Лабораторная работа №3
«Моделирование непрерывных случайных величин»

Выполнил:
Студент 4 курса 9 группы
Савостей В.В.
Вариант: 13

1 Цель работы

Изучить методы моделирования непрерывных случайных величин. Реализовать программные датчики для нормального, логнормального распределений и распределения Лапласа. Провести статистический анализ полученных выборок с использованием критериев Пирсона и Колмогорова.

2 Постановка задачи (Вариант 13)

Необходимо осуществить моделирование $n = 1000$ реализаций для трех непрерывных распределений:

1. **Нормальное распределение** $N(m, s^2)$:

$$m = 2, \quad s^2 = 16 \implies \sigma = 4$$

2. **Логнормальное распределение** $LN(m, s^2)$:

$$m = -1, \quad s^2 = 4$$

3. **Распределение Лапласа** $L(a)$:

$$a = 1.5$$

Требуется:

- Вычислить выборочные оценки мат. ожидания и дисперсии.
- Проверить гипотезы о соответствии закону распределения с помощью критериев Пирсона и Колмогорова ($\varepsilon = 0.05$).
- Оценить эмпирическую вероятность ошибки I рода.

3 Теоретические сведения

3.1 Алгоритмы генерации

- **Нормальное распределение:** Использован метод Бокса-Мюллера. Из двух БСВ α_1, α_2 получаются две независимые стандартные нормальные величины Z_0, Z_1:

$$Z_0 = \sqrt{-2\ln\alpha_1}\cos(2\pi\alpha_2), \quad X = m + \sigma Z_0$$

- **Логнормальное распределение:** Моделируется через нормальное. Если $Y \sim N(m, s^2)$, то $X = e^Y \sim LN(m, s^2)$.
- **Распределение Лапласа:** Использован метод обратной функции:

$$X = -\frac{1}{a}\operatorname{sgn}(\alpha - 0.5)\ln(1 - 2|\alpha - 0.5|)$$

3.2 Критерии проверки

- **Критерий Колмогорова:** Статистика $\lambda = \sqrt{n}\sup|F_n(x) - F(x)|$.
- **Критерий Пирсона:** Статистика $\chi^2 = \sum \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$. Интервалы выбираются так, чтобы $np_i \geq 5$.

4 Результаты работы

Ниже представлен вывод программы.

```
=== ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3 (Вариант 13, N=1000) ===

--- Нормальное N(2, 16) ---
M[x]: Теор = 2.0000 | Оценка = 1.9454
D[x]: Теор = 16.0000 | Оценка = 16.6809
[Kolmogorov] Stat=0.5571, Crit=1.3600 -> OK
[Pearson]    Stat=20.8865, Crit=27.5772 -> OK

--- Логнормальное LN(-1, 4) ---
M[x]: Теор = 2.7183 | Оценка = 3.9128
D[x]: Теор = 396.0397 | Оценка = 1515.6662
[Kolmogorov] Stat=0.6113, Crit=1.3600 -> OK
[Pearson]    Stat=3.5394, Crit=3.7468 -> OK

--- Лапласа L(1.5) ---
M[x]: Теор = 0.0000 | Оценка = -0.0054
D[x]: Теор = 0.8889 | Оценка = 0.9413
[Kolmogorov] Stat=0.7610, Crit=1.3600 -> OK
[Pearson]    Stat=23.7467, Crit=23.6732 -> FAIL

>>> Ошибка I рода для: Нормальное
    Колмогоров: отвергнуто 4/100 (Err rate: 0.04)
    Пирсон:     отвергнуто 4/100 (Err rate: 0.04)
    Целевая alpha: 0.05

>>> Ошибка I рода для: Логнормальное
    Колмогоров: отвергнуто 7/100 (Err rate: 0.07)
    Пирсон:     отвергнуто 5/100 (Err rate: 0.05)
    Целевая alpha: 0.05

>>> Ошибка I рода для: Лапласа
    Колмогоров: отвергнуто 4/100 (Err rate: 0.04)
    Пирсон:     отвергнуто 7/100 (Err rate: 0.07)
    Целевая alpha: 0.05
```

5 Анализ результатов

1. **Нормальное распределение:** Оценки моментов близки к теоретическим. Оба критерия подтверждают гипотезу о согласии. Частота ошибок I рода (0.04) соответствует теоретической $\alpha = 0.05$.

2. **Логнормальное распределение:** Наблюдается существенное расхождение выборочной дисперсии (1515) с теоретической (396). Это объясняется природой распределения с параметром $s^2 = 4$: оно имеет "тяжелый хвост и появление редких,

но очень больших значений в выборке сильно смещает оценку моментов. Однако критерии согласия (Колмогоров и Пирсон) успешно проходят, что подтверждает правильность формы распределения генератора.

3. **Распределение Лапласа:** В единичном эксперименте статистика Пирсона (23.74) незначительно превысила критическое значение (23.67), что привело к формальному отвержению гипотезы. Однако это является допустимой статистической флуктуацией, что подтверждается проверкой ошибки I рода: на 100 экспериментах доля отвержений составила 0.07, что близко к допустимому уровню 0.05.

6 Вывод

Реализованы датчики непрерывных СВ. Проведенный статистический анализ показал, что, несмотря на локальные отклонения в отдельных выборках (как в случае с Лапласом) и сложность оценки моментов для "тяжелых"хвостов (Логнормальное), генераторы работают корректно. Эмпирические уровни значимости критериев соответствуют теоретическим ожиданиям.