2. Fórmulas de Newton - Cotes

La fórmula de Simpson 3/8 consiste en dividir el intervalo en subintervalos de $m=4$ puntos cada uno.

Demuestre que la integral de cualquier de estos subintervalos está dada por:

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}\left(f(x_i) + 3f(x_{i+1}) + 3f(x_{i+2}) + f(x_{i+3})\right).$$

x_0	$f(x_0)$
x_i	$f(x_i)$
x_2	$f(x_2)$
x_3	$f(x_3)$

4 puntos

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_3} P_3(x)\,dx$$

Primero, hallar polinomio de Lagrange

$$P_3(x) \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, L_k(x)$$

$$P_3(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

Ahora se debe integrar el polinomio hallado. Para esto, hay que tener en cuentas que las imágenes "f(x)" se tratan como constantes.

$$A_1 = f(x_0)\int_{x_0}^{x_3} L_0(x)\,dx + f(x_1)\int_{x_0}^{x_3} L_1(x)\,dx$$

$$+ f(x_2)\int_{x_0}^{x_3} L_2(x)\,dx + f(x_3)\int_{x_0}^{x_3} L_3(x)\,dx$$

Después de obtener esta expresión, se tienen que hallar los coeficientes de Lagrange.

$$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{}{(-h)(-2h)(-3h)}$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{}{(h)(-h)(-2h)}$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{}{(2h)(h)(-h)}$$

$$L_3 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{}{(3h)(2h)(h)}$$

Luego, para hallar los valores de cada numerador, se deben tener en cuenta las siguientes relaciones:

$\boxed{x = x_0 + th} \rightarrow$ cambio de multivariable

$x_0 = x_0 + 0h$

$x_1 = x_0 + (1)h$

$x_2 = x_0 + (2)h$

$x_3 = x_0 + (3)h.$

$x - x_0 = th$

$x - x_1 = x - (x_0 + h) = \underbrace{x - x_0} - h$

$= th - h \Rightarrow h(t-1)$

$x - x_2 = x - (x_0 + 2h) = x - x_0 - 2h$

$= th - 2h \Rightarrow h(t-2)$

$x - x_3 = x - (x_0 + 3h) = x - x_0 - 3h$

$= th - 3h \Rightarrow h(t-3)$

Con lo anterior se tiene que:

$$l_0 = \frac{\cancel{h}(t-1) \cdot \cancel{h}(t-2) \cdot \cancel{h}(t-3)}{-6\cancel{h^3}} = \frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{-6}$$

$$l_1 = \frac{t\cancel{h} \cdot \cancel{h}(t-2) \cdot \cancel{h}(t-3)}{2\cancel{h^3}} = \frac{t(t-2)(t-3)}{2}$$

$$l_2 = \frac{t\cancel{h} \cdot \cancel{h}(t-1) \cdot \cancel{h}(t-3)}{-2\cancel{h^3}} = \frac{t(t-1)(t-3)}{-2}$$

$$l_3 = \frac{t\cancel{h} \cdot \cancel{h}(t-1) \cdot \cancel{h}(t-2)}{6\cancel{h^3}}$$

$$= \frac{t \cdot (t-1)(t-2)}{6}$$

Posteriormente, se deben cambiar los límites de integración de la siguiente forma:

$x = x_0 + th$

$$x_0 = x_0 + th$$

$$x_0 - x_0 = th \Rightarrow \boxed{0 = t}$$

$$x_3 = x_0 + th$$

$$x_3 - x_0 = th \Rightarrow 3\cancel{h} = t\cancel{h} = \boxed{3 = t}$$

También, hay que tener en cuenta la siguiente sustitución con respecto a las derivadas.

$$\frac{dx}{dt} = h \Rightarrow dx = \underline{\underline{h}}\, dt$$

↳ "constante"

$$A = \frac{-f(x_0)h}{6} \int_0^3 (t-1)(t-2)(t-3)\,dt + \frac{f(x_1)h}{2} \cdot \int_0^3 t(t-2)(t-3)\,dt - \frac{f(x_2)h}{2} \int_0^3 t(t-1)(t-3)\,dt + \frac{f(x_3)h}{6} \int_0^3 t(t-1)(t-2)\,dt$$

A continuación, se deben expandir los polinomios para poder integrar con respecto a t.

