Estimación de parámetros

1. (Theoretical) Sea $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde $A \sim N(\mu, \sigma)$ con parámetros μ y σ. Muestre que los estimadores máximo verosímiles son:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Primero, se necesita encontrar la función de verosimilitud conjunta para la distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$. Dicha función conjunta para una muestra aleatoria $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de distribución normal es de:

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 (x_i - \mu)^2/\sigma^2}$$

El estimador máximo verosímil para μ es el valor que maximiza la función de verosimilitud conjunta. Dado de dicha función es exponencial, su máximo alcanza en el mismo lugar que el máximo de la función logarítmica. Por lo tanto, el estimador máximo verosímil para μ es:

$$\hat{\mu} = \arg\max_{\mu} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 (x_i - \mu)^2/\sigma^2}\right)$$

Diferenciando respecto a μ, obtenemos:

$$\frac{d}{d\mu} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 (x_i - \mu)^2/\sigma^2}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma^2} (x_i - \mu) e^{-1/2 (x_i - \mu)^2/\sigma^2}$$

Evaluando en $\hat{\mu}$, obtenemos que:

$$\frac{d}{d\hat{\mu}} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 (x_i - \hat{\mu})^2/\sigma^2}\right) = 0$$

Implicando que $\hat{\mu}$ es el estimador máximo verosímil para μ

Para encontrar el estimador máximo verosímil para σ^2, primero se calcula la función de verosimilitud conjunta respecto a σ^2:

$$\mathcal{L}(\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(x_i-\mu)^2/\sigma^2}$$

Luego, se deriva respecto a σ^2:

$$\frac{\partial}{\partial(\sigma^2)} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(x_i-\mu)^2/\sigma^2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma^3} e^{-1/2(x_i-\mu)^2/\sigma^2}$$

Evaluando en $\hat{\sigma}^2$, se obtiene que:

$$\frac{\partial}{\partial(\sigma^2)} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(x_i-\hat{\mu})/\hat{\sigma}^2)} = 0$$

Lo que implica que $\hat{\sigma}^2$ es el estimador máximo verosímil para σ^2