Derivación

5 (Theorical) Show that the $D^4 f$ operator is given by:

$$D^4 f(x_j) \cong \frac{f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + 6f(x_j) - 4f(x_{j-1}) + f(x_{j-2})}{h^4}$$

For this operator, what is the order ($O(h^x)$) of the approximation?

Primero, vamos a escribir la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Se trabajó toda la demostración a partir de ella.

$$f''(x) = \lim_{h,k \to 0} \frac{f'(x+k) - f'(x)}{hk}$$

$$= \lim_{h,k \to 0} \frac{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h+k) - f(x+k)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{k}$$

$$= \lim_{h,k \to 0} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+k+h) - f(x+k) - f(x+h) + f(x)}{hk}$$

(✱) Como los límites existen y son continuos, y como $h, k \to 0$, se asume que $h = k$, obteniendo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

3- derivada: $\lim_{k \to 0} \frac{f''(x+k) - f''(x)}{k}$

$$= \lim_{h,k \to 0} \frac{f(x+2h+k) - 2f(x+h+k) + f(x+k) - f(x+2h) + 2f(x+h) - f(x)}{h^2 k}$$

(✱) $\to h = k$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3}$$

4ª derivada:

$$f^{4}(x) = \lim_{k \to 0} \frac{f'''(x+k) - f'''(x)}{k}$$

$$= \lim_{h,k \to 0} \frac{f(x+3h+k) - 3f(x+2h+k) + 3f(x+h+k) - f(x+3h) + 3f(x+2h) - 3f(x+h) + f(x)}{h^3 k}$$

(*) $k=h$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+4h) - 4f(x+3h) + 6f(x+2h) - 4f(x+h) + f(x)}{h^4}$$

- Se puede observar que los valores de los coeficientes se obtienen a partir del triángulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \leftarrow f'(x) \\
 & & & 1 & 2 & 1 & & & \leftarrow f''(x) \\
 & & 1 & 3 & & 3 & 1 & & \leftarrow f'''(x) \\
 & 1 & 4 & & 6 & & 4 & 1 & \leftarrow f''''(x) \\
 & & & & \vdots & & & & \leftarrow f^{n}(x) \to n \in \mathbb{N}
\end{array}$$

- El orden $(O(h^k))$ de la aproximación es de $(O(h^1))$.