



TOR VERGATA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

Meccanica Applicata alle Macchine

Analisi e Sintesi di una sospensione per moto

Professore:

Ettore Pennestrì

Studente:

Valerio Auriemma

Matricola:

0334683

Anno accademico 2022/2023

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Brevetto U.S. 4,440,413	3
2	Analisi cinematica del quadrilatero	4
2.1	Misurazioni dal brevetto	4
2.2	Scrittura e manipolazione dell'equazioni di chiusura	5
2.3	Analisi velocità angolari quadrilatero articolato	7
2.4	Analisi accelerazioni angolari quadrilatero articolato	7
2.5	Implementazione software su MATLAB	9
2.6	Risultati grafici	14
2.7	Controprova con Aronhold-Kennedy	15
3	Sintesi cinematica del quadrilatero	17
3.1	Procedura di calcolo della sintesi infinitesima tramite Carter - Hall .	18
3.1.1	Calcolo dei coefficienti differenziali R, R', R''	18
3.1.2	Calcolo angolo ψ tra l'asta biella e asse di collineazione . . .	19
3.1.3	Calcolo del diametro del cerchio di Carter - Hall	19
3.1.4	Calcolo delle coordinate del centro di istantanea rotazione P_{13}	19
3.1.5	Calcolo della lunghezza aste manovella e bilanciere	20
3.1.6	Verifica coefficienti differenziali	22
3.2	Codice MATLAB	24
3.3	Procedura di calcolo della sintesi per moti finiti tramite equazione di Freudenstein	29
3.3.1	Codice implementativo e risultati	30
4	Angolo di trasmissione	33
4.1	Perché è importante tenere l'angolo di trasmissione intorno ai 90° ? .	33
4.2	Come siamo andati a calcolare l'angolo di trasmissione?	33
4.3	Come relazioniamo l'andamento dell'angolo di trasmissione con il forcellone della nostra moto?	33
4.4	Andamenti angolo di trasmissione per diversi quadrilateri	34
5	Bibliografia	36

1 Introduzione

Il problema delle vibrazioni esiste in tutti i veicoli con motore a scoppio.

Il motore però non è l'unico responsabile, infatti anche il manto stradale spesso presenta delle irregolarità, come buche o dossi, che possono creare delle sollecitazioni non volute al veicolo in modo poco comodo o addirittura pericoloso per la marcia.

Le sospensioni posteriori ed anteriori, perciò, consentono di assorbire tali irregolarità e di garantire una maggiore aderenza al manto stradale.

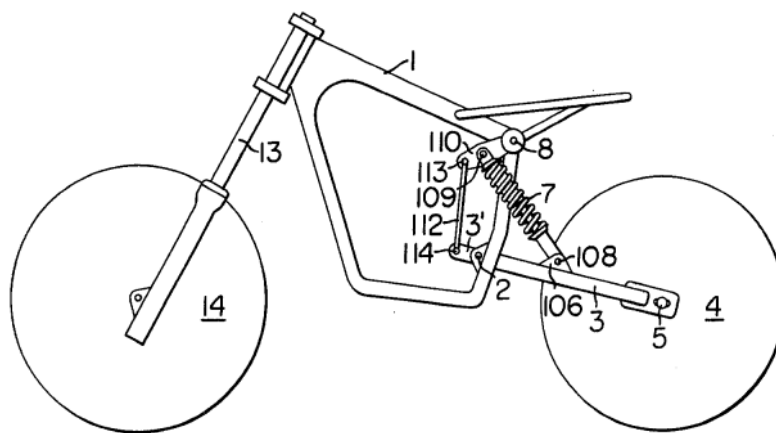


Figura 1: Motociclo del brevetto

In particolare:

- La sospensione anteriore presenta un principale scopo, ovvero attutire la compressione dovuta alla frenata, per evitare che il motociclo si imbarchi in avanti.
- La sospensione posteriore, invece, ha una doppia funzione: oltre all'attutire le irregolarità, come quella anteriore, deve resistere alla compressione in fase di accelerazione e alla decompressione in fase di frenata.

In tale esercitazione si richiede proprio la progettazione della sospensione posteriore di un motociclo, secondo le esigenze illustrate nel brevetto US 4,440,413, assegnato dalla società Honda, in cui vengono proposte alternative di realizzazione di tale sospensione per ovviare a problemi presenti nei vecchi modelli.

1.1 Brevetto U.S. 4,440,413

In particolare, la sospensione posteriore presentata in tale brevetto basa il suo funzionamento sulla catena cinematica quadrilatero articolato.

L'uso di una sospensione a quadrilatero di questo tipo consente di ottenere un vantaggio meccanico che cresce con l'escursione della ruota.

