Laboratorio de Álgebra Lineal

Valeria Naigé Rodríguez Martínez

22 de febrero de 2025

4.1- Operaciones con matrices y determinantes

1. Encuentre la inversa de la siguiente matriz y verifique su resultado

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Definimos la matriz con la matriz identidad de su lado derecho. Con operaciones entre renglones se buscará encontrar la matriz identidad del lado izquierdo, teniendo como resultado la matriz inversa de F en el lado derecho.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Multiplicamos por (-5) la primer fila y se la sumamos a la última fila

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Multiplicamos la segunda fila por (-2) y se la sumamos a la primera fila
Multiplicamos la segunda fila por (4) y se la sumamos a la primera fila

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

Multiplicamos la última fila por (5) y se lo sumamos a la primera fila
Multiplicamos la última fila por (-4) y se lo sumamos a la segunda fila

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

Como se observa, se ha llegado a la matriz identidad del lado izquierdo, por lo que la matriz del lado derecho es la matriz inversa de la original

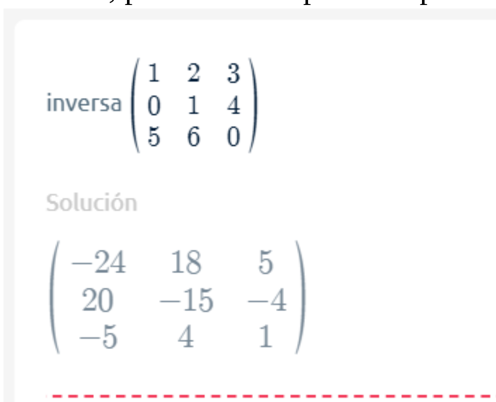
$$F^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Demostración:

Para comprobar la matriz inversa, usaremos la propiedad de las matrices que establece que la matriz multiplicada por su inversa da como resultado la matriz identidad.
Multiplicamos las matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Además, podemos comprobarlo por una calculadora de matrices inversas en línea:


inversa $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Solución

$$\begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. <u>Demuestre la propiedad de que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes.</u>
   Definimos dos matrices y calculamos su determinante:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (1 * 4) - (5 * 3) = -11$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|B| = (3 * 4) - (1 * 8) = 4$$

Calculamos el producto de los determinantes

$$|A| * |B| = (-11) * (4) = -44$$

Calculamos la multiplicación de las matrices

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 20 \\ 19 & 56 \end{bmatrix}$$

Calculamos el determinante

$$|AB| = (6 * 56) - (19 * 20) = -44$$

∴ Como se observa, el determinante de un producto de matrices es igual al producto de sus determinantes.

4.2 Sistemas de ecuaciones lineales

3. <u>Resuelva el siguiente sistema por el método de Gauss-Seidel:</u>

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ -2x + 4y - 2z = 1 \\ x - y + 3z = 5 \end{cases}$$

Despejamos cada variable

$$x = \frac{7 + y - z}{4}$$
$$y = \frac{1 + 2x + 2z}{4}$$
$$z = \frac{5 - x + y}{3}$$

Iteración 1:

Comenzando con $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$

$$x = \frac{7 + 0 - 0}{4} = 1.75$$
$$y = \frac{1 + 2(1.75) + 0}{4} = 1.125$$
$$z = \frac{5 - 1.75 + 1.125}{3} = 1.458$$

Iteración 2:

Comenzando con $x_0 = 1.75, y_0 = 1.125, z_0 = 1.458$

$$x = \frac{7 + 1.125 - 1.458}{4} = 1.667$$
$$y = \frac{1 + 2(1.667) + 2(1.458)}{4} = 1.812$$
$$z = \frac{5 - 1.667 + 1.812}{3} = 1.715$$

Iteración 3:

Comenzando con $x_0 = 1.667, y_0 = 1.812, z_0 = 1.715$

$$x = \frac{7 + 1.812 - 1.715}{4} = 1.774$$
$$y = \frac{1 + 2(1.774) + 2(1.715)}{4} = 1.994$$
$$z = \frac{5 - 1.774 + 1.994}{3} = 1.74$$

$\therefore$ Así bien, podemos aproximar las variables como:

$$x = 1.8$$
$$y = 2.0$$
$$z = 1.7$$

4. <u>Encuentre todas las soluciones del sistema homogéneo:</u>

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases}$$

Se puede observar que las ecuaciones 2 y 3 son en realidad múltiplos de la ecuación 1 (con factor 2 y 3 respectivamente), por lo que se puede reducir el sistema a una sola ecuación:

$$x + 2y + 3z = 0$$
$$0 = 0$$
$$0 = 0$$

Por lo tanto, se puede inferir que las variables y y z son libres, por lo tanto, podemos despejar x para encontrar una solución general en términos de y y z.

$$x = -2y - 3z$$
$$y = y$$
$$z = z$$

La representación vectorial de la solución general sería:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

∴ Todas las soluciones del sistema homogéneo serán las combinaciones lineales de los vectores

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.3 Espacios vectoriales y auto-valores/auto-vectores

5. <u>Encuentre la base y la dimensión del subespacio generado por los vectores</u> {(1, 2, 3), (2, 4, 6), (3, 6, 9)}.

