Laboratorio de Álgebra Lineal

Valeria Naigé Rodríguez Martínez

22 de febrero de 2025

4.1 - Repaso de sistemas de ecuaciones lineales

1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones usando eliminación de Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 7 \\ -2x + 4y + z = -3 \\ 5x + 2y - 3z = 10 \end{cases}$$

Formamos la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 7 \\ -2 & 4 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -3 & 10 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos por (1) la fila 2 y se lo sumamos a la primera fila para crear pivote de 1 en la primera fila

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -3 & 10 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos por (2) la primera fila y se lo sumamos a la segunda fila
Multiplicamos por (-5) la primera fila y se lo sumamos a la tercera fila

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & 7 & 5 \\ 0 & -13 & -18 & -10 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos por (1/10) la segunda fila para crear pivote de 1 en la segunda fila

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{7}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & -13 & -18 & -10 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos por (-3) la segunda fila y se lo sumamos a la primera fila
Multiplicamos por (13) la segunda fila y se lo sumamos a la tercera fila

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{10} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-89}{10} & \frac{-7}{2} \end{bmatrix}$$

Multiplicamos por (-10/89) la tercera fila para crear pivote de 1 en la tercera fila

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{10} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{10} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{35}{89} \end{bmatrix}$$

Multiplicamos por (-9/10) la tercera fila y se lo sumamos a la primera fila
Multiplicamos por (-7/10) la tercera fila y se lo sumamos a la segunda fila

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{191}{89} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{20}{89} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{35}{89} \end{bmatrix}$$

∴ Obtenemos los siguientes valores:

$$x = \frac{191}{89} \approx 2.146$$
$$y = \frac{20}{89} \approx 0.225$$
$$z = \frac{35}{89} \approx 0.393$$

2. <u>Determine todas las soluciones del siguiente sistema homogéneo:</u>

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ -x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

Todos los sistemas homogéneos tienen a la solución trivial como solución al sistema, sin embargo, aquellos que tengan un rango menor al número de incógnitas tendrán también soluciones no triviales.

Para verificar el rango del sistema se usará el método de eliminación de Gauss.

Formamos la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos por (-2) la primera fila y se la sumamos a la segunda fila
Multiplicamos por (1) la primera fila y se la sumamos a la tercera fila

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para evitar fracciones,
Multiplicamos por (1) la tercera fila y se la sumamos a la segunda fila
Multiplicamos por (1/2) la segunda fila para formar pivote de 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos por (-5) la segunda fila y se la sumamos a la tercera fila

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos por (-1/14) la tercera fila

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema reducido:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Se puede observar que la matriz tiene un rango de 3, igual al número de incógnitas, por lo tanto, la única solución del sistema será la solución trivial.

∴ La solución al sistema es

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

4.2 - Matrices, determinantes y rango

3. Encuentre la inversa de la matriz si existe:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Primeramente, se determinará si la matriz tiene inversa, con ayuda del determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Usaremos la regla de los adjuntos

$$= 2(0 + 8) - 1(-1 - 12) + 3(2 - 0)$$
$$= 2(8) - 1(-13) + 3(2)$$
$$= 35$$

Como se observa

$$35 \neq 0$$

Por lo tanto, la matriz sí tiene inversa.

Calculamos la inversa de la matriz, con ayuda de la matriz identidad

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Haremos las operaciones necesarias para formar la matriz identidad del lado derecho, para obtener la inversa del lado izquierdo.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$\rightarrow$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$\rightarrow$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -14 & -3 & 3 & 1 \end{array}$$

$\rightarrow$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 4 & -11 & 1 \end{array}$$

$\rightarrow$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/35 & -11/35 & 1/35 \end{array}$$

$\rightarrow$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8/35 & 13/35 & 2/35 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 4/35 & -11/35 & 1/35 \end{array}$$

$\therefore$ Como se observa, la inversa de la matriz es

$$\begin{bmatrix} \frac{8}{35} & \frac{13}{35} & \frac{2}{35} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{35} & \frac{-11}{35} & \frac{1}{35} \end{bmatrix}$$

4. <u>Determine si la siguiente matriz es ortogonal:</u>

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Para verificar la ortogonalidad, se debe multiplicar la matriz por su transpuesta, si se obtiene la matriz identidad, entonces la matriz será otrogonal.

Obtenemos la matriz traspuesta:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Multiplicamos las matrices:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ Como se observa, se obtuvo la matriz identidad, por lo que la matriz es ortogonal.

