El Problema de los Tres Cuerpos

Jacobo Parodi

Juan Pablo Marulanda

Maryi A. Carvajal

https://github.com/Jumarulanda/ProblemaDeLasTresBolas

Construcción del problema

El problema de los 3 cuerpos consiste en la dinámica de 3 cuerpos que interactúan gravitacionalmente. De donde puede definirse un hamiltoniano crudo de la forma:

$$\mathcal{H} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}|} - \frac{Gm_2m_3}{|\mathbf{r_3} - \mathbf{r_2}|} - \frac{Gm_3m_1}{|\mathbf{r_3} - \mathbf{r_1}|} + \frac{\mathbf{p_1}^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p_2}^2}{2m_2} + \frac{\mathbf{p_3}^2}{2m_3}.$$

Sin, embargo, veremos que el sistema coordenado usual no es el adecuado para resolver el problema. La primera propuesta es determinar unas coordenadas generalizadas relativas de la siguiente forma:

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$$

Construcción del Problema

La forma en que deben construirse los momentos canónicos es de la siguiente forma. En este caso los momentos **k** son los que están asociados a los cada una de los cuerpos, mientras que los momentos **p** son los momentos generalizados:

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$$

$$m_j m_k \dot{\mathbf{q}}_i = m_k(m_j \dot{\mathbf{r}}_j) - m_j(m_k \dot{\mathbf{r}}_k)$$

$$\mu_i \dot{\mathbf{q}}_i = \frac{\mu_i}{m_j}\mathbf{k}_j - \frac{\mu_i}{m_k}\mathbf{k}_k = \mathbf{p}_i$$

Ahora bien, las masas reducidas deben definirse de la siguiente forma para conservar la simetría de las ecuaciones:

$$\mu_i = \frac{m_j m_k}{m_i + m_j + m_k}$$

Hamiltoniano y Ecuaciones Diferenciales

Con las nuevas transformaciones el hamiltoniano queda simplemente como:

$$\mathcal{H}(p,q) = \sum_{i=1}^{3} \left\{ -G\mu_i \frac{M}{q_i} + \frac{1}{2\mu_i} p_i^2 \right\}$$

De donde pueden deducirse las ecuaciones de movimiento de Hamilton con facilidad:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \mu_i F_i(\mathbf{q}) \qquad F_i(\mathbf{q}) = G\left(M\frac{\mathbf{q}_i}{q_i^3} + m_i \mathbf{G}(\mathbf{q}) \right)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{1}{\mu_i} p_i \qquad G(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{q}_1}{q_1^3} + \frac{\mathbf{q}_2}{q_2^3} + \frac{\mathbf{q}_3}{q_3^3}$$

Centro de Masa y Ecuaciones de Transformación Inversa

La matriz que definen la transformación entre las coordenadas **r** y las **q** no es inversible, de modo que deben recuperarse por medio de la información del centro de masa, éste debe moverse a una velocidad constante. Se elige el sistema de referencia donde éste esté quieto donde:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} m_3 & m_2 & M \\ -m_3 & -(m_3 + m_1) & M \\ m_1 + m_2 & m_2 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{r}_{cm} \end{pmatrix}$$

Y derivando, se halla para momentos:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{k}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{\mu_1}{\mu_3} & -(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}) \\ 1 + \frac{\mu_1}{\mu_3} & \frac{\mu_1}{\mu_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{pmatrix}$$

Transformaciones Simplécticas

A cada cuerpo del sistema se le asocian coordenadas (p_i, q_i).

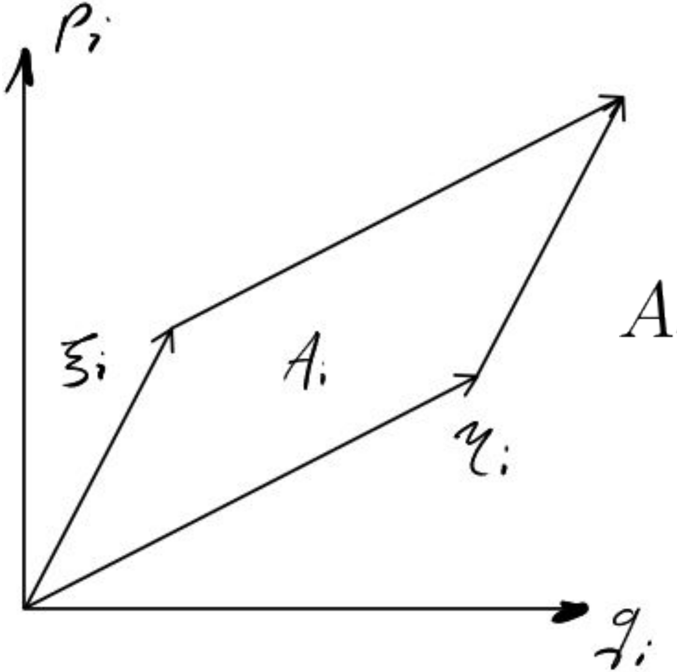
El espacio en el que se trabaja es de dimensión $\mathbb{R}^{2d}$.

