Лабораторная работа №4
«Метод Монте-Карло. Оценка точности вычислений»

Выполнил:
Студент 4 курса 9 группы
Савостей В.В.
Вариант: 13

1 Цель работы

Реализовать метод Монте-Карло для вычисления определенных интегралов. Провести экспериментальную оценку точности метода с использованием выборочной дисперсии (вычисление вероятной ошибки). Исследовать зависимость точности от числа итераций N.

2 Постановка задачи (Вариант 13)

Необходимо вычислить два интеграла:

1. **Однократный интеграл:**

$$I_1 = \int_{88}^{99} \ln(x)\sin(x)\,dx$$

2. **Двойной интеграл:**

$$I_2 = \iint_D \frac{x^3 + 3xy}{e^{-y}}\,dxdy, \quad D : \{(x, y) \mid |x| + |y| < 1\}$$

3 Теоретические сведения

Интеграл I рассматривается как математическое ожидание случайной величины ξ. Оценка интеграла вычисляется как выборочное среднее:

$$\bar{a}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

Точность вычислений характеризуется **вероятной ошибкой** τ_n. Для её оценки используется формула, связывающая ошибку с выборочной дисперсией S^2:

$$\tau_n \approx 0.6745\sqrt{\frac{S^2}{n}},$$

где $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(\xi_i - \bar{a}_n)^2$ — несмещенная оценка дисперсии.

Коэффициент 0.6745 соответствует квантилю нормального распределения для вероятности $P \approx 0.5$ (т.е. с вероятностью 50% истинная ошибка не превышает τ_n).

4 Результаты работы

Ниже представлены результаты моделирования. Для каждого N вычислялось значение интеграла, вероятная ошибка ($Prob.Err$) и реальная ошибка ($Real\ Err$, отклонение от эталона).

```
=== ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4 (Вариант 13) ===

Точное значение I1: 4.281181
Точное значение I2: 0.000000
---------------------------------------------------------------------------
N          | I1 (MC)      | Prob.Err1    | Real Err1    | I2 (MC)      | Prob.Err2
---------------------------------------------------------------------------
100        | -3.10478     | 2.36613      | 7.38596      | -0.00866     | 0.09386
500        | 5.74901      | 1.06225      | 1.46783      | 0.05277      | 0.03952
1000       | 4.09691      | 0.75569      | 0.18427      | 0.01759      | 0.02541
5000       | 4.32632      | 0.33229      | 0.04514      | -0.06317     | 0.01258
10000      | 3.75507      | 0.23792      | 0.52611      | -0.00589     | 0.00899
50000      | 4.42087      | 0.10594      | 0.13969      | -0.00055     | 0.00396
100000     | 4.13581      | 0.07507      | 0.14537      | 0.00641      | 0.00280
200000     | 4.20226      | 0.05304      | 0.07892      | 0.00331      | 0.00198

Пояснение:
Prob.Err (Вероятная ошибка) рассчитана по формуле из методички:
0.6745 * sqrt(D/n).
```

4.1 Графики зависимости точности

На графиках представлена зависимость вероятной ошибки (τ_n) от количества итераций N.

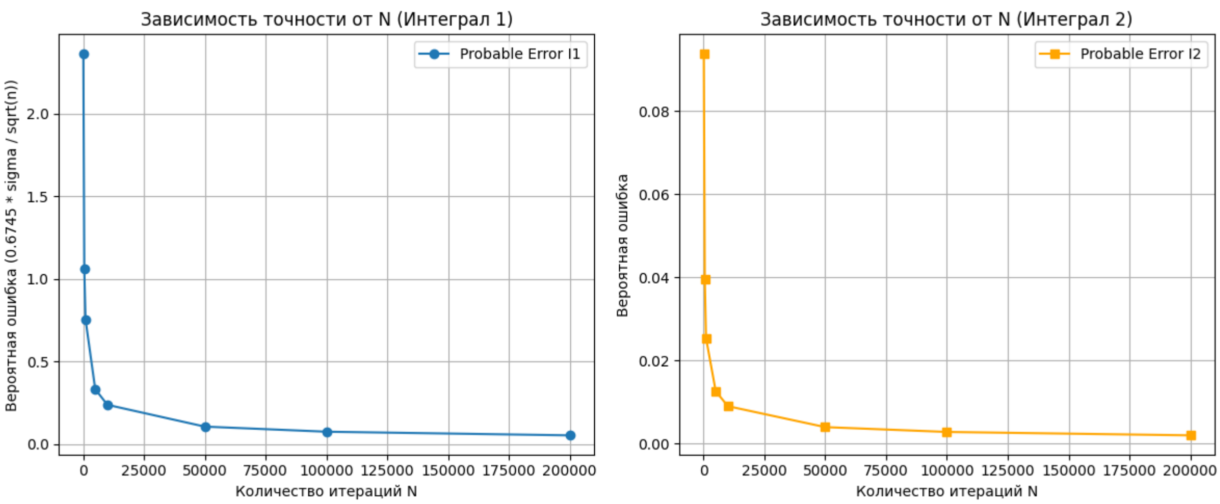

Рис. 1: Зависимость вероятной ошибки от объема выборки N

5 Анализ результатов

1. **Интеграл I_1:**

   - При малых N (100) наблюдается сильная неустойчивость оценки (получено отрицательное значение -3.10 при точном 4.28). Это связано с высокой дисперсией подынтегральной функции $\ln(x)\sin(x)$ на заданном отрезке.
   - С ростом N вероятная ошибка ($Prob.Err$) монотонно убывает примерно пропорционально $1/\sqrt{N}$ (с 2.36 до 0.05), что соответствует теории.
   - Реальная ошибка ($Real\ Err$) в целом коррелирует с вероятной, хотя имеет стохастический характер (например, при $N = 10000$ реальная ошибка случайно возросла, хотя вероятная уменьшилась).

2. **Интеграл I_2:**

   - Теоретическое значение 0 подтверждается результатами эксперимента. Значения колеблются около нуля.
   - Вероятная ошибка для I_2 значительно меньше, чем для I_1 (при тех же N), что говорит о меньшей дисперсии случайной величины в этом случае.
   - При $N = 200\,000$ достигнута высокая точность (вероятная ошибка ≈ 0.002).

6 Вывод

В ходе работы реализован метод Монте-Карло для вычисления интегралов с оценкой точности через выборочную дисперсию.

Экспериментально подтверждено, что вероятная ошибка $\tau_n = 0.6745\sqrt{S^2/n}$ является адекватной мерой точности метода. Точность вычислений возрастает с увеличением числа итераций, однако скорость сходимости невысока ($O(N^{-1/2})$), что требует больших выборок для получения точных результатов.