

Coppa Biennio 2020

Squadra di Matematica

26 novembre 2020

Istruzioni generali

- Per ogni problema, indicare come risposta un intero compreso tra 0000 e 9999.
- I problemi non sono in ordine di difficoltà, bensì i problemi più difficili sono indicati con una stellina (*).
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- Se la quantità richiesta è un numero non intero lo si approssimi per difetto.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,41 \quad \sqrt{3} = 1,73 \quad \sqrt{5} = 2,24 \quad \sqrt{7} = 2,65 \quad \pi = 3,14$$

Buon Divertimento!

1) Risiko

Finalmente è l'ora di passare all'azione! Lo zio Sam deve distribuire i suoi carri armati. Vuole fare in modo che ogni schieramento ne abbia più di 100 ma meno di 1000. Inoltre vuole che il numero di carri in ogni schieramento contenga solamente le cifre 1, 2, 3 (eventualmente ripetute, quindi 333 è accettabile), che abbiano tutti un numero diverso di carri e che per ogni numero accettabile ci sia uno schieramento con quel numero di carri. Quanti carri armati ha schierato lo zio Sam?

2) Unità, precisione, perfezione

Lo zio Sam è sul campo di battaglia a bordo del suo fedele carro armato. Sa bene che con un colpo ha solo un decimo di possibilità di buttare giù un carro armato nemico, ma se mira bene, cioè un quinto delle volte, ha ben il 70% di vittoria! Sapendo che ha appena buttato giù un nemico, qual è la probabilità che abbia mirato bene? (Mettete il risultato sotto forma di frazione e date la somma di numeratore e denominatore)

3) Un giro per la capitale (*)

Le strade della capitale possono essere rappresentate come una griglia di 9 colonne e 7 righe. Lo zio Sam si trova a casa sua nell'angolo in basso a destra della griglia e deve andare a trovare suo nipote, che abita nell'angolo in alto a sinistra della mappa. Durante il tragitto deve però passare in municipio, al centro della griglia, per dare gli ordini per la giornata. Quanti sono i percorsi minimi che può fare?

4) L'ora di ieri a quest'ora

In un raro momento di riposo della giornata zio Sam guarda l'orologio e si accorge che sono le 15:33:51. "Ma guarda, se lo leggo al contrario rimane uguale! Sono stato proprio fortunato a vederlo, chissà quante poche volte accade in una giornata.." Già, quante volte?

5) Yankee Doodle

A nipotino Sam piace molto giocare coi soldatini, che possiede in grandi quantità. Ogni giorno cambia il numero di file di soldati per provare diverse strategie: il primo giorno li dispone in due file, il secondo in tre, il terzo in quattro, fino ad arrivare a dieci file. Si accorge che ogni volta tutte le file hanno lo stesso numero di soldatini, a parte l'ultima fila che ne ha uno in meno. Qual è il minimo numero di soldatini che possiede nipotino Sam?

6) Il Pentagono

La base operativa dello zio Sam è, come noto, il Pentagono (che è un edificio a forma di pentagono regolare di lato di circa 20 yards, che sono anche 100 foot). Purtroppo gli animali non possono entrarvi, quindi lo zio Sam è costretto a lasciare la sua capretta legata a un palo, che si trova in corrispondenza di uno dei vertici del Pentagono. La corda a cui è legato l'animale è lunga 10 yards. Qual è l'area in yards² in cui si può muovere la capretta? (Ovviamente non ha poteri magici e non può entrare all'interno del Pentagono)

7) Il Senato

Il Senato comprende 2020 senatori ed è diviso in Repubblicani e Democratici. I Democratici dicono sempre la verità, i Repubblicani mentono sempre per protesta. Tutti i Repubblicani si conoscono fra loro, così come i Democratici (nessuno conosce però se stesso). Ogni senatore annuncia solennemente davanti allo zio Sam che conosce un numero di Repubblicani strettamente maggiore del numero di Democratici che conosce. Quanti sono i senatori Democratici?

8) La stella

Lo zio Sam ha deciso di modernizzare la bandiera degli USA. In particolare è interessato a sostituire le classiche stelle a 5 punte con stelle a 2020 punte. Per fare ciò parte da un poligono regolare di 2020 lati e ne prolunga tutti i lati finché non si incontrano. Per controllare di aver fatto un buon lavoro lo zio Sam vuole calcolare la somma degli angoli interni nelle punte della stella. Potreste aiutarlo e suggerirgli il risultato? (Dare come risultato questa somma divisa per 180)

9) Guerra ovunque

Zio Sam ha un sacco di dichiarazioni di guerra da firmare! Per la noia li divide in varie pile con lo stesso numero di fogli. Sapendo che riesce a fare ciò in massimo 15 modi diversi, qual è il minimo numero di fogli che ha lo zio Sam?

