Отсчет по лабораторной работе №4

Модель гармонических колебаний

Динькиев Валерий

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

Построить модель гармонических колебаний с помощью Python.

2 Задание

Вариант 16

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 2x = 0$
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 3\dot{x} + 3x = 0$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = \sin(4t)$

На интервале $t \in [0; 44]$ (шаг 0,05) с начальными условиями $x_0 = 1,5, y_0 = 1,1$

3 Выполнение лабораторной работы

1. Колебания без затуханий и без действий внешней силы

1.1. Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

Начальные условия:

Потери энергии отсутсвуют в системе $\gamma = 0$

Собственная частота колебаний $\omega = 2$.

$x_0 = 1,5, y_0 = 1,1$.

Правая часть уравнения $f(t) = 0$.

1.2. Оформил начальные условия на Python и записал в виде функции решение правой части уравнения:

```
x_0 = np.array([1.5, 1.1])
w_1 = 2 #частота колебаний
g_1 = 0.0 #затухание


def F_1(t):
    f = 0
    return f
```

1.3. Записал условия времени в программу на Python.

Решение ищем на интервале $t \in [0; 44]$ (шаг 0,05):

$t_0 = 0$ – начальный момент времени,

$t_{max} = 44$ – предельный момент времени,

$dt = 0,05$ – шаг изменения времени.

Код на Python:

```
t_0 = 0
t_max = 44
dt = 0.05
t = np.arange(t_0, t_max, dt)
```

1.4. Представил заданное уравнение второго порядка в виде системы двух уравнений первого порядка и записал в виде функции на Python:

```
def Y_1(x, t):
    dx1_1 = x[1]
    dx1_2 = - w_1*x[0] - g_1*x[1] - F_1(t)
    return dx1_1, dx1_2
```

1.5. Запрограммировал решение системы уравнений:

```
x_1 = odeint(Y_1, x_0, t)
```

1.6. Переписал отдельно x в y_1, а $\dot{x}$ в y_2:

```
y1_1 = x_1[:, 0]
y1_2 = x_1[:, 1]
```

1.7. Описал построение фазового портрета гармонических колебаний:

```
plt.plot(y1_1, y1_2)
```

2. Колебания с затуханием и без действий внешней силы

2.1. Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

Начальные условия:

Потери энергии в системе $\gamma = 3$

Собственная частота колебаний $\omega = 3$.

$x_0 = 1,5, y_0 = 1,1$.

Правая часть уравнения $f(t) = 0$.

2.2. Оформил начальные условия на Python и записал в виде функции решение правой части уравнения:

```
x_0 = np.array([1.5, 1.1])
w_2 = 3 #частота колебаний
g_2 = 3 #затухание


def F_2(t):
    f = 0
    return f
```

2.3. Условия интервала мы уже задали в начале.

2.4. Представил заданное уравнение второго порядка в виде системы двух уравнений первого порядка и записал в виде функции на Python:

```
def Y_2(x, t):
    dx2_1 = x[1]
    dx2_2 = - w_2*x[0] - g_2*x[1] - F_2(t)
    return dx2_1, dx2_2
```

2.5. Запрограммировал решение системы уравнений:

```
x_2 = odeint(Y_2, x_0, t)
```

2.6. Переписал отдельно x в y_1, а $\dot{x}$ в y_2:

```
y2_1 = x_2[:, 0]
y2_2 = x_2[:, 1]
```

2.7. Описал построение фазового портрета гармонических колебаний с затуханием:

```
plt.plot(y2_1, y2_2)
```

3. Колебания с затуханием и под действием внешней силы

3.1. Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

Начальные условия:

Потери энергии в системе $\gamma = 4$

Собственная частота колебаний $\omega = 4$.

$x_0 = 1,5, y_0 = 1,1$.

Правая часть уравнения $f(t) = \sin(4t)$.

3.2. Оформил начальные условия на Python и записал в виде функции решение правой части уравнения:

```
x_0 = np.array([1.5, 1.1])
w_3 = 4 #частота колебаний
g_3 = 4 #затухание


def F_3(t):
    f = math.sin(4*t)
    return f
```

3.3. Условия интервала мы уже задали в начале.