Definimos la forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Para buscar la dependencia de vectores, intentaremos crear la diagonal principal en la matriz.

Multiplicamos la primera fila por (-2) y se lo sumamos a la segunda fila

Multiplicamos la primera fila por (-3) y se lo sumamos a la tercera fila

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se observa, se obtuvieron ceros en las filas 2 y 3, lo quiere decir que estos vectores eran linealmente dependientes del primer vector.

De esta manera, tendremos como vector del sistema al vector

(1,2,3)

Al ponerle variables, podemos reescribirlo como:

$$x + 2y + 3z = 0$$

Despejamos x y obtenemos y y z libres

$$x = -2y - 3z$$
$$y = y$$
$$z = z$$

Por lo tanto, tenemos a la solución

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Al obtener factor común tenemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

∴ Así bien, definimos la base del sistema como

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con una dimensión de 2.

6. Determine los autovalores y autovectores de la matriz:

$$G = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Para obtener los autovalores, hay que resolver la ecuación $|G - \lambda I|$

$$\left|\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right|$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = [(5-\lambda) * (5-\lambda)] - [(-2) * (-2)]$$

$$= \lambda^2 - 10\lambda + 21$$

Obtenemos los valores de λ igualando la ecuación a 0 y encontrando sus valores.

$$\lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$$

Aplicamos la fórmula general

$$= \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(21)}}{2(1)}$$

$$= \frac{10 \pm 4}{2}$$

$$\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 3$$

∴ Los autovalores de la matriz son $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 3$

Para encontrar los autovectores de la matriz, sustituimos los valores de λ en la ecuación $(G - \lambda I) = 0$

Para $\lambda_1 = 7$

$$\begin{bmatrix} 5-7 & -2 \\ -2 & 5-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tenemos entonces las ecuaciones

$$-2x - 2y = 0$$
$$-2x - 2y = 0$$

Se puede reducir a

$$x + y = 0$$

Por lo tanto, obtenemos el primer autovector

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_1 = 3$

$$\begin{bmatrix} 5-3 & -2 \\ -2 & 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tenemos entonces las ecuaciones

$$2x - 2y = 0$$
$$-2x2y = 0$$

Se puede reducir a

$$x - y = 0$$

Por lo tanto, obtenemos el primer autovector

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

∴ Los autovectores de la matriz son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.4 Aplicaciones en IA: reducción de dimensionalidad

7. Explique cómo el PCA (Análisis de Componentes Principales) utiliza el álgebra lineal para reducir dimensiones.
   El análisis de componentes principales es un método matemático para reducir las dimensiones de conjuntos de datos reteniendo la mayor parte de la variación en vectores. En este proceso, el álgebra lineal juega un rol muy importante, para manejar los datos de manera eficiente. En resumidas cuentas, el PCA centraliza los datos para después calcular la covarianza en la matriz. De esta matriz se calculan los autovalores y autovectores y se seleccionan aquellos autovectores que maximizan la varianza. Finalmente, se reduce la dimensión al proyectar los datos en los autovectores elegidos.

8. <u>Calcule la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz:</u>

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

La descomposición en valores singulares (SVD) de una matriz consiste en encontrar 3 matrices: $U, \Sigma\ y\ V^T$ en función de los autovalores, autovectores y matriz traspuesta de la matriz principal.

Comenzamos calculando la traspuesta de H

$$H^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ahora, para encontrar V calculamos $H^T H$ aplicando la multiplicación de matrices

$$H^T H = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Calculamos los autovalores de $H^T H$

$$\left|\begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right|$$

$$\begin{vmatrix} 13-\lambda & 7 \\ 7 & 5-\lambda \end{vmatrix} = [(13-\lambda) * (5-\lambda)] - (7 * 7)$$

$$= \lambda^2 - 18\lambda + 16$$

Igualamos a 0 y aplicamos la fórmula general

$$\lambda^2 - 18\lambda + 16 = 0$$

$$\lambda = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)}$$

$$\lambda = \frac{18 \pm 16.12}{2}$$

$$\lambda_1 = 17.06,\ \lambda_2 = 0.94$$

Ahora, encontramos los autovectores de $H^T H$

Para $\lambda_1 = 17.06$

$$\begin{bmatrix} 13-17.06 & 7 \\ 7 & 5-17.06 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.06 & 7 \\ 7 & -12.06 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema

$$-4.06v_1 + 7v_2 = 0$$

$$v_1 = \frac{7v_2}{4.06} \approx 1.73$$

El autovector será

$$\begin{pmatrix} 1.73 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_1 = 0.94$