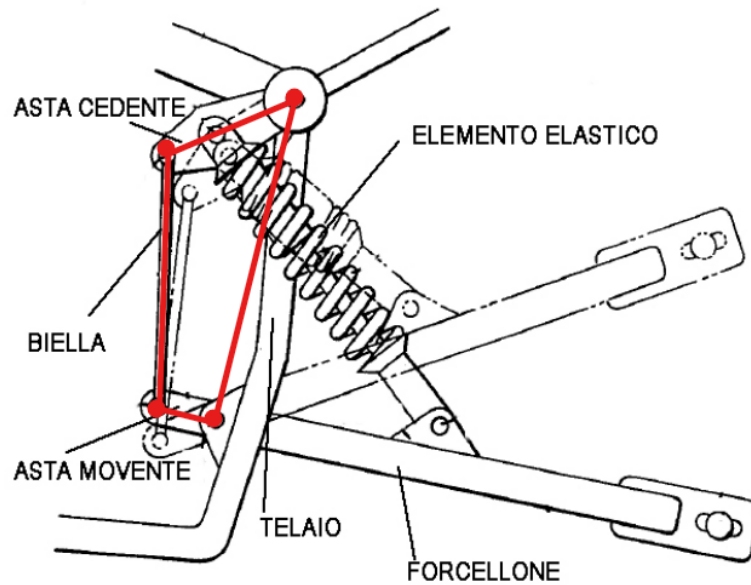


Figura 2: Vista del quadrilatero articolato

Tale invenzione è stata fatta quindi per ovviare a tale svantaggio ed ha come principale obbiettivo la fornitura di una sospensione per ruota posteriore, in gradi di migliorare la guida e prestazioni di marcia.

Ciò è fatto incrementando l'escursione della compressione dell'ammortizzatore della ruota posteriore, in proporzione al crescente spostamento verso l'alto di quest'ultimo.

2 Analisi cinematica del quadrilatero

Per descrivere le caratteristiche del moto del quadrilatero, le quali: posizioni, velocità e accelerazioni, si andrà a studiare l'analisi cinematica di esso.

L'analisi sarà principalmente strutturata in diverse fasi:

- Misurazioni dal brevetto:
 - Lunghezza membri quadrilatero;
 - Angolo di lavoro massimo e minimo del nostro movente;
- Scrittura e manipolazione delle equazioni di chiusura;
- Derivata prima e seconda di tali equazioni per risalire a velocità e accelerazioni del quadrilatero.
- Implementazione MATLAB e plot andamenti.

2.1 Misurazioni dal brevetto

Per andare a misurare i membri del quadrilatero e la massima escursione del nostro "angolo di controllo", che sarebbe l'angolo compreso tra il telaio e la manovella, si è andati a stampare su un foglio A4 la sospensione del brevetto.

Le misure fatte su tale foglio ci forniscono i seguenti dati:

- $\theta_1 \in [90^\circ, 125^\circ]$
- Telaio = 7.25 cm
- Manovella = 1.3 cm
- Biella = 5.6 cm
- Bilancere = 3 cm

Ora andiamo a riportare anche le lunghezze dei membri normalizzate per il telaio, questo ci serve per avere un futuro riscontro con i risultati della sintesi dove verrà ipotizzato il telaio di lunghezza unitaria:

- $\theta_1 \in [90^\circ, 125^\circ]$
- Telaio = 1 cm
- Manovella = 0.1793 cm
- Biella = 0.7724 cm

- Bilancere = 0.4138 cm

Nota bene! La grandezza dell'immagine sulla quale sono state fatte le misurazioni non influisce sugli angoli, a differenza, le lunghezze dei membri sono influenzati da tale scelta, questa scelta può essere immediatamente cambiata andando ad introdurre un fattore di scala o andando a normalizzare, ma ciò non influenza lo studio.

2.2 Scrittura e manipolazione dell'equazioni di chiusura

Andiamo a scrivere l'equazione di chiusura riguardante il nostro quadrilatero articolato, sapendo che esiste un solo circuito indipendente:

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4 = 0$$

Il quale, tramite la rappresentazione in numeri complessi, può essere riscritto nel seguente modo:

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} + r_4 e^{i\theta_4} = 0$$

Ricordando l'espressione in forma trigonometrica dei numeri complessi:

$$r e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

arriviamo alla seguente riscrittura del sistema:

$$\begin{cases} r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 + r_4 \cos \theta_4 = 0 \\ r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 + r_4 \sin \theta_4 = 0 \end{cases}$$

Ora, assumendo θ_1 nota e $\theta_4 = \pi$, il sistema precedente può essere riscritto nel seguente modo:

$$\begin{cases} r_2 \cos \theta_2 = -r_3 \cos \theta_3 - r_1 \cos \theta_1 + r_4 \\ r_2 \sin \theta_2 = -r_3 \sin \theta_3 - r_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (1)$$

Ora, elevando al quadrato ambo i membri e sommando le due equazioni, arriviamo al seguente risultato:

$$(r_3 \cos \theta_3 + r_1 \cos \theta_1 - r_4)^2 + (r_3 \sin \theta_3 + r_1 \sin \theta_1)^2 - r_2^2 = 0$$

il quale può essere riscritto in modo semplificato nel seguente modo:

$$A \sin \theta_3 + B \cos \theta_3 + C = 0 \quad (2)$$

adottando la seguente notazione:

$$A = 2r_1 r_3 \sin \theta_1$$

$$B = 2r_3(r_1 \cos \theta_1 - r_4)$$

$$C = r_1^2 + r_3^2 + r_4^2 - r_2^2$$

Adottando la seguente sostituzione

$$t = \tan \frac{\theta_3}{2}$$

otteniamo:

$$\sin \theta_3 = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos \theta_3 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

la quale ci permette di riscrivere l'equazione (2) nel seguente modo

$$(B - C)t^2 + 2At + (B + C) = 0$$

Abbiamo quindi ottenuto banalmente un'equazione di secondo grado, la quale, presenta due soluzioni reali e distinte. Adesso andiamo a risalire al nostro θ_3 usando la relazione inversa descritta in precedenza:

$$\theta_{3,1} = 2 \arctan(t_1) \quad \theta_{3,2} = 2 \arctan(t_2)$$

Tali soluzioni rappresentano univocamente due configurazioni del quadrilatero articolato:

