Modèles hiérarchiques bayésiens - Solutions

Données

Déjà utilisé pour les exercices sur le maximum de vraisemblance, le tableau de données thermal_range.csv représente le résultat d'une expérience visant à déterminer l'effet de la température (*temp*) sur le nombre d'oeufs (*num_eggs*) produits par une espèce de moustique. Trois réplicats ont été mesurés pour des valeurs de température entre 10 et 32 degrés Celsius.

```
library(brms)

therm <- read.csv("../donnees/thermal_range.csv")
head(therm)
```

```
##   temp num_eggs
## 1   10        1
## 2   10        1
## 3   10        2
## 4   12        4
## 5   12        4
## 6   12        6
```

Estimation bayésienne du modèle d'optimum thermique

Rappelons-nous le modèle utilisé précédemment pour ce jeu de données. Le nombre moyen d'oeufs produits est donné par une courbe gaussienne:

$$N = N_o \exp \left(- \frac{(T - T_o)^2}{\sigma_T^2} \right)$$

Dans cette équation, T_o est la température optimale, N_o est le nombre d'oeufs produits à cet optimum et σ_T représente la tolérance autour de l'optimum (plus σ_T est élevé, plus N décroit lentement autour de l'optimum).

a) Il est possible d'estimer les paramètres d'un modèle non-linéaire comme celui-ci dans *brms*. Par exemple:

```
brm(bf(num_eggs ~ No * exp(-(temp-To)^2/sigmaT^2), No + To + sigmaT ~ 1, nl = TRUE),
    data = therm)
```

Note:

- Il faut entourer la formule dans une fonction `bf` et spécifier l'argument `nl = TRUE` (non-linéaire).
- Après la formule non-linéaire du modèle, il faut ajouter un terme décrivant les paramètres. Ici, `No + To + sigmaT ~ 1` signifie seulement que nous estimons un effet fixe pour chaque paramètre. Si un des paramètres variait en fonction d'une variable de groupe, nous pourrions écrire par exemple `No ~ (1|groupe), To + sigmaT ~ 1`.

Puisque nous allons utiliser une distribution binomiale négative avec un lien logarithmique pour représenter la moyenne de la réponse (`family = negbinomial` dans *brms*), nous devons modifier la formule ci-dessus pour représenter le logarithme du nombre d'oeufs moyen N. Ré-écrivez la fonction `bf` en appliquant cette transformation.

Réponse

$$\log N = \log N_o - \frac{(T - T_o)^2}{\sigma_T^2}$$

```
brm(bf(num_eggs ~ logNo - (temp-To)^2/sigmaT^2, logNo + To + sigmaT ~ 1, nl = TRUE),
    data = therm, family = negbinomial)
```

b) Choisissez des distributions *a priori* appropriées pour trois paramètres de l'équation obtenue précédemment. Dans l'instruction `set_prior`, le nom du paramètre est spécifié ave `nlpar` pour un modèle non-linéaire. Par exemple, `set_prior("normal(0, 1)", nlpar = "To")` assigne une distribution normale centrée réduite au paramètre `To`.

Note: N'oubliez pas de spécifier la borne inférieure pour `sigmaT`.

Ajoutez aussi une distribution *a priori* pour le paramètre θ de la distribution binomiale négative avec `set_prior("gamma(2, 0.1)", class = "shape")`. Vous pouvez visualiser cette distribution dans R avec `plot(density(rgamma(1E5, 2, 0.1))`. Puisque la variance de la distribution binomiale négative est de $\mu + \mu^2/\theta$, où μ est la moyenne, nous voulons éviter les valeurs de θ trop proches de zéro. Avec les paramètres spécifiés, θ est petit pour des valeurs proches de 0 et plus grandes que 50 (avec un θ si grand, la distribution binomiale négative rejoint pratiquement celle de Poisson).