$$\begin{bmatrix} 13 - 0.94 & 7 \\ 7 & 5 - 0.94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.06 & 7 \\ 7 & 4.06 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema

$$12.06v_1 + 7v_2 = 0$$
$$v_1 = \frac{-7v_2}{12.06} \approx -0.58$$

El autovector será

$$\begin{pmatrix} -0.58 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma, construimos $V\ y\ V^T$

$$V = \begin{pmatrix} 1.73 & -0.58 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$V^T = \begin{pmatrix} 1.73 & 1 \\ -0.58 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, para encontrar U calculamos HH^T aplicando la multiplicación de matrices

$$HH^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

Calculamos los autovalores de HH^T

$$\left| \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right|$$

$$\begin{vmatrix} 10 - \lambda & 8 \\ 8 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = [(10 - \lambda) * (8 - \lambda)] - (8 * 8)$$

$$= \lambda^2 - 18\lambda + 16$$

Igualamos a 0 y aplicamos la fórmula general

$$\lambda^2 - 18\lambda + 16 = 0$$
$$\lambda = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)}$$
$$\lambda = \frac{18 \pm 16.12}{2}$$
$$\lambda_1 = 17.06,\ \lambda_2 = 0.94$$

Ahora, encontramos los autovectores de HH^T

Para $\lambda_1 = 17.06$

$$\begin{bmatrix} 10 - 17.06 & 8 \\ 8 & 8 - 17.06 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.06 & 8 \\ 8 & -9.06 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema

$$-7.06u_1 + 8u_2 = 0$$
$$u_1 = \frac{8u_2}{7.06} \approx 1.13$$

El autovector será

$$\begin{pmatrix} 1.13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_1 = 0.94$

$$\begin{bmatrix} 10 - 0.94 & 8 \\ 8 & 8 - 0.94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.06 & 8 \\ 8 & 7.06 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema

$$9.06u_1 + 8u_2 = 0$$
$$u_1 = \frac{-8u_2}{9.06} \approx -0.88$$

El autovector será

$$\begin{pmatrix} -0.88 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma, construimos U

$$U = \begin{pmatrix} 1.13 & -0.88 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para encontrar Σ calculamos los valores singulares dados $\lambda_1\ y\ \lambda_2$

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}$$
$$\sigma_1 = \sqrt{17.06}, \sigma_2 = \sqrt{0.94}$$
$$\sigma_1 = 4.14, \sigma_2 = 0.97$$

Σ será la matriz diagonal con los valores singulares

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4.14 & 0 \\ 0 & 0.97 \end{bmatrix}$$

∴ La descomposición en valores singulares de la matriz

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Es

$$U = \begin{pmatrix} 1.13 & -0.88 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4.14 & 0 \\ 0 & 0.97 \end{bmatrix}$$
$$V^T = \begin{pmatrix} 1.73 & 1 \\ -0.58 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Analice el uso de álgebra lineal en el aprendizaje profundo con redes neuronales
   En el mundo de las redes neuronales como modelos matemáticos para la resolución de problemas, el álgebra lineal juega un papel muy importante ya que proporciona muchas herramientas para procesar y transformar los datos de manera eficiente, así como para implementar las redes neuronales a gran escala.
   En términos generales, con el álgebra lineal se pueden manejar los datos como grandes matrices o vectores, facilitando su manipulación. Con estas, se pueden realizar operaciones tales como el producto escalar o matricial útiles para la propagación de datos en las capas de una red neuronal. Otra aplicación es el cálculo de la pérdida, el cual resulta esencial en la fase de entrenamiento de una red neuronal. Esta se calcula con predicciones utilizando operaciones de álgebra lineal. Otro ejemplo es la descomposición de matrices y SVD, como se trabajó anteriormente, para reducir la dimensionalidad de un conjunto de datos sin perder información relevante de los mismos.
   Como estos, se pueden encontrar múltiples ejemplos de cómo el álgebra lineal ayuda a manejar grandes cantidades de datos en el aprendizaje profundo.

10. Explique el impacto de los espacios vectoriales en la representación de datos en IA
    Los espacios vectoriales permiten el manejo de datos de manera algebraica, en los cuales se pueden aplicar diversas operaciones matemáticas para obtener resultados específicos, transformando y analizando los datos eficientemente. Algunos ejemplos son las funciones de activación, para la resolución de problemas complejos, la Forward Propagation, que aplica multiplicación de matrices y vectores en sus diferentes capas. La Backpropagation, donde se utilizan derivadas parciales para el cálculo del gradiente de una función. Así como también el uso del PCA y SVD, entre muchos otros, donde se utilizan procedimientos matemáticos para el análisis significativo de los datos, con el objetivo de tener información detallada y precisa que sirva como guía para la toma de decisiones y el aprendizaje continuo.