Sean dos vectores en dicho espacio, ξ y η, dados como

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^d \\ \dot{\xi}^d \end{pmatrix}, \qquad \eta = \begin{pmatrix} \eta^d \\ \dot{\eta}^d \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad \xi^d, \dot{\xi}^d, \eta^d, \dot{\eta}^d \in \mathbb{R}^d$$

Transformaciones Simplécticas

Tomando la proyección de los vectores en el i-ésimo subespacio (p_i, q_i)



$$A_i = \det\left([\xi_i \; \eta_i]\right) = \xi_i \, \dot{\eta}_i - \eta_i \, \dot{\xi}_i$$

Transformaciones Simplécticas

Sumando todas las proyecciones en todos los subespacios (p_i, q_i) , puede definirse un mapa bilineal $\omega : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$ definido como

$$\omega(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{d} \det\left([\xi_i,\ \eta_i]\right) = \sum_{i=1}^{d} A_i$$

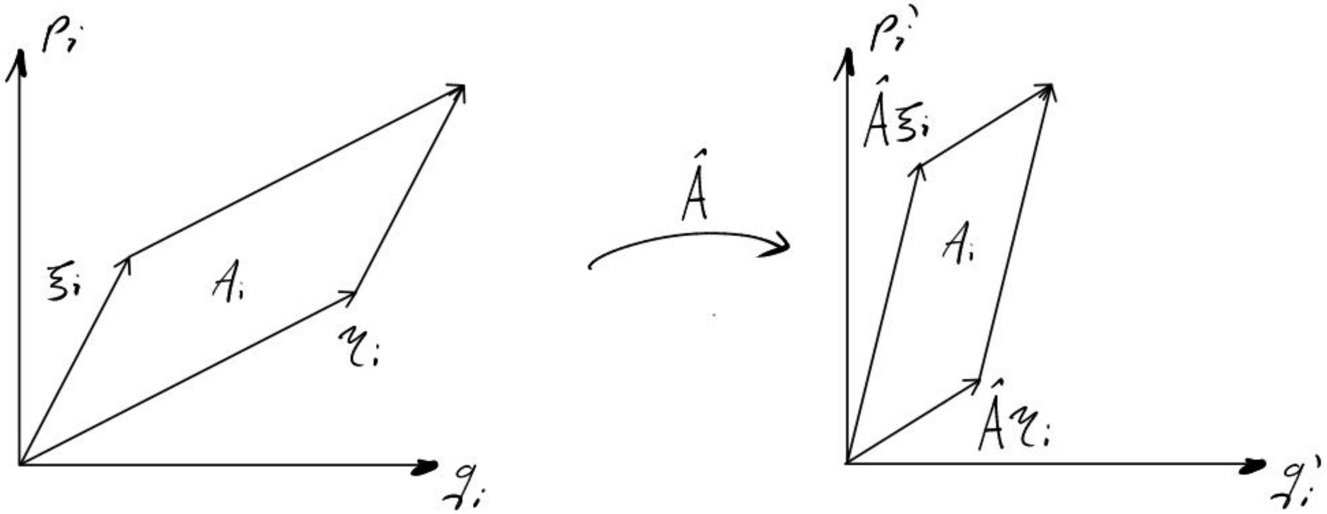
O, análogamente

$$\omega(\xi, \eta) = \xi^T \mathbf{J} \eta \text{ , con } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_d \\ -\mathbb{I}_d & 0 \end{pmatrix}$$

Transformaciones Simplécticas

Sea una transformación lineal $A : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^{2d}$, este mapa se dice simpléctico si cumple que la sumatoria de las áreas proyectadas se conserva, esto es

$$\omega\left(A\xi, A\eta\right) = \omega\left(\xi, \eta\right)$$



¿Por qué un integrador simpléctico?

- Preserva el área en el espacio de fase.
- El error acumulado entre variables incrementa linealmente[1].
- Un integrador simpléctico puede integrar órbitas con gran excentricidad sin necesidad de cambiar el tamaño del paso[1].

[1]Kinoshita, H., Yoshida, H. & Nakai, H. (1990). Sympletic integrators and their application to dynamical astronomy.