Réponse

Voici un exemple pour le choix des distributions:

```
prior_therm <- c(set_prior("normal(4, 2)", nlpar = "logNo"),
                 set_prior("normal(20, 10)", nlpar = "To"),
                 set_prior("normal(0, 5)", nlpar = "sigmaT", lb = 0),
                 set_prior("gamma(2, 1)", class = "shape"))
```

- La distribution `normal(4,2)` pour $\log N_o$ donne ~95% de probabilité aux valeurs de $\log N_0$ entre 0 et 8, donc N_0 entre 1 et 3000 environ.
- La distribution `normal(20, 10)` pour T_o donne ~95% de probabilité aux valeurs entre 0 et 40 degrés C.
- La distribution demi-normale (normale tronquée à 0) pour σ_T donne ~95% de probabilité aux valeurs inférieures à 10.

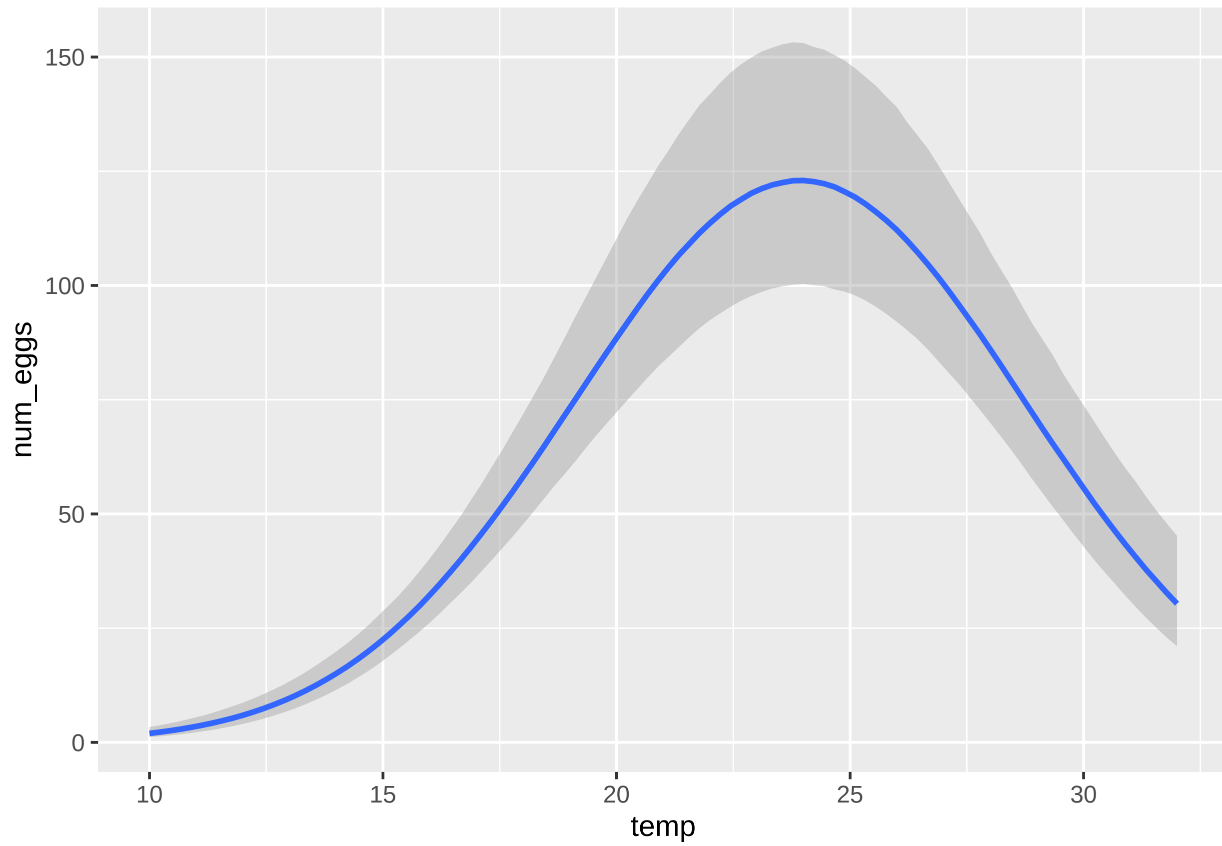
Notez qu'en considérant la plage de températures testées dans cette expérience (entre 10 et 32 degrés C), nous ne pourrions pas de toute façon détecter un optimum au-delà de cette zone, ou un écart-type qui dépasserait de beaucoup la différence entre les valeurs extrêmes testées.

c) Ajustez avec `brm` le modèle non-linéaire avec la formule et les distributions *a priori* spécifiées dans les parties précédentes, en utilisant une distribution binomiale négative de la réponse. Visualisez la forme de la fonction N vs. T estimée avec `marginal_effects`. Déterminez la valeur moyenne et l'intervalle de crédibilité à 95% pour la distribution *a posteriori* de chaque paramètre.