4.3 – Propiedades de matrices relevantes para programación lineal

5. <u>Explique la importancia de las matrices en la optimización lineal y resuelva un problema de transporte con matrices.</u>
Las matrices juegan un papel fundamental en la programación lineal ya que sirven para representar las ecuaciones de forma compacta y manejable para diversos procedimientos, tanto escritos como computacionales. Además, es común ver dentro de la programación lineal que los valores de las restricciones se expresen como matrices del tipo $Ax = b$.
Diversos algoritmos para la resolución de problemas en la programación lineal, tales como el método simples o método de puntos exteriores, hacen uso de operaciones con matrices para los cálculos necesarios dentro del procedimiento. El uso de estas matrices facilita la aplicación de transformaciones algebraicas a las restricciones, así como a la función objetivo.

Problema de transporte

Una empresa de transporte transporta granos de 3 silos a 4 molinos, la oferta y la demanda (en camiones cargados) junto con los costos de transporte por camión se muestra en la tabla siguiente:

	Molino 1	Molino 2	Molino 3	Molino 4	Oferta
Silo 1	$10	$2	$20	$11	15
Silo 2	$12	$7	$9	$20	25
Silo 3	$3	$14	$16	$18	10
Demanda	5	15	15	15	

Aplicamos el algoritmo de la esquina noroeste

	Molino 1	Molino 2	Molino 3	Molino 4	Oferta
Silo 1	5	10	/	/	15
Silo 2	/	5	15	5	25
Silo 3	/	/	/	10	10
Demanda	5	15	15	15	

Determinamos el costo total de la operación:

$$c = 5(10) + 10(2) + 5(7) + 15(9) + 5(20) + 10(18)$$

$$c = 520$$

∴ La solución es

Enviar 5 camiones del silo 1 al molino 1
Enviar 10 camiones del silo 1 al molino 2
Enviar 5 camiones del silo 2 al molino 2
Enviar 15 camiones del silo 2 al molino 3
Enviar 5 camiones del silo 2 al molino 4
Enviar 10 camiones del silo 3 al molino 4
El costo total será de $520

6. Determine el rango de la siguiente matriz y explique su significado en un contexto de programación lineal:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Para verificar el rango se utilizará el método de eliminación de Gauss

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos por (-2) la primera fila y se la sumamos a la segunda fila
Multiplicamos por (-3) la primera fila y se la sumamos a la tercera fila

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como se observa, solo quedó una fila independiente, lo que indica que las ecuaciones dos y tres eran ecuaciones linealmente dependientes de la primera ecuación.

∴ El rango de la matriz es de 1, por lo que se puede suponer que las restricciones de la matriz se encuentran todas sobre una misma línea. En programación lineal, esto indica que las ecuaciones dos y tres son redundantes y no aportan información adicional al problema.

4.4 – Problemas adicionales

7. Encuentre la factorización LU de la siguiente matriz:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

La factorización LU busca descomponer la matriz inicial en una multiplicación de matrices L, U tales que L sea una matriz triangular inferior y U sea una matriz triangular superior.

Primeramente, se inicializan las matrices L y U, tales que L sea la matriz identidad y U sea igual a la matriz inicial.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Comenzamos con hacer cero los elementos de U que estén debajo de la diagonal y calculando su multiplicador M .

En este caso, solo será necesario hacer 0 el elemento U_{21}

Calculamos M

$$M = \frac{U_{21}}{U_{11}} = \frac{6}{4} = 1.5$$

Multiplicamos la primera fila de U por M y se lo sumamos a la segunda fila

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1.5 \end{bmatrix}$$

Actualizamos la matriz L con el multiplicador M

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

∴ La factorización LU de la matriz D es

$$D = L * U$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.5 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1.5 \end{bmatrix}$$

8. <u>Resuelva el siguiente sistema mediante factorización LU:</u>

$$\begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ 2x + 3y + 3z = 14 \\ y + 4z = 8 \end{cases}$$

Reescribimos el sistema en las matrices $A * X = B$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Aplicamos la factorización LU

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

Hacer 0 U_{21}

Calculamos M

$$M = \frac{2}{1} = 2$$

Multiplicamos la primer fila de U por M y se lo restamos a la segunda fila

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Actualizamos la matriz L

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hacer 0 U_{32}

Calculamos M

$$M = \frac{1}{-1} = -1$$

Multiplicamos la segunda fila de U por M y se lo restamos a la tercera fila

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Actualizamos la matriz L

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Así bien, tenemos

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Ahora, para resolver el sistema con la factorización LU, definimos un vector intermedio y de la forma $L * y = B$, para después resolver $U * X = y$

Definimos y

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Resolvemos $L * y = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 6$$
$$2y_1 + y_2 = 14 \rightarrow 2(6) + y_2 = 14 \rightarrow \ y_2 = 2$$
$$-y_2 + y_3 = 8 \rightarrow \ -(2) + y_3 = 8 \rightarrow \ y_3 = 10$$

Obtenemos

$$y = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Resolvemos $U * X = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$5z = 10 \rightarrow z = 2$$
$$-y + z = 2 \rightarrow y = 0$$
$$x + 2y + z = 6 \rightarrow x = 4$$

∴ La solución al sistema es

$$x = 4, y = 0, z = 2$$

9. <u>Determine si la matriz siguiente es diagonalizable y justifique su respuesta:</u>

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se dice que un matriz nxn es diagonalizable si tiene n autovalores y la multiplicidad geométrica de cada auto valor es igual a su multiplicidad algebraica.