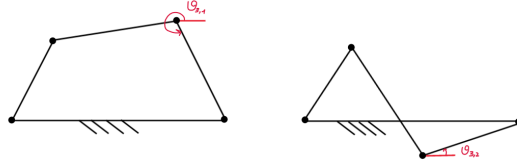


Figura 3: Soluzioni angolo θ_3 del quadrilatero articolato

Per le caratteristiche del quadrilatero preso in oggetto dal brevetto, è stata scelta la soluzione negativa ($\theta_3 < 0$). Ora che conosco θ_3 lo rendo noto nel mio sistema (1) ed utilizzo la seguente notazione:

$$\begin{cases} x = r_2 \cos \theta_2 = -r_3 \cos \theta_3 - r_1 \cos \theta_1 + r_4 \\ y = r_2 \sin \theta_2 = -r_3 \sin \theta_3 - r_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (1)$$

Ora posso trovarmi θ_2 andando semplicemente ad usare:

$$\theta_2 = \text{atan2}(y, x)$$

2.3 Analisi velocità angolari quadrilatero articolato

Tenendo conto che:

$$\omega_i = \frac{d\theta_i}{dt}$$

possiamo derivare rispetto al tempo i termini presenti all'interno delle equazioni messe precedentemente a sistema:

$$\begin{cases} -r_2\omega_2 \sin \theta_2 - r_3\omega_3 \sin \theta_3 = r_1\omega_1 \sin \theta_1 \\ r_2\omega_2 \cos \theta_2 + r_3\omega_3 \cos \theta_3 = -r_1\omega_1 \cos \theta_1 \end{cases}$$

Le incognite di tale sistema lineare saranno ovviamente ω_2 e ω_3 .

La velocità angolare ω_1 deve essere assegnata insieme a θ_1 , essa dovrà essere costante.

Tale sistema può essere riscritto anche in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} r_2 \sin \theta_2 & r_3 \sin \theta_3 \\ r_2 \cos \theta_2 & r_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_1\omega_1 \sin \theta_1 \\ -r_1\omega_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix}$$

Esso presenterà un'unica soluzione se il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero. In tal caso la soluzione sarà data da:

$$\begin{cases} \omega_2 = \frac{\omega_1 r_1 r_3 \sin(\theta_1 - \theta_3)}{r_2 r_3 \sin(\theta_3 - \theta_2)} \\ \omega_3 = \frac{\omega_1 r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)}{r_2 r_3 \sin(\theta_3 - \theta_2)} \end{cases}$$

2.4 Analisi accelerazioni angolari quadrilatero articolato

Come fatto precedentemente, tenendo conto che:

$$\alpha_i = \frac{d\omega_i}{dt}$$

possiamo derivare rispetto al tempo i termini ω_i presenti all'interno delle equazioni messe precedentemente a sistema:

$$\begin{cases} -r_2 \cos(\theta_2)\omega_2^2 - r_2 \sin(\theta_2)\alpha_2 - r_3 \cos(\theta_3)\omega_3^2 - r_3 \sin(\theta_3)\alpha_3 = r_1 \cos(\theta_1)\omega_1^2 \\ -r_2 \sin(\theta_2)\omega_2^2 + r_2 \cos(\theta_2)\alpha_2 - r_3 \sin(\theta_3)\omega_3^2 + r_3 \cos(\theta_3)\alpha_3 = r_1 \sin(\theta_1)\omega_1^2 \end{cases}$$

Come prima, esso è un sistema lineare, nelle incognite α_2 e α_3 .

Possiamo sempre riscriverlo in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} -r_2 \sin \theta_2 & -r_3 \sin \theta_3 \\ r_2 \cos \theta_2 & r_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \cos \theta_1 \omega_1^2 + r_2 \cos \theta_2 \omega_2^2 + r_3 \cos \theta_3 \omega_3^2 \\ r_1 \sin \theta_1 \omega_1^2 + r_2 \sin \theta_2 \omega_2^2 + r_3 \sin \theta_3 \omega_3^2 \end{bmatrix}$$

Esso presenterà un'unica soluzione se il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero. In tal caso la soluzione sarà data da:

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{r_3 \cos \theta_3 b_1 + r_3 \sin \theta_3 b_2}{-r_2 r_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \\ \alpha_3 = \frac{r_2 \cos \theta_2 b_1 + r_2 \sin \theta_2 b_2}{r_2 r_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \end{cases}$$

dove b_1 e b_2 sono:

$$\begin{aligned} b_1 &= r_1 \cos \theta_1 \omega_1^2 + r_2 \cos \theta_2 \omega_2^2 + r_3 \cos \theta_3 \omega_3^2 \\ b_2 &= r_1 \sin \theta_1 \omega_1^2 + r_2 \sin \theta_2 \omega_2^2 + r_3 \sin \theta_3 \omega_3^2 \end{aligned}$$

Tali risultati sarebbero stati raggiunti ugualmente tramite il metodo di Newton - Raphson.

Ma perché non è stato usato il metodo di Newton-Rapson?

L'unica motivazione è che tale metodo usa una serie di iterazioni aggiuntiva per andare a stimare il valore della variabile ricercata, andando ad aumentare il costo computazionale del calcolo.

