Métodos Numéricos y Optimización - Primer cuatrimestre de 2024

Trabajo Práctico 2 - Modelos de dinámica poblacional

Fecha límite de entrega: Jueves 16 Mayo a las 23:59

Escribir un informe de máximo 15 carillas reportando los resultados de los siguientes experimentos numéricos. Los códigos desarrollados se deben entregar junto al informe.

El objetivo de este TP es analizar ecuaciones diferenciales que se usan para modelar el crecimiento poblacional de un ecosistema sencillo. Entender las motivaciones en el planteo de las ecuaciones y estudiar el comportamiento de las soluciones y su dependencia de las condiciones iniciales.

1. Modelos de crecimiento exponencial y logístico

Consideremos un sistema cerrado con una sola especie y con los recursos que dicha especie necesita. Si el tamaño poblacional de una especie es denominado por el símbolo N, $N(t)$ es el tamaño de la población en el tiempo t. El crecimiento de la población está determinado por una tasa instantánea de crecimiento per cápita r tal que

$$\frac{dN}{dt} = rN \tag{1}$$

Observemos que la tasa de crecimiento es constante en el tiempo e independiente del tamaño de la población

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r \tag{2}$$

Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene un crecimiento exponencial

$$N(t) = N_0 e^{rt} \tag{3}$$

siendo N_0 la condición inicial, es decir la cantidad de individuos a $t = 0$. Esta solución permite un crecimiento ilimitado de la población sin contemplar el agotamiento de recursos y la competencia entre los individuos de la misma especie (*competencia intraespecífica*) para obtener esos recursos. El crecimiento ilimitado es uno de los principales problemas del modelo exponencial.

Para mejorar el modelo se introduce el parámetro K que indica la capacidad de carga del sistema, que se define como el número máximo de individuos que el ambiente puede albergar de forma sostenida. Y además se pide que la tasa de crecimiento per cápita, $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$, dependa del tamaño de la población. La ecuación diferencial se modifica entonces de la siguiente manera:

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{rN^2}{K} = rN\frac{K-N}{K} \tag{4}$$

Esta es la ecuación diferencial logística.

Actividad 1

El objetivo es caracterizar las soluciones de las ecuaciones diferenciales exponenciales y logísticas, y comparar las soluciones numéricas con las exactas.

Comiencen obteniendo la solución logística exacta. Luego utilizando la solución exponencial y logística exacta grafiquen el tamaño poblacional en función del tiempo (N vs t) y la variación poblacional en función del tamaño poblacional ($\frac{dN}{dt}$ vs N). En ambos casos utilicen distintos valores de los parámetros (N_0, r y K) de forma que cubran todos los casos posibles. Tengan en cuenta que $N_0, K \in \mathbb{R} \geq 0$ y $r \in \mathbb{R}$. Comparen los gráficos de ambos modelos y concluyan las características de cada uno. Determinen si la ecuación logística tiene algún punto de equilibrio (donde $\frac{dN}{dt} = 0$). Analicen el significado del valor de K para la dinámica del problema.

Por otro lado, obtengan las soluciones numéricas de ambas ecuaciones por los métodos vistos y comparen con las soluciones exactas. Determine qué método reprodujo mejor la solución analítica. Esto es importante porque luego veremos ecuaciones de las cuales no podremos obtener su solución analítica.

2. Modelo de Competencia de Lotka-Volterra

Consideremos que en el sistema ahora hay dos especies que compiten por los mismos recursos. La ecuación logística ya considera la existencia de competencia intraespecífica, debido a que los recursos se transforman en un limitante a medida que la población se incrementa. Sin embargo, la ecuación logística 4 no es suficiente si tenemos dos especies en el sistema. Es necesario modelar cómo las dos especies se interrelacionan estableciendo una competencia entre ellas por los recursos (*competencia interespecífica*). La forma más sencilla de modelar la competencia interespecífica es mediante un término que reduzca la capacidad de carga y sea proporcional a la cantidad de individuos de cada especie. De esta forma se definen las ecuaciones de competencia de Lotka-Volterra:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \frac{K_1 - N_1 - \alpha_{12} N_2}{K_1} \tag{5}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \frac{K_2 - N_2 - \alpha_{21} N_1}{K_2} \tag{6}$$

Donde para la especie i tenemos que N_i representa su población, K_i su capacidad de carga en el sistema, r_i su tasa intrínseca de crecimiento y α_{ij} es el coeficiente de competencia interespecífica de la especie j sobre la especie i. Y no necesariamente $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.

Actividad 2

Ahora que hay un sistema de ecuaciones encontrar la solución exacta no es trivial.

Con el método numérico elegido de la actividad 1, aproximen las soluciones $N_1(t)$ y $N_2(t)$ utilizando distintos valores de los parámetros ($N_1(t = 0)$, $N_2(t = 0)$, r_1, r_2, K_1, K_2, α_{12}, α_{21}) de forma que cubran todos los casos relevantes.

Para obtener más información de las soluciones es importante estudiar los puntos de equilibrio de cada especie, donde $\frac{dN_1}{dt} = 0$ y $\frac{dN_2}{dt} = 0$. Estos puntos en el grafico de N_2 vs N_1 definen curvas denominadas *isoclinas cero*. Donde se cruzan las isoclinas de cada especie son puntos de equilibrio del sistema, ya que la cantidad de individuos de cada especie permanece constante. Entonces analicen que forma tienen las isoclinas en este sistema de ecuaciones y determinen sus puntos de equilibrio. Verifiquen que dependiendo de los parámetros (K_1, K_2, α_{12}, α_{21}) hay cuatro tipos de gráficos distintos. Para cada tipo de gráfico elijan distintos valores iniciales $N_1(t=0)$ y $N_2(t=0)$ y grafiquen la evolución temporal $N_1(t)$ y $N_2(t)$ o sea las trayectorias. Describan cómo evoluciona el sistema para cada caso dependiendo de las condiciones iniciales. También pueden graficar el campo de vectores para acompañar la explicación.

3. Modelo de Predador-Presa de Lotka-Volterra

Consideremos ahora que hay dos especies que no compiten entre sí por los recursos disponible en el sistema sino que una es la presa (N) y la otra es la predadora (P). Para las presas el número de individuos es N y su tasa de crecimiento r. Para el caso de los predadores el número de individuos es P, la eficiencia de captura α, la eficiencia para convertir presas en nuevos predadores β y la tasa de mortalidad per cápita q. De esta forma se definen las ecuaciones de Predador-Presa de Lotka-Volterra

$$\frac{dN}{dt} = rN - \alpha NP \tag{7}$$

$$\frac{dP}{dt} = \beta NP - qP \tag{8}$$

Estas ecuaciones pueden ser extendidas con la incorporación de competencia intraespecífica de las presas. Definimos así las ecuaciones de Lotka-Volterra extendidas (LVE):

$$\frac{dN}{dt} = rN - \alpha NP - rN^2/K = rN(1 - N/K) - \alpha NP \tag{9}$$

$$\frac{dP}{dt} = \beta NP - qP \tag{10}$$

Actividad 3

Realicen un análisis similar a la actividad 2 para las ecuaciones de Predador-Presa de Lotka-Volterra y para LVE. En cada caso grafiquen $N(t)$, $P(t)$, $\frac{dN}{dt}$ y $\frac{dP}{dt}$ variando los parámetros (r,q, α, β y K). Calculen las isoclinas y grafiquen en el plano P vs N cómo es la dinámica para distintas condiciones iniciales.