Integral → 1.

$$\int_0^3 (t-1)(t-2)(t-3)\,dt$$

$$\int_0^3 t^2-2t-t+2\ (t-3)\,dt$$

$$\int_0^3 t^3 \underline{-2t^2} \underline{-t^2} \widetilde{+2t} \underline{-3t^2} \widetilde{+6t} \widetilde{+3t} - 6$$

$$\int_0^3 t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = \frac{t^4}{4} - \frac{6t^3}{3} + \frac{11t^2}{2} - 6t \Big]_0^3$$

→ Evaluar:

$$= \frac{3^4}{4} - 2(3)^3 + \frac{11(3)^2}{2} - 6(3) = \frac{81}{4} - 54 + \frac{99}{2} - 18$$

$$= -\frac{9}{4}$$

Integral → 2

$\int_0^3 t\,(t-2)\,(t-3)\,dt \Rightarrow \int_0^3 t^2-2t\;(t-3)\,dt$

$\Rightarrow \int_0^3 t^3-2t^2-3t^2+6t\,dt \Rightarrow \int_0^3 t^3-5t^2+6t\,dt$

$= \frac{t^4}{4} - \frac{5t^3}{3} + \frac{6t^2}{2}\Big]_0^3$

Evaluar: $\frac{3^4}{4} - \frac{5(3)^3}{3} + \frac{6(3)^2}{2} = \frac{81}{4} - 45 + 27$

$= \frac{9}{4}$

Integral → 3

$\int_0^3 t\,(t-1)\,(t-3)\,dt \Rightarrow \int_0^3 t^2-t\;(t-3)\,dt$

$\int_0^3 t^3-t^2-3t^2+3t \Rightarrow \int_0^3 t^3-4t^2+3t$

$= \frac{t^4}{4} - \frac{4t^3}{3} + \frac{3t^2}{2}\Big]_0^3$

$= \frac{(3)^4}{4} - \frac{4(3)^3}{3} + \frac{3(3)^2}{2} = \frac{81}{4} - 36 + \frac{27}{2} = -\frac{9}{4}$

Powered by CamScanner

Integral → 4

$$\int_0^3 t(t-1)(t-2)\,dt \Rightarrow \int_0^3 t^2-t\ (t-2)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^3 t^3-t^2-2t^2+2t\,dt \Rightarrow \int_0^3 t^3-3t^2+2t\,dt$$

$$= \frac{t^4}{4} - \frac{\cancel{3}t^3}{\cancel{3}} + \frac{\cancel{2}t^2}{\cancel{2}} \Big]_0^3$$

$$= \frac{(3)^4}{4} - 3^3 + 3^2 = \frac{81}{4} - 27 + 9 = \frac{9}{4}$$

Después, estos resultados se deben sustituir en la ecuación.

$$A = \frac{f(x_0)\,h}{6}\left[\frac{9}{4}\right] + \frac{f(x_1)\,h}{2}\left[\frac{9}{4}\right] + \frac{f(x_2)\,h}{2}\left[\frac{9}{4}\right]$$

$$+ \frac{f(x_3)\,h}{6}\left[\frac{9}{4}\right]$$

Simplificar <3

$$= f(x_0)\,\frac{3}{8}h + f(x_1)\,\frac{9h}{8} + f(x_2)\,\frac{9h}{8} + f(x_3)\,\frac{3}{8}h$$

Factorizar:-

$$= \frac{3}{8}h\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

Se acaba de demostrar que:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \approx \frac{3}{8}h\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

Es lo mismo que...

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} f(x)\,dx \approx \frac{3}{8}h\left[f(x_i) + 3f(x_{i+1}) + 3f(x_{i+2}) + f(x_{i+3})\right]$$