

Informe 3: Espectro del Hidrógeno y Deuterio

Juana Valeria Pinzón* and Sergio Laverde**

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

(Dated: 4 de marzo de 2024)

En el presente documento, usando las líneas espectrales de $H\alpha$ y la línea del Neón de 653,28824 nm[4] como referencia, se determinarán la diferencia entre $H\alpha$ y $D\alpha$, la proporción entre la masa de un nucleón y la del electrón y la constante de estructura fina. Además, se expondrá un análisis a cerca de la resolución espectral de ESPARTACO y del estudio de los anchos de las líneas espectrales para encontrar una relación con respecto al spin electrónico y la transición de niveles de energía. Para los experimentos se utilizó un montaje de espectrografía de alta resolución para la obtención de los espectros deseados que posteriormente fueron analizados por medio de un software de análisis de imágenes para el procesamiento y la interpretación de los datos obtenidos. Se obtuvieron como resultados una calibración de escala de $1028px = 2,99nm$, la distancia entre $H\alpha$ y $D\alpha$ de $0,1775 \pm 0,0015$, la proporción entre la masa de un nucleón y la del electrón de $1848,72 \pm 15,15$, la resolución espectral de ESPARTACO de 3,36 y una constante de estructura fina de $0,0319 \pm 0,0053$. Por medio de los resultados y su análisis se adquirió una comprensión más profunda de la estructura atómica y las propiedades fundamentales de la materia, así como una evaluación crítica de la capacidad y precisión de los instrumentos utilizados en el análisis espectral.

I. INTRODUCCIÓN

La espectroscopía es una técnica mediante la que podemos medir cuánta luz absorbe, refleja o emite un objeto o una disolución, sirve para comprender las características de una sustancia química, a partir del análisis de la cantidad de luz que absorbe. Durante los últimos siglos los espectros de líneas han desempeñado un papel fundamental en el desarrollo de la teoría cuántica, al proporcionar evidencia experimental para la formulación de modelos teóricos que explican la estructura atómica y molecular[3].

En un sistema de dos partículas de carga opuestas, análogo o equivalente a un átomo de Hidrógeno, es decir, si un electrón orbita un núcleo de la misma carga pero positiva, algunas de las líneas espectrales de emisión se pueden predecir mediante la fórmula de Rydberg (1).

$$\frac{1}{\lambda} = \left(\frac{m_{nucleo}}{m_{nucleo} + m_e} \right) \frac{Ry}{hc} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (1)$$

En donde λ es la longitud de onda del fotón emitido, Ry es la constante de Rydberg, h es la constante de Planck y c es la velocidad de la luz en el vacío. Si en esta ecuación fijamos $n_f = 2$, obtenemos la serie de Ballmer correspondiente al sistema que estemos estudiando. En particular, la línea espectral que se obtiene al evaluar $n_i = 3$ se conoce como la línea alfa (α), que para el caso del átomo de Hidrógeno se conoce

como 'H alfa' ($H\alpha$) y para su isótopo el Deuterio se conoce como 'D alfa' ($D\alpha$).

Cuando la conocida línea espectral roja del espectro del hidrógeno ($H\alpha$) se examina a muy alta resolución, se comprueba que es un doblete estrechamente espaciado. Este desdoblamiento se denomina estructura fina y fue una de las primeras pruebas experimentales del espín de los electrones. En el vacío, La diferencia entre las líneas del hidrógeno y del deuterio es de unos 0,2 nm y el desdoblamiento de cada una de ellas es de unos 0,016 nm, lo que corresponde a una diferencia de energía de unos 0,000045 eV. Esto corresponde a un campo magnético interno sobre el electrón de unos 0,4 Tesla[1]. Dicho desdoblamiento se presenta por la interacción entre el momento angular orbital (\vec{L}) y el espín (\vec{S}) del electrón, esta interacción puede darse cuando son paralelos o cuando son antiparalelos. La diferencia de energía entre ambas situaciones es:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{\mu c^2 \alpha^4}{n^5} \\ \Delta \lambda &= \frac{\lambda^2}{hc} \Delta E \\ \mu &= \frac{m_{nucleo} m_e}{m_{nucleo} + m_e} \\ \alpha &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \end{aligned} \quad (2)$$

Donde λ es la longitud de onda obtenida en de la fórmula de Rydberg (1) y $\Delta \lambda$ es la separación entre las líneas de estructura fina.

