Nombre:
Valeria Ybarra López

Matricula:
2047880

22 de Febrero 2025

Inteligencia Artificial
Act 8: Laboratorio de Repaso Algebra Lineal

1 Operacions con matrices y determinantes

1. Encuentre la inversa de la siguiente matriz y verifique su resultado:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R_3 = R_3 - (5)R1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R_1 = R_1 - (2)R_2 \qquad R_3 = R_3 - (-4)R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$R_1 = R_1 - (-5)R_3 \qquad R_2 = R_2 - (4)R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Matriz Inversa =

$$\begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificamos: $F \times F^{-1} = I$

$$F \times F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F \times F^{-1} = \begin{bmatrix} -24 + 40 + -15 & 18 - 30 + 12 & 5 - 8 + 3 \\ 0 + 20 - 20 & 0 - 15 + 16 & 0 - 4 + 4 \\ -120 + 120 - 0 & 90 - 90 + 0 & 25 - 24 + 0 \end{bmatrix}$$

$$F \times F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Demuestre que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

$$A = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$$

$det\,|A| = AB - CD$

$det\,|B| = EH - FG$

$$det\,|A| \cdot det\,|B| = ADEH - ADFG - CBEH + CBFG$$

$|A \cdot B| = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$

$$det\,|A \cdot B| = ADEH - ADFG - CBEH + CBFG$$

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

2 Sistemas de ecuaciones lineales

3. Resuelva el siguiente sistema por el método de Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ -2x + 4y - 2z = 1 \\ x - y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$x = \frac{7 + y - z}{4} \quad y = \frac{1 + 2x + 2z}{4} \quad z = \frac{5 - x + y}{3}$$

$x = y = z = 0$

Primera iteración:

$$x = (7 + (0) - (0))/4 = \frac{7}{4}$$

$$y = (1 + 2(\frac{7}{4}) + 2(0))/4 = \frac{9}{8}$$

$$z = (5 - \frac{7}{4} + \frac{9}{8})/3 = \frac{35}{24}$$

Segunda iteración:

$$x = (7 + \frac{9}{8} - \frac{35}{24})/4 = \frac{5}{3}$$

$$y = (1 + 2(\frac{5}{3}) + 2(\frac{35}{24}))/4 = \frac{29}{16}$$

$$z = (5 - \frac{5}{3} + \frac{29}{16})/3 = \frac{247}{144}$$

Tercera iteración:

$$x = (7 + \frac{29}{16} - \frac{247}{144})/4 = \frac{511}{288}$$

$$y = (1 + 2(\frac{511}{288}) + 2(\frac{247}{144}))/4 = \frac{383}{192}$$

$$z = (5 - \frac{511}{288} + \frac{383}{192})/3 = 1.740162037$$

Cuarta iteración:

$$x = (7 + \frac{383}{192} - 1.740162037)/4 = 1.813657407$$

$$y = (1 + 2(1.813657407) + 2(1.740162037))/4 = 2.026909722$$

$$z = (5 - 1.813657407 + 2.026909722)/3 = 1.737750772$$

Quinta iteración:

$$x = (7 + 2.026909722 - 1.737750772)/4 = 1.822289738$$

$$y = (1 + 2(1.822289738) + 2(1.737750772))/4 = 2.030020255$$

$$z = (5 - 1.822289738 + 2.030020255)/3 = 1.735910172$$

Valores de x, y, z:

$$x = 1.822289738$$

$$y = 2.030020255$$

$$z = 1.735910172$$

Sustituyendo los valores en el sistema:

$$\begin{cases} 4(1.822289738) - (2.030020255) + (1.735910172) = 6.99 \approx 7 \\ -2(1.822289738) + 4(2.030020255) - 2(1.735910172) = 1.003 \approx 1 \\ (1.822289738) - (2.030020255) + (1.735910172) = 4.99 \approx 5 \end{cases}$$

4. Encuentre todas las soluciones del sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_2 = R_2 - (2)R_1 \qquad R_3 = R_3 - (3)R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\textbf{Solución} : X = -2y - 3z$$

Si $y = t$ y $z = r$, $t, r \epsilon \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - 2t - 3r \\ y = t \\ z = r \end{cases}$$

3 Espacios vectoriales y auto-valores/auto-vectores

5. Encuentre la base y la dimensión del subespacio generado por los vectores $\{(1, 2, 3), (2, 4, 6), (3, 6, 9)\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = R_2 - (2)R_1 \qquad R_3 = R_3 - (3)R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Base = \{(1, 2, 3)\}$$

$$Dim = 1$$

6. Determine los autovalores y autovectores de la matriz:

$$G = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$G - \lambda I = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$det(G - \lambda I) = (5-\lambda)(5-\lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 10\lambda + 21$$

Resolvemos $\lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$

$$\lambda = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(21)}}{2(1)} = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{10 \pm 4}{2}$$

Autovalores: $\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 7$

Para $\lambda_1 = 3$

$$\begin{pmatrix} 5-3 & -2 \\ -2 & 5-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2x - 2y = 0 \rightarrow x = y$

