = 0, \quad N = (F \sin \theta + mg \cos \theta) \mathbf{j} \quad (6.40)$$

y recordando la definición de fuerza de rozamiento dinámica (5.25):

$$\mathbf{F}_{\text{din}} = -\mu_{\text{din}} N \mathbf{i}, \quad \mathbf{F}_{\text{din}} = -\mu_{\text{din}} (F \sin \theta + mg \cos \theta) \mathbf{i} \quad (6.41)$$

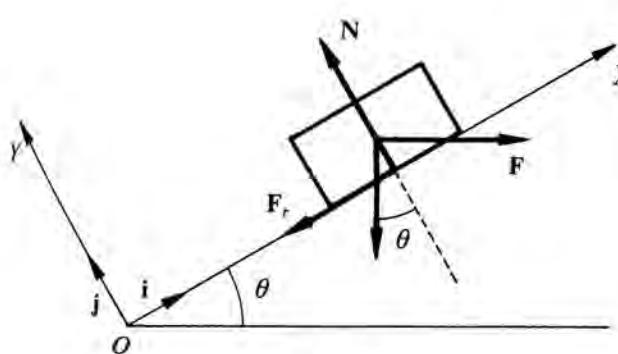


FIG. 6.12

- b) Trabajo realizado por la fuerza constante. Haciendo uso de (6.32) para el caso unidimensional:

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_{A \rightarrow B}, \text{ a lo largo del plano inclinado} = \int_{A \rightarrow B} X dx$$

donde X es la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento (OX). Teniendo en cuenta (6.39):

$$\mathcal{F}_1 = F \cos \theta \int_{x_A}^{x_B} dx = F \cos \theta (x_B - x_A) = F \operatorname{ctg} \theta (y_1 - y_0) \quad (6.42)$$

x_B, x_A son las abscisas correspondientes a los puntos B y A , Fig. 6.11, respectivamente. A la misma expresión se podrá haber llegado, haciendo uso de (6.30): $d\mathcal{F}_1 = F dx \cos \theta$.

- c) Trabajo realizado por la fuerza de rozamiento dinámico. De forma análoga al caso anterior:

$$\mathcal{F}_2 = -\mu_{\text{din}} (F + mg \operatorname{ctg} \theta) (y_1 - y_0) \quad (6.43)$$

observamos que el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es negativo (cuestión 16).

El trabajo realizado por la normal N es nulo, $\mathcal{F}_3 = 0$, ¿por qué?

- d) Trabajo realizado por la fuerza de la gravedad.

$$\mathcal{F}_4 = -mg \operatorname{sen} \theta \int_{x_A}^{x_B} dx = -mg (y_1 - y_0) \quad (6.44)$$

¿Qué significa que en este problema $\mathcal{F}_{\text{peso}} < 0$?

- e) El trabajo total realizado por todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo lo podemos calcular sumando $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$. También (6.38), evaluando la fuerza neta y calculando el trabajo realizado por la misma:

$$F_{\text{neta}} = [F (\cos \theta - \mu_{\text{din}} \operatorname{sen} \theta) - mg (\operatorname{sen} \theta + \mu_{\text{din}} \cos \theta)] \mathbf{i} \quad (6.45)$$

Según (6.32):

$$\mathcal{F}_{\text{total}} = [F (\operatorname{ctg} \theta - \mu_{\text{din}}) - mg (1 + \mu_{\text{din}} \operatorname{ctg} \theta)] (y_1 - y_0) \quad (6.46)$$

que evidentemente es igual a la suma de los trabajos individuales.

Sustituyendo los valores numéricos se obtiene: $F = 50(\sqrt{3}\mathbf{i} - \mathbf{j})\text{N}$, $P = -10(\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j})\text{N}$, $N = 67,32\mathbf{j}$, $F_{\text{din}} = -13,46\mathbf{i}$; $\mathcal{F}_1 = 500\sqrt{3}\text{ J}$, $\mathcal{F}_2 = -20(5 + \sqrt{3})\text{ J}$, $\mathcal{F}_3 = 0$, $\mathcal{F}_4 = -100\text{ J}$; $\mathcal{F}_{\text{total}} = 631,43\text{ J}$.

Si el cuerpo se desplaza sobre una superficie horizontal, bajo la acción de una fuerza constante que forma un ángulo θ con la dirección de desplazamiento (Fig. 6.13), el trabajo realizado sobre el cuerpo por la fuerza F al desplazarlo una distancia e será:

$$d\mathcal{F} = F ds \cos \theta, \quad \mathcal{F} = F \cos \theta \int_0^e ds = Fe \cos \theta \quad (6.47)$$

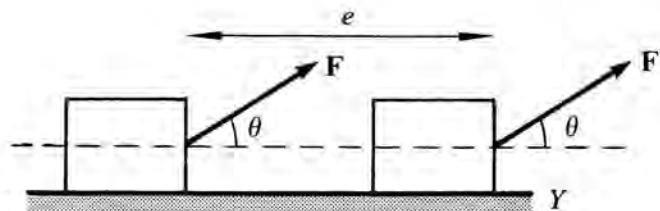


FIG. 6.13

Luego sólo la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento, $F \cos \theta$, es efectiva en la producción de trabajo. Si la fuerza actúa en la dirección del desplazamiento ($\theta = 0$), (6.47) se convierte en:

$$\mathcal{F} = Fe \quad (6.48)$$

que es la expresión del trabajo que se estudió en los cursos anteriores: «fuerza por espacio». Ahora estamos en condiciones de comprender que la misma es un caso particular de la definición más general (6.32), que se verifica cuando se cumplen las hipótesis indicadas. Evidentemente en los cursos anteriores no estaba el alumno en condiciones de entender la definición general, ya que se trata de un concepto matemático complejo, por eso se introdujo en la forma (6.48) o (6.47). Este procedimiento de ir llegando a la generalización de los conceptos mediante aproximaciones sucesivas, a medida que la formación del alumno es mayor, se utiliza a menudo en la Ciencia, y nosotros lo haremos en este texto respecto a conceptos que el alumno ya había oido en cursos anteriores. También algunos de los conceptos nuevos que introduciremos, los estudiará con mayor profundidad en contactos posteriores con la Física.

Las dimensiones del trabajo en el SI son: $[M][L]^2[T]^{-2}$, como fácilmente se puede comprobar. Su unidad en dicho sistema es el julio (J): $1\text{ J} = 1\text{ N m}$. Esta unidad también es, como luego comprobaremos, la correspondiente a la energía. La definición del julio es inmediata a partir de (6.48), ¿no? El nombre de julio fue dado en honor del científico inglés James P. Joule (1818-1889), que estudió el equivalente mecánico del calor y otras cuestiones experimentales relacionadas con el teorema de conservación de la energía.

A pesar de la recomendación internacional de que se utilice únicamente el SI para las diferentes magnitudes físicas, indicaremos algunas unidades de trabajo y de energía, que todavía tienen vigencia en diferentes campos de la Ciencia y la Tecnología, y que no pertenecen al SI:

- a) En Química y Termodinámica se suele utilizar la **caloría** (cal), que se define como la cantidad de energía necesaria para aumentar la temperatura de 1 kg de agua desde 15º C a 16º C.

$$1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}$$

Esta unidad, concretamente, está desaconsejada por la Conferencia General de Pesas y Medidas (1960).

- b) En Física Atómica y Nuclear, la energía se suele medir **electrón-voltio** (eV), esta es una unidad utilizada con el SI y cuyo valor en unidades SI se obtiene experimentalmente. Es la energía cinética (6.51) que adquiere un electrón al atravesar en el vacío la diferencia de potencial de un voltio.

$$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

- c) En Ingeniería eléctrica (especialmente en los contadores domésticos de energía eléctrica) el kilowatio-hora (kWh):

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$$

- d) Si tenemos en cuenta la equivalencia establecida por Einstein entre masa y energía: $E = m c^2$, donde c es la velocidad de propagación de la luz en el vacío.

$$1 \text{ kg de masa equivale a } 9 \times 10^{16} \text{ J.}$$

Aunque en Mecánica Clásica la masa y la energía son conceptos completamente distintos, se ha introducido aquí esta relación de equivalencia, para tener conjuntamente todas las formas de medir la energía.

POTENCIA

Un concepto que tiene gran importancia práctica en ingeniería es el de potencia, ya que el tiempo que se invierte en realizar un cierto trabajo es de vital importancia; por ejemplo, un pequeño motor eléctrico puede ser tan capaz de elevar un montacargas como uno grande (quizás añadiéndole una serie de engranajes multiplicadores), pero no puede utilizarse porque su cometido le llevaría demasiado tiempo. Este concepto de potencia no es pues fundamental en el desarrollo de la Dinámica, sino más bien aplicado. Se define la **potencia instantánea** como el *trabajo realizado por una fuerza por unidad de tiempo*:

$$\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{F}}{dt} \quad (6.49)$$

Si la potencia es constante en el tiempo, es decir, en intervalos iguales de tiempo se realiza el mismo trabajo: $\mathcal{F} = \mathcal{P}t$.

En el SI la unidad de potencia es el **vatio** (W), nombre dado en honor del ingeniero inglés James Watt (1736-1819) inventor de la máquina de vapor que marcó el comienzo de la revolución industrial. $1 \text{ W} = 1 \text{ Js}^{-1}$. Como esta unidad es muy pequeña para

las aplicaciones prácticas, se suele utilizar en ingeniería el **caballo de vapor** (CV), unidad propuesta por Watt como la potencia producida por un caballo considerado como una máquina. $1 \text{ CV} = 746 \text{ W}$, evidentemente un caballo no sobreviviría mucho tiempo trabajando a este ritmo.

§ 6.5 TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGIA CINETICA

Sea una partícula sobre la que actúa una fuerza neta \mathbf{F} . El trabajo infinitesimal efectuado por dicha fuerza en un desplazamiento elemental $d\mathbf{r}$, a lo largo de la trayectoria c descrita por la partícula, Fig. 6.14, será:

$$\begin{aligned} d\mathcal{F} &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \\ &= \frac{m}{2} d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = d\left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2\right) \end{aligned} \quad (6.50)$$

donde hemos hecho uso de (4.6), (2.7), § 1.4 y (1.34).

Si por definición llamamos **energía cinética** de la partícula en un instante t a:

$$E_c = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \quad (6.51)$$

la expresión (6.50) nos indica que *el trabajo infinitesimal realizado por todas las fuerzas que actúan sobre un punto material es igual a la variación infinitesimal de su energía cinética*.

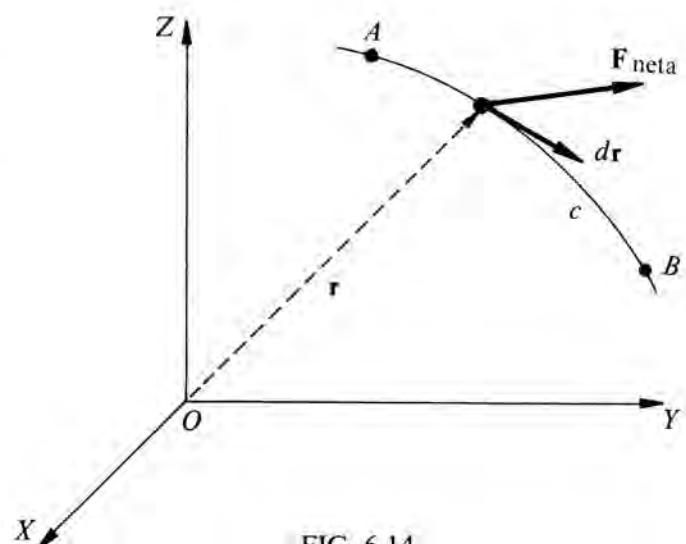


FIG. 6.14

La energía cinética es un escalar positivo asociado a la partícula, que depende de su estado de movimiento. Es evidente que la energía cinética depende del *SRI* utilizado, ¿por qué? Segundo (6.50) se observa que tiene las mismas dimensiones que el trabajo, por lo tanto se medirá en julios.

El trabajo finito realizado por la fuerza total \mathbf{F} , al desplazarse bajo su acción un punto material desde A hasta B a lo largo de c , se calcula integrando (6.50):

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{A \rightarrow B, c} &= \int_{A \rightarrow B, c} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{v_A}^{v_B} d(1/2 m v^2) = \\ &= \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2\end{aligned}\quad (6.52)$$

Que nos indica: «*El trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre una partícula, al desplazarse desde un punto A hasta otro B a lo largo de una cierta trayectoria c, es igual a la diferencia entre la energía cinética de la partícula en el punto final B y en el punto inicial A*. Esta diferencia depende, en general, de la trayectoria que siga para desplazarse desde A hasta B .

La relación (6.52) se suele conocer con el nombre de **teorema del trabajo y la energía cinética**, y constituye una integral primera del movimiento (§ 6.1). Nos permite evaluar el trabajo realizado por la fuerza total que actúa sobre la partícula, a lo largo de una trayectoria arbitraria, sin tener la necesidad de resolver la integral curvilínea (6.32), sin más que conocer v_A y v_B . Si se calcula el trabajo, la única precaución que hay que tener, es considerar en (6.52) el trabajo realizado por **todas** las fuerzas que actúan sobre la partícula, incluidas las de rozamiento si existen.

Algunas consecuencias del teorema anterior son inmediatas. Si la velocidad de una partícula es constante, su energía cinética no cambia y el trabajo realizado sobre ella por la fuerza neta es nulo. Recíprocamente, si la fuerza que actúa no produce trabajo, por ejemplo, por ser \mathbf{F} y $d\mathbf{r}$ perpendiculares, aquella sólo puede cambiar la dirección del vector velocidad de la partícula, pero no su módulo; en consecuencia la partícula sólo posee aceleración normal y no tangencial. Esta consideración hay que utilizarla para resolver el problema 8.

De forma análoga se deduce (6.52) que si la energía cinética de una partícula disminuye:

$$E_{c_B} < E_{c_A}, \Delta E_c < 0$$

el trabajo realizado por la fuerza neta que actúa sobre ella es negativo; la partícula va disminuyendo la velocidad. Por lo tanto, su energía cinética es igual al trabajo realizado por la fuerza que actúa sobre ella, para llevarla al estado de reposo. Desde este punto de vista se puede afirmar que una partícula tiene una energía almacenada, como consecuencia de su estado de movimiento, ya que a medida que realiza un trabajo disminuye su velocidad y pierde parte de esta energía.

Ejercicio 6.6

Un resorte sufre una deformación y_0 bajo la acción de una partícula de masa m , Fig. 6.3. ¿Qué trabajo hay que realizar para que sufra una deformación adicional y_1 , $y_1 > y_0$? Si se supone que esta deformación se ha realizado estirándolo, por ejemplo, y que posteriormente se deja libre. ¿Cuál será la velocidad de la partícula, cuando el resorte tenga una deformación arbitraria y ?

Datos: $y_0 = 5$ cm, $m = 10$ kg, $y_1 = 20$ cm.

Solución:

Para resolverlo utilizamos los resultados obtenidos en los ejercicios 5.1 y 6.1. A partir de la información inicial podemos calcular la constante del resorte (5.23):

$$k = \frac{mg}{y_0} \quad (6.53)$$

Esta posición de equilibrio, en la que el resorte no tiene su longitud original, la tomamos como referencia para estudiar su movimiento posterior. En estas circunstancias (6.13) basta considerar que sobre la partícula sólo actúa la $\mathbf{F}_{\text{deformadora}}$ y la $\mathbf{F}_{\text{recuperadora}}$; las deformaciones se medirán respecto de la posición de equilibrio, y no hay que tomar en consideración el peso de la partícula (!).

El resorte se deforma bajo la acción de una fuerza aplicada ($\mathbf{F}_{\text{deformadora}}$); si suponemos que el proceso se realiza sin que se acelere la partícula (ejercicio 5.1), para cada posición y de ésta se verificará:

$$\mathbf{F}_{\text{deformadora}} = -\mathbf{F}_{\text{elástica}} = k y \mathbf{j} \quad (6.54)$$

¿Por qué? En la expresión anterior hemos utilizado los ejes indicados en la Fig. 6.3.

Este tipo de procesos, o de transformaciones, son las que denominaremos *reversibles* en la Termodinámica (§ 10.1). Si inicialmente la velocidad de la partícula es cero, como así ocurre en el ejercicio, ésta se mantendrá durante todo el proceso muy próxima a cero, y tardará un tiempo infinito en realizarlo. Se trata por consiguiente de una transformación ideal, que sirve como caso límite de las reales.

Aplicando (6.32):

$$\mathcal{T}_{\text{deformadora}} = k \int_0^{y_1} y dy = 1/2 k y_1^2 > 0 \quad (6.55)$$

evidentemente, en el mismo proceso, $\mathcal{T}_{\text{deformadora}} = -\mathcal{T}_{\text{elástica}} = -1/2 k y_1^2 < 0$, ¿Por qué?

Una vez deformado se deja libre. La única fuerza que actúa sobre la partícula, teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, es la fuerza recuperadora o elástica. Para calcular su velocidad $v(y)$, hacemos uso de (6.52), por lo tanto tenemos que calcular previamente el trabajo realizado por la fuerza elástica (6.32):

$$\mathcal{T}_{\text{elástica}} = -k \int_{y_1}^y y \, dy = -1/2 k (y^2 - y_1^2) > 0 \quad (6.56)$$

Este trabajo es positivo, puesto que $y < y_1$. El trabajo necesario para llevarlo a la posición de equilibrio vale:

$$\mathcal{T}_{\text{elástica}}(y_1 \rightarrow 0) = 1/2 k y_1^2 \quad (6.57)$$

Llevando (6.56) a (6.52), con $v_A = 0$, ¿por qué?

$$1/2 m v^2(y) = \frac{k}{2} (y_1^2 - y^2) \quad (6.52)$$

$$v(y) = \left[\frac{k}{m} (y_1^2 - y^2) \right]^{1/2} \quad (6.59)$$

expresión que da la velocidad en función de la posición. Al depender la velocidad del cuadrado de y , toma idénticos valores para las mismas deformaciones del resorte, tanto si se trata de alargamientos, como de compresiones. Cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio $y = 0$, su velocidad valdrá:

$$v(0) = (k/m)^{1/2} y_1 \quad (6.59)$$

Gráficamente la energía cinética varía de la forma indicada en la Fig. 6.15 ya que $E_c(y)$ representa una parábola (6.58). Integrando (6.59) se podría calcular la variación de la deformación con el tiempo $y(t)$. Ver problema 12.

Sustituyendo los valores numéricos se obtiene:

$$k = 2 \times 10^3 \text{ N m}, \mathcal{T}_{\text{deformadora}}(0 \rightarrow y_1) = 40 \text{ J},$$

$$\mathcal{T}_{\text{elástica}}(y_1 \rightarrow 0) = 40 \text{ J}, v(0) = 2\sqrt{2} \text{ m s}^{-1}.$$

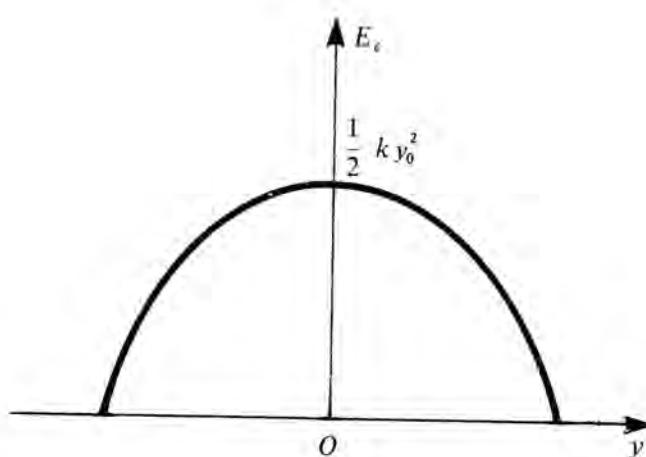


FIG. 6.15

CUESTIONES

- * 1. ¿Cómo influyen las condiciones iniciales en el cálculo de la ecuación del movimiento de una partícula, conocidas las fuerzas que actúan sobre ella? Razonar la respuesta.
- 2. Citar diversos sistemas físicos en los que la variación temporal de la magnitud que los caracteriza, sea de la misma forma que (6.9).
- 3. Significado físico del periodo y la frecuencia en un MAS. ¿Qué diferencia existe entre ω y v ? Téngase en cuenta que ω no puede ser una velocidad angular.
- 4. Justificar, en el caso de una partícula, que las expresiones (4.6) y (6.15) son completamente equivalentes.
- * 5. Justificar, que la conservación del momento lineal para dos partículas aisladas está incluida en el enunciado IV de § 4.3.
- 6. ¿Qué relación existe entre la dirección del momento angular de una partícula y la de su velocidad?, $\dot{\theta}$, con su aceleración?
- 7. Demostrar que el momento angular tiene dimensiones de energía multiplicada por tiempo.
- * 8. ¿Qué forma toma (6.17) si O' se mueve respecto de O ?
- 9. Justificar que el vector momento de una fuerza respecto de un punto es independiente de la posición de ésta a lo largo de la recta que la contiene.
- * 10. Calcular la relación que existe entre el momento de una fuerza respecto de dos puntos O y O' , que están fijos respecto de un sistema de referencia.
- * 11. La expresión (6.21), ¿se verifica respecto de un punto O situado en un SRNT? Razonar la respuesta.
- 12. ¿Podrías citar otras palabras como «trabajo», tales que su significado en el lenguaje cotidiano sea diferente de su significado científico?
- 13. Razonar por qué, en general, el trabajo realizado por una fuerza que actúa sobre una partícula, depende de la trayectoria seguida por ésta al desplazarse desde un punto A a otro B .
- 14. ¿En qué condiciones el trabajo se puede expresar como «fuerza por espacio»?
- 15. ¿Realiza algún trabajo un coche que se mueve con velocidad uniforme, a lo largo de una autopista recta y horizontal? Razonar la respuesta.
- 16. Demostrar que el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento dinámica siempre es negativo. ¿Y el realizado por una fuerza de rozamiento estático?
- * 17. ¿Cómo hemos afirmado que la ΔE_c en (6.52) depende de la trayectoria, si en dicha expresión la segunda integral es definida? Justificar claramente la respuesta.
- 18. El trabajo realizado por una de las diferentes fuerzas que actúan sobre un cuerpo, ¿puede ser mayor que la variación de energía cinética del mismo? En caso afirmativo, citar algún ejemplo en que se verifique esto.

PROBLEMAS

1. Una partícula de masa m describe una circunferencia de radio R , su posición en cada instante de tiempo estádada por: $s = 1/2 a_0 t^2 - v_0 t$, donde a_0 y v_0 son constantes positivas. Calcular: a) su aceleración tangencial y normal en el instante t ; b) su aceleración angular en función del tiempo; y c) la fuerza que le produce este movimiento. ¿Se podría calcular su dirección con los datos dados?

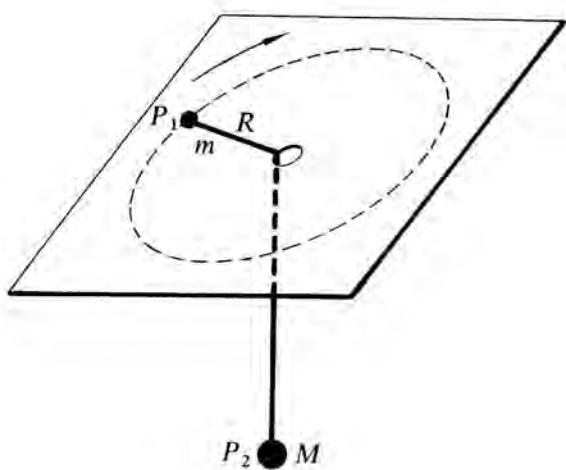


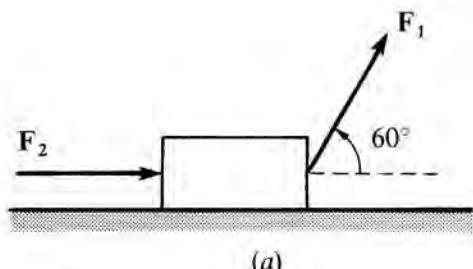
FIG. 6.16

- * 2. Una partícula P_1 de masa m describe una circunferencia de radio R sobre una superficie horizontal. Esta partícula se encuentra unida a un hilo inextensible y de masa despreciable, que pasa a través de un agujero situado en el centro de la circunferencia; el otro extremo del hilo se encuentra unido a otra partícula, P_2 , de masa M , como se indica en la Fig. 6.16. 1.º ¿Cuál es la velocidad de la partícula P_1 ? 2.º Momento angular de P_1 respecto de O . 3.º Si ahora se tira suavemente de la partícula P_2 hacia abajo una distancia y , ¿cuál es en este caso la velocidad de P_1 ?

Se supone que no existe rozamiento entre P_1 y la superficie horizontal. Por tracción suave o lenta se quiere indicar una tracción en la cual la componente radial del vector velocidad de la partícula es siempre despreciable.

- 3. Una partícula describe una circunferencia. a) Si se duplica su momento lineal, ¿cómo se ve afectado su momento angular? b) Si se duplica el radio de la circunferencia, sin que varíe la velocidad, ¿cómo es influenciado su momento angular? Se suponen conocidos los momentos lineal y angular en las condiciones iniciales.
- 4. Una partícula de 3 kg se mueve con una velocidad constante de 4 m s^{-1} a lo largo de una recta. a) ¿Cuál es su momento angular respecto de un punto situado a 5 m de la recta? b) ¿Se conserva I ? razonar la respuesta. ¿Qué consecuencias se extraen de los resultados anteriores?
- 5. Un caballo arrastra un carro a lo largo de un camino recto y horizontal. El caballo ejerce una fuerza constante de 80 N ; está unido al carro mediante una cuerda inextensible y de masa despreciable, que forma un ángulo de 20° respecto al camino. Si lo arrastra durante un kilómetro, ¿qué trabajo realiza? ¿Qué potencia desarrolla si tarda en recorrerlo una hora?
- 6. Un ascensor de $2 \times 10^3 \text{ kg}$ de masa desciende con una velocidad uniforme de $1,5 \text{ m s}^{-2}$. a) Valor en la tensión en el cable que lo sujetan. b) Trabajo realizado por esta fuerza sobre el ascensor al descender 15 m . c) Trabajo realizado por el peso del ascensor a lo largo de la misma distancia.

- * 7. Un cuerpo desliza a lo largo del eje x ; sobre él actúan dos fuerzas F_1 y F_2 , Fig. 6.17a. La fuerza F_1 es constante e igual a 10^3 N y F_2 varía con x de la forma in-



(a)

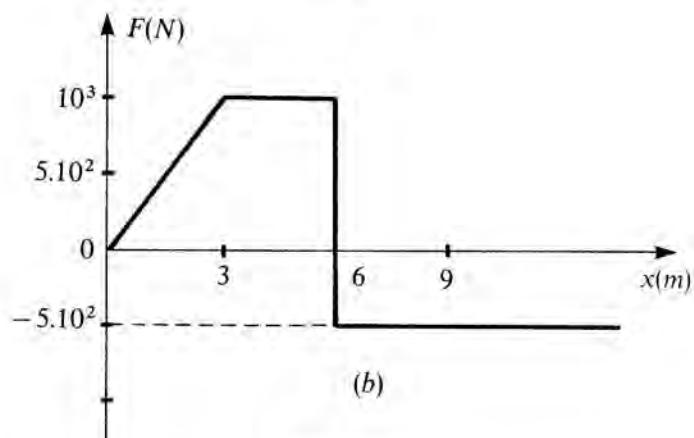


FIG. 6.17

dicada en la Fig. 6.17b. a) Calcular el trabajo realizado por F_1 . b) ¿Cuál es la velocidad del cuerpo cuando ha recorrido 10 m , si ha partido del reposo y su masa es de 400 kg ?

- * 8. Una partícula de masa m y carga eléctrica $+q$ penetra, con una velocidad v_0 , en una región del espacio en la que existe un campo magnético uniforme de inducción \mathbf{B} . La dirección inicial de movimiento de la carga es perpendicular a la de \mathbf{B} (Fig. 6.18). Si la fuerza que ejerce el campo sobre la carga viene dada por la expresión (5.18): $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$.

Calcular: a) Fuerza que actúa sobre la carga, indicando su dirección, sentido y módulo. b) Trabajo infinitesimal efectuado por la fuerza. Energía cinética de la partícula. c) Aceleración de la partícula. d) Movimiento que lleva la partícula en el seno de la región donde existe el campo magnético. Indicar las características del mismo.

Se supone despreciable la fuerza de atracción de la Tierra sobre la partícula, frente a la de origen magnético.

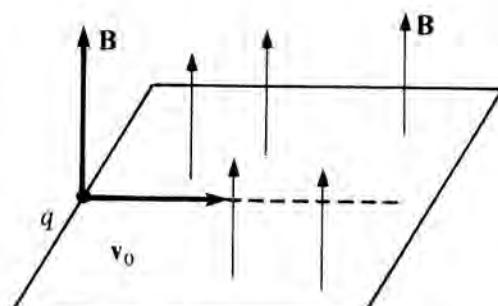


FIG. 6.18

- * 9. Sobre una partícula que se mueve a lo largo de una recta actúa una fuerza $\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$, para desplazamientos en el semieje positivo del eje de abcisas; y $\mathbf{F} = Cx^3\mathbf{i}$, para desplazamientos en el semieje negativo. Calcular el trabajo realizado por estas fuerzas, cuando la partícula se desplaza desde: a) $x=0$ hasta $x=+A$, b) $x=+A$ hasta $x=0$, c) $x=-A$ hasta $x=0$, d) $x=0$ hasta $x=-A$ y e) en un ciclo desde $x=-A$ hasta $x=+A$ y volver a la posición inicial. k y C son constantes.
- 10. Repetir el ejercicio 6.6 suponiendo que el resorte se comprime en vez de alargarse.
- *11. Un bloque de 10 kg de masa se encuentra sobre una superficie horizontal; entre ambos existe un cierto rozamiento. Sobre el bloque actúa una fuerza horizont-

tal constante, F , de 30 N. Se observa que partiendo del reposo y después de desplazarse 1 m, adquiere la velocidad de 2 ms^{-1} . a) Calcular la energía disipada por la fuerza de rozamiento. b) Si la fuerza constante deja de actuar después de haber recorrido el bloque 1 m, ¿qué espacio recorre éste antes de pararse?

- *12. Por integración directa de (6.59) y con las condiciones iniciales indicadas en el ejercicio 6.6, calcular la ecuación de movimiento $y(t)$ de la partícula suspendida del resorte. Este es un caso en el que se puede comprobar la simplificación que para la resolución de los problemas de Dinámica, representa el disponer de integrales primeras del movimiento. Comparar este método con el desarrollado en el ejercicio 6.1.

CAPITULO VII

DINAMICA DEL PUNTO TEOREMAS DE CONSERVACION (II)

Este capítulo representa por sus contenidos una continuación del anterior. Seguimos con el estudio de magnitudes que se conservan bajo ciertas condiciones. Su uso permite conocer la evolución temporal de una partícula, sin necesidad de resolver la ecuación fundamental de la Dinámica.

El núcleo de este capítulo lo constituye la energía y su conservación. Se trata de un concepto muy familiar en una época de tanto desarrollo tecnológico como la nuestra. Es una magnitud, e incluso una palabra, fundamental en la civilización industrial; cualquiera intuye su importancia como término científico, así como su significado en la vida cotidiana. El teorema de conservación de la energía es uno de los principios fundamentales de la naturaleza, junto con los de conservación del momento lineal, momento angular y de la carga eléctrica.

En el momento actual *la Física sólo reconoce dos formas de energía: la cinética y la potencial*. La expresión de la energía potencial es diferente dependiendo de la naturaleza de la correspondiente interacción física. El calor y la radiación son simplemente dos mecanismos de transferencia de energía. Antes de conocerse claramente los conceptos de interacción y la estructura atómica de la materia, la Física clasificaba la energía en dos grupos: energía mecánica, que correspondía a la energía cinética y la energía potencial gravitatoria; y no mecánica, que la dividía en calor, energía química, energía eléctrica, energía magnética, radiación, etc... Por ejemplo, en el momento actual «la energía química» es un término macroscópico que se utiliza para describir la energía asociada con las interacciones eléctricas en los átomos y moléculas, y que se manifiesta en los procesos químicos. La energía de la gasolina, otro ejemplo, debe interpretarse desde este punto de vista, como que la gasolina está compuesta por átomos; éstos por partículas cargadas negativamente (electrones) y núcleos cargados positivamente. La energía de este combustible es debida, en sus aspectos más básicos, a la energía cinética y energía potencial electromagnética de los electrones y núcleos.

Las primeras aportaciones al concepto que hoy conocemos como energía y su conservación, fueron realizadas en el s. XVII por Ch.Huygens, en el curso de sus estudios sobre colisiones o choques. En el s. XIX se fueron clarificando y ampliando estos conceptos, y se desarrollaron las leyes de la Termodinámica. La primera de las cuales es una generalización del teorema de conservación de la energía. Los nombres de J. R. Mayer, J. P. Joule, Lord Kelvin, R. Clausius y otros, están relacionados con estas aportaciones. La evolución de la interpretación científica de estos conceptos y leyes es una historia interesante íntimamente relacionada con la historia de la Revolución Industrial. En nuestros días el interés acerca de energía y la búsqueda de nuevas fuentes se ha acrecentado debido a la crisis del petróleo, desencadenada en 1973.

Comenzamos el capítulo con una breve introducción a la teoría clásica de campos (§ 7.1). Se trata de un modelo matemático del que hace uso la Física, para la interpretación de los fenómenos de interacción en la naturaleza. A pesar de su importancia y utilidad nos vemos obligados, por la abstracción que implica, a tratar este apartado a nivel elemental; aunque también es cierto que para los alumnos a que va dirigido este texto no es necesario más. Cuando en capítulos posteriores necesitemos ampliar o precisar algunas nociones ya lo haremos.

A continuación (§ 7.2) estudiamos las características de un tipo particular de fuerzas, las llamadas conservativas, para las cuales el trabajo que realizan no depende de la trayectoria, al contrario de lo que ocurre con una fuerza en general. En (§ 7.3) se introduce el concepto de energía potencial U , como forma de energía asociada a todo campo de fuerzas conservativas. El estudio del teorema de conservación de la energía ocupa el apartado siguiente (§ 7.4); este teorema lo generalizaremos en el capítulo X al tratar del primer principio de la Termodinámica. En (§ 7.5) estudiamos la relación entre una fuerza conservativa y la energía potencial de la que deriva, para el caso unidimensional; también tratamos las curvas de energía potencial, es decir a partir de conocer la forma

cómo varia la energía potencial en una cierta región del espacio, $U(x)$, deducir por inspección una serie de características del movimiento de una partícula situada en dicha región.

§ 7.1 INTRODUCCION A LA TEORIA DE CAMPOS. CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

En este apartado queremos dar una introducción elemental a la teoría de campos, se trata de una estructura matemática que permite interpretar de manera cómoda fenómenos de diferentes partes de la Física. La razón de su ubicación en este capítulo, reside en que incluye interpretaciones y definiciones que utilizaremos en los apartados siguientes, así como en los capítulos sucesivos de la obra.

En Física al tratar de describir la interacción entre partículas o cuerpos materiales se puede hacer de dos modos:

a) Mediante el concepto de *acción a distancia*, utilizado desde la época de Newton.

b) Mediante la *perturbación de las propiedades del medio* donde se encuentren las partículas. En esta descripción se supone que una de las partículas produce la perturbación, que se traduce en una acción sobre las demás, que podemos llamar «testigos» y que se encuentran en la región perturbada. Este concepto fue introducido por Faraday, que no llegó a formalizarlo matemáticamente.

Estas dos descripciones alternativas, son indistinguibles en situaciones estáticas, no presentando ninguna ventaja una sobre otra. Para concretar un poco, podemos pensar en la acción electrostática entre cargas eléctricas en reposo, (§ 5.3). En situaciones dinámicas (las partículas que interactúan se encuentran en movimiento) y si la velocidad de propagación de la interacción es finita, ambas descripciones no son equivalentes.

La acción a distancia implica, como su nombre indica, la interacción de una partícula sobre otra sin intervención directa del medio en el cual se encuentran; podríamos decir sin «intermediario». Esta descripción supone una propagación instantánea de las interacciones y puede dar lugar a interpretaciones erróneas. En situaciones dinámicas resulta ventajoso y más cómodo, tanto desde el punto de vista físico como matemático, la descripción mediante la introducción del concepto de campo, para caracterizar la perturbación de las propiedades del medio. Aunque seamos reiterativos, conviene resaltar que *la acción a distancia o directa presenta grandes ventajas en situaciones estáticas* (cargas eléctricas o masas gravitatorias en reposo), *pero tiene grandes desventajas cuando se trata de cargas o masas en movimiento rápido*.

Intuitivamente pensamos que los cuerpos materiales deben estar en contacto unos con otros, o con alguna entidad física intermedia, para que exista una fuerza (§ 5.5). El punto de vista del campo hace uso de esta interpretación y permite además utilizar toda una estructura matemática, perfectamente formalizada, que simplifica la interpretación de los fenómenos físicos.

Aunque a nivel de esta obra se van a considerar fundamentalmente situaciones estáticas o aquellas en que las cargas se muevan lentamente o sin aceleración, introduciremos la teoría de campos por su potencialidad, al permitirnos resolver de manera idéntica situaciones que a primera vista parecen muy diferentes. Realmente los alumnos ya han oido hablar de ciertos campos, recordemos: el campo eléctrico **E** y el campo de inducción magnética **B**. Ahora estamos en condiciones de realizar una introducción, aunque sea elemental, a la teoría general de campos. Los casos particulares ya estudiados se obtendrán como aplicaciones específicas de la misma.

Un «campo» es toda magnitud física que toma un valor diferente en cada punto del espacio y en cada instante de tiempo. La temperatura en los distintos lugares de la Tierra, por ejemplo, es un campo que representaremos mediante una cierta función: $T(x, y, z, t)$. Se trata en este caso de un **campo escalar**, debido a la naturaleza de la magnitud física característica (§ 1.1). Otros ejemplos de campos escalares serían el de presiones en la atmósfera: $p(x, y, z, t)$; densidades del aire o en los distintos puntos de un sólido no homogéneo: $\rho(x, y, z, t)$, etc. Cuando los campos no dependen del tiempo se dicen que son **estáticos** o **estacionarios**.

Los campos escalares se visualizan mediante las **superficies de nivel** o **equiescalares**, que son el lugar geométrico de los puntos del espacio para los cuales la función escalar toma el mismo valor, por ejemplo: $T(x, y, z) = cte$, Fig. 7.1a. Estas superficies se suelen representar a *intervalos constantes* del escalar, por ejemplo en la Fig. 7.1b, $\Delta T = 10^\circ C$.

Cuando estas superficies se cortan por un plano se convierten en las denominadas **curvas de nivel** o **equiescalares**; según la magnitud física que representan reciben un nombre particular: isotermas: $T(x, y) = cte$ (Fig. 7.1); isóbaras: $p(x, y) = cte$, estas curvas son de gran importancia en los mapas meteorológicos; curvas de nivel: $h(x, y) = cte$, que tan importantes son en los mapas topográficos, etc.

Existen otros campos que representan magnitudes de carácter vectorial, y que por lo tanto se denominan **campos vectoriales**: $\mathbf{A}(x, y, z, t)$. Entre éstos cabe citar el campo de velocidades en un fluido o en un sólido en rotación, Fig. 7.2, $\mathbf{v}(x, y, z, t)$; el campo eléctrico $\mathbf{E}(x, y, z, t)$; el gravitatorio $\mathbf{G}(x, y, z)$; el magnético $\mathbf{B}(x, y, z, t)$, etc. De manera análoga a los campos escalares, se dice que un **campo vectorial** es esta-

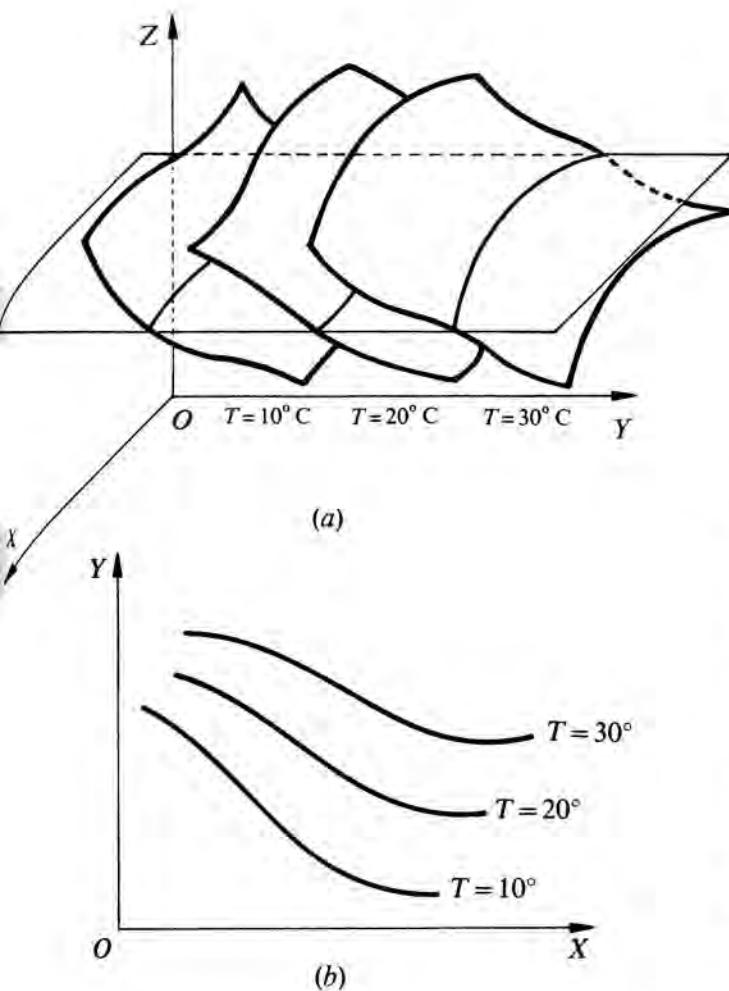


FIG. 7.1

cionario, cuando la magnitud característica del mismo no es función del tiempo, por ejemplo: el gravitatorio $\mathcal{G}(x, y, z)$, el electrostático $E(x, y, z)$, etc.

Entre los campos vectoriales son especialmente importantes los **campos de fuerzas**. Se dice que en una cierta región del espacio existe un campo de fuerzas, cuando en todo punto de la misma hay definida una fuerza, que toma un valor diferente para cada punto y en cada instante de tiempo. A partir de ahora, nos referiremos exclusivamente a los campos estáticos de fuerzas. Para poner de manifiesto la fuerza hay que colocar en el punto correspondiente un agente sensible —«testigo»— de naturaleza adecuada a la de la fuerza. Es decir, si las fuerzas son de naturaleza eléctrica, el agente sensible será una carga eléctrica, en reposo o en movimiento; si son magnéticas una carga eléctrica en movimiento; si son gravitatorias una partícula con una cierta masa, etc. Por lo tanto, en general, $F(x, y, z, t)$, donde mediante x queremos indicar que el valor de la fuerza depende no sólo del punto del espacio considerado, sino del valor del agente sensible o testigo utilizado para detectarla.

Concretemos este concepto para un caso específico: interacción electrostática entre cargas eléctricas en reposo (§ 5.3). En un punto del espacio existe una carga eléctrica q_1 Fig. 7.3; si se coloca en sus inmediaciones una carga q_2 , en un punto B , a una distancia r_{12} , actúa sobre ésta una fuerza dada por (5.15). Si en un punto C , situado a una distancia r_{13} , se coloca una carga $-q_3$, sobre ella actuará una fuerza:

$$\mathbf{F}_3 = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}^2} \mathbf{u}_{13}$$

y así para todos los puntos del espacio. Es evidente que el valor de la fuerza definida en cada punto de la región perturbada por q_1 depende: a) Del lugar del espacio donde se coloque el agente sensible que sirve para detectar el campo de fuerzas: r_{12} , r_{13} , etc.; es decir, las coordenadas (x, y, z) del punto considerado. b) Del valor numérico del agente sensible, del testigo, utilizado: q_2 , q_3 , etc.

Conviene resaltar que las fuerzas de rozamiento quedan fuera de esta interpretación, ya que no pueden formar un campo de fuerzas al no estar unívocamente definidas para cada punto de la región donde puedan existir; su valor depende del estado de movimiento del cuerpo y en el caso de que se encuentre en reposo, del valor de la fuerza aplicada (§ 5.7), y no son, por lo tanto, características de la posición.

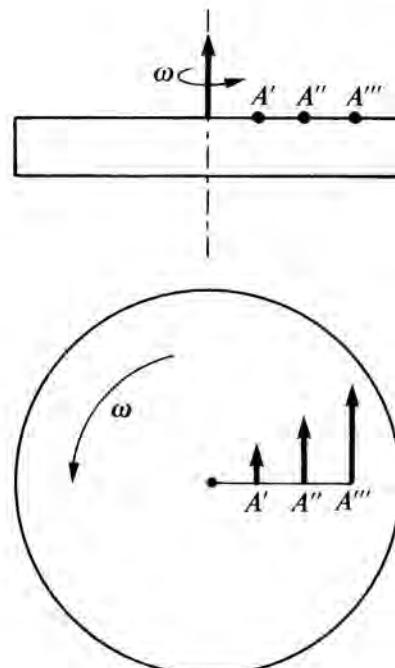


FIG. 7.2

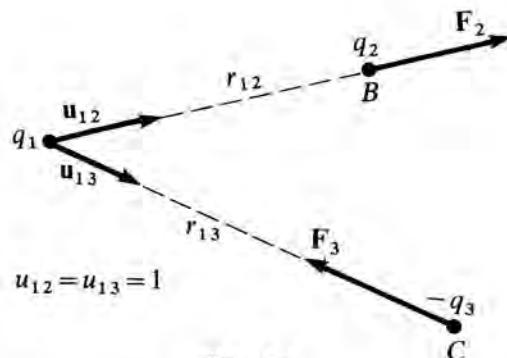


FIG. 7.3

Otros campos de fuerzas que tendremos ocasión de considerar a lo largo de esta obra son el gravitatorio (capítulo XI), el electrostático (XII), el magnetostático (XIV) y el electromagnético (XV).

Como hemos indicado, los campos de fuerzas dependen del agente sensible: $\mathbf{F}(x, y, z, \chi)$. Para salvar esta dificultad se suele definir un *campo de fuerzas por unidad de agente sensible*, que se denomina **intensidad del campo de fuerzas**:

$$\mathbf{I}(x, y, z) \equiv \frac{\mathbf{F}(x, y, z, \chi)}{\chi} \quad (7.1)$$

Para los campos gravitatorio y electrostático (§ 11.2) y (§ 12.2), respectivamente: $G = \mathbf{F}/m$ y $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$

$$\mathbf{I} \equiv \mathbf{g}(x, y, z) = G \frac{m}{r^2} \mathbf{u}_r, \quad \mathbf{I} \equiv \mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{u}_r$$

Hay que resaltar que cualquier vector característico de un campo de fuerzas, tiene dimensiones de fuerza [F], y su unidad en el SI es el Newton. Sin embargo, las dimensiones del vector intensidad dependen de la naturaleza del agente sensible, así:

$$[\mathbf{g}] = [F] [M]^{-1} = [L] [T]^{-2}$$

$$[E] = [F] [Q]^{-2} = [M] [L] [T]^{-3} [A]^{-1}$$

Nos podemos preguntar por qué de todas las formas posibles, para visualizar el comportamiento de los campos, se ha elegido como más adecuada la más abstracta: *los campos son simplemente unas funciones matemáticas de la posición y del tiempo*. De esta forma se puede dar una imagen del campo asociando vectores a muchos puntos del espacio, de tal manera que cada uno de ellos indique la intensidad, dirección y sentido en ese punto, Fig. 7.4.

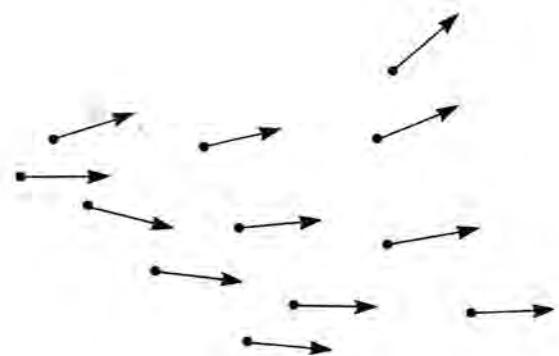


FIG. 7.4

Se podría también visualizar el comportamiento de los campos, y de hecho se hace en los cursos elementales, trazando unas líneas que en todo punto sean tangentes al vector campo definido en el mismo (Fig. 7.5). Estas líneas, denominadas **de campo**, indican el sentido del campo, mediante las flechitas colocadas en ellas. Hay que tener en cuenta que al hacer esto se pierde información acerca del módulo de los vectores, pero se puede tener una idea de la magnitud del campo, dibujando las líneas más separadas en las regiones en que es más débil y más juntas en las que es más intenso (Fig. 7.6).

También se suele adoptar el criterio de que *el número de líneas por unidad de área perpendicular a las mismas sea proporcional a la intensidad del campo*. Esto es, por supuesto, una aproximación que requiere, en general, que en ciertas regiones aparezcan nuevas líneas a fin de ajustar su número a la intensidad del campo, tal como se indica en la Fig. 7.5.

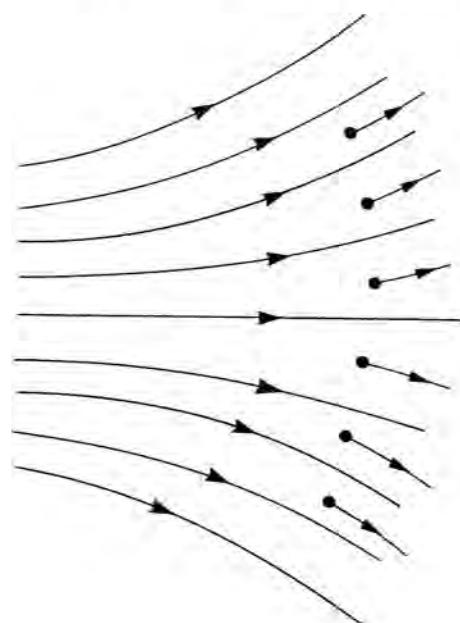


FIG. 7.5

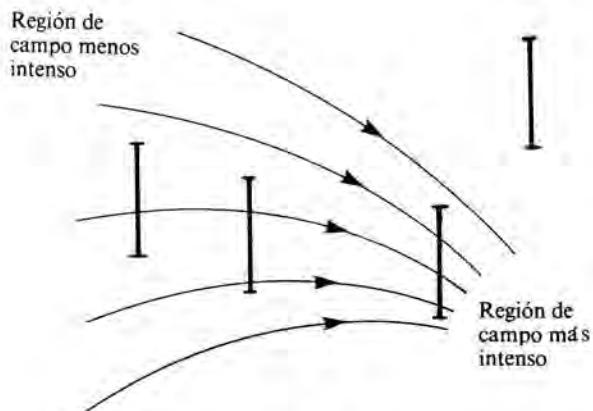


FIG. 7.6

Las líneas de campo son una forma bastante incompleta de describir un campo, ya que es difícil dar unas leyes, cuantitativamente correctas, directamente en término de dichas líneas. Además el concepto de línea de campo no tiene el principio fundamental de los campos más usuales: **el principio de superposición**. Aunque se conozca la forma de las líneas para un conjunto de cargas o de masas y también las de otro conjunto, en general resulta muy difícil representar las correspondientes cuando los dos conjuntos existen simultáneamente.

Se podría pensar también en representar los campos, por ejemplo, como el movimiento de las ruedas de un engranaje, como tensiones en un cierto material, etc.; sin embargo, el mejor método es utilizar el concepto abstracto de campo. Lo cual resulta en principio para el alumno, desafortunado, pero es necesario. De esa manera la Física ha interpretado los fenómenos que ha ido estudiando: hidrodinámicos, gravitacionales, electrodinámicos, etc.

Una forma más general y estricta de caracterizar a un campo vectorial $\mathbf{A}(x, y, z, t)$, es a través de su *divergencia* y *rotacional*, en todos los puntos del espacio donde se encuentra definido, y de su comportamiento en los límites. Esta caracterización constituye la llamada **formulación diferencial de las ecuaciones del campo**. La divergencia y el rotacional son dos operadores vectoriales diferenciales, cuya expresión y significado físico se encuentran completamente fuera de los objetivos de este texto.

Otra forma alternativa de caracterizar un campo, que se deduce de la anterior, es conociendo el *flujo* de \mathbf{A} a través de superficies y la *circulación* de \mathbf{A} a lo largo de líneas pequeñas, situadas tanto unas como otras alrededor de cada punto del campo. Esta caracterización constituye la llamada **formulación integral de las ecuaciones del campo**. Su interpretación física se encuentra al alcance de los alumnos a que va dirigida esta obra; sin embargo, su potencialidad es inferior a la diferencial. Estas nociones de flujo y circulación las introduciremos cuando las necesitemos en el estudio del campo gravitatorio (§ 11.3); posteriormente las aplicaremos al campo electrostático, magnetostático y electromagnético.

Esta caracterización de los campos vectoriales mediante su flujo y circulación es más general que la indicada anteriormente, cuando caracterizábamos un campo de fuerzas mediante el vector intensidad de campo (7.1). Aquellas definiciones operacionales –es decir, indicando la forma cómo se pueden medir o detectar– sólo se pueden establecer para los dos campos citados (gravitatorio y electro-

tático). En el caso de un campo magnético en el que la fuerza es el tipo indicado en (14.1), no es posible dar una definición operacional de \mathbf{B} de la forma (7.1). Por ello es más general y correcto definir al vector característico de un campo mediante su circulación y flujo. A lo largo de la obra tendremos ocasión de comprobar en problemas prácticos cómo esta caracterización del campo es más útil que las operaciones del tipo (7.1).

§ 7.2 FUERZAS CONSERVATIVAS

Según la definición general de trabajo (6.32), éste depende de la trayectoria a lo largo de la cual se desplaza la partícula sobre la que actúa la fuerza que lo realiza. La razón reside en que dicho concepto equivale al matemático de integral a lo largo de una curva, que no coincide con el de integral definida.

En muchos casos, de gran interés para la Física, las fuerzas tienen unas características tales que la integral (6.32) no depende de la trayectoria seguida por la partícula, sino sólo de los puntos final e inicial. Para concretar este concepto veamos algunos ejemplos.

1.º Trabajo realizado por las fuerzas de la gravedad en las proximidades de la superficie terrestre

Sea una partícula de masa m que se desplaza sometida a su peso, desde un punto $A(x_A, y_A)$ a otro $B(x_B, y_B)$, a lo largo de una trayectoria arbitraria c_1 (Fig. 7.7). Según (6.29) el trabajo infinitesimal realizado por dicha fuerza: $\mathbf{P} = -mg\mathbf{j}$, será:

$$d\mathcal{T} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -mg dy \quad (7.2)$$

¿cuáles son las componentes de $d\mathbf{r}$?

Si calculamos el trabajo finito realizado por el peso (fuerza característica de este campo), para trasladar la partícula m desde A hasta B , a lo largo de c_1 tendremos (6.32):

$$\mathcal{T}_{A \rightarrow B, c_1} = -mg \int_{A \rightarrow B, c_1} dy \quad (7.3)$$

Si se hubiese elegido otra trayectoria, por ejemplo, c_2 , el resultado a que hubiésemos llegado sería el mismo, ¿por qué? Por lo tanto:

$$\mathcal{T}_{A \rightarrow B, c_1} = \mathcal{T}_{A \rightarrow B, c_2} = -mg \int_{A \rightarrow B, c_1} dy = mg(y_B - y_A) \quad (7.4)$$

esto es debido a que la fuerza que produce el trabajo es constante, como le ocurre al peso de un cuerpo en las proximidades de la Tierra. Luego en esta caso par-

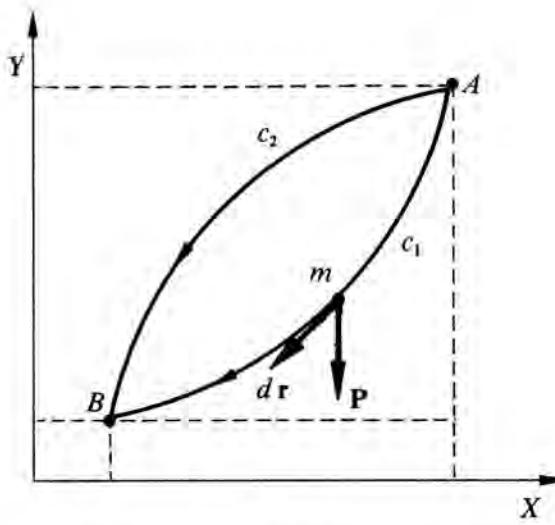


FIG. 7.7

ticular, sea cual fuere la trayectoria seguida, el valor del trabajo es el mismo; por consiguiente la integral (7.3) es definida en vez de curvilínea.

Aplicando las propiedades de las integrales definidas, se verifica:

$$\mathcal{F}_{B \rightarrow A, c_1} = -\mathcal{F}_{A \rightarrow B, c_1} = mg \int_{y_A}^{y_B} dy = mg(y_B - y_A) \quad (7.5)$$

Físicamente equivale a calcular el trabajo realizado por una fuerza aplicada a la partícula, que en cada punto sea igual y de sentido contrario a la debida al campo. De esa forma recorre la trayectoria en sentido contrario al anterior y sin estar acelerada.

2.º Trabajo realizado por las fuerzas debidas a un campo electrostático

Supongamos una carga eléctrica en reposo q_1 , que perturba las propiedades del espacio que le rodea, es decir, que crea un campo de fuerzas. Al colocar en dicha región una segunda carga q_2 aparecerá sobre ella una fuerza dada por la ley de Coulomb (5.15)

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (7.6)$$

Queremos calcular el trabajo realizado por esta fuerza debida al campo, para trasladar q_2 desde $A(x_A, y_A)$ hasta $B(x_B, y_B)$ (Fig. 7.8a), a lo largo de c_1 . El trabajo infinitesimal realizado por la fuerza electrostática valdrá:

$$d\mathcal{F} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{r} \quad (7.7)$$

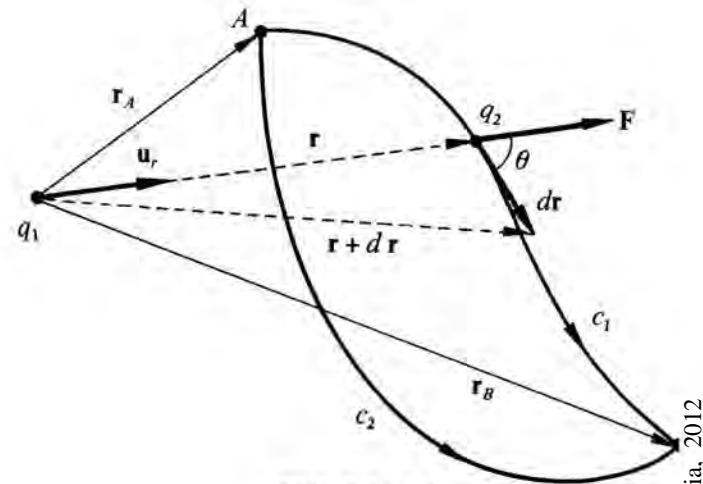


FIG. 7.8 (a)

Calculemos $\mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{r}$; para ello dibujamos ampliada la zona de interés, (Fig. 7.8b). En esta figura se han exagerado, deliberadamente, los diferentes vectores diferenciales con objeto de clarificarla y que se pueda seguir el cálculo que realizamos:

$$d\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_r = |d\mathbf{r}| \cos \theta = PN = MP' = d|\mathbf{r}| = dr \quad (7.8)$$

obsérvase que PN y MP' son infinitésimos equivalentes, ¿por qué?

Por lo tanto, sustituyendo (7.8) en (7.7):

$$d\mathcal{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} dr \quad (7.9)$$

El trabajo finito valdrá:

$$\mathcal{F}_{A \rightarrow B, c_1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{A \rightarrow B, c_1} dr / r^2 \quad (7.10)$$

En este caso no se trata de una fuerza constante como en el anterior, sin embargo, debido a la expresión de la misma el trabajo tampoco depende de la trayectoria seguida, ya que la función del integrando depende de una única variable. Por lo tanto:

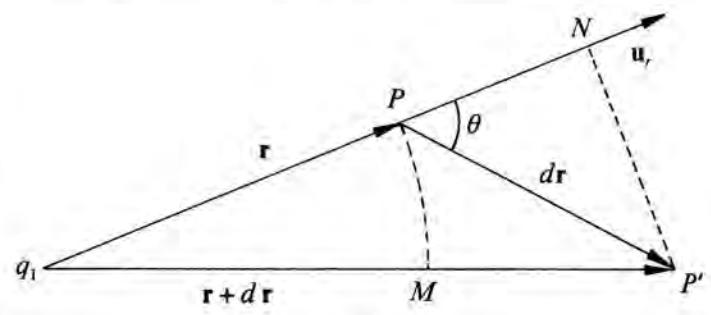


FIG. 7.8 (b)

$$\mathcal{F}_{A \rightarrow B, c_1} = \mathcal{F}_{A \rightarrow B, c_2} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \int_{r_A}^B dr / r^2 = -\frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] \quad (7.11)$$

También se verifica como en el caso anterior:

$$\mathcal{F}_{B \rightarrow A, c_1} = -\mathcal{F}_{A \rightarrow B, c_1} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] \quad (7.12)$$

¿Cómo se modifican los resultados si las cargas son de distinto signo?

3.^o Trabajo realizado por las fuerzas debidas a un campo de interacción gravitatoria

Teniendo en cuenta que la ley de Newton (5.9), que rige la interacción gravitatoria entre dos cuerpos de masa m_1 y m_2 , es formalmente análoga a la de Coulomb:

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (7.13)$$

cabe esperar que al calcular el trabajo realizado por la misma, al desplazar una partícula de masa m_2 , desde A hasta B , a lo largo de c_1 (Fig. 7.9), se obtenga una expresión análoga a (7.11)

$$\mathcal{F}_{A \rightarrow B, c_1} = \mathcal{F}_{A \rightarrow B, c_2} = G m_1 m_2 \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] \quad (7.14)$$

y también:

$$\mathcal{F}_{B \rightarrow A, c_1} = \mathcal{F}_{A \rightarrow B, c_1} = -G m_1 m_2 \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] \quad (7.15)$$

4.^o Trabajo realizado por las fuerzas elásticas de un resorte

Sea un resorte colocado de forma arbitraria respecto de un cierto sistema de referencia, Fig. 7.10. En su extremo se encuentra una partícula de masa m . Calculemos el trabajo realizado por las fuerzas elásticas del resorte que actúan sobre la partícula, cuando ésta se desplaza desde el punto a hasta el b a lo largo de c_1 .