* Correo institucional: j.pinzonr@uniandes.edu.co

** s.laverdeg@uniandes.edu.co

II. MONTAJE Y METODOLOGÍA EXPERIMENTAL

En esta práctica experimental, se utilizó el espectrógrafo de alta resolución ESPARTACO[2], complementado con tubos espectrales de diversos elementos como sodio, mercurio, hidrógeno, deuterio y neón. Además, se empleó una fibra óptica para facilitar la entrada de luz al espectrógrafo. Como parte de la preparación, se consultó un catálogo de líneas de neón para identificar la longitud de onda más cercana a H-alfa.

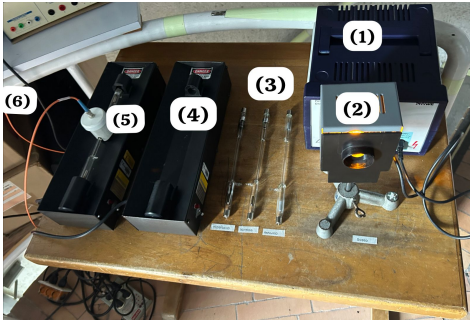


Figura 1. Montaje

Montaje del experimento de espectro de Hidrógeno y Deuterio. En la figura se puede apreciar una fuente de alimentación para los tubos espectrales(1), una rejilla de difracción que contenía al sodio(2), tubos espectrales (neón, mercurio, hidrógeno y deuterio) (3), soporte para lámpara espectral (4), una caperuza blanca receptora unida a una fibra óptica(5) y un espectrógrafo de alta resolución (6).

El procedimiento experimental se desarrolló en varias etapas. Inicialmente, se tomaron espectros de las líneas amarillas de mercurio y sodio, lo que permitió evaluar la resolución espectral del equipo. Posteriormente, se capturaron de manera individual los espectros de H-alfa, D-alfa y una línea de neón cercana. Estos datos fueron analizados utilizando el software FIJI, que permitió extraer los perfiles espectrales y medir con precisión las posiciones de los centros de las líneas de H y neón. Esta medición, realizada con una precisión de hasta décimas de píxel, fue crucial para calibrar la escala del espectrógrafo. Finalmente, se obtuvieron perfiles de H y D a diferentes alturas, lo que permitió identificar con claridad la estructura fina de las líneas espectrales para posteriormente analizarlas.

III. ANÁLISIS Y RESULTADOS

- **Calibración:** Para el proceso de calibración, mediante el software FIJI se sobrepusieron las

imágenes obtenidas de $H\alpha$ y de la línea del Neón más cercana a $H\alpha$. Dado que la línea del Neón se encuentra a la izquierda de $H\alpha$, se determinó que la longitud de onda esta línea corresponde a $653,28824 \text{ nm}$ [4]. Ya teniendo la diferencia entre longitudes de onda de $H\alpha$ y de la línea del Neón de $2,99 \text{ nm}$; y habiendo medido una distancia entre ambas en píxeles de 1028, se procedió a calibrar la escala entre nanómetros y píxeles:

$$\text{nm} = \# \text{píxeles} \times \left(\frac{2,99 \text{ nm}}{1028 \text{ píxeles}} \right) \quad (3)$$

- **Distancia entre $H\alpha$ y $D\alpha$:** Nuevamente mediante el software FIJI se sobrepusieron las imágenes obtenidas de $H\alpha$ y $D\alpha$ para medir la distancia entre ellas, procedimiento del cual se obtuvo una distancia en píxeles de 61. Medida que al pasarla a nm usando la ecuación (3), se obtuvo un valor experimental de:

$$H\alpha - D\alpha = (0,1775 \pm 0,0015) \text{ nm}$$

La incertidumbre asociada considerablemente baja en comparación con el valor obtenido nos indica que se obtuvo precisión en el valor obtenido. Comparando este último con el valor esperado de:

$$H\alpha - D\alpha = 0,1783 \text{ nm}$$

Se obtuvo un error relativo de:

$$E_{\text{relativo}} = 4,5 \times 10^{-3}$$

El cual indica que se obtuvo exactitud.