2.5 Implementazione software su MATLAB

```
%%%%%%%%%% ANALISI

% INPUT: i nostri input sarebbero le lunghezze delle
%       aste prese sul
%       brevetto: r1, r2, r3, r4.

% Definisco le dimensioni delle aste, misurate
%       accuratamente dal brevetto
r1 = 1.3;           % Manovella
r2 = 5.6;           % Biella
r3 = 3;             % Bilanciere
r4 = 7.25;          % Telaio

% Lunghezze aste normalizzate dal telaio
vect_norm = [r1 r2 r3 r4]/r4;

% Definisco la massima escursione del movente
th1_degmax = 125;
th1_radmax = deg2rad(th1_degmax);

% Mi costruisco il mio vettore di theta1
th1_deg = 90 : 1 : th1_degmax;
th1_rad = deg2rad(th1_deg);

% Fisso theta4
theta4 = pi;

% Fisso velocit movente senso antiorario
w1 = 1;

% Inizializzazioni delle strutture che serviranno per l'
%       algoritmo
range = size(th1_deg);
range = range(2);

y = zeros(1,range);
x = zeros(1,range);
```

```

th2_rad = zeros(1,range);
th3_rad = zeros(1,range);

w2 = zeros(1,range);
w3 = zeros(1,range);

% alpha
alpha2 = zeros(1,range);
alpha3 = zeros(1,range);

syms t;

for i = 1 : 1 : range
    % Scrivo le mie variabili per andare r1 trovare th3
    A = 2 * r1 * r3 * sin(th1_rad(i));
    B = - 2 * r3 * r4 + 2 * r1 * r3 * cos(th1_rad(i));
    C = r1^2 - r2^2 + r3^2 + r4^2 - 2 * r1 * r4 * cos(
        th1_rad(i));

    % Definisco la mia equazione di 2 grado da
    risolvere
    eq = t^2*(C-B) + 2*A*t + B + C == 0;

    res = solve(eq,t);

    root1 = 2 * atan(res(1));
    root2 = 2 * atan(res(2));

    % Prendo la radice negativa dal risultato dell'
    equazione di 2 grado
    if root1 < 0

        th3_rad(i) = root1;
    else

        th3_rad(i) = root2;
    end

    % Mi trovo th2 andando r1 sostituire i valori di th3
    appena trovati

```

```

y(i) = - r1*sin(th1_rad(i)) - r3*sin(th3_rad(i));
x(i) = r4 - r1*cos(th1_rad(i)) - r3*cos(th3_rad(i));

th2_rad(i) = atan2(y(i),x(i));

% Ora mi calcolo le velocit angolari
% Lo faccio siccome ho [J]{w} = {r2}, senza
  appesantire l'onerosit di
% calcolo vado r1 scrivermi direttamente {w} = ([J
  ]^-1){r2}
detV = r2*r3*sin(th3_rad(i)-th2_rad(i));

w2(i) = w1 * r1 * r3 * sin(th1_rad(i) - th3_rad(i)
)/detV;
w3(i) = w1 * r1 * r2 * sin(th2_rad(i) - th1_rad(i)
)/detV;

% Ora mi calcolo le accelerazioni angolari
detA = -r2*r3*sin(th2_rad(i) - th3_rad(i));

b1 = r1*cos(th1_rad(i)) * w1^2 + r2*cos(th2_rad(i))
  * w2(i)^2 + r3*cos(th3_rad(i)) * w3(i)^2;
b2 = r1*sin(th1_rad(i)) * w1^2 + r2*sin(th2_rad(i))
  * w2(i)^2 + r3*sin(th3_rad(i)) * w3(i)^2;

alpha2(i) = (r3*cos(th3_rad(i))*b1 + r3*sin(th3_rad(
  i))*b2)/detA;
alpha3(i) = -(r2*cos(th2_rad(i))*b1 + r2*sin(th2_rad
  (i))*b2)/detA;

end

th2_deg = rad2deg(th2_rad);
th3_deg = rad2deg(th3_rad);
TxAngle_rad = pi + th3_rad - th2_rad;
TxAngle_deg = rad2deg(TxAngle_rad);

%cftool;

% Grafico gli andamenti

```

```

% Su punto r1

figure(1);

subplot(3,1,1);

plot(th1_deg,th2_deg);
xlabel("Theta1 (deg)");
ylabel("Theta2 (deg)");

subplot(3,1,2);

plot(th1_deg,w2);
xlabel("Theta1 (deg)");
ylabel("W2 (rad/s)");

subplot(3,1,3);

plot(th1_deg,alpha2);
xlabel("Theta1");
ylabel("Alpha2 (rad/s^2)");

% Su punto r2

figure(2);

subplot(3,1,1);

plot(th1_deg,th3_deg);
xlabel("Theta1 (deg)");
ylabel("Theta3 (deg)");

subplot(3,1,2)

plot(th1_deg,w3);
xlabel("Theta1 (deg)");
ylabel("W3 (rad/s)");

subplot(3,1,3);

```

```
plot(th1_deg,alpha3);
xlabel("Theta1 (deg)");
ylabel("Alpha3 (rad/s^2)");

% Angolo di trasmissione

figure(3)
plot(th1_deg,TxAngle_deg);
xlabel("Fork Angle (deg)");
ylabel("Trasmission Angle (deg)");
```

2.6 Risultati grafici

Riportiamo qui di seguito quindi le relazioni degli angoli, velocità angolari e accelerazioni angolari rispetto all'angolo del movente θ_1 (che potrebbe pensarsi come il nostro controllo).

