9. Teórico: Haga todos los desarollos teóricos para encontrar los coeficientes de la ecuación (3.84)

$$a = f[x_0, x_1, x_2]$$

$$a = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_0)}$$

$$b = f[x_0, x_1] - (x_0 + x_1) f[x_0, x_1, x_2]$$

$$b = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - \frac{(x_0 + x_1)}{(x_2 - x_0)} \left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} \right]$$

$$c = f(x_0) - x_0 f[x_0, x_1] + x_0 x_1 f[x_0, x_1, x_2]$$

$$c = f(x_0) - x_0 \left[\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right] + \frac{x_0 x_1}{x_2 - x_0} \left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right]$$

(h) Theorical: Una fórmula alternativa del método de Müller está dada por:

$$f(x) \cong a(x-x_2)^2 + b(x-x_2) + c$$

Demuestre que los coeficientes están dados por:

$$a = (f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]) / (h_2 - h_1)$$

$$b = f[x_1, x_2] + a h_2$$

$$c = f(x_2)$$

donde $h_1 = x_1 - x_0$ y $h_2 = x_2 - x_1$. El cero se encuentra en una vecindad de x_2, en este caso, la fórmula de Bhaskara es:

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h_2} = \delta_2$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_1} = \delta_1$$

$$a = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{h_2} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_1}}{h_2 - h_1}$$

$$b = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h_2} + \left[\left(\frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{h_2} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_1}}{h_2 - h_1} \right) \cdot h_2 \right]$$

$$c = f(x_2)$$

Ahora, para probar la fórmula de Bhaskara se debe tener en cuenta lo siguiente:

$$h_1 = x_1 - x_0$$
$$h_2 = x_2 - x_1$$

Con estos datos podemos despejar x_2

$$x_2 = h_2 + x_1 \qquad x_1 = h_1 + x_0$$

$$x_2 = h_2 + h_1 + h_0$$

$$f(x_0) - f(x_2) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2)$$

$$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2)$$

$h_1 = x_1 - x_0$ $\quad$ $h_2 = x_2 - x_1$

Sustitución.

$$(h_1 + h_2)b - (h_1 + h_2)^2 a = h_1\delta_1 + h_2\delta_2$$

$$h_2 b - h_2^2 a = h_2\delta_2$$

Resolver para a y b:

$$a = \frac{\delta_2 - \delta_1}{h_2 - h_1}$$

$$b = ah_2 + \delta_2$$

$$c = f(x_2)$$

1.) Theorical. Demuestre la afirmación: Si $b < 0$ elegir el signo negativo, de otro modo $(b \geq 0)$, elegir el signo positivo. Sugerencia: en cada iteración $|x_3 - x_2|$ debe ser lo más pequeña posible.

Teniendo en cuenta la ecuación (3.90)

$$x_3 = x_2 - \frac{2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Si pasamos las x a un lado, queda:

$$x_3 - x_2 = \frac{-2}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Ahora, a partir de la sugerencia sabemos que la diferencia entre x_3 y x_2 debe ser lo más pequeña posible. Para esto, la idea es que el denominador sea mucho más grande que el numerador.

Para este objetivo se debe procurar que tanto la b como la raíz tengan el mismo signo para que se sumen entre sí.

Caso 1. $b < 0$

Si $b < 0$, b tiene un signo negativo. Por lo tanto, el signo de la raíz también deberá ser negativo para que ambos términos se sumen entre sí.

Caso 2. $b > 0$

Si $b > 0$, b tiene un signo positivo. Por lo tanto, el signo de la raíz también debe ser positivo. Por lo cual, ambos términos se suman.