Réponse

```
therm_fit <- brm(bf(num_eggs ~ logNo - (temp-To)^2/sigmaT^2,
                    logNo + To + sigmaT ~ 1, nl = TRUE),
                 data = therm, family = negbinomial, prior = prior_therm)
```

```
marginal_effects(therm_fit)
```




```r
posterior_summary(therm_fit)
```

```
##                        Estimate Est.Error       Q2.5      Q97.5
## b_logNo_Intercept      4.816275 0.1084019   4.608372   5.034786
## b_To_Intercept        23.934971 0.3529636  23.294362  24.677481
## b_sigmaT_Intercept     6.864558 0.3298975   6.276185   7.568452
## shape                  6.082259 1.5918362   3.477376   9.641289
## lp__                -155.583609 1.5033488 -159.503489 -153.702352
```

d) Comparez les résultats en (c) aux estimés et intervalles de confiance obtenus dans le laboratoire 3 par le maximum de vraisemblance, reproduits dans le tableau ci-dessous.

Paramètre	Estimé	Intervalle
N_o	123.2	(104.2, 147.2)
T_o	23.9	(23.4, 24.5)
$sigma_T$	6.82	(6.33, 7.42)
k	0.103	(0.059, 0.186)

Note: Le paramètre k correpond à $1/\theta$ pour la distribution binomiale négative.

Réponse

Les résultats pour T_o et σ_T sont très proches (considérant la marge d'erreur) pour les deux méthodes.

Pour les deux autres paramètres `logNo` et `shape`, on peut transformer les bornes des intervalles pour comparer avec N_o et k (mais puisque k est l'inverse de `shape`, il faut inverser les bornes). On peut aussi transformer la moyenne *a posteriori*, mais on ne s'attend pas à ce qu'elle soit égale au maximum de vraisemblance.

```r
exp(c(4.82, 4.61, 5.04)) # N_o = exp(log_No)
```

```
## [1] 123.9651 100.4841 154.4700
```

```r
1/(c(6.09, 9.39, 3.50)) # k = 1/shape
```

```
## [1] 0.1642036 0.1064963 0.2857143
```

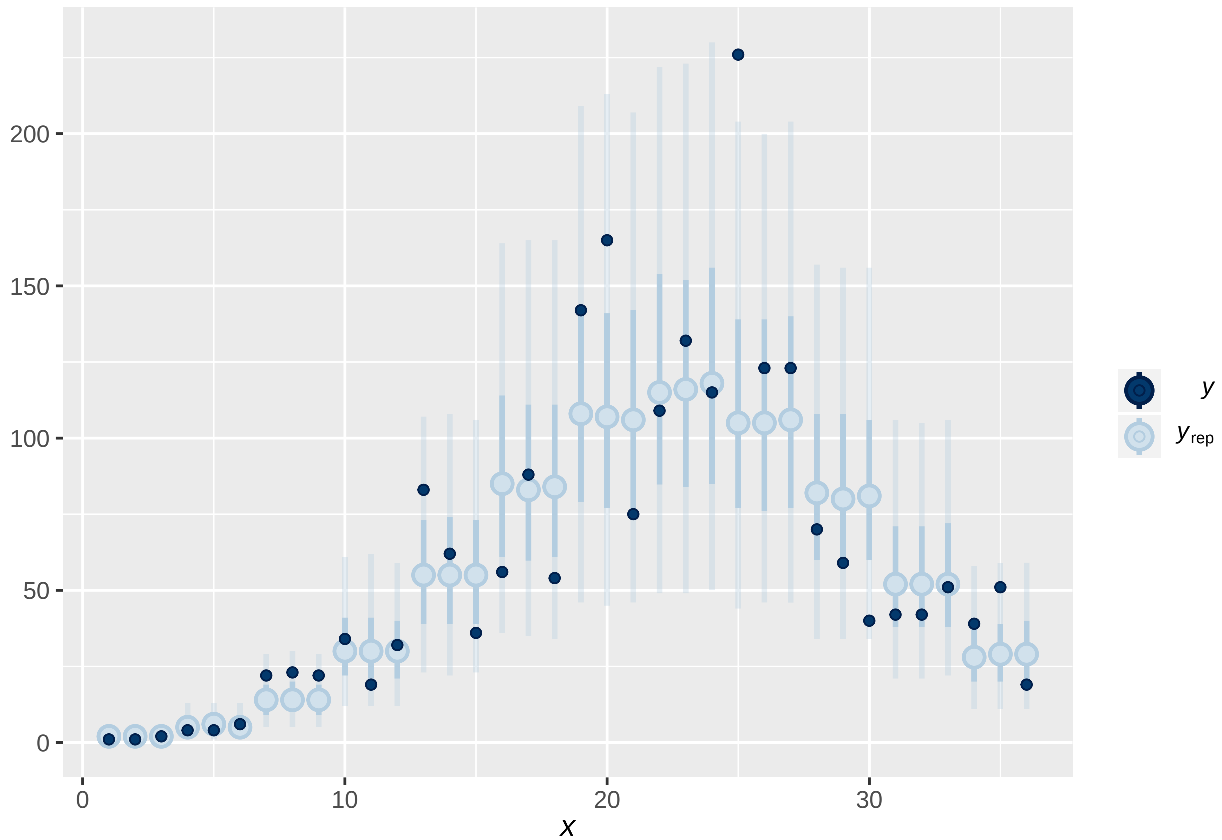
L'estimation de N_o est cohérente pour les deux méthodes, mais le paramètre k est plus élevé pour la méthode bayésienne (signifiant plus de surdispersion) par rapport au maximum de vraisemblance.