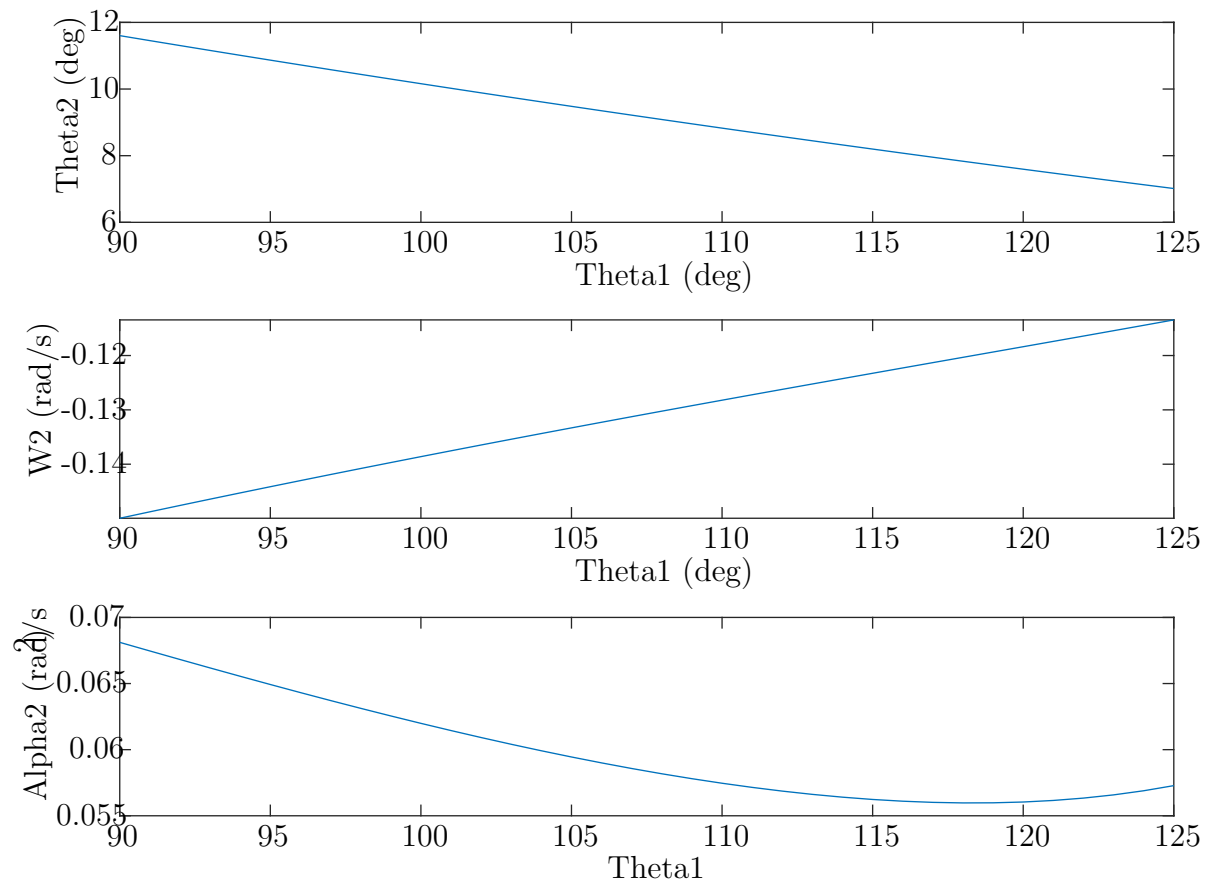


Figura 4: Andamenti $\theta_2, \omega_2, \alpha_2$ rispetto a θ_1

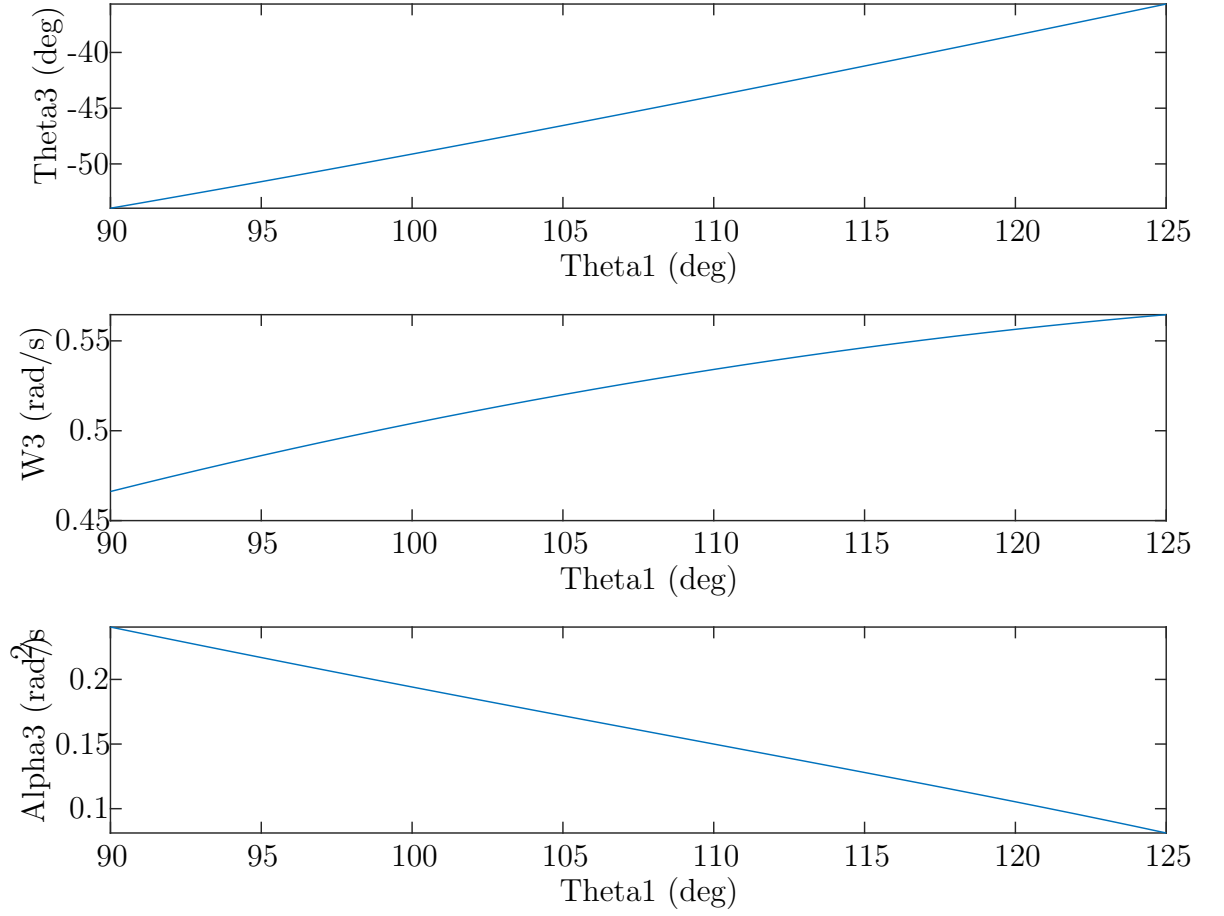


Figura 5: Andamenti $\theta_3, \omega_3, \alpha_3$ rispetto a θ_1

2.7 Controprova con Aronhold-Kennedy

Per la verifica dei versi delle velocità angolari è stato utilizzato il teorema di Aronhold-Kennedy. In particolare sono state portate avanti delle condizioni sulle velocità dei centri di istantanea rotazione P_{13} e P_{12} delle aste non adiacenti.

Iniziamo nel considerare la velocità del centro di istantanea rotazione P_{13} .

Per il teorema di Aronhold-Kennedy:

$$\vec{v}_{P_{13}}^{(1)} = \vec{\omega}_1 \times P_{14}\vec{P}_{13} = \vec{v}_{P_{13}}^{(3)} = \vec{\omega}_3 \times P_{34}\vec{P}_{13}$$

Poiché le velocità di tale punto è ortogonale a tali vettori, allora vale la relazione:

$$\omega_3 = \omega_1 \frac{P_{14}P_{13}}{P_{34}P_{13}}$$

