1. Muestre con detalle que la sustitución hacia adelante se expresa como:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} x_j}{A_{ii}}$$

Para comenzar, hay que tener en cuenta la factorización LU de la matriz A.

$A = LU$

$L \rightarrow$ Triangular inferior

$U \rightarrow$ Triangular superior

Sistemas triangulares $\rightarrow$ Matriz de coeficientes estructura triangular.

Para la sustitución hacia adelante se debe tener en cuenta la matriz triangular inferior:

$$\begin{bmatrix} A_{00} & 0 & 0 & 0 \\ A_{10} & A_{11} & 0 & 0 \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{i0} & A_{i1} & A_{i2} & A_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_i \end{bmatrix}$$

Ahora, se debe despejar cada x en términos de b y A.

$$x_0 = \frac{b_0}{A_{00}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - A_{10} x_0}{A_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - A_{21} x_1 - A_{20} x_0}{A_{22}}$$

Luego, a partir de esta relación podemos definir que b_i se obtiene.

$$b_i = A_{i0} x_0 + A_{i1} x_1 + A_{i2} x_2 + \cdots + A_{ii} x_i$$

$$b_i = \sum_{j=0}^{i} A_{ij} x_j$$

En algún momento $i\,j$ serán iguales

$$b_i = A_{ii} x_i + \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} x_j$$ Al despejar x_i, queda:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} x_j}{A_{ii}}$$

$i-1 \rightarrow$ Porque necesitamos saber el término anterior.

6. Muestre con detalle que la sustitución hacia atrás se expresa como:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} x_j}{A_{ii}}$$

donde $i = n, n-1, \ldots, 0$. Note que la diagonal de la matriz superior puede tener cualquier valor.

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{0i} \\ 0 & A_{11} & A_{12} & A_{1i} \\ 0 & 0 & A_{22} & A_{2i} \\ 0 & 0 & 0 & A_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_i \end{bmatrix}$$

Se utiliza la matriz superior U

En este caso, se empieza de atrás hacia adelante.

$$x_i = \frac{b_i}{A_{ii}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - A_{2i} x_i}{A_{22}}$$

Después, para hallar el patrón se despeja b_0.

$$b_0 = A_{00} x_0 + A_{01} x_1 + A_{02} x_2 + A_{0i} x_i$$

$$b_i = A_{ii} x_i + \cdots + A_{ij} x_j \qquad i = j$$

$$b_i = A_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} x_j$$

Se despeja x_i

$$\boxed{x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} x_j}{A_{ii}}}$$

Hay que tener en cuenta que los términos al estar en la matriz triangular superior, exceptuando la diagonal, el índice de la columna siempre será mayor que el de la fila. Por ende, $j = i + 1$.