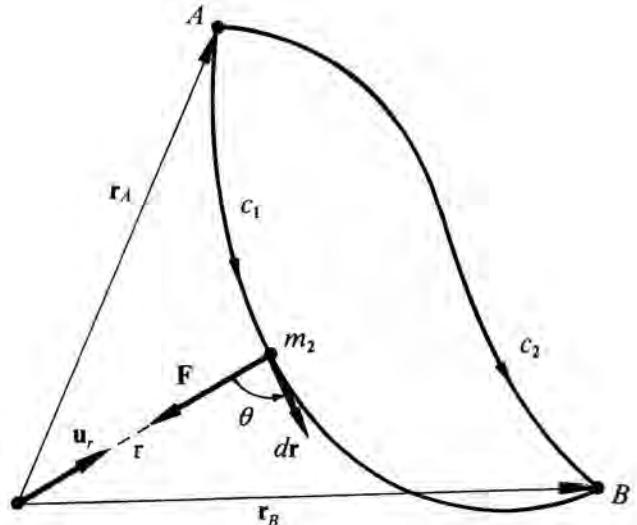


FIG. 7.9

La fuerza que actúa sobre la partícula es (5.20):

$$\mathbf{F} = -k(r - r_0)\mathbf{u}_r \quad (7.16)$$

El trabajo infinitesimal valdrá:

$$d\mathcal{F} = -k(r - r_0)\mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{r} \quad (7.17)$$

procediendo de forma análoga a los casos anteriores:

$$d\mathcal{F} = -k(r - r_0) |d\mathbf{r}| \cos \theta = -k(r - r_0) dr \quad (7.18)$$

El trabajo finito será:

$$\mathcal{F}_{A \rightarrow B, c_1} = -k \int_{A \rightarrow B, c_1} (r - r_0) dr \quad (7.19)$$

Para esta fuerza, que tampoco es constante, el trabajo no depende de la trayectoria seguida, ¿por qué? Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{A \rightarrow B, c_1} &= \mathcal{F}_{A \rightarrow B, c_1} = \\ &= -k \int_{r_A}^{r_B} (r - r_0) dr = -1/2 k(r_B - r_0)^2 + 1/2 k(r_A - r_0)^2 \end{aligned} \quad (7.20)$$

También se verifica:

$$\mathcal{F}_{B \rightarrow A, c_1} = -\mathcal{F}_{A \rightarrow B, c_1} = 1/2 k(r_B - r_0)^2 - 1/2 k(r_A - r_0)^2 \quad (7.21)$$

En el caso particular que la posición final (B) sea la de equilibrio del resorte: $r_B = r_0$, (7.20) y (7.21) se convierten, respectivamente, en:

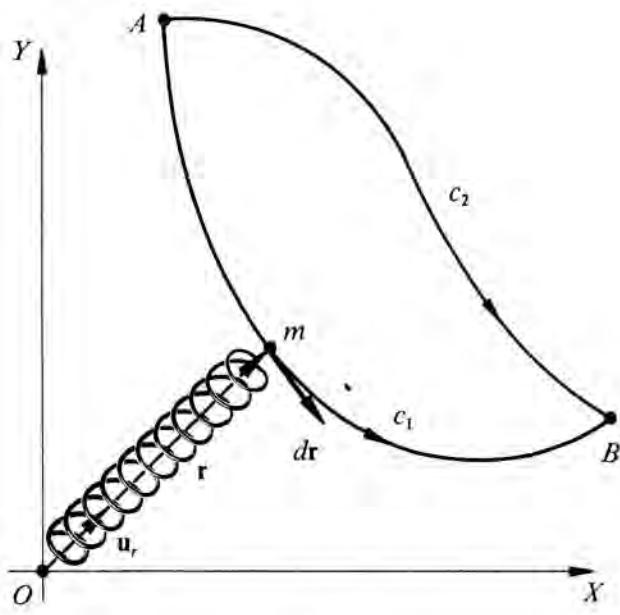


FIG. 7.10

$$\mathcal{T}_{A \rightarrow \text{equilibrio}} = \frac{1}{2}k(r_A - r_0)^2, \quad \mathcal{T}_{\text{equilibrio} \rightarrow A} = -\frac{1}{2}k(r_A - r_0)^2 \quad (7.22)$$

Si consideramos que el resorte se encuentra sobre el eje OX , (7.16) y (7.22) toman la forma siguiente:

$$\mathbf{F} = -k(x - x_0)\mathbf{i},$$

$$\mathcal{T}_{A \rightarrow \text{equilibrio}} = \frac{1}{2}k(x_A - x_0)^2, \quad \mathcal{T}_{\text{equilibrio} \rightarrow A} = -\frac{1}{2}k(x_A - x_0)^2$$

o también, para seguir con una nomenclatura uniforme:

$$\mathcal{T}_{A \rightarrow B} = \frac{1}{2}k(x_A - x_B)^2, \quad \mathcal{T}_{B \rightarrow A} = -\frac{1}{2}k(x_A - x_B)^2 \quad (7.23)$$

Llamamos la atención, una vez más, sobre los distintos significados con que tomamos la variable x en las cuestiones relativas a resortes. Unas veces representa su longitud total en un instante determinado: (5.21) y (7.23); en otras, deformaciones a partir de la posición de equilibrio: (6.4). Creemos que no debe existir dificultad alguna, puesto que se trata de comprender el significado de cada expresión y no simplemente de aprenderse unas expresiones de memoria (!). Es conveniente que en cada ocasión determinemos previamente el significado que vayamos a asignarle.

Antes de generalizar los resultados obtenidos vamos a resolver un ejercicio para fijar las ideas expuestas.

* Ejercicio 7.1

Una partícula se encuentra sometida a una fuerza: $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$. Calcular el trabajo realizado por la misma, al desplazar la partícula desde el punto de coordenadas $(0,0)$ al $(2,4)$, a lo largo de cada uno de los siguientes caminos: 1.º Según el eje OX desde $(0,0)$ a $(2,0)$ y paralelamente al OY desde $(2,0)$ al $(2,4)$. 2.º A lo largo del eje OY desde $(0,0)$ a $(0,2)$ y paralelamente al OX hasta el $(2,4)$. 3.º A lo largo de la recta que une ambos puntos. 4.º A lo largo de la parábola $y = x^2$.

Solución:

Se trata de calcular el trabajo realizado por una fuerza variable, para desplazar una partícula desde un punto $A(0,0)$ a otro $B(2,4)$, siguiendo diferentes trayectorias. El ejercicio es análogo al 6.4 resuelto en el capítulo anterior

1.º La trayectoria (a) se puede descomponer en dos partes: AD y DB . La primera tiene por ecuación: $y=0$, y la segunda, $x=2$ (Fig. 7.11). Teniendo en cuenta la expresión general del trabajo (6.32), podemos escribir:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{A \rightarrow B, a} &= \int_{A \rightarrow D, a} (2xy \, dx + x^2 \, dy) + \int_{D \rightarrow B, a} (2xy \, dx + x^2 \, dy) \\ &+ \int_{D \rightarrow B, a} (2xy \, dx + x^2 \, dy) = \int_0^4 4 \, dy = 16 \text{ J} \end{aligned}$$

2.º A lo largo de la trayectoria (b) se obtiene de forma análoga:

$$\mathcal{T}_{A \rightarrow B, b} = \mathcal{T}_{A \rightarrow C, b} + \mathcal{T}_{C \rightarrow D, b}$$

Las ecuaciones de ambos tramos de trayectoria son, respectivamente, $x=0$ e $y=4$, por lo tanto:

$$\mathcal{T}_{A \rightarrow B, b} = \int_0^2 8x \, dx = 16 \text{ J}$$

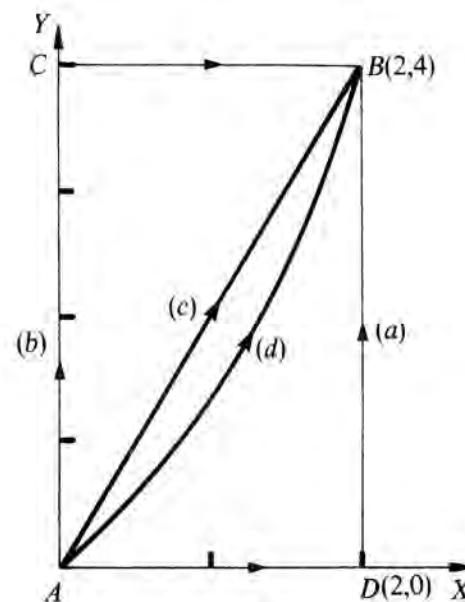


FIG. 7.11

3.^o La ecuación de la recta AB es: $2x-y=0$. El trabajo a lo largo de esta tercera trayectoria (c) vale:

$$\mathcal{F}_{A \rightarrow B, c} = \int_0^2 2x \cdot 2dx + \int_0^2 x^2 \cdot 2dx = 16 \text{ J}$$

4.^o A lo largo del arco de parábola AB , el trabajo -como la ecuación de ésta es $y=x^2$ - vale:

$$\mathcal{F}_{A \rightarrow B, d} = \int_0^2 2x \cdot x^2 dx + \int_0^2 x^2 \cdot 2dx = 16 \text{ J}$$

Luego, se trata de una fuerza que tiene las mismas características que las consideradas anteriormente: *el trabajo realizado por la misma no depende de la trayectoria, sino tan solo del punto inicial y final.*

No debemos pensar que estamos refutando lo que afirmamos al hablar de trabajo realizado por una fuerza. En general, el trabajo depende de la trayectoria, pero para ciertos tipos particulares de fuerzas -al aplicar su definición general- resulta ser independiente de la trayectoria seguida. Precisamente para algunos de los fenómenos más importantes de la Física, hemos encontrado que el trabajo realizado por las fuerzas responsables de los mismos es independiente de la trayectoria; pero esto no nos permite extrapolrar este resultado a todos los fenómenos conocidos.

Después de haber estudiado diferentes ejemplos en los que el trabajo es independiente de la trayectoria, la pregunta que parece surgir de modo natural es: ¿que condición debe cumplir un campo de fuerzas para presentar este propiedad? La respuesta en el caso general se encuentra fuera de los objetivos de este libro, ya que es estrictamente matemática, y se estudia en el análisis matemático superior. Sin embargo, si que podemos apuntar algunas consideraciones desde el punto de vista físico, cuya comprensión se encuentra a nuestro alcance.

Para los *campos de fuerzas unidimensionales, si la fuerza no depende explícitamente del tiempo o de la velocidad, el trabajo es independiente de la trayectoria*. Se trata, por ejemplo, de fuerzas constantes o de la forma $F(x)$. Hay que hacer notar que no es suficiente que la fuerza dependa únicamente de la posición, para que el trabajo sea independiente de la trayectoria. Por ejemplo: $F = kxj$ es una fuerza que no presenta aquella propiedad. *La condición es que dependa sólo de la posición y que actúe a lo largo de la línea definida por dicha coordenada.*

En los casos bi y tridimensionales el argumento es ligeramente más complicado, sólo diremos que el hecho de no depender la fuerza ni de v , ni de t , es en este caso, condición necesaria, pero no suficiente, para que el trabajo sea independiente de la trayectoria. Como estos casos no se nos van a presentar, dejamos el problema abierto para cursos superiores.

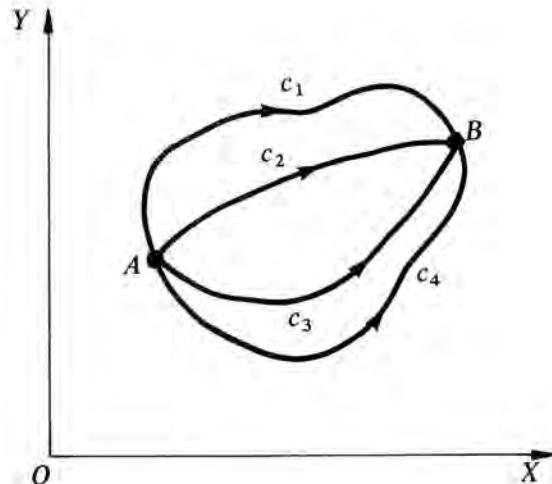


FIG. 7.12

Por las razones que posteriormente indicaremos (7.4) a estas fuerzas, cuyo *trabajo es independiente de la trayectoria*, se les denomina **fuerzas conservativas**. No debemos pensar como ya indicamos, que todos los campos de fuerzas o fuerzas importantes de la Física son conservativos. Los dos casos más conocidos para el alumno, de fuerzas o campos no conservativos son las fuerzas de rozamiento y las fuerzas magnéticas, como tendremos ocasión de comprobar.

Hemos llegado a la conclusión que para las fuerzas conservativas el trabajo no depende de la trayectoria, por lo tanto, podremos escribir (Fig. 7.12):

$$\int_{A \rightarrow B, c_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A \rightarrow B, c_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A \rightarrow B, c_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \dots = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.24)$$

Al presentar el trabajo, en el último símbolo, mediante una integral definida, queremos indicar que es independiente de la trayectoria, y que sólo depende de los puntos inicial y final.

Para *estas clases de fuerzas* se puede, por lo tanto, escribir:

$$\int_{A \rightarrow B, c_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A \rightarrow B, c_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.25)$$

teniendo en cuenta las propiedades de las integrales definidas:

$$\int_{B \rightarrow A, c_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.26)$$

luego de (7.25) y (7.26):

$$\int_{A \rightarrow B, c_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{B \rightarrow A, c_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (7.27)$$

que nos indica otra forma de definir a las fuerzas conservativas: « **El trabajo realizado por una fuerza conservativa a lo largo de una trayectoria cerrada es nulo** ». Por trayectoria cerrada queremos indicar que la partícula, sobre la que actúa dicha fuerza, realiza un desplazamiento partiendo de un punto y volviendo a él. Esta definición se expresa matemáticamente:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (7.28)$$

que nos indica la *condición necesaria para que una fuerza sea conservativa*. ¿Cómo demostrarías que (7.28) es también la condición suficiente para que \mathbf{F} sea conservativa?

La condición necesaria y suficiente para que un campo de fuerzas sea conservativo, también se puede expresar en función del vector intensidad del campo (7.1). En efecto, si en (7.28) dividimos los dos miembros por la unidad de agente sensible:

$$\oint \mathbf{I} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (7.29)$$

Esta condición, como veremos al estudiar el campo magnetostático, es más general que la anterior. Las fuerzas magnéticas (14.1) verifican (7.28), ¿por qué?; sin embargo \mathbf{B} no es un campo conservativo, ya que no cumple (7.29). Estas cuestiones están relacionadas con la caracterización más general de los campos, mediante su flujo y circulación (§ 7.1). En capítulos posteriores volveremos a este punto.

En el caso de las fuerzas de rozamiento, aunque estrictamente no constituyan un campo de fuerzas como indicamos, el trabajo a lo largo de una trayectoria cerrada tampoco es nulo. Supongamos un bloque que se encuentra sobre una superficie horizontal y se desplaza desde una posición x_1 hasta otra x_2 . El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento dinámica –sobre el bloque pueden actuar otras fuerzas o no– vale:

$$\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2} = -F_r(x_2 - x_1) \quad (7.30)$$

Si ahora se considera que se desplaza desde x_2 a x_1 , el trabajo de dicha fuerza es:

$$\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1} = F_r(x_1 - x_2) \quad (7.31)$$

luego:

$$\oint \mathbf{F}_r \cdot d\mathbf{r} = -2F_r|x_2 - x_1| \neq 0$$

§ 7.3 CONCEPTO DE ENERGIA POTENCIAL Y DE POTENCIAL

Las fuerzas que acabamos de considerar, y en general casi todas las fuerzas, forman un campo (§ 7.1). Por ello se puede hablar de **campos de fuerzas conservativas** (7.28) o de **campos conservativos** (7.29).

Si consideramos las expresiones deducidas en el apartado anterior (7.4), (7.11), (7.14) y (7.20), se observa que en todas ellas, el trabajo realizado por las fuerzas conservativas del campo entre dos puntos A y B , no depende de la trayectoria seguida, sino sólo de las coordenadas de los puntos final (B) e inicial (A):

- 1.^a $\mathcal{T}_{A \rightarrow B} = -mg(y_B - y_A)$
- 2.^a $\mathcal{T}_{A \rightarrow B} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$
- 3.^a $\mathcal{T}_{A \rightarrow B} = -Gm_1 m_2 \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$
- 4.^a $\mathcal{T}_{A \rightarrow B} = -1/2k[(r_B - r_0)^2 - (r_B - r_0)^2]$

Estos resultados que hemos obtenido para casos particulares, se pueden generalizar: « **El trabajo realizado por las fuerzas de un campo conservativo al actuar sobre una partícula que se desplaza entre dos puntos A y B , se puede expresar como menos la diferencia entre los valores que toma una cierta función $U_{(x, y, z)}$ –cuya expresión específica depende de la naturaleza del campo de que se trate– en los puntos final (B) e inicial (A).**

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{A \rightarrow B} &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_A^B dU = \\ &= -[U_B - U_A] = -[U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A)] = -\Delta U \end{aligned} \quad (7.33)$$

Esta función U , característica de todo campo de fuerzas conservativas, se denomina **energía potencial** y la expresión (7.33) constituye la definición de diferencia de energía potencial entre dos puntos de un campo conservativo.

Fijémonos que si $\mathcal{T} > 0$, $\Delta U < 0$, la energía potencial disminuye; mientras que aumenta, $\Delta U > 0$ si el trabajo de las fuerzas conservativas es negativo. Estas consideraciones las puede concretar el alumno con relación al ejercicio 6.5. En el SI sus dimensiones son las de trabajo y por lo tanto se medirá en **julios**.

A partir de (7.33): $dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, se puede ver que las líneas de fuerza de un campo son normales a las superficies equipotenciales, $U = \text{cte}$. En efecto, si $d\mathbf{r}$ se

toma sobre una de dichas superficies: $dU = 0$, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$, por lo tanto son vectores perpendiculares.

El concepto anterior es realmente matemático, que se utiliza en conexión con las integrales curvilíneas, cuando el valor de éstas depende exclusivamente de las coordenadas de los puntos inicial y final, y no de la curva a lo largo de la cual se calculen. En matemáticas cuando ésto ocurre se dice que la función a integrar admite una **diferencial exacta o un factor integrante**, que es lo mismo que en Física –sin una interpretación tan abstracta– llamamos **energía potencial**. Este concepto es de una importancia extraordinaria, ya que como indicamos en la introducción a este tema, en el momento actual la Física sólo reconoce dos formas de energía: la cinética y la potencial. Ambas representan la capacidad de un cuerpo, sobre el que actúan fuerzas, para realizar un trabajo.

Evidentemente la expresión concreta de la energía potencial depende la naturaleza del campo de fuerzas conservativas de que se trate. Así para los cuatro ejemplos anteriores (7.32):

$$U(x, y, z) = mgy$$

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \\ U(x, y, z) &= \frac{-Gm_1 m_2}{r} = \frac{-Gm_1 m_2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (7.34)$$

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= 1/2 k(r - r_0) = \\ &= 1/2 k[(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{1/2}] \end{aligned}$$

para el caso particular de que el resorte se encuentre a lo largo del eje OX (7.23), ésta última toma la forma simplificada:

$$U(x, y, z) = 1/2 kx^2 \quad (7.35)$$

¿por qué?

A esta función $U(x, y, z)$ se le llama **energía potencial asociada a un determinado campo conservativo**. Se trata de una *energía que es característica de este tipo de campos*; para un campo conservativo dado es *función exclusiva de la posición del cuerpo en el interior del mismo*.

Un error muy común en los alumnos suele ser identificar la energía potencial con mgh . El error proviene de los cursos de iniciación a la Física, cuando se les dice que la energía potencial depende de la posición de un cuerpo, y a continuación se les da la

expresión anterior. Por supuesto, dicha definición no es incorrecta, aunque si imprecisa y corresponde sólo al caso de un cuerpo en las proximidades de la superficie terrestre (7.4). La definición correcta es (7.33) y su expresión depende de la forma concreta que tengan las fuerzas conservativas de que se trate (7.34).

La expresión (7.33), define en realidad diferencias de energía potencial entre dos puntos de un campo de fuerzas conservativas. Si se quiere adjudicar a una partícula que se encuentre en cualquier punto del mismo, un valor de U hay que tomar –de forma arbitraria– la correspondiente a un punto como origen o referencia. Esta referencia o cero de energía potencial depende en cada caso concreto de la naturaleza del campo (Ejercicio 7.2).

En general, pues:

$$U(x, y, z) - U_{\text{origen}} = - \int_{\text{origen}}^{P(x, y, z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.36)$$

Normalmente, $U_{\text{origen}} \equiv 0$:

$$U(x, y, z) = - \int_{\text{origen}}^{P(x, y, z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P(x, y, z)}^{\text{origen}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.37)$$

que es la *definición correspondiente a la energía potencial en un punto de un campo de fuerzas conservativas*.

Ejercicio 7.2

Con objeto de clarificar las ideas que acabamos de exponer, calcular la energía potencial en un punto P , para cada uno de los cuatro campos conservativos estudiados. Elegir adecuadamente, en cada caso el punto que se toma como origen de energías. Resolver el ejercicio aplicando directamente la definición de trabajo (6.32) y (7.36). Interpretar físicamente los resultados obtenidos.

Solución:

- 1.º El origen se toma en la superficie de la Tierra («el suelo» como se dice en lenguaje coloquial). Calculemos el trabajo realizado por las fuerzas del campo gravitatorio terrestre, para desplazar una partícula de masa m , desde un punto P hasta el punto origen (el suelo), Fig. 7.13. A partir de (6.32) o de (7.32) obtenemos:

$$\mathcal{T}_{P \rightarrow \text{origen}} = -mg(y_{\text{suelo}} - y_P)$$

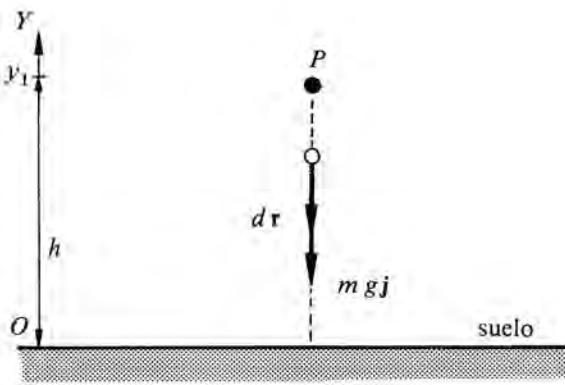


FIG. 7.13

según (7.36):

$$U_{origen} - U_p(x, y, z) = mg(y_{suelo} - y_p)$$

como: $y_{suelo} \equiv 0 \rightarrow U_{origen} \equiv U_{suelo} = 0$. Por lo tanto:

$$U(y_1) = mgy_1 = mgh \quad (7.38)$$

donde h representa la altura a que se encuentra la partícula sobre el suelo.

El trabajo que hemos calculado es positivo, ya que es el realizado por las fuerzas del campo. Se realiza a expensas de la energía potencial que poseía la partícula, como consecuencia de su interacción con la Tierra, cuando se encontraba a la altura h sobre el suelo.

La partícula no tiende a desplazarse espontáneamente desde el suelo al punto P . Para que este desplazamiento sea posible, hay que aplicarle una fuerza que por lo menos sea igual, en cada punto de la trayectoria, a la gravitatoria. Suponiendo un desplazamiento formado por infinitos estados de equilibrio (transformación o evolución reversible), el trabajo realizado por la fuerza aplicada será positivo y quedará almacenado en forma de energía potencial, cuando la partícula alcance la altura h .

2º El origen para este tipo de campos se toma, en general, en el punto del infinito (∞).

a) Supongamos que las cargas son del mismo signo ($q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$; calculemos el trabajo necesario para desplazar q_2 desde un punto P (Fig. 7.14a) hasta el punto origen (el infinito):

$$\mathcal{F}_{P \rightarrow \text{origen}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} [1/r_{12} - 1/r_\infty]$$

según (7.36):

$$U_{origen} - U_p(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} [1/r_{12} - 1/r_\infty]$$

como: $1/r_\infty = 0 \rightarrow U_{origen} \equiv U(\infty) = 0$. Por lo tanto:

$$U(r_{12}) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \quad (7.39)$$

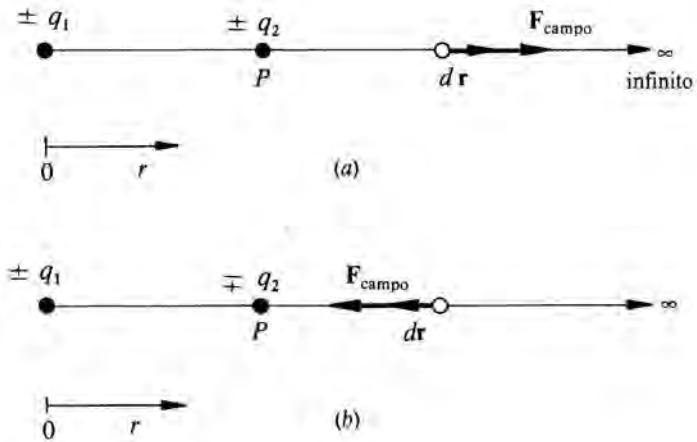


FIG. 7.14

Luego la energía potencial del sistema formado por las cargas q_1 y q_2 , cuando están situadas a la distancia r_{12} , representa el trabajo realizado por la fuerza del campo (creado por q_1) para desplazar a q_2 desde la posición inicial (r_{12}) hasta el infinito (∞). ¿Por qué hemos elegido desde P al ∞ y no a la inversa? ¿Qué fuerza realizaría en este caso el trabajo?

El cero de energía potencial tiene un significado físico claro: en el infinito, la carga q_2 se encuentra tan alejada de q_1 que no existe interacción entre ellas, siendo por lo tanto nula su energía potencial. Desde el punto de vista de la teoría de campos, la energía de potencial representa la energía de interacción entre el «testigo» (q_2) o el mismo campo (E), como tendremos ocasión de comprobar al estudiar la Electrostática.

b) Si las cargas son de signo contrario ($q_1 \geq 0$, $q_2 \leq 0$), tendremos que calcular el trabajo realizado por la fuerza del campo para desplazar q_2 desde el punto origen (∞) al punto P , Fig. 7.14b.

$$\mathcal{F}_{\text{origen} \rightarrow P} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} [1/r_\infty - 1/r_{12}] \quad (7.40)$$

por lo tanto:

$$U(r_{12}) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = - \frac{|q_1| |q_2|}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \quad (7.41)$$

En este caso, la energía potencial de las dos cargas es negativa. Luego, podemos considerar que (7.39) es válida sea cual fuere el signo de las cargas, con tal de introducir el signo de q_1 y q_2 en cada aplicación concreta.

En este caso se pueden hacer las mismas interpretaciones que en el anterior.

Otra interpretación de la energía potencial electrostática es que representa la energía necesaria para «formar» la distribución. Es decir, la energía almacenada por las cargas debida a la posición relativa que ocupan, como consecuencia del trabajo realizado para traerlas desde el infinito (donde no interactúan) hasta la posición final que ocupan (distancia relativa r_{12}). En efecto: para «traer» a q_1 desde el infinito al lugar que ocupa en la distribución, no hay que realizar ningún trabajo, ya que no interactúa con carga alguna, ¿por qué?; para traer a q_2 , desde el infinito hasta una distancia r_{12}

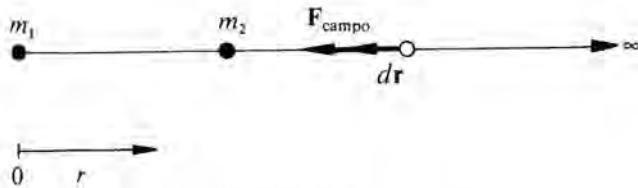


FIG. 7.15

de q_1 , hay que realizar un trabajo (7.40), como consecuencia de su interacción con q_1 . ¿Cómo argumentarías en el caso de cargas de igual signo?

- 3.^o Es un caso análogo al anterior. Los resultados que se obtienen, Fig. 7.15, son:

$$\mathcal{F}_{\text{origen} \rightarrow P} = -G m_1 m_2 [1/r_\infty - 1/r_{12}] > 0$$

$$U(r_{12}) = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \quad (7.42)$$

La energía potencial de interacción gravitatoria *siempre* es negativa.

- 4.^o El origen se toma en el punto correspondiente a deformación nula del resorte. Ciñéndonos al caso particular de un resorte horizontal:

$$\mathcal{F}_{P \rightarrow \text{origen}} = 1/2 k x_P^2$$

donde x_P representa la deformación correspondiente al punto P (tanto si el muelle se encuentra alargado, como si está comprimido).

$$U(x_P) = 1/2 k x_P^2 \quad (7.43)$$

El trabajo se realiza a expensas de la energía potencial almacenada en el resorte.

Los resultados obtenidos para estos casos particulares nos permiten extraer algunas *propiedades generales de la energía potencial*:

1.^o *La energía potencial es una propiedad de un sistema de partículas, considerado como un todo, que interaccionan entre sí.* No tiene sentido hablar de energía potencial de una única partícula. El alumno puede pensar que en el caso del campo gravitatorio, decimos que la energía potencial de un cuerpo, que se encuentra a una altura h sobre la superficie de la Tierra, es mgh . Realmente la expresión correcta de esta afirmación sería: la energía de interacción entre un cuerpo de masa m y la Tierra, cuando aquél está a una altura h , es mgh .

2.^o *La elección del cero o referencia de energía potencial es totalmente arbitrario.* Se trata además de una magnitud escalar que, al contrario de la energía cinética, *puede ser positiva o negativa*.

3.^o *La energía potencial es aquella que posee un cuerpo en razón de su posición en un campo de fuerzas conservativas,* o dicho de forma más precisa, es una energía que depende de la separación relativa de las partículas que interactúan. Es por lo tanto independiente del sistema de referencia elegido. En el caso de un resorte, que desde este punto de vista debe

ser el menos obvio para el alumno, depende de la separación relativa entre las diferentes partes del mismo.

La energía potencial depende tanto de las coordenadas del punto considerado, como del valor del agente sensible o del testigo utilizado para detectar la fuerza, esto es evidente a partir de (7.34). Podríamos definir también, puesto que resulta útil, una magnitud escalar que fuese *energía potencial por unidad de agente sensible*:

$$V(x, y, z) \equiv \frac{U(x, y, z)}{x} \quad (7.44)$$

por definición a esta magnitud, que sólo es función de las coordenadas del punto campo de fuerzas considerado, le llamamos **potencial**. A diferencia de la energía potencial, esta magnitud no tiene unas dimensiones y unidades únicamente definidas, ya que las del agente sensible varían de unos casos a otros. Así para el campo electrostático:

$$V_e = \frac{U}{q}, [V_e] = [M] [L]^2 [T]^{-3} [A]^{-1}$$

el potencial electrostático, en el SI, se mide en JC^{-1} , unidad que recibe de Voltio. Para el campo gravitatorio:

$$V_g = \frac{U}{m}, [V_g] = [L]^2 [T]^{-2}$$

el potencial gravitatorio se mide en J kg^{-1} , unidad que no tiene ningún nombre especial.

Si en (7.33) dividimos los dos miembros por el valor del agente sensible:

$$\frac{\mathcal{F}_{B \rightarrow A}}{x} = \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_B^A dV = -[V_A - V_B] = -\Delta V \quad (7.45)$$

expresión que define la **diferencia de potencial** entre dos puntos de un campo de fuerzas conservativas.

Todo lo que anteriormente se indicó respecto de la energía potencial es aplicable al potencial. Este presenta la ventaja de ser la magnitud escalar adecuada para caracterizar a un campo de fuerzas conservativas, en el que no pueda utilizarse la definición operacional de la fuerza y deba caracterizarse el campo mediante el vector intensidad.

El concepto de energía potencial es más interesante y práctico, desde el punto de vista de un fenómeno físico mediante consideraciones energéticas. El de potencial es más adecuado para una interpretación den-

tro de la teoría de campos, ya que dicha función constituye un campo escalar, ¿por qué?

Vemos, pues, que todo campo de fuerzas se puede caracterizar mediante una función vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ ó $\mathbf{I}(x, y, z)$. Si el campo es conservativo admite también una caracterización mediante una función o campo escalar, $U(x, y, z, \mathbf{x})$ ó $V(x, y, z)$. En § 7.5 haremos unas consideraciones sobre la relación que existe entre estas dos caracterizaciones alternativas de un campo de fuerzas conservativas.

§ 7.4 TEOREMA DE CONSERVACION DE LA ENERGIA PARA UNA PARTICULA

Supongamos que todas las fuerzas que actúan sobre una partícula son conservativas. Según (6.52):

$$\mathcal{F}_{A \rightarrow B} = \Delta E_c = E_{c_B} - E_{c_A}$$

por ser conservativas (7.33):

$$\mathcal{F}_{A \rightarrow B} = \Delta U = -(U_B - U_A)$$

combinando ambas, obtendremos:

$$E_{c_B} - E_{c_A} = -(U_B - U_A), \quad E_{c_B} + U_B = E_{c_A} + U_A \quad (7.46)$$

Hay que resaltar que *cada una* de las fuerzas conservativas que actúan sobre la partícula, da lugar a un término en la expresión de la energía potencial en (7.46): $U = U_1 + U_2 + \dots$. Esta afirmación, que ya está implícitamente contenida en (7.33), aparecerá más clara al resolver el ejercicio 7.3.

Si en vez de dos puntos determinados A y B , hubiésemos elegido uno de ellos arbitrario, por ejemplo el B , tendríamos:

$$E_{c_A} + U_A = E_c + U \quad (7.47)$$

luego:

$$E_{c_A} + U_A = E_{c_B} + U_B = E_c + U = \text{cte} \quad (7.48)$$

$$\Delta(E_c + U) = 0$$

que nos indica: «Si todas las fuerzas que actúan sobre la partícula son conservativas, la suma de su energía cinética y potencial es la misma para todos los puntos del espacio». Por lo tanto, su energía mecánica, E –suma de la cinética y potencial– se conserva. Resulta ahora evidente la nomenclatura de conservativas utilizada para aquellas fuerzas cuyo trabajo no depende de la trayectoria: para dichas fuerzas se conserva la energía mecánica. Esto no significa, como veremos posteriormente, que las fuerzas no conservati-

vas violen el teorema de conservación de la energía, sino que el mismo toma una forma diferente a (7.48); ahora bien, cuando actúan fuerzas no conservativas, la energía mecánica no se conserva, como comprobaremos posteriormente.

Este teorema nos indica que puede variar la energía cinética de un punto sometido exclusivamente a fuerzas conservativas, así como su energía potencial, pero su suma es constante e igual al valor que toma en cualquiera de los puntos de la trayectoria. Por eso, se indica en los textos elementales que en estos casos la energía cinética se convierte en potencial y viceversa; y también que la energía potencial representa una forma de energía almacenada, que se puede recobrar totalmente y convertir en cinética. Este teorema se aplica, entre otros casos, a las partículas sometidas a los cuatro tipos de fuerzas indicados en (7.32).

La importancia de las leyes de conservación en la Física ya la indicamos en el capítulo anterior; el teorema de conservación de la energía, como ocurre con los del momento lineal y angular, tiene un rango de validez mayor que el de las leyes clásicas del movimiento. Es decir, es válido en el dominio de la Mecánica Cuántica y en el de la Relativista (§ 4.1), donde aquellas no lo son.

Ejercicio 7.3

Un bloque de masa m se encuentra en el extremo superior de un plano que está inclinado un ángulo θ respecto de la horizontal (Fig. 7.16). En la parte inferior del plano existe un resorte, de constante k , inicialmente sin deformar. El bloque se encuentra a una distancia e del extremo del resorte y está inicialmente en reposo.

Al deslizar el bloque y entrar en contacto con el resorte lo comprime. Calcular la deformación máxima que sufre el resorte.

Se considera despreciable el rozamiento del bloque con el plano inclinado.

Datos numéricos: $m = 0,5 \text{ kg}$, $\theta = 45^\circ$, $k = 400 \text{ N m}^{-1}$, $e = 3 \text{ m}$.

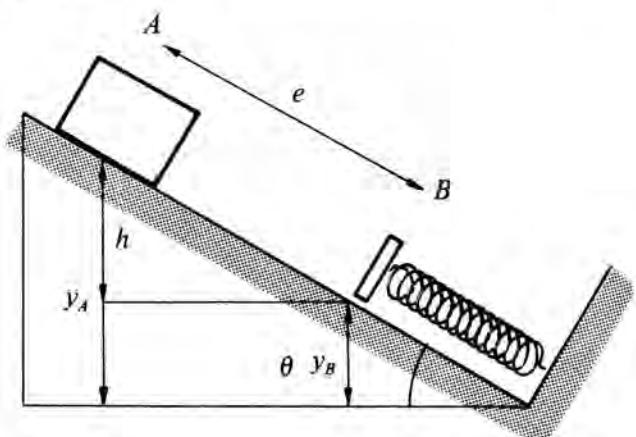


FIG. 7.16

Solución:

Podemos considerar al bloque como una partícula material, ya que sólo tiene movimiento de traslación (§ 2.1) la partícula que lo caracterice puede ser cualquier punto del mismo, o más estrictamente su centro de masas (§ 8.3). Las fuerzas que actúan sobre el bloque antes de entrar en contacto con el muelle, son su peso (**P**) y la acción de la superficie inclinada sobre él (**N**). Esta no produce trabajo, ¿por qué? El peso es una fuerza conservativa; por lo tanto, se conservará la energía mecánica del bloque:

$$E_{c_A} + U_A = E_{c_B} + U_B$$

donde E_{c_B} y U_B representan la energía cinética y potencial, respectivamente, del bloque justo antes de comprimir al resorte. Como parte del reposo (7.46) $E_{c_A} = 0$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = U_A - U_B$$

La única fuerza que produce trabajo es el peso, como es conservativa, la energía potencial del bloque es de tipo gravitatorio (7.34):

$$U_A - U_B = mg(y_A - y_B) = mgh = mge \operatorname{sen} \theta$$

por lo tanto:

$$v_B = (2ge \operatorname{sen} \theta)^{1/2} \quad (7.49)$$

Luego, la energía potencial del bloque va disminuyendo y la cinética aumentando, como se comprueba al haber partido del reposo y llegar al punto *B* con la velocidad calculada. La energía mecánica del bloque permanece constante; el valor de dicha constante es:

$$E_{c_A} + U_A = \text{cte} \quad , \quad U_A = \text{cte}$$

Esta energía, respecto al suelo, no se puede calcular con los datos que da el problema, ya que no conocemos la longitud del plano inclinado o la longitud del resorte sin deformar.

En cualquier punto intermedio entre *A* y *B*, el bloque tiene una energía cinética y potencial diferente de las que poseía en *A* o en *B*, pero su suma es igual a la correspondiente a dichos puntos. ¿Podría el alumno calcular cuánto vale la energía cinética del bloque cuando ha bajado 1 m a partir de *A*?

Al llegar al punto *B* y unirse al resorte, sobre el bloque comienza a actuar una nueva fuerza: la elástica ejercida por aquél (Fig. 7.17). Esta fuerza también es conservativa (7.22); luego, se seguirá conservando la energía mecánica del bloque.

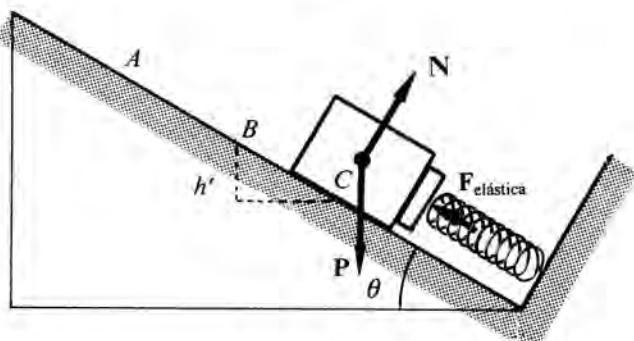


FIG. 7.17

Hay que hacer, sin embargo, una puntuación: en este caso actúan sobre el bloque dos fuerzas conservativas que producen trabajo: **F_{elástica}** y **P**, por lo tanto existirán «dos energías potenciales» debidas a cada una de estas fuerzas:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{elástica}} &= -\Delta U_{\text{elástica}} & \mathcal{F}_{\text{peso}} &= -\Delta U_{\text{gravitatoria}} \\ \Delta E_c &= -\Delta U_{\text{elástica}} - \Delta U_{\text{gravitatoria}} \end{aligned} \quad (7.50)$$

Las expresiones correspondientes a estas dos formas de energía potencial ya las conocemos (7.32):

$$\Delta U_{\text{elástica}} = \frac{1}{2}k(x_C^2 - x_B^2) \quad (7.51)$$

x_C y x_B representan las deformaciones del resorte en los puntos *C* y *B*, respectivamente.

$$\Delta U_{\text{gravitatoria}} = -mgh' = -mg BC \operatorname{sen} \theta$$

donde *C* es el punto sobre el plano inclinado que indica la máxima compresión del resorte. Esta tendrá lugar cuando el bloque, en su transferencia de energía cinética en potencial, termine por pararse: $E_{c_C} = 0$. Por lo tanto (7.50):

$$-\frac{1}{2}mv_B^2 = -\frac{1}{2}kx_C^2 + mgx_C \operatorname{sen} \theta \quad (7.52)$$

ya que x_A corresponde a la coordenada del extremo del resorte cuando está sin deformar; y que $x_C = BC$ resulta evidente y no necesita ninguna aclaración adicional.

Sustituyendo los valores numéricos: $v_B = 6,51 \text{ m s}^{-1}$, $x_C = 0,24 \text{ m}$

¿Podrías determinar el valor constante de la energía mecánica del bloque?

Supongamos ahora que *las fuerzas que actúan sobre la partícula sean tanto conservativas como no conservativas*. Es un caso más real que el anterior, ya que el rozamiento es una fuerza no conservativa que no puede anularse en la mayoría de fenómenos físicos, aunque pueda disminuirse mediante el uso de lubricantes, por ejemplo, cuando se trata de rozamiento entre sólidos.

Según (6.52):

$$\mathcal{F}_C + \mathcal{F}_{NC} = \Delta E_c = E_{c_B} - E_{c_A} \quad (7.53)$$

mediante \mathcal{F}_C representamos el trabajo realizado por las fuerzas conservativas y por \mathcal{F}_{NC} el de las no conservativas.

Las fuerzas conservativas verifican la relación (7.33):

$$\mathcal{F}_C = -\Delta U = -(U_B - U_A) \quad (7.54)$$

combinando (7.53) y (7.54) obtendremos:

$$\mathcal{F}_{NC} = (U_B + E_{c_B}) - (U_A + E_{c_A}) \quad (7.55)$$

$$\Delta E \neq 0 \quad , \quad \Delta E = \mathcal{F}_{NC}$$

En este caso, la energía mecánica de la partícula no permanece constante, sino que aumenta o disminuye según \mathcal{T}_{NC} sea positivo o negativo. Si las fuerzas no conservativas son de rozamiento, $\mathcal{T}_{NC} < 0$ y la energía mecánica de la partícula disminuye. También hemos de resaltar que en este caso dicha energía mecánica no representa la total de la partícula, ya que no incluye a todas las fuerzas que actúan; por lo tanto dicho concepto no resulta, en este caso, tan útil como cuando todas las fuerzas que actuaban eran conservativas. Este trabajo de las fuerzas no conservativas representa una transferencia de energía del cuerpo al medio, que en general es irreversible, es decir, que no se puede recobrar volviendo el cuerpo al estado inicial. Sobre estas cuestiones volveremos al tratar el primer principio de la Termodinámica (§ 10.4).

Independientemente del tipo de fuerzas no conservativas de que se trate, siempre es posible encontrar nuevas formas de la energía que correspondan a este trabajo; de manera que siempre podemos afirmar que la **energía total de la partícula** –cinética, más potencial, más otras formas– **no cambia**. La energía se puede transformar de unas clases en otras, pero no puede crearse ni destruirse; permaneciendo constante la energía total.

Este teorema, al cual hemos llegado formalmente, es una generalización de nuestra experiencia, que se verifica siempre en la Naturaleza.

Ejercicio 7.4

Repetir el ejercicio 7.3, suponiendo que ahora existe un coeficiente dinámico de rozamiento entre el bloque y el plano inclinado igual a 0,25.

Solución:

Respecto al ejercicio 7.3, en éste actúa la fuerza de rozamiento, que en aquél se consideró despreciable. Esta fuerza es no conservativa.

Para el trayecto AB el teorema de conservación de la energía (7.55) nos permite escribir:

$$\mathcal{T}_{rozamiento} = (U_B + E_{C_B}) - (U_A + E_{C_A})$$

la energía mecánica del bloque no se conserva. Calculando cada uno de los términos de la expresión anterior obtenemos:

$$-\mu_{din}eg\cos\theta = -gh + 1/2v_B^2$$

donde hemos dividido por m los dos miembros de la ecuación. Como en el ejercicio 7.3: $h = e \sen\theta$. Obsérvese que si $\mu_{din} = 0$ la expresión anterior se reduce a la obtenida en dicho ejercicio.

$$v_B = [2g(h - \mu_{din}e\cos\theta)]^{1/2} = 5,74 \text{ m s}^{-1}$$

La velocidad que se obtiene es inferior a la del ejercicio anterior, debido a que toda la energía potencial gravitatoria

del bloque en A no se convierte en cinética en B , ya que parte se invierte en trabajo de la fuerza de rozamiento.

En el tramo BC también actúa el rozamiento, por lo tanto (7.55) se escribirá:

$$\mathcal{T}_{rozamiento} = \Delta E_c + \Delta U_{gravitatoria} + \Delta U_{elástica}$$

y por consiguiente:

$$-F_x x = -1/2mv_B^2 - mgx \sen\theta + 1/2kx^2$$

donde x representa la longitud que se comprime el resorte, y por lo tanto la recorrida por el bloque desde que entra en contacto con aquél hasta que se para. Sustituyendo los valores numéricos del ejercicio se obtiene:

$$400x^2 - 5,30x - 16,50 = 0 \quad , \quad x = 0,21 \text{ m}$$

Como en el caso anterior, no se ha considerado el signo negativo de la raíz, por dar lugar a una situación sin significado físico. El resorte, al existir la fuerza de rozamiento, se comprime menos que en el ejercicio 7.3. ¿Por qué?

*§ 7.5 CURVAS DE ENERGIA POTENCIAL

Tal como indicamos, existe una relación entre las dos descripciones alternativas de un campo de fuerzas conservativas (§ 7.3). Dicha relación no la vamos a establecer ahora en el caso general, puesto que implica la introducción de un operador vectorial diferencial (el gradiente). La relación general la estableceremos en (§ 11.3) para aplicarla al campo gravitatorio; en este apartado nos limitaremos al caso unidimensional.

La relación entre \mathbf{F} y U , o entre \mathbf{I} y V , la introduciremos en dos casos particulares. a) *problemas unidimensionales*: $\mathbf{F} = f(x)\mathbf{i}$, $U(x)$, es decir para aquellos en que la energía potencial sea función de una única variable, por ejemplo la x . b) *problemas de fuerzas centrales* (§ 11.1): $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{u}_r$, $U(r)$, es decir la energía potencial depende sólo de la distancia a que se encuentra, en cada instante, el agente testigo, de aquél que crea el campo. Realmente son los dos únicos casos que presentan interés a nuestro nivel. El primer tipo de problemas incluye a las fuerzas elásticas y a las fuerzas constantes; el segundo a las de tipo electrostático y gravitatorio.

En el caso unidimensional, (7.33) se reduce a:

$$d\mathcal{T} = -dU = F(x)dx \quad (7.56)$$

por lo tanto:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \quad (7.57)$$

luego, en una dimensión: la componente de la fuerza F , la única que tiene, es igual a menos la derivada de la energía potencial respecto de la variable de posición. Por consiguiente, el signo menos indica que la fuerza tiene sentido contrario al de valores crecientes de la energía potencial. Al estudiar las curvas de energía potencial haremos uso de estos resultados.

En el caso de fuerzas centrales, se verifica (7.9):

$$d\mathcal{F} = -dU = F(r)dr \quad (7.58)$$

$$F(r) = -\frac{dU}{dr} \quad (7.59)$$

Hay que resaltar que no se trata de un problema unidimensional, como tendremos ocasión de comprobar (§11.1). La interpretación se puede hacer de forma análoga al caso anterior.

Veamos una aplicación importante de (7.57). En muchas ocasiones el uso de diagramas de energía $U(x)$, por ejemplo del tipo (7.35), es una manera útil de obtener una descripción completa, aunque cualitativa, de las posibilidades de movimiento de una partícula en un campo unidimensional de fuerzas conservativas.

A menudo, la información que obtenemos a partir de estas curvas, nos permite analizar fenómenos físicos para los cuales las soluciones analíticas, que se obtendrían al resolver las ecuaciones fundamentales de la Mecánica (6.2), son complicadas e incluso imposibles de obtener. De hecho, aún conociendo las soluciones analíticas, siempre que éstas no sean funciones de expresión simple o familiar, no son de utilidad para darnos a conocer las características físicas esenciales del movimiento.

En muchas situaciones prácticas resulta, además, más fácil determinar la expresión de la energía potencial, que la correspondiente a la fuerza, de ahí la importancia de saber interpretar estas curvas y obtener de las mismas la máxima información. Esta es la razón por la que los modelos utilizados para explicar las propiedades del núcleo o de las moléculas se suelen plantear dando la función energía potencial.

Supongamos un campo unidimensional de fuerzas conservativas, en el que la energía potencial varía de la forma arbitraria indicada en la figura 7.18.

A partir de la misma podemos calcular la fuerza que actúa sobre dicha partícula: $F(x)$. Según (7.57): la fuerza en cada punto del campo es igual a la pendiente de la curva $U(x)$ en dicho punto. El signo menos indica el sentido de la fuerza, así cuando:

$$\frac{dU}{dx} < 0 \rightarrow F(x) > 0,$$

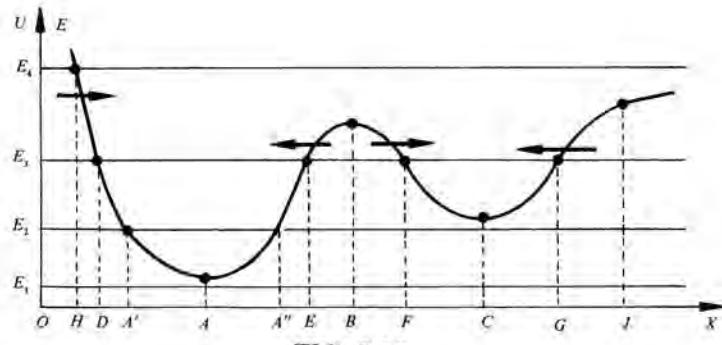


FIG. 7.18

la fuerza está dirigida en el sentido positivo del eje de abcisas. Si:

$$\frac{dU}{dx} > 0 \rightarrow F(x) < 0,$$

la fuerza está dirigida en el sentido negativo.

Estos resultados se visualizan mediante flechas en la Fig. 7.18. Obsérvese que la fuerza es positiva en aquellas regiones en que disminuye la energía potencial: OA y BC ; mientras que es negativa en las que aumenta: AB y desde C al infinito.

Aquellos puntos para los cuales la energía potencial presenta un mínimo o un máximo: A , B y C , corresponden a situaciones de equilibrio. Según (7.57) la fuerza que actúa sobre una partícula situada en los mismos es nula, al serlo la pendiente de una curva:

$$\frac{dU}{dx} = 0 \rightarrow F(x) = 0, \text{ posición de equilibrio.}$$

Cuando la energía potencial presenta un mínimo, el equilibrio es estable. Los puntos en que es máxima corresponden a posiciones de equilibrio inestable.

$$U(x) \text{ mínima} \rightarrow \frac{d^2U}{dx^2} > 0 \rightarrow \text{Equilibrio estable}$$

$$U(x) \text{ máxima} \rightarrow \frac{d^2U}{dx^2} < 0 \rightarrow \text{Equilibrio inestable}$$

Desde el punto de vista físico la justificación de esta afirmación es inmediata: supongamos una partícula situada en una posición correspondiente a un mínimo de energía potencial (A o C); si se le desplaza ligeramente de dicha posición, actúa sobre ella una fuerza que tiende a llevarla de nuevo al equilibrio. En los puntos en que $U(x)$ es un máximo, un ligero desplazamiento a partir de la posición de equilibrio, hace que la partícula se encuentre sometida a una fuerza que tiende a alejarla de dicha posición.

A partir de la curva de energía potencial también podemos conocer las posibilidades de movimiento de una partícula en dicho campo de fuerzas. Los posibles movimientos que puede presentar son función de la energía total de la misma: $E = U(x) + E_c(x)$, que es una constante del movimiento, ¿por qué? El valor de la energía total depende de las condiciones iniciales que se establezcan; así, por ejemplo, en un resorte o en un péndulo matemático en condiciones de oscilaciones libres, el valor inicial de la energía total, que sería puramente potencial, depende de lo que se les separe de su posición de equilibrio.

Supongamos que la partícula puede presentar diferentes valores de la energía total; analicemos las posibilidades de movimiento para cada uno de ellos:

a) $E = E_1$, por conservarse la dibujamos en la Fig. 7.18 como una línea recta paralela al eje de abscisas. Como: $E_1 = U(x) + E_c(x)$; $E_c(x) = E_1 - U(x)$. La energía potencial es mayor que E_1 para todos los valores de x ; físicamente, desde el punto de vista de la Mecánica Clásica, esta situación es imposible, ya que daría lugar a valores negativos de la energía cinética e imaginarios de la velocidad.

b) $E = E_2$. La línea recta correspondiente (Fig. 7.18) corta a la curva de energía potencial en dos puntos A' y A'' . Las posiciones de la partícula, correspondientes tanto a los puntos que se encuentran a la izquierda de A' , como a la derecha de A'' , presentan una energía cinética negativa, por lo tanto son regiones en las cuales no se puede mover la partícula. El movimiento de ésta se encuentra limitado al intervalo $A'A''$; la partícula oscilará entre $x = A'$ y $x = A''$; en estos puntos su velocidad es cero e invierte su sentido de movimiento como consecuencia de la fuerza que actúa sobre ella. Esta situación es la que puede corresponder al caso de un resorte. A partir de (7.35) podemos enunciar que si la rama de curva $U(x)$, que se encuentra por debajo de la línea correspondiente a la energía total, es una parábola, el movimiento será armónico simple; en caso contrario lo único que podemos afirmar es que el movimiento será oscilatorio. ¿Por qué?

Estas situaciones en las cuales el movimiento de una partícula está restringido a una cierta región del espacio, o si los dos cuerpos que interaccionan se mueven de forma que siempre se encuentran próximos entre sí, se denominan de **movimiento finito o de estados ligados**. Como ejemplos típicos podemos citar el sistema Tierra – Luna, el átomo de hidrógeno, moléculas diatómicas, etc. Aunque estos casos corresponden más a fuerzas centrales que a problemas unidimensionales. Como veremos posteriormente (§ 11.1) en el caso de fuerzas centrales la energía potencial sólo depende de la distancia de la partícula al centro de fuerzas, $U(r)$, y se pueden tratar formalmente, por lo tanto, como un problema unidimensional.

c) $E = E_3$. Razonando de forma análoga al caso anterior, podemos concluir que sólo existen dos regiones donde es posible el movimiento. Una de ellas corresponde a oscilaciones entre los puntos D y E ; la otra en tre F y G . Si la partícula se encuentra en una de estas regiones nunca podrá pasar a la otra, ya que ello implicaría atravesar una zona en la que su energía cinética sería negativa, lo cual es imposible dentro del marco clásico. En este caso se dice que la partícula se encuentra dentro de un **pozo potencial**, o que las dos regiones donde es posible el movimiento están separadas por una **barrera de potencial**. En Mecánica Cuántica existe una probabilidad distinta de cero de que una partícula atraviese una barrera de potencial, sin tener la energía suficiente para superarla; este fenómeno, que no se puede explicar desde el punto de vista de la Mecánica Clásica, recibe el nombre de **efecto túnel**.

d) $E = E_4$. Para una energía total igual a E_4 (7.18), el movimiento deja de ser oscilatorio y la partícula se mueve entre H y el infinito. El punto donde lo inicie, así como el sentido, depende de su posición y condiciones iniciales. Este movimiento o estado de la partícula se denomina **no acotado o no ligado**.

Supongamos que la partícula penetra en dicho campo de fuerzas en un punto tal como el J (Fig. 7.18), con una cierta energía cinética y moviéndose hacia la izquierda (esto constituirían las condiciones iniciales a las que antes nos referimos). La partícula comenzaría a acelerarse hasta llegar a C , después hasta B disminuiría su velocidad, para volver a aumentarla hasta el punto A , a partir del cual sufriría una aceleración negativa. Al llegar a H invertiría el sentido de su movimiento y se movería ya siempre en el de las abscisas crecientes. En cada uno de los tramos se puede determinar la velocidad, midiendo directamente sobre la curva las ordenadas que, para cada abscisa, le corresponde a la energía potencial y a la total.

Hay que prevenir al alumno el pensar, sobre todo después de la interpretación anterior, que la curva de energía potencial representa la trayectoria que describe la partícula en el campo gravitatorio. No es así, ya que no debemos olvidar que se trata de un movimiento unidimensional; en el eje de ordenadas representamos valores de la energía, que no tienen nada que ver, en general, con la altura de la partícula respecto del suelo.

El uso de estas curvas tiene especial interés en el estudio del movimiento de cuerpos sometidos a fuerzas centrales: planetas, moléculas, etc. A escala microscópica de las partículas constituyentes de los átomos, también tienen aplicación, aunque se trate de sistemas que no cumplen la Mecánica Clásica, pero siempre se puede hacer una aproximación dentro de su marco.

CUESTIONES

- * 1. ¿Qué ventajas ofrece la introducción del concepto de campo, frente a la acción a distancia en la interpretación de los fenómenos de interacción en la Naturaleza?
- 2. Citar ejemplos de campos escalares, diferentes de los indicados en el texto.
- 3. ¿Cuál de las siguientes definiciones de campo de fuerzas consideras la más adecuada?
 - a) Fuerza por unidad de masa en cada punto de la región donde existe.
 - b) Fuerza por unidad de carga en cada punto.
 - c) Una función vectorial que tiene un valor único en cada punto del espacio; y que viene caracterizada por su flujo y su circulación.
 - d) La tangente a una línea de fuerza.
 - e) El trabajo realizado para traer la unidad de masa o de carga desde el infinito al punto del espacio considerado.
- 4. ¿Qué representa el campo escalar $T(x, y, z, t)$?
- 5. Citar tres ejemplos de campos de fuerzas conservativos y otros tres que no sean conservativos.
- * 6. En el caso unidimensional cuando la fuerza depende exclusivamente de la coordenada espacial x , el campo es conservativo. ¿Por qué no es cierto para un campo tridimensional, en el la fuerza dependa sólo de la posición de la partícula en el espacio? Razonar la respuesta.
- 7. Un resorte no cumple la ley de Hooke, sino que la fuerza recuperadora es de la forma $F=0,5x+0,8x^2$, ¿es conservativa esta fuerza? Razonar la respuesta. Dos resortes A y B son idénticos, a excepción de que el A es más duro que el B : $k_A > k_B$. ¿Sobre cuál de ellos se realiza un trabajo mayor si: a) se deforman por igual; b) se les aplica la misma fuerza?
- 8. ¿Existe una fórmula para expresar la energía potencial de un sistema o, por el contrario, existen diferentes expresiones según el trabajo realizado por los diferentes tipos de fuerzas que pueden actuar sobre el mismo? Razonar la respuesta.
- 9. ¿Existe una energía potencial asociada con el trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento? Justificar la contestación dada.
- 10. Si la energía mecánica de un punto es constante, ¿debe ser necesariamente nula la fuerza externa resultante que actúa sobre el mismo?
- 11. Se deja caer un objeto desde una cierta altura, después de chocar contra el suelo se observa que alcanza el doble de la altura inicial. ¿Qué conclusión se puede extraer de la observación de este fenómeno?
- * 12. ¿Se puede imaginar el alumno alguna circunstancia en la cual el momento lineal de un punto se conserve, pero no lo haga su energía mecánica? ¿Y el caso contrario?
- * 13. Dos cuerpos de masas respectivas m_1 y m_2 están unidos mediante una cuerda inextensible y de masa despreciable, que pasa por una polea (Fig. 7.19). La polea es de masa despreciable y no se considera el rozamiento entre la cuerda y la polea. ¿Se conserva la energía de cada bloque? Explicar la respuesta. ¿Por qué la energía mecánica del sistema formado por ambos bloques se conserva?
- * 14. ¿Por qué para el campo gravitatorio terrestre no se toma como cero de energía potencial la correspondiente al punto del infinito, como se hace en los casos de E y G ? Razonar la respuesta.

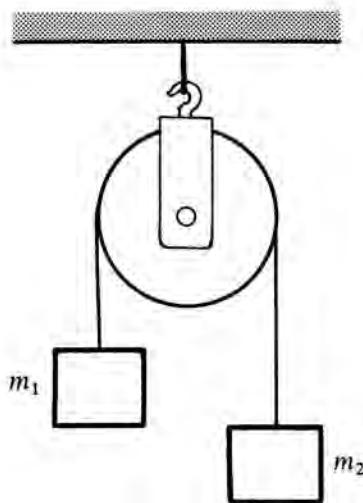


FIG. 7.19

- * 15. Un experimento se realiza en dos perfiles diferentes, como los representados en la Fig. 7.20 a, b. En el mismo se observa que la partícula tarda tiempos diferentes en alcanzar el suelo. ¿Se encuentra este resultado en contradicción con el teorema de conservación de la energía? ¿Para cuál de los tres perfiles dicho tiempo es mínimo? (Fig. 7.20 a, b y c). Razonar la respuesta.

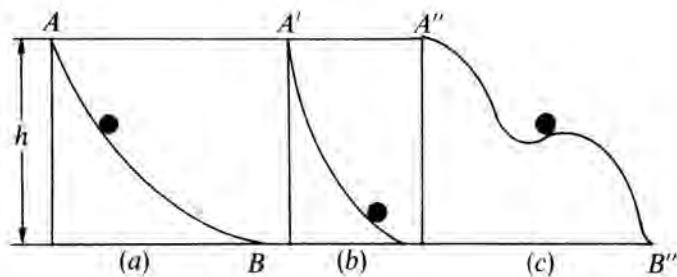


FIG. 7.20

- * 16. Dos discos se encuentran unidos mediante un resorte (Fig. 7.21), ¿sería posible presionar hacia abajo el disco superior, de manera que al soltarlo se estirase el resorte y fuese capaz de levantar del suelo al inferior? Razonar la contestación en términos energéticos. ¿Se conserva la energía mecánica en este caso?
- 17. Comentar, a partir de la definición de energía potencial estudiada, las siguientes afirmaciones encontradas en los textos elementales de Física: «Energía potencial es al que posee un cuerpo en virtud de su posición». «Energía potenciales igual a Mgh ».
- 18. Expresión del potencial electrostático y gravitatorio en un punto.
- 19. Definir la diferencia de potencial entre dos puntos de un campo de fuerzas conservativas.
- 20. Citar algunos ejemplos de sistemas que se encuentren en situaciones de equilibrio estable. También de equilibrio inestable.
- 21. ¿Podría el alumno razonar la forma de la curva de energía potencial, correspondiente a un cuerpo en equilibrio indiferente? Utilizamos este concepto en el sentido estudiado en los cursos elementales.

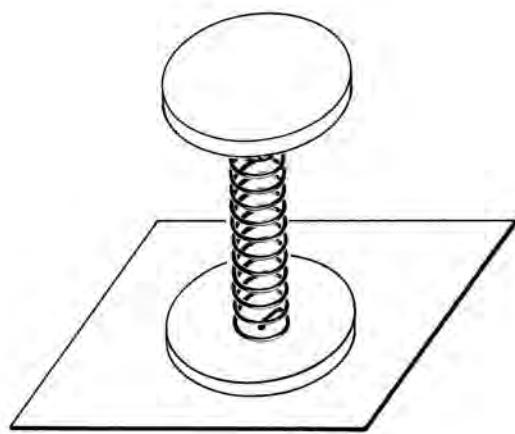


FIG. 7.21

22. ¿En qué circunstancias, si es que existen, una partícula se puede encontrar en un estado ligado en el campo de fuerzas cuyo potencial es el representado en la Fig. 7.22?

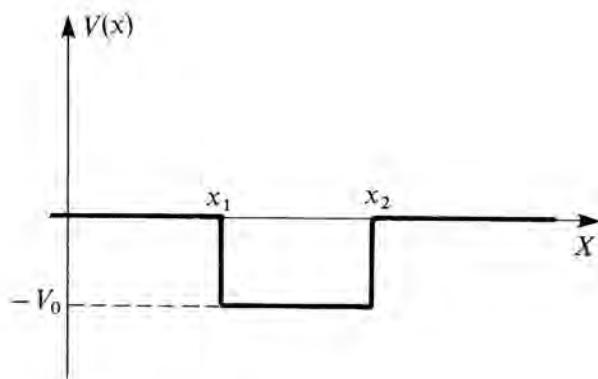


FIG. 7.22

PROBLEMAS

- Sobre una partícula actúa una fuerza de valor: $\mathbf{F} = (1/r)\mathbf{u}_\theta$, donde r representa la distancia de la partícula a un cierto origen O y \mathbf{u}_θ es un vector unitario en una dirección tangencial, es decir, perpendicular a \mathbf{u}_r .
 - Indicar el lugar geométrico de los puntos para los cuales la fuerza tiene el mismo valor. Dibujar la fuerza definida en distintos puntos del espacio.
 - Calcular el trabajo realizado por esta fuerza, a lo largo de la trayectoria cerrada (1) (Fig. 7.23).
 - Calcular el trabajo de dicha fuerza a lo largo de la trayectoria cerrada (2). d) ¿Es conservativa esta fuerza?
- ¿Cuál es la energía potencial de un electrón en un átomo de hidrógeno, en el cual la distancia protón-electrón es de unos 5×10^{-11} m, o sea, 0,5 angstrom ($1 \text{ \AA} = 10^{-10}$ m)?

