Laboratorio Probabilidad y Estadística

Valeria Ybarra López 2047880

February 2025

1 Tipos de datos y Medidas de tendencia central

En una empresa se han recolectado los siguientes datos de 10 empleados:

Nombre	Edad(años)	Área de trabajo
Ana	25	Ventas
Luis	30	Administración
Marta	40	Producción
Carlos	35	Ventas
Elena	28	Recursos Humanos
Juan	50	Producción
Sofía	45	Administración
Pedro	38	Ventas
Daniel	33	Producción
Laura	27	Recursos Humanos

1. Clasifique las variables en cualitativas y cuantitativas:
- **Cualitativas**; Son características de un individuo u objeto, se expresan con palabras: **Nombres y Áreas de trabajo**.
- **Cuantitativas**; Se expresan mediante un número: **Edad**.

2.Determine la media, mediana y moda de la variable "Edad".
Ordenamos las edades de menor a mayor. 25, 27, 28, 30, 33, 35, 38, 40, 45, 50
- **Media**:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{25 + 27 + 28 + 30 + 33 + 35 + 38 + 40 + 45 + 50}{10} \rightarrow \bar{x} = 35.1$$

- **Mediana**: Si hay un número par de datos entonces la mediana es el promedio de los datos que están en las dos posiciones centrales; en este caso en las posiciones cenyrales se encuentran el 33 y 35, por lo que:

$$\frac{33 + 35}{2} = 34$$

La mediana es 34.

- **Moda**: Es el dato que más se repite, en nuestros datos no hay repetición en las edades, por lo tanto no hay moda.

3. Interprete los resultados obtenidos: Analizando la variable edad, encontramos que su promedio o media es de 35.1, quiere decir que la edad de los empleados se agrupa entorno a este valor. La mediana es de 34 lo que significa que la mitad de los empleados tiene una edad menor a 34 y la otra mayor a 34. Por último la moda, la cual no existe porque no hay repetición de edades.

2 Medidas de dispersión

Dado el siguiente conjunto de datos correspondiente a las calificaciones de 8 estudiantes en un examen:

$$X = \{70, 85, 90, 95, 88, 92, 75, 80\}$$

1. Calcule la varianza y la desviación estándar de los datos. Para obtener la varianza y desviación estándar se necesita calcular la media,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{70 + 85 + 90 + 95 + 88 + 92 + 75 + 80}{8} \rightarrow \bar{x} = 84.375$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} =$$

$$\frac{(70 - 84.375)^2 + (85 - 84.375)^2 + (90 - 84.375)^2 + ...}{8}$$

$$\frac{.. + (95 - 84.375)^2 + (88 - 84.375)^2 + (92 - 84.375)^2 + ...}{8}$$

$$\frac{.. + (75 - 84.375)^2 + (80 - 84.375)^2}{8} \rightarrow \sigma^2 = 66.23$$

Desviación Estándar: Es la raíz cuadarda de la varianza.

$$\sigma = \sqrt{66.23} \approx 8.13$$

2. **Interprete la dispersión de los datos**: La varianza indica la dispersión entre los datos, la cual existe una dispersión de 66.23. La desviacón estándar indica la dispersión de un conjunto de datos, cuanto mayor sea la desviación estándar de un conjunto de datos más lejos están los datos de la media, en nuestro caso la desviación es de 8.13, por lo que no es muy alta,lo que significa que los datos no estan tan alejados entre si.

3 Probabilidades y Teorema de Bayes

Una empresa de tecnología ha identificado que el %60 de sus empleados son programadores, y el %40 son diseñadores. Se sabe que el %70 de los programadores tienen conocimiento de inteligencia artificial (IA), mientras que solo el %30 de los diseñadores tienen estos conocimientos. Si se elige un empleado al azar y se sabe que tiene conociementos de IA, ¿ cuál es la probabilidad de que sea programador? **Solución usando el Teorema de Bayes:**

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

Tenemos los siguientes datos:

- $P(A) = P(Programador) = 0.60$

$P(\text{Diseñador}) = 0.40$

- $P(B|A) = P(IA/Programador) = 0.70$

- $P(B|\text{Diseñador}) = P(IA/\text{Diseñador}) = 0.30$

Calculamos $P(B)$ la probabilidad que el empleado tenga conocimientos de IA, usando la ley de probabilidad total:

$$P(B) = P(B|A) \times P(A) + P(B|\text{Diseñador}) \times P(\text{Diseñador})$$

$$P(B) = (0.70 \times 0.60) + (0.30 \times 0.40) = 0.54$$

Para calcular la probabilidad de que un empleado sea programador con conocimientos de IA $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{0.70 \times 0.60}{0.54} \approx 0.7778$$

Conclusión: La probabilidad de que al elegir un empleado con conocimientos de IA este sea programador es aproximadamente de %0.7778.

