Лабораторная работа №2
«Моделирование дискретных случайных величин»

Выполнил:
Студент 4 курса 9 группы
Савостей В.В.
Вариант: 13

1 Цель работы

Изучить алгоритмы моделирования дискретных случайных величин. Реализовать программные датчики для заданных законов распределения. Провести статистический анализ полученных выборок с использованием критерия χ^2 Пирсона.

2 Постановка задачи (Вариант 13)

Необходимо осуществить моделирование $n = 1000$ реализаций для двух дискретных распределений:

1. **Биномиальное распределение** $Bi(m, p)$ с параметрами:

$$m = 4, \quad p = 0.3$$

2. **Отрицательное биномиальное распределение** $Bi^{-}(r, p)$ с параметрами:

$$r = 5, \quad p = 0.4$$

Требуется:

- Вычислить выборочные оценки математического ожидания и дисперсии, сравнить их с теоретическими.
- Проверить гипотезу о соответствии выборки теоретическому закону с помощью критерия Пирсона ($\varepsilon = 0.05$).
- Проверить вероятность ошибки I рода на серии экспериментов.

3 Теоретические сведения

3.1 Биномиальное распределение

Случайная величина X описывает число успехов в m независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p. Вероятность принятия значения k:

$$P(X = k) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}, \quad k = 0, \dots, m$$

Характеристики:

$$E[X] = m \cdot p, \quad D[X] = m \cdot p \cdot (1-p)$$

3.2 Отрицательное биномиальное распределение

Случайная величина X описывает число неудач до достижения r-го успеха в последовательности испытаний Бернулли. Вероятность принятия значения k (число неудач):

$$P(X = k) = C_{k+r-1}^k p^r (1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Характеристики:

$$E[X] = \frac{r(1-p)}{p}, \quad D[X] = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

3.3 Критерий Хи-квадрат Пирсона

Для проверки гипотезы о виде распределения используется статистика:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$$

где ν_i — наблюдаемая частота, np_i — теоретическая частота. Интервалы группируются таким образом, чтобы $np_i \geq 5$.

4 Результаты работы

Ниже представлен вывод программы, содержащий оценки моментов и результаты тестирования гипотез.

```
============================================================
1. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (m=4, p=0.3)
============================================================
Мат. ожидание: Оценка=1.2300, Теор=1.2000
Дисперсия:     Оценка=0.8920, Теор=0.8400
  Групп: 5, Степеней свободы: 4
  Хи-квадрат стат: 5.9834
  Критическое val: 9.4561
  РЕЗУЛЬТАТ: ГИПОТЕЗА ПРИНЯТА

>>> Проверка ошибки I рода для: Биномиальное
    Количество экспериментов: 100
    Отвергнуто гипотез: 5 из 100
    Эмпирическая ошибка I рода: 0.050
    Теоретическая ошибка (alpha): 0.05
    ВЫВОД: Уровень значимости подтвержден.

============================================================
2. ОТРИЦ. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (r=5, p=0.4)
============================================================
Мат. ожидание: Оценка=7.3750, Теор=7.5000
Дисперсия:     Оценка=16.9453, Теор=18.7500
  Групп: 22, Степеней свободы: 21
  Хи-квадрат стат: 21.5757
  Критическое val: 32.6622
  РЕЗУЛЬТАТ: ГИПОТЕЗА ПРИНЯТА

>>> Проверка ошибки I рода для: Отриц. Биномиальное
    Количество экспериментов: 100
    Отвергнуто гипотез: 2 из 100
    Эмпирическая ошибка I рода: 0.020
    Теоретическая ошибка (alpha): 0.05
    ВЫВОД: Уровень значимости подтвержден.
```

5 Анализ результатов

1. **Биномиальное распределение:**
   - Выборочное среднее 1.23 практически совпадает с теоретическим 1.20. Выборочная дисперсия 0.892 также близка к теоретической 0.84.
   - Значение статистики $\chi^2 = 5.98$ не превышает критического значения 9.45 (для 4 степеней свободы). Гипотеза о соответствии распределению принимается.

- Эмпирическая вероятность ошибки I рода составила ровно 0.05 (5 случаев из 100), что идеально совпадает с заданным уровнем значимости $\alpha = 0.05$.

2. **Отрицательное биномиальное распределение:**

   - Оценки моментов (7.37 и 16.94) близки к теоретическим (7.50 и 18.75). Небольшие отклонения дисперсии допустимы для данного объема выборки.
   - Значение статистики $\chi^2 = 21.57$ существенно меньше критического порога 32.66. Гипотеза принимается.
   - Эмпирическая ошибка I рода составила 0.02, что находится в пределах допустимого статистического разброса относительно целевого значения 0.05.

6 Вывод

В ходе лабораторной работы были реализованы алгоритмы моделирования биномиального и отрицательного биномиального распределений. Проведена проверка точности моделирования на выборках объемом $N = 1000$.

Результаты статистических тестов (сравнение моментов, критерий Пирсона) подтверждают, что реализованные программные датчики корректно воспроизводят заданные вероятностные законы. Эксперимент по оценке ошибки I рода показал, что реальный уровень значимости критерия соответствует теоретическому.