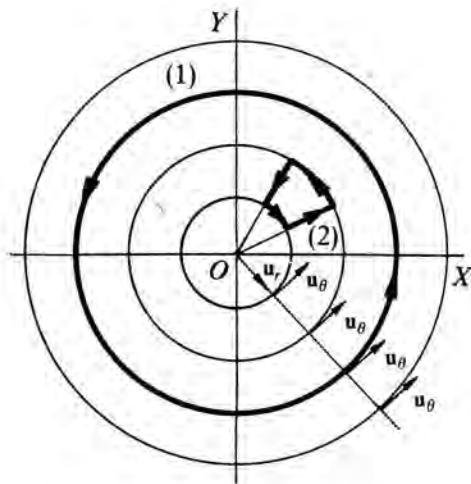


FIG. 7.23

- Una partícula de 2 kg de masa se encuentra suspendida de un hilo inextensible, de masa despreciable y 1 m de longitud. Se desplaza un ángulo $\theta = 30^\circ$ de su posición de equilibrio y se suelta. Calcular: 1.) Trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre la partícula, 2.) Diferencia de energía potencial entre dos posiciones arbitrarias, θ_0 y θ_1 , de la partícula, 3.) Diferencia de potencial entre dichas posiciones, 4.) Calcular la velocidad de la partícula cuando el hilo forma un ángulo de 10° con la vertical, a un lado y otro de su posición de equilibrio.
- Un resorte de masa despreciable y constante k se encuentra colocado sobre una superficie horizontal. Un extremo está fijo a una pared y el otro unido a una partícula de masa m . Representar gráficamente $U(x)$, $-A \leq x \leq A$, donde A es la máxima deformación que sufre el resorte. A partir de la curva obtenida, junto con la de la Fig. 6.15, justificar la conservación de la energía mecánica para la partícula. Calcular cuánto vale dicha energía. Se considera despreciable la fuerza de rozamiento entre la partícula y la superficie horizontal.
- Se lanza hacia arriba, desde el suelo, un cuerpo de 10 kg y se observa que alcanza una altura máxima de 2 m. a) ¿Con qué energía cinética se lanzó? b) ¿Cuánto vale la energía cinética cuando se encuentra a un metro sobre el suelo? c) ¿Cuánto vale dicha magnitud al llegar nuevamente al suelo? d) De dónde procede y en qué se transforma?
- Dada la fuerza $\mathbf{F} = (7\mathbf{i} - 6\mathbf{j})\text{N}$, calcular la diferencia de energía potencial entre el origen y el punto $(-3,4)$ m. Determinar la energía potencial en el punto $\mathbf{r} = (7\mathbf{i} + 16\mathbf{j})\text{m}$. Calcular la potencia media si tarda 0,6 s en ir de un punto a otro. Si la masa de la partícula es de un kg, calcular la variación de su energía cinética.
- Un satélite artificial describe una órbita circular, con velocidad angular constante, alrededor de la Tierra. Se encuentra a una distancia de su centro $r = 2R_T$, donde R_T es el radio de la Tierra. Se puede suponer que la Tierra ejerce una fuerza sobre el satélite, como si toda su masa estuviese concentrada en su centro; también se supone despreciable la fuerza de rozamiento del satélite con la atmósfera. a) Calcular el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad que actúa sobre el satélite: (1) en una revolución, y (2) en media revolución. b) ¿Cuál es la velocidad del satélite? c) El satélite enciende sus motores y se para com-

pletamente. Entonces comienza a caer hacia el centro de la Tierra, bajo la influencia de la fuerza de la gravedad. ¿Qué trabajo realiza ésta al caer el satélite desde $r = 2 R_T$ hasta que éste alcanza la superficie de la Tierra $r = R_T$? ¿Qué velocidad posee el satélite en este instante?

- * 8. Un resorte de masa despreciable, ejerce una fuerza recuperadora de la forma: $F(x) = -k_1 x + k_2 x^2$. a) Calcular la energía potencial almacenada por el resorte, para una deformación x . Tómese $U(0) = 0$. b) Si la energía almacenada para $x = -b$ es el doble que para $x = +b$, calcular k_2 en función de k_1 y b . c) Dibujar cualitativamente el diagrama de energía potencial $U(x)$, teniendo en cuenta el resultado anterior. d) El resorte se encuentra sobre una superficie horizontal, con un extremo fijo y en el otro tiene unida una partícula de masa m . Si para $x = 0$, se le da —en el sentido positivo de las x — una energía cinética igual a $k_1 b^2/2$. ¿Cuál es su velocidad para $x = +b$?
- * 9. Un anillo de 10 kg puede deslizarse sin rozamiento a lo largo de una varilla vertical, Fig. 7.24. El anillo se encuentra unido a un resorte de constante 10 N cm⁻¹, y de 8 cm de longitud cuando no está deformado. Si el anillo parte del reposo en la posición 1. ¿Cuál será su velocidad al descender 12 cm hasta la posición 2?

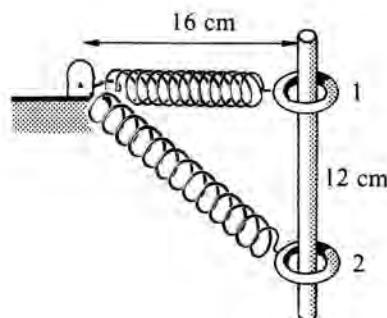


FIG. 7.24

- *10. Una partícula de masa m desliza por una semicircunferencia de radio R (Fig. 7.25). Si parte del reposo, desde la parte superior ($\theta = \pi/2$), calcular: a) Su velocidad al llegar al fondo de la semicircunferencia; b) La fuerza normal sobre la partícula en función de θ . Se considera despreciable el rozamiento.

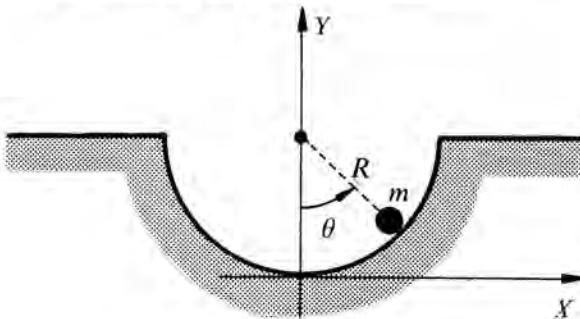


FIG. 7.25

- *11. Una partícula se encuentra en la cumbre de una cúpula, tal como se indica en la Fig. 7.26. Comienza a deslizar desde dicho punto, a partir del reposo. a) Si se desprecia el rozamiento, ¿para qué ángulo θ , deja de estar en contacto con la cúpula? b) Si comenzase con una velocidad inicial v_0 ¿cuál sería en este caso el ángulo? c) ¿A qué distancia de la base, x , hay que colocar una caja para que la partícula caiga en su interior? Tómese $R = 8$ m.

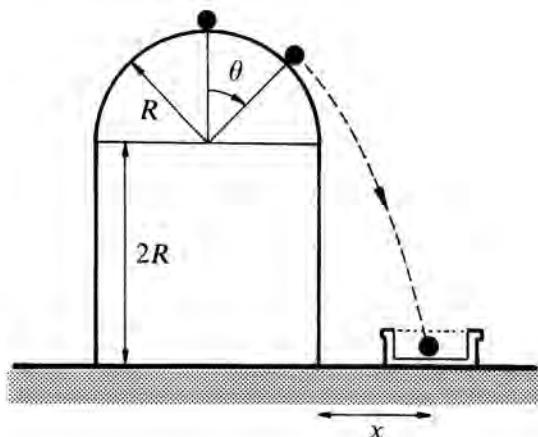


FIG. 7.26

- *12. Una partícula de 10 kg se encuentra unida al techo mediante un hilo inextensible y de masa despreciable (péndulo matemático o ideal), de 30 cm de longitud. Se separa de su posición de equilibrio un ángulo de 60° respecto de la vertical (Fig. 7.27), y se deja libre. En el punto C existe un pequeño obstáculo, cuya posición está definida en la figura. Al incidir el hilo en él, la partícula adquiere un movimiento que puede caracterizarse mediante el ángulo θ y su velocidad v . a) Energía total de la partícula. b) Velocidad de la misma en el instante en que el hilo hace contacto con el obstáculo C. c) Calcular el valor máximo de θ . d) ¿Cómo se modifica el problema si a la partícula se le da una velocidad tangencial inicial de 1 m s⁻¹?

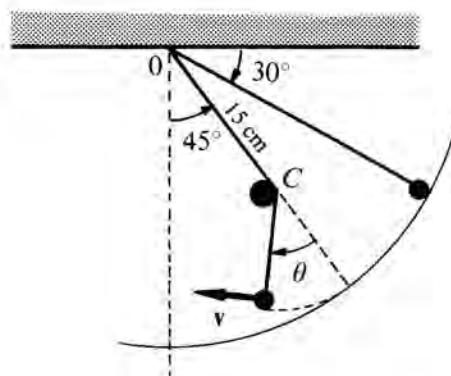


FIG. 7.27

13. Una partícula se encuentra describiendo una trayectoria circular en un plano vertical. Está unida al extremo de una cuerda inextensible y de masa despreciable, fija al centro de la circunferencia. Si la velocidad de la partícula en el punto más bajo de la trayectoria vale 40 m s^{-1} , ¿cuánto vale en el punto más alto? Calcular la tensión de la cuerda en ambas posiciones.
14. Un cuerpo de 40 kg se lanza a lo largo de un plano horizontal con una velocidad de 3 m s^{-1} . Se para después de recorrer 4 m . Calcular el coeficiente dinámico del rozamiento entre el cuerpo y el plano.
- *15. Un bloque de 25 kg se lanza hacia arriba de un plano inclinado 37° , con una velocidad inicial de 15 m s^{-1} . El coeficiente dinámico de rozamiento entre ambos es $0,15$. Calcular: a) La distancia máxima que el bloque recorrerá sobre el plano; b) el coeficiente de rozamiento estático mínimo para que el bloque se mantenga en la posición en que se para; c) determinar la velocidad con que pasará por su posición inicial, si el coeficiente estático es justo menor que dicho valor mínimo.
16. Una partícula de masa m se mueve en una región donde existe una energía potencial dada por la función: $U(x) = 3x^2 - x^3$, donde x se expresa en metros y U en julios. a) Dibujar la curva de energía potencial. b) Calcular los puntos –sus abscisas– que corresponden a situaciones de equilibrio para la partícula. c) Distinguir los que sean de equilibrio estable e inestable. d) ¿Para qué rangos de x la fuerza tiene el sentido positivo del eje de abscisas? e) ¿Cuál es el máximo valor de la energía mecánica, para que sea posible un movimiento oscilatorio de la partícula? f) ¿Cuál es la máxima velocidad que la partícula puede tener en $x=0$, si presenta un movimiento oscilatorio?
17. Una partícula se mueve a lo largo del eje x . Su $U(x)$ se representa en la Fig. 7.28. Dibujar aproximadamente $F(x)$. Indicar en la gráfica las características y relaciones significativas.

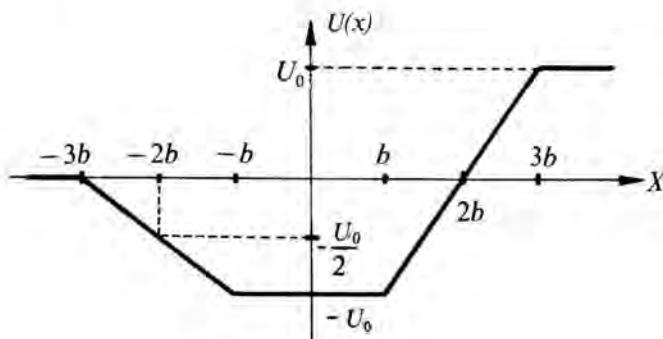


FIG. 7.28

18. En la molécula de NH_3 , el átomo N ocupa el vértice de un tetraedro con los tres átomos de H en la base, tal como se indica en la Fig. 7.29. Parece evidente que el átomo de N tiene dos posiciones de equilibrio estable. Dibujar una curva esquemática de energía potencial para el átomo de N , en función de su distancia a la base del tetraedro y discutir su posible movimiento en función de su energía total.

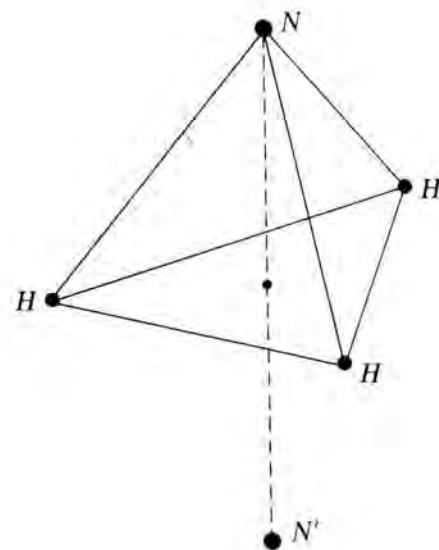


FIG. 7.29

- *19. La energía potencial de una molécula diatómica se suele interpretar, entre otros, a través del modelo de Lennard-Jones, que considera que la energía está dada por la relación:

$$U(r) = k[(r_0/r)^{12} - 2(r_0/r)^6]$$

cuya representación gráfica se indica en la Fig. 7.30. ¿Qué significado tendrá r_0 ? Justificar la respuesta. ¿Qué ocurre si los átomos que constituyen la molécula se encuentran a una distancia r , $r < r_0$? ¿Y si $r > r_0$? A partir de estos razonamientos ¿sabrias indicar algunas de las características más relevantes de las **fuerzas intermoleculares**? A partir de la curva de energía potencial anterior ¿qué propiedades químicas de la molécula diatómica se pueden deducir?

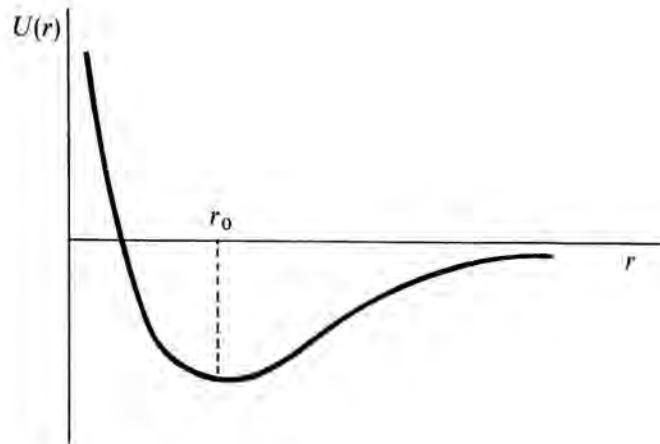


FIG. 7.30

CAPITULO VIII

DINAMICA DE LOS SISTEMAS DE PUNTOS MATERIALES

Vamos a estudiar la Dinámica de un cuerpo cuando la aproximación de punto material (§ 2.1) no es válida. Este tratamiento es más real que el realizado en los capítulos anteriores; como ya indicamos el punto material es una abstracción que nos permite estudiar, en ciertos casos, el movimiento de los cuerpos reales. También indicamos (§ 2.1), que en ocasiones no era posible utilizar esta aproximación.

En este capítulo introduciremos los conceptos fundamentales que nos permitirán abordar y resolver este nuevo problema. En el siguiente, bosquejaremos su aplicación a un tipo particular de cuerpos: los llamados sólidos rígidos.

Los conceptos relacionados con estos contenidos son más difíciles y complejos que los tratados hasta ahora. Por ello, sólo introduciremos aquellos que sean realmente fundamentales desde el punto de vista conceptual. Al proponer los ejercicios y problemas, nos tendremos que limitar a casos muy particulares, de lo contrario su complejidad los haría totalmente inadecuados para el nivel de los alumnos a que va dirigido este libro.

Observaremos que el estudio de la dinámica del punto es útil para abordar la de los sistemas. Esta es la razón fundamental, y no sólo su simplicidad, para haberla estudiado antes.

Antes de entrar en el desarrollo específico del capítulo, introducimos los diferentes modelos, de complejidad creciente, que utiliza la Física para estudiar el movimiento de los cuerpos materiales (§ 8.1). También definimos una clasificación de las fuerzas (§ 8.2) que será de gran utilidad en el caso de los sistemas, y que no tenía sentido establecerla para el punto material. Como contenidos específicos se generalizan para los sistemas de partículas las magnitudes y teoremas introducidas para el punto material: el momento lineal (§ 8.3 y § 8.4), el momento regular (§ 8.5) y la energía (§ 8.6 y § 8.7).

Uno de los objetivos fundamentales de este capítulo, es llegar a conocer cómo se puede describir el movimiento de un sistema respecto de un *SRI*. Su movimiento se reduce al de un punto característico del mismo (el *CDM*) respecto del *SRI*, compuesto en cada instante con el que tienen las diferentes «partes» del sistema, respecto de un referencial situado en el *CDM*. Este referencial debe conservar, en todo instante, sus ejes paralelos a los del *SRI*; puede ser inercial o no inercial.

§ 8.1. SISTEMAS DE PARTICULAS

Hasta ahora, hemos estudiado el movimiento de un cuerpo sin tener en cuenta sus dimensiones. Aunque ocupase un cierto volumen en el espacio, considerábamos que su movimiento quedaba perfectamente definido por el de un punto geométrico ligado a dicho cuerpo, y que tuviese una masa igual a la de aquél (**punto material**, § 2.1); recordemos por ejemplo los problemas de movimiento de un coche, de un avión, o de un bloque rectangular sobre un plano horizontal o inclinado.

El estudio del problema del movimiento se inició de esa forma porque es la más simple, como tendremos ocasión de comprobar, pero esta razón por sí sola no justificaría el uso de dicha aproximación.

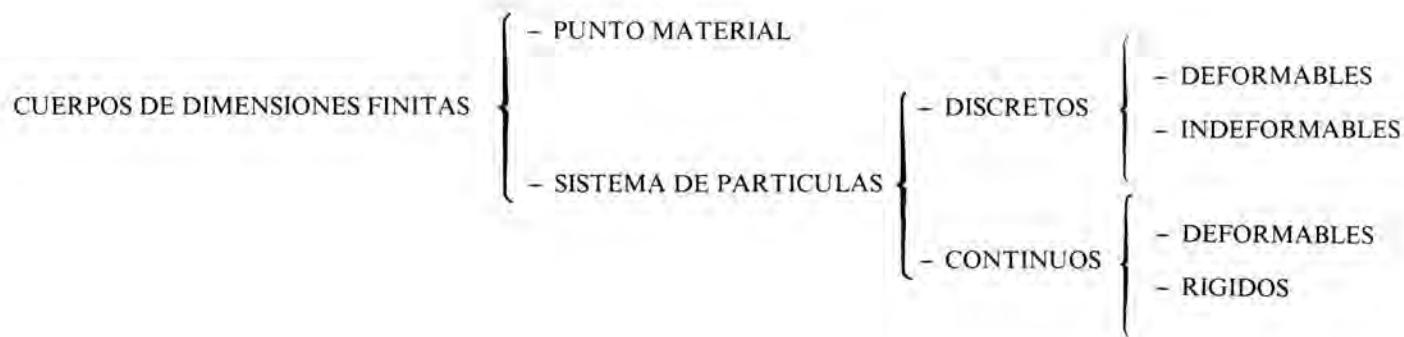
Recordemos (§ 2.1) que *el asimilar un cuerpo en movimiento a un punto material, es una aproximación válida en aquellos casos en que la precisión en la localización geométrica del cuerpo sea del orden de las dimensiones de éste*. También es válida en los casos en que no se cumpla la condición anterior, pero el movimiento del cuerpo sea exclusivamente de traslación (§ 9.1).

Existen ocasiones, como tendremos ocasión de comprobar, en las que es necesario tomar en consideración las dimensiones del cuerpo, es decir, su estructura interna. Esto ocurre cuando se necesita conocer el movimiento de un cuerpo con un grado de detalle que la aproximación anterior no es capaz de proporcionar; o cuando su movimiento no es exclusivamente de traslación.

Para estudiar estos problemas, la Física introduce unos modelos, a diferentes grados de complejidad, según la estructura de los cuerpos o el grado de aproximación que se deseé alcanzar en el estudio de su evolución temporal. En la tabla 8.1 se indican los diferentes grados de complejidad que suelen establecerse.

En la aproximación de sistema de partículas se toma en consideración la estructura del cuerpo. Por **sistema discreto** se entiende a aquel cuerpo que se considera formado por un conjunto finito de puntos materiales, y, por lo tanto, con una estructura discreta. Es la aproximación siguiente en complejidad a la de punto material. Estrictamente cualquier cuerpo, a **nivel microscópico** (es decir, teniendo en

TABLA 8.1



cuenta su estructura a nivel molecular o atómico), tiene una estructura discreta, y está compuesto por un número muy elevado de puntos materiales. Sin embargo, para explicar su comportamiento a nivel macroscópico se le considera formado por una distribución continua de materia, es decir, a nivel global se prescinde de su estructura discreta (piénsese, por ejemplo, en un hilo, un resorte, un coche, etc.) y se considera que llena completamente el espacio que ocupa. El concepto de continuidad de la materia es el postulado fundamental de la **Mecánica de los medios continuos**.

Dentro de los sistemas discretos se pueden distinguir los **deformables** y los **no deformables**, Fig. 8.1. En los primeros, la distancia relativa entre las partículas que lo forman puede cambiar en el transcurso del tiempo. En los segundos, permanece constante sean cuales fueren las interacciones que reciba el sistema por parte del medio.

En los sistemas o medios continuos se puede establecer la misma división. Los **medios deformables** son aquellos cuya forma se modifica al actuar fuerzas sobre ellos. En esta aproximación es donde se estudian los sólidos deformables y los fluidos. Respecto de los primeros, se buscan las leyes que relacionan las fuerzas que actúan sobre el sólido (tracción, cizalladura, esfuerzos, etc.) con las deformaciones que les producen. En los fluidos, las leyes que rigen su movimiento.

Los cuerpos que se estudian en la aproximación de **medios indeformables** reciben el nombre genérico de **sólidos rígidos**, Fig. 8.2. En ellos se supone que las fuerzas que actúan son tan pequeñas, o la estructura del cuerpo es tal, que no se deforma bajo su acción. Los sólidos reales sólo cumplen esta condición de manera aproximada ya que frente a cualquier perturbación sufren una deformación a nivel microscópico, pero son lo suficientemente pe-

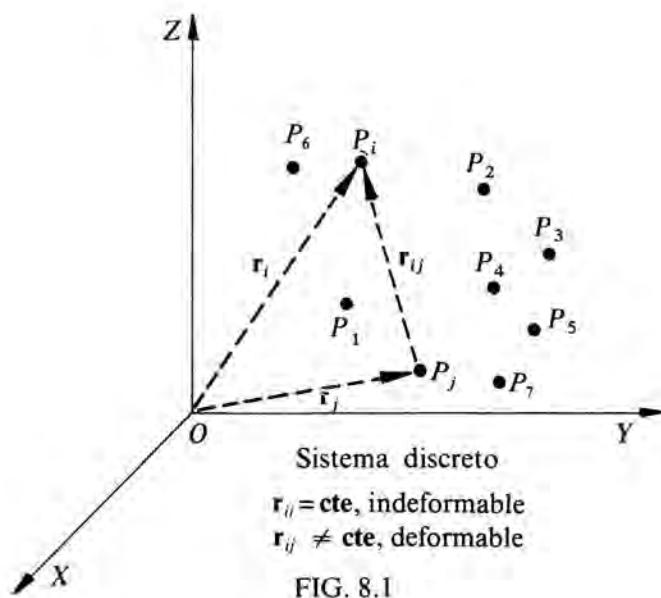


FIG. 8.1

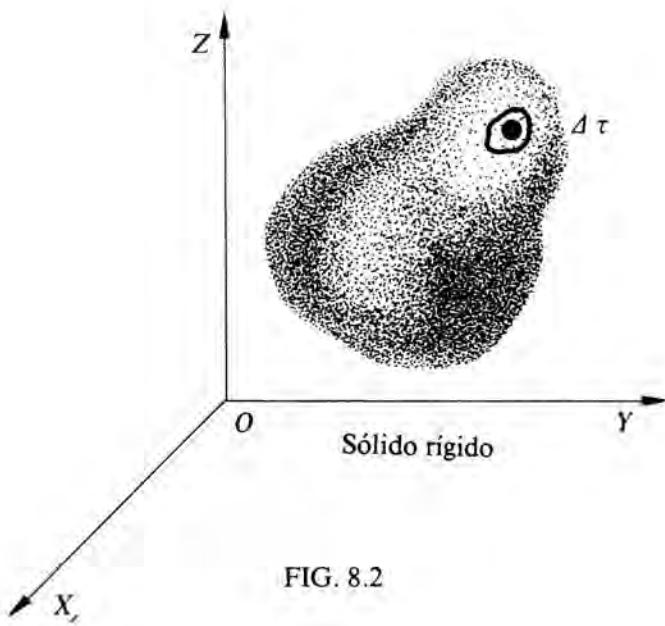


FIG. 8.2

queñas como para ser despreciables a nivel macroscópico.

Como ejemplos típicos de sistemas de medios indeformables podemos citar a los sólidos: una rueda, la carrocería de un coche, un proyectil, una piedra, etc. De medios deformables: un elástico, un resorte, un sólido articulado o que sus partes están unidas mediante hilos o cables, etc. Aunque sean medios continuos, en una primera aproximación se pueden considerar como sistemas de partículas, para no complicar el estudio con el tratamiento matemático, al tener que utilizar el cálculo diferencial e integral.

A nuestro nivel trataremos los sistemas discretos, fundamentalmente los no deformables, y daremos una pequeña introducción a la dinámica del sólido rígido. Los medios deformables quedan por completo fuera de los objetivos de este libro.

Una pregunta que surge de forma inmediata es: ¿cómo puede caracterizarse la posición de un sistema de partículas en el espacio, respecto a un sistema de referencia (*SR*)? Recordemos como se caracterizaba la posición de un punto material: dando sus coordenadas respecto a dicho *SR* (Figs. 1.11 a 1.13). Como para fijar su posición se necesitan tres coordenadas, se dice que un punto material tiene **tres grados de libertad**.

Para un sistema de partículas, la posición del mismo se podría determinar fijando la de cada uno de los puntos que lo forman. El problema puede ser de gran complejidad, si el sistema está compuesto por muchas partículas.

En el caso particular de un sólido rígido basta con fijar las posiciones de tres puntos del mismo que no estén alineados (Fig. 8.3). Si se especifica

sólo la posición de uno de los puntos, por ejemplo P_1 , el cuerpo podrá girar libremente alrededor de dicho punto y no estará, por lo tanto, establecida su orientación. Si se especifican dos, P_1 y P_2 , el cuerpo podrá seguir girando alrededor de la recta definida por ellos. Sin embargo, si se especifica también un tercer punto, P_3 , no alineado con los dos anteriores, se elimina toda ambigüedad y queda determinada tanto la posición como la orientación del sólido, y en consecuencia la posición de todas las partículas del cuerpo.

Según esto, puede parecer que se necesitan nuevas coordenadas para caracterizar el sólido en el espacio, las coordenadas de cada uno de los tres puntos. Sin embargo, éstas no son independientes sino que están relacionadas entre sí:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = r_{12}^2$$

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = r_{23}^2$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = r_{31}^2$$

donde r_{ij}^2 es la distancia constante que separa a P_i de P_j . Por tanto, sólo se precisarán seis números para especificar la posición y orientación de un sólido rígido, teniendo como consecuencia **seis grados de libertad**. Estos no tienen por qué ser seis coordenadas, normalmente son las tres coordenadas de un punto característico del sólido (§ 8.3) y tres ángulos, que son los que forman en cada instante un triángulo ortonormal, ligado al sólido y localizado en dicho punto, con los ejes del sistema de referencia respecto de los cuales se determina la posición de dicho punto.

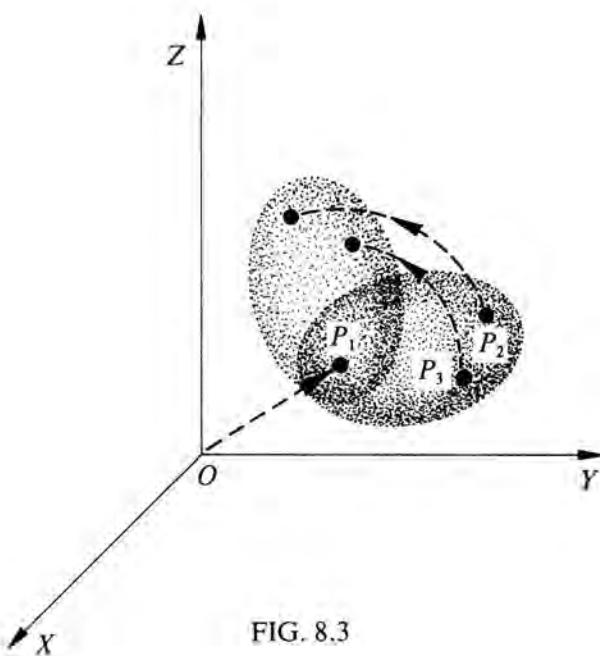


FIG. 8.3

§ 8.2 FUERZAS INTERIORES Y EXTERIORES

Dado un sistema compuesto por n partículas: $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$, en general éstas interactúan entre sí de forma más o menos complicada; además interactúan con otras partículas que no pertenecen al sistema: $P'_1, \dots, P'_n, \dots, P'_m$, (Fig. 8.4). Resulta útil clasificar las fuerzas que actúan sobre las partículas de un sistema en dos grupos:

- a) **Fuerzas exteriores**, son las fuerzas que actúan sobre las partículas de un sistema, debidas o ejercidas por partículas que no pertenecen al sistema. En la figura 8.4 son, por ejemplo, $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_k$. Las representaremos por \mathbf{F}_{ext} o simplemente \mathbf{F} .
- b) **Fuerzas interiores**, son las fuerzas que actúan sobre las partículas de un sistema debidas a parti-

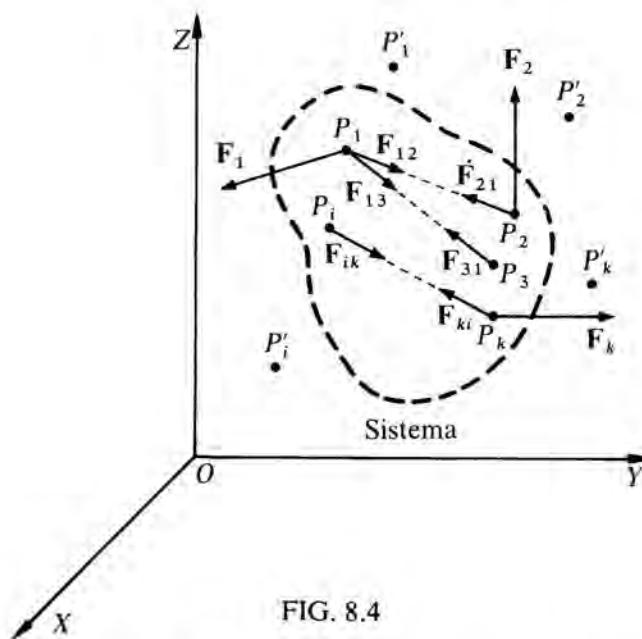


FIG. 8.4

culas que también pertenecen al sistema. En la figura son, por ejemplo, \mathbf{F}_{12} , \mathbf{F}_{31} , \mathbf{F}_{ik} , \mathbf{F}_{ji} , etc.

Recordando la tercera ley de Newton y el principio de superposición de fuerzas (§ 4.5), se verificará para las fuerzas interiores:

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{31} + \dots + \mathbf{F}_{kl} + \mathbf{F}_{lk} + \dots = \mathbf{0}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0} \quad (8.1)$$

es decir, la suma de todas las fuerzas interiores que actúan sobre un sistema de partículas es cero, tanto si el sistema se encuentra en equilibrio, como si no lo está.

La distinción anterior entre fuerzas interiores y exteriores sólo tiene sentido desde el punto de vista de un sistema determinado. Consideremos, por ejemplo, dos sistemas diferentes S y S' . Las fuerzas que actúan sobre cada uno de ellos y que son debidas a la acción del otro, son exteriores para el sistema considerado. Estas mismas fuerzas se convierten en interiores si se considera el sistema global formado por la unión de S y S' .

Ejercicio 8.1

Una persona de masa m , tira del extremo de una cuerda, que pasa por una polea unida al techo, con objeto de sostener una plataforma sobre la que se encuentra (Fig. 8.5). La persona tira de la cuerda con una fuerza F_{CH} ; si la plataforma tiene una masa M y el sistema se encuentra en equili-

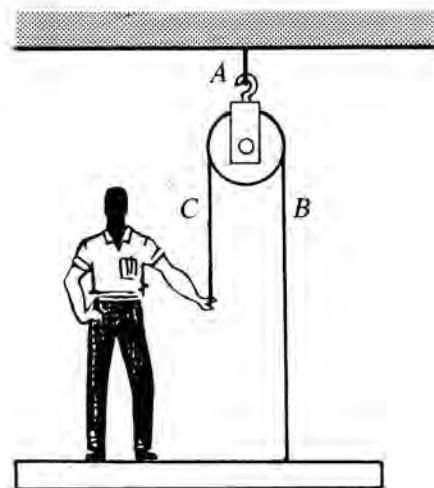


FIG. 8.5

brio, ¿qué fuerzas actúan sobre cada una de las partes en que se puede descomponer el sistema? Clasificarlas en interiores y exteriores.

Se supone que la cuerda es inextensible y de masa despreciable; la polea es de masa despreciable. Asimismo se desprecia el rozamiento de la cuerda con la polea.

Solución:

Conviene recordar que una cuerda de masa despreciable (Ejercicio 4.2) transmite a lo largo de ella la fuerza ejercida en un extremo. Si la cuerda pasa a través de una polea ideal, ésta sólo cambia la dirección en que actúa la fuerza aplicada en un extremo de la cuerda, pero no su módulo. Por polea ideal se entiende la que es de masa despreciable y no presenta rozamiento con la cuerda que pasa por ella.

Para resolver cualquier problema de Mecánica, insistimos una vez más, es conveniente aislar cada una de las partes en que claramente se pueda considerar formado el sistema, y sustituir la acción de las restantes sobre ella por la fuerza que ejercen.

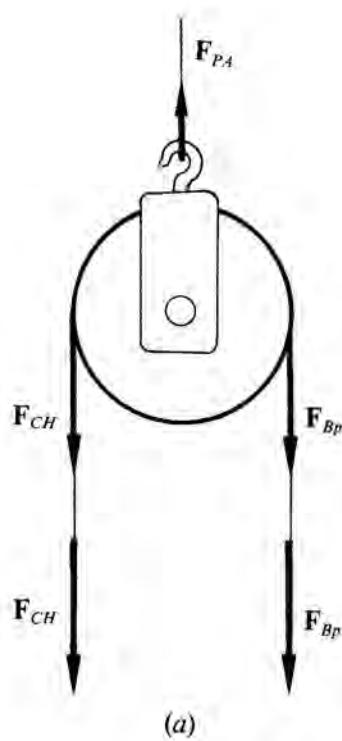
En el ejercicio propuesto estas partes podrían ser: la polea y la cuerda, la persona y la plataforma. Las fuerzas que actúan sobre cada una de ellas se indican esquemáticamente en la Fig. 8.6 a, b, y c.

Fuerzas sobre el sistema cuerda BC-polea:

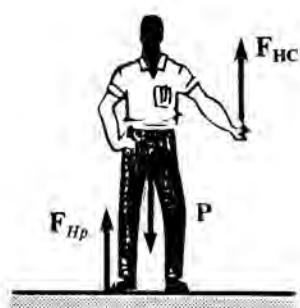
- \mathbf{F}_{PA} : Fuerza que ejerce la cuerda A sobre la polea.
- \mathbf{F}_{BP} : Fuerza que ejerce la plataforma sobre la cuerda B .
- \mathbf{F}_{CH} : Fuerza que ejerce la persona sobre el tramo C de la cuerda.

Fuerzas sobre la persona:

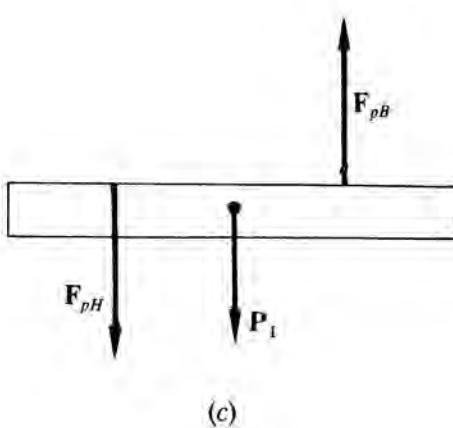
- \mathbf{P} : Peso de la persona, (mg)
- \mathbf{F}_{CH} : Fuerza que ejerce la cuerda C sobre la persona.
- \mathbf{F}_{HP} : Fuerza que ejerce la plataforma sobre la persona.



(a)



(b)



(c)

FIG. 8.6

Fuerzas sobre la plataforma:

- F_{pB} : Fuerza que ejerce el tramo B de la cuerda sobre la plataforma.
 P_1 : Peso de la plataforma. (Mg)
 F_{pH} : Fuerza que ejerce la persona sobre la plataforma.

Si consideramos el sistema formado exclusivamente por la persona, entonces P , F_{HC} , F_{pH} son fuerzas exteriores (serían interiores, por ejemplo, la que ejerce el antebrazo sobre el brazo, y éste sobre aquél). Sin embargo, si se considera el sistema formado por la persona y la plataforma: P , F_{HC} , F_{pB} , P_1 son fuerzas exteriores, y F_{pH} , F_{pB} son interiores. Si como sistema se incluye a la polea, cuerda BC , persona y plataforma, todas las fuerzas son interiores, a excepción de F_{PA} , P y P_1 . ¿Por qué los pesos son fuerzas exteriores?

§ 8.3 MOMENTO LINEAL DE UN SISTEMA DE PARTICULAS

Comenzaremos ahora a estudiar la dinámica de los sistemas de partículas, es decir, la evolución temporal de éstos bajo la acción de fuerzas interiores y exteriores.

Su movimiento estará perfectamente determinado cuando se conozca la evolución temporal de cada una de las partículas que lo forman. Aplicando la segunda ley de Newton (4.6) a cada una de las partículas, tendremos n ecuaciones, si éste es el número de puntos en el sistema, de la forma:

$$\mathbf{F}_{ext_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \mathbf{F}_{ij} = m_i \mathbf{a}_i \quad (8.2)$$

donde \mathbf{F}_{ext_i} representa la suma de todas las fuerzas exteriores que

actúan sobre la partícula i ; $\sum_j \mathbf{F}_{ij}$ la suma de las fuerzas interiores.

De esta manera el problema estaría formalmente resuelto. Sin embargo esta solución del problema presenta problemas prácticos. Si n es muy grande la solución del sistema de ecuaciones (8.2) puede ser tediosa y compleja. Pero aún suponiendo que mediante las potentes máquinas de calcular esto fuese posible, nos encontraríamos con otros dos problemas de índole más profunda. En las ecuaciones anteriores intervienen de forma explícita las fuerzas interiores, que en general no se conocen «a priori» y son, por lo tanto, otras incógnitas. Por otra parte, aún suponiendo que llegásemos a disponer de la solución, ¿cuál sería su utilidad a la hora de extraer de ella información sobre magnitudes macroscópicamente observables?; piénsese, por ejemplo, en el caso de un resorte o de un gas encerrado en un globo que va ascendiendo en la atmósfera. Luego, resulta prácticamente imposible estudiar el movimiento de un sistema macroscópico, mediante la descripción microscópica de sus partículas, según la segunda ley de Newton.

La forma de abordar el problema consiste en introducir nuevas magnitudes dinámicas que eviten las dificultades anteriores. Algunas de éstas serán una generalización de las definidas para el punto, otras no tienen equivalente en la dinámica de la partícula.

Planteemos nuevamente el problema con objeto de introducir las dos primeras magnitudes: el momento angular y el centro de masas.

Sea un sistema compuesto por n puntos materiales: $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$. Si sumamos las n ecuaciones (8.2) que verifica cada uno de ellos, tendremos:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{ext,i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \quad (8.3)$$

donde el primer sumando del primer miembro representa la suma de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema, \mathbf{F}_{ext} . El segundo representa la suma de todas las fuerzas interiores que actúan sobre el sistema y que según vimos (§ 8.2) es cero.

Por lo tanto, (8.3) se reduce a:

$$\mathbf{F}_{ext} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \right) \quad (8.4)$$

Se define el **momento lineal de un sistema de partículas** como:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \quad (8.5)$$

se trata simplemente de una generalización de la definición dada para una partícula (6.14). Sustituyendo (8.5) en (8.4):

$$\mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (8.6)$$

luego, llegamos al mismo resultado formal que para una partícula (6.15): «La suma de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema es igual a la variación del momento lineal del mismo». Este enunciado es el que suele denominarse: **Teorema del momento lineal para un sistema de partículas**. Nos indica que sólo las fuerzas exteriores pueden hacer variar dicho momento lineal, *las fuerzas interiores no le producen ningún cambio*.

CENTRO DE MASAS

Podemos llevar más lejos el paralelismo indicado por (8.6), entre una partícula y un sistema. Para ello

escribamos:

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V} \quad M = \sum_{i=1}^n m_i \quad (8.7)$$

con lo cual tendremos que el momento lineal del sistema es igual al de un «punto» de masa igual a la total del sistema y velocidad \mathbf{V} . Esto lo podemos hacer si definimos esta velocidad como:

$$\mathbf{V} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i}{M} \quad (8.8)$$

integrando (8.8), ver cuestión 6, conoceremos el vector de posición de dicho punto, respecto al referencial elegido:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{M} \quad (8.9)$$

a este «punto» se le denomina **centro de masas del sistema**.

Según (8.5) y (8.6),

$$\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}_{CDM}, \quad \mathbf{R} \equiv \mathbf{R}_{CDM} \quad (8.10)$$

luego: «el centro de masas (*CDM*) de un sistema cualquiera de partículas, deformable o no, tiene el mismo movimiento que un punto material cuya masa fuese igual a la total del sistema y sobre el que actuasen la suma de todas las fuerzas exteriores que lo hacen sobre el sistema». Este enunciado, que se conoce con el nombre de **Teorema del centro de masas**, es una generalización, para un sistema, de la segunda ley de Newton. Por lo tanto, se puede estudiar la evolución temporal de un sistema (8.6), a partir del movimiento que tiene el *CDM* (8.10) del mismo. La ventaja que presenta esta descripción es que no es necesario hacer intervenir el movimiento de los puntos del sistema, ni las fuerzas interiores.

Veamos algunos ejemplos que clarifiquen los conceptos anteriores: Supongamos un sólido que tenga un movimiento muy complicado, por ejemplo un bloque o una cadena lanzados al aire. Estos cuerpos se desplazarán y girarán sobre ellos de manera compleja, sobre todo la cadena que se puede considerar un sistema deformable, pero el *CDM* de cada uno de ellos, que se encontrará sometido al peso como única fuerza exterior (si se desprecia la resistencia del aire) describirá una parábola (Fig. 8.7). ¿Sabría el alumno justificar razonadamente este comportamiento?

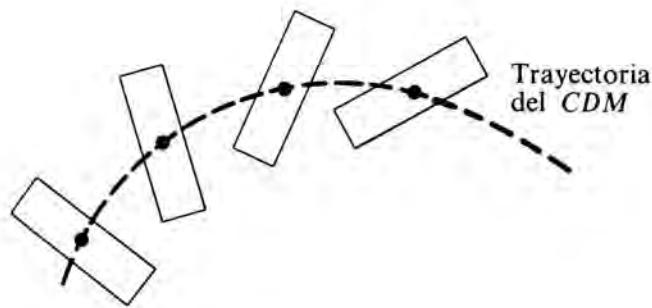


FIG. 8.7

Si imaginamos un proyectil lanzado por un cañón, que explota en el aire (Fig. 8.8) el *CDM* de los fragmentos continuará describiendo la parábola original. El peso es la única fuerza exterior que actúa, y no cambia al producirse la explosión ya que la fuerza de atracción gravitatoria es constante en las proximidades de la superficie terrestre. Si la fuerza de atracción dependiese de la posición, los fragmentos resultantes de la explosión estarían sometidos a fuerzas exteriores distintas de la original que determinaba la parábola; la trayectoria del *CDM* no continuaría siendo la misma que antes de la explosión, ya que la suma de las fuerzas exteriores sería diferente. Por ejemplo, si como consecuencia de un cataclismo cósmico explotase un planeta del sistema solar, el *CDM* de los fragmentos resultantes seguiría la órbita elíptica original del planeta, ya que las fuerzas exteriores sobre los fragmentos serían distintas que las que actuaban sobre aquél.

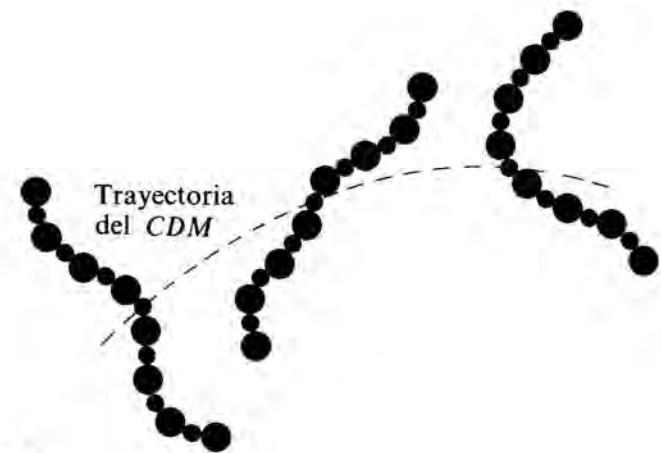


FIG. 8.7

En el caso de un sólido con movimiento de traslación (§ 9.1), todos los puntos tienen en un instante dado la misma velocidad y aceleración, y en particular su *CDM*; el teorema anterior permite reducir el problema del movimiento de un sistema al de un punto material. Esto es lo que hemos hecho, aún sin indicarlo, en los capítulos anteriores, cuando abordamos ejemplos de cuerpos con dimensiones finitas, y la teoría sólo se estudiaba para el punto material.

Propiedades del *CDM* de un sistema:

- Permite reducir el estudio de la dinámica de un sistema al de una partícula (8.10). Ahora bien, hay que tener en cuenta que este estudio no proporciona una información total sobre el movimiento real del sistema; ya que a partir del mismo no se puede concluir nada acerca del movimiento de unas partes del sistema respecto de otras. Para completarlo hay que estudiar el movimiento relativo (§ 3.2) de las partículas del sistema respecto del *CDM*.

Resumiendo, podemos decir que *para estudiar de forma total el movimiento de un sistema respecto de un SRI hay que:*

- Conocer cómo se mueve CDM del sistema respecto de dicho referencial inercial .*
- Describir el movimiento relativo de las partículas del sistema respecto al CDM.*

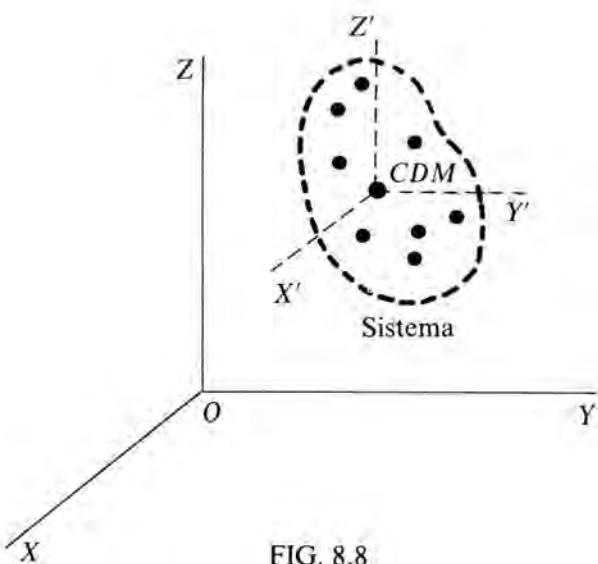


FIG. 8.8

La forma más simple de abordar esta segunda parte del problema es *elegir un sistema de referencia localizado en el CDM* –ya que es el punto respecto del cual queremos estudiar el movimiento relativo– *que se mueva con él, pero cuya orientación permanezca paralela respecto del sistema de referencia inercial*, en el que se describe el movimiento del *CDM* (punto 1.º), (3.37;

ver cuestión 8). El sistema localizado en el *CDM* no será, en general, inercial.

- b) El *momento lineal de un sistema* es igual al de su *CDM*: (8.5), (8.7) y (8.8).
- c) La expresión (8.9) localiza el *CDM* respecto de un sistema de referencia inercial. Sus coordenadas cartesianas serán:

$$x_{CDM} = \frac{\sum m_i x_i}{M}, \quad y_{CDM} = \frac{\sum m_i y_i}{M}, \quad z_{CDM} = \frac{\sum m_i z_i}{M} \quad (8.11)$$

Obsérvese que si el origen del sistema de referencia se localiza en el *CDM* ($\mathbf{R}_{CDM} = \mathbf{0}$): $\sum m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$. ¿Qué representan en (8.11) x_i, y_i, z_i ?

- d) La posición del *CDM* respecto del cuerpo, es independiente del sistema de referencia utilizado para localizarlo; sólo depende de las masas de las partículas y de sus posiciones relativas entre sí.

En efecto, sea el sistema representado en la Fig. 8.9, según (8.9):

$$\mathbf{R}_{CDM} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M} \quad \mathbf{R}'_{CDM} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}'_i}{M}$$

pero (3.21):

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{00}' + \mathbf{r}'_i \quad \mathbf{R}_{CDM} = \mathbf{R}'_{CDM} + \mathbf{00}'$$

por lo tanto:

$$\mathbf{R}'_{CDM} = \frac{\sum_i m_i (\mathbf{r}'_i - \mathbf{00}')} {M} \rightarrow \mathbf{R}'_{CDM} = \mathbf{R}_{CDM}$$

(c. q. d.)

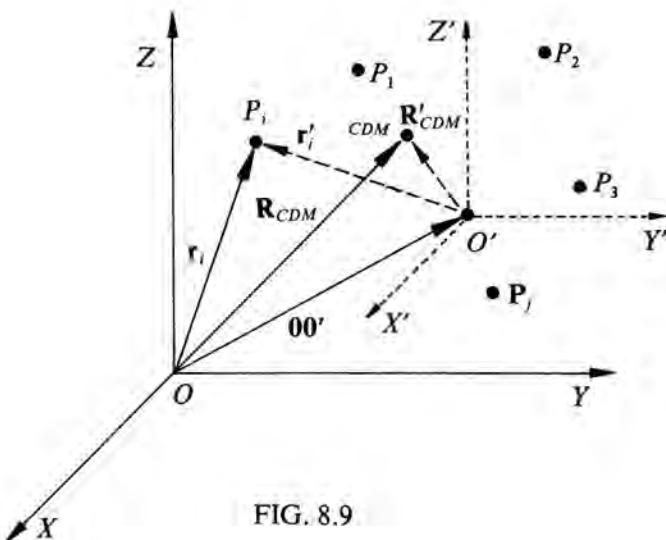


FIG. 8.9

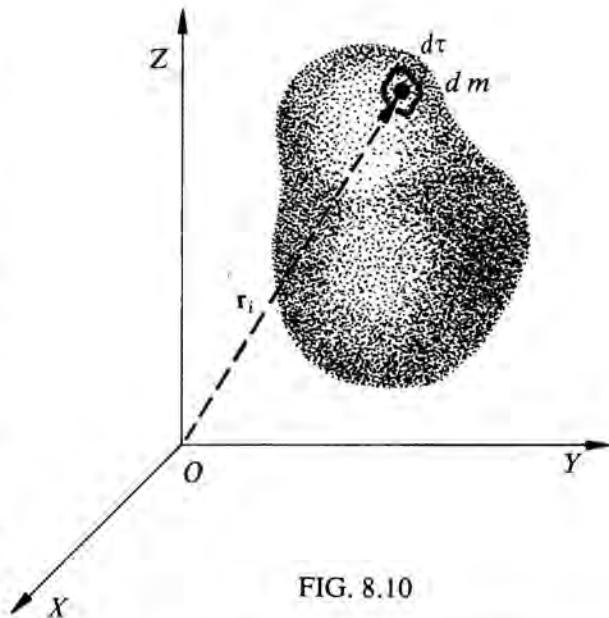


FIG. 8.10

- e) Para los cuerpos en que se considera una *distribución continua de masa* (*medios continuos*) el *CDM* viene definido (Fig. 8.10) por:

$$x_{CDM} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum_i \Delta m_i x_i}{\sum_i \Delta m_i} = \frac{1}{M} \int dm x = \frac{1}{M} \int x \rho dt$$

$$y_{CDM} = \frac{1}{M} \int dm y = \frac{1}{M} \int y \rho dt, \quad z_{CDM} = \frac{1}{M} \int dm z = \frac{1}{M} \int z \rho dt$$

donde se ha hecho uso de la definición diferencial de densidad volúmica: $\rho = dm/dt$

Las expresiones anteriores se obtienen dividiendo el cuerpo en n elementos pequeños de masa Δm_i ; si estos elementos se siguen subdividiendo, de manera que su número tienda a infinito, y teniendo en cuenta el concepto de integral definida que se estudia en Matemáticas, se obtienen las coordenadas del *CDM* anteriores. De todos modos, el alumno puede comprender que este problema es eminentemente matemático, y por lo tanto no adecuado para aplicarlo a nivel práctico en este curso, ya que no domina todavía el cálculo integral. Cuando se trata de *un cuerpo homogéneo* ($\rho = \text{cte}$, es decir, la masa se encuentra uniformemente distribuida en todo el volumen) que tenga un punto, una línea o un plano de simetría el *CDM* se encuentra en el elemento de simetría que presenta. Por ejemplo, el *CDM* de una esfera homogénea se encuentra en su centro, el de un cono en el eje del cono, etc. La razón es la misma por la cual en un sistema discreto compuesto por dos partículas, el *CDM* se encuentra a lo largo de la línea que las une; y si sus masas son iguales en su punto medio.

- f) El CDM es un punto geométrico que no tiene porqué corresponderse con la posición de una partícula material del sistema (ver cuestión 11). Ahora bien, habrá ocasiones en que el CDM esté localizado en un punto donde se encuentre alguna partícula del sistema, Fig. 8.10.
- g) Para un cuerpo de dimensiones pequeñas, comparadas con las de la Tierra, el centro de gravedad (CDG) coincide con su CDM. El CDG es el punto donde se encuentra aplicado el peso del cuerpo. Téngase en cuenta que el concepto de CDM es mucho más general que el de CDG, ya que aquél es independiente de la posible existencia de un campo gravitatorio.

Ejercicio 8.2

Un sistema está formado por tres partículas de masas respectivas 3 kg, 2 kg y 5 kg. La primera tiene una $\mathbf{v}_1 = 6\mathbf{j}$; la segunda se mueve con una velocidad de 8 m s^{-1} , en una dirección que forma un ángulo de -30° con el eje OX . Calcular la velocidad de la tercera partícula para que el CDM se encuentre en reposo respecto al observador.

Solución:

La velocidad del CDM para un observador que se encuentre en un sistema de referencia inercial, viene dada por (8.8):

$$\mathbf{V}_{CDM} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + m_3 \mathbf{v}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\mathbf{v}_1 = 6\mathbf{j}; \quad \mathbf{v}_2 = 8(\cos 30^\circ \mathbf{i} - \mathbf{j} \sin 30^\circ) = 4\sqrt{3}\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$

para dicho observador, según dice el enunciado, el CDM se encuentra en reposo, por lo tanto $\mathbf{V}_{CDM} = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{0} = 18\mathbf{j} + (8\sqrt{3}\mathbf{i} - 8\mathbf{j}) + 5\mathbf{v}_3, \quad \mathbf{v}_3 = -2,77\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$$

§ 8.4 TEOREMA DE CONSERVACION DEL MOMENTO LINEAL

A partir de (8.6) se deduce que *si las sumas de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema es nula, el momento lineal del mismo permanece constante*:

$$\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{P} = \text{cte} \quad (8.12)$$

Luego, el momento lineal de un sistema sólo puede variar por la acción de las fuerzas exteriores, las fuer-

zas interiores no influyen sobre el mismo. De (8.5) también se deduce que aunque permanezca constante el momento lineal del sistema, varía el de cada una de las partículas que lo forman, pero su suma permanece constante:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_i + \dots + \mathbf{p}_n = \mathbf{P} = \text{cte} \quad (8.13)$$

Este teorema es aplicable a muchas situaciones de interés físico. Estrictamente sólo para un **sistema aislado** (que es aquel que no interacciona con ninguna partícula exterior al mismo) se conserva el momento lineal; un sistema de este tipo sería el universo considerado como un todo. Sin embargo, en muchas situaciones de interés para la Física, existen sistemas que pueden considerarse como prácticamente aislados. Por ejemplo, un átomo de hidrógeno (sistema formado por un protón, un neutrón y un electrón), se considera normalmente como aislado, aunque sobre él actúen las fuerzas de interacción gravitatoria debidas a la Tierra y el Sol, que son exteriores.

Una aplicación muy importante de este teorema es cuando las fuerzas interiores que ejercen unas partes del sistema sobre otras son impulsivas. Por **fuerzas impulsivas** se entienden unas fuerzas de gran intensidad, pero que actúan durante un intervalo de tiempo pequeño, produciendo un efecto que es fácilmente observable. Como ejemplos se pueden citar: la que actúa sobre una pelota de golf o de tenis cuando se golpean, las que se ejercen entre los diferentes fragmentos de una granada al explotar, la colisión entre partículas elementales en una reacción nuclear, la emisión de partículas en una desintegración radiactiva, etc.

Este tipo de fuerzas son tan intensas que, durante los pequeños intervalos de tiempo en que actúan, pueden considerarse despreciables todas las demás que lo hacen sobre el sistema.

Como las fuerzas impulsivas son interiores al sistema, su momento lineal se conservará, aunque actúen las fuerzas exteriores debidas a la interacción gravitatoria, por ejemplo. Hay que tener en cuenta que en estos casos se verificará:

$$\mathbf{P}_{ANTES} - \mathbf{P}_{DESPUES} = \mathbf{0} \quad (8.14)$$

donde \mathbf{P}_{ANTES} y $\mathbf{P}_{DESPUES}$ representan, respectivamente, los momentos lineales del sistema en los instantes justo antes y después del intervalo de tiempo en que actúan las fuerzas impulsivas. Fuera de este intervalo de tiempo las fuerzas exteriores no impulsivas no pueden ser despreciadas, y el momento lineal no se conserva. Como aplicaciones de (8.14) el alumno puede recordar los ejemplos clásicos estudiados en cursos elementales: estudio del retroceso de un cañón al lanzar un obús, de una escopeta al disparar un proyectil, etc.

Hay que recordar que para llegar al teorema de conservación del momento lineal se ha admitido que las fuerzas interiores verifican las leyes clásicas del movimiento (capítulo IV). Por lo tanto, parece lógico pensar que el mismo sólo tendrá validez dentro del marco de la Mecánica Clásica. Sin embargo, su validez se verifica también en la Física Atómica y Nuclear, es decir, a nivel de las componentes elementales de la materia, donde no es válida la Mecánica de Newton. Por consiguiente, este teorema tiene, desde este punto de vista, un rango de validez mayor que las leyes clásicas del movimiento. También este teorema se verifica dentro del marco de la Mecánica Relativista (§ 4.1), aunque en este caso es necesario modificar de manera apropiada la definición de momento lineal. La razón de esta validez es que el teorema se puede demostrar sin hacer uso de la tercera ley de Newton, aunque la demostración en esos términos se encuentra fuera del nivel de este curso. *El teorema de conservación del momento lineal es una de las leyes fundamentales de la Naturaleza.*

Ejercicio 8.3

Se dispara un proyectil con una velocidad inicial de 400 m s⁻¹ y formando un ángulo de 60° con la horizontal. En el punto más alto de su trayectoria explota y se parte en dos fragmentos, A y B, de igual masa. El fragmento A cae, partiendo del reposo, siguiendo la vertical del punto de explosión. ¿Cuál es la trayectoria del fragmento B? ¿A qué distancia del punto de partida cae éste? Se supone que el terreno es horizontal.

Solución:

Ya indicamos que un sistema de partículas se mueve globalmente como si toda su masa estuviese concentrada en el CDM y en él se aplicasen las fuerzas exteriores que actúan. Sobre el proyectil la única fuerza exterior que actúa es la debida a la atracción de la Tierra (es decir, su peso), por lo tanto el CDM de los fragmentos seguirá describiendo la trayectoria parabólica, que hubiese seguido el proyectil de no explotar (Fig. 8.11).

La explosión es debida a fuerzas impulsivas interiores, por lo tanto el momento lineal del sistema inmediatamente antes y después debe ser el mismo, aunque actúe el peso como fuerza exterior.

$$\mathbf{P}_{\text{ANTES}} = \mathbf{P}_{\text{DESPUES}}$$

$$M_{\text{proyectil}} \mathbf{V}_{\text{ANTES}} = m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B \quad (8.15)$$

$M_{\text{proyectil}} = m_A + m_B = 2 m$, ya que la masa ha de conservarse; puesto que cae partiendo del reposo. Al explotar en el punto más alto de la trayectoria: $\mathbf{V}_{\text{ANTES}} = \mathbf{V}_{\text{ANTES}} \mathbf{i}$. Las ecuaciones paramétricas, en función de t , del proyectil, así como las componentes de velocidad serán (§ 3.1, ejercicio 3.2):

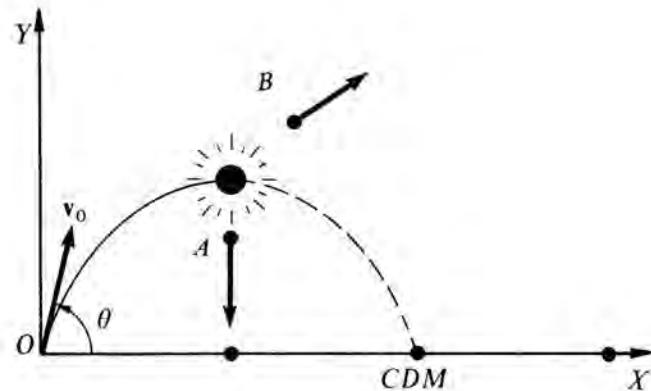


FIG. 8.11

$$\begin{aligned} y &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2, & v_y &= v_{0y} - gt \\ x &= v_{0x}t, & v_x &= v_{0x} \end{aligned} \quad \mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} \quad (8.16)$$

ya que como sabemos se trata de la composición de un movimiento uniforme según el eje OY y uno uniformemente acelerado en el OY . Puede comprobar el alumno que la trayectoria es una parábola de eje OX :

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} x^2 \quad (8.17)$$

El punto más alto de la trayectoria tiene como características: ser la ordenada y máxima y nula la componente v_y de la velocidad del proyectil. Haciendo uso de la segunda:

$$t = v_{0y}/g \quad (8.18)$$

que es el tiempo que tarda en llegar a dicho punto, desde que se lanzó. La distancia, contada sobre el eje de abcisas, a que se encontrará el proyectil en dicho instante es:

$$x = \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} \quad (8.19)$$

y su velocidad: $v_y = 0$, $v_x = v_0 \cos \theta$. Aunque para llegar a este resultado no hacían falta los razonamientos anteriores, se han incluido para recordarle el alumno la aplicación del principio de la independencia de los movimientos (§ 3.1).

$$v_x = 400 \cos 60^\circ = 200 \text{ m s}^{-1} \quad (8.20)$$

En dicho instante el proyectil se encuentra a una altura:

$$y_{\text{MAX}} = 1/2 \frac{v_{0y}^2}{g}, \quad y_{\text{MAX}} = 6055,2 \text{ m}$$

y a una distancia del origen: $x = v_{0x} \frac{v_{0y}}{g}$, $x = 6928,2 \text{ m}$.

A partir de (8.15) y teniendo en cuenta (8.20):

$$400\mathbf{i} = (v_{Bx}\mathbf{i} + v_{By}\mathbf{j}) \rightarrow v_{Bx} = 400, v_{By} = 0$$

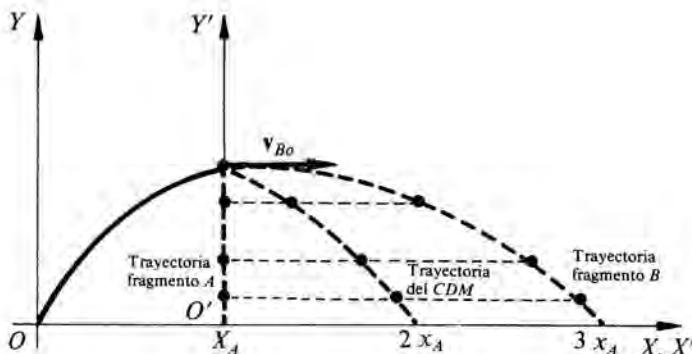


FIG. 8.12

El fragmento *A* cae verticalmente partiendo del reposo; el *B* sale, a partir del punto de la explosión, con una velocidad inicial: $v_B = 400 \text{ m/s}$, Fig. 8.12.

Se puede demostrar que los dos fragmentos y el *CDM*, con las condiciones indicadas, llegan al suelo en el mismo instante. Las trayectorias respectivas son las indicadas en la Fig. 8.12, ¿por qué?

Para estudiar el movimiento de los fragmentos después de la explosión, elegimos como nuevos ejes $O'X'Y'$, Fig. 8.12. A partir de (8.11):

$$x_{CDM}(t) = \frac{x_A + x_B(t)}{2}, \quad x_A = 6928,2 \text{ m}$$

Teniendo en cuenta (8.19):

$$x'_{CDM} = v_{CDM} t = 200 t, \quad x'_B(t) = 400 t \quad (8.21)$$

¿Puedes justificar estas relaciones? De (8.19):

$$x'_B(t) = 2 x'_{CDM}(t) \quad (8.22)$$

Cuando llega al suelo:

$$x_{CDM} = 2 x_A = \frac{x_A + x_B}{2} \quad (8.23)$$

donde hemos tenido en cuenta (8.11). De (8.22) y (8.23) se deduce:

$$x_B = 3 x_A, \quad x_B = 20.784,6 \text{ m}$$

§ 8.5 MOMENTO ANGULAR DE UN SISTEMA DE PARTICULAS

Se define el **momento angular de un sistema de partículas** respecto de un punto *O* como:

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad (8.24)$$

se trata también de una generalización de la definición dada para una partícula (6.16).

