Optimización

2) Para $x, y, z \in \mathbb{R}$, sujeto a $g(x,y,z) = 2x - 4y + 5z = 2$. Encuentra el mínimo de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1$

$g(x,y,z) = 2x - 4y + 5z = 2$

$\vec{\nabla} g = \langle 2, -4, 5 \rangle$

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1$

$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \langle 2x, 2y, 2z - 2 \rangle$

Prueba de la hipótesis:

¿$\vec{\nabla} g = 0$?

↳ No, no es posible

Multiplicadores de Lagrange:

$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \to \langle 2x, 2y, 2z - 2 \rangle = \lambda \langle 2, -4, 5 \rangle$

- $2x = 2\lambda \to x = \lambda$
- $2y = -4\lambda \to y = -2\lambda$
- $2z - 2 = 5\lambda \to z = \dfrac{5\lambda + 2}{2}$

En términos de x:

$y = -2x$

$z = \dfrac{5x + 2}{2}$

$g(x): 2x + 8x + \dfrac{25x + 10}{2} - 2 = 0 \Rightarrow 10x + \dfrac{25x}{2} + \dfrac{10}{2} - 2 = 0$

$\dfrac{45x}{2} + 3 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{3 \cdot 2}{45} = -\dfrac{6}{45} = -\dfrac{2}{15}$

$y = \dfrac{4}{15}$, $z = \dfrac{5\left(-\frac{2}{15}\right) + 2}{2} = \dfrac{-\frac{2}{3} + \frac{6}{3}}{2} = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{1}} = \dfrac{4}{3 \cdot 2} = \dfrac{2}{3}$

Evaluar en $f(x,y,z)$:

$f\left(-\dfrac{2}{15}, \dfrac{4}{15}, \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{225} + \dfrac{16}{225} + \dfrac{4}{9} - \dfrac{4}{3} + 1 = \dfrac{20}{225} + \dfrac{4}{9} - \dfrac{12}{9} + \dfrac{9}{9}$

$= \dfrac{20}{225} + \dfrac{1}{9} = \boxed{\dfrac{1}{5}}$