Verlet de velocidades

Es una modificación del método de Euler. Teniendo una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$\ddot{x} = F(x)$$

Notar que no hay dependencia en la forma funcional sobre la primera derivada

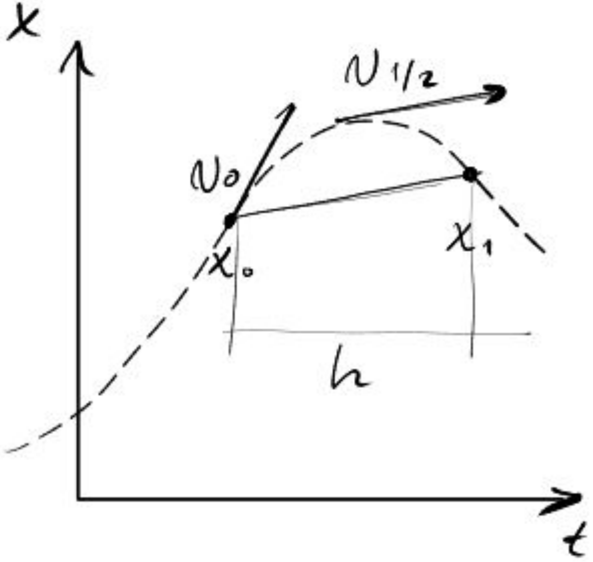
Esta se descompone en un sistema de dos ecuaciones acopladas, pero sólo de primer orden

$$\dot{x} = v$$
$$\dot{v} = F(x)$$

Verlet de velocidades

Evolución de un paso temporal en Euler: $x_{n+1} = x_n + h\, v_n$

Evolución de un paso temporal en el Verlet de Velocidades: $x_{n+1} = x_n + h\, v_{n+1/2}$



Verlet de velocidades

Para solucionar el sistema, debe calcularse:

- La velocidad en el paso medio siguiente (de aquí el leapfrog). Esto puede hacerse con un Euler a medio paso

$$v_{n+1/2} = v_n + \frac{h}{2}F(x_n)$$

- Se calcula el siguiente valor en las posiciones

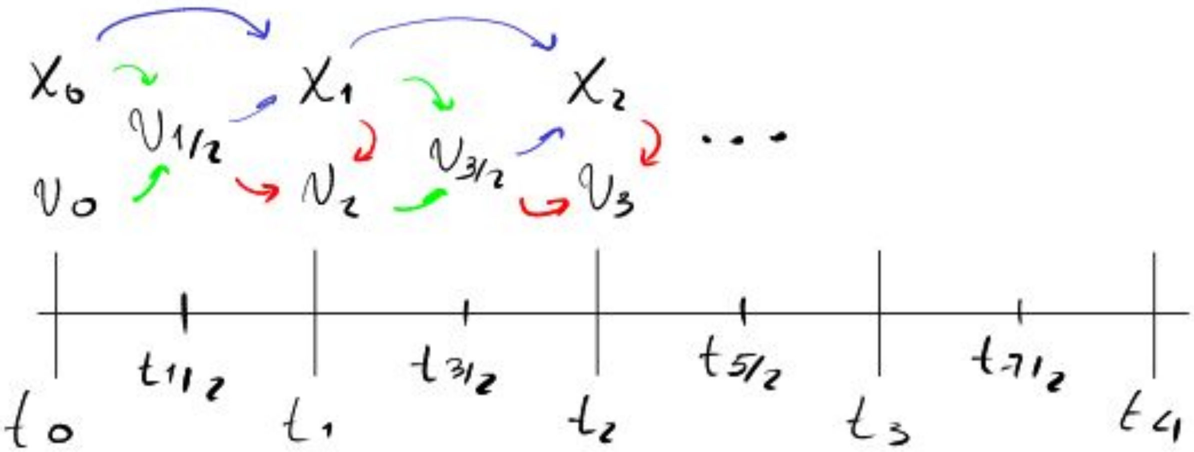
$$x_{n+1} = x_n + hv_{n+1/2}$$

- Se calcula el siguiente valor entero en las velocidades, nuevamente con un Euler a medio paso

$$v_{n+1} = v_{n+1/2} + \frac{h}{2}F(x_{n+1})$$

Verlet de velocidades

SALTORRANA!



Verlet de velocidades

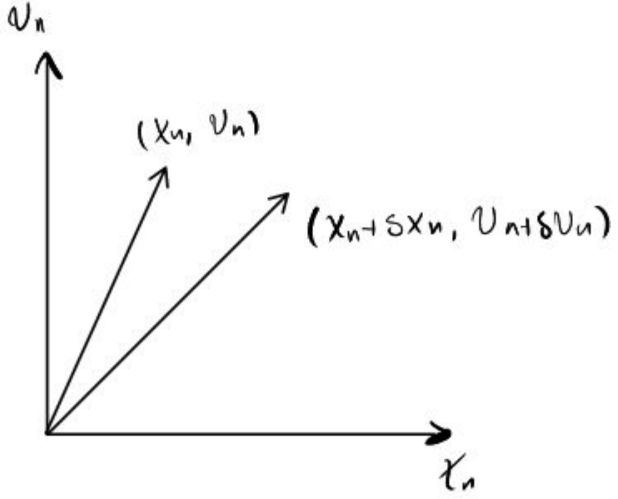
¿Por qué es simpléctico?

$$\begin{pmatrix} \delta x_{n+1} \\ \delta v_{n+1} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta v_n \end{pmatrix}$$

Consecuencia de la conservación de las áreas

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{h}{2} F'(x_{n+1}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{h}{2} F'(x_n) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\tilde{\mathbf{J}}) = 1$$



