Partícula Cargada en un campo Electromagnético

Dr. Ricardo Becerril Bárcenas.

March 2020

Las ecuaciones básicas de la electrodinámica clásica son las ecuaciones de Maxwell, que se muestran a continuación:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \tag{2}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{J} \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{4}$$

donde c es la velocidad de la luz.
La fuerza de Lorentz conecta el electromagnetismo con la mecánica clásica

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} = q[\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{B})] \tag{5}$$

donde m,q son la masa y la carga eléctrica respectivamente de una partícula que viaja en una región del espacio donde existen un campo eléctrico $\vec{E}$ y un campo magnético $\vec{B}$. En las ecuaciones de Maxwell $\vec{J}$ y ρ son respectivamente la densidad de corriente y la densidad de carga eléctrica.
Usualmente se utilizan por conveniencia, potenciales electromagnéticos en lugar de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$.
De la ecuación (4) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ se implica la existencia de un campo vectorial $\vec{A}(\vec{x}, t)$ tal que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{6}$$

Que al sustituir en la ecuación (1) se obtiene:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial(\nabla \times \vec{A})}{\partial t}$$

o bien

$$\nabla \times (\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \vec{0}$$

como

$$\nabla \times (-\nabla\Phi) = \vec{0}$$

siempre se da, se tiene que

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\Phi$$

o bien

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\Phi \tag{7}$$

$\vec{A}$ y Φ fungen como potenciales porque con sus derivadas se obtienen los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Las ecuaciones (1)-(4) pueden escribirse en términos de estos potenciales y se obtienen dos ecuaciones de segundo orden para $\vec{A}$ y Φ en lugar de las cuatro ecuaciones de primer orden para $\vec{E}$ y $\vec{B}$.

¿Cómo se transforma la fuerza de Lorentz en función de estos potenciales?

¿Puede esta ecuación mecánica de movimiento escribirse en la forma de Euler-Lagrange?

La respuesta a la primera pregunta se da a continuación: en componentes (5) se escribe

$$F_\alpha = m\dot{v}^\alpha = q[-(\nabla\Phi)_\alpha - \frac{1}{c}\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{c}(\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A}))_\alpha] \tag{8}$$

fijémonos en el triple producto vectorial

$$[\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})]_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}v^\beta(\nabla\times\vec{A})_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}v^\beta\epsilon_{\gamma\mu\nu}\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \tag{9}$$

donde$(\nabla\Phi)_\alpha = \frac{\partial\Phi}{\partial x^\alpha}$ y $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ es el símbolo de permutación en (7) usaremos la identidad $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\gamma\mu\nu} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}$ con la delta de Kronecher; de modo que (7) se reescribe como

$$[\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})]_\alpha = (\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu})v^\beta\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} = v^\nu\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\alpha} - v^\mu\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu} \tag{10}$$

Regresando a (8), con la expresión (10) tenemos:

$$\begin{aligned} m\dot{v}^\alpha &= q\left[-\frac{\partial\Phi}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} + \frac{v^\mu}{c}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu}\right)\right] \\ &= q\left[-\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}A_\alpha}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{1}{c}v^\mu A_\mu - \Phi\right)\right] \end{aligned} \tag{11}$$

donde usamos que

$$\frac{\mathrm{d}A_\alpha(\vec{x},t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial t}.$$

Reagrupamos (11) como sigue (q, m constantes):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[mv^\alpha + \frac{q}{c}A_\alpha\right] + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[q\Phi - \frac{q}{c}v^\mu A_\mu\right] = 0 \tag{12}$$

Esta ecuación tiene la estructura de Euler - Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v^\alpha}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^\alpha} = 0$$

La pregunta es: ¿Con cuál función Lagrangiana (12) adquiere la estructura de las ecuaciones de Euler - Lagrange?

