Ассоциативность сложения в арифметике Пеано $\vdash (x+y)+z = x+(y+z)$

Док - во: индукция по z

Базис:

$$\vdash (x+y)+0 = x+(y+0) \text{ замена равных}$$

$\vdash x+y = (x+y)+0$ своб. конкретизация $\qquad \vdash x+y = x+(y+0)$ замена равных

$\vdash x = x+0$ симм. равенства $\qquad \vdash y = y+0$ симм. равенства $\qquad \vdash x+y = x+y$ доп. аксиома

$\vdash x+0 = x$ аксиома $\qquad \vdash y+0 = y$ аксиома

Индукционный шаг:

$$\vdash (x+y)+z = x+(y+z) \longrightarrow (x+y)+s(z) = x+(y+s(z)) \text{ введение } \longrightarrow$$

$$\underbrace{(x+y)+z = x+(y+z)}_{\varphi} \vdash (x+y)+s(z) = x+(y+s(z))$$

$$\varphi \vdash (x+y)+s(z) = x+(y+s(z)) \text{ замена равных}$$

$\varphi \vdash s(y+z) = y+s(z)$ ут. $\qquad \varphi \vdash (x+y)+s(z) = x+s(y+z)$ замена равных

$\vdash s(y+z) = y+s(z)$ симм. равенства $\qquad$ (1) $\qquad$ (2) $\qquad$ (3)

$\vdash y+s(z) = s(y+z)$ аксиома

$$\text{(1) } \varphi \vdash s((x+y)+z) = (x+y)+s(z) \text{ ут.}$$

$$\vdash s\big((x+y)+z\big) = (x+y)+s(z) \text{ своб. конкретизация}$$

$$\vdash s(x+z) = x+s(z) \text{ симм. равенства}$$

$$\vdash x+s(z) = s(x+z) \text{ аксиома}$$

$$\text{(2) } \varphi \vdash s\big(x+(y+z)\big) = x+s(y+z) \text{ ут.}$$

$$\vdash s\big(x+(y+z)\big) = x+s(y+z) \text{ своб. конкретизация}$$

$$\vdash s(x+y) = x+s(y) \text{ симм. равенства}$$

$$\vdash x+s(y) = s(x+y) \text{ аксиома}$$

$$\text{(3) } (x+y)+z = x+(y+z) \vdash s\big((x+y)+z\big) = s\big(x+(y+z)\big) \text{ замена равных}$$

$\varphi \vdash (x+y)+z = x+(y+z)$ ут. $\qquad (x+y)+z = (x+y)+z \vdash s\big((x+y)+z\big) = s\big((x+y)+z\big)$ ут.

$\vdash (x+y)+z = x+(y+z)$ аксиома $\qquad \vdash s\big((x+y)+z\big) = s\big((x+y)+z\big)$ доп. аксиома

$\varphi \equiv (x+y)+z = x+(y+z)$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \varphi \quad \text{вв. спр. } \forall\text{, т. к. обратимое правило}}{\vdash (\forall x)\varphi \quad \text{сечение}}}{\vdash (\varphi)^x_0 \quad \text{базис} \qquad \dfrac{(\varphi)^x_0 \vdash (\forall x)\varphi \ \text{сечение}}{\dfrac{(\varphi)^x_0 \vdash (\forall x)\big(\varphi \longrightarrow (\varphi)^x_{s(x)}\big)\text{ут.}}{\dfrac{\vdash (\forall x)\big(\varphi \longrightarrow (\varphi)^x_{s(x)}\big)\text{вв. спр. } \forall}{\vdash \varphi \longrightarrow (\varphi)^x_{s(x)} \ \text{инд. шаг}}} \qquad (\varphi)^x_0, (\forall x)\big(\varphi \longrightarrow (\varphi)^x_{s(x)}\big) \vdash (\forall x)\varphi \quad \text{акс. инд.}}}$$