Runge Kutta 4 Simpléctico y Explícito

Se asume un hamiltoniano cuya forma es:

$$H(q,p) = K(p) + U(q)$$

Donde q y p son las coordenadas canónicas. Con esto se obtiene la forma general para integrador de Runge Kutta 4, con h siendo el tamaño del paso:

$$\begin{aligned}
q_1 &= q_0 + c_1 h \frac{\partial K}{\partial p}(p_0), \quad p_1 = p_0 - d_1 h \frac{\partial U}{\partial q}(q_0), \\
q_2 &= q_1 + c_2 h \frac{\partial K}{\partial p}(p_1), \quad p_2 = p_1 - d_2 h \frac{\partial U}{\partial q}(q_1), \\
q_3 &= q_2 + c_3 h \frac{\partial K}{\partial p}(p_2), \quad p_3 = p_2 - d_3 h \frac{\partial U}{\partial q}(q_2), \\
q_4 &= q_3 + c_4 h \frac{\partial K}{\partial p}(p_3), \quad p_4 = p_3 - d_4 h \frac{\partial U}{\partial q}(q_3),
\end{aligned}$$

Se puede demostrar que es una transformación simpléctica así:

$$
\begin{aligned}
\{q_1, p_1\} &= \frac{\partial q_1}{\partial q_0}\frac{\partial p_1}{\partial p_0} - \frac{\partial q_1}{\partial p_0}\frac{\partial p_1}{\partial q_0} \\
&= 1\left(1 - d_1 h \frac{\partial^2 U}{\partial q_0^2} c_1 h \frac{\partial^2 k}{\partial p_0^2}\right) + d_1 h \frac{\partial^2 U}{\partial q_0^2} c_1 h \frac{\partial^2 k}{\partial p_0^2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Este mismo análisis se puede ir haciendo progresivamente para demostrar que $q_{\square+1}$ y $p_{\square+1}$ son simplecticos.

Para encontrar los coeficientes debemos imponer ciertas condiciones:

- ❏ La truncación local del error es del orden h^5.
- ❏ Reversibilidad de la solución numérica.

Con las que se encuentra que:

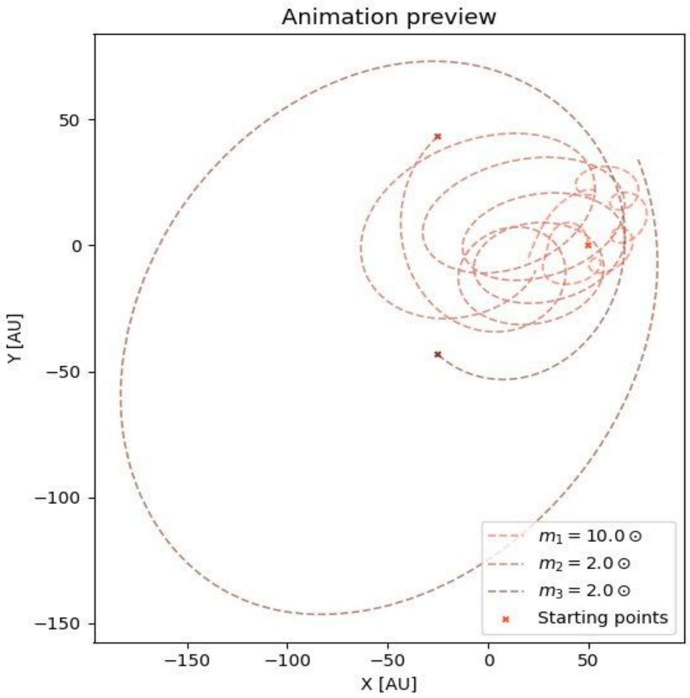
$$c_1 = c_4 = \frac{1}{2(2-\beta)} \qquad d_1 = d_3 = \frac{1}{(2-\beta)} \qquad d_4 = 0$$

$$c_2 = c_3 = \frac{(1-\beta)}{2(2-\beta)} \qquad d_2 = -\frac{\beta}{(2-\beta)}$$