Grazie alla regola della mano destra, tale risultato mostra come la velocità angolare del movente sia, in verso, uguale a quella del cedente e quindi un aumento dell'angolo del movente, corrisponde ad un aumento dell'angolo del cedente.

Similmente, per il calcolo della velocità angolare ω_2 , si noti che:

$$\vec{v}_{P_{12}}^{(1)} = \vec{\omega}_1 \times P_{14}\vec{P}_{12} = \vec{v}_{P_{12}}^{(2)} = \vec{\omega}_2 \times P_{24}\vec{P}_{12}$$

Infine quindi:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{P_{14}P_{12}}{P_{24}P_{12}}$$

Il cui verso, calcolato tramite la regola della mano destra, è opposto rispetto alla velocità angolare ω_1 .

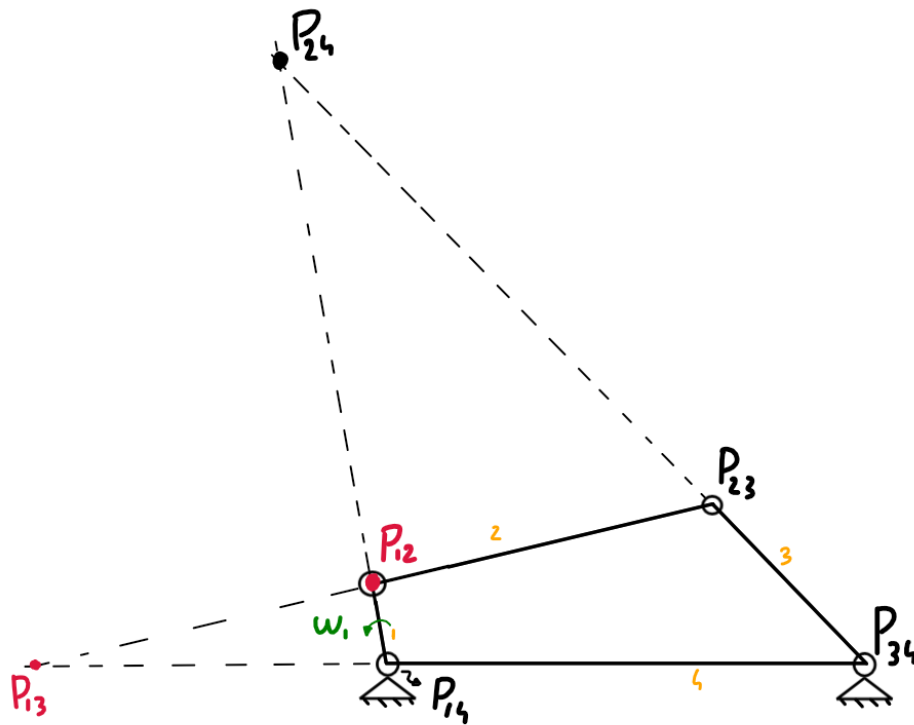


Figura 6: Centri di istantanea rotazione quadrilatero articolato

3 Sintesi cinematica del quadrilatero

L'obiettivo più complesso di tale esercitazione è stata la sintesi cinematica del quadrilatero analizzato precedentemente.