- **Masa de un nucleón:** Considerando la aproximación:

$$m_{\text{nucleon}} = m_p = m_n = \frac{M_D}{2}$$

En donde m_p es la masa del protón, m_n es la masa del neutrón y M_D es la masa del núcleo del Deuterio ($m_p + m_n$). Como se expone en la sección de cálculo (11), para la proporción entre la masa de un nucleón con la del electrón se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{m_{\text{nucleon}}}{m_e} = \left(\frac{36hc}{10Ry(H\alpha - D\alpha)} \right) \quad (4)$$

De la cual se obtuvo un valor experimental de:

$$\frac{m_{\text{nucleon}}}{m_e} = 1848,72 \pm 15,15$$

La incertidumbre asociada considerablemente baja en comparación con el valor obtenido nos indica que se obtuvo precisión en el valor obtenido. Comparando este último con el valor esperado de:

$$\frac{m_{nucleon}}{m_e} = 1837,42$$

Se obtuvo un error relativo de:

$$E_{relativo} = 6,15 \times 10^{-3}$$

El cual indica que se obtuvo exactitud.

- **Resolución Espectral del Instrumento:** Para medir el ancho de la línea de Ne se usó el método FWHM manualmente, donde a partir de las coordenadas del software FIJI, se reconoció f_{max} y para aplicar el método, con las mismas coordenadas de FIJI se delimitaron 2 puntos en $(\frac{f_{max}}{2})$, los cuales son respectivamente $X1 = 10,5$ píxeles y $X2 = 14,5$ píxeles, su diferencia proporciona un ancho para la línea del Neón de 4 píxeles, y usando el factor de conversión (3) obtenemos:

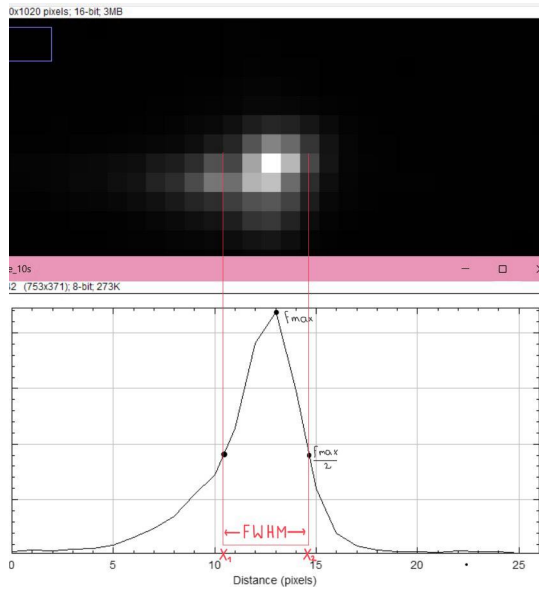


Figura 2. FWHM Ne
Ancho de la línea de Neón

$$nm = 4pixeles \times \left(\frac{2,99nm}{1028pixeles} \right) \quad (5)$$

$$\Delta\lambda = 0.011 \text{ nm}$$

A continuación, se realizó el mismo procedimiento para f_{max} , obteniendo:

$$nm = 13pixeles \times \left(\frac{2,99nm}{1028pixeles} \right) \quad (6)$$

$$\lambda = 0.037 \text{ nm}$$

Con los valores de $\Delta\lambda$ y λ se calculó la resolución espectral (R.E.):

$$\begin{aligned} R.E. &= \frac{0,037nm}{0,011nm} \\ R.E. &= 3,36 \end{aligned}$$

■ Comparación FWHM de H-alfa y D-alfa

Se siguió el procedimiento anterior y se evaluó el ancho de H-alfa y D-alfa como se puede ver respectivamente a continuación:

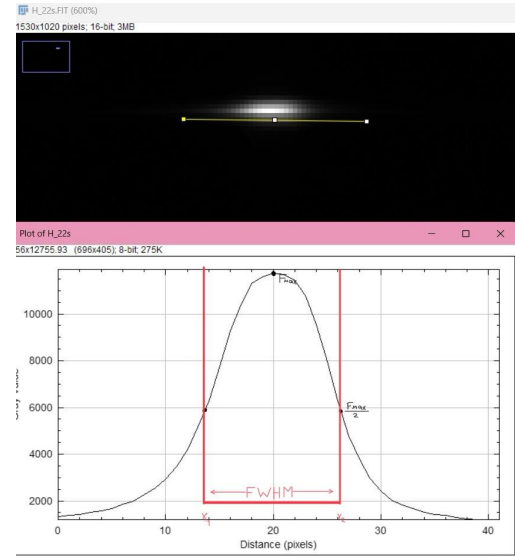


Figura 3. FWHM H-alfa
Ancho de la línea H-alfa

$$X1 = 13,8 \text{ píxeles y } X2 = 26,2 \text{ píxeles}$$

Aplicando el factor de conversión, obtenemos un ancho para D-alfa de:

$$nm = 8,4pixeles \times \left(\frac{2,99nm}{1028pixeles} \right) \quad (7)$$

$$\Delta\lambda = 0.024 \text{ nm}$$

$$X1 = 5 \text{ píxeles y } X2 = 15 \text{ píxeles}$$

Aplicando el factor de conversión, obtenemos un ancho para D-alfa de:

$$nm = 10pixeles \times \left(\frac{2,99nm}{1028pixeles} \right) \quad (8)$$

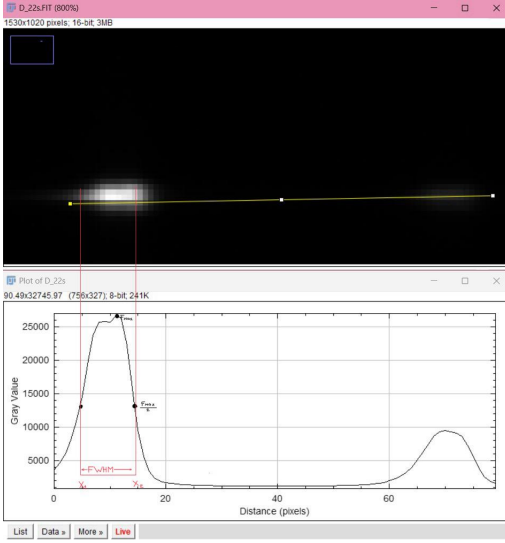


Figura 4. FWHM D-alfa
Ancho de la línea D-alfa

$$\Delta\lambda = 0.029 \text{ nm}$$

A partir de estos valores obtenidos, se realizó una tabla para comparar los valores:

Cuadro I. Resultados Anchos líneas espectrales

Línea Espectral	Ancho (FWHM)
Neón	0.011 nm
H-alfa	0.024 nm
D-alfa	0.029 nm

A partir del cuadro anterior, se hizo evidente la diferencia entre los anchos de las diferentes líneas espectrales, esto debido a los diferentes niveles de energía, ya que la transición entre estos niveles, resultan en la emisión de luz en longitudes de onda específicas. La estructura fina de los niveles de energía puede dar lugar a líneas espectrales más estrechas o más anchas dependiendo de la probabilidad de la transición, lo cual a su vez depende de la energía en un campo magnético interno sobre el electrón implicado.

- **Constante de estructura fina:** Para el cálculo de la constante de estructura fina se usó la línea $D\alpha$ ya que en $H\alpha$ no se alcanzó a apreciar la estructura fina. Además, se midió la distancia entre las dos líneas de $D\alpha$ y se estableció que la longitud de esta distancia ($\Delta\lambda$) es de $(3,0 \pm 0,5)$ píxeles, que pasándolos a nanómetros mediante la ecuación (3) corresponde a $(0,0087 \pm 0,0015)$ nm. Entonces, mediante la ecuación (2) podemos obtener un valor experimental para la constante de

estructura fina como se muestra a continuación:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2 \mu c \alpha^4}{h n^5}$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{\Delta\lambda h n^5}{\lambda^2 \mu c}} \quad (9)$$

Se obtuvo un valor experimental de:

$$\alpha_{exp} = 0,0319 \pm 0,0053$$

La incertidumbre asociada considerablemente alta en comparación con el valor obtenido nos indica que no se obtuvo precisión en el valor obtenido. Comparando este último con el valor esperado de:

$$\alpha_{teo} = 0,0073$$

Se obtuvo un error relativo de:

$$E_{relativo} = 3,37$$

El cual nos indica que no se obtuvo exactitud.