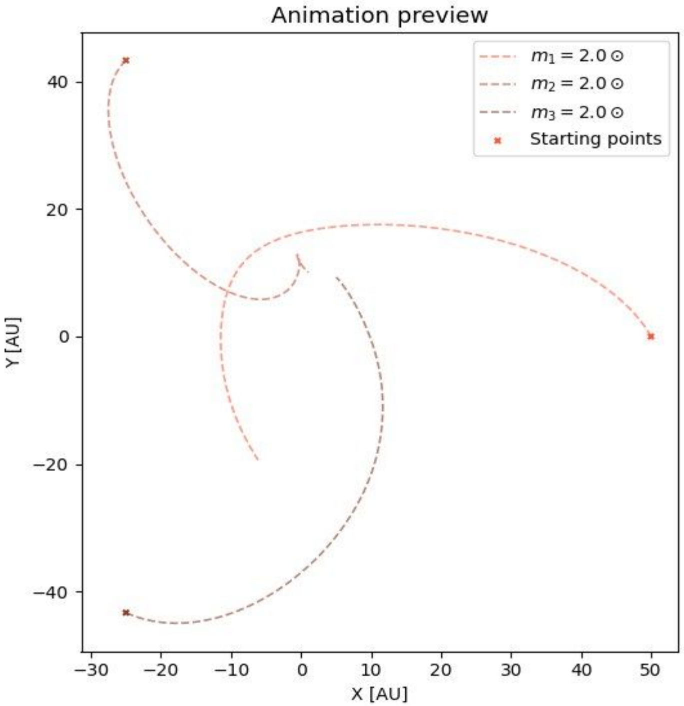
Siendo

$$\beta = 2^{\frac{1}{3}}$$

Resultados

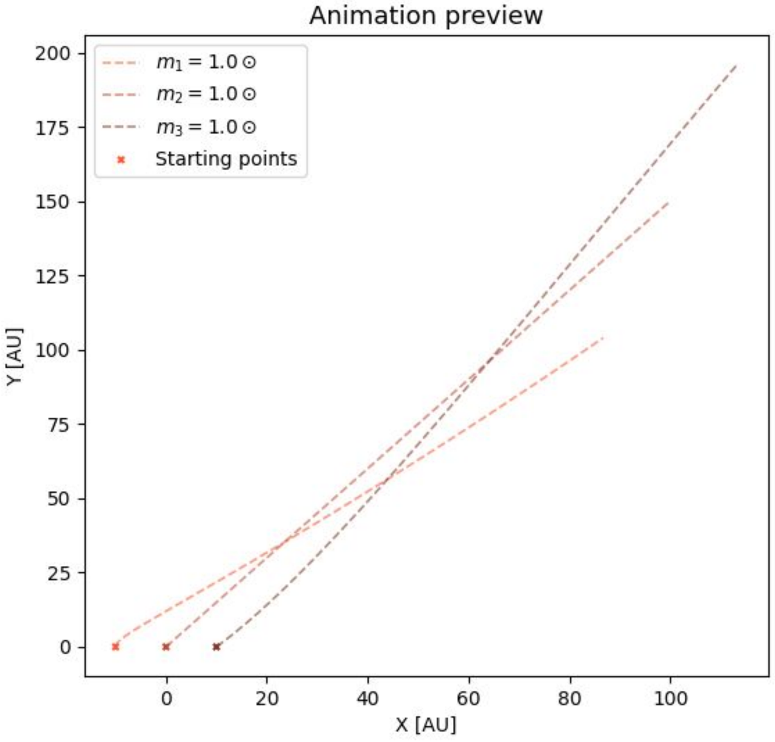


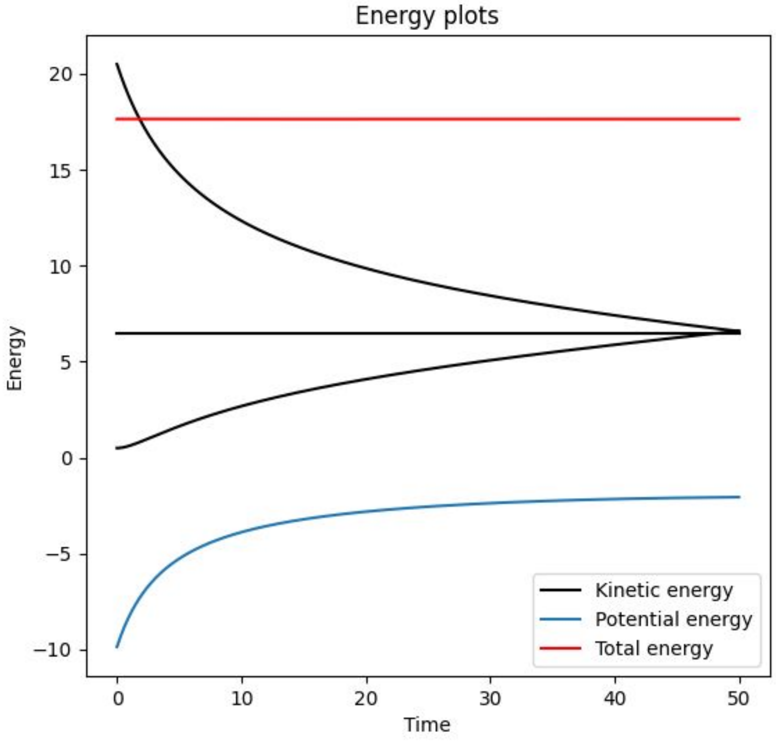
Animation preview
50
0
−50
−100
−150
Y [AU]
−150
−100
−50
0
50
X [AU]
$m_1 = 10.0 \odot$
$m_2 = 2.0 \odot$
$m_3 = 2.0 \odot$
Starting points