Encontramos los autovalores de E

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 0$$
$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$
$$\lambda = 1$$

λ tiene multiplicidad algebraica de 2, ya que ambos valores de λ son 1.

Encontramos los autovectores de λ

Sea $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 2 \\ 0 & 1-1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obtenemos la ecuación

$$2v_2 = 0$$

v_1 puede tomar cualquier valor, por lo que el autovector es

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La multiplicidad geométrica de λ es entonces 1, ya que solo hemos encontrado un autovector.

En conclusión, la multiplicidad algebraica de λ es 2, pero su multiplicidad geométrica es 1.

$$2 \neq 1$$

∴ La matriz no es diagonalizable.

10. <u>Explique y aplique el método de Jacobi para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:</u>

$$\begin{cases} 10x + 2y - z = 27 \\ -3x - 6y + 2z = -61 \\ x + y + 5z = -21 \end{cases}$$

El método de Jacobi es un algoritmo que, mediante iteraciones, busca la solución a un sistema de ecuaciones lineales de la forma $A * x = b$, siempre que A sea una matriz cuadrada y x el vector de incógnitas a encontrar.

Este algoritmo es utilizado principalmente cuando la matriz A es diagonalmente dominante, esto es, que cada elemento de la diagonal principal sea mayor que la suma de los demás elementos de su fila.

El método consiste en despejar una incógnita por ecuación, para después aproximar los resultados de estas. En la primera iteración, se supone que el valor de las incógnitas es 0 y se calcula la primera aproximación para cada una. Para la siguiente iteración, se utilizan los valores aproximados en la iteración anteriormente. Así sucesivamente hasta que los valores se mantengan dentro de un error predefinido, calculado como la raíz cuadrada de la sumatoria del cuadrado del valor actual menos el valor de la iteración anterior de cada incógnita, o bien:

$$\varepsilon = \sqrt{(x^{(k+1)} - x^k)^2 + (y^{(k+1)} - y^k)^2 + (z^{(k+1)} - z^k)^2}$$

Para resolver el sistema, comenzamos despejando cada incógnita por ecuación:

$$x = \frac{27 - 2y + z}{10}$$
$$y = \frac{-61 + 3x - 2z}{-6} = \frac{61 - 3x + 2z}{6}$$
$$z = \frac{-21 - x - y}{5}$$

Establecemos los valores iniciales de las incógnitas

$$x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$$

Iteración 1

$$x^{(1)} = \frac{27 - 2(0) + 0}{10} = 2.7$$
$$y^{(1)} = \frac{61 - 3(0) + 2(0)}{6} = 10.17$$
$$z^{(1)} = \frac{-21 - 0 - 0}{5} = -4.2$$
$$\varepsilon = \sqrt{(2.7 - 0)^2 + (10.17 - 0)^2 + (-4.2 - 0)^2} = 11.33$$

Iteración 2

$$x^{(2)} = \frac{27 - 2(10.17) - 4.2}{10} = 0.246$$
$$y^{(2)} = \frac{61 - 3(2.7) + 2(-4.2)}{6} = 7.42$$
$$z^{(2)} = \frac{-21 - 2.7 - 10.17}{5} = -6.774$$
$$\varepsilon = \sqrt{(0.246 - 2.7)^2 + (7.42 - 10.17)^2 + (-6.774 + 4.2)^2} = 4.49$$

Iteración 3

$$x^{(3)} = \frac{27 - 2(7.42) - 6.774}{10} = 0.538$$
$$y^{(3)} = \frac{61 - 3(0.246) + 2(-6.774)}{6} = 7.78$$
$$z^{(3)} = \frac{-21 - 0.246 - 7.42}{5} = -5.733$$
$$\varepsilon = \sqrt{(0.538 - 0.246)^2 + (7.78 - 7.42)^2 + (-5.733 + 6.774)^2} = 1.139$$

Así sucesivamente hasta que el error sea menor a lo deseado.

∴ El valor aproximado de las incógnitas es

$$x = 0.53, y = 7.78, z = -5.733$$