Per una maggiore chiarezza, per sintesi cinematica si intende quel procedimento atto a trovare la geometria e la struttura di un meccanismo per realizzare le leggi del moto assegnate.

Ovviamente le specifiche della sintesi cinematica impongono che esista una relazione prestabilita fra le variabili di posizione, velocità ed accelerazione di punti o direzioni appartenenti a membri del meccanismo.

Il primo passo è stato capire la relazione che intercorre tra gli angoli θ_1 e θ_3 , in questo caso si è presa una cubica come funzione:

$$\theta_3 = p_1\theta_1^3 + p_2\theta_1^2 + p_3\theta_1 + p_4$$

Per fare ciò si è usato il tool MATLAB 'Curve Fitter'. Tale tool va a trovare una funzione che rappresenti il legame che esiste tra ascisse (angolo movente) in cui è stato inserito il vettore contenente il range di escursione della manovella (in radianti) e ordinate (angolo cedente) sempre in radianti.

Ricordiamo che tali vettori sono stati calcolati tramite l'analisi.

Messi quindi come input tali vettori, si è deciso di approssimare la curva come una cubica, quindi, il tool ci ha restituito i coefficienti di tale cubica, i quali:

- $p_1 = -0.04238$;
- $p_2 = 0.319$;
- $p_3 = -0.2223$;
- $p_4 = -1.216$;

Nota bene! Gli intervalli di θ_1 e θ_3 sono stati presi dall'analisi.

In particolare, per tale progetto sono stati adottati due metodi di sintesi:

- una sintesi per moti infinitesimi del terzo ordine generatore di funzione mediante il cerchio di Carter-Hall.
- una sintesi per moti finiti generatore di funzione mediante l'equazione di Freudenstein.

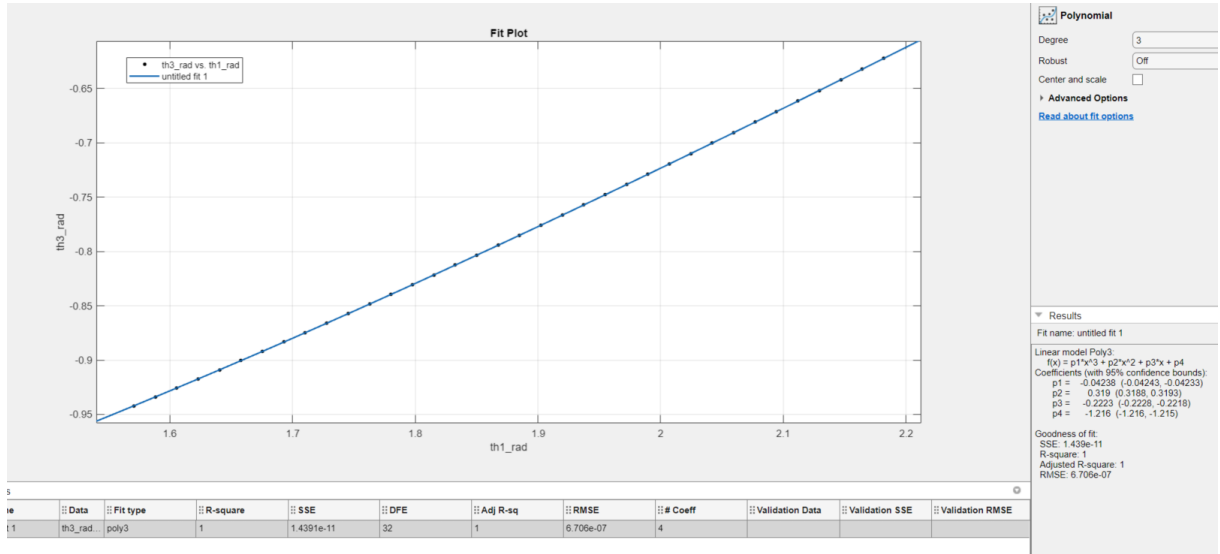


Figura 7: MATLAB Curve Fitter, (rad, rad)

3.1 Procedura di calcolo della sintesi infinitesima tramite Carter - Hall

E' stata utilizzata la stessa funzione definita precedentemente, andando però ad utilizzare la notazione presentata nel libro **Engineering Kinematics, Curvature Theory of Plane Motion**, ovvero:

$$\theta_3 = p_1\theta_1^3 + p_2\theta_1^2 + p_3\theta_1 + p_4$$

con gli stessi coefficienti definiti sopra, ora per essere fedeli alla procedura del libro cambieremo di notazione solo per quanto riguarda un angolo:

- $\theta_2 = \theta_1$;

3.1.1 Calcolo dei coefficienti differenziali R, R', R''

Una volta calcolato $\theta_3 = f(\theta_1)$, sono stati calcolati i tre coefficienti differenziali R, R', R'', pari a:

$$R = \left. \frac{d\theta_3}{d\theta_1} \right|_{\theta_{1,m}}$$

$$R' = \left. \frac{d^2\theta_3}{d\theta_1^2} \right|_{\theta_{1,m}}$$

$$R'' = \left. \frac{d^3\theta_3}{d\theta_1^3} \right|_{\theta_{1,m}}$$

dove $\theta_{2,m}$ rappresenta un valore di θ_2 ammissibile nel range trovato nell'analisi (in questo caso 110°).