Resulta útil relacionar el momento cinético respecto de un punto *O* con el momento respecto al *CDM* del sistema (Fig. 8.13):

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_{CDM} + \mathbf{R}_{CDM} \times M \mathbf{V}_{CDM} \quad (8.25)$$

donde $\mathbf{L}_{CDM} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}'_i$, representa el momento angular del sistema respecto de un referencial situado en el *CDM* del sistema, y cuya orientación no varie respecto al referencial fijo $OXYZ$. *M* es la masa total del sistema y \mathbf{V}_{CDM} la velocidad del *CDM*.

Fíjese el alumno que *para demostrar* (6.17), y su equivalente para un sistema de partículas, se exigía que O' estuviese en reposo respecto de *O*, sin embargo (8.25), que es formalmente análoga a aquellas, se verifica sin que el *CDM* tenga que estar en reposo.

Demostración de (8.23): Por definición del momento angular (8.24) y teniendo en cuenta la Fig. 8.13 y (3.29):

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}_{CDM}) \times m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{V}_{CDM})$$

donde hemos cambiado ligeramente la notación respecto de (3.29):

$$\mathbf{V}_{O'} \equiv \mathbf{V}_{CDM}, \quad \mathbf{v}'_i \equiv \mathbf{v}_i$$

Recordando (1.25):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_O &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{V}_{CDM}) + \mathbf{R}_{CDM} \times \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{V}_{CDM}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{V}_{CDM} + \mathbf{R}_{CDM} \times \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i + \\ &\quad + \mathbf{R}_{CDM} \times \mathbf{V}_{CDM} \sum_{i=1}^n m_i \end{aligned}$$

Veamos el significado de cada uno de estos cuatro sumandos:

* $\sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{L}_{CDM}$, momento angular del sistema respecto del *CDM*.

$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{V}_{CDM} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i m_i \times \mathbf{V}_{CDM} = \mathbf{0}$, por definición de *CDM*,

ya que en (8.9) las \mathbf{r}'_i representan los vectores de posición de cada partícula respecto del referencial del cual la posición del *CDM* es \mathbf{R}_{CDM} . Como \mathbf{r}'_i es el vector de posición de una partícula respecto de un referencial localizado en el *CDM*, respecto del mismo $\mathbf{R}_{CDM} = \mathbf{0}$ luego $\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}$.

* $\mathbf{R}_{CDM} \times \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{0}$, por la misma razón anterior, haciendo uso ahora de (8.8).

* $\mathbf{R}_{CDM} \times M \mathbf{V}_{CDM}$, representa el momento angular del *CDM*, supuesta concentrada en él toda la masa del sistema, respecto del *SRI*, luego queda demostrada la relación (8.25).

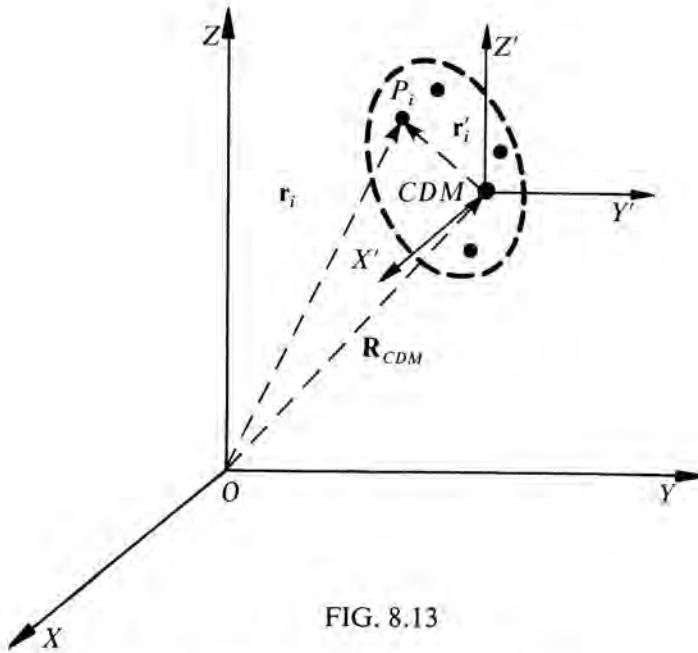


FIG. 8.13

La relación (8.25) también suele escribirse:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_{\text{intrínseco}} + \mathbf{L}_{\text{orbital}} \quad (8.26)$$

Mediante $\mathbf{L}_{\text{orbital}}$ se designa al momento angular respecto del origen de un SRI:

$$\mathbf{L}_{\text{orbital}} = \mathbf{R}_{\text{CDM}} \times M\mathbf{V}_{\text{CDM}} \quad (8.27)$$

La terminología está tomada del estudio del movimiento de los planetas. Representa el momento angular del sistema en su movimiento de traslación (§ 9.1).

El sumando $\mathbf{L}_{\text{intrínseco}}$ representa el momento angular del sistema respecto del referencial localizado en el CDM. Está determinado exclusivamente por magnitudes referidas al movimiento del sistema respecto al CDM del mismo, lo cual justifica el apelativo de « intrínseco ». Esta separación del momento angular total en dos partes resulta muy conveniente, en particular cuando se estudia el movimiento de sistemas rígidos, discretos o continuos, que giran sobre sí mismos, al mismo tiempo que alrededor de otro cuerpo. Se puede demostrar, que en el caso de sistemas rígidos el único movimiento posible alrededor del CDM es una rotación.

Esta descomposición de \mathbf{L}_0 encuentra aplicación, por ejemplo, en el estudio del movimiento de los planetas alrededor del Sol o de las partículas atómicas y subatómicas que constituyen la materia. En este caso el momento intrínseco también se denomina **momento angular de spin**, ya que el « movimiento de rotación » sobre sí mismas se denomina mediante dicha palabra inglesa. El momento orbital, para dichos sistemas, es el que tienen los electrones en su movimiento alrededor del núcleo o la Tierra alrededor del Sol.

En Mecánica Cuántica y en Química el alumno hará uso exhaustivo de estos conceptos y verá que el momento angular es una magnitud fundamental para describir el comportamiento de las moléculas y átomos. Allí estudiará que según las reglas de cuantificación para describir el comportamiento de los electrones en un átomo, $\mathbf{L}_{\text{orbital}}$ es un múltiplo entero de $h/2\pi$, donde h es la constante de Plank.

A partir de (8.25) se observa que si el CDM de un sistema en movimiento se encuentra en reposo, el momento angular del sistema es el mismo para el punto O, que para el CDM: $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_{\text{CDM}}$. Por ejemplo, al momento angular de la rueda de un molino de viento le ocurre ésto. En (8.25) sólo queda \mathbf{L}_{CDM} ; el movimiento de las aspas alrededor del CDM es una rotación, \mathbf{L}_{CDM} es la aportación a \mathbf{L}_0 debida a dicha rotación.

El caso opuesto, es el de un sistema que sólo presenta movimiento de traslación. En este caso veremos que todos los puntos del mismo tienen, en cualquier instante la misma velocidad. Por lo tanto: $\mathbf{L}_{\text{CDM}} = 0$, ya que $\mathbf{v}'_i = \mathbf{0}$; en (8.25) sólo queda el término $\mathbf{L}_{\text{orbital}}$ (8.24), con lo que se ratifica nuestra afirmación anterior: $\mathbf{L}_{\text{orbital}}$ representa la aportación del movimiento de traslación del sistema a \mathbf{L}_0 .

De manera análoga a (6.21) se puede demostrar el **Teorema del momento angular para un sistema de partículas**, respecto del CDM:

$$\mathbf{M}_{\text{ext,CDM}} = \frac{d \mathbf{L}_{\text{CDM}}}{dt} \quad (8.28)$$

Este teorema expresa que *la variación temporal del momento angular de un sistema respecto del CDM, es igual al momento total de las fuerzas exteriores que actúan sobre el mismo, tomado dicho momento respecto del CDM*.

Esta expresión (8.28) es la que nos permitirá estudiar el movimiento de un sistema no deformable o rígido respecto del referencial situado en el CDM. Este movimiento, como ya hemos reiterado, es de rotación. Ahora estamos en condiciones de comprender la afirmación que hicimos en (§ 6.3) respecto a la analogía formal que existe entre (8.10) y (8.28), ¿serías capaz de establecerla?. De cualquier forma, en el ejercicio 8.4 haremos uso de ellas, y creemos que quedarán claras todas estas afirmaciones.

Demostración de (8.28): Para simplificar el tratamiento formal, supongamos un sistema formado por dos partículas (Fig. 8.14). Sobre ellas actuarán las fuerzas exteriores \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 , y las interiores \mathbf{F}_{12} y \mathbf{F}_{21}

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{l}_{O_1} + \mathbf{l}_{O_2} \quad \frac{d \mathbf{L}_0}{dt} = \frac{d \mathbf{l}_{O_1}}{dt} + \frac{d \mathbf{l}_{O_2}}{dt} \quad (8.29)$$

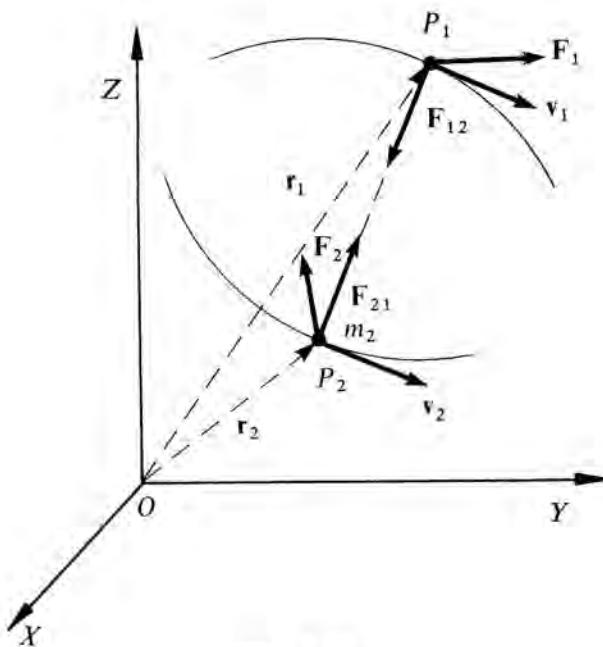


FIG. 8.14

Según (6.21):

$$\frac{d\mathbf{l}_{O_1}}{dt} = \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}), \quad \frac{d\mathbf{l}_{O_2}}{dt} = \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21})$$

sustituyendo en (8.29) y teniendo en cuenta (6.18):

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{M}_{O_1} + \mathbf{M}_{O_2} + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12}$$

donde hemos hecho uso del principio de acción y reacción. El momento total de las fuerzas interiores es nulo, tanto si el sistema es deformable como si no lo es:

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} = \sum_i \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_{int} = \mathbf{0}$$

¿Por qué? Luego:

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{M}_{ext_O} \quad (8.30)$$

O es el origen de un SRI. Calculemos ahora la relación que existe entre \mathbf{M}_{ext_O} y $\mathbf{M}_{ext_{CDM}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ext_O} &= \sum_{i=1}^2 \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^2 (\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}_{CDM}) \times \mathbf{F}_i = \\ &= \mathbf{M}_{ext_{CDM}} + \mathbf{R}_{CDM} \times \mathbf{F}_{ext} \end{aligned} \quad (8.31)$$

en estos cálculos hemos hecho uso de la Fig. 8.13. Por otra parte, derivamos (8.25) respecto al tiempo:

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_{CDM}}{dt} + \mathbf{R}_{CDM} \times M \mathbf{a}_{CDM} \quad (8.32)$$

Igualando (8.29) y (8.30), obtenemos lo que queríamos demostrar. Justificar esta última afirmación.

TEOREMA DE CONSERVACION

Si el momento total respecto al CDM de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema es nulo, el momento angular del mismo respecto al CDM permanece constante en el transcurso del tiempo. A partir de (8.26):

$$\mathbf{M}_{ext_{CDM}} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{L}_{CDM} = \text{cte}$$

$$\mathbf{L}_{CDM} = \mathbf{l}_{CDM_1} + \mathbf{l}_{CDM_2} + \dots + \mathbf{l}_{CDM_n} = \text{cte} \quad (8.33)$$

La conservación del momento angular intrínseco se verifica, aunque tengan lugar reajustes internos en el sistema, siempre que el momento respecto del CDM de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema sea nulo.

Por reajustes internos, se entienden los momentos impulsivos debidos a las fuerzas interiores que puedan existir. Los acróbatas, saltadores de trampolín, bailarinas de ballet, patinadores sobre hielo, etc., hacen uso de este teorema; en todos estos casos la única fuerza exterior que actúa, despreciando la resistencia del aire, es el peso. Su momento respecto del CDM es nulo, por lo tanto \mathbf{L}_{CDM} se conserva, de esa forma variando la disposición relativa de las distintas partes del cuerpo, pueden cambiar su velocidad de rotación ω , alrededor de su CDM y conseguir bellos efectos estéticos (Fig. 8.15). En este caso el CDM del saltador describe un movimiento parabólico, al ser el peso la única fuerza exterior que actúa.

Como ocurría con el teorema de conservación del momento lineal, la conservación del angular es válida fuera del marco de la Mecánica Clásica. La demostración del teorema se puede hacer utilizando unas hipótesis mucho menos restrictivas que las tomadas por nosotros (validez de las leyes de Newton), pero ello se encuentra fuera del nivel de este texto.

Como aplicación de los conceptos estudiados en este capítulo, resolveremos el siguiente ejercicio.

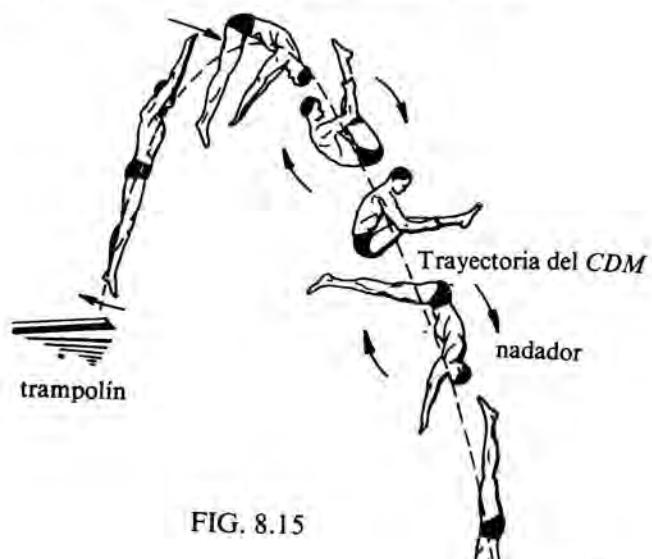


FIG. 8.15

* Ejercicio 8.4

Dos puntos materiales de masa m cada uno de ellos, están unidos mediante un alambre rígido al que se le ha dado la forma indicada en la Fig. 8.16. El sistema puede deslizar libremente sobre una mesa horizontal exenta de rozamiento. La masa del alambre es despreciable. Inicialmente el sistema tiene una velocidad constante v_0 . En un cierto instante, el ganchito engarza una tercera partícula de masa $2m$, que inicialmente se encontraba en reposo. Describir el movimiento del sistema, calculando el valor de los parámetros más significativos del mismo.

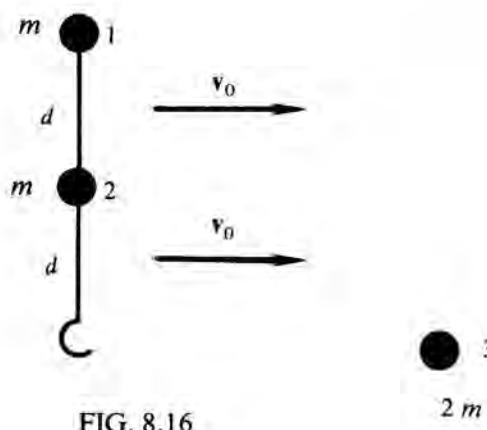


FIG. 8.16

Solución:

Se trata de un ejercicio adecuado para aplicar los conceptos desarrollados en este capítulo, a la determinación del movimiento de un sistema. Tomamos como SRI uno localizado sobre la mesa horizontal.

Sea el sistema formado por las dos masas m , unidas por el alambre, y la masa $2m$. Se trata de un sistema deformable, antes de la captura de la masa $2m$ por el ganchito, ¿por qué?

Sobre el sistema las únicas fuerzas exteriores que actúan son el peso de cada uno de los puntos materiales y las reacciones normales de la mesa horizontal. Al estar obligado el sistema a moverse sobre la mesa:

$$\mathbf{P}_1 = -\mathbf{N}_1, \quad \mathbf{P}_2 = -\mathbf{N}_2, \quad \mathbf{P}_3 = -\mathbf{N}_3$$

La suma de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema es nula. Análogamente lo es la suma de los momentos de las fuerzas exteriores o momento total, respecto de cualquier punto del plano que se elija, ¿por qué? Como consecuencia:

$$\mathbf{P}_{\text{ANTES CAPTURA}} = \mathbf{P}_{\text{DESPUES CAPTURA}}$$

$$\mathbf{L}_{CDM, \text{ ANTES CAPTURA}} = \mathbf{L}_{CDM, \text{ DESPUES CAPTURA}} \quad (8.34)$$

Durante la captura, las fuerzas que intervienen son impulsivas interiores: las de interacción del ganchito con la partícula 3. Estas fuerzas no modifican ni \mathbf{P} , ni \mathbf{L}_{CDM} .

a) *Movimiento del CDM del sistema:* Para calcularlo hacemos uso de la conservación del momento lineal. Según (8.7) y (8.8):

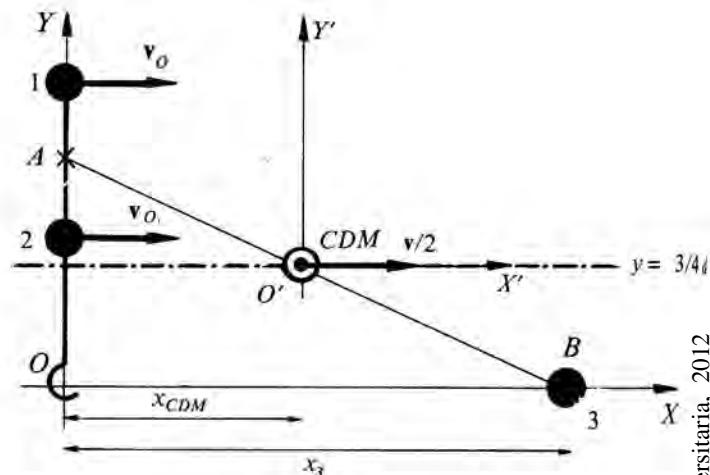


FIG. 8.17

$$\mathbf{P}_{\text{ANTES CAPTURA}} = 4m \mathbf{V}_{CDM} = m \mathbf{v}_0 + m \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{V}_{CDM} = \mathbf{v}_0 / 2 \quad (8.35)$$

Al conservarse \mathbf{P} , \mathbf{V}_{CDM} no varía como consecuencia de la captura. El movimiento del CDM será rectilíneo y uniforme, con la velocidad (8.35).

Intentemos localizar el CDM: $x_{CDM}(t)$. Sea la posición arbitraria representada en la Fig. 8.17. Al ser su movimiento rectilíneo y uniforme, y estar definido por la dirección y sentido de \mathbf{v}_0 , el CDM se encuentra sobre la recta: $y=3/4d$

$$x_{CDM}(t) = \frac{2m x_3(t)}{4m} = 1/2 x_3(t) \quad (8.36)$$

En cada instante antes de la captura, el CDM se encuentra en la intersección de la recta que va desde el punto medio entre la partícula 1 y 2 a la posición de la 3, con la recta $y=3/4d$. Este punto de intersección es el punto medio de la recta AB , ¿por qué? Evidentemente los referenciales OXY y $O'X'Y'$ de la Fig. 8.17 también son inerciales, ¿no?

Después de la captura, el CDM se encuentra en el alambre que une a los tres puntos materiales. Ahora el sistema se ha convertido en indeformable, ¿por qué? La posición del CDM se indica en la Fig. 8.18, como se puede comprobar fácilmente.

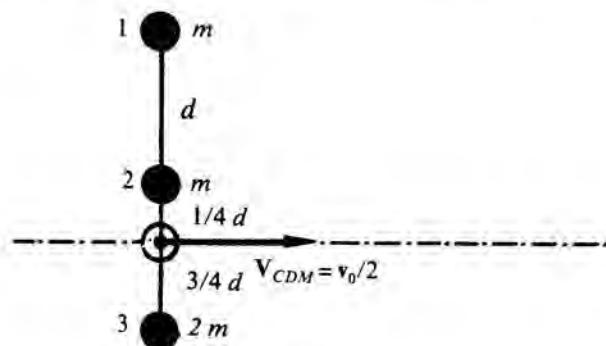


FIG. 8.18

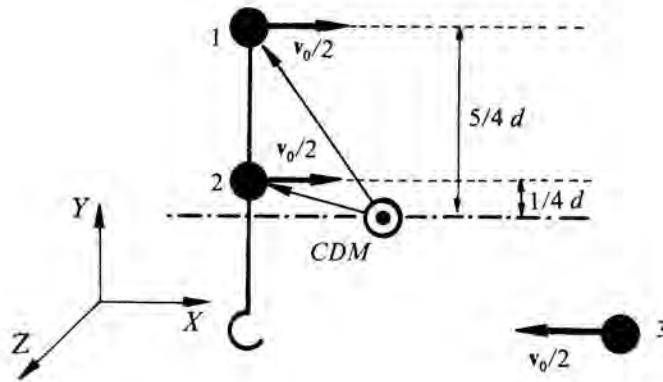


FIG. 8.19

Resumiendo, el movimiento del CDM respecto de un SRI es rectilíneo, a lo largo de la recta $y = 3/4 d$, y uniforme ($\mathbf{V}_{CDM} = v_0/2$), tanto antes como después de la captura. La ecuación vectorial de la trayectoria es:

$$\mathbf{R}_{CDM}(t) = \mathbf{R}_{CDM}(0) + v_0 t / 2 \mathbf{v}_0 t \begin{cases} x_{CDM}(t) = x_{CDM}(0) + v_0 t / 2 \\ y_{CDM} = 3/4 d \end{cases}$$

b) *Movimiento de las partículas del sistema respecto del CDM*: Antes de producirse la captura el movimiento de 1 y 2 es una traslación; 3 está en reposo. Las velocidades de cada una de las partículas, Fig. 8.17, respecto del CDM son (3.29):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_i + \mathbf{V}_{CDM} & \mathbf{v}'_1 &= v_0/2 \mathbf{i} \\ & & \mathbf{v}'_2 &= v_0/2 \mathbf{i} \\ & & \mathbf{v}'_3 &= -v_0/2 \mathbf{i} \end{aligned}$$

Define el movimiento de cada una de estas partículas.

El apartado anterior carece realmente de interés, ya que en el enunciado del problema nos proporciona la velocidad absoluta de cada partícula.

Al producirse la captura, el sistema se convierte en indeformable, ya que la distancia entre los tres puntos que lo constituyen permanece inalterable en el transcurso del tiempo. En estas circunstancias, el único movimiento posible, de los puntos que constituyen el sistema, alrededor del CDM es una rotación. Argumenta que no es posible otro tipo (§ 9.1) de movimiento.

En estas circunstancias, el movimiento vendrá caracterizado por (8.28), teniendo en cuenta (8.33). Calculamos \mathbf{L}_{CDM} antes de la captura, Fig. 8.19:

$$\mathbf{L}_{CDM, \text{ANTES}} = \mathbf{l}_{CDM, 1 \text{ ANTES}} + \mathbf{l}_{CDM, 2 \text{ ANTES}} + \mathbf{l}_{CDM, 3 \text{ ANTES}}$$

teniendo en cuenta (6.16) y (8.34):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{CDM, \text{ANTES}} &= -m(v_0/2)(5/4)d \mathbf{k} - m(v_0/2)(1/4)d \mathbf{k} - \\ &- 2m(v_0/2)(3/4)d \mathbf{k} = -3/2m v_0 d \mathbf{k} \end{aligned} \quad (8.38)$$

¿Por qué $\mathbf{l}_{CDM, 3 \text{ ANTES}}$ no es nulo?

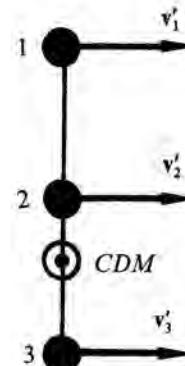


FIG. 8.20

El momento angular después de la captura valdrá:

$$\mathbf{L}_{CDM, \text{DESPUES}} = (m v'_1 5/4 d - m v'_2 1/4 d + 2 m v'_3 3/4 d) \mathbf{k} \quad (8.39)$$

En el instante representado en la Fig. 8.20, la velocidad lineal de los puntos 1, 2 y 3, en el movimiento de rotación alrededor del CDM, será la indicada. ¿Por qué serán diferentes?

En un movimiento de rotación (§ 9.1) la unidad de rotación es la misma, en cualquier instante, para todos ellos por tratarse de un sistema no deformable. Recordando (2.25):

$$v'_1 = \omega 5/4 d, \quad v'_2 = \omega 1/4 d, \quad v'_3 = \omega 3/4 d$$

Sustituyendo en (8.36):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{CDM, \text{DESPUES}} &= [(5/4 d)^2 m \omega - (1/4 d)^2 m \omega + \\ &+ (3/4 d)^2 2 m \omega] \mathbf{k} \end{aligned} \quad (8.40)$$

luego:

$$\mathbf{L}_{CDM, \text{DESPUES}} = -1/2 m d^2 \omega \mathbf{k} \quad (8.41)$$

En la expresión (8.37) los factores elevados al cuadrado multiplicados por las respectivas masas son los momentos de inercia (§ 9.2) de cada uno de los puntos materiales respecto al eje de giro perpendicular a la mesa y que pasa por el CDM.

Como se conserva el momento angular, igualamos (8.38) y (8.41):

$$\omega = \frac{3 v_0}{d}$$

Luego, el movimiento alrededor del CDM después de la captura es una rotación (§ 9.1) uniforme, en el sentido de las agujas de un reloj ($-\mathbf{k}$), de velocidad angular $3v_0/d$. La trayectoria respecto del SRI descrita por el sistema después de la captura es la indicada en la Fig. 8.21.

Somos conscientes de la dificultad de este ejercicio, pero creemos que sirve para ilustrar claramente la forma de caracterizar el movimiento de un sistema.

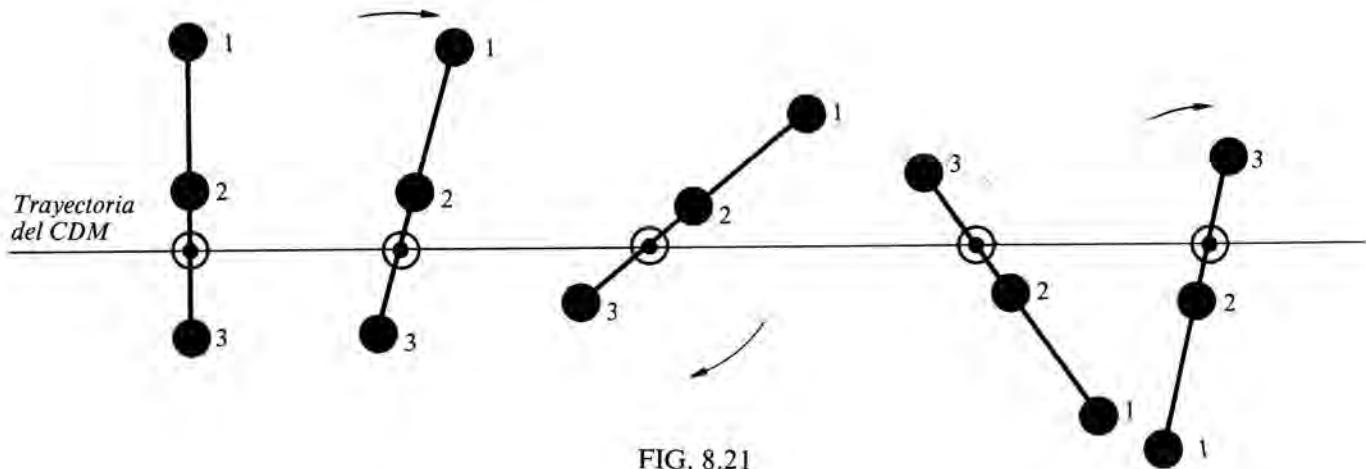


FIG. 8.21

* § 8.6 ENERGIA CINETICA DE UN SISTEMA DE PARTICULAS

Se define la energía cinética de un sistema respecto de un *SRI* como:

$$E_c = \sum_{i=1}^n E_{ci} = \sum_{i=1}^n 1/2 m_i v_i^2 \quad (8.42)$$

es una generalización de la definición dada para una partícula (6.51).

La energía cinética depende del sistema de referencia respecto del que se mide, ¿por qué?. Por otra parte, para caracterizar de forma completa el movimiento de un sistema es necesario conocer el movimiento de su *CDM* y el que tiene el sistema alrededor de este punto. Resultaría útil, por consiguiente, relacionar (8.42) con la energía cinética asociada con cada uno de estos movimientos:

$$E_c = E_{c_{CDM}} + 1/2 M V_{CDM}^2 \quad (8.43)$$

Esta expresión es formalmente análoga a (8.25). El primer sumando, que representa la energía cinética del sistema respecto de un referencial situado en el *CDM* y cuya orientación permanezca fija en el espacio, se le suele llamar **energía cinética interna del sistema**. El segundo por razones obvias se le denomina **energía cinética de traslación del sistema**. Esta relación, que en algunos libros se suele llamar *Teorema de Koenig*, nos indica que la energía cinética total –por ejemplo– de la Tierra en su movimiento alrededor del Sol, es igual a la suma de la energía cinética de traslación, que corresponde al movimiento en su órbita, más la correspondiente al movimiento de rotación alrededor de su propio eje.

Demostración de (8.43): Sustituyendo (3.29) en (8.42)

$$\begin{aligned} E_c &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (v_i + V_{CDM})^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \\ &+ v_{CDM} \cdot \sum m_i v_i + 1/2 M V_{CDM}^2 \end{aligned}$$

Tal como hicimos para demostrar (8.25), veamos el significado de cada uno de estos sumandos:

* $\sum_{i=1}^n 1/2 m_i v_i^2$, representa la energía cinética del sistema respecto del referencial situado en el *CDM*, ya que v_i es la velocidad de las diferentes partículas respecto a dicho referencial. La representaremos mediante el símbolo $E_{c_{CDM}}$.

* $v_{CDM} \cdot \sum m_i v_i = 0$, por definición de velocidad de *CDM* (8.8).

* $1/2 M V_{CDM}^2$, representa la energía cinética del *CDM* respecto del *SRI*.

Ejercicio 8.5

Dado el sistema de la Fig. 8.22, formado por dos partículas: $m_1 = 4 \text{ kg}$, $m_2 = 6 \text{ kg}$; en un cierto instante sus velocidades respectivas son: $v_1 = 2 \text{ i m s}^{-1}$ y $v_2 = 3 \text{ j m s}^{-1}$. Calcular la energía cinética total del sistema respecto del referencial *OXY*, así como la referida al *CDM*. Comprobar la relación (8.43) entre ambas.

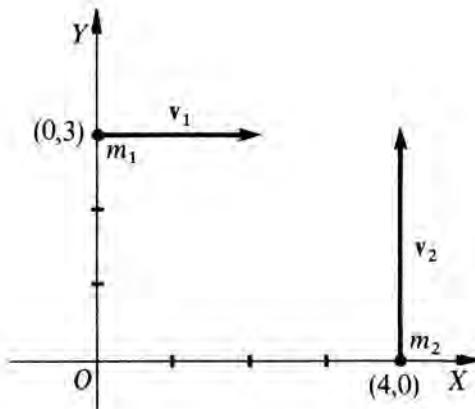


FIG. 8.22

Solución:

Las velocidades que figuran en el enunciado son las que poseen las partículas respecto del *SRI*; son por lo tanto sus velocidades absolutas.

La energía cinética del sistema respecto a este referencial será (8.42):

$$E_c = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = 35 \text{ J} \quad (8.44)$$

El *CDM*, en el instante considerado, está situado sobre la línea que une a ambas partículas, en un punto cuyo vector de posición, respecto de *O*, es (8.9):

$$\mathbf{R}_{CDM} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = 2,4\mathbf{i} + 1,2\mathbf{j}$$

El alumno puede comprobar que el *CDM* se encuentra sobre la recta: $3x + 4y - 12 = 0$, definida por las partículas.

Si consideramos unos ejes localizados en el *CDM* y paralelos a *OXY* (Fig. 8.23), la energía cinética del sistema respecto de ellos, o energía cinética interna, valdrá:

$$E_{c,CDM} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (8.45)$$

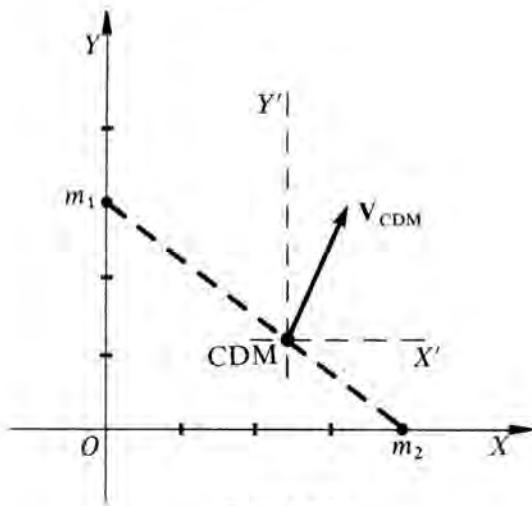


FIG. 8.23

para calcularla debemos conocer previamente las velocidades relativas de las partículas respecto al *CDM*, como (3.29):

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{CDM}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{CDM}$$

hay que determinar en primer lugar \mathbf{v}_{CDM} (8.8):

$$\mathbf{v}_{CDM} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = 0,8\mathbf{i} + 1,8\mathbf{j}$$

por lo tanto:

$$\mathbf{v}'_1 = 1,2\mathbf{i} - 1,8\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}'_2 = -0,8\mathbf{i} + 1,2\mathbf{j}$$

La energía cinética interna (8.45) vale: $E_{c,CDM} = 15,6 \text{ J}$.

Según (8.43) si restamos de (8.44) el valor anterior, obtenemos la energía cinética de traslación del sistema: 19,4.

Este valor también se puede calcular de manera directa:

$$1/2 M V_{CDM}^2 = 1/2 \times 10 \times 3,88 = 19,4 \text{ J}$$

que coincide con el calculado a partir de (8.43); luego, hemos comprobado la validez de dicha expresión para este ejemplo numérico.

TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGIA CINÉTICA

Para una partícula habíamos llegado a la relación (6.52):

$$\mathcal{T}_{A \rightarrow B, C} = \Delta E_c$$

donde el primer sumando representa el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. Queremos ahora llegar a la expresión equivalente para un sistema de partículas, teniendo en cuenta que las fuerzas que actúan sobre el mismo pueden ser tanto interiores como exteriores:

Para un sistema se verifica:

$$\mathcal{T}_{ext A \rightarrow B} + \mathcal{T}_{int A \rightarrow B} = \Delta E_c \quad (8.46)$$

Luego: **la variación de la energía cinética de un sistema es igual al trabajo realizado sobre el sistema, tanto por las fuerzas interiores como por las exteriores.** Este resultado puede parecer sorprendente, si tenemos presente que la suma de las fuerzas interiores de un sistema siempre es nula; sin embargo, el trabajo realizado por las mismas no lo es. ¿Podrías justificar cualitativamente esta aparente contradicción?

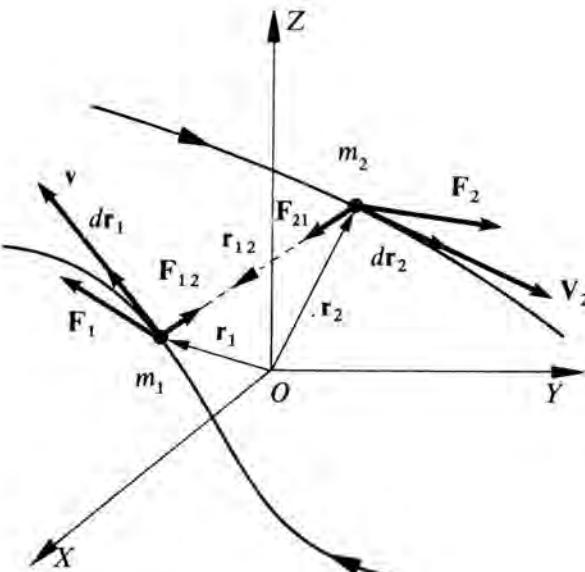


FIG. 8.24

Demostración de (8.44): Para no complicar la demostración supondremos un sistema formado sólo por dos partículas, posteriormente generalizaremos el resultado a un número arbitrario de ellas. Esta técnica, ya usada anteriormente, no resta validez al resultado, y evita utilizar notaciones demasiado complicadas para el alumno.

Sea un sistema formado por dos partículas (Fig. 8.24), y sobre el que actúan tanto fuerzas exteriores: \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 , como interiores \mathbf{F}_{12} y \mathbf{F}_{21} . Las partículas se mueven con velocidades \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 , respectivamente, a lo largo de las trayectorias indicadas en la figura.

En un intervalo de tiempo dt , las partículas se desplazarán a lo largo de sus trayectorias respectivas $d\mathbf{r}_1$ y $d\mathbf{r}_2$. Aplicando (4.6) a cada una de las partículas y multiplicando escalarmente por los correspondientes desplazamientos elementales:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1 &= m_1 \mathbf{a}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{21} \cdot d\mathbf{r}_2 &= m_2 \mathbf{a}_2 \cdot d\mathbf{r}_2\end{aligned}\quad (8.47)$$

ahora bien:

$$\mathbf{a}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \cdot d\mathbf{r}_1 = \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{v}_1$$

y análogamente para la otra partícula:

$$\mathbf{a}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{v}_2$$

Sustituyendo en (8.47) y sumando ambos:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{12} \cdot (d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2) &= m_1 \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{v}_2 \\ d\mathcal{T}_{\text{ext}} &= \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2, \quad , \quad d\mathcal{T}_{\text{int}} = \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12}\end{aligned}$$

El trabajo finito valdrá:

$$\begin{aligned}\int_A^B (\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12}) &= \\ = 1/2 m_1 \mathbf{v}_{1B}^2 - 1/2 m_1 \mathbf{v}_{1A}^2 + 1/2 m_2 \mathbf{v}_{2B}^2 - 1/2 m_2 \mathbf{v}_{2A}^2 &= E_{cB} - E_{cA}\end{aligned}$$

los límites A y B son simplemente unos símbolos para indicar las situaciones inicial y final. Estos símbolos tendrán que sustituirse por unos valores concretos, adecuados a la integral que se vaya a calcular. Nótese que en realidad hay tres integrales diferentes en el primer miembro; lo mismo hay que indicar respecto de las trayectorias de integración.

Por lo tanto: $\mathcal{T}_{\text{ext}, A \rightarrow B} + \mathcal{T}_{\text{int}, A \rightarrow B} = \Delta E_c$, como queríamos demostrar ¿cuándo será nulo \mathcal{T}_{int} ? ver cuestión 19.

*§ 8.7 ENERGIA POTENCIAL DE UN SISTEMA DE PARTICULAS. TEOREMA DE CONSERVACION DE LA ENERGIA

Como ya indicamos para el caso de dos partículas interaccionando, podremos definir una energía potencial cuando las fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema sean conservativas. Pero en este caso la situación es más compleja y conviene que la revisemos detalladamente.

Podemos definir como **energía potencial de un sistema**, la suma de las energías potenciales de sus partículas:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i(r_{jk}) \quad (8.48)$$

en esta expresión indicamos explícitamente que la energía potencial es función exclusivamente de las posiciones relativas de las partículas del sistema.

Supongamos que las fuerzas interiores son conservativas:

$$\mathcal{T}_{\text{int}} = \Delta U_{\text{int}} \quad (8.49)$$

a esta función definida según (8.49) le llamaremos **energía potencial interna** del sistema. Si las fuerzas interiores actúan a lo largo de la línea que une cada par de partículas, U_{int} depende *sólo* de las separaciones mutuas, r_{ij} entre ellas, como ya vimos (7.39) y (7.42). En este caso la energía potencial es independiente del sistema de referencia elegido. Esta situación la presentan la mayor parte de las interacciones presentes en la naturaleza.

Llevando (8.49) a (8.46) obtendremos:

$$\Delta E_c + \Delta U_{\text{int}} = \mathcal{T}_{\text{ext}} \quad (8.50)$$

que podremos escribir:

$$\mathcal{T}_{\text{ext}} = (E_c + U_{\text{int}})_{\text{final}} - (E_c + U_{\text{int}})_{\text{inicial}} \quad (8.51)$$

a la magnitud $E_c + U_{\text{int}}$ se le suele llamar **energía propia del sistema**. Es igual a la suma de las energías cinéticas de las partículas respecto de un observador inercial y de su energía potencial interior. Por lo tanto (8.51) nos indica que el **trabajo de las fuerzas exteriores es igual a la variación de la energía propia del sistema**. Este teorema expresa la interacción de un sistema con el mundo exterior, en función de la variación de su energía.

Si se trata de un **sistema aislado**: $\mathcal{T}_{\text{ext}} = 0$, por tanto, la **energía propia del sistema se conserva**. Esta es una forma alternativa de expresar el teorema de conservación de la energía. Para llegar a ella hemos supuesto que las fuerzas interiores eran conservativas y de naturaleza newtoniana; sin embargo, este teorema tiene un rango de validez superior al de las hipótesis que sirvieron para demostrarlo. Es decir, que fuera del marco de la Mecánica Clásica, este teorema de conservación se sigue verificando, aunque no sean ciertas las leyes de Newton.

Puede ocurrir que las fuerzas exteriores que actúen sobre el sistema sean también conservativas, en cuyo caso:

$$\mathcal{T}_{\text{ext}} = -\Delta U_{\text{ext}} \quad (8.52)$$

en este caso (8.50) toma la forma:

$$\Delta E_{\text{propia}} + \Delta U_{\text{ext}} = 0$$

$$(E_{\text{propia}} + U_{\text{ext}})_{\text{final}} - (E_{\text{propia}} + U_{\text{ext}})_{\text{inicial}} = 0 \quad (8.53)$$

a la magnitud $E_{\text{propia}} + U_{\text{ext}}$ se le suele llamar **energía mecánica total del sistema**. Luego la **energía mecánica total del sistema permanece constante durante su evolución, si tanto las fuerzas interiores como las exteriores que actúan son conservativas**. Este resultado es equivalente al (7.48) deducido para una partícula.

Si tenemos en cuenta (8.43), podemos definir una nueva magnitud: **energía interna del sistema**, como la suma de sus energías internas, cinética y potencial:

$$E_{\text{interna}} \equiv E_{c_{CDM}} + U_{\text{int}} = (E_c + U)_{\text{int}} \quad (8.54)$$

Este concepto resulta de gran utilidad en el tratamiento de sistemas formados por gran número de partículas, es decir, de los fluidos. Al tratar del primer principio de la Termodinámica (§ 10.4) volvremos a considerarlo.

CUESTIONES

1. Citar diferentes ejemplos de cuerpos que puedan considerarse como sistemas deformables y otros como indeformables.
2. ¿Por qué un sólido rígido tiene seis grados de libertad? ¿Cuántos tiene un sistema formado por dos puntos materiales unidos por una barra delgada?
- * 3. Para determinar la posición, respecto de un cierto SRI, de un sólido que se mueve en un plano, hay que conocer: a) la trayectoria que describe uno de sus puntos respecto del SRI; b) la orientación en cada instante, de unos ejes situados en dicho punto, respecto del SRI. Justificar esta afirmación.
4. ¿Por qué la clasificación de las fuerzas en interiores y exteriores sólo tiene sentido desde el punto de vista del sistema?
5. ¿Por qué es nulo el segundo sumando del primer miembro en (8.2)?
- * 6. ¿Qué «condición inicial» hay que suponer para integrar (8.8) y obtener (8.10)? ¿Resulta, dicha condición, razonable físicamente?
7. Indicar las propiedades más relevantes del CDM de un sistema. ¿En qué condiciones el sistema de referencia localizado en el CDM es inercial?
8. ¿Por qué la orientación del referencial localizado en el CDM respecto del SRI, no debe variar en el transcurso del tiempo? Sugerencia: recordar (3.37).
9. ¿Cuál es la trayectoria del CDM de un cuerpo no sometido a fuerzas exteriores? Si se lanza un cuerpo con cierta velocidad inicial, en las proximidades de la superficie terrestre, y se encuentra sometido únicamente a su peso, ¿qué trayectoria describe?
10. Demostrar que el CDM de dos partículas se encuentra en la línea que las une, en un punto cuya distancia a cada una de las partículas es inversamente proporcional a sus masas.
11. Calcular el CDM de la placa metálica de la figura 8.25 que está formada por un material de densidad uniforme. Supóngase que la masa de cada rectángulo es proporcional a su área.
- *12. Si las únicas fuerzas que pueden modificar el movimiento de un CDM de un cuerpo son las exteriores, ¿cómo las fuerzas interiores desarrolladas por los frenos de un vehículo pueden pararlo?
13. ¿Cómo varía con el tiempo el momento lineal de un satélite que describe una órbita circular? ¿Cómo depende su módulo del radio de la órbita?
- *14. ¿Cómo se aplica el teorema de conservación del momento lineal a un atleta que realiza un salto de altura?

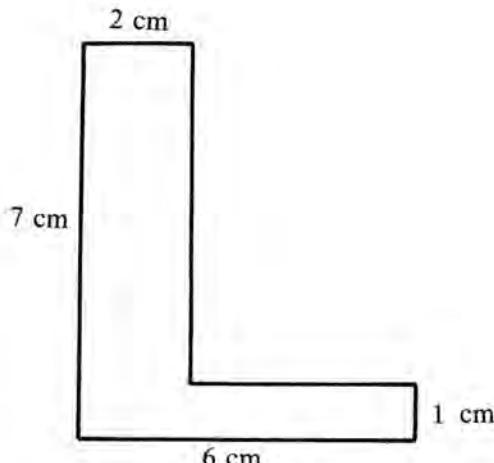


FIG. 8.25

15. Demostrar que la relación entre los momentos angulares de un sistema respecto de dos puntos O y O' viene dada por: $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}'_0 + \mathbf{OO}' \times \mathbf{P}$, donde el punto O' ha de estar en reposo respecto del O .
- *16. Suponga el alumno que está caminando sobre una viga estrecha y que pierde el equilibrio. Si comienza a caer hacia la izquierda, ¿cómo hace girar su cuerpo para recuperar el equilibrio? Razonar la respuesta.
17. Justificar que la energía potencial interna de un sistema es independiente del referencial elegido.
18. Enunciar los diferentes teoremas y relaciones desarrollados en este capítulo respecto del CDM, para un punto O localizado en un SRI.
- *19. Demostrar que para un sólido rígido ($r_i = \text{cte}$), el trabajo de las fuerzas interiores es nulo.

PROBLEMAS

- * 1. Un hombre de masa m tira, mediante una cuerda inextensible y de masa m_f , de un bloque de masa M , que desliza sobre unos raíles verticales, tal como se indica en la figura 8.26. Entre el bloque y los raíles existe una fuerza de rozamiento F_r . Dibujar todas las fuerzas que actúan sobre el bloque, el hombre, la cuerda, los raíles y el suelo sobre el que se apoya el hombre. Para el sistema cuerda-bloque, clasificarlas en interiores y exteriores.
- Si el bloque se mueve con velocidad uniforme ¿qué relación existe entre las fuerzas? ¿y si se mueve con aceleración constante a ?

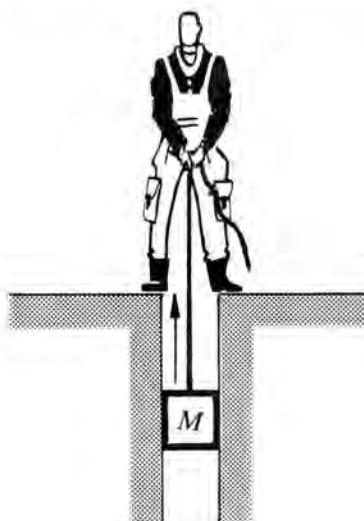


FIG. 8.26

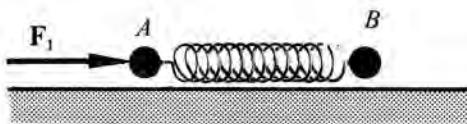


FIG. 8.27

- * 2. Dos cuerpos A y B de masas respectivas $m_A = 2 \text{ kg}$ y $m_B = 3 \text{ kg}$, están unidos mediante un resorte de constante $k = 50 \text{ N m}^{-1}$ y $0,5 \text{ m}$ de longitud cuando está sin deformar; su masa es despreciable. El sistema se encuentra sobre una superficie horizontal lisa, como se indica en la Fig. 8.27. El sistema se encuentra inicialmente en reposo.

En un cierto instante se le aplica al cuerpo A una fuerza constante $F_1 = 25 \text{ i} (\text{N})$. Se pide: a) Fuerzas que actúan sobre cada parte del sistema; clasificarlas en interiores y exteriores. b) ¿Cuál es la aceleración del CDM antes de aplicar F_1 ? c) ¿Y al aplicar F_1 ? d) Desplazamiento del CDM en función del tiempo, $x_{CDM}(t)$. e) ¿Cuál es la aceleración inicial, es decir en el mismo instante de aplicar F_1 , de A y B ? f) ¿Cuál es la aceleración de A y B en el instante en que el resorte está comprimido 10 cm , mientras que A sigue sometido a la fuerza F_1 ?

3. Tres partículas se encuentran inicialmente en los puntos: $A(0,2)$, $B(0,0)$ y $C(0,-1)$. Inician su movimiento con velocidades constantes: $v_A = 5\text{i} + 3\text{j} \text{ m s}^{-1}$, $v_B = 6\text{i} \text{ m s}^{-1}$ y $v_C = 4\text{i} - 2\text{j} \text{ m s}^{-1}$. Calcular: a) Velocidad del CDM, b) ecuación de su trayectoria, y c) momento lineal del sistema.

- * 4. Dos cuerpos iguales de 500 g de masa están unidos mediante un hilo de masa despreciable, que pasa sobre una polea ligera de 5 cm de diámetro. Los dos cuerpos están al mismo nivel. Se desprecia el rozamiento entre el hilo y la polea. a) Localizar el centro de masas del sistema. b) Se pasan 20 g de un cuerpo a otro, pero se impide que los cuerpos se muevan. Encontrar la posición del nuevo centro de masas. c) Ahora se sueltan los dos cuerpos. Describir el movimiento del centro de masas y determinar su aceleración.

5. Una granada que se desplaza horizontalmente a la velocidad de 8 km s^{-1} con respecto de la Tierra, explota y se descompone en tres pedazos de la misma masa. Uno de ellos continúa moviéndose horizontalmente a 16 km s^{-1} ; el segundo se mueve hacia arriba en una dirección que forma 45° con la horizontal, y el tercero en una dirección de 45° por debajo de la horizontal. Calcular las velocidades del segundo y tercer fragmento.

6. El isótopo del radio Ra^{226} tiene una masa de $3,8 \times 10^{-25} \text{ kg}$. Este núcleo atómico se desintegra radiactivamente dando una partícula α (que es un núcleo de helio, de masa $6,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$) y el isótopo Rn del radón (masa $3,7 \times 10^{-25} \text{ kg}$). En esta desintegración la partícula α se emite con una velocidad de $1,5 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$. ¿Cuál es la velocidad del isótopo del radón?

7. Un núcleo radiactivo, originalmente en reposo, se desintegra, emitiendo un electrón con un momento lineal $9,22 \times 10^{-21} \text{ m kg s}^{-1}$ y, en una dirección perpendicular a éste, un neutrino de momento $5,33 \times 10^{-21} \text{ m kg s}^{-1}$. ¿En qué dirección retrocede el núcleo residual? ¿Cuál es su momento? Si la masa del núcleo residual es $3,90 \times 10^{-25} \text{ kg}$, ¿cuál es su velocidad?

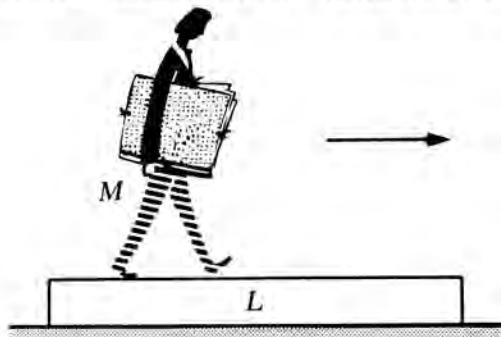


FIG. 8.28

8. Un hombre de masa M camina, con velocidad constante, sobre un tablón de longitud L y masa $M/3$, que se encuentra apoyado sobre una superficie sin rozamiento. ¿Qué distancia habrá recorrido el hombre, respecto de la superficie, cuando ha atravesado todo el tablón? (Fig. 8.28).

9. Tres partículas A , B y C de masas respectivas 1 kg , 1 kg y 2 kg están unidos por barras de masa despreciable (Fig. 8.29). El sistema se encuentra en reposo sobre una mesa horizontal. a) Coordenadas del CDM del sistema. b) Una partícula con un momento lineal de 5 kg m s^{-1} y dirigida según el sentido positivo del eje OX choca con A y queda en reposo a consecuencia del choque. ¿Cuál es la velocidad del CDM, del sistema inicial, después del choque?

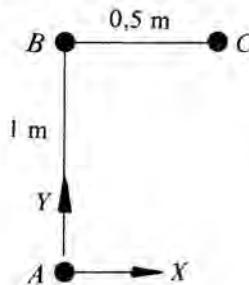


FIG. 8.29

- *10. Tres botes de la misma masa M navegan en línea recta uno detrás del otro, con la misma velocidad v . Desde el bote central se lanzan simultáneamente al de delante y al de atrás sendos cuerpos de masa M_1 , con la misma velocidad relativa u respecto del bote. ¿Cuáles son las velocidades de los tres botes una vez lanzados dichos cuerpos?
- *11. Un bloque de masa m descansa sobre una cuña de masa M , la cual, a su vez, descansa sobre una mesa horizontal, como se muestra en la Fig. 8.30. Todas las superficies son sin rozamiento. Si el sistema se encuentra inicialmente en reposo, estando el punto P del bloque a una distancia h sobre la mesa, encontrar la velocidad de la cuña en el instante que P llega a la mesa.

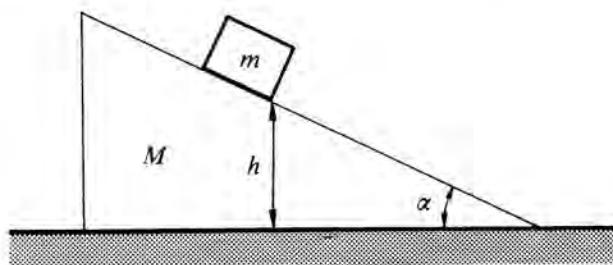


FIG. 8.30

12. En una **colisión elástica** se conserva tanto el momento lineal del sistema, como su energía mecánica, en los momentos inmediatamente antes y después de la colisión. Teniendo en cuenta esta propiedad resolver el siguiente problema: Un protón que se mueve a lo largo del eje x con una velocidad de 10^7 m s^{-1} , colisiona elásticamente con un núcleo de berilio, que se encuentra en reposo. Después de la colisión se observa que el núcleo de berilio se mueve en el plano xy , formando un ángulo de 30° con el eje x . Calcular: a) Velocidad del núcleo de berilio después de la colisión. b) Velocidad del protón después de la colisión. c) Velocidad del protón después de la colisión, respecto del CDM. d) Velocidad del CDM antes de la colisión. e) Energía cinética del sistema después de la colisión. La relación entre la masa del núcleo de berilio y la del protón es de nueve a uno.

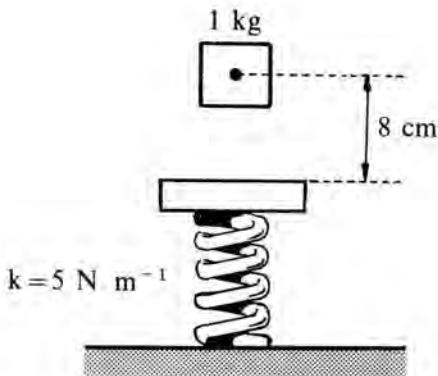


FIG. 8.31

13. Se suelta un cuerpo de 1 kg desde 8 cm sobre una placa horizontal que pesa 500 gr (Fig. 8.31). La placa se encuentra montada sobre un resorte de constante 5 N m^{-1} . Si se desprecia la masa del resorte y se supone el choque perfectamente elástico, calcular la máxima confracción que experimenta el resorte después del choque.
14. Sobre el bloque de la Fig. 8.32 de 1 kg de masa, se dispara paralelamente al plano una bala de 20 g que atraviesa el bloque, saliendo con la mitad de la velocidad que llevaba antes del choque. Si la constante del resorte es de 2 N cm^{-1} y éste llega a contraerse 12 cm, determinar la velocidad inicial de la bala. El coeficiente dinámico de rozamiento entre el bloque y la superficie vale 0,2. Despréciese el tiempo que tarde la bala en atravesar el bloque.
Este es un ejemplo típico de **colisión inelástica**, en la que no se conserva la energía mecánica del sistema.

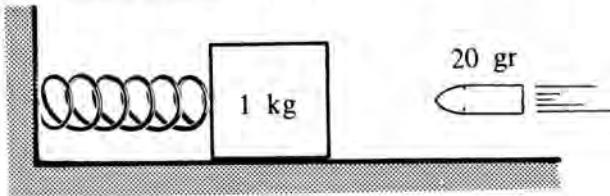


FIG. 8.32

15. Un satélite de 1.000 kg de masa describe una órbita circular alrededor de la Tierra, a una altura de 1.000 km. Cada 86,4 min describe una órbita completa. Calcular: a) La velocidad orbital del satélite. b) Momento angular orbital del satélite respecto al centro de la Tierra. Radio de la Tierra: $6,37 \times 10^6 \text{ m}$.
16. Cuando la Tierra se encuentra en el afelio, hacia el 21 de junio, su distancia al Sol es de $1,52 \times 10^{11} \text{ m}$ y su velocidad orbital $2,93 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$. Calcular su velocidad orbital cuando se encuentra en el perihelio, seis meses más tarde, y en la cual su distancia al Sol es de $1,47 \times 10^{11} \text{ m}$. Calcular, para ambas posiciones su velocidad angular respecto al Sol.
- *17. Dos patinadores de 50 kg de masa cada uno, se aproximan siguiendo caminos paralelos 3 m. Los patinadores llevan velocidades de igual dirección, sentidos opuestos y de módulos iguales (10 m s^{-1}). El primer patinador transporta una pértilga de masa despreciable de 3 m de longitud, y el segundo la agarra por el extremo al pasar. Si se desprecia el rozamiento de los patinadores con el suelo: a) Describir, dando sus velocidades, el movimiento de los patinadores después de estar unidos por la pértilga. b) Supongamos que uno de los patinadores va tirando de la pértilga hasta reducir a 1 metro su distancia al otro, ¿cuál es entonces su velocidad?
- *18. Si se designan a las magnitudes referentes a la Tierra, la Luna y el Sol, mediante los subíndices respectivos, T , L y S , escribir la expresión de la energía propia para cada uno de los siguientes sistemas: a) la Tierra y la Luna, b) la Tierra, la Luna y el Sol. Comentar la expresión (8.49) para cada uno de los dos casos.
- *19. Sean dos partículas de masa m_1 y m_2 , unidas mediante un resorte de masa despreciable y constante recuperadora k . El resorte se lanza al aire en el interior del campo gravitatorio terrestre. Calcular: a) energía cinética del sistema respecto de un observador inercial; b) energía potencial interna, en función de la deformación del resorte; c) energía propia del sistema; d) energía total del sistema. ¿Se conserva ésta?. Razionar la respuesta. Se desprecia la resistencia del aire.

CAPITULO IX

INTRODUCCION AL MOVIMIENTO DEL SOLIDO RIGIDO

En este capítulo no vamos a introducir, prácticamente, ningún concepto nuevo, tan sólo aplicar los estudiados en el anterior al caso de un sólido rígido (SR). Consideraremos las mismas magnitudes y teoremas allí tratados, pero expresados ahora en función de variables características del sólido y del movimiento en consideración. No se tratará, por consiguiente, de definiciones nuevas, sino de las mismas del capítulo anterior particularizadas para este tipo de sistemas.

Sólo vamos a considerar los movimientos elementales del sólido: traslación y rotación. Dentro de las rotaciones, estudiaremos las que tienen lugar alrededor de un eje que se encuentra fijo respecto de un SRI o, aunque no sea fijo, que pase por el CDM del sólido y mantenga constante su orientación en el espacio. Aún este estudio, de por sí tan particular, lo haremos sin desarrollarlo en su totalidad, sólo esbozando la forma de llevarlo a cabo. Creemos que para un nivel como el de este texto es suficiente, tanto por no aportar conceptualmente casi nada nuevo, como por su complejidad.

Comenzaremos el capítulo definiendo los movimientos elementales del sólido rígido (§ 9.1), para abordar a continuación el estudio elemental del de rotación alrededor de un eje fijo (§ 9.2). En este apartado, expresaremos el momento angular en función de variables características del sólido y de las rotaciones; llegaremos a la ecuación fundamental del movimiento, al teorema del trabajo y la energía cinética, y al de conservación del momento angular. La ecuación básica de partida será (8.26), como ya apuntamos.

En (§ 9.3) aplicaremos la caracterización completa del movimiento de un sistema, estudiada en el capítulo anterior, a un sólido que se mueva en un plano. Es el mismo caso que desarrollamos en el ejercicio 8.4, pero ahora con relación a un SR. El movimiento de su CDM y el que tiene lugar alrededor de él, los expresaremos en función de los movimientos elementales del sólido.

Por último, trataremos las condiciones de equilibrio para un SR (§ 9.4); éstas son inmediatas después de haber estudiado la Dinámica.

§ 9.1 MOVIMIENTOS ELEMENTALES DE UN SOLIDO

Un sólido rígido puede presentar dos tipos elementales de movimientos: de traslación y de rotación. Se puede demostrar, aunque por su complejidad está fuera de nuestros objetivos, que el movimiento más general que puede tener un sólido es una combinación en cada instante de una traslación y una rotación (por ejemplo, el movimiento de una piedra al lanzarla al aire).

MOVIMIENTO DE TRASLACION

Se dice que un sólido tiene un **movimiento de traslación**, cuando el vector que une dos puntos arbitrarios del mismo, \mathbf{AB} , permanece constantemente paralelo a sí mismo en el transcurso del movimiento (Fig. 9.1). Sean A , B y A' , B' las posiciones de estos dos puntos en el instante t y t' , respectivamente; si: $\mathbf{AB} = \mathbf{A'B'}$, por ser un sólido y además tener un movimiento de traslación, los vectores $\mathbf{AA'}$ y $\mathbf{BB'}$ también

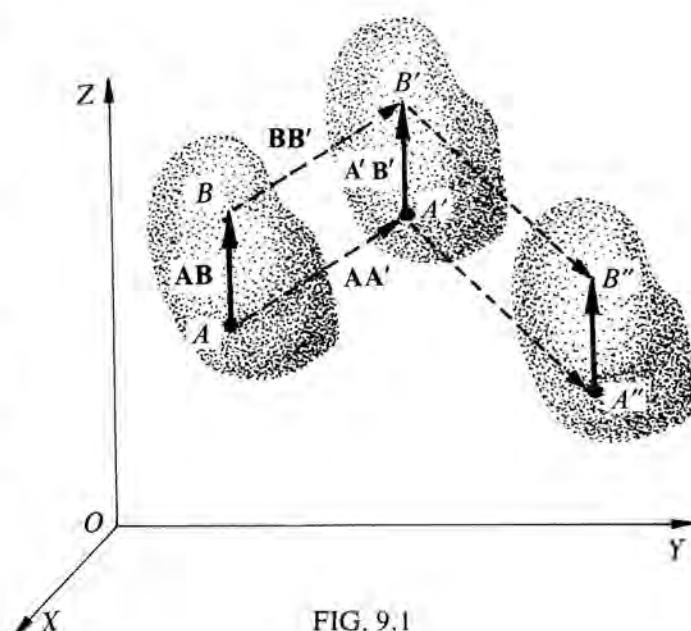


FIG. 9.1

serán iguales; estos vectores representan, respectivamente, los desplazamientos de los puntos *A* y *B*. Por lo tanto, las velocidades medias de dichos puntos, entre los instantes *t* y *t'*, son iguales. Como estos instantes son arbitrarios, se deduce de forma inmediata que *todos los puntos de un sólido que tenga un movimiento de traslación tienen, en un instante dado, la misma velocidad*. Este vector, común a todos los puntos, se le llama **velocidad de traslación del sólido** en ese instante.

Si el vector velocidad es constante, se dice que el *movimiento de traslación es uniforme*; cada uno de los puntos del sólido tiene entonces un movimiento rectilíneo uniforme. Conviene resaltar, sin embargo, que éste no es más que un caso muy particular del movimiento de traslación; en general, el vector velocidad varía de unos instantes a otros (siendo en cada instante el mismo para todos los puntos), tanto en módulo como en dirección, y la trayectoria de un punto arbitrario *A* puede ser una curva cualquiera *c*; la trayectoria de otro punto *B* será una curva igual a *c*, que se puede generar a partir de *c* por una traslación *AB* (Fig. 9.2).