Cuadro II. Resultados Calculados

Parámetro	Valor
Distancia entre $H\alpha$ y $D\alpha$	0,1775 nm
Proporción ($\frac{m_{nucleon}}{m_e}$)	1848,72
Constante de estructura fina	0,0319

IV. CONCLUSIONES

A partir de los datos experimentales y el proceso de análisis, teniendo en cuenta los criterios VA se puede concluir que:

- Para el proceso de calibración, se obtuvo una aproximación muy precisa y exacta para la calibración de escala. Esto debido a haber escogido correctamente la línea en el espectro del Neón con una longitud de onda de $653,28824[4]$ nm y también por haber contado con el espectrógrafo de alta resolución ESPARTACO.
- Habiendo obtenido una distancia entre $H\alpha$ y $D\alpha$ experimental de $(0,1775 \pm 0,0015)nm$, se obtuvo precisión y una alta exactitud. Resultado que dependió enteramente de la buena calibración de escala. Además, en el espectro se puede apreciar una débil línea espectral a la derecha de $D\alpha$, al realizar la medición de la distancia entre ambas

se obtuvo como resultado la misma distancia entre $H\alpha$ y $D\alpha$. Concluyendo así que esta débil línea corresponde a $H\alpha$ y que entonces el tubo espectral de Deuterio no contiene exclusivamente este último, sino que contiene además Hidrógeno con un solo nucleón en su núcleo.

- La proporción de masas entre el electrón y un nucleón obtenida experimentalmente de $1848,72 \pm 15,15$ indica que nuevamente se obtuvo precisión y una alta exactitud pese a la aproximación realizada para facilitar los cálculos. Resultado altamente influenciado por la exactitud en la distancia anteriormente calculada.
- La resolución espectral del instrumento para distinguir líneas espectrales cercanas, es de 3.36, lo cual significa que ESPARTACO puede resolver estructura fina en el espectro que estén separados 3.36 veces el ancho a media altura (FMHW). Es-

te nivel de resolución significa que ESPARTACO es capaz de diferenciar características espectrales con una separación mínima de aproximadamente 3.36 veces el ancho de una línea espectral típica a media altura. Cuanto mayor sea este número, mayor será la capacidad de ESPARTACO para distinguir líneas espectrales cercanas. En conclusión, una resolución espectral de 3.36 indica una capacidad bastante alta para resolver estructura fina en el espectro.

- Para la constante de estructura fina obtenida de $0,0319 \pm 0,0053$, no se obtuvo precisión y no se obtuvo exactitud. Es evidente que el valor obtenido está demasiado lejos del valor esperado. Siendo la única variable la distancia entre las líneas de $D\alpha$, podemos concluir que esta medición no es exacta. Es decir, al parecer la resolución de ESPARTACO no es suficiente en este caso en particular a pesar de lo mencionado en la conclusión anterior.

-
- [1] Anonymous. *Hydrogen fine structure*. n.d.
[2] D. R. Benjamin Oostra. Espartaco: a high-resolution, low-cost spectrograph for students. *Revista Colombiana de Física*, 2010.
[3] J. A. C. Broekaert. *Espectroscopía de absorción atómica: principios y aplicaciones*. Reverte, 2002.
[4] NIST. Atomic spectra database. consultado el 2 de marzo de 2024.