e) Vérifiez les intervalles de prédictions *a posteriori* avec `pp_check(..., type = "intervals")`. Les observations semblent-elles cohérentes avec le modèle ajusté?

Réponse

```r
pp_check(therm_fit, type = "intervals")
```

```
## Using all posterior samples for ppc type 'intervals' by default.
```



Si le modèle est bon, on s'attend à ce qu'environ 50% des points soient dans l'intervalle en trait gras et 90% dans l'intervalle en trait mince, ce qui semble être le cas ici.

f) Utilisez l'application *shinystan* (`launch_shinystan`) pour visualiser les résultats. Où dans cette application pouvez-vous visualiser les corrélations entre paramètres?

Réponse

```r
launch_shinystan(therm_fit)
```

Les corrélations peuvent être visualisées dans la section *Explore* en choisissant l'option *Bivariate* à gauche.

g) Utilisez la distribution *a posteriori* conjointe des paramètres obtenue avec `posterior_samples` pour obtenir un estimé du rapport entre la production d'oeufs moyenne à 25 degrés C comparée à celle à 20 degrés C, ainsi qu'un intervalle de crédibilité à 95% pour ce rapport.

Réponse

Le rapport $N(T_2)/N(T_1)$ pour deux températures T_1 et T_2 est donné par:

$$\frac{N(T_2)}{N(T_1)} = \exp(\log N(T_2) - \log N(T_1))$$
$$\frac{N(T_2)}{N(T_1)} = \exp\left(\log N_o - \frac{(T_2 - T_o)^2}{\sigma_T^2} - \log N_o + \frac{(T_1 - T_o)^2}{\sigma_T^2}\right)$$

en simplifiant:

$$\frac{N(T_2)}{N(T_1)} = \exp\left(\frac{(T_1 - T_o)^2 - (T_2 - T_o)^2}{\sigma_T^2}\right)$$

Donc nous calculons ce rapport pour chaque itération (chaque rangée du résultat de `posterior_samples`) pour $T_1 = 20$ et $T_2 = 25$.

```
samp <- posterior_samples(therm_fit)
N_20_25 <- exp(((20 - samp$b_To_Intercept)^2 - (25 - samp$b_To_Intercept)^2) /
                   samp$b_sigmaT_Intercept^2)
mean(N_20_25)
```

```
## [1] 1.356415
```

```
quantile(N_20_25, probs = c(0.025, 0.975))
```

```
##     2.5%    97.5%
## 1.197093 1.535626
```