Si en un instante todos los puntos tienen la misma velocidad, también tienen, por supuesto, la misma aceleración. Por lo tanto, *un sólido con un movimiento de traslación se comporta como un punto material*. Esta propiedad la hemos utilizado de forma implícita en los capítulos anteriores de este libro. El punto que «representaba» al sólido era su *CDM*, aunque hubiese podido ser otro cuando el momento sólo es de traslación, ¿no?

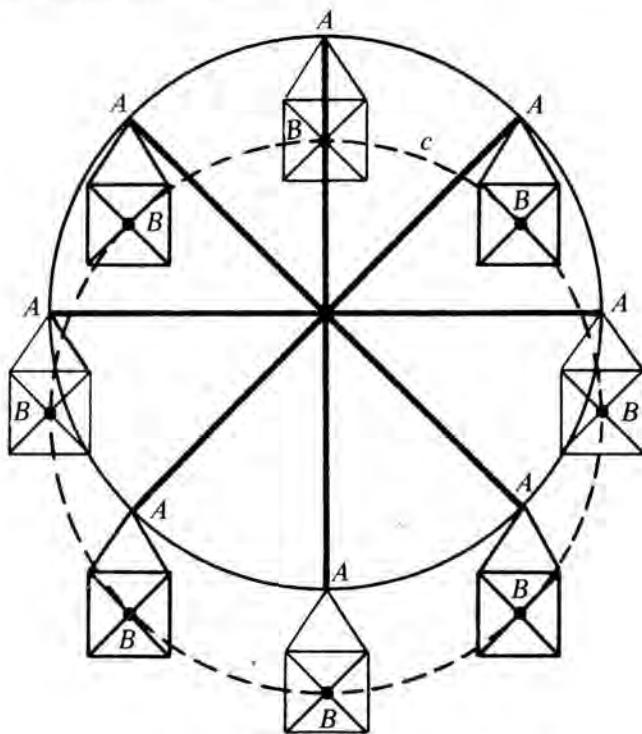


FIG. 9.2

Como ejemplo de movimiento de traslación se pueden citar el de la carrocería de un coche, el de las básculas de una noria (Fig. 9.2), el del pistón del motor de una motocicleta, etc.

MOVIMIENTO DE ROTACIÓN

Se dice que un sólido tiene un **movimiento de rotación alrededor de un eje de giro ZZ'** cuando todos los puntos del sólido que coinciden con el eje permanecen inmóviles en el transcurso del movimiento. Se demuestra fácilmente, que *todo punto P del sólido describe entonces una circunferencia*, que se encuentra en un plano perpendicular al eje de giro y cuyo centro se encuentra en dicho eje; *los movimientos circulares que describen los diversos puntos tienen, en un instante dado, la misma velocidad angular ω* (Fig. 9.3). La dirección de ω es la del eje de giro.

El vector velocidad *v* del punto *P* es, en dicho instante, tangente en *P* a la circunferencia que describe, es decir, una dirección perpendicular al plano *ZZ'P*, y su módulo es ωr , donde *r* es la distancia *AP* del punto *P* al eje de rotación. Por lo tanto se puede escribir:

$$\mathbf{v} = \mathbf{PA} \times \boldsymbol{\omega} \quad (9.1)$$

como se puede comprobar, aplicando la definición de producto vectorial de dos vectores. Obsérvese, que en un instante, la velocidad lineal no es la misma para todos los puntos del sólido. ¿Cuál es el sentido de ω ?

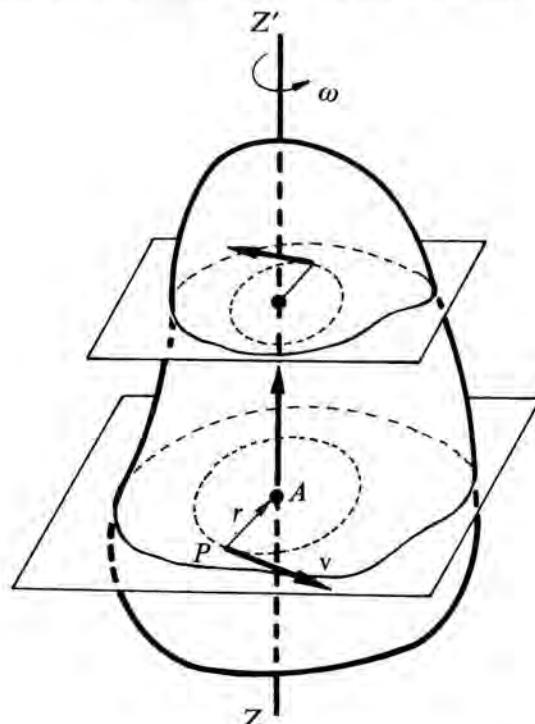


FIG. 9.3

El *movimiento de rotación es uniforme* cuando la velocidad angular ω es constante. Este es un caso muy particular del movimiento de rotación; en general será no uniforme, y la aceleración angular de todos los puntos del sólido será, en un instante de tiempo, la misma pero variará de unos instantes a otros. Si la aceleración es constante el movimiento de rotación será uniformemente acelerado.

Debemos reiterar que una cosa es el movimiento del sólido y otra diferente el de los puntos que lo «componen»; el de éstos ya lo estudiamos en el capítulo II. Por eso, puede resultar al principio un poco paradógica la Fig. 9.2: el sólido (una de las barcas) tiene un movimiento de traslación, un punto del mismo (*A* ó *B*) un movimiento circular.

Ejercicio 9.1

Un hilo inextensible y de masa despreciable está arrollado sobre una polea de 10 cm de radio, que se encuentra fija en un punto *O*. De su extremo cuelga un cuerpo (Fig. 9.4). Debido a su peso, el cuerpo comienza a descender con movimiento de traslación rectilíneo y aceleración constante de $0,5 \text{ m s}^{-2}$. Calcular: 1.) La velocidad de un punto de la periferia de la polea, así como la velocidad angular de ésta, cuando el cuerpo ha descendido 10 m. 2.) La aceleración angular de la polea.

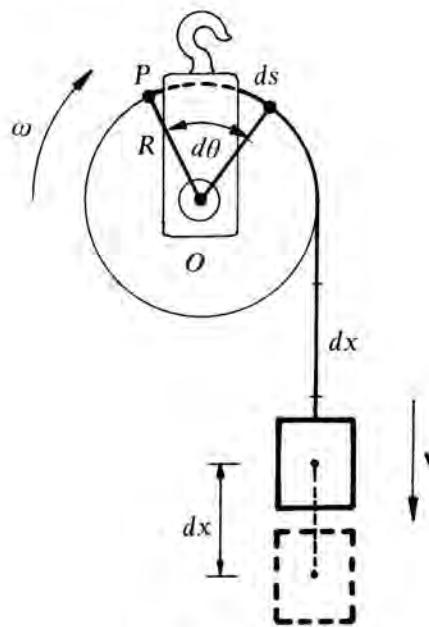


FIG. 9.4

Solución:

Cualquier punto de la periferia describe un movimiento circular cuyo radio es el de la polea. La relación entre la velocidad de un punto de ésta, *P* y la velocidad angular de la polea es: $v = \omega R$.

La velocidad de un punto de la periferia es la misma que la de un punto del hilo, al ser éste inextensible: $ds = dx$. Por

lo tanto, como cualquier punto del hilo tiene un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:

$$e = 1/2 a t^2, \quad v = a t, \quad v = \omega R$$

donde hemos supuesto que el sistema partió del reposo. Cuando el cuerpo ha descendido 10 m:

$$v = 3,16 \text{ m s}^{-1}, \quad \omega = 31,6 \text{ rad s}^{-1}$$

La aceleración angular de la polea valdrá: $\alpha = a/R$, $\alpha = 5 \text{ rad s}^{-2}$

¿Por qué el movimiento de la polea es de rotación uniformemente acelerado? ¿En qué caso sería uniforme?

§ 9.2 MOVIMIENTO DE ROTACIÓN DE UN SOLIDO ALREDEDOR DE UN EJE

Ya hemos indicado que la dinámica de traslación del sólido la tenemos resuelta (8.6), ¿por qué? Por lo tanto, estudiaremos la dinámica de la rotación. Ahora bien, su tratamiento en el caso general no es ni adecuado, ni interesante para nuestro nivel. Nos limitaremos al estudio elemental de la dinámica de rotación del sólido, cuando éste gira alrededor de un eje que se encuentra fijo respecto de un SRI. Ahora bien, los resultados serán válidos también cuando gire alrededor de un eje que pase por su CDM y cuya orientación en el espacio, respecto de un SRI, se mantenga constante.

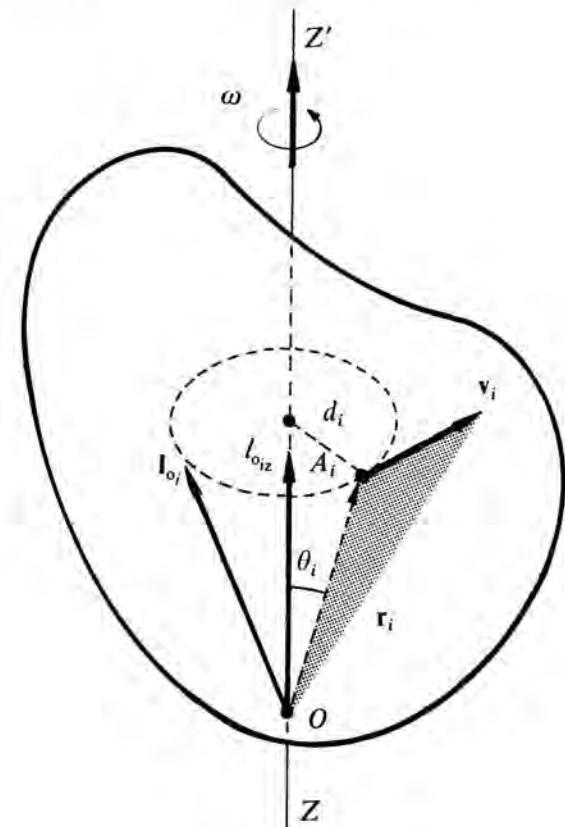


FIG. 9.5

Ya indicamos que la ecuación fundamental para analizar la rotación de un sistema no deformable es (8.26). Se puede demostrar (ver cuestión 6) que respecto de un punto O fijo en un SRI, se verifica una relación formalmente análoga a (8.26):

$$\mathbf{M}_{ext_o} = \frac{d \mathbf{L}_O}{dt} \quad (9.2)$$

aunque entre ambas existe una diferencia básica, ¿cuál es?. La analogía formal entre (8.26) y (9.2) nos permite establecer la afirmación anterior, sobre la equivalencia del estudio respecto de ambos ejes.

Sea un sólido rígido que está girando alrededor de un eje ZZ' (Fig. 9.5), que cumpla alguna de las condiciones anteriores. El sólido tendrá un movimiento de rotación (§ 9.1). Para conocer su movimiento tendremos que hacer uso de (8.26) ó de (9.2), según las circunstancias. Pero antes vamos a expresar el momento angular en función de variables características del sólido y de las rotaciones.

La velocidad angular es un vector que tiene la dirección del eje de giro; por lo tanto, si éste es fijo, su dirección, así como la de α , aceleración angular, permanece constante en el tiempo. Tomemos un punto arbitrario del eje como referencia, por ejemplo el O , y consideremos una partícula A_i del sólido. El momento angular de ésta respecto de O valdrá (6.16):

$$\mathbf{l}_{O_i} = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

Al ser \mathbf{r}_i y \mathbf{v}_i perpendiculares, su módulo valdrá

$$l_{O_i} = r_i m_i v_i$$

¿Por qué estos dos vectores son perpendiculares?, ¿lo son para todos los puntos del sólido? La razón reside en la relación general entre velocidad angular del sólido y la velocidad lineal de uno de sus puntos: $\mathbf{v}_i = \omega \times \mathbf{r}_i$. Ver cuestión 3.

La proyección del momento angular en la dirección del eje vale:

$$l_{O_{iz}} = m_i r_i v_i \cos [(\pi/2) - \theta_i] = m_i r_i v_i \sin \theta_i$$

pero (Fig. 9.5), $d_i = r_i \sin \theta_i$, por tanto: $l_{O_{iz}} = m_i d_i v_i$; por otra parte, (2.25), $v_i = \omega d_i$: $l_{O_{iz}} = m_i d_i^2 \omega$.

El valor de esta componente, para todos los puntos que forman el sólido rígido, vale:

$$L_{O_z} = \sum_i l_{O_{iz}} = (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + \dots) \omega = (\sum_i m_i d_i^2) \omega \quad (9.3)$$

Estamos considerando el sólido como un sistema discreto indeformable (§ 8.1); la razón es simplificar los cálculos matemáticos, sin perder contenido físico. Esta expresión nos indica la relación existente entre la componente de \mathbf{L} , momento cinético del sólido respecto de O , en la dirección del eje de giro y la velocidad angular. Hay que resaltar que la misma no es

una relación entre \mathbf{L} y ω , ya que en general dichos vectores no tienen la misma dirección. (Fig. 9.5).

A la nueva magnitud: $\sum_i m_i d_i^2$, que sirve para caracterizar las rotaciones alrededor de un eje, se le llama **momento de la inercia del sólido respecto del eje ZZ'**, I . Se trata de una magnitud escalar, cuyas dimensiones son $[M][L]^2$ y que se mide en kg m^2 .

$$I \equiv \sum_i m_i d_i^2 \quad (9.4)$$

Esta magnitud es igual a la suma de la masa de cada partícula en que se puede considerar formado el sólido, por el cuadrado de su distancia al eje del giro; luego, *dado un sólido depende del eje particular alrededor del cual está girando*.

Esta magnitud caracteriza a las rotaciones. De (9.4) resulta evidente que depende de dos factores: *a*) De la distribución de masas en el sólido y *b*) del eje elegido para calcularlo. Por lo tanto, no podemos decir a priori que se trate de una magnitud característica de un sólido.

Desde un punto de vista macroscópico, un sólido está formado por una distribución continua de masa, por lo tanto -del mismo modo que hicimos con el centro de masas- podemos en (9.4) reemplazar la suma por una integral, para tratar el sólido desde este punto de vista:

$$I = \int r^2 dm \quad (9.5)$$

donde r es la distancia de un punto arbitrario del sólido (x, y, z) al eje de giro; dm representa la masa de un elemento diferencial, es decir: $dm = \rho dt$, donde ρ es la densidad volumática de masa y dt el elemento diferencial de volumen. La integración de (9.5) implica de hecho tres integrales, una para cada una de las dimensiones del espacio; se trata de las llamadas integrales de volumen en el análisis matemático. El problema de calcular momentos de inercia es exclusivamente matemático, por lo que no lo abordaremos en este texto, dada su complejidad para el nivel de formación del alumno. Para sólidos de formas sencillas, es decir, que presenten una elevada simetría, tales como: discos, cilindros, esferas, cubos, etc. se puede calcular de forma relativamente simple. Si en algún ejercicio se necesita el valor de un cierto momento de inercia, se dará como dato.

La expresión (9.3) se puede escribir (9.4):

$$L_{O_z} = I \omega \quad (9.6)$$

Insistimos que (9.6) no es una relación vectorial, sino una relación entre la componente L_{O_z} de \mathbf{L} y el módulo de ω .

Ahora bien, existen ciertos ejes particulares, específicos para cada sólido concreto, respecto de los cuales \mathbf{L} es paralelo a ω . Estos reciben el nombre de **ejes principales de inercia**; luego, cuando un sólido gira alrededor de uno de estos ejes:

$$\mathbf{L} = I \omega \quad (9.6)^*$$

en este caso la rotación está caracterizada por el momento principal de inercia respecto de dicho eje.

Indicaremos que para todo cuerpo, independientemente de su forma, existen tres ejes principales de inercia que son perpendiculares entre sí. Cuando el cuerpo presenta algún tipo de simetría, los ejes principales coinciden con los de simetría. Por ejemplo: para una esfera cualquier eje que pase por su centro es principal; para un cilindro el de simetría y cualquiera perpendicular a él, etc.

ECUACION DEL MOVIMIENTO

Sustituyendo (9.6) en (8.26) ó en (9.2):

$$\mathbf{M}_{ext} = \frac{d(I\omega)}{dt} \quad (9.7)$$

esta sustitución ya implica que el *eje de giro sea principal de inercia*, ¿no?

Si el eje permanece fijo respecto del sólido, el momento de inercia es constante, por lo tanto:

$$\mathbf{M} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha \quad (9.8)$$

donde hemos hecho uso de la definición de aceleración angular (2.24). Esta es la ecuación que se le ha presentado al alumno como fundamental para el estudio de las rotaciones, en los cursos elementales. Sin embargo, ahora hemos comprobado que la misma es la forma que toma la expresión general (9.2), cuando se cumplen una serie de condiciones. ¿Sabe resumir el alumno cuáles son éstas?

La expresión (9.8) indica que *siempre que actúe sobre un sólido un momento debido a fuerzas exteriores, adquiere una aceleración angular*. La comparación de las ecuaciones (9.7) y (9.8) con (8.6) y (8.10) sugieren una gran analogía entre el movimiento de rotación de un sólido alrededor de un eje principal de inercia, y el de traslación, y por lo tanto con el movimiento de una partícula.

$$\mathbf{M}_{ext} = \frac{d(I\omega)}{dt}, \quad \mathbf{F}_{ext} = \frac{d(M\mathbf{V}_{CDM})}{dt} \quad (9.10)$$

$$\mathbf{M}_{ext} = I\alpha, \quad \mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{CDM}$$

Si $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, (9.8) nos indica que $\omega = \text{cte}$, es decir: *la velocidad angular de un sólido rígido que gira alrededor de un eje principal de inercia, permanece constante cuando sobre él no actúan momentos debidos a fuerzas exteriores*.

Si el sólido no gira alrededor de un eje principal de inercia, pero es fijo, aplicando (9.6):

$$M_{ext_z} = \frac{dL_{Oz}}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} \quad (9.11)$$

Esta ecuación difiere de (9.7) en que M_{ext_z} no es el momento total debido a las fuerzas exteriores, sino sólo su proyección sobre el eje de giro. Quiere esto decir que además de M_{ext_z} pueden existir otros momentos para mantener el cuerpo en una posición fija respecto del eje de rotación.

Ejercicio 9.1

Una polea de masa M y radio R está montada sobre un eje, que se apoya sobre unos rodamientos que ofrecen un rozamiento despreciable (Fig. 9.6). La polea tiene arrollada una cuerda de masa despreciable e inextensible; se tira hacia abajo de ésta, con una fuerza F . Calcular la aceleración angular y lineal de la polea.

Si en vez de tirar de la cuerda, se cuelga un cuerpo de masa m . ¿Cómo se modifican los resultados anteriores?

Datos numéricos: $F = 10 \text{ N}$, $R = 0.5 \text{ m}$, $M = 20 \text{ kg}$, $m = 1 \text{ kg}$. El momento de inercia de la polea respecto de un eje perpendicular y que pasa por su centro vale: $I = 1/2 MR^2$.

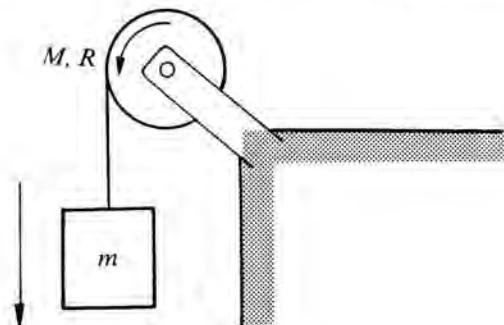


FIG. 9.6

Solución:

Sea el sistema formado por la cuerda y la polea. Si se tira hacia abajo con una fuerza F , las únicas fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema son F , la reacción de los rodamientos sobre la polea, que se puede caracterizar mediante una fuerza F' , y el peso de la polea. La polea es un sólido rígido que únicamente tiene movimiento de rotación, alrededor de un eje perpendicular al plano de la figura y que pasa por O su centro de masa. Este eje es principal de inercia.

Como el centro de masas se encuentra en reposo (8.10):

$$F + Mg - F' = 0$$

la reacción de los rodamientos sobre la polea vale: $F' = 210 \text{ N}$.

Para calcular la aceleración de la polea hacemos uso de (9.8) tomada respecto del CDM. La única fuerza que produce un momento no nulo respecto del centro de masas es F (Fig. 9.7). Tengamos en cuenta que al ser la cuerda de masa despreciable, la fuerza ejercida en un punto se transmite a lo largo de toda ella (ejercicio 4.2).

$$M_{ext_O} = FR$$

Sustituyendo en (9.8):

$$\alpha = \frac{2F}{MR} = 2 \text{ rad s}^{-2} \quad (9.12)$$

La polea tiene un movimiento de rotación uniformemente acelerado. La aceleración lineal de un punto de su periferia, y por lo tanto, de la cuerda será:

$$a = \alpha R = 1 \text{ m s}^{-2}$$

En el caso de colgar de la cuerda un cuerpo de masa m , sobre éste actuará su peso: Mg y la tensión de la cuerda: T . Sobre el sistema cuerda - polea: T , Mg y F' . El valor de esta

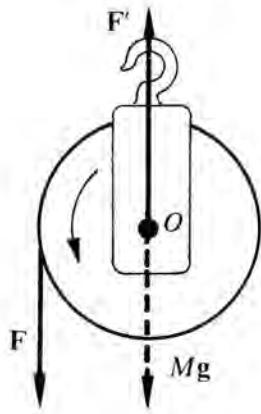


FIG. 9.7

fuerza de reacción no puede ser el mismo que en el caso anterior, ya que las fuerzas que actúan sobre el sistema no son las mismas, concretamente $T \neq F$.

La ecuación del movimiento del cuerpo para un sistema de referencia localizado en O será:

$$mg - T = ma$$

pero $a = \alpha R$ (ejercicio 9.1), $mg - T = m\alpha R$. En esta expresión tenemos dos incógnitas: T y α . Aplicando (9.8) a la polea:

$$TR = \frac{1}{2} MR^2 \alpha$$

luego eliminando T entre las dos ecuaciones:

$$\alpha = \frac{mg}{\left(m + \frac{1}{2}M\right)R} = 1,82 \text{ rad s}^{-2}$$

Esta aceleración es menor que la obtenida en el caso anterior; esto es debido a que la tensión en la cuerda es inferior. Esta fuerza es la que origina el momento que da lugar al movimiento de rotación de la polea. El valor de la tensión es:

$$T = \frac{Mm}{M+2m} g = 9,09 \text{ N}$$

que es menor que la tensión en el primer caso.

La aceleración lineal con la que desciende el cuerpo, o de un punto de la periferia de la polea, es: $a = \alpha R = 0,91 \text{ m s}^{-2}$; también menor, como es lógico, al serlo la fuerza neta aplicada a la cuerda.

Recomendamos al alumno que consulte la cuestión 17, para que sea consciente de cómo influye la masa de la polea y el rozamiento entre la cuerda y la polea. Hasta este capítulo habíamos considerado despreciables a ambos.

TRABAJO Y ENERGIA CINETICA DE ROTACION

Se trata de calcular el trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre un sólido en rotación. La expresión del mismo, obtenida a partir de la definición de trabajo elemental (6.29), y expresada en función de magnitudes características de las rotaciones es:

$$d\mathcal{T} = M_{ext_z} d\theta \quad (9.13)$$

donde M_{ext_z} es la proyección del momento total de las fuerzas exteriores, que actúan sobre el sólido respecto del eje de giro ZZ' ; $d\theta$ es el ángulo girado en el tiempo dt . ¿Por qué sólo interviene la componente M_{ext_z} del \mathbf{M}_{ext} ? Razónalo físicamente.

Demostración de (9.13): La velocidad de un punto P_i del sólido en un instante t será (9.1): $\mathbf{v}_i = \mathbf{P}_i \mathbf{A} \times \boldsymbol{\omega}$. El trabajo realizado por la fuerza \mathbf{F}_i aplicada en el punto P_i , durante el intervalo dt , valdrá (6.29):

$$d\mathcal{T}_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{P}_i \mathbf{A} \times \boldsymbol{\omega}) dt = \\ = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{A} \mathbf{P}_i \times \mathbf{F}_i) dt \quad (9.14)$$

donde hemos hecho uso de una propiedad del *producto mixto de vectores* (operación que no habíamos definido en el capítulo I). Dados tres vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} se denomina producto mixto de ellos, al producto escalar de uno de ellos por el producto vectorial de los otros dos (cuestión 18). Una propiedad de dicho producto es: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A})$; de esta propiedad hemos hecho uso en (9.14).

El vector $(\mathbf{A} \mathbf{P}_i \times \mathbf{F}_i)$ representa el momento de la fuerza \mathbf{F}_i respecto del punto del eje A (6.18): \mathbf{M}_{A_i} , por lo tanto:

$$d\mathcal{T}_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_{A_i} dt$$

El trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre el sólido es:

$$d\mathcal{T} = \sum_i \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_{A_i} dt = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_{ext} dt \quad (9.15)$$

donde \mathbf{M}_{ext} es el momento total de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sólido, respecto de un punto del eje de giro. Recorremos que para un sólido rígido, el trabajo de las fuerzas interiores es nulo (cuestión 19, capítulo VIII).

Si M_{ext_z} es la proyección de \mathbf{M}_{ext} sobre el eje de giro, (9.15) queda:

$$d\mathcal{T} = \boldsymbol{\omega} \cdot M_{ext_z} dt = M_{ext_z} d\theta$$

como queríamos demostrar.

En (8.40) definimos la energía cinética de un sistema de partículas. Para el caso de un sólido con movimiento de rotación aquella expresión toma la forma particular:

$$E_c = \sum_i 1/2 m_i v_i^2 = \sum_i 1/2 m_i (d_i \omega)^2 = \\ = 1/2 \left(\sum_i m_i d_i^2 \right) \omega^2$$

donde hemos hecho uso de $v_i = \omega d_i$, para cada parti-

cula del sólido (Fig. 9.5). Teniendo en cuenta la definición de momento de inercia (9.4):

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (9.16)$$

esta relación indica que *la energía cinética de rotación, para una velocidad angular dada, no sólo depende de la masa del sólido, sino de la forma cómo ésta se encuentra distribuida*. Esta expresión es correcta aunque el eje de rotación no sea principal de inercia, ya que en su deducción no hemos hecho uso de dicha condición.

La variación de energía cinética entre los instantes t y $t + dt$ será:

$$dE_c = d\left(\frac{I \omega^2}{2}\right) = I \omega \frac{d\omega}{dt} dt \quad (9.16)$$

Durante el mismo intervalo, el trabajo de las fuerzas exteriores es (9.13). Por lo tanto, el teorema del trabajo y la energía cinética (6.50) nos permite escribir:

$$M_{ext_z} = I \frac{d\omega}{dt}$$

cuyo significado ya discutimos. Para una rotación finita, se obtiene:

$$\mathcal{T}_{\theta - \theta_0} = \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2 = \Delta E_c \quad (9.17)$$

con las mismas consideraciones que hicimos en § 6.5. En toda esta deducción hemos supuesto que el eje de giro permanece fijo respecto del sólido, ¿dónde lo hemos supuesto de forma concreta? La expresión (9.17) constituye también una integral primera del movimiento (§ 6.1).

Creemos que no hace falta insistir, para un sólido rígido, en el teorema de conservación de la energía, ya que su planteamiento es análogo al estudiado en § 8.7. Quizás convenga insistir que para un sólido rígido, el trabajo de las fuerzas interiores es siempre nulo, por lo tanto su energía potencial interna permanece constante y no hay que tomarla en consideración al tratar los balances energéticos. La energía total del sólido (8.51) es simplemente la suma de la energía cinética total, más la energía potencial debida a las fuerzas exteriores, en el caso –por supuesto– que éstas sean conservativas.

TEOREMA DE CONSERVACION DEL MOMENTO ANGULAR

Se trata conceptualmente de lo estudiado en § 8.5; aquí queremos presentarlo en función de las magnitudes características de las rotaciones, y aplicarlo a sistemas que siendo esencialmente sólidos, pueden cam-

biar su forma o tamaño.

Según vimos, para que se conserve el momento angular de un sistema, y por lo tanto de un sólido, debe ser nulo el momento de las fuerzas exteriores que actúen sobre el mismo (9.2). Si el sólido gira alrededor de un eje principal de inercia (9.7):

$$I \omega = cte \quad (9.18)$$

Recordemos que esta magnitud se conserva aunque el sistema no se encuentre aislado. Por ejemplo, en el caso que sobre el cuerpo sólo actúe su peso y el giro tenga lugar alrededor de un eje que pase por su CDM.

Ejemplos de la conservación del momento angular ya se indicaron en § 8.5 (Fig. 8.15). Vamos a interpretarlos a partir de (9.18); al variar –por ejemplo, el saltador– la posición relativa de las diferentes partes de su cuerpo, cambia su momento de inercia respecto del CDM y por lo tanto la velocidad con que gira. Cuanto mayor sea su velocidad inicial –que toma al saltar sobre el trampolín– y más pueda reducir su momento de inercia –por ejemplo, juntando brazos y piernas y doblándose– mayor número de revoluciones podrá dar en un tiempo determinado. De esa forma tiene más posibilidades de componer diferentes posturas estéticas con su cuerpo. Obsérvese que la energía cinética de rotación del saltador no permanece constante, ya que aumenta al disminuir el momento de inercia. ¿Por qué? Este aumento se debe al trabajo realizado por las fuerzas interiores, es decir, por el propio saltador, al juntar las diferentes partes de su cuerpo. En conjunto, el sistema saltador no es, pues, un sólido rígido.

La variación de velocidad angular debida a cambios en la distribución de masas, es un fenómeno muy usual en las actividades deportivas: gimnastas en la «barra horizontal», saltos de trampolín, saltos con esquíes, patinaje artístico, etc.

Si el cuerpo gira alrededor de un eje fijo, $I = cte$, este teorema simplemente nos indica que su velocidad angular permanece constante. Esta aplicación del teorema es mucho menos interesante que la anterior.

* Ejercicio 9.2

Una persona se encuentra de pie en el centro de una plataforma, que puede girar sin que exista rozamiento –debido a un juego de rodamientos existentes en el eje que la sostiene– alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. La persona está situada de forma que su centro de masas se encuentra en la vertical del eje de rotación. En sus manos sostiene unas «pesas» de gran masa M , que mantiene en la posición indicada en la Fig. 9.8-a. Supóngase que mediante el procedimiento que sea se le comunica al sistema plataforma-persona una velocidad angular constante ω_1 . En cierto instante, la persona junta sus brazos, de modo que la dis-

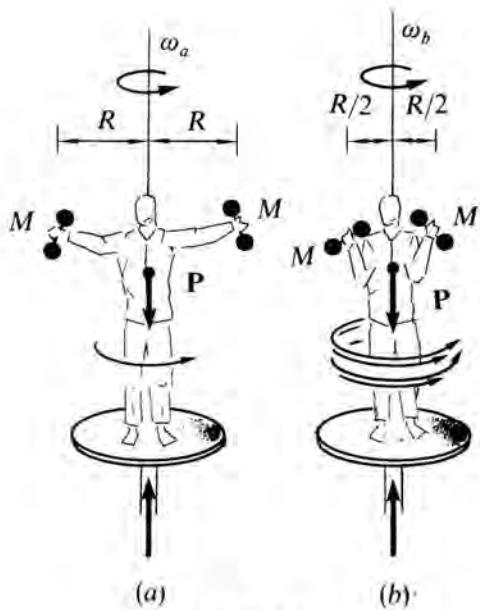


FIG. 9.8

tancia de cada «pesa», al eje de giro se reduce de R a $R/2$ (Fig. 9.8 - b).

Se desprecia la contribución de la masa de la persona y de la plataforma al momento de inercia del sistema. Esta aproximación es bastante realista si las «pesas» tienen, cada una, una masa del orden de 3 kg por lo menos.

Calcular: a) Fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema, ¿se conserva su momento angular? ¿se trata de un sólido rígido? b) Velocidad del sistema cuando la persona junta sus brazos al cuerpo. c) Trabajo realizado por las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema. ¿Se conserva su energía cinética? d) A partir del resultado anterior, ¿se puede afirmar que se viola el teorema del trabajo-energía cinética? Razonar la respuesta. Calcular el trabajo responsable de la variación de energía cinética del sistema.

Los momentos de inercia del sistema para cada una de las posiciones indicadas en la figura son, respectivamente, $I_a = 2 MR^2$ y $I_b = 1/2 MR^2$.

Solución:

Este ejercicio tiene como objetivo analizar cuantitativamente, y en un caso real, los conceptos estudiados en este último apartado.

a) Las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema, una vez que ha adquirido la velocidad ω_1 y se ha dejado libre, son el peso de la persona-plataforma, P , y la acción (N) de los soportes que mantienen vertical al eje de la plataforma, a través de los rodamientos. No se trata por consiguiente, de un sistema aislado. Sin embargo, el momento de ambas fuerzas exteriores respecto al eje de giro es nulo. El sistema gira alrededor de un eje principal de inercia, ya que lo consideramos simétrico.

Al ser nulo el momento de las fuerzas exteriores se conserva el momento angular del sistema (9.7).

No podemos afirmar que se trate estrictamente de un sólido rígido, ya que la persona puede variar la posición de sus brazos respecto de su propio cuerpo no manteniéndose constante el momento de inercia del sistema.

b) Según (9.18):

$$L_{\text{posición } a} = L_{\text{posición } b} \quad (9.19)$$

es decir, el momento angular es el mismo en las dos situaciones consideradas en la Fig. 9.8. Como el eje de rotación es fijo podemos prescindir del carácter vectorial de esta magnitud. ¿Por qué si el eje de rotación es fijo, I no permanece constante? ¿Se contradice ésto con lo afirmado en el texto? Sustituyendo (9.6) en esta relación:

$$I_a \omega_a = I_b \omega_b \quad (9.20)$$

Sustituyendo los momentos de inercia en (9.20), obtenemos: $\omega_b = 4 \omega_a$. La persona gira cuatro veces más rápida que en la situación anterior. Posiblemente llegará a marearse.

c) El trabajo realizado por las fuerzas exteriores es nulo. Por lo tanto según (9.17) la energía cinética de rotación del sistema debería de permanecer constante. No actúa tampoco rozamiento sobre los soportes, que podría dar lugar a un trabajo negativo.

Si embargo, calculemos la energía cinética del sistema (9.16) en las dos situaciones:

$$E_{c_a} = 1/2 I_a \omega_a^2 = M R^2 \omega_a^2, \quad E_{c_b} = 1/2 I_b \omega_b^2 = 4 M R^2 \omega_a^2$$

El sistema ha ganado energía cinética:

$$\Delta E_c = 3 M R^2 \omega_a^2 \quad (9.21)$$

este resultado parece violar el sistema de conservación de la energía.

d) La contestación a la aparente contradicción anterior reside en que no se trata de un sólido rígido y las fuerzas exteriores realizan un trabajo al contraer los brazos.

Aunque sea un poco complicado trataremos de calcular el trabajo realizado por dichas fuerzas. En un sistema de referencia localizado en la plataforma, y por lo tanto no inercial, actúan sobre las pesas unas fuerzas de inercia que valen:

$$F(r) = M \omega^2 r \quad (9.22)$$

para aproximar las pesas hay que realizar, por parte de los músculos, un trabajo *en contra* de las mismas. Por lo tanto:

$$\mathcal{T} = -2 \int_R^{R/2} F(r) dr = -2M \int_R^{R/2} \omega^2 r dr \quad (9.23)$$

¿Por qué aparece el factor dos? Esta integral parece, en principio, un poco complicada, ya que ω es función de r . Se puede simplificar expresando ω en función de L , que es una constante del movimiento, y cuyo valor conocemos: 20 :

$$L = 2 M r^2 \omega(r) \quad (9.24)$$

por lo tanto (9.23) se convierte en:

$$\mathcal{T} = -\frac{L^2}{2M} \int_R^{R/2} \frac{dr}{r^3} = \frac{3L^2}{4MR^2}$$

e introduciendo el valor del momento angular:

$$\mathcal{T} = 3 M R^2 \omega_a^2$$

resultado que coincide con el cambio de energía cinética, verificándose el teorema del trabajo-energía cinética (8.44).

En este proceso se conserva la energía ya que el sistema ha ganado energía cinética a expensas de la energía química (muscular) almacenada en el cuerpo de la persona.

* § 9.3 MOVIMIENTOS COMBINADOS DE TRASLACION Y ROTACION EN UN SOLIDO

Vamos a aplicar la caracterización *completa* del movimiento a un sólido de forma cilíndrica o esférica que se mueva sobre una superficie plana; se trata de un caso particular práctico e interesante.

Comenzaremos por dar una idea de *definiciones* propias de la Cinemática de esta clase de movimientos. Supongamos un sólido homogéneo de forma cilíndrica que se desplaza sobre una superficie horizontal. Las *posibles formas de desplazamiento* son:

- Que el cilindro **deslice**, es decir, que tenga un movimiento de traslación. En este caso todos sus puntos tienen la misma velocidad en un instante cualquiera de tiempo (§ 9.1) (Fig. 9.9).

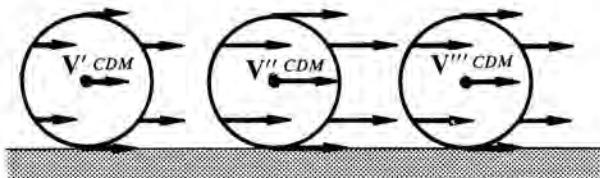


FIG. 9.9

- Que el cilindro **ruede sin deslizar**. En este caso el cilindro avanza sobre el plano horizontal, de manera que sólo un punto de su periferia, diferente en cada instante, se encuentra en contacto con la superficie. La definición formal de rodar sin deslizar es que *la velocidad instantánea del punto de contacto es 0*.

Para entender su significado, pensemos que la velocidad \mathbf{v} de cualquier punto, A , del sólido se puede expresar como:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{CDM} + \omega \times \mathbf{R} \quad (9.25)$$

donde \mathbf{V}_{CDM} es la velocidad del centro de masas (movimiento del CDM) y ω es la velocidad angular del sólido en su movimiento alrededor del CDM (Fig. 9.10). ¿Qué dirección tiene ω ? ¡y

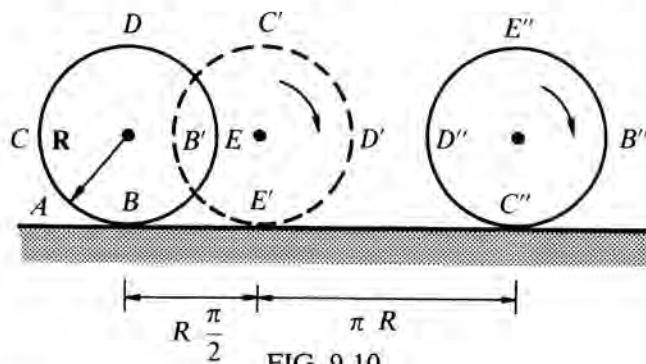


FIG. 9.10

$\omega \times \mathbf{R}$? La velocidad del punto de contacto será, por ejemplo, cuando éste sea el B :

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{V}_{CDM} - \omega \mathbf{R} \quad (9.26)$$

para otros puntos de la periferia, se representa gráficamente en la Fig. 9.11.

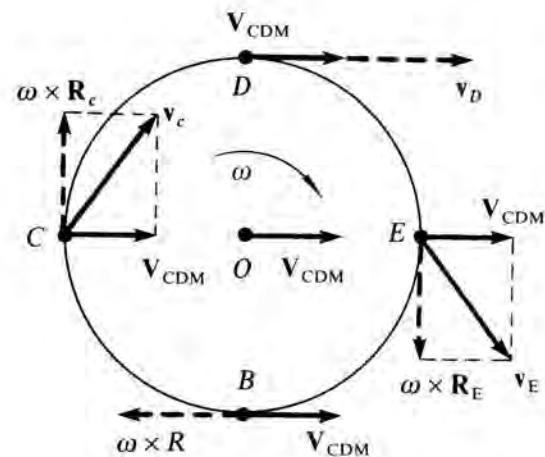


FIG. 9.11

Para que se verifique la condición de rodar sin deslizar, según la definición dada, la velocidad del punto de contacto debe ser cero, por lo tanto de (9.26), resulta:

$$\mathbf{v}_B = 0 \quad , \quad \mathbf{V}_{CDM} = \omega \mathbf{R} \quad (9.27)$$

Para este caso particular, la distribución de velocidades es –para algunos puntos del cilindro– la representada en la Fig. 9.12

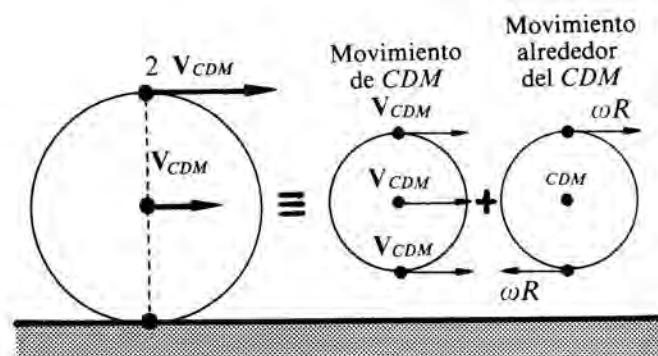


FIG. 9.12

Como la velocidad instantánea del punto que en cada momento se encuentra en contacto con la superficie es cero, dicho punto se puede considerar como *fijo en cada instante*. Podemos pensar que instantáneamente el sólido realiza una rotación alrededor del punto de contacto, con una *velocidad angular igual a ω* . ¿Por qué? La velocidad de cualquier punto del sólido viene dada por:

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}_A \quad (9.28)$$

donde A representa un punto genérico del sólido, que en el instante considerado se encuentra en contacto con la superficie. En efecto, a partir de (9.25) y de acuerdo con la Fig. 9.13:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_C &= \mathbf{r}_{CA} + \mathbf{r}_A \\ \mathbf{v} &= \mathbf{V}_{CDM} + [\omega \times (\mathbf{r}_{CA} + \mathbf{r}_A)] = \\ &= [\mathbf{V}_{CDM} + \omega \times \mathbf{r}_{CA}] + \omega \times \mathbf{r}_A = \mathbf{v}_A + (\omega \times \mathbf{r}_A) \end{aligned}$$

por definición, $\mathbf{v}_A = 0$, luego queda demostrada (9.28). Un eje normal a la figura que pase por el punto de contacto se denomina **eje instantáneo de rotación**.

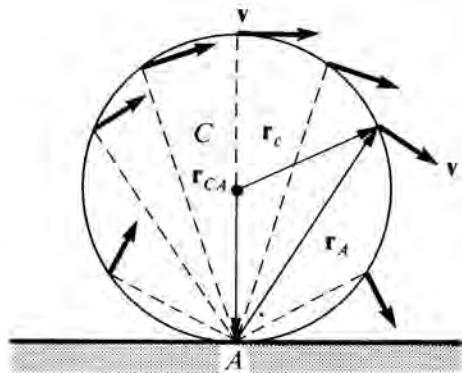


FIG. 9.13

- c) Que el cilindro **ruede y deslice**. Es el caso general en que la velocidad del punto de contacto no sea nula, es decir, se verifique (9.26) y $v_B \neq 0$.

Una vez realizadas estas consideraciones cinemáticas, pasaremos a tratar los **aspectos dinámicos** de este movimiento.

Las características del deslizamiento, al ser las propias de un movimiento de traslación, no es necesario insistir sobre ellas porque ya son conocidas. Sólo indicar que puede existir o no rozamiento, según se considere éste despreciable o no; en un problema concreto esto se indica en el enunciado. La ecuación a aplicar es (8.9).

El caso más interesante es el de **rodar sin deslizar**. Esta forma de desplazamiento *no puede existir en ausencia de rozamiento*, y como se considera que el punto de contacto de encuentra instantáneamente en reposo, la fuerza de rozamiento que actúa es la estática, no la dinámica (§ 5.7). ¿Por qué? Es decir, que en cualquier problema en el que nos digan que un cuer-

po se desplaza sobre una superficie rodando sin deslizar, existe rozamiento, aunque no se especifique en el enunciado.

Otra característica del rodar sin deslizar es que *aunque exista fuerza de rozamiento ésta no produce trabajo*. Al estar aplicada en el punto de contacto y encontrarse éste instantáneamente en reposo el trabajo es nulo, ¿por qué? Como consecuencia: *la pesar de existir fuerza de rozamiento se conserva la energía mecánica del sólido, siempre que las restantes fuerzas que actúen sean conservativas!*

El estudio del rodar y deslizar no ofrece ninguna novedad, ya que se trata de la aplicación a un caso particular del movimiento general del sistema. Combinación de una traslación, la de su *CDM*, y una rotación alrededor de él, respecto de un eje perpendicular al plano del papel y cuya orientación en el espacio permanece fija. En este caso el módulo de la velocidad de traslación y el de la lineal asociada a la rotación no coinciden: $V_{CDM} \neq |\omega \times \mathbf{R}|$. Las ecuaciones a aplicar son (8.9) y (9.8) referida al *CDM*. *Debe existir rozamiento, que será el dinámico, y dicha fuerza produce trabajo, no conservándose –por consiguiente– la energía mecánica del sólido.*

Para clarificar estas ideas, recomendamos la resolución del problema 10.

§ 9.4 CONDICIONES DE EQUILIBRIO EN UN SOLIDO

Un sólido rígido se dice que se **encuentra en equilibrio** cuando no sufre evolución temporal alguna, es decir, *no se desplaza su CDM y no gira alrededor del mismo*. En estas condiciones *no se puede asegurar que se encuentre en reposo*.

Las ecuaciones fundamentales para estudiar el movimiento de un sólido (8.9) y (9.7), nos describen la evolución temporal del mismo. Si:

$$\frac{d \mathbf{P}_{CDM}}{dt} = 0, \quad \frac{d \mathbf{L}_{CDM}}{dt} = 0 \quad (9.29)$$

el sistema no evolucionará temporalmente: $\mathbf{P}_{CDM} = \text{cte}$, $\mathbf{L}_{CDM} = \text{cte}$.

Ahora bien, estas condiciones no garantizan que el sólido permanezca en reposo. Para ello, es necesario que inicialmente el sólido se encuentre en reposo, de lo contrario presentará un movimiento uniforme, en el que no varía ni su velocidad lineal de traslación, ni la de rotación.

Por lo tanto, *si en un sólido rígido la suma de todas las fuerzas exteriores que actúan es cero, así como el momento de las mismas respecto del CDM, e*

initialmente se encuentra quieto, seguirá en estado de reposo.

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad , \quad \sum \mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (9.30)$$

Si el sólido tiene un punto o eje fijo, es suficiente con la segunda de las ecuaciones (9.30), para asegurar que se encontrará en equilibrio, ya que la única posibilidad que tiene es la de rotación.

En § 7.5 estudiamos las condiciones de equilibrio para un punto material. Las mismas condiciones se aplican para un sólido rígido: *el equilibrio es estable cuando la energía potencial es mínima; es inestable cuando es máxima*.

Como le ocurre a un punto material, un sólido siempre tiende a la posición de mínima energía potencial, compatible con las ligaduras a que esté sometido. En el caso de equilibrio bajo la acción del campo gravitatorio terrestre, las condiciones anteriores son equivalentes a las siguientes: *el equilibrio es estable cuando, al desplazar el cuerpo de su posición de equilibrio, se eleva su CDM; inestable cuando desciende; e indiferente cuando no cambia su altura sobre el suelo. ¿Por qué?*

Ejercicio 9.3

El sistema de la Fig. 9.14 se encuentra en equilibrio. Se supone que no existe rozamiento en el apoyo de la varilla con el suelo, y que el cable que las une con el techo es flexible y de masa despreciable. Dibujar las fuerzas que actúan sobre la varilla, el cable y el apoyo. Calcular las reacciones en el apoyo. La varilla tiene una masa M y una longitud l .

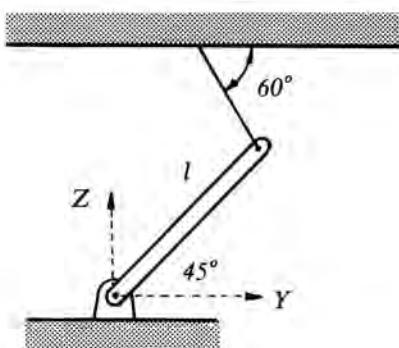


FIG. 9.14

Solución:

En todo problema de Estática para estructuras planas, que son muy importantes en ingeniería, hay que conocer el tipo de apoyo utilizado entre los diferentes elementos que forman la estructura. Los tipos ideales que se suelen considerar, se reconocen por el símbolo empleado; éstos se encuentran ya estandarizados. Aunque éstas son cuestiones muy específicas, que a nosotros no nos interesan, indicaremos que el representado en la Fig. 9.14 es el llamado:

apoyo ideal de pasador. Este apoyo impide el movimiento relativo en las direcciones y y z entre el punto perteneciente a la varilla y el sistema de referencia.

Analicemos las fuerzas que actúan sobre cada parte del sistema. Para ello sustituimos la acción del medio exterior sobre cada parte, por las fuerzas que ejerce sobre ella, Fig. 9.15. ¿Qué fuerzas son de acción y reacción? La reacción que ejerce el apoyo sobre la varilla la hemos descompuesto en sus dos componentes: R_{VA_y} , R_{VA_z} .

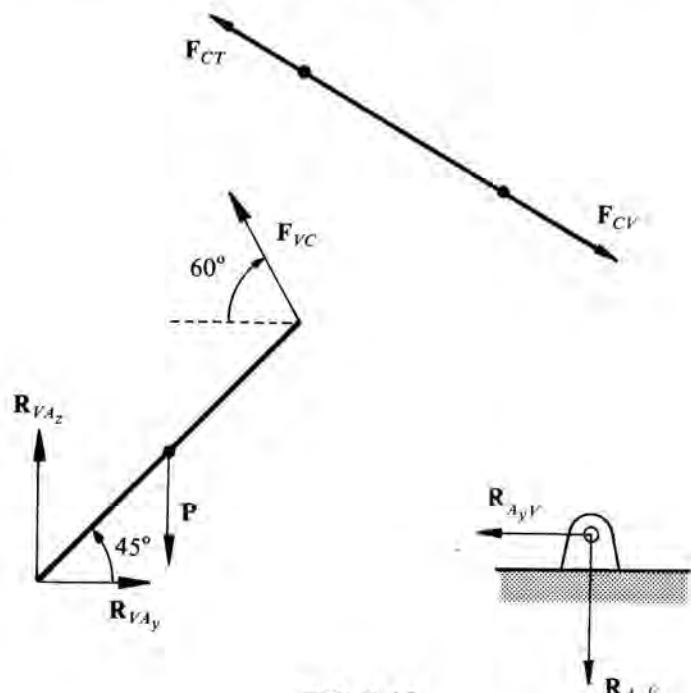


FIG. 9.15

Aplicando (9.30) a la varilla:

$$\mathbf{R} + \mathbf{P} + \mathbf{F}_{VC} = \mathbf{0} \begin{cases} F_{VC} \sin 60^\circ - Mg + R_{VA_z} = 0 \\ -F_{VC} \cos 60^\circ + R_{VA_y} = 0 \end{cases} \quad (9.31)$$

tomando momentos respecto del punto de apoyo:

$$Mg(l/2) \cos 45^\circ - F_{VC} l \sin 75^\circ = 0 \quad (9.32)$$

¿qué dirección y sentido tienen estos momentos?. ¿Podrías justificar que el ángulo que forma la varilla con la dirección de la cuerda es 75° ?

De (9.32):

$$F_{VC} = F_{CV} = T = \frac{\sqrt{3} + 1}{Mg} N$$

y de (9.31):

$$R_{VA_y} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2Mg} N \quad , \quad R_{VA_z} = \left(Mg - \frac{\sqrt{3} + 3}{2Mg} \right) N$$

TABLA 9.1

ANALOGIAS ENTRE EL MOVIMIENTO DE TRASLACION Y DE ROTACION

Magnitud física	Traslación	Rotación
Desplazamiento elemental	dr	$d\theta$
Velocidad	v	ω
Aceleración	a	α
Fuerza	F	Momento M
Masa	m	Momento Inercia I
Momento lineal	$F = m a$	$M = I\alpha$ (*)
Energía cinética	$P = m v$	Momento angular $I\omega = L$ (*)
Potencia	$1/2 mv^2$	$1/2 I\omega^2$
Trabajo	$F \cdot dr$	$M \cdot d\theta$

(*) Las fórmulas con asterisco sólo son válidas para rotaciones alrededor de un eje principal.

CUESTIONES

- Citar ejemplos de movimientos de traslación diferentes a los indicados en § 9.1.
- ¿Por qué en un movimiento de rotación todas las «partículas» del sólido tienen la misma velocidad angular?
- ¿Qué relación existe entre (9.1) y $v_i = \omega \times r_i$ (Fig. 9.5)? ¿y entre (9.1) y (2.26)?
- Si un cuerpo tiene un movimiento de rotación, ¿necesariamente debe actuar sobre él un momento, debido a las fuerzas exteriores, distinto de cero?
- En los cursos de introducción a la Física se asocia toda rotación con la existencia de un par de fuerzas, mientras que aquí se ha indicado que está asociada al momento de una fuerza respecto de un punto. ¿Cómo se compaginan ambos puntos de vista?
- Demostrar que si O es un punto fijo respecto de un SRI se verifica: $\mathbf{M}_{ext_O} = \frac{d\mathbf{L}_O}{dt}$. Esta condición no hace falta exigir

la si se toma como punto O el CDM. La demostración se puede hacer siguiendo la pauta de (6.21).

- El efecto estático de una fuerza aplicada a un sólido no varía si ésta se lleva a lo largo de su recta de acción. Justificar la afirmación anterior tomando, por ejemplo, un sólido con un punto fijo. La generalización de este resultado permite afirmar que dichas fuerzas son *vectores deslizantes*.
- El momento angular de un sólido, ¿siempre es paralelo a la velocidad angular? Razonar la contestación.
- Explicar el concepto de «eje principal de inercia».
- Justificar, intuitivamente, por qué un eje de simetría debe ser principal.
- ¿Cuándo son válidas cada una de las siguientes expresiones: $= I\omega$?
- Justificar claramente por qué el único movimiento posible de un sólido respecto de su CDM es una rotación.
- El momento lineal de un sistema de partículas no depende del movimiento relativo de las mismas respecto del CDM. ¿Podemos hacer la misma afirmación respecto de la energía cinética total?

- Explicar brevemente, aplicando el teorema de conservación del momento angular, cómo un saltador de trampolín puede —durante el salto— controlar su velocidad de rotación alrededor de un eje horizontal que pase por su CDM.
- Supongamos que montamos en bicicleta a lo largo de una carretera horizontal en la dirección Norte. ¿Qué dirección tiene el momento cinético de la bicicleta respecto de un punto fijo en la carretera?
- Supongamos de nuevo la cuestión anterior, y que en un instante dado nos ladeamos hacia el lado izquierdo. ¿Qué dirección tiene el momento de las fuerzas que actúan sobre la bicicleta, respecto de un punto de la carretera que instantáneamente se encuentra en contacto con una de las ruedas? Justificar por qué la bicicleta tiene tendencia a girar hacia la izquierda como consecuencia de este momento.
- Justificar que una polea fija sólo puede girar si son distintas las tensiones en los dos extremos de la cuerda que pasa por ella. Esto exige la existencia de una fuerza de rozamiento entre la cuerda y la polea. ¿Cómo influiría esta fuerza, y la masa de la polea, en los problemas resueltos en capítulos anteriores, en los que siempre se consideraron despreciables?
- Demostrar que el producto mixto de tres vectores representa el volumen del paralelepípedo formado por ellos.
- ¿Cuándo se dice que una esfera *rueda sin deslizar*? ¿Qué condiciones dinámicas se cumplen en este caso?
- La condición necesaria y suficiente para que un sólido se encuentre en equilibrio es (9.30). ¿Y para un sistema deformable?

PROBLEMAS

- Un sistema está formado por dos partículas de masa m , unidas mediante una varilla de masa despreciable y longitud $2r$. Calcular el momento angular del sistema cuando: a) Gira alrededor de un eje perpendicular a la varilla por su punto medio; b) alrededor de un eje que forma un ángulo θ con la varilla. ¿Qué conclusiones se deducen comparando ambos resultados?
- Un cuerpo gira alrededor de un eje fijo con una aceleración angular de 3 rad s^{-2} . Inicialmente se encontraba en reposo. El momento de inercia respecto de dicho eje vale 5 kg m^2 . Calcular: a) velocidad del cuerpo al cabo de 5 s de haber iniciado el movimiento, b) energía cinética en dicho instante. c) ¿Qué trabajo realiza la fuerza que actúa sobre él durante los primeros 5 s?
- Una rueda está girando y, debido al rozamiento con el eje de giro, se encuentra sometida a un par de 10 N m . El radio de la rueda es de 0.6 m , su masa es 100 kg y está girando a una velocidad angular de 175 rad s^{-1} . ¿Cuánto tiempo tardará la rueda en parar? ¿Cuántas vueltas dará antes de pararse? Supóngase toda la masa de la rueda concentrada en la periferia.
- En el sistema representado en la Fig. 9.16 la cuerda arrastra a la polea sin deslizar sobre ella. Calcular la aceleración de los bloques, así como la tensión de la cuerda en los dos tramos. Se desprecia el rozamiento entre el bloque y la superficie. $I = 1/2 MR^2$.
- Calcular la aceleración de las masas M_1 y M_2 , así como las tensiones de la cuerda en el esquema indicado en la Fig. 9.17. La polea tiene una masa M y se supone que no hay deslizamiento entre la cuerda y la polea. ¿Qué implica esta hipótesis? Calcular la fuerza que actúa sobre A. $I = 1/2 MR^2$.

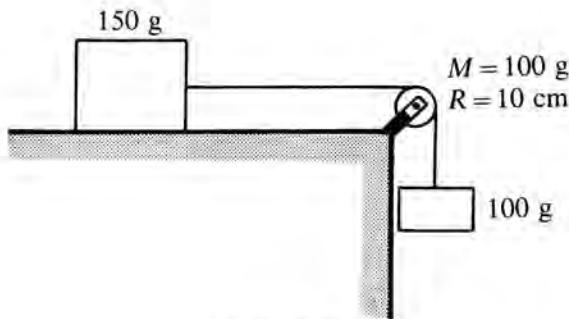


FIG. 9.16

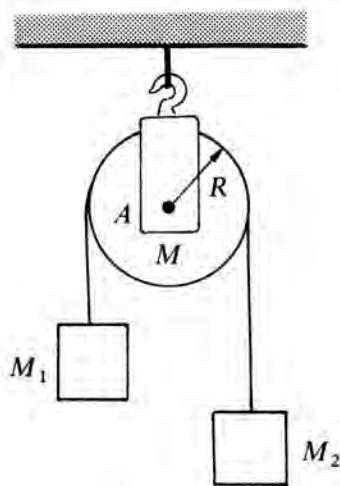


FIG. 9.17

6. Un disco de masa 50 kg y $1,8 \text{ m}$ de radio puede girar alrededor de un eje vertical perpendicular al disco. Se le aplica en el borde una fuerza constante de 20 N , tangente a la circunferencia del disco. Calcular: 1.^o Su aceleración angular. 2.^o Su momento angular, energía cinética y el ángulo descrito a los 5 s de aplicarle la fuerza. $I = 1/2 M R^2$, respecto al eje que pasa por su centro.

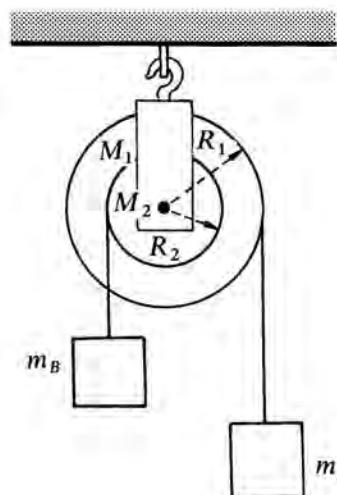


FIG. 9.18

- * 7. En el sistema de la Fig. 9.18, que representa dos poleas concéntricas de radios respectivos: $R_1 = 0,5 \text{ m}$ y $R_2 = 0,4 \text{ m}$ y masas $M_1 = 6 \text{ kg}$, $M_2 = 5 \text{ kg}$, cuelgan dos masas $m_A = 1 \text{ kg}$ y $m_B = 0,5 \text{ kg}$ de la forma indicada. Calcular: a) Aceleración angular de cada polea. Aceleración lineal de los puntos de su periferia. b) Aceleración de las masas A y B . ¿En qué sentido gira el sistema? c) Tensión en cada cuerda. d) ¿Cómo se modifica el problema si se desprecia el momento de inercia ($M_1 = M_2 = 0$) de las partes que giran, así como el rozamiento de las cuerdas con las poleas? $I = 1/2 M R^2$.

8. Un patinador tiene un momento de inercia de 4.000 kg cm^2 cuando sus brazos están extendidos, y de 3.000 kg cm^2 cuando los tiene caídos a lo largo del cuerpo. Su velocidad angular es de 3 rps . cuando los brazos están extendidos. a) ¿Cuál es su velocidad angular cuando baja los brazos? b) ¿Cuáles son su energía cinética inicial y final? ¿Por qué no son iguales éstas?

- * 9. Sobre un plano horizontal se encuentra una barra homogénea delgada, de longitud l y masa M . Entre ambos no existe rozamiento. Una pelota de hockey (maciza y bastante pesada) de masa m y velocidad v golpea a la barra en su borde y en una dirección perpendicular a la misma. Después de la colisión la pelota queda en reposo. a) Describir el movimiento de la barra. b) Calcular el cociente m/M , para que la pelota quede en reposo después de la colisión. c) ¿Cómo se modifica el movimiento de la barra, si la pelota la golpea en su centro? $I = 1/12 M l^2$.

- *10. Un cilindro homogéneo de radio R y masa M desciende por un plano inclinado un ángulo θ respecto de la horizontal (Fig. 9.19). Parte del reposo en A y hasta un punto B baja rodando sin deslizar. Desde B hasta C no existe rozamiento entre la superficie y el cilindro. Calcular la velocidad del CDM, y la rotación del cilindro, cuando éste se encuentre en B y en C . $I = 1/2 M R^2$, alrededor de un eje que pasa por su centro y es paralelo a la generatriz.

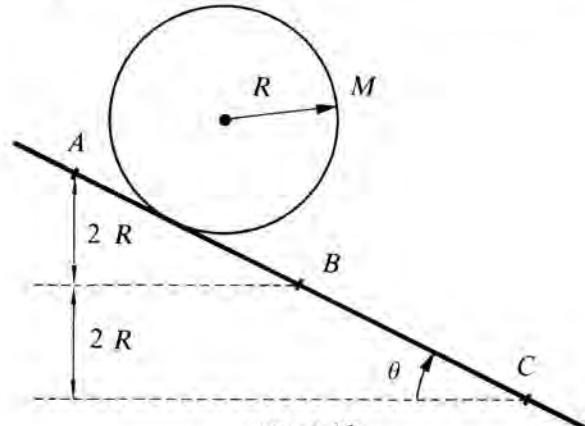


FIG. 9.19

11. Una tabla de 1 m está colocada sobre un bloque con uno de sus extremos sobresaliendo de la superficie en que se apoya (Fig. 9.20). La tabla pesa 300 N , y al aplicar al extremo B una fuerza de 100 N , el extremo A empieza a levantarse. ¿Cuánto mide el trozo de la tabla que sobresale del bloque?

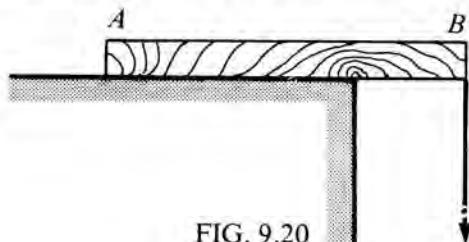
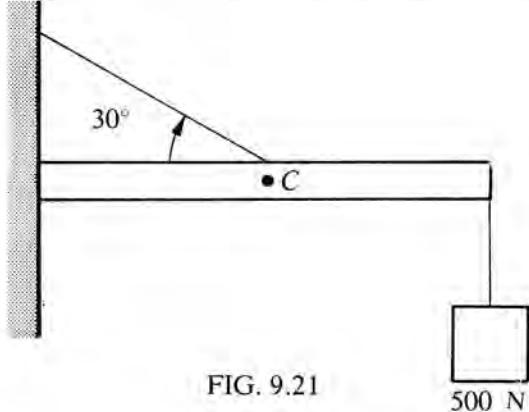


FIG. 9.20

12. Un puntal homogéneo de 10 m de longitud y 150 N de peso está empotrado en una pared de la forma indicada en la Fig. 9.21. En su extremo libre sostiene un peso de 500 N. a) Dibujar todas las fuerzas que actúan sobre el puntal. b) Calcular la tensión del hilo y la fuerza que ejerce la pared sobre el puntal.