V. ANEXOS

Cuadro III. Constantes Utilizadas

Constante	Valor
Velocidad de la luz (c)	299798458 m/s
Masa del electrón (m_e)	$0,51099895 \times 10^6$ eV/ c^2
Masa del protón (m_p)	$938,27208 \times 10^6$ eV/ c^2
Masa del neutrón (m_n)	$939,56542 \times 10^6$ eV/ c^2
Constante Planck (h)	$4,136667696 \times 10^{-15}$ eV.s
Longitud de onda de $H\alpha$	656,2795[4] nm
Longitud de onda de $D\alpha$	656,1012[4] nm
Longitud de onda del Neón	653,28824[4] nm
Incertidumbre en la medida (σ_{px})	0,5px

A. Criterios

- Precisión: $= \frac{\text{Desviación Estándar}}{\text{Valor obtenido}} \leq 0,1$

- $\text{Exactitud} := |\text{Valor real} - \text{Valor obtenido}| \leq 2,5 \cdot \text{Desviación Estándar}$

B. Definiciones

- Resolución Espectral $= \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$
 - λ longitud de onda central de la línea de Neón.
 - $\Delta\lambda$ anchura espectral (FWHM).

VI. APÉNDICE DE CÁLCULO

- Propagación de errores:

$$\sigma f = \sqrt{\sum_i^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma x_i \right)^2}$$

$$\sigma mn = \frac{2,99nm}{1028px} \sigma px \sqrt{1 + \frac{1}{(\#px)^2 (1028px)^2}} \quad (10)$$

$$\sigma \frac{m_{nuc}}{m_e} = \frac{36hc}{10Ry} \left(\frac{1}{(H\alpha - D\alpha)^2} \right) (\sigma(H\alpha - D\alpha))$$

$$\sigma \alpha = \left(\frac{\Delta \lambda h n^5}{\lambda^2 \mu c} \right)^{-\frac{3}{4}} \frac{h n^5}{\lambda^2 \mu c} \sigma(\Delta \lambda)$$

- Masa de un nucleón:

Partiendo de la fórmula de Rydberg (1):

$$\begin{aligned}\frac{1}{H\alpha} &= \left(\frac{m_{nucleon}}{m_e + m_{nucleon}} \right) \frac{5Ry}{36hc} \\ \frac{1}{D\alpha} &= \left(\frac{2m_{nucleon}}{m_e + 2m_{nucleon}} \right) \frac{5Ry}{36hc} \\ H\alpha - D\alpha &= \left(\frac{m_e + m_{nucleon}}{m_{nucleon}} - \frac{m_e + 2m_{nucleon}}{2m_{nucleon}} \right) \frac{36hc}{5Ry} \\ &= \left(\frac{m_e}{2m_{nucleon}} \right) \frac{36hc}{5Ry}\end{aligned}$$

Tenemos :

$$\frac{m_{nucleon}}{m_e} = \left(\frac{36hc}{10Ry(H\alpha - D\alpha)} \right)$$

(11)

VII. MULTIMEDIA

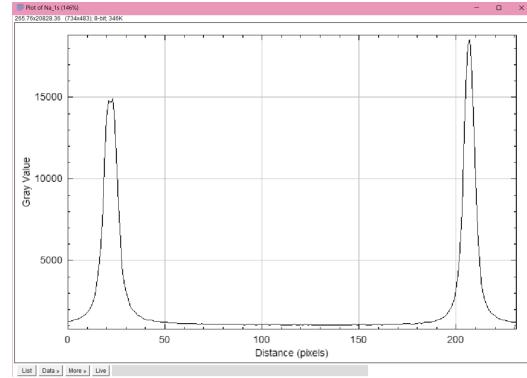


Figura 5. Plot Sodio
Doblete espectro líneas amarillas de Sodio relación pixel x
longitud de onda= 1nm

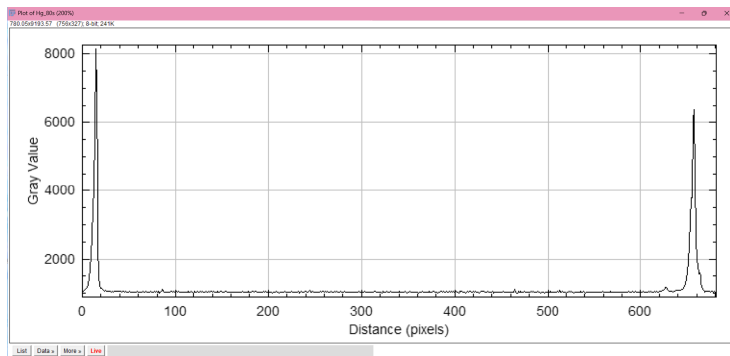


Figura 6. Plot Mercurio
Doblete espectro líneas amarillas de Hg relación pixel x longitud de onda=