10) Anche i migliori perdono (forse) (*)

Lo zio Sam si vanta di non aver mai subito sconfitte, ma sarà vero? Il suo ex segretario ha rivelato che il numero di sconfitte è pari al numero di coppie di naturali positivi (quindi escluso lo 0!!) x, y che risolvono l'equazione

$$x^2 + 2y^2 = 2xy$$

. Quante sono?

11) Il campo minato

Lo zio Sam ha sparso mine di due diversi tipi sul campo di battaglia: quelle rosse, che servono solo a spaventare gli avversari, e quelle blu, che scoppiano veramente. Dato che è di animo generoso, decide di dare una mano ai nemici: il prodotto del numero di mine blu per quello delle mine rosse e la somma di questi due numeri differiscono di 186. Inoltre dice loro che ha messo almeno 3 mine di ogni tipo. Quante mine ci sono in totale nel campo?

12) La bandiera

Grazie alle sue numerose conquiste, lo zio Sam ha aggiunto diverse stelle (a 2020 punte) alla bandiera degli USA. In particolare, il numero di stelle aggiunte è pari alla cifra delle unità di

$$1^{2020} + 2^{2020} + 3^{2020}$$

. Quante stelle ci sono ora sulla bandiera?

13) Il volo dell'aquila

Dati due numeri reali positivi a , b definiamo

$$x \# y = \frac{xy + 1}{x + y}$$

L'aquila domestica dello zio Sam riesce a rimanere in volo per un numero di ore pari a

$$1 \# (2 \# (3 \# (4 \# (\dots (2019 \# (2020))))))$$

Se spicca il volo alle 18 : 00, a che ora atterrerà? (Dare come prime due cifre del risultato le ore, come ultime due i minuti; ad esempio se atterra alle 22 : 57, dare 2257)

14) Make alienino free again

Lo Zio Sam, giunto all'interno del laboratorio dell'area 51, intende riportarsi a casa il piccolo alieno domestico che aveva portato ad analizzare. Sfortunatamente per lui, l'alieno ha un braccialetto elettronico e lo zio Sam non si ricorda il codice per liberarlo. La cui combinazione è un numero di quattro cifre (con la prima cifra da sinistra diversa da 0). Fortunatamente, conscio della sua cattiva memoria, si ricorda di aver lasciato all'alieno un foglietto con qualche indizio. Sa quindi che il numero richiesto è il più grande tra quelli che soddisfano le seguenti proprietà:

- la prima cifra è il quintuplo della terza
- è dispari
- è divisibile per 3
- la seconda cifra da sinistra è divisibile per 7

Qual è la combinazione segreta?

15) Incontri all'italiana (*)

Lo Zio Sam, tra una battaglia di espansione e l'altra, fa un salto in Italia, dove incontra Gerry Scotti, che lo invita al suo celeberrimo programma "The Wall", in cui una palla (o un piccolo carro armato, nel caso dello Zio Sam) viene fatta cadere lungo un muro pieno di pioli disposti in modo alterno: ogni volta che una palla incontra un piolo, cade a sinistra o a destra (la scelta è casuale), per poi cadere sul piolo nella riga inferiore, e così via, fino all'ultima riga, che porta a diversi cestì: uno per ogni possibile punto di caduta della palla. Lo Zio Sam vuole che la palla cada nel terzo cesto dalla sinistra, ma Gerry, che è un vecchio volpone, gli ha detto che è altamente improbabile. Esattamente, sapendo che ci sono 99 file di pioli (la prima fila ha 1 solo piolo, la seconda 2, etc..), e quindi 100 cestì, e che lo Zio Sam ha solo 2^{100} piccoli carri armati da usare, quanti carri armati si aspetta di vedere Gerry Scotti nel Terzo Cesto?

16) Pulce pazzarella (*)

Nipotino Sam, in visita al museo dell'esercito statunitense, è molto interessato alle pallottole dei fucili dei padri fondatori. Esse possono essere rappresentate come cilindri di altezza 12 inches e raggio $\frac{5}{\pi}$. Proprio in quel momento riesce a vedere con la lente d'ingrandimento una pulce che, partita da un punto sull'estremità della base superiore del cilindro, arriva sulla base minore nel punto diametralmente opposto. Qual è il minimo cammino percorso dalla pulce in inches?