

Análisis Numérico de Modelos de Dinámica Poblacional: Crecimiento Exponencial y Logístico, Competencia de Lotka-Volterra y Predador-Presa

Métodos Numéricos y Optimización Trabajo práctico N°2

Valentino Arbelaiz y Alejo Zimmermann

Universidad de San Andrés, Buenos Aires, Argentina

1er Semestre 2024

Resumen

En este informe se presentó un análisis numérico de diversos modelos de dinámica poblacional utilizados para representar el crecimiento y la interacción entre especies en ecosistemas. Se examinaron los modelos de crecimiento exponencial y logístico, comparando sus soluciones analíticas y numéricas, y evaluando el impacto de los parámetros en el comportamiento poblacional. Se abordó el modelo de competencia de Lotka-Volterra, identificando puntos de equilibrio y analizando trayectorias poblacionales bajo diferentes condiciones iniciales y parámetros. Además, se investigó el modelo predador-presa de Lotka-Volterra y su extensión con competencia intraespecífica de presas, explorando las dinámicas resultantes y los puntos de equilibrio en el plano de fase. Se emplearon diversos métodos numéricos como el método de Euler y el método de Runge Kutta de orden cuatro para resolver las ecuaciones diferenciales, comparando los resultados con soluciones analíticas disponibles. Este estudio buscó comprender los fundamentos y el comportamiento de estos modelos.

1. Introducción

El estudio de la dinámica de poblaciones es un área fundamental en ecología y biología, ya que nos permite comprender cómo evolucionan y se relacionan las diferentes especies dentro de un ecosistema. A lo largo de los años, se han desarrollado diversos modelos matemáticos para representar estos procesos, desde los más simples hasta los más complejos.

En este informe, nos centraremos en el análisis numérico de algunos de los modelos más importantes en la dinámica de poblaciones. Comenzaremos con los modelos de crecimiento exponencial y logístico, que describen el crecimiento de una sola especie en un sistema cerrado. Estos modelos son fundamentales para entender los conceptos básicos de la dinámica de poblaciones y nos permitirán explorar las diferencias entre un crecimiento ilimitado y uno limitado por la disponibilidad de recursos.

Luego, abordaremos el modelo de competencia de Lotka-Volterra, que incorpora la interacción entre dos especies que compiten por los mismos recursos. Este modelo nos ayudará a comprender cómo la competencia intraespecífica e interespecífica afecta la dinámica de las poblaciones y cómo se determinan los puntos de equilibrio en el sistema.

Finalmente, estudiaremos el modelo depredador-presa de Lotka-Volterra y su extensión, que considera la relación entre una especie depredadora y su presa, así como la competencia intraespecífica de las presas. Estos modelos son fundamentales para entender las interacciones tróficas y los ciclos de oscilación en las poblaciones de depredadores y presas.

A lo largo del informe, utilizaremos métodos

numéricos para resolver las ecuaciones diferenciales involucradas en estos modelos y compararemos los resultados obtenidos con las soluciones analíticas cuando estén disponibles. Esto nos permitirá evaluar la precisión y eficiencia de los métodos numéricos en la resolución de estos problemas.

2. Métodos de resolución de ecuaciones diferenciales

2.1. Metodo de Euler

El método de Euler es uno de los métodos más simples para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE).

Sea una ODE bien condicionada:

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(t, y), a \leq t \leq b \quad (1)$$

El objetivo del método de Euler es aproximar la solución de la ODE en un intervalo $[a, b]$ dividiéndolo en N subintervalos de igual tamaño $h = \frac{b-a}{N}$. Así quedan $N + 1$ puntos equiespaciados. Se asume que la solución $y(t)$ tiene su derivada segunda continua en $[a, b]$.

El tiempo en el paso i se denota como:

$$t_i = a + i \cdot h, \forall i = 1, \dots, N$$

Este método se basa en construir una sucesión discreta de valores w que aproximan la solución $y(t)$ entonces $w_i \approx y(t_i), \forall i = 1, \dots, N$ donde $w_0 = y(a)$.

La sucesión se construye de la siguiente manera utilizando el método de Euler explícito:

$$w_{i+1} = w_i + h \cdot f(t_i, w_i) \quad (2)$$

2.2. Metodo de Runge Kutta

El método de Runge-Kutta es otro método numérico utilizado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Se basa en la expansión de la solución en una serie de Taylor. El método de

Runge-Kutta de cuarto orden es uno de los más utilizados y se define de la siguiente manera:

Sea una ODE bien condicionada:

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b \quad (3)$$

El objetivo del método de Runge-Kutta es aproximar la solución de la ODE en un intervalo $[a, b]$ dividiéndolo en N subintervalos de igual tamaño $h = \frac{b-a}{N}$. Así quedan $N+1$ puntos equiespaciados. Se asume que la solución $y(t)$ tiene su derivada segunda continua en $[a, b]$.

El tiempo en el paso i se denota como:

$$t_i = a + i \cdot h, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (4)$$

El método de Runge-Kutta de cuarto orden se define mediante las siguientes ecuaciones:

$$k_1 = h \cdot f(t_i, w_i) \quad (5)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}\right) \quad (6)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_2}{2}\right) \quad (7)$$

$$k_4 = h \cdot f(t_i + h, w_i + k_3) \quad (8)$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (9)$$

donde w_i es la aproximación de la solución en el paso i .

3. Implementación

4. Resultados y análisis

5. Conclusión