Autovector de $\lambda_1 : \overrightarrow{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda_2 = 7$

$$\begin{pmatrix} 5-7 & -2 \\ -2 & 5-7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-2x - 2y = 0 \rightarrow x = -y$

Autovector de $\lambda_2 : \overrightarrow{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4 Aplicaciones en IA: reducción de dimensionalidad

7. Explique cómo el PCA (Análisis de Componentes Principales) utiliza el álgebra lineal para reducir dimensiones.

El Análisis de Componentes Principales se encarga de encontrar los componentes principales de un conjunto de datos mediante técnicas de factorización matricial, esto permite simplificar la complejidad de espacios muestrales con muchas dimensiones. Los métodos de factorización matricial son aquellos que descomponen una matriz en un producto de submatrices. Dos conceptos que se aplican en el PCA son los eigenvectores y eigenvalores; también conocidos como vectores propios y valores propios de una matriz. Los eigenvectores (vectores propios) son vectores que, al multiplicarse por una matriz, resultan en el mismo vector o en un múltiplo del mismo. Los eigenvalores (valores propios) son los valores por los que se multiplican los eigenvectores resultantes. En el método PCA, cada componente principal corresponde a un eigenvector, y el orden de las componentes se establece por orden decreciente de eigenvalor. Esto permite reducir la dimensionalidad del conjunto de datos, manteniendo la mayor cantidad de información posible.

8. Calcule la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz.

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$H^T H = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+4 & 3+4 \\ 3+4 & 1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Calculamos eigenvalores y eigenvectores:

$$det \begin{bmatrix} 13-\lambda & 7 \\ 7 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$(13-\lambda)(5-\lambda)-49=0$ $\lambda^2-18\lambda+16=0$

Usando la fórmula general:

$$\lambda = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)} = \frac{18 \pm 2\sqrt{65}}{2}$$

$$\lambda_1 = 17.06225 \quad \lambda_2 = 0.9377$$

Para $\lambda_1 = 17.0622$

$$\begin{pmatrix} 13-17.0622 & -7 \\ 7 & 5-17.0622 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -4.0622x + 7y = 0 \rightarrow y = 0.5803x$$

Para $\lambda_2 = 0.9377$

$$\begin{pmatrix} 13-0.9377 & 7 \\ 7 & 5-0.9377 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.0623 & 7 \\ 7 & 4.0623 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 12.0623x + 7y = 0 \rightarrow y = -1.7231x$$

Entonces:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(0.5803)2)}} & \frac{1}{\sqrt{1+(1.723)2)}} \\ \frac{0.5803}{\sqrt{1+(0.5803)2)}} & \frac{-1.723}{\sqrt{1+(1.723)2)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8649 & 0.5019 \\ 0.5019 & -0.8649 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{17.622} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.9377} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.13 & 0 \\ 0 & 0.96 \end{bmatrix}$$

Calculamos U:

$$HV = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8649 & 0.5019 \\ 0.5019 & -0.8649 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0966 & 0.6408 \\ 2.7336 & -0.726 \end{bmatrix}$$

$$U = HV\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 3.0966 & 0.6408 \\ 2.7336 & -0.726 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4.1314} & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.9865} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.209 & 0.1214 \\ 0.5087 & -0.8766 \end{bmatrix}$$

La descomposición en valores singulares de H:

$$H = \begin{bmatrix} 0.209 & 0.1214 \\ 0.5087 & -0.8766 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.13 & 0 \\ 0 & 0.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8649 & 0.5019 \\ 0.5019 & -0.8649 \end{bmatrix}$$

9. Analice el uso de álgebra lineal en el aprendizaje profundo con redes neuronales.

Las redes neuronales son modelos cuantitativos que aprende como asociar una "entrada" y una "salida" con el uso de algoritmos de aprendizaje. Cuatro conceptos clave del álgebra lineal son esenciales para su análisis:

1.Proyección de un vector.

2.Descomposición por valores propios y singulares.

3.Gradiente de una matriz Hessiana.

4.Expansión en Taylor de una función vectorial.

El álgebra lineal se utiliza especialmente para analizar redes neuronales llamadas "asociadores". Estos modelos cuantitativos asocian entradas y salidas mediante patrones adaptativos y se dividen en heteroasociadores (diferentes entradas y salidas) y autoasociadores (mismas entradas y salidas). Los asociadores están compuestos por capas de neuronas que permiten el flujo de información.

10.Explique el impacto de los espacios vectoriales en la representación de datos en IA.

Las bases de datos vectoriales son un tipo de base de datos diseñada para almacenar datos vectoriales de alta dimensión. LLa inteligencia artificial de la actualidad nos permiten convertir tanto el texto como las imágenes o los audios en representaciones vectoriales. Estas representaciones vectoriales permiten representar de forma compacta, eficiente y con el mismo formato datos multimodales. Tambien las arquitecturas neuronales, como los modelos transformers y los modelos de embeddings, nos permiten transformar nuestros datos en vectores mientras preservamos el significado importante en ellos. Esta capacidad nos ayuda a identificar la similitud entre dos vectores.