6) Sustitución hacia atrás

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} x_j}{A_{ii}}$$

Sea A una matriz $n \times n$, $i, j \in \mathbb{N}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$:

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \vdots & b_2 \\ a_{31} & \vdots & a_{33} & \ddots & \vdots & b_3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

Si $a_{11} \neq 0$, será nuestro pivote. De lo contrario, se probará si el elemento $a_{22} \neq 0$; si da de nuevo 0, se seguirá repitiendo el procedimiento hasta encontrar el pivote. Para la demostración, se asumirá que $a_{11} \neq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n &= b_{n-1} \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Para realizar la eliminación gaussiana por el método de la sustitución hacia atrás, se resolverá la n-ésima ecuación para x_n, obteniendo:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Ahora se resolverá la ecuación $(n-1)$-ésima para x_{n-1} utilizando x_n, obteniendo:

$$x_{n-1} = \frac{(b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n)}{a_{n-1,n-1}}$$

Utilizando la demostración por inducción, se llega a la expresión general, la cual es:

$$x_i = \frac{(b_i - a_{in} x_n - a_{i,n-1} \cdot x_{n-1} - \dots - a_{i,i+1} \cdot x_{i+1})}{a_{ii}}$$

Que reescribiéndola se obtiene la siguiente expresión:

$$\boxed{x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}}$$