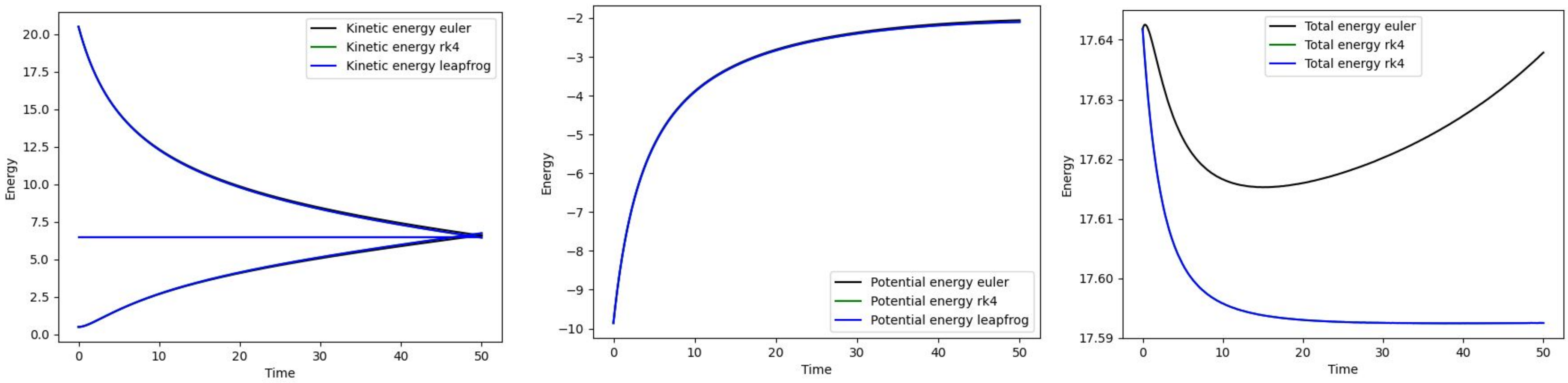
Animation preview
40
20
0
−20
−40
Y [AU]
−30
−20
−10
0
10
20
30
40
50
X [AU]
$m_1 = 2.0 \odot$
$m_2 = 2.0 \odot$
$m_3 = 2.0 \odot$
Starting points