13. Una varilla homogénea de 30 m de longitud y 150 N de peso está montada de la forma indicada en la Fig. 9.22. La distancia AO vale 30 m; la varilla está articulada en su extremo O . ¿Cuánto vale la tensión de cable AB ?

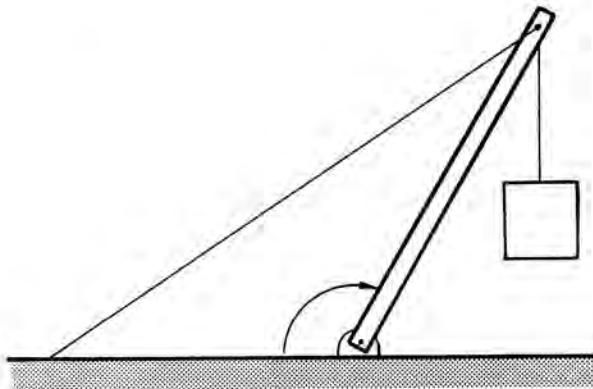


FIG. 9.22

- *14. Una barra uniforme de longitud L y masa m se mantiene en equilibrio en un plano vertical, según se indica en la Fig. 9.23. La anchura de la zanja que sostiene la barra es $l = L/3$. La fuerza de rozamiento es máxima en A y se puede despreciar en B . ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento en A y cuál la dirección de la fuerza de rozamiento que se ejerce sobre la barra?

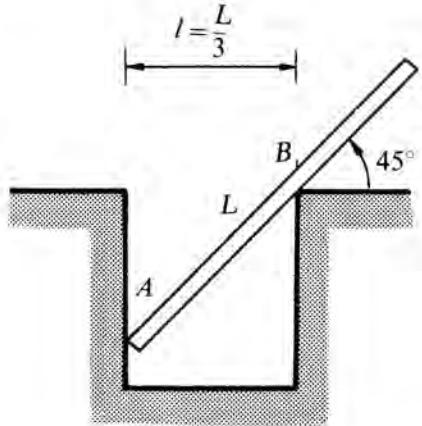


FIG. 9.23

CAPITULO X

GENERALIZACION DE LA LEY DE CONSERVACION DE LA ENERGIA

Hasta ahora hemos estudiado la evolución temporal de los cuerpos, primero en la aproximación de punto material y después en la de los sistemas. En la división tradicional de la Física, que se estableció en el s. XIX, este objetivo forma el cuerpo de la Mecánica.

En todos los fenómenos considerados hasta el momento, no se producían más que cambios en la posición del cuerpo en estudio, se trataba de *fenómenos puramente mecánicos*. Cualquier otro tipo de cambios si los habían, por ejemplo los caloríficos, no se tomaban en consideración. Bajo este punto de vista, los fenómenos que habíamos estudiado son sólo un caso muy particular de los que se presentan en la naturaleza.

En la mayor parte de situaciones reales, se presentan al mismo tiempo fenómenos caloríficos, íntimamente ligados a los mecánicos. El movimiento relativo de dos cuerpos en contacto (p. e.: una cuerda que pasa por la acanaladura de una polea, una piedra que cae a través del aire, las partes móviles de cualquier máquina, etc.) siempre da lugar a un desprendimiento de calor, como consecuencia de los rozamientos presentes. El considerarlos despreciables no es más que una abstracción, que facilita un primer estudio. En la Mecánica, aún considerando el efecto de las fuerzas de rozamiento, se suelen ignorar los fenómenos térmicos que acompañan a todo desplazamiento; su efecto, a lo sumo, se incluye dentro del término \mathcal{T}_{NC} (§ 8.7).

En algunos casos, el ignorar los fenómenos caloríficos asociados no afecta al análisis de la situación real; por ejemplo, al estudiar la caída de un cuerpo tomando en consideración la presencia del aire. En otros, el ignorarlos puede falsear por completo el análisis; por ejemplo, al estudiar el comportamiento de un gas que se comprime en un cilindro, su temperatura se eleva dando lugar a una variación de sus propiedades elásticas. En estos casos hay que tomar en consideración tanto los fenómenos mecánicos, como los térmicos a

ellos asociados.

Estos fenómenos caloríficos, en ocasiones, dan lugar a modificaciones completas de la materia, tales como cambios de estado, de composición química, etc.

En este capítulo vamos a tomar en consideración los fenómenos caloríficos que siempre acompañan a los mecánicos. Nuestro único objetivo es llegar a una generalización de la ley de conservación de la energía (§ 8.7), cuando se toman en consideración los fenómenos caloríficos. No nos proponemos otra cosa, de ahí el título que le hemos dado al capítulo. Esta generalización es la que suele conocerse bajo el nombre de *primer principio de la Termodinámica* (§ 10.4).

Con un objetivo tan modesto, carecía de sentido haberlo titulado Termodinámica. Esta disciplina incluye el problema que nos hemos propuesto, pero también otros muchos. En su sentido más amplio estudia las propiedades de los sistemas físicos reales, en la medida en que son afectadas por los cambios de temperatura. Los sistemas físicos pueden ser sólidos o fluidos, o una mezcla de ambos, o incluso el vacío en el que sólo se encuentre radiación electromagnética.

En un sentido más restringido, sus objetivos son menos ambiciosos y más concretos. Es la llamada *Termodinámica Clásica o fenomenológica*, en la que se engloba el problema que nos hemos planteado. En esta acepción no se toma en consideración la estructura atómica de la materia. Se propone tan sólo deducir, a partir de ciertos postulados básicos, las leyes de la Termodinámica: relaciones entre propiedades observables de la materia (**descripción macroscópica**).

La Termodinámica Clásica no se preocupa, porque no es su objetivo, en *explicar* desde el punto de vista de la Mecánica las propiedades macroscópicas de la materia. Su propósito es *relacionar* las numerosas propiedades observables, en función de unas pocas, normalmente el volumen, la presión y la temperatura.

Otra forma de plantear la teoría termodinámica, es tomando en consideración la estructura atómica y molecular de la materia (**descripción microscópica**). En este planteamiento se aplican estadísticamente las leyes de la Mecánica al conjunto de entes elementales (átomos y moléculas) que la forman, con objeto de explicar las propiedades macroscópicas de la materia. Esta aplicación se hace a dos niveles diferentes: la *Teoría Cinética*, y la *Mecánica Estadística*.

En la Teoría Cinética se procede de una manera más bien física y concreta, aplicando técnicas estadísticas relativamente simples (valores medios). Se suele aplicar de manera casi exclusiva a los gases, ya que en ellos las interacciones entre los átomos son mucho más débiles que en los sólidos y líquidos; ésto simplifica extraordinariamente el tratamiento matemático.

En la Mecánica Estadística se emplean técnicas estadísticas que son más formales y abstractas que las de la Teoría Cinética. Aplicando estas técnicas se pueden deducir las leyes de la Termodinámica, quedando ésta como una rama de la Mecánica.

Como hemos indicado, desarrollaremos la primera ley de la Termodinámica. Nos interesa sobre todo mostrarla como una generalización de los conceptos tratados en § 8.7, más que como uno de los principios fundamentales de la Termodinámica. Introduciremos *exclusivamente* las definiciones y relaciones que son necesarias para llegar a la formulación de dicha ley, y no trataremos ninguna de las aplicaciones que surgen de manera natural de ella, como puede ser la dinámica de fluidos. Creemos que en un texto de introducción a los conceptos fundamentales de la Física, como es éste, resulta suficiente.

No obstante, seguiremos la pauta tradicional de desarrollo de la Termodinámica, aunque a un nivel modesto. Como esta disciplina se suele presentar con un elevado grado de formalización, es conveniente comenzar definiendo de forma precisa una serie de conceptos y magnitudes fundamentales (§ 10.1, § 10.2 y § 10.3), que permitan ir construyendo mediante razonamientos lógicos el cuerpo de la Termodinámica. Dado lo limitado de nuestro objetivo, quizás no fuese necesario hacerlo de este modo, sin embargo pensamos que este planteamiento le resultará rentable al alumno. Comenzar por ellos le permitirá proseguir el estudio de la Termodinámica, cuando lo necesite.

Como consecuencia, y como ocurrió con las leyes del movimiento, tampoco seguiremos aquí el desarrollo histórico de la Termodinámica.

Suponemos que los alumnos conocen, de sus cursos elementales de Física, el concepto de presión, las escalas prácticas de medida de temperaturas, la ecuación de los gases perfectos y los métodos calorimétricos. Creemos que nuestra suposición no es excesiva.

* § 10.1 DEFINICIONES FUNDAMENTALES

El tratamiento formal de la Termodinámica Clásica comienza con una serie de definiciones básicas, que permiten mostrar cómo los conceptos fundamentales de temperatura y calor, pueden formularse sistemáticamente sobre bases experimentales. De esta manera todo el desarrollo posterior de la disciplina no está basado en conceptos intuitivos o en interpretaciones microscópicas no observables.

Algunas de estas definiciones son una generalización de nociones ya estudiadas en Mecánica.

La región del espacio que interesa estudiar, bajo el aspecto que fuere se denomina **sistema**. Esta idea ya la utilizamos en el estudio de la evolución temporal de una partícula (§ 4.1) o de un sistema de partículas (§ 8.2). La elección del sistema es totalmente arbitraria y subjetiva, está basada únicamente en los objeti-

vos de la persona que realiza el estudio (§ 8.2). Todo lo que rodea al sistema, sin formar parte de él, recibe el nombre de **medio exterior**, alrededores o entorno (§ 4.1).

El sistema y el medio están separados por un **contorno o frontera**. Esta separación puede ser física (en cuyo caso se le suele llamar **pared**) o imaginaria (una porción de un fluido aislada del resto del mismo). Normalmente se supone que el sistema no reacciona químicamente con las paredes.

Todo sistema se caracteriza mediante una serie de magnitudes físicas, o mediante el análisis de sus interacciones con el medio, o mediante ambos procedimientos a la vez. Las magnitudes a utilizar en cada caso son características del sistema y dependen de su propia naturaleza. ¿Cuáles son éstas en el caso de un sistema mecánico?. Las variables mecánicas, por ejemplo, nos han servido para determinar la energía mecánica respecto de un *SRI*.

En el caso de la Termodinámica nos interesa, como ya hemos indicado, una descripción fenomenológica; por lo tanto, las **variables** a utilizar deben de ser **macroscópicas**. Su número debe ser el menor posible y deben poderse medir experimentalmente.

Nuestro interés se centra en los **sistemas termodinámicos**, que son los caracterizados por las **variables** o coordenadas **termodinámicas**. Estas variables deben servir para determinar la energía interna del sistema (8.54). Ejemplos de sistemas termodinámicos son: un fluido encerrado en un cilindro con una pared móvil, un hilo metálico (!), una lámina fina de líquido (!), una pila electroquímica (!), un sólido magnético (!), etc. Variables termodinámicas típicas son: la presión y el volumen de un fluido, la temperatura, la composición de un gas, la longitud de un hilo metálico, el coeficiente de tensión superficial, la fuerza electromotriz de una pila, el vector imanación, el vector campo magnético, etc.

Las paredes son las fronteras que separan el sistema del medio exterior. A su través tienen lugar los intercambios de energía y de materia. En nuestro estudio nos limitaremos a procesos en los que sólo existe intercambio de energía. La pared a través de la cual puede existir un intercambio de materia recibe el nombre de **membrana semipermeable**, como sin duda recordará el alumno de cuando estudió los fenómenos de difusión y ósmosis en Química.

Existen diferentes mecanismos por los que una pared transfiere energía al sistema; estos mecanismos dependen de la propia naturaleza de la pared. Por ejemplo, es mucho más fácil suministrar energía calorífica a una masa de agua (el sistema) contenida en un matraz de vidrio (la pared), que si se encuentra encerrada en una vasija Dewar (otra pared diferente). Como consecuencia se suelen definir distintos tipos de paredes:

- a) **Pared aislante:** es aquella que no permite la transferencia de ningún tipo de energía (§ 10.3) entre el medio y el sistema. Se trata de una idealización, ya que no existe pared real alguna que cumpla estrictamente con esta condición.
- b) **Pared adiabática:** es aquella que no permite la transferencia de calor (§ 10.3) entre el medio y el sistema. Los intercambios son, generalmente, de naturaleza mecánica: los que en § 10.3 denominaremos trabajo. Un sistema termodinámico, por ejemplo un fluido, que se encuentre encerrado en un recinto de paredes adiabáticas y fijas, se encuentra totalmente aislado del medio, ¿por qué?

No es difícil de conseguir una pared real que se aproxime bastante en su comportamiento a una adiabática. Se puede fabricar con láminas de madera gruesa, con cemento y grava, con material enguatado, etc.

- c) **Pared diatérmana:** es aquella que permite la transferencia de calor entre el medio y el sistema. Puede también permitir, o no, otros tipos de intercambios energéticos, dependiendo de las circunstancias. Así por ejemplo, una pared diatérmana móvil permite intercambios tanto de calor como de trabajo mecánico (§ 10.3) entre el medio y el sistema. Una lámina metálica es un ejemplo de este tipo de pared.

En el resto del capítulo, nos limitaremos a considerar como prototipo de sistema termodinámico a un *fluido homogéneo encerrado en un cilindro con o sin una pared móvil*. Esta restricción simplifica extraordinariamente el tratamiento sin merma del contenido físico, por lo tanto es la adecuada para un texto como este.

EQUILIBRIO

Vamos a establecer el concepto de equilibrio para los sistemas termodinámicos, en los que no es posible ignorar los fenómenos caloríficos que acompañan siempre a los mecánicos. Las condiciones de equilibrio mecánico (§ 9.4) aparecerán como un caso particular del equilibrio termodinámico.

Para establecer las condiciones de este equilibrio, utilizaremos argumentos basados en la dinámica de los sistemas, ya que son los más familiares para el alumno, aunque sin descender a una descripción microscópica del sistema. Queremos establecer las condiciones de equilibrio, a través de magnitudes macroscópicas que puedan ser medidas.

Sea nuestro sistema termodinámico, cuyas condiciones de equilibrio queremos definir, un gas formado por moléculas que suponemos puntuales. Estas se encontrarán sometidas a interacciones gravitatorias mutuas; la acción de la Tierra sobre ellas la consideramos despreciable, ¿es razonable esta suposición?

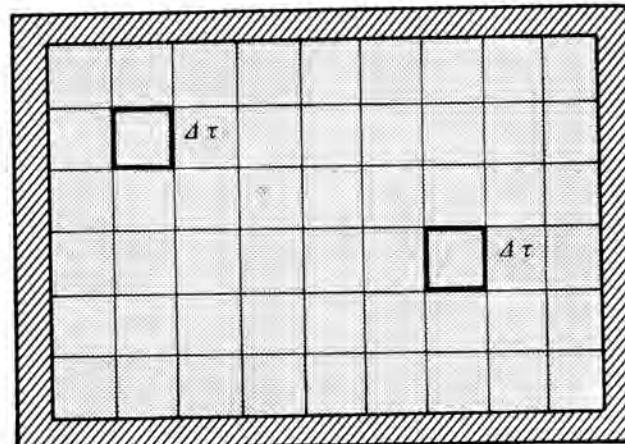


FIG. 10.1

Admitamos que el gas está encerrado en un recinto de paredes aislantes, Fig. 10.1. Dividamos mentalmente el recinto en pequeños elementos de volumen iguales, $\Delta\tau$. Su tamaño debe ser tal que pueda hacerse todavía una descripción macroscópica de su evolución temporal; para ello deben contener un número suficientemente elevado de moléculas. Si todos los elementos de volumen presentan, en un instante dado, las mismas propiedades mecánicas globales (ΔP , ΔL , ΔE_{int} y número de partículas ΔN) diremos que el gas se encuentra en *estado uniforme*. Si este estado no cambia en el transcurso del tiempo, lo cual se puede observar experimentalmente, afirmaremos que el gas se encuentra en un **estado de equilibrio**. En el estado de equilibrio, por consiguiente, las variables anteriores tienen el mismo valor para todos los elementos $\Delta\tau$ del gas.

Analicemos las condiciones que deben cumplir las variables termodinámicas del gas, para que se encuentre en equilibrio. Estas condiciones las deduciremos a partir de la definición de equilibrio dada en el párrafo anterior.

- a) **Equilibrio químico:** Si el número de partículas, ΔN , debe ser el mismo en todos los elementos de volumen, la distribución de moléculas en el recinto será uniforme, ¿por qué? Luego, en estado de equilibrio, se debe verificar que el número de moléculas por unidad de volumen sea el mismo en todos los puntos del gas y en cualquier instante:

$$n = N/V \quad , \quad n \neq f(t) \quad (10.1)$$

donde N es el número total de partículas del gas y V el volumen del recinto.

Esta conclusión permite afirmar que la *composición del gas es uniforme en todo el recinto*, si el sistema se encuentra en equilibrio (ver cuestión

6). Esta situación define la condición de equilibrio químico de un sistema. Como sólo vamos a considerar fluidos homogéneos encerrados en un recinto, esta condición se cumplirá siempre, y no proporcionará información alguna acerca del equilibrio del gas, ¿por qué?

En el caso general, el equilibrio químico implica que el sistema no tienda a experimentar un cambio espontáneo de estructura interna, tal como una reacción química o un paso de materia de unas partes a otras, como ocurre en una difusión o en una disolución aunque sea lenta. Si tienen lugar estos fenómenos, el equilibrio químico se alcanzará cuando hayan transcurrido completamente.

- b) **Equilibrio mecánico:** si ΔP debe ser el mismo en todos los elementos de volumen, la única posibilidad es que sea idénticamente nulo en todos ellos, ¿por qué?. Como consecuencia, el CDM de cada elemento de volumen está en reposo (8.7). En estas condiciones, ΔL coincide con ΔL_{CDM} (8.25), que también debe de ser nulo. Téngase en cuenta que $\Delta L_{CDM} \neq 0$ implicaría rotaciones macroscópicas de cada elemento $\Delta \tau$ y, por tanto, una falta de uniformidad del gas.

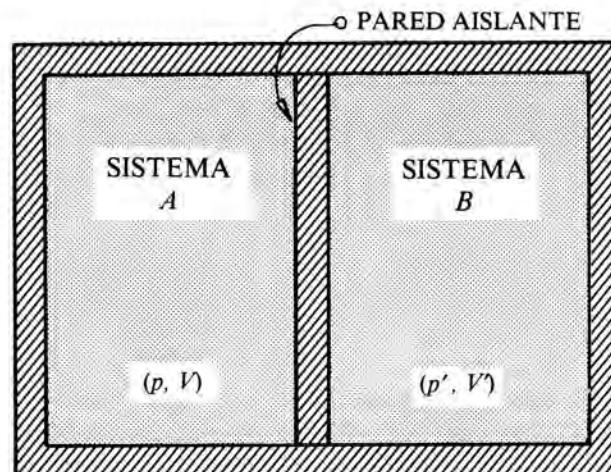
Por consiguiente, en estado de equilibrio mecánico no debe existir ningún tipo de movimiento macroscópico en el seno del gas. Compara esta condición de equilibrio con la obtenida en § 9.4, ¿cuáles han sido los argumentos de partida en cada uno de los dos casos?

La condición anterior implica la igualdad de presión en todos los puntos del recinto ocupado por el gas. La existencia de una diferencia de presiones entre dos puntos próximos del gas daría lugar a fuerzas no compensadas, que se traducirían en desplazamientos de los elementos de volumen, y como consecuencia no se encontraría un equilibrio.

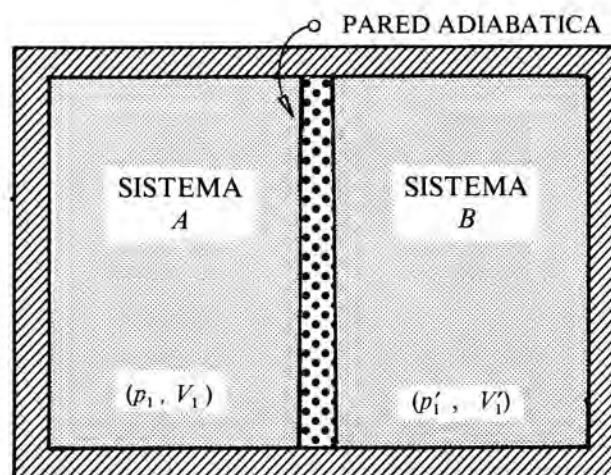
- c) **Equilibrio térmico:** Para la existencia de equilibrio es necesario, finalmente, que la energía interna, ΔE_{int} (8.54) (cuestión 8) de todos los elementos de volumen $\Delta \tau$ sea la misma.

Si las moléculas están uniformemente repartidas en todo el volumen, ocuparán las mismas posiciones en todos los elementos $\Delta \tau$, por lo tanto la energía potencial, ΔU_{int} (8.48), será la misma en todos ellos. Según (8.54), $\Delta E_{c_{CDM}}$ también debe ser la misma en todos los elementos de volumen. Luego, en el equilibrio térmico la energía cinética, respecto del CDM, de todos los elementos del gas es la misma. Por supuesto la energía cinética respecto de un SRI también es la misma, ¿por qué?

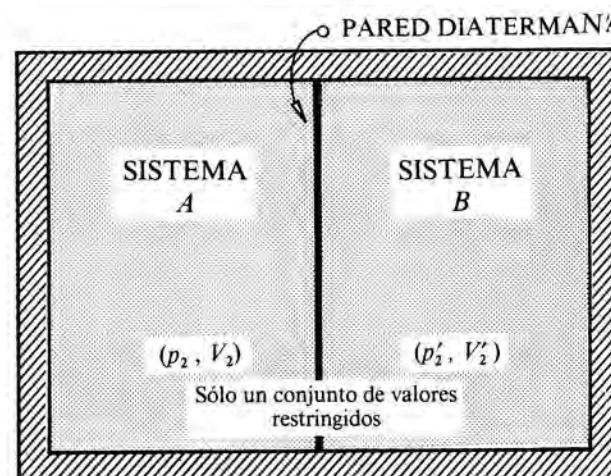
Posteriormente veremos (ejercicio 10.2) que el equilibrio térmico implica que la temperatura en todos los puntos del gas sea la misma.



(a)



(b)



(c)

FIG. 10.2

La presencia *simultánea* de equilibrio químico, mecánico y térmico son las condiciones necesarias para que cualquier sistema físico se encuentre en **equilibrio termodinámico**. ¿Podrías demostrar que dichas condiciones son suficientes?

Cuando un sistema se encuentra en un estado de equilibrio termodinámico, se caracteriza por los valores que toman las variables termodinámicas. Estos valores son iguales en todos los puntos del sistema.

Si el sistema no está aislado del medio, interacciona con él. Esta interacción da lugar a una variación de la energía interna del sistema (8.54). La forma específica de la interacción depende de muchos factores, pero de manera especial del tipo de pared que forma la frontera entre ambos. Si un sistema interacciona con el medio alcanza al cabo de un cierto tiempo, otro estado de equilibrio compatible con la naturaleza de la pared existente.

Para concretar estas ideas, consideremos un caso concreto. Sean dos fluidos homogéneos *A* y *B* que se encuentran en equilibrio, cada uno de ellos por separado, Fig. 10.2a.

Para un sistema de este tipo, su estado se encuentra especificado conociendo *dos* de sus variables termodinámicas, por ejemplo la presión y el volumen. Este hecho se encuentra confirmado experimentalmente.

En la situación indicada en la Fig. 10.2a los valores que toman las respectivas variables: *A* (p , V), *B* (p' , V') son completamente arbitrarias e independientes de un fluido a otro.

Si sustituimos la pared aislante que los separa, por una adiabática, Fig. 10.2b, los sistemas evolucionarán hacia nuevos estados de equilibrio, compatible con este tipo de pared, que alcanzarán al cabo de algún tiempo. Hasta llegar a ellos habrá existido una interacción entre *A* y *B*; los nuevos estados de equilibrio se caracterizarán por nuevos valores constantes de las respectivas variables: *A* (p_1 , V_1), *B* (p'_1 , V'_1), que también serán completamente independientes de un fluido a otro.

Si ahora cambiamos la pared intermedia por una diatérmana, Fig. 10.2c, variarán espontáneamente los valores de las variables de ambos fluidos, hasta alcanzar un nuevo estado de equilibrio cada uno de ellos. En este nuevo estado, (p_2 , V_2) y (p'_2 , V'_2) no son independientes, se habrá alcanzado un equilibrio térmico y su temperatura será la misma (§ 10.2). Por ello se dice, también, que una pared diatérmana permite el equilibrio térmico entre los dos sistemas que separa.

Volvamos a insistir, precisando, sobre la caracterización del estado de un sistema. *El estado de equilibrio* de un fluido homogéneo encerrado en el interior de un recinto de paredes fijas o móviles (*sistema cerrado*), cuyas interacciones mecánicas con el medio se realizan a través de presiones estáticas constantes, está caracterizado por un par cualquiera de sus va-

riables termodinámicas: presión (p), volumen (V), temperatura (T). La presión estática constante, significa que la fuerza que ejerce el fluido sobre la pared móvil (pistón) es del tipo: $\bar{F} = \bar{p} S$, donde S es la superficie del pistón, y \bar{p} es la presión media ejercida por el fluido sobre dicha superficie.

Para sistemas termodinámicos más complicados (p.e. sólidos sometidos a interacciones distintas de presiones estáticas o cuerpos sobre los que actúan campos eléctricos o magnéticos) se necesitan más de dos variables para que el estado esté determinado de forma unívoca.

Para el fluido homogéneo anterior, cualquier propiedad del sistema, susceptible de ser medida, puede expresarse como función de cualquier par de sus variables termodinámicas. Entre éstas debe existir, en todo estado de equilibrio, una relación: $f(p, V, T) = 0$ (¿por qué?), que recibe el nombre de **ecuación de estado** del sistema. Para el caso de un gas ideal esta ecuación es la ya conocida:

$$p V = n R T , \quad p V = (m/M) R T , \quad p = \rho (R/M) T \quad (10.2)$$

En estas expresiones alternativas, el significado de los parámetros utilizados es el siguiente: n es el número de moles (recuérdese que el mol es una unidad fundamental en el SI); R la constante universal de los gases ($R = 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$); m la masa del gas; M su masa molecular; y ρ la densidad del gas.

Un gas en las condiciones consideradas, constituye un **sistema pVT**. Es decir, está caracterizado por su ecuación de estado (10.2), la cual expresa la relación que existe entre las variables termodinámicas p , V , T ; esta relación (10.2) sólo es válida en situaciones de equilibrio. En el ejercicio 10.2, indicaremos una propiedad de los gases ideales que, junto a (10.2), sirve para caracterizarlos.

Una vez definido el equilibrio y su caracterización, consideraremos el paso de un sistema de un estado de equilibrio a otro (**transformación**).

PROCESOS REVERSIBLES E IRREVERSIBLES

Supongamos un sistema que pasa desde un estado de equilibrio inicial (*i*) a uno final (*f*). El paso se puede hacer de una manera brusca, de forma que los estados intermedios entre el inicial y el final no sean estados de equilibrio. Un proceso o **transformación** de este tipo recibe el nombre de **irreversible**.

Ahora bien, también podemos pensar en una transformación idealizada (es decir que sólo exista en nuestra mente) en la que cada estado intermedio también sea de equilibrio. Una transformación de este tipo, que se efectuaría muy lentamente, recibe el nombre de **transformación reversible** o **cuasi-estática**.

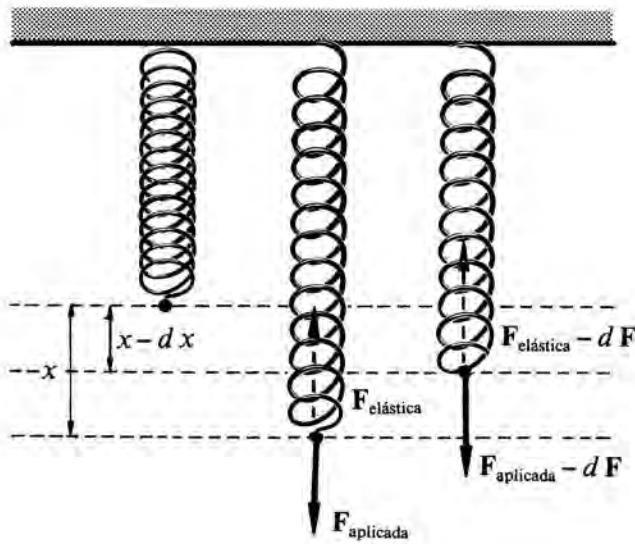


FIG. 10.3

De ellas ya hablamos en los ejercicios 5.1 y 6.6, al estudiar el comportamiento de los resortes elásticos (con la nomenclatura de este capítulo les llamaríamos sistema).

Podemos afirmar, que una *transformación reversible* es aquella que mediante un cambio diferencial en el medio, permite que el sistema invierta el sentido de recorrido de su trayectoria. En el caso del resorte que se está estirando bajo la acción de una cierta fuerza aplicada, si se disminuye ligeramente ésta, el resorte deja de estirarse y se comprime respecto de la posición anterior, Fig. 10.3.

No todas las transformaciones que se efectúan muy lentamente son reversibles. Si existen fuerzas de rozamiento, al realizar un cambio diferencial en el medio, no se invierte el sentido del movimiento. Por ello, el criterio de reversibilidad es el que hemos enunciado en el párrafo anterior.

Un sistema pVT , si la transformación es irreversible, pasa del estado de equilibrio inicial (i) al final (f), por una serie de estados intermedios que no son equilibrio. Su representación en un diagrama $p - V$ es la indicada en la Fig. 10.4 a, ¿por qué? Si, por el contrario, la transformación es reversible el gas pasa por una sucesión continua de estados de equilibrio, que se pueden representar como una línea continua en el diagrama $p - V$, Fig 10.4 b.

Como una consecuencia del segundo principio de la Termodinámica, se demuestra que todos los fenómenos de la naturaleza son irreversibles.

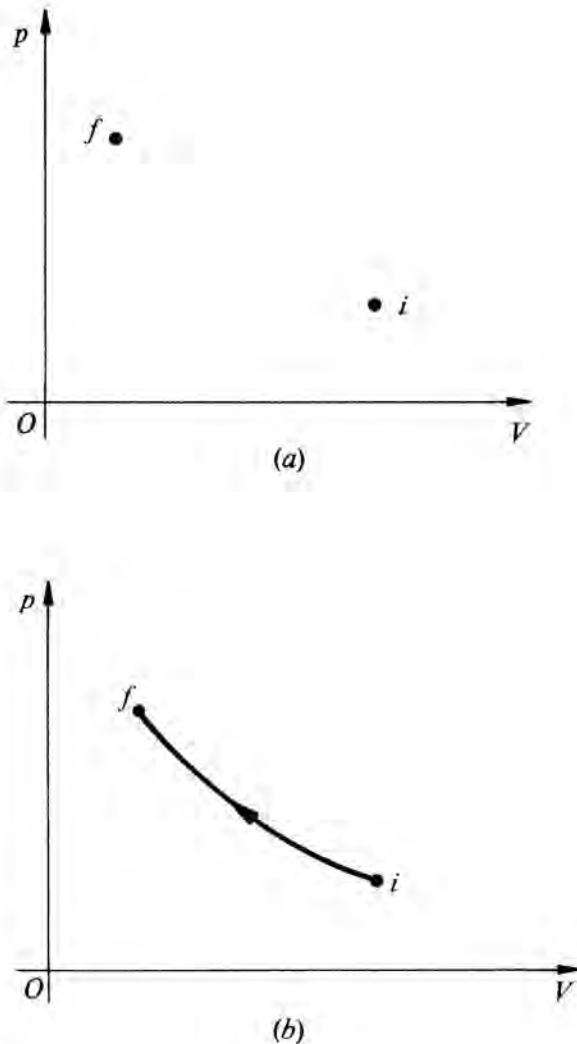


FIG. 10.4

* § 10.2 CONCEPTO DE TEMPERATURA

En el apartado anterior hemos estado utilizando la palabra temperatura, lo cual estrictamente carece de sentido puesto que todavía no ha sido definida. El alumno puede pensar que lo mismo ocurre con la presión, pero debemos recordar que dicha magnitud la tomamos con la definición conocida de los cursos elementales.

Todos tenemos una idea intuitiva (sensorial) de lo que es la temperatura, e incluso se trata de una palabra que forma parte del lenguaje coloquial. Ahora bien, como ya hemos dicho en varias ocasiones a lo largo de este libro (¿dónde?), cuando se introduce una magnitud física hay que dar una definición formal de la misma. Es la única manera de poderla utilizar en la elaboración de una teoría científica.

Supongamos dos sistemas que se encuentran por separado en equilibrio, Fig. 10.2 a. Aunque para defi-

nir el concepto de temperatura no es necesario referirse a ningún sistema termodinámico en concreto, particularizaremos de nuevo para fluidos homogéneos.

Si sustituimos la pared aislante que los separa por una diatérmana (Fig. 10.2 b), el sistema compuesto alcanzará –al cabo de un cierto tiempo– un nuevo estado de equilibrio, como ya indicamos en el apartado anterior. En este estado los dos sistemas se encontrarán *en equilibrio el uno con el otro*.

Hay que resaltar que inicialmente estaban en equilibrio y aislados. Los valores que tomaban en las variables de estado de cada uno de los gases: (P_1, V_1) y (P'_1, V'_1) eran arbitrarios e independientes.

El «sistema compuesto» formado por los dos que se encuentran en equilibrio (Fig. 10.2 c) estará caracterizado por sus respectivas variables: (P_2, V_2) y (P'_2, V'_2) ; el valor de tres cualquiera de ellas puede ser arbitrario, el de la cuarta está determinado por el de las otras tres. ¿Cómo se podrían fijar, por ejemplo, P_2 , V_2 y V'_2 ? Vamos a expresar este resultado de una manera formal:

$$f(P_2, V_2, P'_2, V'_2) = 0 \quad (10.3)$$

La forma concreta de la función (10.3) depende de los fluidos considerados y puede determinarse experimentalmente, ¿cómo se haría? Si se trata de gases ideales (10.2), ¿cuál sería?

Para poder establecer la existencia de esta propiedad importante del sistema (¿cuál?), que posteriormente caracterizaremos mediante la magnitud física *temperatura*, es necesario demostrar que (10.3) siempre se puede escribir de la forma:

$$\varphi_1(P_2, V_2) = \varphi_2(P'_2, V'_2) \quad (10.4)$$

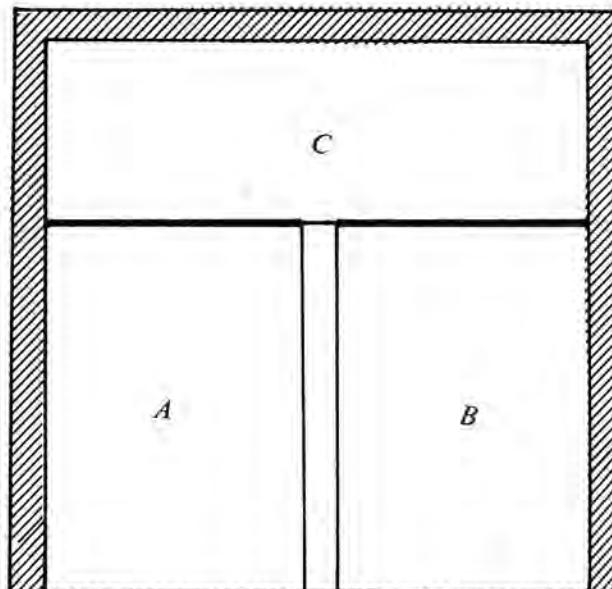
en la que se encuentran separadas las variables que caracterizan a cada uno de los dos sistemas.

La demostración está basada en unos resultados experimentales tan importantes, que reciben el nombre de **ley cero de la Termodinámica**: *si de tres sistemas A, B y C, A y B se encuentran por separado en equilibrio con C, entonces A y B también están en equilibrio entre sí*. Esta ley se resume simbólicamente en la Fig. 10.5 (ver cuestión 13).

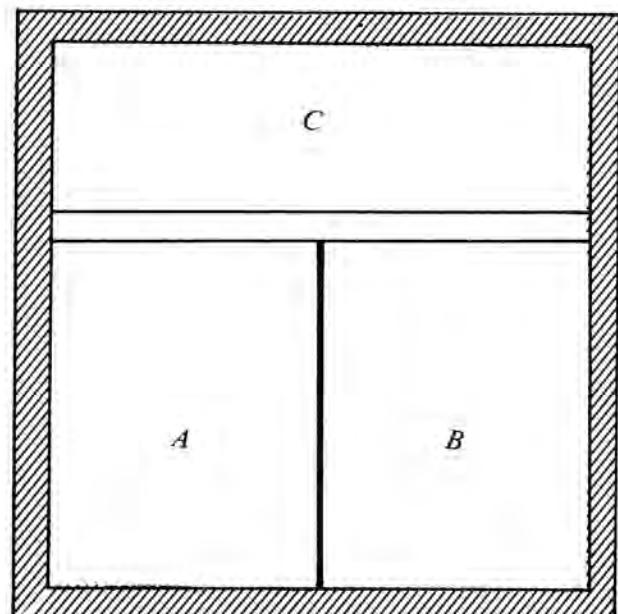
También es conveniente enunciar, por razones que serán obvias, la *inversa de la ley cero*: *Si tres o más sistemas se encuentran en contacto a través de paredes diatérmanas y en equilibrio todos en conjunto, entonces cualquier par de ellos por separado también se encuentra en equilibrio entre sí*.

Demostración de (10.4): Sean tres fluidos A, B y C. La condición para que A y C se encuentren en equilibrio es (10.3):

$$f_1(p_A, V_A, p_C, V_C) = 0 \quad (10.5)$$



(a)



(b)

FIG. 10.5

de esta función se puede despejar, por ejemplo, p_C :

$$p_C = \varphi_1(p_A, V_A, V_C) \quad (10.6)$$

Análogamente para el equilibrio entre B y C

$$f_2(p_B, V_B, p_C, V_C) = 0 \quad , \quad p_C = \varphi_2(p_B, V_B, V_C) \quad (10.7)$$

El equilibrio por separado de A y B con C , puede expresarse, a partir de (10.6) y (10.7), mediante la ecuación:

$$f_1(p_A, V_A, V_C) = f_2(p_B, V_B, V_C) \quad (10.8)$$

Ahora bien, si A y B se encuentran en equilibrio con C por separado, según la ley cero estarán en equilibrio entre sí. Por lo tanto, (10.8) es equivalente a:

$$f_3(p_A, V_A, p_B, V_B) = 0 \quad (10.9)$$

Si (10.8) y (10.9) son equivalentes significa que las funciones f_1 y f_2 contienen a V_C de forma tal que se cancela en los dos miembros de (10.8), ya que en (10.9) no aparece dicho parámetro. Si llevamos a cabo dicha cancelación, quedará:

$$\varphi_1(p_A, V_A) = \varphi_2(p_B, V_B) \quad (10.10)$$

Aplicando el mismo argumento a B y C en equilibrio con A , y a B y A con C , podremos escribir:

$$\varphi_1(p_A, V_A) = \varphi_2(p_B, V_B) = \varphi_3(p_C, V_C) \quad (10.11)$$

y lo mismo para cualquier número de sistemas que se encuentren en equilibrio unos con otros.

Por consiguiente, hemos demostrado que para cada sistema es posible encontrar una función $\rho(p, V)$ de sus variables de estado; esta función es diferente para cada fluido específico. ¿Qué ocurre si el sistema es un sólido? La función ρ tiene la propiedad de que su valor numérico (por ejemplo θ) es el mismo para todos los sistemas que se encuentren en equilibrio entre sí. El número θ se denomina **temperatura empírica**, y la ecuación:

$$\varphi(p, V) = \theta = t \quad (10.12)$$

recibe el nombre de *ecuación de estado del fluido*. Esta es la razón por la que afirmamos en el apartado anterior, que el estado de equilibrio de un fluido está completamente especificado por dos de las variables p , V , t . Para un gas ideal, ¿qué forma específica toma (10.12)?

Cada una de las relaciones:

$$t = \varphi_i(p_A, V_A) \quad , \quad t = \varphi_j(p_B, V_B) \quad t = \varphi_k(p_C, V_C) \quad (10.13)$$

representan la *ecuación de una isotermia del sistema A, B y C*, respectivamente. Si el fluido es un gas ideal, las ecuaciones (10.13) representan hipérbolas equiláteras, ¿por qué?

Concretemos un poco estos conceptos, respecto de la temperatura y las isotermas, que tan abstractos y confusos resultan. Una isotermia es el lugar geométrico de todos los puntos que representan estados en los cuales un sistema (A) se encuentra en equilibrio térmico con un estado de otro sistema (B). También están caracterizadas por (10.5), por ejemplo, con p_C y V_C constantes y variar p_A y V_A ; o por (10.7) con p_C y V_C constantes y variar p_A y V_A . En la Fig. 10.6 repre-

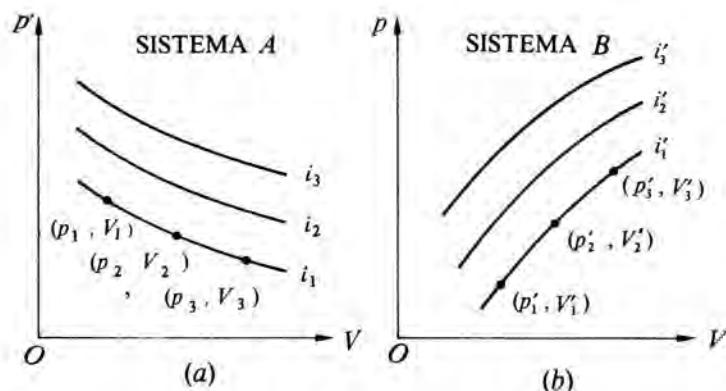


FIG. 10.6

sentamos las isotermas correspondientes a los sistemas arbitrarios A y B . ¿Cómo se pueden obtener las diferentes isotermas i_1, i'_1, i_2, i'_2 , etc.? Todos los estados sobre la isotermia i_1 del sistema A se encuentran en equilibrio, en una correspondencia biunívoca, con todos los estados sobre la isotermia i'_1 de B , ¿por qué? Las curvas i_1 e i'_1 reciben el nombre de *isotermas correspondientes* de los dos sistemas.

Resumiendo, todos los estados de isotermas correspondientes de cualquier sistema (10.13) tienen algo en común: que se encuentran en equilibrio entre sí. Podemos decir que los sistemas, en dichos estados, poseen una propiedad que asegura que se encuentran en equilibrio. A esta propiedad la caracterizamos mediante una magnitud física: la *temperatura*; esta magnitud nos permite asegurar si un sistema se encuentra en equilibrio o no con otros. ¿De qué manera nos permite asegurarlo?

La temperatura de todos los sistemas en equilibrio se representa mediante un número, se trata por lo tanto de una magnitud escalar. La elección de una escala concreta de temperaturas consiste simplemente en adoptar un conjunto de reglas para asignar un número a un conjunto de isotermas correspondientes y otro número diferente a otro conjunto distinto de isotermas correspondientes. Estas cuestiones de medida concreta de temperaturas se escapan a los objetivos de este libro.

Suponemos que los alumnos conocen la escala centígrada de temperaturas utilizada en todos los países, excepto en los de origen anglosajón. Dicha temperatura se representa mediante el símbolo t y se mide en grados centígrados ($^{\circ}\text{C}$). Admitimos, sin entrar en más detalle, que sabemos medir temperaturas.

El símbolo T representa a la **temperatura termodinámica o absoluta**. Se trata de una magnitud fundamental en el SI, su unidad es el **Kelvin (K)**. Nombre dado en honor de Lord Kelvin, ingeniero inglés del s.

XIX; Kelvin, junto con Clausius, fue el primero que configuró la Termodinámica como una disciplina con estructura teórica formal.

La temperatura termodinámica es una magnitud física que se introduce a partir del segundo principio de la Termodinámica, por lo que no daremos aquí su definición, ni sus propiedades más relevantes. Simplemente indicaremos una relación para que los alumnos la puedan utilizar, puesto que se trata de una magnitud fundamental en el SI. La temperatura termodinámica de un sistema está relacionada con la centígrada mediante la expresión:

$$t = T - 273,16 \text{ K} \quad (10.14)$$

Los 273,16 K representan la temperatura del punto triple del agua (es el estado en el que coexisten en equilibrio el hielo, el agua y el vapor de agua, a una determinada presión). Esta temperatura es el punto fijo estándar que se utiliza hoy en día en termometría. Para establecer una escala de temperaturas, es necesario siempre asignar valores numéricos a las isotermas de un sistema estandar elegido arbitrariamente. La isoterma elegida desde 1954 es la correspondiente al punto triple del agua. El alumno debe ser consciente que todas estas afirmaciones son una mera información para él, por lo que no debe pretender profundizar en ellas.

Debemos resaltar que el conocimiento que tenemos de la temperatura hasta el momento, es insuficiente para poder relacionar la temperatura empírica de un cuerpo con la sensación de «frío» o «caliente». No existe ninguna razón para que un cuerpo que tenga un valor elevado de t , deba necesariamente estar «más caliente» (en el sentido subjetivo, o en cualquier otro) que otro que lo tenga menor, puesto que la elección de una escala de temperaturas es completamente arbitraria. Se puede, y es lo que se hace, establecer que el «grado de caliente» de un cuerpo sea una función monótona (¿qué significa esta palabra?) de su temperatura, pero no podemos demostrarlo mientras no investiguemos el significado de «caliente» y «frío», y encontremos una definición que esté basada en algo menos subjetivo que la pura sensación fisiológica. Para ello hay que definir previamente el concepto de calor (§10.3) (cuestión 16).

§ 10.3 CALOR Y TEMPERATURA

Vamos a analizar los intercambios energéticos que pueden tener lugar entre el sistema y el medio exterior a través de las paredes que los separan.

Una vez más insistimos en que a nuestro nivel no es adecuado plantear el problema con toda generalidad. Tal como hicimos en los apartados anteriores nos limitaremos a casos sencillos; de esa forma es posible conservar todo el contenido físico del problema sin complicarlo innecesariamente. A pesar de tratar con sistemas específicos y limitados en cuanto a sus

interacciones con el medio, el tratamiento es riguroso. El rigor no reside en plantear un problema con toda su generalidad, sobre todo a nuestro nivel, sino en especificar con claridad las hipótesis bajo las cuales se estudia un problema.

Sea un gas ideal homogéneo que no intercambia materia con el medio. En estas condiciones, para una masa dada de gas, su estado de equilibrio está únicamente determinado por dos de sus variables termodinámicas: p , V , T ; la relación entre ellas, para cada estado, viene definida por la ecuación (10.2). Suponemos, además, que las acciones mecánicas entre el sistema y el medio son debidas exclusivamente a presiones estáticas uniformes. Por último, suponemos que la evolución del sistema entre dos estados de equilibrio tiene lugar por vía reversible.

En estas condiciones los intercambios (o transferencia) de energía entre el medio y el sistema pueden ser de dos tipos:

a) Intercambios acompañados de una modificación del volumen ocupado por el sistema (que pueden tener lugar si el recinto que contiene al gas dispone de una pared móvil). En estos intercambios se realiza un trabajo mecánico (§ 6.4), que para el tipo de fuerzas supuestas ($\bar{F} = \bar{p} S$) se puede expresar como fuerza por desplazamiento, Fig. 10.7. A este mecanismo de transferencia de energía le llamaremos **trabajo**.

b) Intercambios que *no van* acompañados de una modificación del volumen ocupado por el gas (tienen lugar si las paredes son fijas y diatérmanas, Fig. 10.8). Se trata de una transferencia de energía que no se puede expresar, para el tipo de fuerzas supuestas, como fuerza por desplazamiento. A este mecanismo de transferencia de energía le llamaremos **calor**.

Con estas definiciones, tanto el trabajo como el calor son dos mecanismos de transferencia de energía, que reciben nombres diferentes. Fijémonos que esta nueva interpretación del trabajo no está en contradicción con la dada en § 6.4, sino que la engloba como un caso particular, ¿por qué?

MEDIO

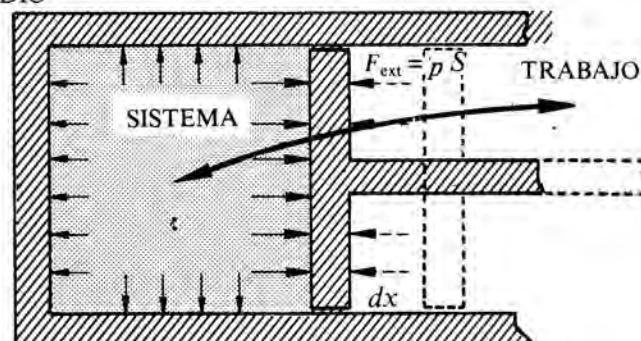


FIG. 10.7

MEDIO

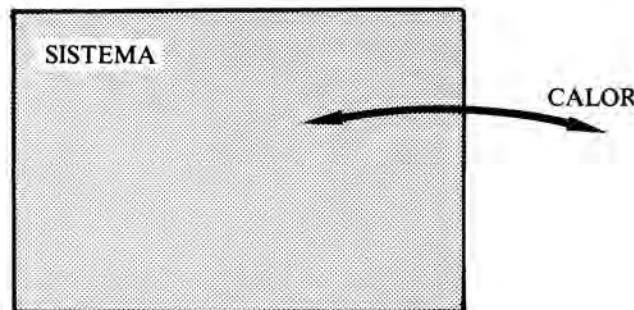


FIG. 10.8

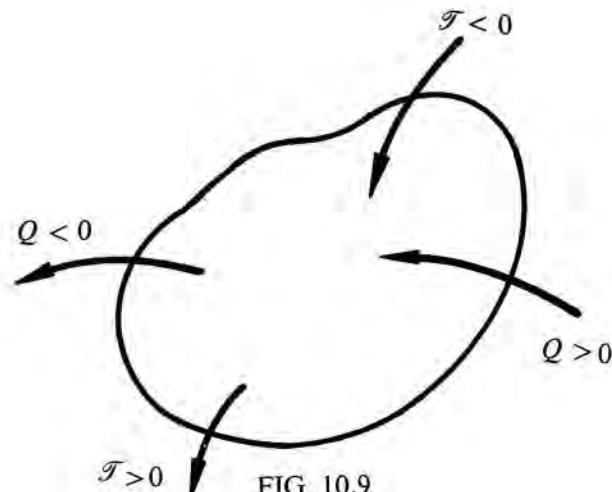


FIG. 10.9

El calor, como el trabajo, tendrán dimensiones de energía ($[Q] = [M][L]^2[T]^2$) y su unidad en el SI es el julio. El uso de la *caloría* (cal) como antigua medida para medir el calor, ha sido desaconsejada por la Conferencia General de Pesas y Medidas. Su equivalencia con el julio ya la dimos (§ 6.4).

En calor y el trabajo sólo se ponen de manifiesto cuando el sistema cambia de estado. Representan la energía transferida a través de las paredes del sistema. No tiene sentido, por lo tanto, hablar del «calor que tienen un cuerpo» o «del trabajo de un cuerpo».

En ocasiones, se suele dar una definición calorimétrica de calor. *El calor*, se dice, es la energía que fluye entre un sistema y su medio, como consecuencia exclusivamente de la diferencia de temperaturas entre ambos. De la misma manera, se puede definir el trabajo como la energía que se transfiere entre el sistema y su medio, cuando no interviene directamente la diferencia de temperaturas entre ambos.

En la definición calorimétrica, se supone que el calor fluye desde el cuerpo que se encuentra a mayor temperatura hacia el que lo está a menor. En esta transferencia, tiene lugar un cambio de estado de ambos, hasta que alcanzan la misma temperatura y por consiguiente el equilibrio común. Este es el principio en el que se basan todos los métodos calorimétricos (ejercicio 10.1).

Los intercambios de energía, tanto en forma de trabajo como de calor, entre el medio y el sistema pueden tener lugar en ambos sentidos. Por esta razón, la energía se considera como una magnitud algebraica, y se ha establecido de forma arbitraria un criterio de signos para la misma. En la Fig. 10.9 se simboliza dicho criterio de signos; la energía que fluye desde el sistema al medio en forma de trabajo es positiva ($\mathcal{T} > 0$), y la que fluye en sentido contrario negativa ($\mathcal{T} < 0$). La energía, en forma de calor, transferida por el medio al sistema se considera positiva ($Q > 0$), la del sistema al medio negativa ($Q < 0$).

Como consecuencia de estos intercambios energéticos, varía la energía interna del sistema. La forma como lo hace lo expresa la primera ley de la Termodinámica (§ 10.4).

En general, los intercambios energéticos entre un sistema y el medio tienen lugar tanto bajo la forma de trabajo, como de calor. Por ejemplo, si en la Fig. 10.7 las paredes aislantes se sustituyen por paredes diatérmanas, tienen lugar ambos mecanismos de transferencia, ¿por qué?

A continuación, expresaremos el trabajo (§ 6.4) en función de las variables termodinámicas de un gas ideal. Sea el sistema representado en la Fig. 10.7. Como ya dijimos, las únicas fuerzas que actúan son las debidas a presiones estáticas uniformes: $F = p S$, donde S es la superficie del pistón y p la presión media ejercida por el gas sobre la cara interior del pistón; de ahora en adelante la representaremos simplemente por p .

Inicialmente el pistón se encontrará en equilibrio bajo la acción de la fuerza ejercida por el gas y una F_{ext} aplicada; ambas fuerzas son debidas a sendas presiones estáticas uniformes, el origen de las cuales nos es irrelevante. Supongamos que el gas se expande; el trabajo realizado por el gas en un desplazamiento elemental dx del pistón valdrá (6.29):

$$d\mathcal{T}_{\text{sistema}} = F dx = p S dx = p dV \quad (10.15)$$

como el desplazamiento se realiza por vía reversible (ejercicio 6.6), el trabajo realizado por la fuerza exterior en el mismo desplazamiento valdrá:

$$d\mathcal{T}_{\text{medio}} = -d\mathcal{T}_{\text{sistema}}$$

En el desplazamiento finito, desde un estado inicial (i) hasta un estado final (f):

$$\mathcal{T}_{i \rightarrow f, \text{sistema}} = \int_{i \rightarrow f} p dV = -\mathcal{T}_{i \rightarrow f, \text{medio}} \quad (10.16)$$

Como la transformación se realiza por vía reversible, p puede expresarse en cada estado intermedio en función de V y T , a través de la correspondiente ecuación de estado (10.2). La evaluación de la integral (10.15) se puede llevar a cabo una vez especificado el comportamiento de T , ya que entonces es posible relacionar p con V ; de esta forma queda determinada la «trayectoria» (en nomenclatura de la Termodinámica se dice «del tipo de trasformación») a lo largo de la cual se calcula el trabajo. El ejercicio 10.3 nos aclarará esta idea.

Debemos llamar la atención sobre el criterio de signos, referido al trabajo, que antes se introdujo. Tomamos el convenio de designar el trabajo, para no ir arrastrando subíndices, mediante la expresión:

$$\mathcal{T} = \int_i^f p dV \quad (10.17)$$

Mediante (10.17) representamos el trabajo debido a la presión característica del gas; por lo tanto es la energía intercambiada entre el gas y el medio, en forma de trabajo. Si dicho trabajo es positivo estará realizado por el sistema sobre el medio, si es negativo por el medio sobre el sistema.

Recomendaríamos al alumno que volviese a repasar el ejercicio 6.6, aplicando los criterios que acabamos de introducir. Para ello, considera como sistema la partícula de masa m y como medio el resorte. El resultado a que se llega es descorazonador, ¿no? Los signos que allí obtuvimos, para los diferentes trabajos, son los contrarios a los que les corresponderían con el criterio que acabamos de enunciar (i). La única explicación posible, es que el criterio se introdujo en Termodinámica para analizar el comportamiento de las máquinas térmicas. Estas funcionan absorbiendo calor del medio ($Q > 0$) y realizando trabajo contra el medio ($\mathcal{T} < 0$), de esa forma ambas magnitudes son positivas. No obstante, si hemos captado claramente estas nociones, no tendremos ningún problema.

Como el gas evoluciona entre los dos estados (inicial y final) por vía reversible, el trabajo se puede representar en el diagrama p - V mediante una línea continua (§ 10.1), Fig. 10.10. Tal como hemos argumentado anteriormente, el trabajo depende no sólo del estado inicial y final, sino también del tipo de trasformación que siga el gas, para pasar del uno al otro (ejercicio 3.10), ¿por qué?

Razonando de la misma manera con el calor (10.21) se llega a la conclusión que también depende del tipo de trasformación, no sólo del estado inicial y final.

En Termodinámica, a las magnitudes que presentan esta propiedad se les denomina *funciones de linea*; sus variaciones elementales se suelen representar mediante un símbolo característico: δQ , $\delta \mathcal{T}$, con objeto de resaltar dicha propiedad. Es decir no se utiliza

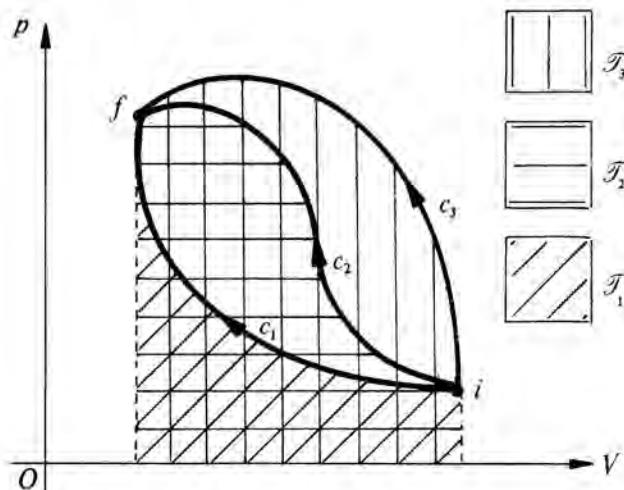


FIG. 10.10

el símbolo clásico dQ , $d\mathcal{T}$. ¿Qué representa $\delta \mathcal{T}$? De ahora en adelante utilizaremos esta notación; la tradicional queda para las magnitudes que no dependen del tipo de trasformación, sino sólo del estado final e inicial (§ 10.4), que llamaremos *funciones o variables de estado*.

Ejercicio 10.1

Un depósito fabricado de un cierto metal pesa 35,6 N y contiene además 133,5 N de agua. El sistema se encuentra a la temperatura inicial de 15,5°C. En un momento dado, se arroja en el agua un trozo del mismo metal, que pesa 17,8 N y que se encuentra a la temperatura de 177°C. Al cabo de un tiempo, cuando el sistema compuesto alcanza el equilibrio, la temperatura común es 18,3°C. Calcular el calor específico del metal. El calor específico del agua es 4,18 kJ kg⁻¹ K⁻¹.

Solución:

Este ejercicio está propuesto para recordar algunos conceptos estudiados en los cursos elementales y, al mismo tiempo, fijar alguna de las ideas que acabamos de introducir. Sabemos que la **capacidad calorífica** de un sistema es la cantidad de calor que debe suministrársela el medio, para que su temperatura aumente desde T hasta $T + dT$:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} \quad (10.18)$$

La capacidad calorífica dividida por la masa del sistema, recibe el nombre de **calor específico** del sistema en cuestión:

$$c = \frac{C}{m} = \frac{1}{m} \frac{\delta Q}{dT} \quad (10.19)$$

También se suele definir el **calor específico molar**: capacidad calorífica dividida por el número de moles del sistema:

$$c_n = 1/n \frac{\delta Q}{dT} \quad (10.20)$$

Para poder calcular la cantidad de calor que debe recibir el sistema para elevar su temperatura desde T_1 a T_2 , hay que integrar (10.19). Ahora bien, dicha integral es especialmente difícil de resolver en el caso de los gases, puesto que el calor específico depende de la temperatura y además del tipo de transformación que experimenta el gas al suministrárselo el calor. Así se define el *calor específico a volumen constante y a presión constante*:

$$c_V = \frac{1}{m} \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_V \quad c_p = \frac{1}{m} \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_p \quad (10.21)$$

Esta afirmación concuerda con la anterior, cuando indicábamos que el calor no es una función de estado.

La integral de (10.19) se puede evaluar aplicando el teorema del valor medio del análisis matemático:

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} \delta Q = m \int_{T_1}^{T_2} c(T) dT = m \bar{c} (T_2 - T_1) \quad (10.22)$$

Por esta razón en el ejercicio nos indican el calor específico medio del agua, y no simplemente su calor específico.

Una vez recordado el concepto de capacidad calorífica, estamos en condiciones de abordar el ejercicio. Inicialmente tenemos un sistema (*A*) formado por el depósito y el agua que contiene; ambos se encuentran en equilibrio térmico y por lo tanto a la misma temperatura (t_{i_A}). Consideramos que este sistema se encuentra aislado del medio que le rodea.

Otro sistema es el trozo de metal (*B*) que inicialmente se encuentra en un estado caracterizado por su temperatura (t_{i_B}). *¿Te das cuenta que estos sistemas no pueden venir caracterizados exclusivamente por las variables termodinámicas p , V , T ?*

Al poner en contacto los dos sistemas (*A* y *B*) y aislarlos, se alcanzará, al cabo de un cierto tiempo, un nuevo estado de equilibrio. Este se caracterizará por una temperatura común para el sistema compuesto ($t_{f_{A+B}}$). En el proceso ha habido una transferencia de energía desde el sistema *B* al *A*, del tipo que hemos denominado calor. *¿Por qué es de este tipo y no del que hemos llamado trabajo? Es un caso en el que tampoco ha habido transferencia de materia, ni variación en la composición química de los sistemas.*

El sistema *A* necesita una «cantidad de calor» Q_A para pasar de la temperatura t_{i_A} a la $t_{f_{A+B}}$:

$$Q_A = (m_{\text{agua}} \bar{c}_{\text{agua}} + m_{\text{depósito}} \bar{c}_{\text{metal}}) (t_{f_{A+B}} - t_{i_A}) \quad (10.23)$$

El sistema *B* ha cedido a su medio (el sistema *A*) una «cantidad de calor» Q_B , para pasar de la temperatura t_{i_B} a la $t_{f_{A+B}}$:

$$Q_B = m_{\text{metal}} \bar{c}_{\text{metal}} (t_{i_B} - t_{f_{A+B}}) \quad (10.24)$$

Cuando se ha alcanzado el equilibrio: $Q_A = Q_B$. Por consiguiente:

$$\bar{c}_{\text{metal}} = \frac{m_{\text{agua}} \bar{c}_{\text{agua}} (t_{f_{A+B}} - t_{i_A})}{m_{\text{metal}} (t_{i_B} - t_{f_{A+B}}) - m_{\text{depósito}} (t_{f_{A+B}} - t_{i_A})} \quad (10.25)$$

y sustituyendo los valores numéricos: $\bar{c}_{\text{metal}} = 0,57 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

* § 10.4 PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA

Vamos a relacionar los diferentes conceptos desarrollados hasta el momento; seguimos con el sistema y condiciones especificadas en el apartado anterior. Cuando un sistema interacciona con su medio, lo hace en general a través de dos mecanismos de transferencia de energía, que hemos llamado calor y trabajo. Se trata de dos magnitudes que no sólo dependen del estado inicial (*A*) y final (*B*) del sistema, sino también del tipo de transformación (trayectoria en el diagrama $p - V$) que siga para pasar de uno al otro.

Experimentalmente se demuestra, que la diferencia: $Q - \mathcal{T}$ entre ambas no depende del tipo de transformación que siga el sistema para pasar del estado inicial al final, Fig. 10.11:

$$(Q - \mathcal{T})_{A \rightarrow B, c_1} = (Q - \mathcal{T})_{A \rightarrow B, c_2} = \dots = (Q - \mathcal{T})_{A \rightarrow B, c_n} \quad (10.26)$$

Creemos que no es necesario especificar el tipo de experimentos que permiten establecer la afirmación anterior, ya que el alumno los puede imaginar con facilidad, ¿no? ¿Qué representa cada una de las diferencias anteriores?

Nos encontramos, pues, con una situación que nos es familiar (§ 7.2 y § 7.3): La diferencia, $Q - \mathcal{T}$ depende sólo de las coordenadas termodinámicas correspondientes a los estados inicial (*A*) y final (*B*) y no de la trayectoria seguida entre los dos puntos extremos. Luego, se puede expresar como la diferencia entre los valores que toma una cierta función $U(p, V, T)$ en los puntos final (*B*) e inicial (*A*).

$$(Q - \mathcal{T})_{A \rightarrow B} = U_B - U_A = \Delta U \quad (10.27)$$

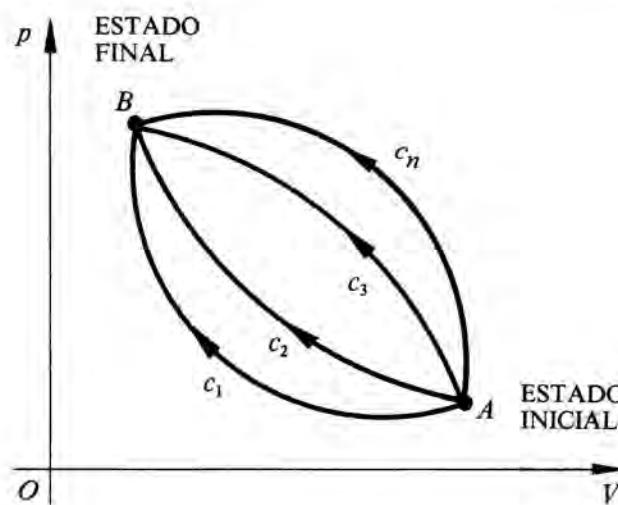


FIG. 10.11

Esta función U se denomina **energía interna** del sistema y la expresión (10.27) constituye la diferencia, o cambio, de energía interna entre dos estados de equilibrio. Se trata de una magnitud escalar, que tiene dimensiones de trabajo y que, por lo tanto, su unidad es el julio.