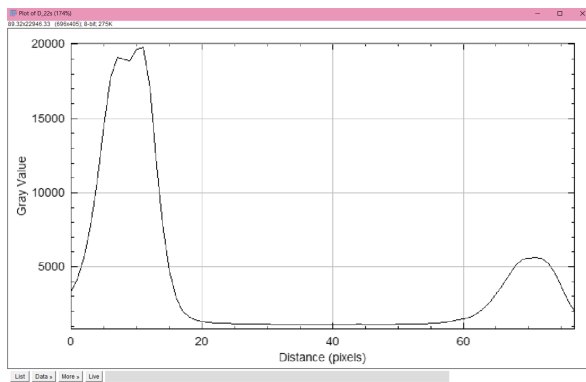


Figura 7. Plot Deuterio
Deuterio + línea espectral desconocida, la cual se analizarás más adelante

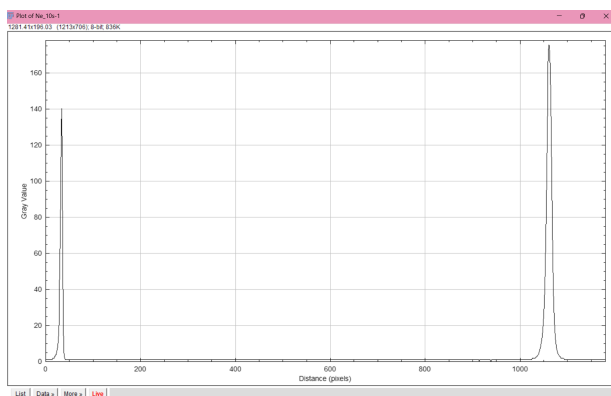


Figura 8. Plot Ne y H
Plot Neón e Hidrógeno respectivamente, a partir de la superposición de los resultados individuales de cada espectro atómico

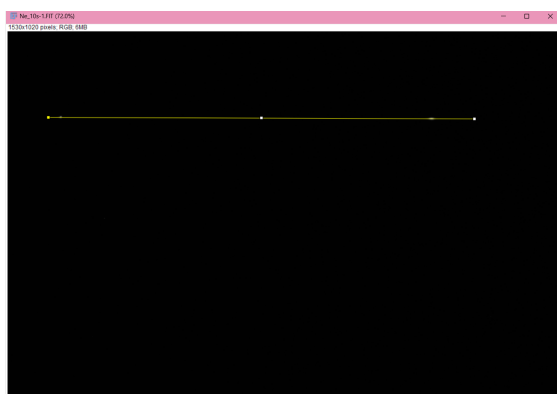


Figura 9. slice Fiji H y Ne

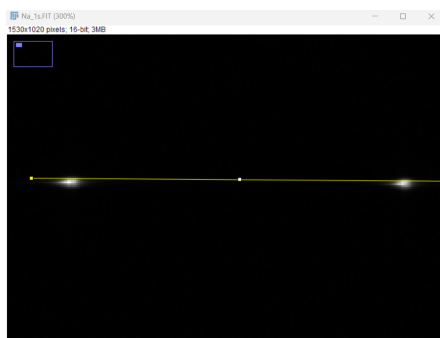


Figura 10. Slice Na

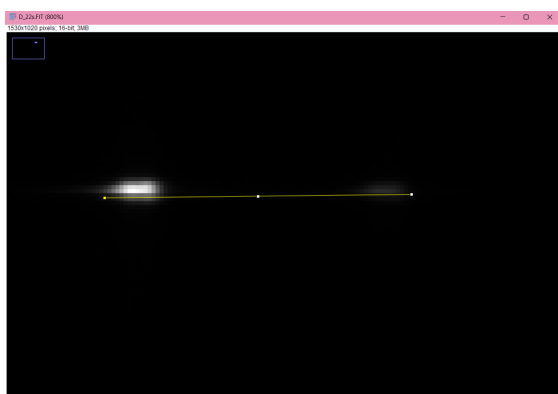


Figura 11. Slice Deuterio



Figura 12. Slice Mercurio