Partículas que se escapan

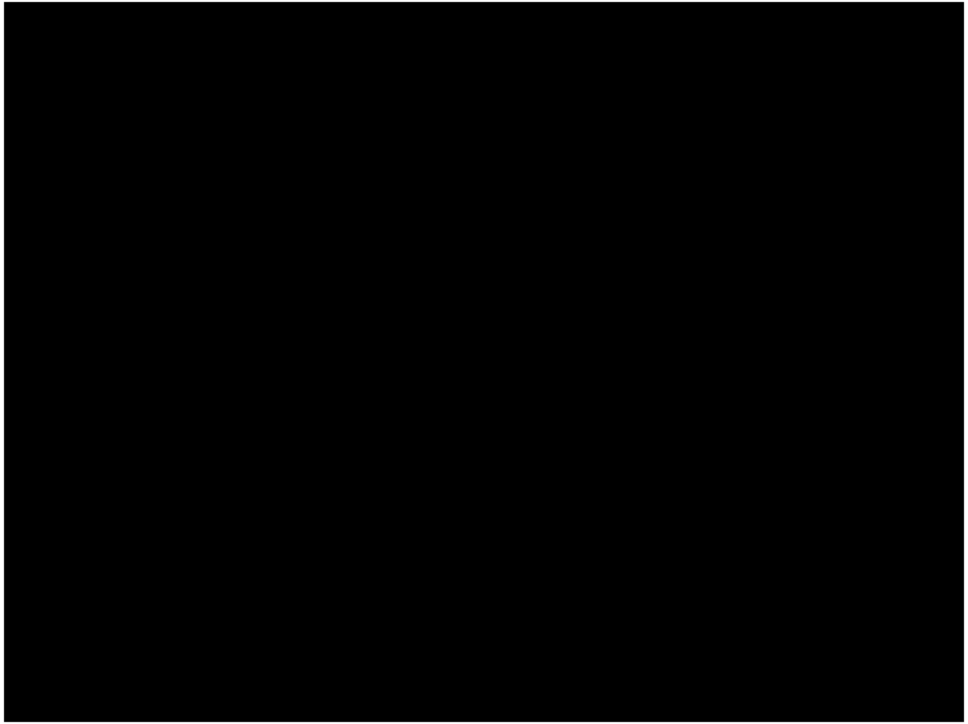


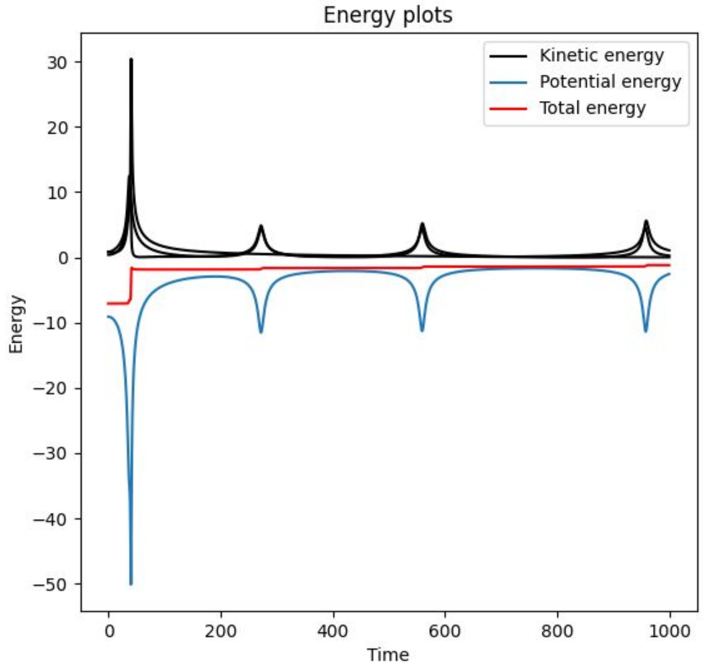


Comparación entre Integradores

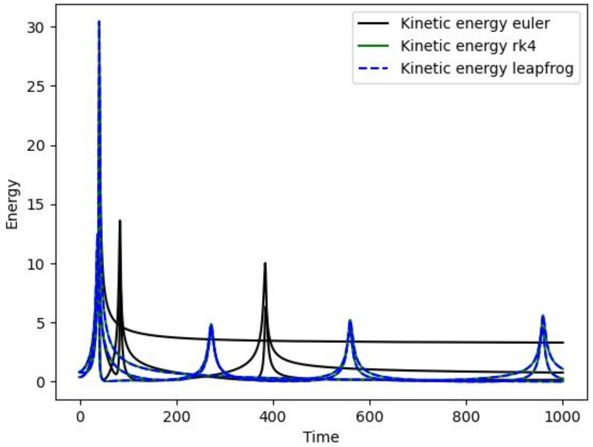


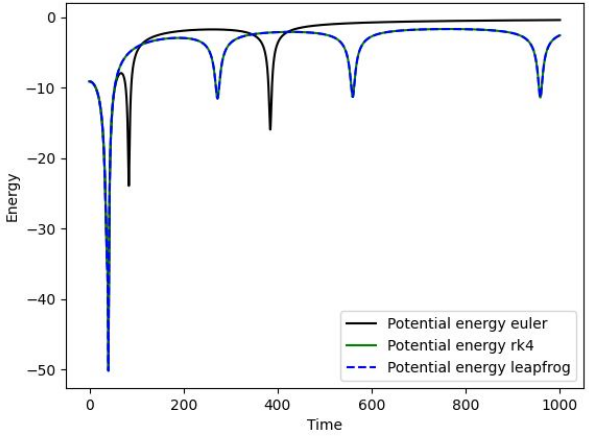
Órbitas Caóticas

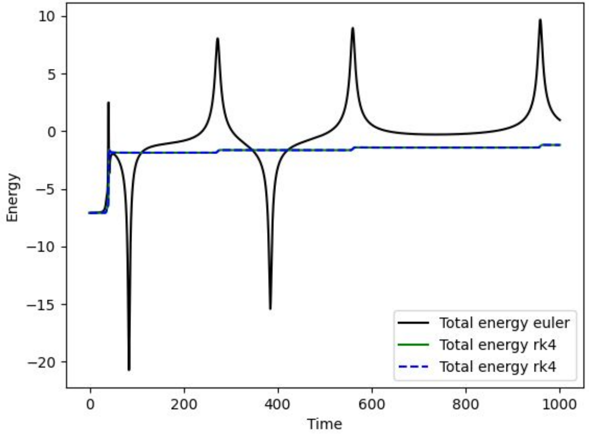




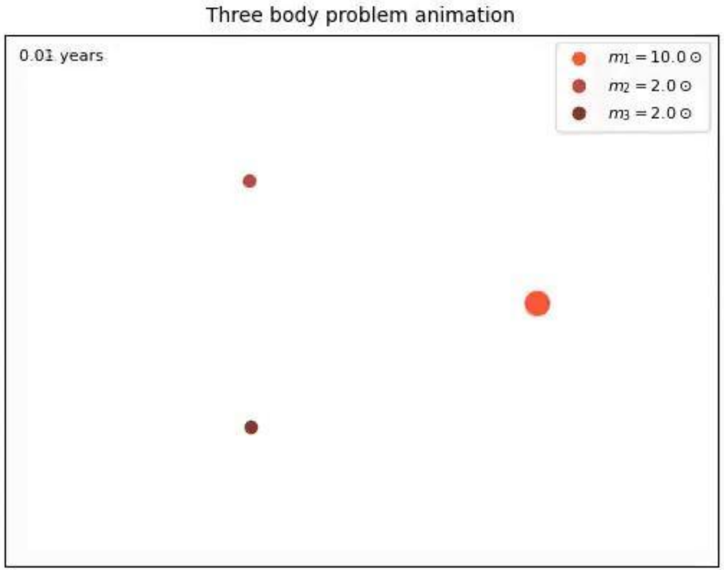
Comparación entre Integradores

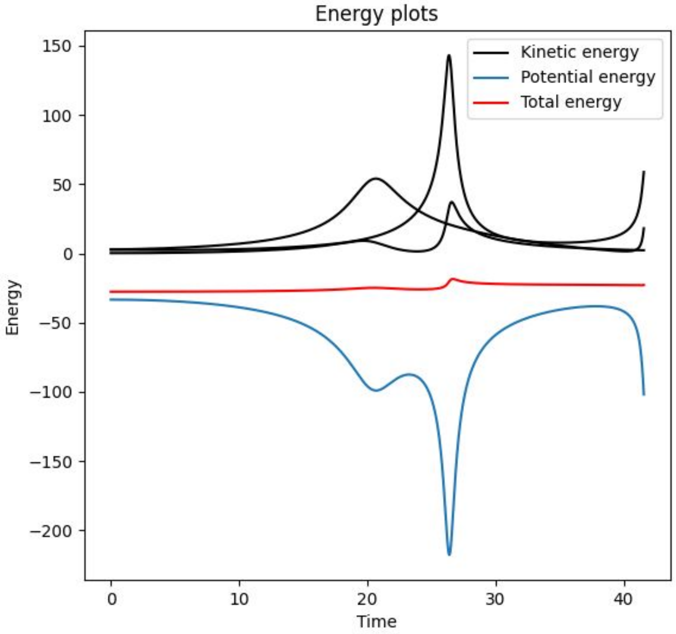




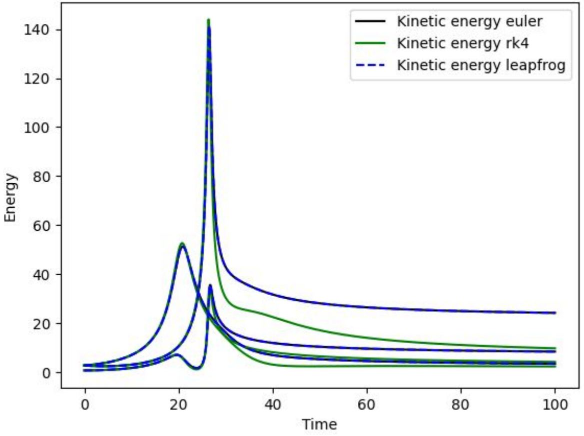


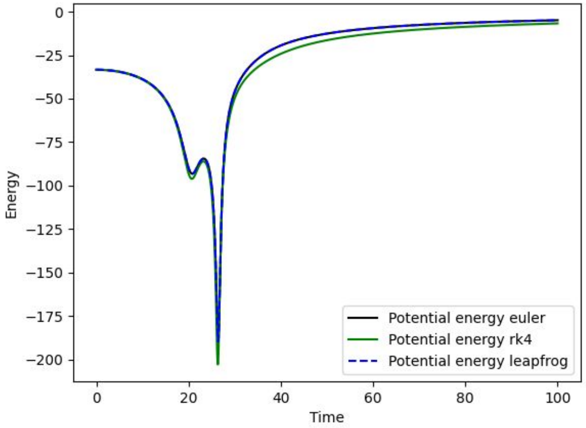
Colisión

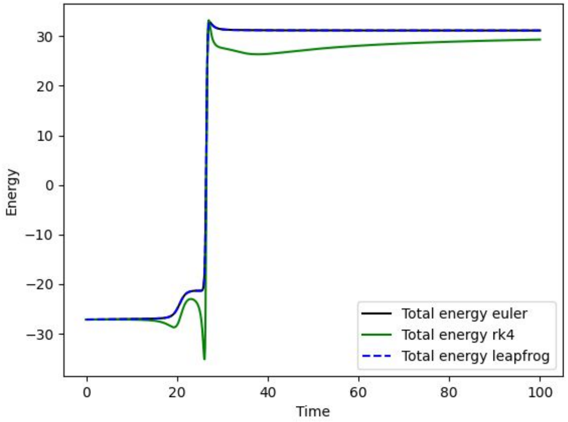

Three body problem animation
0.01 years
$m_1 = 10.0 \odot$
$m_2 = 2.0 \odot$
$m_3 = 2.0 \odot$


Energy plots
Kinetic energy
Potential energy
Total energy
Energy
Time
150
100
50
0
−50
−100
−150
−200
0
10
20
30
40

Comparación entre Integradores







Conclusiones

- Debido a la caoticidad del sistema encontrar un integrador que en cualquier caso conserve la energía aún es un problema abierto en la literatura.
- Los métodos simplécticos muestran una mayor estabilidad en la energía total del sistema.
- Sin importar el orden del método simpléctico, ambos mostraron el mismo comportamiento.