Si deseamos adjudicar a cada estado un valor de U hay que elegir –de forma arbitraria– la correspondiente a un cierto estado origen o referencia; es algo análogo a lo que hicimos con la energía potencial (§7.3).

La relación (10.27) constituye la **primera ley de la termodinámica**. Es una ley de validez universal y hasta el momento actual, no se ha encontrado ningún fenómeno de la naturaleza que la viole.

Si el sistema sufre una transformación infinitesimal, la primera ley se escribe en *forma diferencial*:

$$\delta Q - \delta \mathcal{T} = d(Q - \mathcal{T}) = dU \quad (10.28)$$

donde los elementos diferenciales los representamos mediante dos símbolos diferentes (δ y d) para distinguir los que corresponden a funciones de estado (dU) de los que no lo son ($\delta Q, \delta \mathcal{T}$) tal como indicamos en el apartado anterior.

La primera ley de la termodinámica se aplica a todo fenómeno de la naturaleza que tiene lugar entre dos estados de equilibrio, *aunque los estados intermedios no sean de equilibrio* (es decir la transformación sea irreversible).

Tal como hemos presentado esta ley, contiene dos ideas fundamentales: a) la definición de energía interna y b) el principio de conservación de la energía.

Vamos a desarrollar esta segunda idea en conexión con el apartado § 8.7. En Mecánica habíamos llegado a enunciar el teorema, o la ley (el designarlo de una forma u otra depende de como se presente ver cuestión 1), de conservación de la energía: *si el trabajo de las fuerzas exteriores es nulo ($\mathcal{T}_{\text{ext}} = 0$), la energía propia del sistema se conserva*,

$$(E_c + U_{\text{int}})_{\text{final}} = (E_c + U_{\text{int}})_{\text{inicial}} \quad (10.29)$$

o de forma alternativa, (8.43) y (8.54),

$$\begin{aligned} (E_{c_{CDM}} + 1/2 M V_{CDM}^2 + U_{\text{int}}) &= \\ &= (E_{c_{CDM}} + 1/2 M V_{CDM}^2 + U_{\text{int}}) \\ (E_{\text{interna}} + 1/2 M V_{CDM}^2)_{f} &= (E_{\text{interna}} + 1/2 M V_{CDM}^2)_{i} \end{aligned} \quad (10.30)$$

Este enunciado se encuentra incluido, como caso particular, en la primera ley de la termodinámica. En efecto, si en (10.27) suponemos que no existen intercambios de calor entre el sistema y su medio: $Q = 0$,

$$-\mathcal{T}_{i \rightarrow f} = \Delta U \quad (10.31)$$

en Mecánica se verifica siempre esta condición, ya que se ignoran (porque no tienen normalmente ninguna influencia, tal como se indicó en la introducción) los «fenómenos de tipo calorífico». Ahora hay que tener en cuenta el criterio de signos elegido en la Termodinámica y (10.17). Cuando $\mathcal{T}_{i \rightarrow f} < 0$, significa que el trabajo está realizado por el medio sobre el sistema. En Mecánica consideramos siempre el trabajo realizado por las fuerzas exteriores, es decir por el «medio» sobre el «sistema»; con la nomenclatura de la Termodinámica, por consiguiente:

$$\mathcal{T}_{\text{ext}} = -\mathcal{T}_{i \rightarrow f}, \quad \mathcal{T}_{\text{ext}} = \Delta U \quad (10.32)$$

Si el trabajo de las fuerzas exteriores es nulo (en Mecánica, y en un sentido más restringido que en Termodinámica, decimos «si el sistema está aislado»):

$$U_f = U_i \quad (10.33)$$

Ahora bien, en Termodinámica un estado de equilibrio (como son el inicial y el final) implica el equilibrio mecánico (§ 10.1): $1/2 M V_{CDM}^2 = 0$, situación que no ocurre normalmente con Mecánica, ¿por qué? Por lo tanto, las expresiones (10.30) y (10.33) son equivalentes. La energía interna definida en (10.27) coincide con la definida en (8.54):

$$E_{\text{interna}} = E_{c_{CDM}} + U_{\text{int}} = U \quad (10.34)$$

La interpretación física de esta magnitud, desde el punto de vista microscópico, se realiza dentro de la Termodinámica Estadística, y queda –como ya indicamos– fuera de los objetivos de este texto.

Luego, con esta nueva visión más amplia podemos afirmar (10.27): Que la energía se conserva si se toma en consideración el calor que un sistema intercambia con el medio. Por lo tanto, la primera ley de la termodinámica representa una generalización de la ley de conservación de la energía cuando se considera el calor. Dicha ley indica los cambios de estado que un sistema puede llevar a cabo en la naturaleza: sólo aquellos para los cuales se conserve la energía.

Sin embargo, no todos los cambios que permite la primera ley se presentan en la naturaleza. Así por ejemplo, calentando un cuerpo no lo podemos hacer ascender por un plano inclinado, o que el calor se transfiera de un cuerpo frío a uno caliente. Estos aspectos los aborda el segundo principio de la termodinámica.

En el estudio de la teoría cinética de los gases ideales (donde se toma en consideración la estructura microscópica del sistema) se hacen una serie de hipótesis de las que destacaremos dos: a) El volumen de las moléculas es una fracción muy pequeña del volumen ocupado por el gas. b) La interacción entre las moléculas es despreciable, salvo en los instantes en que chocan. Con estas hipótesis:

$U_{\text{int}} = 0$, ¿por qué? Por lo tanto, $U \equiv \bar{E}_{c_{CDM}}$, aplicando las leyes de la mecánica, se llega a la conclusión de que $\bar{E}_{c_{CDM}} \propto T$. Esta es la interpretación estadística de la temperatura. Creemos que ahora se comprenderá mejor el argumento que utilizamos para justificar la condición de equilibrio térmico de un sistema, así como que dicha condición equivale a que la temperatura es una magnitud característica de un sistema en equilibrio térmico.

Ejercicio 10.2

Un gas ideal evoluciona desde un estado i hasta un estado f (Fig. 10.12). Siguiendo la transformación (1) se observa que el trabajo realizado por el sistema vale 84 J y el calor absorbido por el mismo 210 J. A lo largo de la transformación (2), $Q_2 = 271$ J. Calcular: a) Trabajo realizado por el sistema a lo largo de la transformación (2). b) Si $\mathcal{T}_3 = -55$ J, a lo largo de la transformación (3), ¿cuánto vale, para ésta, el calor intercambiado entre el sistema y el medio exterior? c) Si $U_i = 42$ J, ¿cuánto vale U_f ? d) Si $U_B = 92$ J, ¿cuánto vale Q para la transformación iB a lo largo de la trayectoria indicada en la figura? ¿Y para la Bf ?

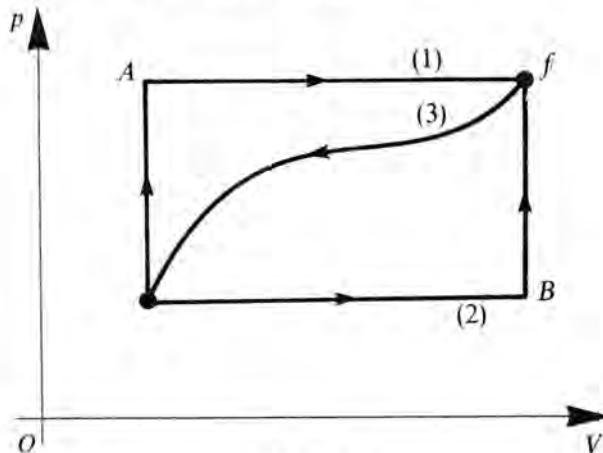


FIG. 10.12

Solución:

Analicemos en primer lugar los datos del enunciado: $\mathcal{T}_{i \rightarrow f} = 84$ J, al ser positivo implica que está realizado por el sistema sobre el medio exterior; $Q_{i \rightarrow f} = 210$ J, calor cedido por el medio al sistema; análogamente $Q_{i \rightarrow f, 2}$, que también es positivo.

a) Las transformaciones (1) y (2), en el diagrama $p - V$, son dos transformaciones diferentes que llevan el sistema desde el mismo estado inicial al mismo estado final. Por lo tanto (10.27):

$$U_f - U_i = Q_1 - \mathcal{T}_1, \quad U_f - U_i = Q_2 - \mathcal{T}_2 \quad (10.35)$$

ya que la energía interna sólo depende del estado inicial y final.

$$U_f - U_i = 210 - 84 = 126 \text{ J} \quad (10.36)$$

Para interpretar físicamente el proceso, supongamos una pared móvil (pistón). Todas las paredes fijas del cilindro son aislantes, menos la inferior que es diatérmana; la pared

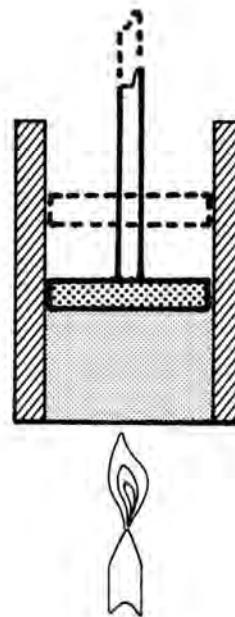


FIG. 10.13

móvil es adiabática Fig. 10.13. ¿Qué significa cada uno de estos términos?

La transformación (1) puede tener lugar de la siguiente manera: Desde i hasta A calentando el cilindro por la parte inferior y manteniendo fijo el pistón; así aumenta la presión que ejerce el gas sobre sus paredes, y no varía el volumen (transformación isócora), por consiguiente no se «realiza» trabajo (10.17). Desde A hasta f , el gas evoluciona manteniendo constante su presión (transformación isóbara) y aumentando su volumen; el cilindro se sigue calentando, y por aumentar su volumen el gas «realiza» un trabajo contra el medio ($\mathcal{T}_{A \rightarrow f} > 0$).

En la transformación $i \rightarrow A$ todo el calor absorbido por el gas ($Q_{i \rightarrow A} > 0$) se invierte en aumentar su energía interna, ¿por qué? En la $A \rightarrow f$, en aumentar ésta y en realizar trabajo.

Para calcular \mathcal{T}_2 , hacemos uso de (10.35) y (10.36): $\mathcal{T}_2 = 145$ J.

b) El trabajo negativo significa que es realizado por el medio exterior contra el sistema, en este caso concreto se traduce en una disminución del volumen ocupado por el gas. Haciendo uso de (10.27):

$$U_f - U_i = Q_1 - \mathcal{T}_1, \quad Q_3 = -181 \text{ J}$$

En esta transformación, el gas desprende ($Q_3 < 0$) una cantidad de calor igual a 181 J

$$c) \quad U_f - U_i = 126 \text{ J}, \quad U_f = 168 \text{ J}$$

d) Todo el intercambio de energía en forma de trabajo, entre el gas y el medio, tiene lugar en el tramo $i \rightarrow B$, ¿por qué? Luego:

$$U_B - U_i = 92 - 42 = 50 \text{ J}, \quad Q_{i \rightarrow B, 2} = \Delta U_{iB} + \mathcal{T}_{i \rightarrow B, 2} = 195 \text{ J}$$

En el tramo $B \rightarrow f$:

$$\mathcal{T}_{B \rightarrow f, 2} = 0, \quad Q_{B \rightarrow f, 2} = \Delta U_{Bf} = 76 \text{ J}$$

$$Q_{i \rightarrow f, 2} = Q_{i \rightarrow B, 2} + Q_{B \rightarrow f, 2} = 271 \text{ J}$$

Ejercicio 10.3

Un sistema formado por n moles de un gas ideal, evoluciona por vía reversible desde un estado 1 hasta otro estado 2, ambos perfectamente conocidos. Calcular: $\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}$, $Q_{1 \rightarrow 2}$, ΔU y la función $f(p, V, T)$ específica, según la transformación sea: a) isóbara, b) isocórica, c) isoterma, d) adiabática. Se suponen conocidos los calores específicos del gas a volumen y a presión constante, así como su masa molecular.

Solución

Comenzaremos definiendo el gas ideal y una propiedad de la energía interna que no hemos considerado hasta el momento y a la que hace alusión el enunciado.

Rossini y Frandsen demostraron experimentalmente (1932) que la energía interna de un gas real depende tanto de la presión como de la temperatura. Un **gas ideal** se define como aquél que cumple las ecuaciones:

$$pV = nRT$$

$$\left(\frac{\delta U}{\delta p}\right)_T = 0 \rightarrow U = f(T) \quad (10.37)$$

Las propiedades de un gas ideal no corresponden a las de ningún gas real, son *aproximadamente* las de un gas real a bajas presiones.

Si los estados 1 y 2 son perfectamente conocidos, significa que conocemos –para cada uno de ellos– el valor de dos de sus variables termodinámicas (por ejemplo: p_1 , T_1 y V_2 , T_2). El valor de la tercera se calcula a partir de la ecuación de estado (10.37). Por lo tanto, suponemos conocidas (p_1, V_1, T_1) y (p_2, V_2, T_2) .

a) **Transformación isóbara:** es aquella que *tiene lugar a presión constante*, Fig. 10.14. La ecuación de una transformación isóbara (lo que el enunciado llama función específica $f(V, p, T)$) es $p = \text{cte}$, luego (10.37): *el volumen ocupado por el gas es en cada estado, proporcional a su temperatura absoluta.*

$$V = (nR/p)T \quad (10.38)$$

El trabajo intercambiado con el medio es (10.17):

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 1, \text{isóbara}} = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1) \quad (10.39)$$

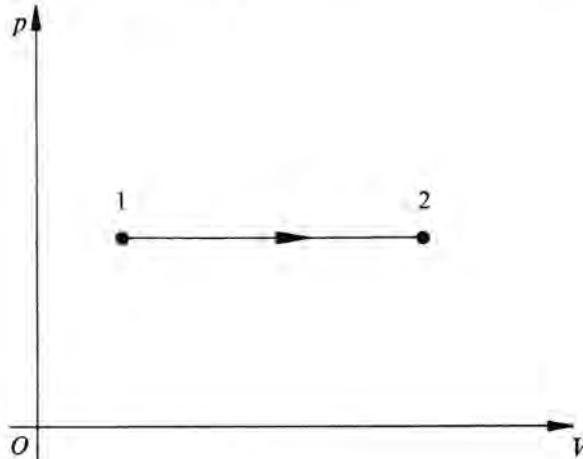


FIG. 10.14

si $V_2 > V_1$, como ocurre en la Fig. 10.14, $\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2} > 0$ el gas se expande; si $V_1 < V_2$, se comprime.

Por definición de calor específico a presión constante (10.21):

$$\delta Q = m c_p dT = n M c_p dT \quad (10.40)$$

donde los diferentes símbolos tienen el significado que indicamos en (10.2). Integrando (10.40):

$$Q_{1 \rightarrow 2, \text{isóbara}} = n M c_p (T_2 - T_1) \quad (10.41)$$

este calor intercambiado (Fig. 10.14) es negativo, ¿por qué? ¿Qué significado físico tiene?

La variación de energía interna, según (10.27), se calcula por diferencia entre (10.41) y (10.39).

b) **Transformación isocórica:** es aquella que *tiene lugar a volumen constante*, Fig. 10.15. La ecuación de una transformación isocórica es $V = \text{cte}$; la presión es proporcional a la temperatura absoluta.

El trabajo en la transformación isocórica es nulo, ¿por qué?

El calor intercambiado es (10.21):

$$\delta Q = m c_V dT, \quad Q_{1 \rightarrow 2, \text{isocórica}} = n M c_V (T_2 - T_1) \quad (10.42)$$

La variación de energía interna vale (10.42), ¿por qué? Interpretar físicamente el resultado.

Realmente no era necesario qué nos diesen como datos, tanto c_p como c_V ya que entre ellos existe una relación:

$$c_{np} - c_{nV} = R, \quad c_p - c_V = R/M \quad (10.43)$$

conocida como *relación de Mayer*.

Demostración de (10.43): A partir de (10.28), teniendo en cuenta (10.21) y (10.17) se puede escribir siempre:

$$\delta Q = m c_V dT + p dV \quad (10.44)$$

ya que: $dV = m c_p dT$, ¿por qué?

Si la transformación es isóbara, la expresión (10.44) toma la forma (10.21)

$$m c_p dT = m c_V dT + p dV \quad (10.45)$$

diferenciando (10.37) para una transformación isóbara y sustituyendo en (10.45) queda:

$$m(c_p - c_V) = nR, \quad c_p - c_V = R/M \quad (10.46)$$

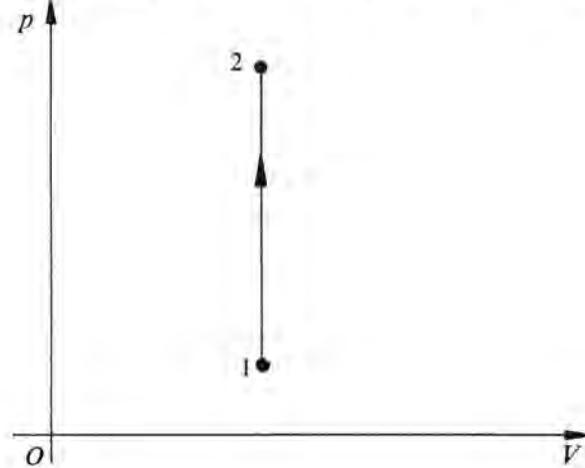


FIG. 10.15

donde M es la masa molecular del gas. Introduciendo los calores específicos molares (10.20):

$$c_{np} - c_{nV} = R \quad (10.47)$$

como queríamos demostrar.

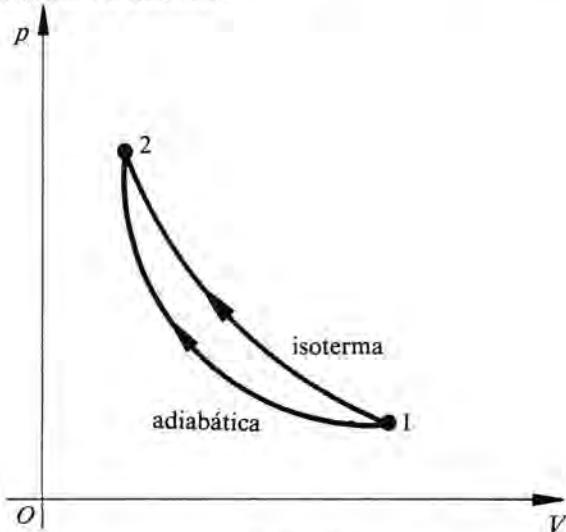


FIG. 10.16

c) **Transformación isotérmica:** es aquella que tiene lugar a temperatura constante, Fig. 10.16. La ecuación de una transformación isotérmica es $pV = \text{cte}$, expresión conocida con el nombre de ley de Boyle-Mariotte, en honor de sus descubridores, el científico inglés R. Boyle y el francés Mariotte (s. XVII).

El trabajo vale:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1 \rightarrow 2, \text{ isotérmica}} &= \int_1^2 p dV = nRT \int_1^2 dV/V = \\ &= nRT \ln(V_2/V_1) = nRT \ln(P_1/P_2) \end{aligned} \quad (10.48)$$

La variación de energía interna es nula, ¿por qué? Por consiguiente: $Q_{1 \rightarrow 2, \text{ isotérmica}} = \mathcal{T}_{1 \rightarrow 2, \text{ isotérmica}}$. ¿Cuál es el significado físico?

c) **Transformación adiabática** es aquella que tiene lugar sin que se intercambie calor entre el gas y el medio exterior, Fig. 10.16. La ecuación de una adiabática es:

$$pV^\gamma = \text{cte} \quad (10.49)$$

donde $\gamma = c_p / c_V$

Demostración de (10.49): Para un proceso adiabático (10.44) se escribe:

$$0 = m c_V dT + pdV \quad (10.50)$$

Diferenciando (10.37):

$$p dV + V dp = n R dT \quad (10.51)$$

sustituyendo (10.50) en (10.51), y teniendo en cuenta (10.43) y la definición de γ :

$$dp/p = -\gamma(dV/V) \quad (10.52)$$

integrandola esta ecuación:

$$\ln p + \gamma \ln V = \text{cte}$$

donde la constante depende de las «condiciones iniciales» de la transformación (valor de p y V en un estado determinado). La ecuación anterior equivale a:

$$pV^\gamma = \text{cte}$$

por lo tanto queda demostrada (10.49).

En la práctica, una transformación muy rápida se puede considerar como adiabática, ¿por qué?

El trabajo en una transformación adiabática vale:

$$\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2, \text{ adiabática}} = \int_1^2 p dV = p_1 V_1^\gamma \int_1^2 V^{-\gamma} dV \quad (10.53)$$

donde hemos elegido como constante de (10.49): $p_1 V_1^\gamma$. Justificar que se puede hacer dicha elección.

Integrando (10.53) y teniendo en cuenta (10.49): $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$

$$\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2, \text{ adiabática}} = (1/\gamma) (p_2 V_2 - p_1 V_1) \quad (10.54)$$

La variación de energía es igual a menos el trabajo intercambiado entre el sistema y el medio durante la transformación, ¿por qué? Interprétilo físicamente.

CUESTIONES

- * 1. En el capítulo VIII hablamos del teorema de conservación de la energía, en éste de la ley de conservación de la energía. ¿Qué diferencia existe entre una ley y un teorema? ¿Son correctas las acepciones utilizadas en cada uno de los capítulos, para referirnos a la conservación de la energía? Justificar la respuesta.
- 2. Señalar las «coordenadas» o «variables» mecánicas necesarias para caracterizar a un punto material y a un sólido rígido.
- 3. Resume las características de las variables termodinámicas macroscópicas.
- * 4. Cita variables termodinámicas diferentes a las que se han incluido en el capítulo.
- 5. Una pared móvil ¿puede ser aislante? Razona la respuesta.
- * 6. ¿Cómo se aplica la condición de equilibrio químico a un sistema compuesto por diferentes especies moleculares?
- 7. Define con precisión la presión media sobre una superficie y la presión en un punto.
- 8. Justifica que para un sistema aislado, la energía propia coincide con la energía mecánica total.
- 9. ¿En qué condiciones un bloque que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal, se encontraría en equilibrio termodinámico?
- 10. ¿Cuáles son las «variables termodinámicas» de un cuerpo suspendido del extremo de un resorte?
- 11. Busca el significado de temperatura en un diccionario y compáralo con el concepto definido en § 10.2.
- * 12. ¿Por qué se suele elegir como ejemplo típico de sistema termodinámico a un fluido y no a un sólido?
- * 13. Describe un experimento simple sobre el que pueda basarse el enunciado de la ley cero de la termodinámica. Sugerencia: Sea el sistema C un termómetro de mercurio, en el que el mercurio es un fluido que se encuentra a una presión prácticamente nula. Su volumen está determinado por su altura en el tubito del termómetro; la altura de la columna es suficiente para determinar su estado.
- * 14. Justifica que si un fluido no es homogéneo, sus variables termodinámicas son: p, V, T y su composición. Su masa, ¿hay que especificarla?
- 15. Cita diferentes ejemplos de sistemas abiertos y cerrados.

- *16. ¿Cómo se relaciona el que un cuerpo se encuentre a mayor o menor temperatura, con la sensación de «caliente» o «frío» que da?
- *17. Una pregunta típica es: «diferencia entre calor y temperatura». ¿Qué opinas de la misma?
- 18. ¿Tiene sentido emplear los símbolos ΔQ y ΔT ? Justifica la respuesta.
- 19. Define calor específico y calor específico molar de un fluido.
- 20. ¿Qué es un gas ideal?
- *21. Justifica que la interpretación microscópica de temperatura que hemos esbozado, permite afirmar que para un gas perfecto U depende exclusivamente de la temperatura.
- *22. Justifica que la ecuación de una adiabática (10.49) también se puede expresar como $T V^{\gamma-1} = \text{cte}$ y como $T^{\gamma} p^{-(\gamma-1)} = \text{cte}$.
- 23. ¿Por qué una transformación muy rápida se puede considerar como adiabática?

PROBLEMAS

1. Un bloque de hielo (0°C) tiene una masa de 50 kg. El bloque comienza a deslizar por un plano horizontal con una velocidad inicial de $5,38 \text{ m s}^{-1}$ y se detiene después de haber recorrido 28,3 m. Calcular la masa de hielo que se ha fundido como consecuencia de su rozamiento con el plano. Indicar claramente las hipótesis que hay que establecer para resolver el problema. Calor específico medio del hielo: $4,22 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.
2. Un termómetro de 0,055 kg de masa y de calor específico $0,84 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ marca 15°C . Se introduce en 0,300 kg de agua, y el sistema compuesto termina por alcanzar un nuevo estado de equilibrio. Si en este estado el termómetro marca $44,4^\circ \text{C}$, ¿cuál era la temperatura antes de introducir el termómetro? ¿Qué hipótesis se realizan para resolver el problema? ¿En qué concepto teórico se basa su resolución?
3. Una bala de plomo de 2 g se mueve con una velocidad de 200 m s^{-1} . En un cierto instante, se incrusta en un bloque de madera de 2 kg que se encuentra suspendido del techo mediante un cable de masa despreciable e inextensible (péndulo balístico). Calcular la elevación de temperatura de la bala, suponiendo que todo el calor generado se invierte en elevar la temperatura de la bala. ¿Qué implica esta suposición? Calor específico del plomo: $0,13 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

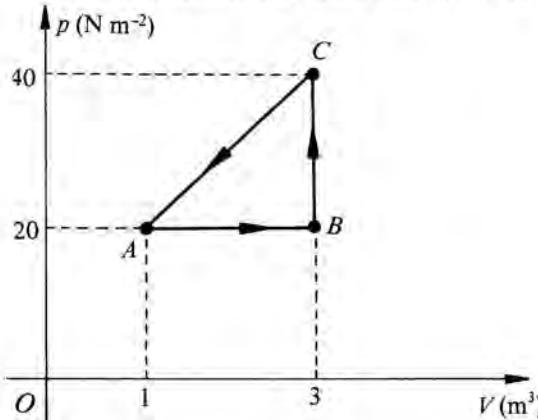


FIG. 10.17

- 4. Un gas ideal describe el ciclo indicado en la Fig. 10.17. Indicar los signos de Q , \mathcal{T} y ΔU para cada una de las transformaciones que forman el ciclo. Calcular el trabajo realizado por el gas al describir el ciclo.
- * 5. Un cilindro, de paredes diatérmanas con un pistón, está lleno de un gas ideal. El cilindro se encuentra en el interior de un recipiente en el que hay una mezcla de hielo y agua. El pistón se mueve rápidamente bajándolo desde la posición 1 a la 2, Fig. 10.18. Se detiene el pistón en la posición 2 hasta que el sistema compuesto se encuentra en equilibrio a 0°C ; posteriormente se levanta lentamente el pistón hasta llegar a la posición 1. Si durante el ciclo se han fundido 100 g de hielo. ¿Qué trabajo se ha realizado sobre el gas? ¿Qué significan las palabras en cursiva, en orden a la resolución del problema?

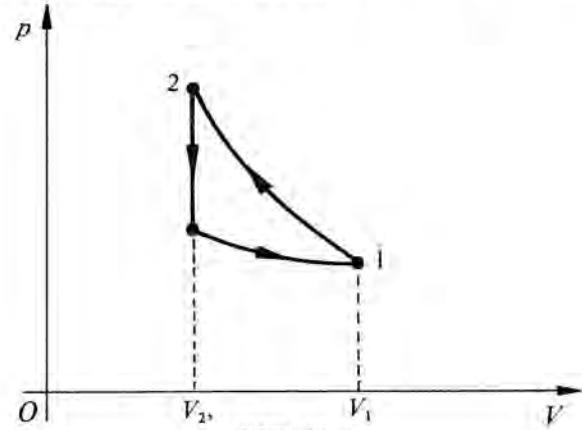


FIG. 10.18

6. Un mol de un gas ideal monoatómico ($c_n V = 3/2 R$) realiza el ciclo indicado en la Fig. 10.19. Calcular: a) Q , \mathcal{T} , ΔU para cada una de las transformaciones que forman el ciclo, y para el ciclo en conjunto. b) Si $p_1 = 1,013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$, calcular p_2 , V_2 , p_3 , V_3 .

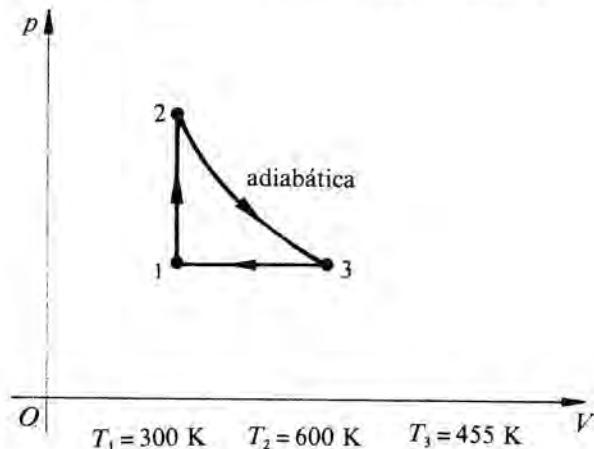


FIG. 10.19

- * 7. Un litro de un gas ideal, cuya γ es 1,3, se encuentra a 273 K y a una presión de $1,013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$. Se comprime repentinamente a la mitad de su volumen original. Calcular su presión y temperatura final. El gas se enfrió después a 0°C a presión constante, ¿cuál es su volumen final?

CAPITULO XI

CAMPO GRAVITATORIO

En este capítulo y en el siguiente aplicaremos los conceptos relativos a la teoría de campos (§ 7.1), a dos casos particulares de gran importancia práctica. En éste estudiaremos el campo gravitatorio y en el siguiente el electrostático.

Estos dos campos presentan una gran analogía formal, puesto que las fuerzas que los originan, (5.9) y (5.15) respectivamente, son del mismo tipo: *fuerzas centrales con simetría esférica* (§ 11.1). A pesar de la analogía formal, hemos optado por estudiarlos en dos capítulos consecutivos, en vez de realizar un tratamiento en paralelo. Creemos que así se resalta la diferente naturaleza física de los fenómenos que abordan cada uno de ellos. Esto en nuestra opinión, y al nivel de conceptos básicos que pretendemos desarrollar este libro, es más importante que la pura analogía formal.

A partir de la ley de fuerzas de la interacción gravitatoria (5.9), caracterizamos al campo gravitatorio a través de las descripciones que ya estudiamos en § 7.3 (§ 11.2). Tratamos tanto distribuciones discretas de masas, como continuas; hasta ahora habíamos evitado abordar las distribuciones continuas de masas (recordemos el tratamiento del *CDM* o del momento de inercia), pero creemos que a estas alturas del desarrollo de la disciplina, el alumno ya se encuentra en condiciones de enfrentarse con pequeños problemas de cálculo integral. Como ya indicamos, las distribuciones continuas son las que se encuentran en la naturaleza, cuando se estudia macroscópicamente el comportamiento de la materia.

Aprovechamos también el estudio del campo gravitatorio, para introducir la caracterización de los campos vectoriales mediante su formulación integral (§ 7.1). Como sabemos esta forma de caracterizar cualquier campo vectorial es más general y estricta que la desarrollada en el capítulo VII. A partir de esta formulación, llegamos a las ecuaciones fundamentales del campo gravitatorio (§ 11.3). La razón de introducir en este capítulo la formulación integral de las ecuaciones del campo es, fundamentalmente, que la vamos a necesitar a partir de él. Además, creemos

que es adecuado desde el punto de vista pedagógico: en el capítulo VII se introducen muchos conceptos físicos de gran importancia, y no es conveniente abrumar más a los alumnos con definiciones matemáticas, e interpretaciones físicas, innecesarias.

En este capítulo no tratamos el problema general del movimiento de una partícula en un campo de fuerzas centrales. La razón es que una vez introducidas las bases físicas (§ 11.1), el resto es un mero ejercicio de matemática aplicada. El problema es tedioso desde el punto de vista matemático, y no lo consideramos adecuado para el nivel de este texto, a pesar del indudable interés práctico que presenta.

Creemos que sería muy conveniente para la formación del alumno, la lectura de algún libro sobre la evolución de la concepción del Universo a través de los tiempos, con su impacto en el mundo intelectual y en la sociedad, especialmente en los siglos XVII y XVIII. Las teorías de N. Copérnico (1473–1543), Tycho Brahe (1576–1601), J. Kepler (1571–1630), Galileo Galilei (1564–1642) e I. Newton (1642–1727), representan una fuente extraordinaria para el estudio del espíritu y método de la Física, así como para tratar las influencias mútuas entre la ciencia y la sociedad, a través de las creencias de la época. Estos aspectos de Historia de la Ciencia e incluso de Filosofía de la Ciencia están, desgraciadamente, ausentes en los programas de formación de los alumnos de Ciencias, aún en los estudios superiores. Al finalizar el capítulo, se resume la evolución de las ideas acerca del movimiento de los planetas, para que pueda servir de pauta a la lectura que se recomienda.

* § 11.1 CAMPOS DE FUERZAS CENTRALES: CARACTERISTICAS GENERALES

En capítulos anteriores, ya hicimos algunas alusiones a las fuerzas centrales. En éste, queremos presentar de forma sistemática las características generales de los campos de fuerzas centrales.

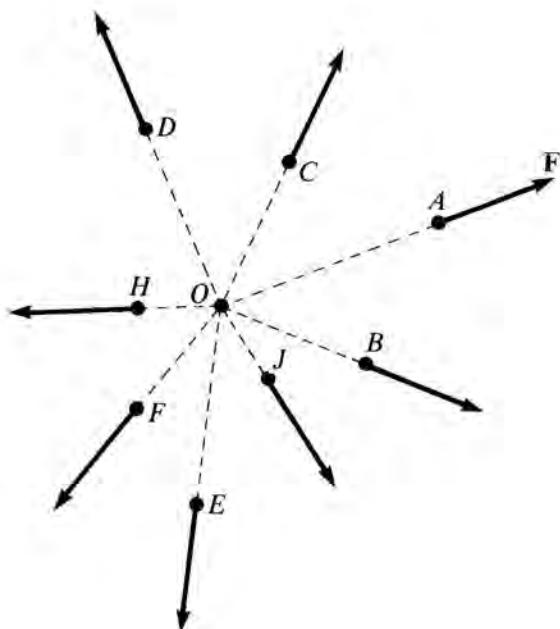


FIG. 11.1

Un campo de fuerzas se dice que es **central** cuando la dirección de la fuerza, definida en cada punto de la región de existencia del campo, pasa siempre por un punto fijo denominado *centro de fuerzas* (Fig. 11.1). El estudio de este tipo de campos es muy importante porque muchas fuerzas en la naturaleza son centrales. Por ejemplo, la Tierra, u otros planetas, se mueven alrededor del Sol bajo la influencia de una fuerza central. El electrón en el átomo de hidrógeno, en la aproximación clásica, se mueve bajo la acción de la fuerza central, debida a su interacción electrostática con el núcleo. Por supuesto, otras fuerzas no son centrales: en una molécula la fuerza que actúa sobre un electrón; las fuerzas nucleares en general; las fuerzas magnéticas, etc.

Sea una partícula P' de masa m , que se mueve sometida a una fuerza central \mathbf{F} , con velocidad \mathbf{v} a lo largo de una trayectoria arbitraria (Fig. 11.2). Supongamos que inicialmente la partícula tiene una velocidad \mathbf{v}_0 y un vector de posición \mathbf{r}_0 , respecto al centro de fuerzas. Como la fuerza que actúa sobre ella se encuentra en el plano determinado por dichos vectores, ¿por qué?, y no existe componentes de la velocidad inicial perpendicular a él, su movimiento tendrá lugar siempre en el plano determinado por \mathbf{r}_0 y \mathbf{v}_0 . *Todo cuerpo sometido a fuerzas centrales describe un movimiento plano.*

Para analizar este movimiento y simplificar al máximo su tratamiento matemático, hay que elegir un sistema de coordenadas adecuado (§ 1.3). Debido a que en los ejemplos más importantes de fuerzas cen-

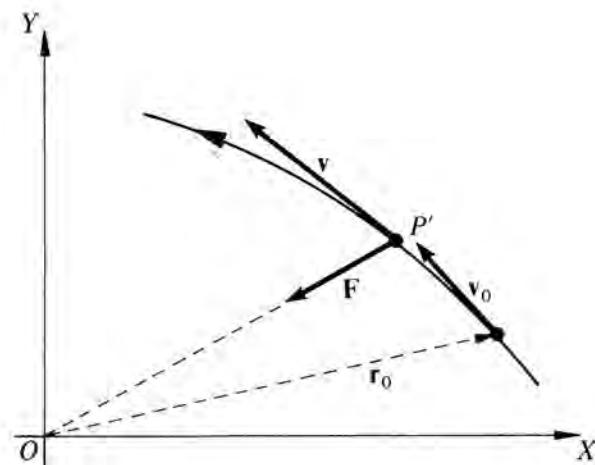


FIG. 11.2

trales, éstas presentan también **simetría esférica**, es decir, su módulo es función únicamente de la distancia (r) al centro de fuerzas, resulta evidente utilizar *coordenadas polares* (r, θ) en vez de cartesianas (x, y) (Fig. 11.3). En esta figura se indican también los vectores unitarios ($\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta$) asociados con las direcciones radial y axial en un sistema de coordenadas polares. El sistema de coordenadas polares equivale a considerar el de coordenadas esféricas (Fig. 1.12 a) proyectado en un plano cartesiano, ¿por qué?

En estas coordenadas los vectores \mathbf{r}, \mathbf{v} y \mathbf{a} toman las expresiones siguientes:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r \quad (11.1)$$

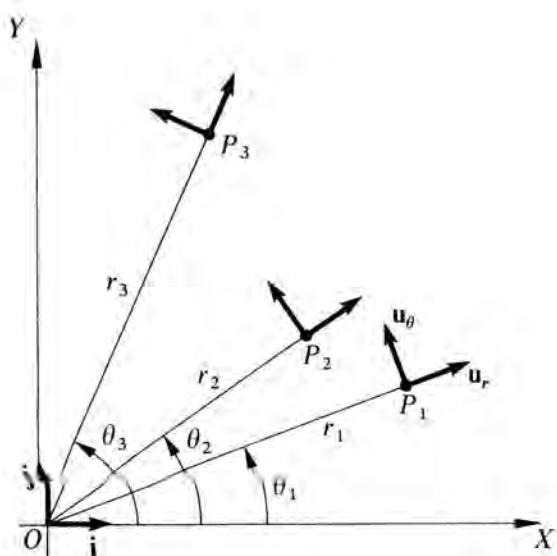


FIG. 11.3

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta = v_r \mathbf{u}_r + v_\theta \mathbf{u}_\theta \quad (11.2)$$

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{u}_r + \left[r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right] \mathbf{u}_\theta \quad (11.3)$$

*Ejercicio 11.1

Demostrar que las expresiones del vector de posición, velocidad y aceleración en coordenadas polares son las indicadas en (11.1), (11.2) y (11.3), respectivamente.

Solución:

A partir de la Fig. 11.3: $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$. Tanto r como θ son funciones del tiempo. Según la definición de vector velocidad:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}_r) = \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} \quad (11.4)$$

pero: $\mathbf{u}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$; $\mathbf{u}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$ (Fig. 11.4). Por lo tanto:

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \mathbf{i} + \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \mathbf{j} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta \quad (11.5)$$

¿Por qué

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \mathbf{0}?$$

Llevando (11.5) a (11.4) queda demostrado (11.2). Obsérvese que: $v_r = dr/dt$, $v_\theta = r d\theta/dt = \omega r$. En un movimiento circular, por ejemplo, $r = \text{cte}$, $v_r = 0$, la velocidad sólo tiene componente axial o transversal, es decir, normal al radio.

A partir de la definición de vector aceleración y teniendo en cuenta (11.2):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{u}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} \quad (11.6)$$

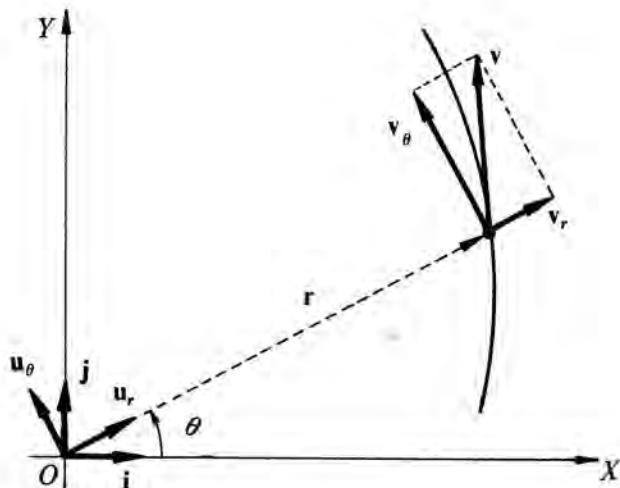


FIG. 11.4

como el alumno puede comprobar recordando el ejercicio (1.7). Calculando las derivadas de los vectores unitarios, de forma análoga a como operamos para el vector velocidad.

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta, \quad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_r \quad (11.7)$$

y sustituyendo en (11.6), se obtiene (11.3). En el caso de un movimiento circular:

$$\mathbf{a} = -r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \mathbf{u}_r + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{u}_\theta = -r\omega^2 \mathbf{u}_r + r\alpha \mathbf{u}_\theta$$

que coincide con el resultado (2.27), particularizado para el caso de que el plano del movimiento sea el XY . La componente radial es la que allí llamamos aceleración normal, ¿por qué aparece el signo menos?; la componente transversal es la aceleración tangencial.

La fuerza que actúa sobre una partícula sometida a un campo de fuerzas centrales sólo presenta componente radial, $F_\theta = 0$. ¿Por qué?

Si además el campo tiene simetría esférica, dicha componente sólo depende de la distancia al centro de fuerzas: $F_r = f/r$. Por lo tanto: $a_\theta = 0$, teniendo en cuenta (11.3):

$$r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (11.8)$$

multiplicando por r los dos miembros de la ecuación:

$$r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0 \quad (11.9)$$

como fácilmente se puede comprobar aplicando las reglas de la derivación. Si integramos la expresión anterior:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cte} \quad (11.10)$$

Veamos el significado físico de esta ecuación: En la Fig. 11.5 mostramos, mediante sombreado, el área barrida por el radio vector r en un intervalo pequeño de tiempo Δt . En primera aproximación, tanto más válida cuanto menor sea Δt , podemos considerar que el

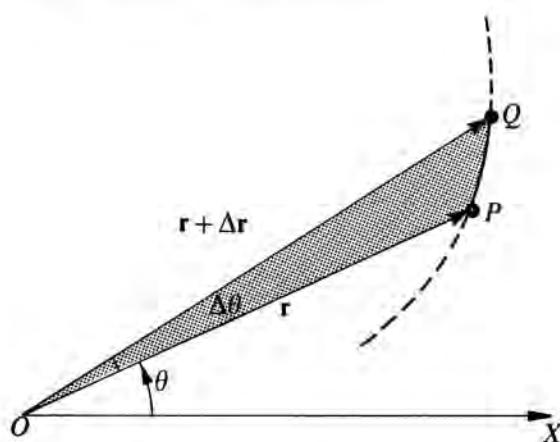


FIG. 11.5

triángulo curvilíneo POQ tiene todos sus lados rectos. En este caso su área valdrá:

$$\Delta S = \frac{1}{2}r(r + \Delta r) \operatorname{sen} \Delta\theta \quad (11.11)$$

El área barrida por unidad de tiempo será:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2}r^2 \left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right) \frac{\operatorname{sen} \Delta\theta}{\Delta t} \quad (11.12)$$

y en el límite:

$$\Delta t \rightarrow 0, \frac{\Delta r}{r} \rightarrow 0, \operatorname{sen} \Delta\theta \rightarrow \theta \quad (11.13)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

comparando (11.13) con (11.10):

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cte} \quad (11.14)$$

Luego, en un movimiento bajo la acción de fuerzas centrales, el radio vector de la partícula barre áreas iguales en tiempos iguales. A este resultado llegó experimentalmente Kepler al analizar el movimiento de los planetas, que lo enunció como la segunda ley que lleva su nombre. Newton fue el primero que lo presentó de la forma que lo hemos hecho: como una característica del movimiento de un cuerpo sometido a fuerzas centrales de cualquier clase. Este resultado se conoce también como **ley de las áreas** y a dS/dt se le suele denominar **velocidad aerolar**, ¿tiene dimensiones de velocidad? A continuación indicaremos una manera más elegante de llegar al mismo resultado, y calcular al mismo tiempo el valor de la constante.

A partir de (6.21) resulta evidente que *el momento angular de una partícula sometida a fuerzas centrales permanece constante en el transcurso del tiempo, es decir, se conserva*. Ya que el momento de la fuerza respecto del centro de fuerzas es nulo, ¿por qué?

$$I_o = \text{cte} \quad (11.15)$$

Como ya hemos demostrado que el movimiento siempre tiene lugar en un plano, basta que analicemos el módulo de I_o , ya que su dirección siempre será perpendicular a dicho plano (Fig. 11.2 y 11.4).

$$I_o = rmv_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cte} \quad (11.16)$$

Luego, de (11.14) y (11.16):

$$\frac{dS}{dt} = \frac{I_o}{2m} \quad (11.17)$$

que es otra forma alternativa de llegar a la ley de las áreas: *la velocidad aerolar de la partícula permanece constante*. De esta manera podemos incluso determinar el valor de la constante, puesto que I_o es *una constante del movimiento de la partícula*.

Cuando las fuerzas centrales presentan simetría esférica: $F = F(r) \mathbf{u}_r$, son conservativas. La demostración es inmediata, sin mas que recordar (7.9), por ejemplo:

$$d\mathcal{T} = F(r) dr \quad (11.18)$$

donde en vez de la componente específica de la fuerza electrostática en la dirección de \mathbf{u}_r , hemos consi-

derado una fuerza central y con simetría esférica genérica. El trabajo finito valdrá:

$$\mathcal{T}_{A \rightarrow B} = \int_A^B F(r) dr \quad (11.19)$$

el trabajo es independiente de la trayectoria ya que la componente radial de la fuerza sólo depende de r . Como consecuencia de (11.19) y (7.33), *la energía potencial de un punto sometido a fuerzas centrales con simetría esférica depende sólo de su distancia al centro de fuerzas $U(r)$* .

Como la fuerza es conservativa, *una partícula sometida a fuerzas centrales con simetría esférica conserva su energía mecánica*. En este caso conviene escribir (7.48) en función de las variables características de este tipo de fuerzas, según (11.2):

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) ; \quad \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) + U_r = E \quad (11.20)$$

donde E es la energía total o mecánica de la partícula, que es *una constante del movimiento*.

A partir de (11.16), (11.20) se puede escribir:

$$\frac{mv_r^2}{2} + \frac{l_o^2}{2mr^2} + U(r) = E; \quad \frac{mv_r^2}{2} + U'(r) = E \quad (11.21)$$

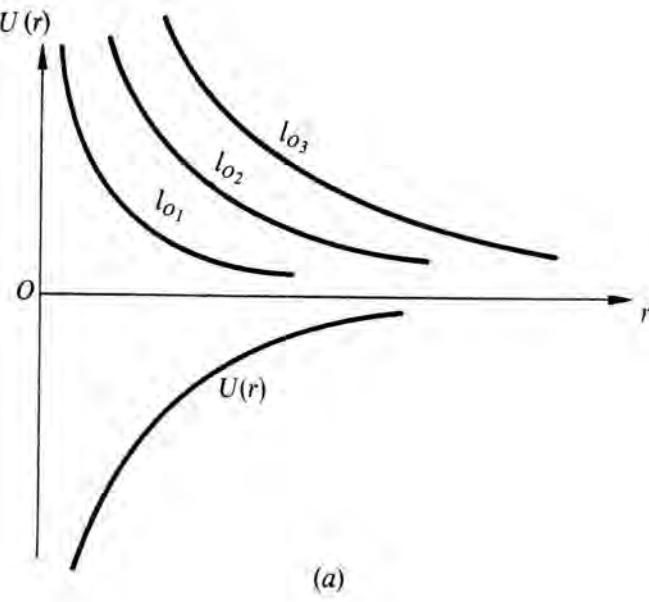
donde

$$U' \equiv \frac{l_o^2}{2mr^2} + U(r) , \text{ recibe el nombre de } \text{energía potencial efectiva de la partícula.}$$

La (11.21) presenta una semejanza formal con la (7.48) que correspondía a una partícula con movimiento unidimensional. La diferencia estriba en que (11.21) sólo incluye la parte radial del movimiento de la partícula. La magnitud $U'(r)$ representa una energía potencial, equivalente a $U(x)$, en el problema radial unidimensional. El término adicional $l_o^2/2mr^2$ incluye, en cuanto al movimiento radial se refiere, el hecho de que durante el movimiento \mathbf{r} cambia continuamente de dirección. Hay que resaltar que en (11.21) no aparece ningún sumando que dependa explícitamente de la coordenada angular, θ , o de su derivada.

Debemos insistir en que la «energía potencial efectiva» lleva una parte de la energía cinética de la partícula. La parte correspondiente a su movimiento transversal (perpendicular a la dirección instantánea del radio vector). El hecho de que este término pueda expresarse en función únicamente de la posición radial, permite tratar al movimiento radial como un problema unidimensional independiente.

Como consecuencia de todo esto, se le puede aplicar a la energía potencial efectiva todas las consideraciones que se hicieron para $U(x)$; especialmente las referentes a las curvas de energía potencial: $U'(r)$ frente a r (§ 7.5). Existen, sin embargo, dos diferencias significativas entre su uso para el caso unidimensio-



(a)

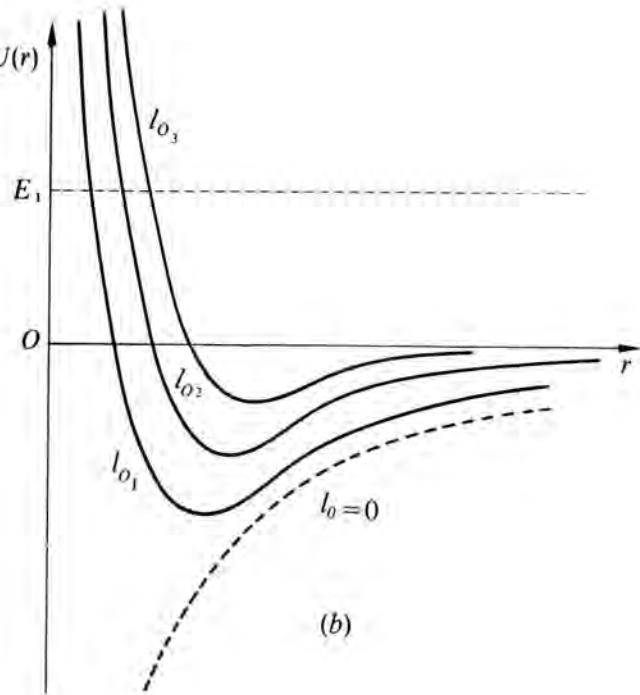


FIG. 11.6

nal y su aplicación para un movimiento bidimensional, que puede descomponerse en dos movimientos unidimensionales, como ocurre en el caso de campos de fuerzas centrales.

a) En el caso unidimensional, la energía total determina por sí sola las características del movimiento de la partícula en un campo conservativo. En los de fuerzas centrales, no es suficiente especificar la energía total; debe especificarse también el momento angular l_o . Las características del movimiento dependen de ambos parámetros E y l_o . En las Fig. 11.6 se muestra cómo $U'(r)$ es diferente para distintos valores de l_o .

b) Hay que recordar, también, que en el transcurso del movimiento, varía tanto la coordenada radial r , como la axial θ . Los cambios en r van acompañados por una rotación simultánea de \mathbf{r} , y la órbita real de la partícula depende de ambos. La rotación de \mathbf{r} es no uniforme a excepción del caso particular de movimiento circular ($r = \text{cte}$).

Como el problema es bidimensional se necesitan en total cuatro condiciones iniciales para tener completamente especificado el movimiento. Estas cuatro condiciones iniciales pueden ser las dos componentes de cada uno de los vectores, \mathbf{r}_0 y \mathbf{v}_0 ; o bien uno de estos vectores y las constantes (E, l_o) del movimiento. La relación entre los valores de los vectores en el instante inicial y estas constantes es:

$$E = \frac{mv_0^2}{2} + U(r_0) \quad , \quad l_o = mr_0(v_\theta)_0 \quad (11.22)$$

Ejercicio 11.2

Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de una fuerza central atractiva: $F = -(K/r^3)\mathbf{u}_r$. A distancias muy grandes (prácticamente infinitas) tiene una velocidad \mathbf{v}_0 , que no tiene componente radial (Fig. 11.7). Construir la curva de energía potencial efectiva para la componente radial del movimiento. ¿Qué conclusiones se pueden deducir a partir de la dependencia de v_r con r ?

Solución:

$$U'(r) = \frac{l_o^2}{2mr^2} + U(r)$$

esta función es la que nos piden que representemos gráficamente. Cuando la partícula se encuentra infinitamente alejada del centro de fuerzas: $U'(\infty) = 0$, ¿por qué?

Condiciones iniciales (11.22):

$$E = \frac{mv_0^2}{2} \quad , \quad l_o = mbv_0 \quad (11.23)$$

A estas distancias la partícula se mueve en línea recta; la distancia b recibe el nombre de **parámetro de impacto**. Se trata de una magnitud muy importante para caracterizar situaciones en las que una partícula –en una órbita abierta o no acotada (por ejemplo correspondiente a una energía total E_1 en Fig. 11.6 b) – se approxima al centro de fuerzas desde una distancia muy alejada del mismo. Para un valor dado de v_0 , b define completamente al momento angular.

A medida que la partícula se approxima al centro de fuerzas, éste ejerce una fuerza atractiva que hace curvar su trayectoria (Fig. 11.7). Para tener $U'(r)$ hemos de calcular $U(r)$, que podemos hacerlo a partir de la definición de energía potencial (7.33):

$$U(r) = - \int_0^r F dr = K \int_0^r \frac{dr}{r^3} = -\frac{K}{2r^2} \quad (11.24)$$

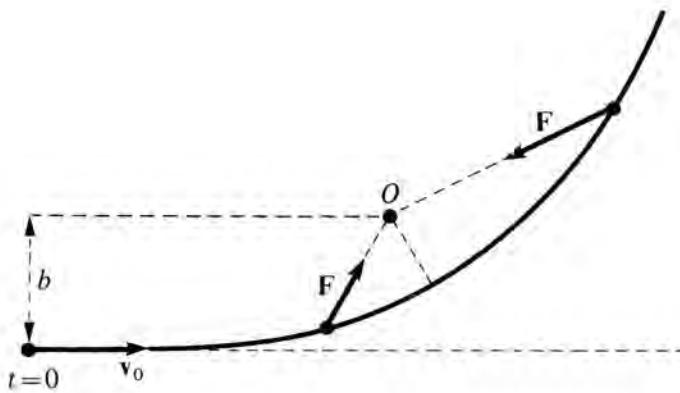


FIG. 11.7

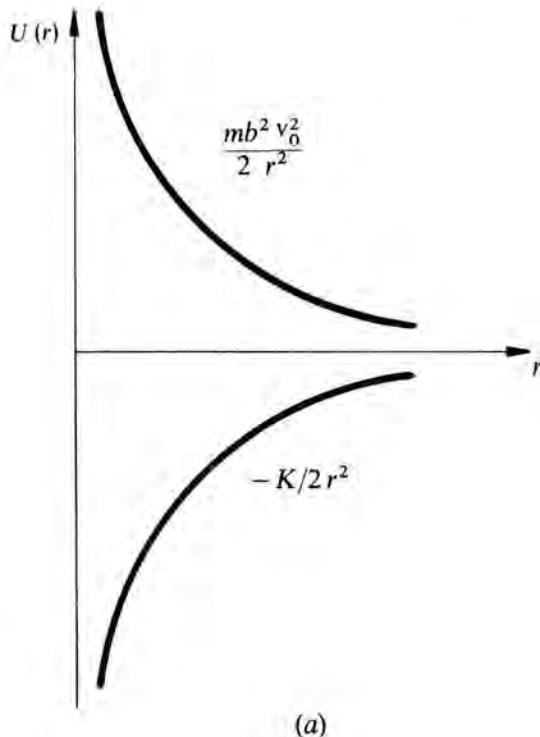
por lo tanto:

$$U'(r) = \frac{mb^2 v_0^2 - K}{2 r^2} \quad (11.25)$$

Dependiendo de la relación entre las constantes del numerador: $mb^2 v_0^2 - K \geq 0$, la curva de energía potencial efectiva estará en el cuadrante superior, inferior o será nula (Fig. 11.8 a y b).

La energía total (11.23) es positiva, luego, la única posibilidad de movimiento es para $U'(r) > 0$, para todo valor de r . La órbita de la partícula es abierta, ¿por qué? La energía total (11.22) vale:

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_r^2 + \frac{mb^2 v_0^2 - K}{2 r^2} \quad (11.26)$$



(a)

La partícula se acerca hasta una distancia mínima del centro de fuerzas igual a r_1 :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{mb^2 v_0^2 - K}{2 r_1^2} ; \quad r_1 = \left(b^2 - \frac{K}{m v_0^2} \right)^{1/2} \quad (11.27)$$

Justifica que para $r = r_1$, $v_r = 0$.

La dependencia de v_r con r la podemos calcular a partir de (11.26):

$$v_r = \sqrt{v_0^2 - \frac{1}{r^2} \left(b^2 v_0^2 - \frac{K}{m} \right)} \quad (11.28)$$

para $r \rightarrow \infty$, $v_r = v_0$; cuando $r = r_1$, $v_r = 0$, pero la partícula no se encuentra en reposo, ya que la componente radial sólo es una parte de su velocidad: $v = v_\theta \mathbf{u}_\theta$. Esto significa que para $r = r_1$, v es perpendicular a dicho vector de posición. A partir de esta distancia vuelve a aumentar v_r , alejándose de O , hasta que para puntos infinitamente alejados vuelve a ser v_0 y su trayectoria una recta.

Todas estas consideraciones no tienen sólo un interés teórico o académico, sino que son de aplicación inmediata en el estudio de los fenómenos de dispersión de partículas cargadas por los núcleos de los átomos; es el caso —por ejemplo— de los experimentos de Rutherford que dieron lugar a los primeros modelos sobre la estructura del átomo. (§ 19.3).

§ 11.2 CARACTERIZACION DEL CAMPO GRAVITATORIO

Ya indicamos que la interacción entre masas gravitatorias se puede describir mediante la introducción del concepto de campo (§ 7.1). La fuerza que origina la interacción gravitatoria es la ley de la gravitación

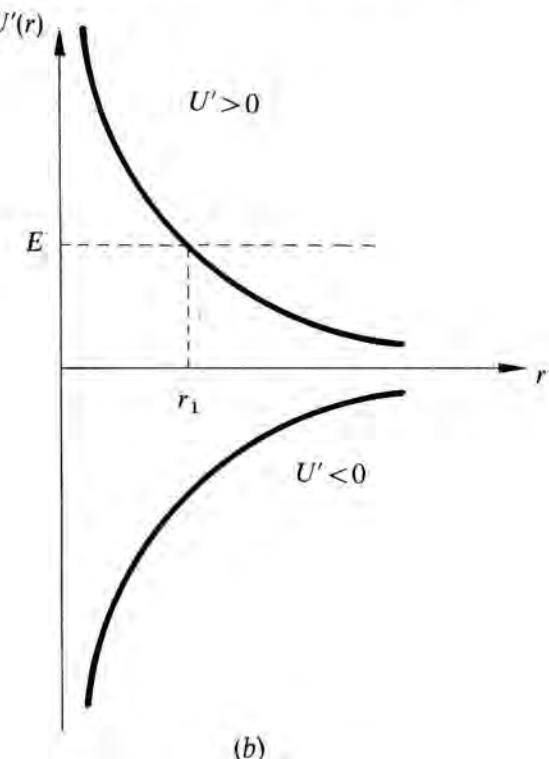


FIG. 11.8

universal de Newton (5.9); ahora, ya sabemos que se trata de una fuerza central con simetría esférica (§ 11.1). Entre las diferentes características que demostramos en el apartado anterior, para estos campos de fuerzas queremos resaltar el que son conservativos. Nosotros ya lo sabíamos desde capítulos anteriores, puesto que en § 7.2 lo habíamos demostrado para algunos campos concretos, entre ellos el gravitatorio.

Todo campo conservativo admite dos descripciones alternativas (§ 7.5), una en función de los vectores \mathbf{F} e \mathbf{I} , y otra en función de los escalares U y V . Las expresiones de estas cuatro magnitudes para el campo gravitatorio las recordamos a continuación:

$$\mathbf{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (11.29)$$

$$\mathcal{G} = \frac{\mathbf{F}_G}{m_2} = -G \frac{m_1}{r^2} U_r \quad (11.30)$$

$$U_p = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (11.31)$$

$$V(r) = -G \frac{m_1}{r} \quad (11.32)$$

en estas expresiones hemos considerado que m_1 es el agente que crea el campo y m_2 el que sirve para detectar la existencia de las fuerzas. Las unidades y dimensiones de cada magnitud ya las conocemos desde (§ 7.1 y § 7.3), ¿las recuerdas?

Las expresiones (11.30) y (11.32) proporcionan, respectivamente el campo y el potencial creados por una partícula de masa m_1 en el punto que dista r de la misma.

El principio de superposición de fuerzas (§ 4.4) se verifica en el caso del campo gravitatorio:

$$\mathbf{F}_{\text{TOTAL}} = \sum_i \mathbf{F}_i, \quad \mathcal{G}_{\text{TOTAL}} = \sum_i \mathcal{G}_i \quad (11.33)$$

Recordando la definición de energía potencial (7.33) y (7.32), también se verifica:

$$\mathcal{T}_{A \rightarrow B} = -[U_B - U_A] = G m_1 m_2 \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] \quad (11.34)$$

Interpreta físicamente esta expresión (ejercicio 7.2).

En el capítulo VII no abordamos, en los cálculos de la energía potencial, el estudio de sistemas discretos de masas puntuales. El problema se puede plantear en los siguientes términos: Dado un sistema de n masas puntuales, que se encuentran a unas distancias fijas y determinadas, ¿cuánto vale la energía potencial de la distribución de masas? La resolución es inmediata, sin mas que, partir de (11.35) y aplicar el prin-

cipio de superposición (recomendamos repasar el ejercicio 7.2). Dejamos la demostración como ejercicio para el alumno; el resultado a que se llega es:

$$U = -\frac{1}{2} G \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (11.36)$$

Se puede comprobar que el particularizar la complicada notación anterior, para el caso de dos cargas ($n = 2$) se obtiene (11.35).

El significado físico de (11.36) se deduce fácilmente del de (11.35): es la *energía necesaria para «formar» la distribución* (ejercicio 7.2). Para un caso concreto, y sin tener necesidad de utilizar la notación excesivamente formalizada de (11.36), se calcula evaluando la energía potencial (11.35) debida a cada par de cargas que forman la distribución. En el ejercicio 11.3 tendremos ocasión de comprobarlo. ¿Podrías demostrar que esta «regla» para el cálculo de U , coincide con (11.36)?

El principio de superposición también lo verifica el potencial gravitatorio. Así el potencial creado en un punto P , debido a n masas puntuales (m_i) que se encuentran a unas distancias fijas y determinadas de P , vale:

$$V_p = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i} \quad (11.37)$$

Teniendo en cuenta (11.37), (11.36) se puede escribir de forma alternativa:

$$U = 1/2 \sum_{j=1}^n m_j V_j \quad (11.38)$$

donde V_j es el potencial creado en el punto ocupado por la masa m_j , por todas las demás masas puntuales.

Ejercicio 11.3

Tres partículas de la misma masa m se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero de lado a (Fig. 11.9). Calcular en el centro del triángulo. Valor de la fuerza que actúa sobre cualquiera de las tres partículas. Determinar el potencial gravitatorio en el centro del triángulo. ¿Qué trabajo se realizó para formar la distribución, si inicialmente las partículas se encontraban infinitamente alejadas unas de otras?