Notemos que ni Φ ni A_α dependen de v^μ. Resulta que:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^\alpha \cdot \dot{x}^\alpha - q\Phi(\vec{x},t) + q\frac{\dot{x}^\alpha}{c}(\vec{x},t)$$

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} - q\Phi(\vec{x},t) + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{x},t) \tag{13}$$

Con esta Lagrangiana, las ecuaciones E-L, reproducen la fuerza de Lorentz (12), en efecto

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v^\alpha} = mv^\alpha + \frac{q}{c}A_\alpha$$

Al derivar respecto del tiempo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v^\alpha}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mv^\alpha + \frac{q}{c}A_\alpha\right)$$

$$-\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[q\Phi - \frac{q}{c}v^\mu A_\mu\right]$$

que es la ecuación (12).

¿Cuál es la expresión de la energía?

$$\mathfrak{E} = \dot{q}^\alpha\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} - \mathfrak{L} = v^\alpha\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v^\alpha} - \mathfrak{L} = v^\alpha\left(mv^\alpha + \frac{q}{c}A_\alpha\right) - \frac{1}{2}mv^\alpha v^\alpha + q\Phi - \frac{q}{c}v^\alpha A_\alpha$$

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} + q\Phi \tag{14}$$

Cómo habíamos visto, la energía se conserva cuando $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = 0$, en este caso (14) es una constante sólo si Φ y $\vec{A}$ no dependen del tiempo.

Nótese que $\vec{A}$ no está en la expresión de la energía pues la fuerza magnética $q\vec{v}\times\vec{B}$ no realiza trabajo sobre la partícula porque esta fuerza es perpendicular a la velocidad:

$$W_B = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F_B}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{v}\mathrm{d}t = 0$$

$\mathfrak{L}$ puede escribirse como $\mathfrak{L} = K - U$ con $U = q\Phi - q\vec{v}\cdot\vec{A}$, siendo la energía de interacción. Aquí sí entra $\vec{A}(\vec{x},t)$, sim embargo, la cantidad conservada no es $K + U$ pues U depende de la velocidad.

Transformación de Norma y Lagrangianos equivalentes

A partir de los potenciales Φ y $\vec{A}$ uno obtiene los campos eléctrico y magnético como:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

La transformación:

$$\vec{A}'' = \vec{A} + \nabla\Omega(\vec{x},t)\vec{\Phi}' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Omega(\vec{x},t) \tag{15}$$

deja invariante a los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$, en efecto:

$$\vec{E}' = -\nabla\Phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}''}{\partial t} = -\nabla\left(\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Omega\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \nabla\Omega\right) = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}'' = \nabla \times \left(\vec{A} + \nabla\Omega\right) = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}.$$

Como vimos, la fuerza de Lorentz $\vec{F} = m\dot{\vec{v}} = q\left[\vec{E} + \frac{1}{c}\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\right]$ depende de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ que son invariantes ante transformaciones de norma, así que, $\vec{F}$ es invariante ante estas transformaciones. Por otra parte, la fuerza de Lorentz se escribió con la estructura Lagrangiana con una función $\mathfrak{L}$ que depende de $\vec{A}$ y Φ, que si cambian, $\vec{A} \to \vec{A}''$, $\Phi \to \Phi'$, ¿Cómo se reflejan estas transformaciones en la función de Lagrange?

Hagamos la transformación (15) en la función de Lagrange (13):

$$\mathfrak{L}' = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} - q\Phi' + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}'' = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} - q\left(\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\left(\vec{A} + \nabla\Omega\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} - q\Phi + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A} + \frac{q}{c}\left(\vec{v}\cdot\nabla\Omega + \frac{\partial\omega}{\partial t}\right) = \mathfrak{L} + \frac{q}{c}\frac{\partial\Omega}{\partial t}$$

$\mathfrak{L}$ y $\mathfrak{L}'$ son Lagrangianos equivalentes proporcionando la misma dinámica (las mismas ecuaciones de movimiento).