3.4. Представил заданное уравнение второго порядка в виде системы двух уравнений первого порядка и записал в виде функции на Python:

```
def Y_3(x, t):
    dx3_1 = x[1]
    dx3_2 = - w_3*x[0] - g_3*x[1] - F_3(t)
    return dx3_1, dx3_2
```

3.5. Запрограммировал решение системы уравнений:

```
x_3 = odeint(Y_3, x_0, t)
```

3.6. Переписал отдельно x в y_1, а $\dot{x}$ в y_2:

```
y3_1 = x_3[:, 0]
y3_2 = x_3[:, 1]
```

3.7. Описал построение фазового портрета гармонических колебаний с затуханием и под действием внешней силы:

```
plt.plot(y3_1, y3_x2)
```

4. Код на Python

```
import math
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

# начальные условия
x_0 = np.array([1.5, 1.1]) # вектор начальных условий
w_1 = 2 # частота колебаний
g_1 = 0.0 # затухание

# интервал
t_0 = 0
t_max = 44
dt = 0.05 # шаг изменения времени

t = np.arange(t_0, t_max, dt)
```

```
# функция для вычисления правой части уравнения
def F_1(t):
    f = 0
    return f

# заданное уравнение в виде системы двух уравнений первого порядка
def Y_1(x, t):
    dx1_1 = x[1]
    dx1_2 = - w_1*x[0] - g_1*x[1] - F_1(t)
    return dx1_1, dx1_2

# решение системы уравнений
x_1 = odeint(Y_1, x_0, t)

y1_1 = x_1[:, 0]
y1_2 = x_1[:, 1]

# построение фазового портрета гармонических колебаний
plt.plot(y1_1, y1_2)
plt.grid(axis = 'both')

w_2 = 3.0 # частота колебаний
g_2 = 3.0 # затухание

# функция для вычисления правой части уравнения
def F_2(t):
    f = 0
    return f
```

```
# заданное уравнение в виде системы двух уравнений первого порядка
def Y_2(x, t):
    dx2_1 = x[1]
    dx2_2 = - w_2*x[0] - g_2*x[1] - F_2(t)
    return dx2_1, dx2_2

# решение системы уравнений
x_2 = odeint(Y_2, x_0, t)
y2_1 = x_2[:, 0]
y2_2 = x_2[:, 1]

# построение фазового портрета гармонических колебаний с затуханием
plt.plot(y2_1, y2_2)
plt.grid(axis = 'both')

w_3 = 4.0 # частота колебаний
g_3 = 4.0 # затухание

# функция для вычисления правой части уравнения
def F_3(t):
    f = math.sin(4*t)
    return f

# заданное уравнение в виде системы двух уравнений первого порядка
def Y_3(x, t):
    dx3_1 = x[1]
    dx3_2 = - w_3*x[0] - g_3*x[1] - F_3(t)
    return dx3_1, dx3_2
```

решение системы уравнений

x_3 = odeint(Y_3, x_0, t)

y3_1 = x_3[:, 0]

y3_2 = x_3[:, 1]

построение фазового портрета гармонических колебаний с затуханием и под действием внешней

plt.plot(y3_1, y3_2)

plt.grid(axis = 'both')

4.1. Построил фазовый портрет гармонического осциллятора (см. рис. 3.1, 3.2 и 3.3):