Solución:

Al ser un triángulo equilátero su centro es el baricentro, punto donde concurren las tres alturas, medianas o bisectrices, O . Dicho punto dista lo mismo de los tres vértices, como el alumno recordará de los cursos elementales de ma-

temáticas. Por lo tanto, el módulo de los campos creados por las tres masas en O es el mismo (11.30):

$$\mathcal{G} = G \frac{3m}{a^2} \quad (11.39)$$

ya que $AO = CO = BO = a/\sqrt{3}$

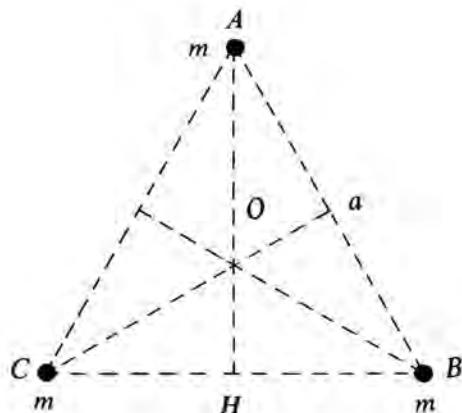


FIG. 11.9

El campo total será la suma de los debidos a cada una de las cargas: $\mathcal{G} = \mathcal{G}_A + \mathcal{G}_B + \mathcal{G}_C$, cuyas direcciones y sentidos se indican en la Fig. 11.10. Estos vectores forman entre sí ángulos de 120° , por lo tanto su suma es el vector cero. El campo en el centro del triángulo equilátero es nulo, si las tres masas son iguales (11.39).

Calculemos la fuerza que actúa, por ejemplo, sobre la carga situada sobre el vértice A . Para ello determinaremos en primer lugar el valor del campo creado en dicho punto, por las cargas situadas en B y C ; en este caso la partícula situada en A será el «agente sensible» o testigo, que permite detectar la fuerza que actúa en dicho punto (11.30).

$$\mathbf{F}_A = m(\mathcal{G}_B + \mathcal{G}_C) = m\mathcal{G}_{\text{total}} \quad (11.40)$$

Los campos \mathcal{G}_B y \mathcal{G}_C tienen el mismo módulo, pero diferentes direcciones (Fig. 11.11).

$$\mathcal{G}_B = \mathcal{G}_C = Gm/a^2$$

Según la Fig. 11.11: $\mathcal{G}_{\text{total}} = 2\mathcal{G}_B \cos 30^\circ = \sqrt{3} Gm/a^2$. Por lo tanto:

$$\mathbf{F}_{\text{TOTAL}} = -\sqrt{3} G \frac{m^2}{a^2} \mathbf{j}$$

el signo negativo se debe al sentido con que se han elegido los ejes de referencia.

El potencial en el punto O valdrá (11.37):

$$V = \sum_{i=1}^3 V_i = -3\sqrt{3} m/a$$

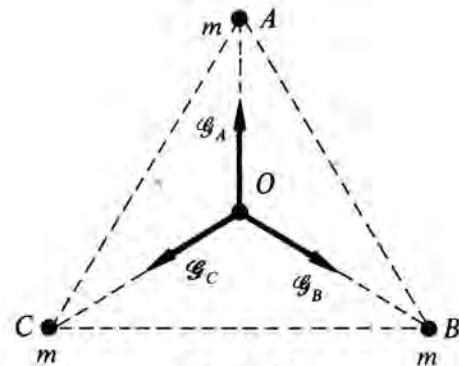


FIG. 11.10

¡El campo en el centro es nulo, pero el potencial no! ¿Podrías justificarlo físicamente?

El trabajo necesario para formar la distribución será:

$$\mathcal{T}_{\infty \rightarrow A} + \mathcal{T}_{\infty \rightarrow B} + \mathcal{T}_{\infty \rightarrow C}$$

Para traer la primera masa, m_A , no hay que realizar ningún trabajo, ya que todas las demás se encuentran infinitamente alejadas, y por lo tanto, no existen fuerzas de interacción entre ellas. ¿Contradice esto la definición de trabajo? Manteniendo esta primera masa fija, traemos la segunda hasta el vértice superior del triángulo (7.42):

$$\mathcal{T}_{\infty \rightarrow A} = 0 \quad , \quad \mathcal{T}_{\infty \rightarrow B} = -G m^2/a$$

Para traer la tercera hay que realizar un trabajo:

$$\mathcal{T}_{\infty \rightarrow C} = -2 G m^2/a$$

ya que ahora existen dos masas, situadas a una distancia a del vértice C . El trabajo total o energía potencial del sistema será:

$$U = -G m^2/a - 2 G m^2/a = -3 G m^2/a$$

Comprueba que aplicando directamente (11.36) o (11.38) se llega al mismo resultado.

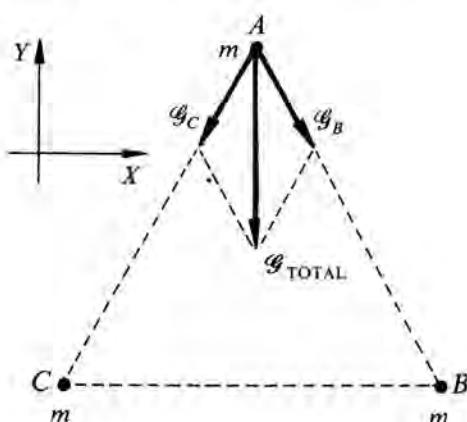


FIG. 11.11

El concepto de masa puntual que hemos estado utilizando hasta el momento, sólo es una aproximación que en muchos casos no es válida (§ 8.1). Cuando estudiamos los efectos gravitatorios de un cuerpo real a distancias del orden, o menores, que sus dimensiones lineales, la aproximación no es válida. El cuerpo se comporta, macroscópicamente, como si fuera una distribución continua de masa. Estrictamente es una distribución discreta de moléculas o átomos (descripción microscópica), pero normalmente se estudian sus propiedades a nivel macroscópico, es decir en función de magnitudes mensurables. En estos casos resulta útil introducir la **densidad volúmica de masa** (ρ_m), como función puntual adecuada para caracterizar el problema. De la misma manera se definen la **densidad superficial** (σ_m) y **lineal** (λ_m), dependiendo de que la distribución continua tenga una dimensión o dos despreciables, frente a las restantes. Las definiciones respectivas son:

$$\rho_m = \frac{dm}{dV}, \quad \sigma_m = \frac{dm}{dS}, \quad \lambda_m = \frac{dm}{dl} \quad (11.39)$$

donde dV , dS , dl representan, respectivamente, el volumen, la superficie o la longitud del elemento infinitesimal elegido.

En el caso de una distribución volúmica de masa (Fig. 11.12), elegimos un elemento infinitesimal de volumen dV , de forma *adecuada a la simetría que presente la distribución*. Este elemento contiene una masa (11.39): $dm = \rho_m dV$ y crea un campo, en un punto P , que dista r del mismo, (11.30).

$$d\mathcal{G} = -G \frac{dm}{r^2} \mathbf{u}_r = -G \frac{\rho_m dV}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (11.40)$$

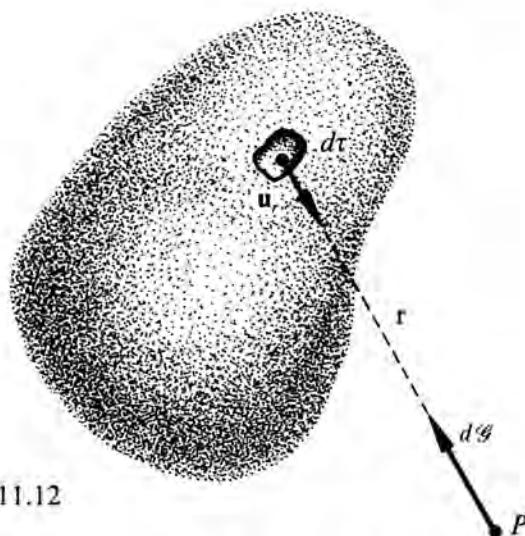


FIG. 11.12

El campo gravitatorio total en P se obtiene integrando la expresión anterior a lo largo de toda la distribución. Como el alumno puede fácilmente comprender se trata de un problema estrictamente matemático, que puede ser bastante complicado, ya que se trata de una integral de volumen –o triple– en la que ρ y r son variables. Además se trata de una expresión vectorial. Por supuesto, este tipo de problemas queda fuera del nivel de este texto.

Para ilustrar el procedimiento, elegiremos un caso sencillo de una distribución lineal de masa, en el que el problema matemático resulte abordable para el alumno.

Ejercicio 11.4

Calcular el campo gravitatorio creado por una barra homogénea de longitud $2a$, en un punto que dista $a = 10$ cm del centro de la misma. La masa total de la barra es $M = 100$ kg.

Solución:

Dividimos la barra en elementos infinitesimales de longitud dx (Fig. 11.13). Según (11.39): $\lambda = M/2a$ ya que la barra es homogénea ($\lambda = \text{cte}$). La masa del elemento infinitesimal es: $dm = \lambda dx$. Su-

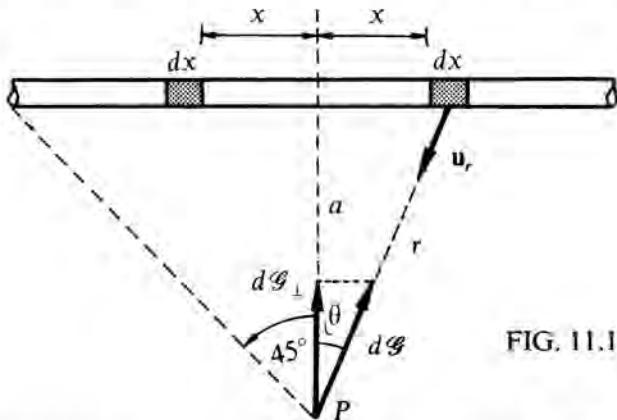


FIG. 11.13

pongamos que dx dista x del centro de la barra, el campo que crea en P será (11.30):

$$d\mathcal{G} = -G \frac{\lambda dx}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (11.41)$$

Ahora bien, todo elemento dx tiene otro simétrico respecto de la perpendicular a la barra. Los campos elementales creados por cada par de elementos simétricos se suman dando un campo resultante en la dirección perpendicular a la barra (Fig. 11.13).

$$d\mathcal{G}_{\perp} = d\mathcal{G} \cos \theta \quad (11.42)$$

A partir de dicha figura podemos comprobar que se verifican las siguientes relaciones trigonométricas: $\cos \theta = a/r$

$$d\mathcal{G} = G \frac{\lambda dx}{(a/\cos \theta)^2}, \quad d\mathcal{G}_{\perp} = \lambda G \frac{\cos^3 \theta}{a^2} dx \quad (11.43)$$

Con objeto de tener (11.43) en función de una única variable:

$$\frac{x}{a} = \tan \theta, \text{ por lo tanto } dx = ad(\tan \theta) = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta.$$

Sustituyendo en (11.43),

$$d\mathcal{G}_{\perp} = \lambda G \frac{\cos^3 \theta}{a^2} \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{\lambda G}{a} \cos \theta d\theta$$

Integrando a lo largo de toda la barra, para tener en cuenta las cooperaciones de los infinitos elementos de que la componen:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\perp} = \frac{\lambda G}{a} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda G}{a} \sin \theta \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\lambda G}{a} \sqrt{2}$$

Teniendo en cuenta que: $\lambda = M/2a$,

$$\mathcal{G} = \frac{MG}{\sqrt{2}a^2}$$

y dirección la perpendicular a la barra. Sustituyendo los valores numéricos, se obtiene: $\mathcal{G} = 4.76 \times 10^{-7} \text{ N kg}^{-1}$, su dirección es perpendicular a la barra y sentido hacia ella.

*§ 11.3 ECUACIONES FUNDAMENTALES DEL CAMPO

En § 7.1 indicamos que una manera general y estricta de caracterizar a un campo vectorial \mathbf{A} , era conociendo su **flujo** a través de superficies y su **circulación** a lo largo de líneas situadas ambas alrededor de cada punto del campo. Esta caracterización constituye la llamada **formulación integral de las ecuaciones del campo**. A continuación, vamos a introducir las definiciones del flujo y círculación, así como su interpretación física; posteriormente las aplicaremos al campo \mathbf{g} , con objeto de establecer las ecuaciones fundamentales del campo gravitatorio.

La teoría de los campos vectoriales se desarrolló inicialmente en conexión con el estudio del movimiento de los fluidos; por ello, el vocabulario que ha quedado es el típico de esta parte de la Física, como tendremos ocasión de comprobar.

Supongamos el campo de velocidades de un fluido; imaginemos una superficie cerrada en el interior del mismo. Nos podemos preguntar si el fluido fluye hacia dentro o hacia fuera de dicha superficie. La operación matemática que permite contestar a esta pregunta, nos dará la cantidad total del fluido que sale de la superficie por unidad de tiempo. Si la velocidad tiene siempre la dirección de la normal exterior a la superficie, habrá más fluido saliente que entrante en la misma. A esta magnitud física la denominamos **flujo** y es igual al producto de la componente de la velocidad normal a la superficie por el área de dicha superficie (Fig. 11.14). El flujo neto saliente a través de la superficie cerrada será:

$$\text{Flujo} = (\text{componente normal media de la velocidad}) \cdot (\text{área de la superficie}) \quad (11.44)$$

Hemos indicado componente normal media de la velocidad, ya que en general ésta no será la misma en unos puntos de la superficie que en otros. Otro caso en el que también se puede visualizar esta propiedad matemática es en el de la propagación del calor; en este caso el vector característico es \mathbf{h} , cuyo módulo en cada punto representa la cantidad de calor que atraviesa, por unidad de tiempo y superficie, un elemento infinitesimal perpendicular a la dirección de propagación. Hay que destacar que no sólo es útil hablar de flujo a través de una superficie cerrada, sino también si ésta es abierta.

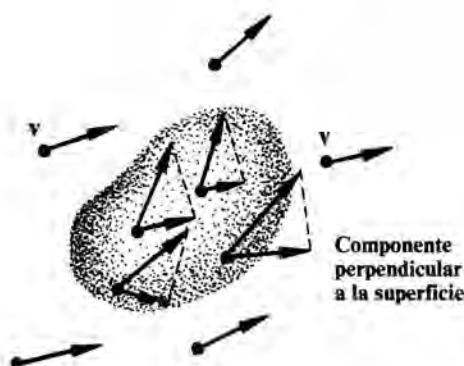


FIG. 11.14

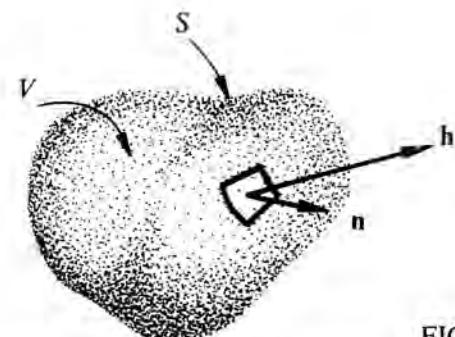


FIG. 11.15

Por lo tanto, resulta adecuado dar una expresión matemática para el flujo que incluya a (11.44) como caso particular. Si deseamos calcular la cantidad total de calor, o de fluido, a través de una superficie cualquiera, tendríamos que comenzar por calcular la que atraviesa un elemento de superficie diferencial, dS : $d\phi$, Fig. 11.15. dS es un vector de módulo el área de la superficie que representa, dirección normal a la misma y sentido el exterior a la superficie.

$d\phi = (\text{componente de } \mathbf{h} \text{ o } \mathbf{v} \text{ normal a la superficie}) \cdot (\text{área del elemento diferencial})$.

$$d\phi = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{h} \cdot dS \quad (11.45)$$

en el caso de un campo de velocidades: $d\phi = \mathbf{v} \cdot dS$

Para obtener la cantidad total de calor, o fluido, que fluye a través de una superficie cualquiera, sumamos las contribuciones de todos los elementos a la superficie S , es decir, integramos (11.45) sobre toda la superficie:

$$\text{Flujo total de calor que sale de } S \equiv \phi = \int_S \mathbf{h} \cdot dS \quad (11.46)$$

a esta integral se le denomina «**Flujo del vector \mathbf{h} a través de la superficie S** ». El alumno no debe preocuparse por la presencia de la integral de superficie en la definición anterior; a nuestro nivel sólo es importante que conozca el sentido físico de la misma y no la forma de calcular desde el punto de vista matemático, que por supuesto no se encuentra a su alcance.

Esta operación matemática, que originalmente se aplicaba, como hemos dicho, a los fluidos, se puede generalizar al caso de que el vector no represente el fluir material de nada; por ejemplo, en el campo gravitatorio, electrostático, magnético, etc, quedando simplemente como una definición matemática.

La otra definición matemática importante de los campos vectoriales, a la que nos referimos anteriormente, es la que nos indica si un fluido está circulando, es decir, si hay un movimiento neto del mismo a lo largo de un cierto camino o conducción. A la operación matemática que nos permite determinar esta magnitud, se la llama **circulación**. Se trata de una operación que se puede aplicar a cualquier vector, aunque no exista nada material que fluya (Fig. 11.16 a y b).

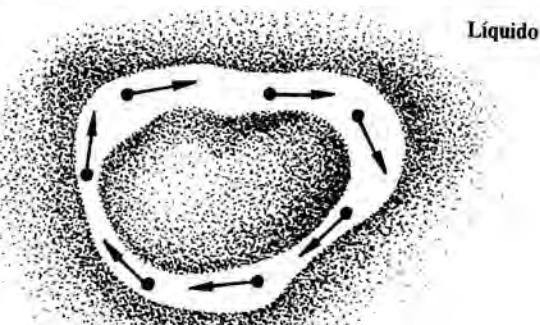


FIG. 11.16 (a)

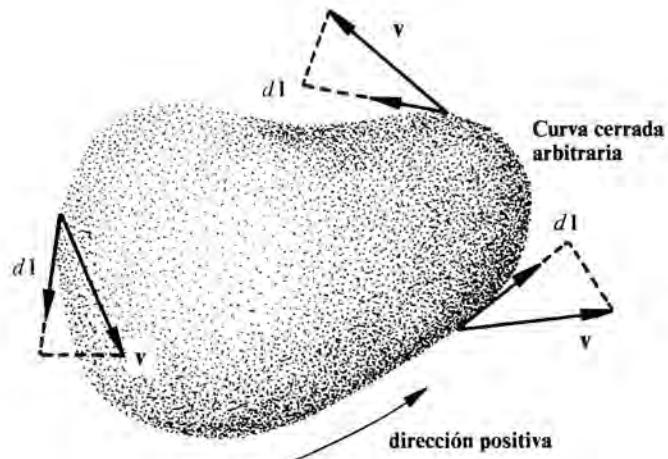


FIG. 11.16 (b)

Circulación = (componente tangencial media de la velocidad). (longitud del camino) (11.47)

$$dC = v \cdot \tau dl = v \cdot dl$$

τ es un vector unitario, tangente a la trayectoria o camino, y sentido del recorrido.

$$\text{Circulación total del fluido a lo largo de } c \equiv C = \oint v \cdot dl \quad (11.49)$$

En la teoría de campos, resulta de gran utilidad introducir también, una operación matemática que indique cómo varía de unos puntos a otros, una cierta magnitud escalar característica del campo. Pensemos por ejemplo en la temperatura, presión, densidad, potencial, etc. Esta variación debe estar definida mediante un vector, puesto que en general no será la misma en todas las direcciones del espacio, además así será independiente del sistema de coordenadas elegido (§ 1.3). Este vector recibe el nombre de **gradiente** del escalar en cuestión. Su módulo indica el valor de la variación del escalar en la dirección en que dicha variación es más rápida, su dirección es perpendicular a la superficie equiescalar que pasa por el punto donde está definido y sentido, es de los valores crecientes del escalar. Estas características se representan esquemáticamente en la Fig. 11.17.

Vamos a justificar las afirmaciones anteriores para el caso concreto de coordenadas cartesianas, aunque ya sabemos que son independientes del sistema de coordenadas utilizadas. Sea un campo escalar genérico $\Phi(x, y, z)$ y calculemos la relación entre el valor del escalar en dos puntos muy próximos; este problema equivale matemáticamente a calcular la diferencial total de la función escalar:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \quad (11.50)$$

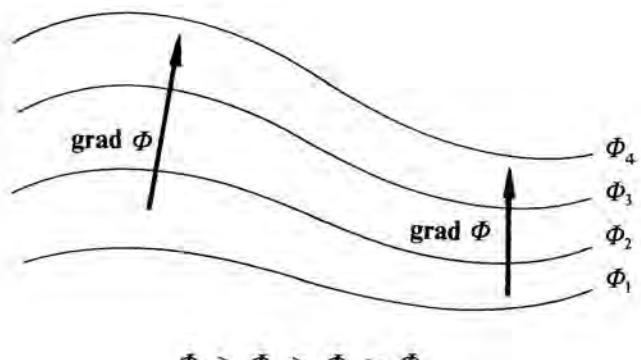


FIG. 11.17

Esta es una operación que el alumno todavía no ha estudiado en matemáticas, ya que a este nivel es normal haber considerado sólo funciones de una sola variable: $y=f(x)$, $dy=f'(x)dx$. La función que nosotros tratamos es de tres variables, y la forma de calcular su diferencial es la indicada mediante (11.50). En la misma aparecen los símbolos: $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$, que se leen «derivadas parciales de la

función $\Phi(x, y, z)$ respecto de las variables x, y, z , respectivamente». La derivada parcial de Φ respecto de x se calcula derivando, mediante los procedimientos habituales, dicha función respecto de x y considerando que las demás variables y, z permanecen constantes; y así las restantes derivadas parciales.

Supongamos dos superficies equiescalsares muy próximas (Fig. 11.18), una de ellas correspondiente al valor Φ del escalar, la otra al $\Phi + d\Phi$. Sea un punto P de la primera, la expresión (11.50) se puede interpretar como el producto escalar (1.21) de dos vectores, uno de componentes $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$, y

el otro de componentes (dx, dy, dz) . Este segundo es el que siempre hemos simbolizado mediante dr . Si a partir de P tomamos un desplazamiento elemental dr , llegaremos a un punto arbitrario Q que se encontrará en la curva de nivel $\Phi + d\Phi$ (Fig. 11.18).

Veamos qué representa el primero de ellos. Vamos a designarlo mediante un nombre específico **gradiente del escalar Φ** , $\text{grad } \Phi$. Analicemos su significado y características:

$$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{k} \quad (11.51)$$

Según hemos indicado (11.50) se puede escribir:

$$d\Phi = \text{grad } \Phi \cdot dr \quad (11.52)$$

Si el desplazamiento dr tiene lugar a lo largo de una superficie equipotencial: $d\Phi=0$ y los vectores

grad Φ y $d\mathbf{r}$ son perpendiculares; luego: el **grad Φ** es un vector cuya dirección es perpendicular a la superficie equiescalar que pasa por el punto donde está definido (Fig. 11.18).

Supongamos que $d\Phi > 0$, es decir, el desplazamiento lo hemos tomado en el sentido de los valores crecientes del escalar. A partir de (11.52):

$$d\Phi = |\text{grad } \Phi| dr \cos \theta \quad (11.53)$$

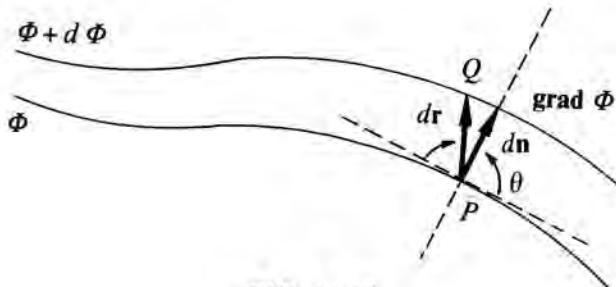


FIG. 11.18

$\cos \theta$ debe ser una magnitud positiva, los otros dos factores ya lo son al tratarse de los módulos de dos vectores. Si $\cos \theta > 0$, $\pi/2 < \theta \leq 0$, luego el **grad Φ** tiene el sentido de los valores crecientes del escalar (Fig. 11.18). Si $d\Phi < 0$, hubiésemos llegado a la misma conclusión, respecto al sentido del vector **grad Φ** . Justifica esta afirmación.

Sólo nos falta determinar el módulo del vector gradiente, para tenerlo completamente definido. Supongamos que el desplazamiento, a partir del punto P , se hace según la dirección normal a la superficie equipotencial que pasa por él:

$$d\Phi = |\text{grad } \Phi| dn \quad (11.54)$$

por lo tanto, (11.53), la relación de este desplazamiento con uno arbitrario que nos llevase a un punto de la superficie equipotencial $\Phi + d\Phi$ es (Fig. 11.18):

$$dr \cos \theta = dn \quad (11.55)$$

Como podemos escribir la identidad matemática:

$$d\Phi = \frac{d\Phi}{dn} dn \quad (11.56)$$

obtenemos, comparando (11.54) y (11.56):

$$|\text{grad } \Phi| = \frac{d\Phi}{dn}$$

El módulo del vector gradiente de un escalar es igual a la variación de dicho escalar en la dirección normal a la superficie equiescalar considerada. Luego podemos escribir (11.51) de manera alternativa como:

$$\text{grad } \Phi = \frac{d\Phi}{dn} \mathbf{n} \quad (11.57)$$

donde \mathbf{n} representa un vector unitario, perpendicular a la superficie equiescalar en el punto donde se defina el gradiente, y sentido el de los valores crecientes del escalar.

También podríamos haber hecho uso de la identidad:

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{d\Phi}{dn} \frac{dn}{dr} \quad (11.58)$$

donde el primer miembro representa la variación del escalar en la dirección definida por $d\mathbf{r}$. Haciendo uso de (11.55) y (11.57) podemos escribir:

$$\frac{d\Phi}{dr} = |\text{grad } \Phi| \cos \theta \quad (11.59)$$

Luego, el módulo del vector gradiente es igual al valor de la variación del escalar en la dirección en que dicha variación es más rápida para un mismo desplazamiento $d\mathbf{r}$; esta dirección es, como ya hemos dicho la de la normal a la superficie equiescalar considerada ($\cos \theta = 1$).

Puntualicemos esta idea un poco más; consideremos un campo en dos dimensiones; en este caso las superficies equiescaldas serán líneas de nivel, tal como ocurría en la Fig. 11.18. Si representamos dos de ellas, una con $\Phi = \Phi_0$ y la otra con $\Phi = \Phi_0 + \Delta\Phi$ (Fig. 11.19), podemos desplazarnos partiendo de P hasta la siguiente línea siguiendo un número infinito de direcciones. Sin embargo, para una variación dada del campo escalar de que se trate $\Delta\Phi$, debemos movernos a lo largo de la línea de campo que pase por P , para alcanzar dicha variación con el menor desplazamiento posible $\Delta\mathbf{r}$. La variación del escalar con la distancia es máxima para esta dirección, que coincide con la del gradiente del escalar. En la figura anterior:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta r} > \frac{\Delta\Phi}{\Delta r_1}, \quad \frac{\Delta\Phi}{\Delta r} > \frac{\Delta\Phi}{\Delta r_2}$$

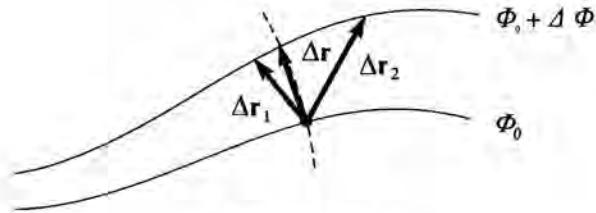


FIG. 11.19

Acabamos de definir una magnitud vectorial que nos indica, en cada punto, el grado de variación de una función escalar característica del campo. Si integramos este grado de variación (11.52) podemos obtener la variación total

$$\Delta\Phi = \Phi_B - \Phi_A = \int_A^B \text{grad } \Phi \cdot d\mathbf{r} \quad (11.60)$$

¿Por qué esta integral no depende de la curva a lo largo de la cual se realice la integración?

La expresión (11.60) tiene una gran importancia en la teoría de campos; si recordamos (7.33) ambas presentan una completa analogía formal. Si el escalar Φ en (11.60) es la energía potencial U (11.60) y (7.33) son la misma expresión, por lo tanto:

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U \quad (11.61)$$

análogamente para I y V (7.45):

$$I = -\operatorname{grad} V \quad (11.62)$$

Interpreta físicamente estas expresiones. Ahora podemos comprender que (7.57) es un caso particular de (11.61), ¿no?

Ahora ya estamos en condiciones de aplicar esta caracterización integral, así como (11.61) y (11.62), al campo gravitatorio ya que es conservativo. Luego, *un campo de fuerzas conservativas tiene la circulación (11.49) nula*.

A partir de (11.61) y (11.62) se verifica:

$$(11.64) \quad \mathbf{F}_G = -\operatorname{grad} U_G, \quad \mathcal{G} = -\operatorname{grad} V_G$$

como se trata de una fuerza central, \mathbf{F}_G sólo tiene componente radial; luego, igualando las componentes radiales de ambos vectores:

$$F_G = -dU_G/dr \quad (11.65)$$

expresión ya introducida (7.59), y utilizada, aunque sin haber sido justificada.

Para tener completamente caracterizado a \mathcal{G} necesitamos conocer su flujo a través de una superficie cerrada. Su cálculo lo vamos a realizar a continuación.

TEOREMA DE GAUSS

Supongamos una región del espacio en la que existen un conjunto de masas puntuales: $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$. El flujo de \mathcal{G} a través de una superficie arbitraria cerrada e imaginaria (es decir, no necesariamente real) es igual a:

$$\int_S \mathcal{G} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi G (m_{\text{total}})_{\text{encerrada}} \quad (11.66)$$

donde $(m_{\text{total}})_{\text{encerrada}}$ es la suma de las masas encerradas por la superficie, a través de la cual se calcula el flujo. Este enunciado se conoce con el nombre de Teorema de Gauss. Hay que resaltar que al flujo de \mathcal{G}

sólo cooperan las masas encerradas por la superficie y no las que se encuentran en su exterior (Fig. 11.20).

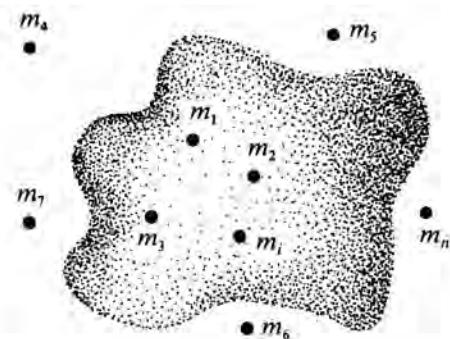


FIG. 11.20

Demostración de (11.66): Sea una superficie arbitraria que encierra a una partícula de masa m_1 situada en un punto O , Fig. 11.21.

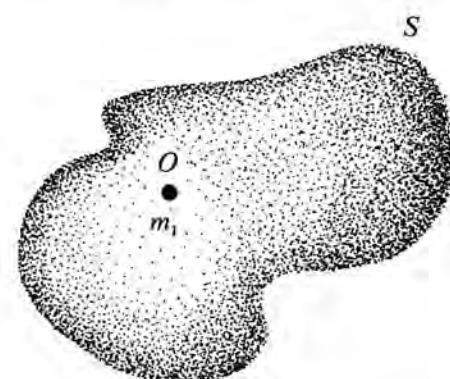


FIG. 11.21

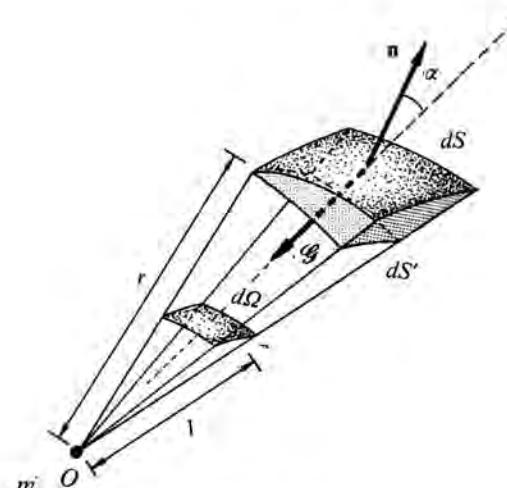


FIG. 11.22

Consideremos un elemento diferencial de superficie $d\mathbf{S}$, Fig. 11.22. El flujo a través del mismo vale (11.45):

$$d\varphi = \mathcal{G} \cdot d\mathbf{S} = G \frac{m_1}{r^2} dS \cos \alpha \quad (11.67)$$

El ángulo sólido elemental subtendido por $d\mathbf{S}$ desde O será $d\Omega$. El **ángulo sólido elemental** subtendido desde O por una superficie dS' , se define como el área $d\Omega$ delimitada, sobre una esfera de radio unidad y centro O , por el haz de rayos que partiendo de O abarcan a dS' , Fig. 11.22. Su unidad en el SI es el **estereoradián** (sr). Se verifica, por lo tanto, a partir de su definición:

$$d\Omega = dS'/r^2 \quad (11.68)$$

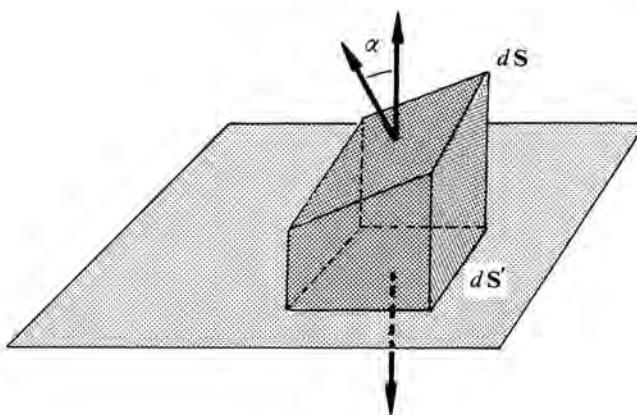


FIG. 11.23

Si trazamos diferentes esferas concéntricas en O , de radios respectivos r_1, r_2, \dots se verificará (11.68):

$$d\Omega = dS/r^2 = dS'/r_1^2 = dS_2/r_2^2 = \dots \quad (11.69)$$

¿Por qué? dS y dS' subtienden el mismo ángulo sólido desde O , pero dS no corresponde a un elemento de esfera concéntrica en O ; por lo tanto hay que proyectarlo en la dirección de dS' . Esta proyección vale: $dS \cos \alpha$ (Fig. 11.23)

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2} = \frac{dS}{r^2} \cos \alpha \quad (11.70)$$

Sustituyendo (11.70) en (11.67)

$$d\varphi = -G m_1 d\Omega$$

e integrándola para toda la superficie S :

$$\varphi = \int_S \mathcal{G} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi G m_1$$

ya que el ángulo sólido total alrededor de un punto es 4π sr. Si en vez de una partícula hubiese varias, aplicando el principio de superposición de campos en (11.67), hubiésemos llegado a (11.66), como queríamos demostrar.

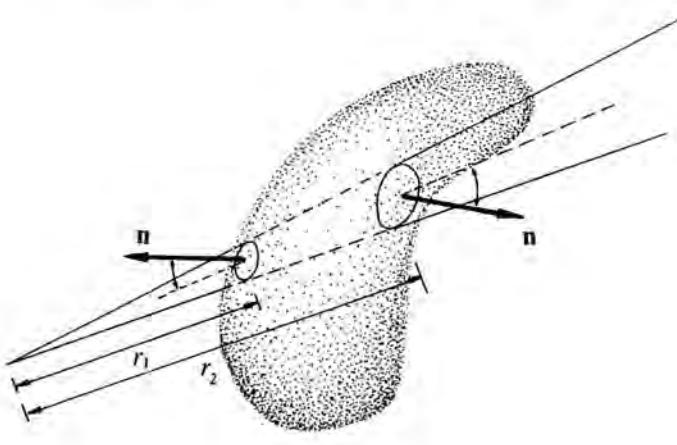
Para que la demostración esté completa, hay que probar que las partículas que se encuentran en el exterior no contribuyen al flujo a través de S . En efecto, Fig. 11.24 a y b.

$$d\varphi = d\varphi_{\text{entra}} + d\varphi_{\text{sale}}$$

$$d\varphi_{\text{entra}} = (G m/r_1^2) dS_1, \quad d\varphi_{\text{sale}} = -(G m/r_2^2) dS_2$$

como dS_1 y dS_2 subtienden el mismo ángulo sólido, los valores absolutos de $d\varphi_{\text{entra}}$ y $d\varphi_{\text{sale}}$ son iguales, ¿por qué? Por lo tanto: $d\varphi = 0$; el flujo neto evidentemente también es nulo. Luego la demostración ha quedado completa.

Acabamos de justificar que sólo las masas encerradas en la superficie contribuyen al flujo a su través. Sin embargo, el campo gravitatorio existente en cualquier punto del medio –entre ellos los puntos de la superficie– es debido tanto a las masas que están en su interior, como a las que se encuentran fuera.



(b)

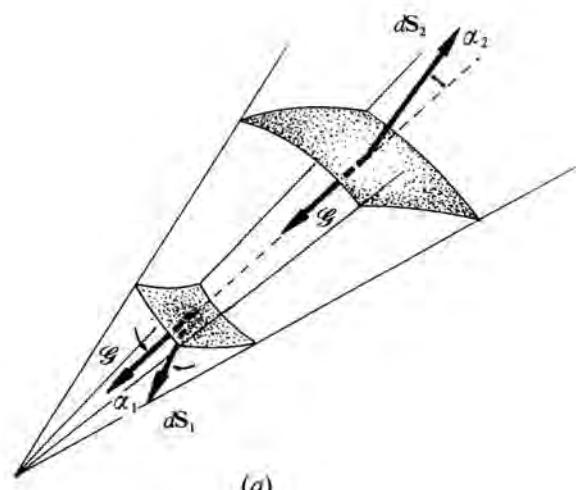


FIG. 11.24

¿Existe contradicción entre estas dos afirmaciones?

El Teorema de Gauss (11.66) es una propiedad de todos los campos de fuerzas centrales con simetría esférica y que presentan una dependencia con la distancia de la forma $1/r^2$.

Hay que resaltar que para poder conocer el campo creado por una distribución, discreta o continua, de masas, hay que resolver simultáneamente –con las condiciones de contorno adecuadas– (11.63) y (11.66). No obstante en muchos libros se suele indicar que a partir del Teorema de Gauss (11.66) –y como una de sus principales aplicaciones– es posible calcular el campo creado por una distribución. Entre ambas afirmaciones no existe contradicción, ya que la segunda es cierta cuando la distribución presenta **simetrías**, que nos permiten determinar a priori la dirección del campo, por meras consideraciones físicas basadas en la simetría existente; posteriormente, a partir de (11.66) se calcula el módulo del campo.

Ejercicio 11.5

Calcular el campo gravitatorio creado por una distribución esférica de masa. La masa se encuentra homogéneamente distribuida en todo el volumen. El radio de la distribución es R y la masa total M , Fig. 11.25.

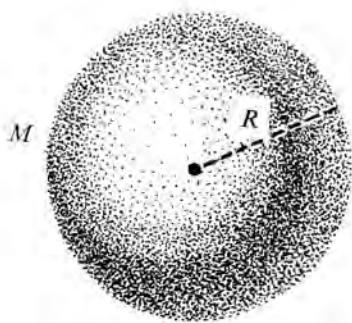


Fig. 11.25

Solución:

La distribución presenta simetría esférica –es decir, cualquier rotación alrededor de un eje que pase por su centro, no cambia las condiciones físicas del problema– el campo gravitatorio por consiguiente, tiene la dirección radial y sentido hacia adentro de la esfera. ¿Por qué? Se trata de uno de los casos anteriormente citados en el que el módulo del campo lo podemos obtener a partir del Teorema de Gauss, puesto que su dirección y sentido ya lo conocemos a priori:

Distinguiremos dos casos:

a) *Puntos que se encuentran fuera de la distribución: $r \geq R$* (Fig. 11.26). Al aplicar el Teorema de Gauss toda la dificultad reside en la elección de la superficie –puesto que su forma puede ser arbitraria– a través de la cual se calcula

el flujo. Para ello se elige una que presente la misma simetría que la distribución y así simplifique el cálculo del flujo.

En este caso, parece lógico elegir –para calcular el campo en un punto P – una esfera de radio r y centro el de la distribución (Fig. 11.26). Para cada punto de esta superficie el campo tiene el mismo valor, cosa que no ocurriría de haber elegido otra, por ejemplo, un cubo centrado en O , y en uno de cuyos lados se encontrase P , ¿por qué?

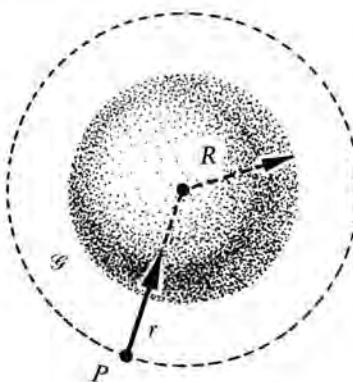


FIG. 11.26

La distribución está caracterizada por su densidad volúmica (11.39), que al ser homogénea es constante:

Aplicando (11.66) a través de la esfera de radio r , sobre la que se encuentra P :

$$\int \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = - \int \mathbf{g} dS = - \mathbf{g} \int dS = - 4 \pi GM$$

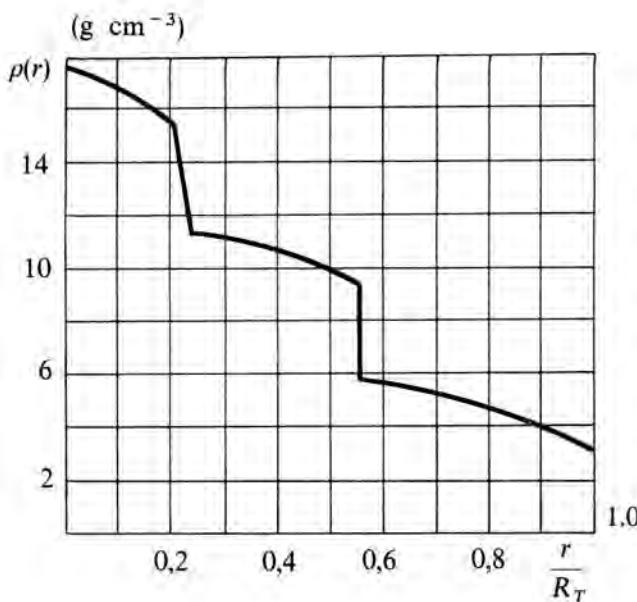


FIG. 11.27

ya que el módulo del campo es constante para todos los puntos de la superficie de radio r . Por lo tanto:

$$\mathcal{G}_{\text{ext}} = GM/r^2 \quad (11.71)$$

Físicamente indica que el campo creado por una esfera de masa homogénea, en un punto exterior de la misma, es el mismo que crearía una masa puntual situada en el centro de la esfera, y cuyo valor fuese igual al de la masa total de la distribución. Este resultado es válido tanto si la masa se encuentra distribuida en la superficie de la esfera (caso de una esfera hueca), como si se encuentra distribuida de cualquier forma en el interior de la esfera, siempre que dicha distribución presente una simetría esférica, es decir, que ρ sea función exclusivamente de r , distancia al centro de la distribución. En el caso de la Tierra la variación radial de su densidad es la indicada en la Fig. 11.27. ¿Qué consecuencias se extraen a partir de dicha gráfica?

Este resultado nos permite extender el enunciado de la ley de la gravitación universal a cuerpos extensos, que presentan las características indicadas.

b) Puntos que se encuentran dentro de la distribución: $r < R$ (Fig. 11.28). Para calcular el campo en un punto interior de la distribución tal como el P , tenemos en cuenta que también el campo tendrá la dirección radial, debido a la simetría esférica de la distribución que se encuentra en el interior de la esfera de radio r . De forma análoga al caso anterior:

$$\mathcal{G}_{\text{int}} 4\pi r^2 = 4\pi Gm' \quad (11.72)$$

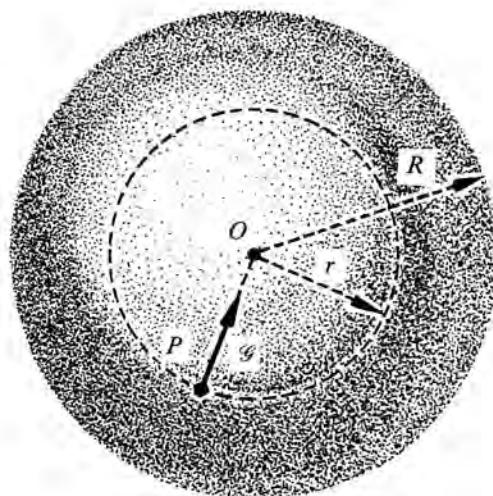


FIG. 11.28

donde m' es la masa encerrada en la esfera de radio r , y que por supuesto no es M . Como la densidad volúmenica es constante:

$$\rho = \frac{m'}{4/3\pi r^3} = \frac{M}{4/3\pi R^3}, \frac{m'}{r^3} = \frac{M}{R^3} \quad (11.73)$$

Sustituyendo (11.73) en (11.72):

$$\mathcal{G}_{\text{int}} = GM/r^2$$

Luego, el campo en los puntos interiores de la distribución crece linealmente con su distancia al centro. Por supuesto si la distribución se encuentra en la superficie de una esfera hueca el campo en el interior es nulo, ¿por qué? Para ver si el campo es continuo o no, justo en la superficie de la distribución, hacemos r igual a R , en (11.71) y (11.73); observamos que en ambas expresiones nos da el mismo valor:

$$\mathcal{G}(r=R) = GM/R^2$$

luego el campo es continuo en la superficie de discontinuidad. En la Fig. 11.29 se representa $\mathcal{G}(r)$, para todo valor de r .

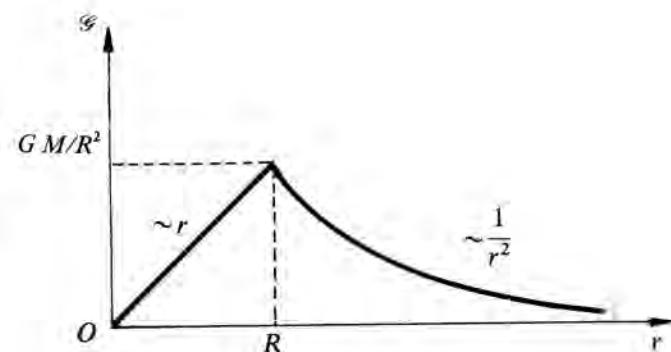


FIG. 11.29

Dejamos como ejercicio para el alumno que calcule el potencial para los puntos exteriores e interiores de la distribución. Estos potenciales tienen como expresiones:

$$V_{\text{ext}} = -\frac{GM}{r}, r > R \quad V_{\text{int}} = -\frac{GM}{2R^3} (3R^2 - r^2), r < R$$

¿Es consciente el alumno de la simplificación que ha significado la utilización del Teorema de Gauss en el cálculo de \mathcal{G} , frente a su cálculo mediante el método directo (11.40)?

RESUMEN SOBRE LAS TEORIAS ACERCA DEL MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS

- * La contemplación de las estrellas, la Vía Láctea, el Sol, la Luna, la Tierra y los cinco planetas fácilmente observables (Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno) ha preocupado a la humanidad desde sus albores.
- * **Cultura griega:** ~ 400 años A.C. Las «estrellas fijas» y la Vía Láctea se encontraban sobre la superficie de una gran esfera (la **esfera celeste**), dentro de la cual estaba colocado el resto del universo.

- Se conocían muchos fenómenos astronómicos.
- **El problema de Platón:** «Las estrellas, que son seres eternos, divinos e inmutables, se mueven alrededor de la Tierra en esa trayectoria eminentemente perfecta que es la circunferencia. Algunas «estrellas» parecen más bien desplazarse desordenadamente a través del firmamento, describiendo sorprendentes figuras irregulares en sus trayectorias anuales; estas estrellas son los planetas. Seguramente ellos también deben *realmente* moverse en circunferencias uniformes y ordenadas, o quizás, en combinaciones de circunferencias. ¿Cómo podemos explicar las observaciones sobre movimientos planetarios en función de los movimientos *uniformes y ordenados*? Trataron de construir un sistema de universo que permitiese a los objetos celestes moverse sólo en movimientos circulares uniformes o en combinación de diferentes movimientos de éstos.
 - **Teoría geocéntrica:** La Tierra se encuentra en el centro de la esfera celeste; ésta traza o marca la dirección del movimiento, como un todo, de las estrellas fijas. La esfera celeste, que no es un ente material, es un indicio del orden que existe en el Universo.
- El Sol, la Luna y los cinco planetas visibles se encuentran, cada uno de ellos, en su propia esfera ideal y transparente; las siete esferas son concéntricas, siendo su centro la Tierra.
- Aristóteles
- **Teoría heliocéntrica:** El Sol se encuentra en el centro del Universo. La Luna, la Tierra y los planetas giran a su alrededor en órbitas de diferentes magnitudes y velocidades.
- Aristarco de Samos.
- Fue combatida por el «saber establecido» de su época. Los griegos eran geocentristas, como consecuencia de su antropocentrismo. Para ellos, el hombre es el único ser del Universo; todo debe girar alrededor del individuo, puesto que sólo él puede observar su entorno.
- La razón de su antropocentrismo es doble: por una parte política y por otra filosófica. La primera, como consecuencia del orgullo helenístico; Grecia se considera un pueblo generador, receptor y transmisor de culturas, este sentimiento se extraña y se toma al hombre como centro del Universo. Desde el punto de vista filosófico, los griegos siempre tratan salvar apariencias; siguen el principio de la simplicidad explicativa: la observación inmediata da la apariencia de que el hombre es el centro.
- **Teorías geocéntricas modificadas:** Permiten que los planetas tengan distancias variables desde la Tierra; se sigue con la creencia de una Tierra inmóvil y en el centro del universo. El sistema de esferas concéntricas fue modificado en formas in-
- geniosas.
- Hiparco de Rodas y Claudio Tolomeo de Alejandría (s. II A.C.).
- El sistema de Tolomeo resultó aún ser útil más de catorce siglos después.
- * **El mundo medieval:** Sto. Tomás de Aquino (s. XIII) había reunido las ideas aristotélicas de los movimientos celestes con la teología. Dudar de la teoría geocéntrica era atacar a la doctrina cristiana.
- La idea antropocentrista de la cultura griega se utiliza, reforzada, por el pensamiento aristotélico-tomista de los s. XII al XIV. Se considera que el hombre está creado por Dios; lo creado a su imagen y semejanza debe ser, por consiguiente, el centro del Universo.
- * **El Renacimiento (s. XVI):** Aparece un nuevo ideal de hombre: el individuo lleno de confianza de curiosidad y de *ganas de vivir*.
 - **El sistema de Copérnico:** N. Copérnico (1473–1543). Estaba interesado en el antiguo problema de Platón: la construcción de un sistema planetario o la combinación del menor número posible de movimientos circulares uniformes. Postula su sistema heliocéntrico. Demostró algunas de las intuiciones de Aristarco.
- Fuerte oposición a la teoría de Copérnico, siendo la principal razón: todas las religiones de Europa aseguraban, con citas bíblicas, que el Divino Arquitecto había trabajado a partir de un esquema tolomeico.
- Significado para la Ciencia: una formulación heliocéntrica abre el camino para una integración del problema del movimiento planetario con las leyes simples de la mecánica terrestre.
- Desafió la concepción universal de su época; su teoría resultó una fuerza principal en la revolución intelectual que se estaba gestando, y que terminó por sacar al hombre de sus preocupaciones centradas en sí mismo.
- **Tycho Brahe (1546-1601):** Astrónomo danés que realiza gran cantidad de observaciones del movimiento planetario, con una presición nunca vista. Sus datos a menudo son exactos en menos de medio minuto de arco; el telescopio aún no había sido inventado (!). Seguramente hubiese aceptado el sistema de Copérnico, si no hubiese visto el obstáculo insalvable de su oposición a la Biblia. Elaboró un sistema geocéntrico propio.
 - **J. Kepler (1571-1630):** Alemán, ayudante del anterior. Seguidor de Copérnico. Para él la clave de la mente de Dios era el orden geométrico y la relación numérica expresadas en las características del sistema heliocéntrico.
- Enuncia, a partir de datos experimentales, sus fa-

mosas tres leyes. Formula por vez primera, junto con Galileo, las leyes físicas en forma matemática, en el lenguaje de la Geometría y el Algebra.

Su ciencia fue verdaderamente moderna: se inclinó ante el inexorable y supremo árbitro de la teoría física, que es la evidencia de la observación cuantitativa y precisa.

- **Galileo Galilei** (1564–1642): su trabajo se complementa con el de Kepler. Sus aportaciones preparan al mundo para la aceptación de la teoría heliocéntrica, sobre todo combatiendo las objeciones dogmáticas y ayudando (en su trabajo sobre la Cinemática) a derribar toda la estructura de la física escolástica con la que estaba concatenada la antigua cosmología.

Costruyó un telescopio en 1609, con el cual realizó observaciones.

Para Galileo los resultados de sus observaciones eran ilustraciones de una verdad que le parecía necesaria, aún desde un punto de vista no experimental. Según Galileo, «las observaciones por sí solas no deciden entre una hipótesis heliocéntrica y una geocéntrica, pues los mismos fenómenos responden a cualquiera de las dos hipótesis».

De todos son conocidos los problemas que tuvo con la Inquisición.

- * **El siglo XVII:** la filosofía aristotélica, y como consecuencia la escolástica, fue perdiendo pujanza ante los ataques de personas como Galileo en Italia y F. Bacon (1561–1626) en Inglaterra.

La ciencia moderna, tal como la entendemos hoy en día, la construyeron hombres como R. Descartes (1596–1650), B. Pascal (1623–1662), Ch. Huygens (1629–1695), W. Harvey (1578–1657), R. Boyle (1627–1691), R. Hooke (1635–1703), y sobre todo I. Newton (1643–1727).

- **I. Newton:** Según I. Asimov, Newton ha sido el científico más grande que jamás existió. En el aspecto que aquí nos interesa fue el que estableció la ley de la gravitación universal, a partir de la cual se explica y se predice el movimiento planetario. Esta ley permitió interpretar las observaciones realizadas hasta entonces englobándolas en una verdadera teoría científica.

- * **Descubrimientos de nuevos planetas:** La ley de la gravitación universal de Newton, ayudó cien años después de su muerte, a descubrir nuevos planetas. El procedimiento seguido dió lugar, en la metodología de la investigación científica al concepto de *método de los residuos*, término acuñado por John Stuart Mill (1806–1873).

- En 1781, el astrónomo inglés W. Herschel descubre Urano.
- En 1830, se observaron unas anomalías en el movimiento de Urano, respecto de la trayectoria que debía describir teniendo en cuenta la interacción gravitatoria de los otros planetas. J. C. Adams y

U. Leverrier justificaron, independientemente uno de otro, que dichas anomalías eran debidas a «un cuerpo perturbador desconocido». Ambos localizaron las posiciones de este hipotético cuerpo a partir solamente de los movimientos observados de Urano, utilizando exclusivamente la ley de gravedad. Leverrier mandó (1846) sus predicciones al director del observatorio de Berlín, quien la misma noche de la llegada de la carta, observó al «cuerpo desconocido», se trataba de Neptuno.

- Mediante un procedimiento semejante se descubrió en el observatorio de Arizona (1930) Plutón. Los trabajos teóricos fueron realizados por P. Lowell en Arizona y W. H. Pickering en Harvard.
- * **¿Existirá un décimo planeta?** Esta es la pregunta que por el momento queda abierta.

CUESTIONES

1. Indicar las características principales del movimiento de una partícula sometida a fuerzas centrales.
2. De las anteriores, ¿cuáles son generales de todos los campos de fuerzas centrales?, ¿y específicas de los que además poseen simetría esférica?
3. Enunciar la ley de las áreas. ¿Qué dimensiones tiene dS/dt ?
4. Justificar razonadamente ¿por qué una fuerza central, en general, no es conservativa?
5. Analogías y diferencias entre $U(x)$ y la energía potencial efectiva $U'(r)$, correspondiente a la parte radial del movimiento de una partícula sometida a fuerzas centrales.
6. Justificar las leyes de Kepler a partir de los contenidos de este capítulo.
7. ¿Se complicarían mucho las expresiones de las diferentes magnitudes características de una partícula en un campo de fuerzas centrales, si se utilizasen coordenadas cartesianas en vez de polares? Justificar la respuesta.
8. Justificar la razón por la que un campo de fuerzas centrales repulsivas –¿qué significa esto?– da lugar a una energía que es positiva en todos los puntos del espacio. Si son atractivas, a una energía potencial negativa.
9. ¿Qué dimensiones tienen las densidades volúmicas, superficiales y lineales de masa? Unidades de cada una de ellas en el SI.
10. ¿El campo «gravitatorio» es una propiedad física que existe en el espacio, o simplemente se trata de una interpretación adecuada de los fenómenos de interacción que simplifica sus cálculos?
- *11. Hacer un dibujo de las líneas de fuerza de un campo gravitatorio, correspondiente a dos masas iguales separadas una cierta distancia.
12. ¿Qué diferencia existe entre una superficie abierta y una superficie cerrada?
13. ¿Por qué en un punto de una región donde existe una distribución de masas puede ser nulo el campo y no el potencial? ¿Podría ocurrir al revés?
14. Interpretar físicamente las relaciones (11.61) y (11.62)

15. ¿Por qué si el flujo a través de una superficie cerrada es debido exclusivamente a las masas situadas en su interior, el campo se debe tanto a las que se encuentran en el interior como en el exterior? Razonar la contestación.
16. ¿Por qué cuando existen ciertas simetrías en las distribuciones, el campo \mathbf{g} creado por ellas, se puede determinar a partir exclusivamente del Teorema de Gauss? Poner algún ejemplo en que esto ocurra.
17. La hipótesis de suponer que la Tierra ejerce una fuerza de atracción gravitatoria sobre cualquier cuerpo, como si toda su masa estuviese concentrada en su centro, que se hace a menudo, es estrictamente correcta? Razonar la respuesta.
- *18. ¿Por qué el resultado (11.71) es válido aunque la esfera o la distribución no sea homogénea, con tal de que $\rho(r)$? Razonar la respuesta.
- *19. Demostrar que:

$$g = GM_T/(R_T + r)^2$$

donde M_T y R_T son, respectivamente, la masa y el radio de la Tierra; g la aceleración de caída de una partícula que se encuentra a una distancia r del centro de la Tierra ($r \approx R_T$).

- *20. Demostrar cómo varía g con la distancia de la partícula al centro de la Tierra r :

$$dg/g \approx -2 dr/R_T$$

- *21. ¿Qué efectos influyen sobre el valor constante de g calculado como si la Tierra fuese una esfera perfecta y que estuviese en reposo respecto de sí misma? ¿Cómo encajan estas previsiones con los resultados experimentales encontrados por Galileo?
22. A partir de las leyes de Kepler y de las propiedades de los campos de fuerzas centrales, ¿cuándo se mueve más rápidamente la Tierra, respecto del Sol, cuando se encuentra en el Afelio o en el Perihelio? Razonar la respuesta.
- *23. ¿Podría el alumno indicar cualitativamente, cómo a partir de la ley de gravitación se ha podido predecir la existencia de otros planetas del sistema solar?
- *24. Algunas revistas de temas generales han publicado la noticia de que en el año 1982, todos los planetas del sistema solar se encontrarán alineados con el Sol. ¿Por qué puede suceder esto? ¿Ocurrirá muy a menudo? ¿Qué consecuencias se le ocurren al alumno que pueden producir para la Tierra dicho fenómeno? Discutirlo a un nivel cualitativo y elemental. Consultar las constantes básicas del sistema que se necesiten.

PROBLEMAS

- *1. Sobre una partícula A de masa m , actúa la fuerza de interacción gravitatoria debida a una segunda partícula B , que se mantiene fija. Cuando A se encuentra muy alejada de B ($r \rightarrow \infty$), tiene una velocidad v_0 (Fig. 11.30). La trayectoria de A se curva, en el sentido indicado en la figura. La mínima distancia a la que A se acerca a B es d . Calcular la masa de B en función de G , v_0 , D , d , m .

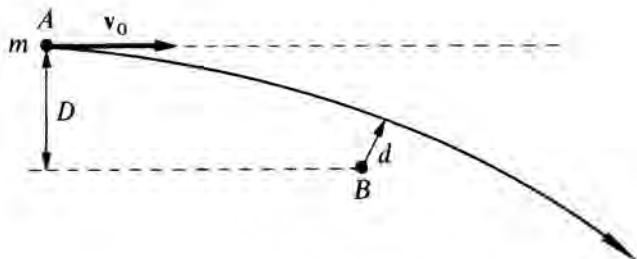


FIG. 11.30

2. Dos satélites A y B de masas iguales, m , se mueven en la misma órbita circular de radio R_0 , alrededor de la Tierra, pero en sentidos opuestos, de forma que llega un momento en que se ensamblan; esta operación puede considerarse como una colisión inelástica. a) Calcular la energía mecánica total del sistema satélites-Tierra, en función de G , M_T , m , R_0 . b) Calcular la energía mecánica total después de unirse los satélites. c) Describir el movimiento de los satélites cuando viajan juntos.
- *3. Dadas dos capas esféricas huecas, concéntricas, de densidad uniforme, y masas M_1 y M_2 , respectivamente (Fig. 11.31). Calcular la fuerza gravitatoria que ejercen sobre una partícula de masa m , según se encuentre situada en A , B o C .

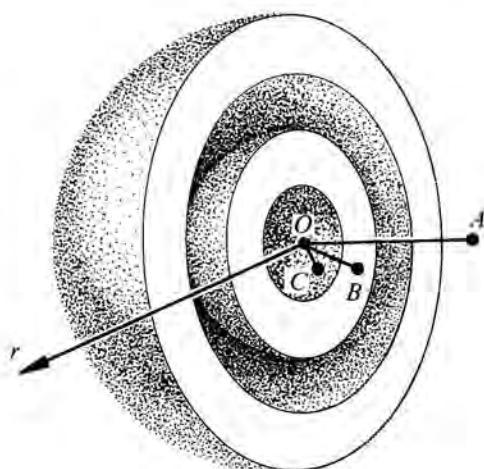


FIG. 11.31

4. Un cuerpo de masa 5 kg se encuentra a un metro de otro de masa 2 kg. ¿Cuál es la fuerza gravitacional: 1) que el cuerpo de 5 kg ejerce sobre el de 2 kg; 2) la que ejerce el de 2 kg sobre el de 5 kg? 3) Si los dos cuerpos pueden moverse libremente, ¿qué aceleraciones adquieren suponiendo que sobre ellos no actúan otras fuerzas más que las ejercidas por efecto de la atracción mutua?
5. Un hombre pesa 784 N. Si suponemos que el radio de la Tierra se dobla, ¿qué le ocurriría al peso del hombre, a) si la masa de la Tierra permaneciese constante, b) si permaneciese constante la densidad media de la Tierra?

- *6. Un satélite de masa m , describe una órbita circular, a una distancia r del centro de la Tierra, con una velocidad uniforme v . Comprobar para este caso particular las tres leyes de Kepler. Calcular: a) Energía total del sistema Tierra-satélite. Dibujar $U(r)$.
- *7. Considérese el sistema Tierra-Luna, y un satélite de masa m que quiere lanzarse desde la superficie de la Tierra, de modo que escape a la acción conjunta de dicho sistema. a) Calcular la energía potencial del satélite en función de su posición a lo largo de la línea que une el centro de la Tierra con el de la Luna. b) ¿Para qué posición del satélite se cancelan ambas fuerzas de atracción? c) ¿Cuánto vale la velocidad de escape? Datos: Masa de la Tierra = $5,983 \times 10^{24}$ kg, masa de la Luna = $0,012 M_T$, distancia entre la Tierra y la Luna $D = 34 \times 10^4$ Km, radio de la Tierra = $6,371 \times 10^3$ km.
- 8. Calcular el flujo a través de una cara de un cubo de 1 m de lado, si en el centro del cubo se encuentra situada una masa puntual de 10 kg.
- 9. Calcular el flujo a través de la superficie de una esfera de 2 m de radio debido a una masa de 100 kg situada a 3 m del centro de la esfera.
- *10. Un satélite terrestre se mueve en una órbita circular, a una altura de 300 km sobre la superficie de la Tierra. Calcular: a) su velocidad, b) período de revolución, c) aceleración centrípeta.
- *11. Calcular la intensidad de campo gravitatorio y el potencial producido por un anillo de masa M y radio R , en los puntos de un eje perpendicular al mismo y que pase por su centro.
- 12. Repetir el ejercicio 4.5, aplicando el Teorema de Gauss.

- *13. En una esfera de radio R se practica un agujero esférico de diámetro igual al radio de la esfera. La posición del agujero está indicada en la figura. La masa de la esfera, antes de practicar el agujero, era M , ¿con qué fuerza atraerá la esfera de radio R a otra pequeña de masa m , que se encuentra a una distancia d del centro de la esfera grande, en: 1) la posición A ; 2) la posición B (Fig 11.32).

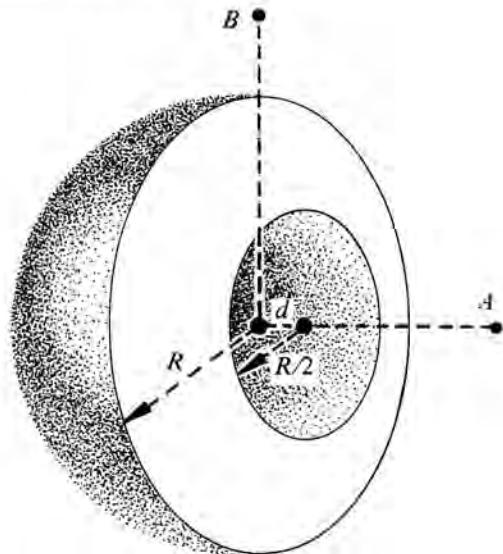


FIG. 11.32