4 Distribuciones de probabilidad

Suponga que el número de defectos en un lote de producción sigue una distribución de Poisson con media $\lambda = 3$ defectos por lote.

1. Calcule la probabilidad de qe un lote tenga exactamente 2 defectos.

$$P(X) = \tfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, ...$$

Para $x = 2$ y $\lambda = 3$

$$f(x) = \tfrac{3^2 e^{-3}}{2!} = \tfrac{9e^{-3}}{2} = \tfrac{0.4482}{2} = 0.2241$$

La probabilidad de que un lote tenga exactamente 2 defectos es de **0.2241**.

2. Calcule la probabilidad de que un lote tenga al menos 1 defecto.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

Para $x = 0$: $P(0) = \frac{3^0 e^{-0}}{0!} \approx 0.0498$

$$P(X \geq 1) = 1 - 0.0498 = 0.9502$$

La probabilidad de que un lote tenga al menos 1 defecto es de **0.9502**.

5 Funciones de densidad y distribución acumulativa

Sea X una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu = 50$ y desviación estándar $\sigma = 10$.

1. Determine la probabilidad de que X tome un valor menor que 45.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{45 - 50}{10} = -0.5$$

Entonces: $P(X < 45) = P(Z < -0.5)$
Haciendo uso de la tabla de distribución Normal: $P(X < -0.5) \approx 0.3085$
Conclusión: La probabilidad de que X tome un valor menor que 45 es de **0.3085**

2. Determine la probabilidad de que X esté entre 40 y 60.

$$Z_1 = \frac{40 - 50}{10} = -1$$
$$Z_2 = \frac{60 - 50}{10} = 1$$

Entonces: $P(40 < X < 60) = P(-1 < X < 1)$

Haciendo uso de la tabla de distribución Normal:
$P(z < 1) \approx 0.8413$ $\quad$ $P(Z < -1) \approx 0.1587$

$$P(Z < 1) - P(Z < -1) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$$

Conclusión: La probabilidad de que X este entre 40 y 60 es de **0.6826**

3. Use la función de distribución acumulativa para verificar sus respuestas.

La función de distribución acumulatiba se representa como:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Para el primer ejercicio:

$$F(45) = P(X \leq 45) = P(X \leq -0.5) \approx 0.3085$$

Para el segundo ejercicio:

$$F(60)-F(40) = P(40 \leq X \leq 60) = P(X \leq 1)-P(X \leq 1) = 0.8413-0.1587 = 0.6826$$

6 Probabilidad condicional

Un dado de seis caras se lanza dos veces.

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par en el segundo lanzamiento, dado que en el primero salió un número impar? Las posibilidades en un dado son 1,2,3,4,5,6. Los posibles resultados de impares son: 1,3,5 y de pares son: 2,4,6.

Por lo que la probabilidad de obtener un número impar en el primer lanzamiento es de:

$$\frac{3}{6}$$

La probabilidad de obtener un número par en el segundo lanzamiento es de:

$$\frac{3}{6}$$

Dado a que ambos eventos son independientes:

$$P(A/B) = \frac{1}{2}$$

2. Interprete los resultados obtenidos. Ambos eventos son independientes, significa que la probabilidad de que salga un par en el segundo lanzamiento no depende del resultado del primer lanzamiento; así la probabilidad de ambos eventos son de un %50 o sea $\frac{1}{2}$.

7 Distribución binomial

Un examen de opción múltiple tiene 5 preguntas, cada una con 4 posibles respuestas, de las cuales solo una es correcta. Un estudiante responde al azar.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante acierte exactamente 3 respuestas?

Fórmula Binomial:

$$f(x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$$

$x = 0, 1, 2, ..., n$

Tenemos que: - $n = 5$ es el número de preguntas. - $x = 3$ es el número de respuestas correctas. - $\theta = \frac{1}{4}$ la probabilidad de sacar la respuesta correcta.