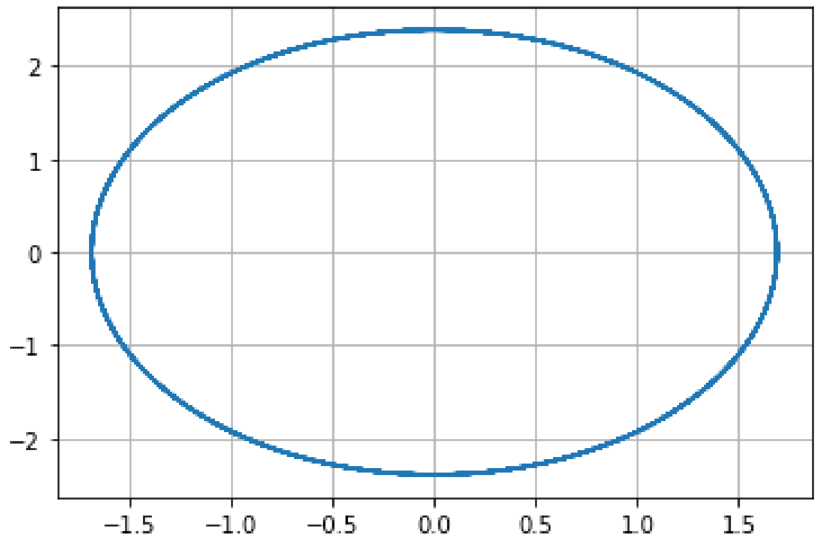

Figure 3.1: Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

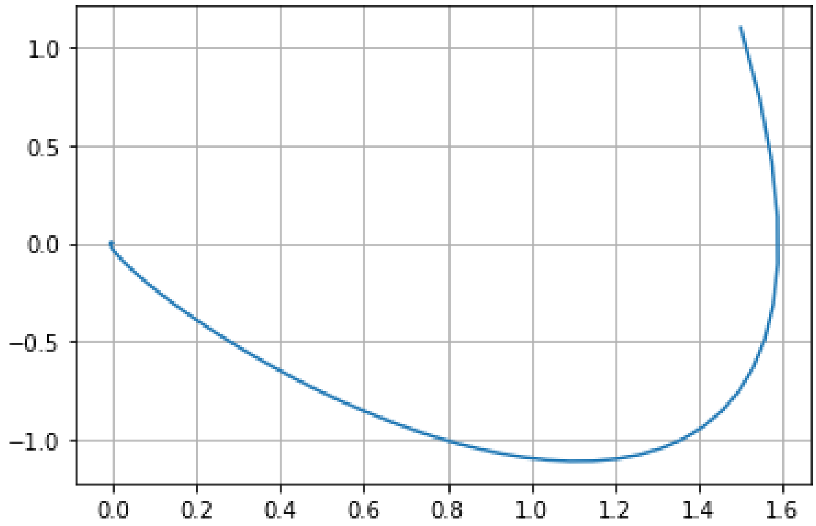

Figure 3.2: Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

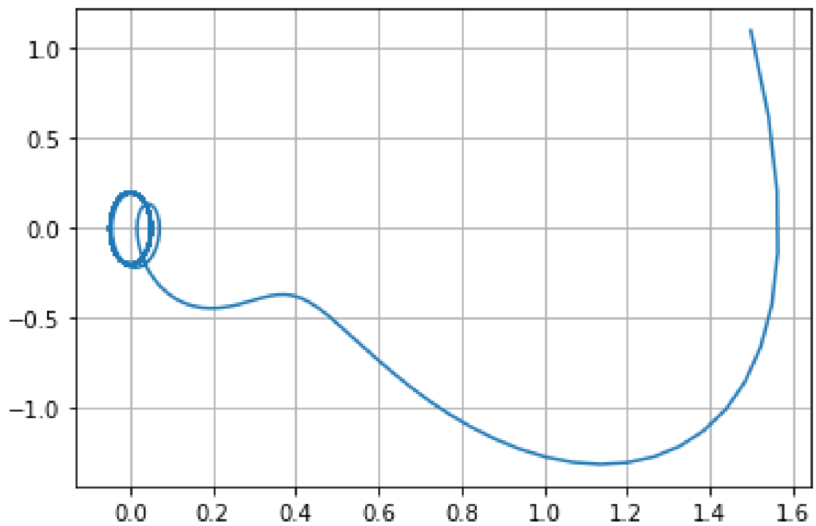

Figure 3.3: Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

4 Выводы

Построил модель гармонических колебаний с помощью Python.

5 Ответы на вопросы к лабораторной работе

1. Запишите простейшую модель гармонических колебаний

$x = x_m cos(\omega t + \varphi_0)$.

2. Дайте определение осциллятора

Осциллятор — система, совершающая колебания, то есть показатели которой периодически повторяются во времени.

3. Запишите модель математического маятника

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

4. Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

4.1. Дифф. уравнение 2-го порядка

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

4.2. Сделаем замену.

$$y = \dot{x}$$

4.3 Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y = \dot{x} \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

5. Что такое фазовый портрет и фазовая траектория?

Фазовый портрет — общая картина поведения системы, возникающая, если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости.

Фазовая траектория — гладкая кривая в фазовой плоскости, отвечающая решению уравнения движения как функции времени.