Sustituyendo los valores en la fórmula binomial:

$$f(x) = \binom{5}{3}(\frac{1}{4})^3(1-\frac{1}{4})^{5-3}$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

$$f(x) = 10 \times \frac{1}{64} \times \frac{9}{16} = \frac{45}{512} \approx 0.0879$$

Conclusión: La probabilidad de que el estudiante acierte exactamente 3 respuestas es de **0.0879**.

2. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte al menos una respuesta?

Tenemos que:

- $n = 5$ es el número de preguntas.

- $x = 0$

- $\theta = \frac{1}{4}$ la probabilidad de sacar la respuesta correcta.

Sustituyendo los valores en la fórmula binomial:

$$f(x) = \binom{5}{0}(\frac{1}{4})^0(1-\frac{1}{4})^{5-0}$$

$$\binom{5}{0} = 1$$

$$f(x) = 1 \times 1 \times \frac{243}{1024} = \frac{243}{1024}$$

La probabilidad de que se acierte al menos una respuesta:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{243}{1024} = \frac{781}{1024} \approx 0.7627$$

Conclusión: La probabilidad de que el estudiante acierte al menos 1 respuesta

es de **0.7627**.

8 Regla de Laplace

Una urna contiene 5 bolas rojas y 7 bolas azules. Se extrae una bola al azar.

1. Determine la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

El número total de bolas es de 12, y el número de bolas rojas es de 5. Por lo tanto, la probabilidad de que la bola extraída sea roja es de:

$$\frac{5}{12}$$

2. Si se extraen dos bolas sin reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean azules?

$$P(Primera \quad bola \quad azul) = \frac{7}{12}$$

$$P(Segunda \quad bola \quad azul) = \frac{6}{12}$$

Entonces, la probabilidad de que ambas sean azules es:

$$P(Ambas \quad azules) = \frac{7}{12} \times \frac{6}{12} = \frac{7}{22}$$

Conclusión: la probabilidad de extraer dos bolas sin reemplazo y que estas sean azules es de: **31.81%**.

9 Esperanza matemática

Suponga que una persona juega una lotería donde el premio es de 1000 dólares con una probabilidad de 0.01, y el costo del boleto es de 10 dólares.

1. Calcule la esperanza matemática de la ganancia del jugador.

Tenemos que:
-$g_1 = 1000 - 10 = 990$
-$g_2 = -10$, en caso de que el jugador no gane.
-$P(g_1) = 0.01$
-$P(g_2) = 0.99$

La fórmula de la esperanza matemática es:

$$E(X) = (g_1 \times P(g_1)) + (g_2 \times P(g_2)) = (990 \times 0.01) + (-10 \times 0.99) = 0$$

Conculsión: La esperanza matemática de la ganancia del jugador es de **0 dólares.**

2. Interprete el resultado obtenido.

La esperanza matemática indica el promedio que se espera obtener de una variable aleatoria a largo plazo. En este caso nuestra esperanza matemática es de 0, lo que significa que el jugador no ganará ni perderá dinero si se juega a largo plazo.

10 Ley de los grandes números

Un experimento consiste en lanzar una moneda justa 1000 veces y calcular la frecuencia relativa de obtener cara.

1. ¿Cuál es el valor esperado de la frecuencia relativa de obtener cara?

La probabilidad de obtener cara en cada lanzamiento es de $\frac{1}{2}$.

La fórmula de la frecuencia relativa es:

$$f = \frac{x}{n}$$

donde:

- $n = 1000$

-$p = 0.5$

El valor esperado de la frecuencia relativa se obtiene con el valor esperado de x, tenemos que $E(x) = n \times p$.

Entonces:

$$E(f) = \frac{E(x)}{n} = \frac{n \times p}{n} = \frac{1000 \times 0.5}{1000} = 0.5$$

Conclusión: El valor esperado de la frecuencia relativa de obtener cara es de **0.5**.

2. ¿Cómo se relaciona esto con la Ley de los Grandes Números?

La ley de los Grandes Números nos dice que el promedio de los resultados obtenidos de un gran número de ensayos debe estar cerca del valor esperado y tiende a acercarse al valor esperado a medida que se realizan más ensayos. En nuestro caso se lanzo una moneda 1000 veces, por lo tanto la ley indica que la frecuencia relativa de obtener cara se acercará a 0.5 a medida que se realicen más lanzamientos.