3.1.2 Calcolo angolo ψ tra l'asta biella e asse di collineazione

Una volta ricavati i coefficienti differenziali, è stato calcolato l'angolo ψ , compreso tra l'asse di collineazione e l'asta biella, fondamentale per il calcolo del diametro del cerchio di Carter - Hall e per dedurre le lunghezze delle aste manovella e bilanciere. In particolare, dalla relazione:

$$\tan \psi = \frac{R(1 - R)}{R'}$$

ricaviamo:

$$\psi = \arctan \frac{R(1 - R)}{R'}$$

3.1.3 Calcolo del diametro del cerchio di Carter - Hall

In maniera molto semplice si calcola il diametro del cerchio di Carter - Hall. In particolare, è stata usata tale relazione:

$$d_c = \frac{3f[R^2(1 - R)^2 + R'^2]}{(1 - R)[R(1 - R)^3 + 2R^2(1 - R)^2 + 3R'^2 + R''(1 - R)]}$$

dove f rappresenta la lunghezza del telaio A_0B_0

3.1.4 Calcolo delle coordinate del centro di istantanea rotazione P_{13}

Scelto un angolo λ a piacere (in questo caso, $9,5$ gradi), dalle proprietà del cerchio di Carter - Hall, possono essere calcolate facilmente le coordinate del centro di istantanea rotazione P_{13} , il quale giace su tale circonferenza. In particolare, esso si troverà nelle coordinate:

$$P_{13} = (d_c \cos^2(\lambda + \psi), \frac{d_c}{2} \sin 2(\lambda + \psi))$$

3.1.5 Calcolo della lunghezza aste manovella e bilanciare

Una volta calcolato tutto ciò per il calcolo delle lunghezze delle aste manovella e bilanciare, è stato seguita un'osservazione grafica.

In particolare, tracciando una retta da P_{24} , inclinata di λ rispetto al telaio A_0B_0 , i punti A e B rappresentato proprio l'intersezione tra tale linea e quelle che congiungono P_{13} con A_0 , B_0 , rispettivamente.

La loro lunghezza effettiva può essere ricavata facilmente tramite l'applicazione dei teoremi dei seni, applicati ai triangoli.

Ma come prima cosa andiamo a calcolare in maniera "gratis" le lunghezze fornite dal libro:

$$P_{24}P_{13} = d_c \cos(\lambda + \psi) \qquad P_{24}A_0 = f \frac{R}{1 - R}$$

$$AP_{13} = \frac{P_{24}P_{13}}{\sin(\pi - \theta_2 + \lambda)} \sin \psi \qquad A_0P_{13} = \frac{P_{24}P_{13}}{\sin(\pi - \theta_2)} \sin(\lambda + \psi)$$

Queste ultime due sono state ricavate andando ad applicare il teorema dei seni rispettivamente ai triangoli $\Delta P_{24}AP_{13}$ e $\Delta P_{24}A_0P_{13}$.

Mentre ora si va a considerare il triangolo $\Delta P_{24}A_0A$ e si ricava la lunghezza del movente:

$$A_0A = P_{24}A_0 \frac{\sin \lambda}{\sin(\theta_2 - \lambda)}$$

Sempre dal libro si prende la relazione:

$$P_{24}B_0 = \frac{f}{1 - R}$$

Ora si può usare il teorema di Carnot sul triangolo $\Delta P_{24}P_{13}B_0$:

$$P_{13}B_0 = \sqrt{(P_{24}P_{13})^2 + (P_{24}B_0)^2 - 2 \cdot P_{24}B_0 \cdot P_{24}P_{13} \cdot \cos(\lambda + \psi)}$$

Ora si va a calcolare l'angolo β , cioè l'angolo formatosi tra telaio e bilanciare, si riesce a calcolarlo trovando prima $\sin \beta$ sul triangolo $\Delta A_0P_{13}B_0$ e poi facendo alcune osservazioni:

$$\sin \beta = \frac{A_0P_{13}}{P_{13}B_0} \sin \theta_2 \qquad \cos \beta = \sqrt{1 - (\sin \beta)^2}$$

$$\beta = \text{atan2}(\sin \beta, \cos \beta)$$

e andando a calcolare il seguente angolo:

$$\gamma = 2\pi - \beta - \delta - \theta_2$$

con:

$$\delta = \pi - \theta_2 + \lambda$$

e dal teorema dei seni sul triangolo $\Delta P_{24}B_0B$ si ricava il cedente:

$$B_0B = P_{24}B_0 \frac{\sin \lambda}{\sin \gamma}$$

Ora applicando il teorema dei seni sui triangoli $\Delta P_{24}B_0B$ e $\Delta P_{24}AA_0$ si ottiene rispettivamente:

$$P_{24}B = B_0B \frac{\sin \beta}{\sin \lambda} \qquad P_{24}A = A_0A \frac{\sin(\pi - \theta_2)}{\sin(\lambda)}$$

Perciò alla fine si potrà calcolare anche la biella semplicemente applicando:

$$AB = P_{24}B - P_{24}A$$

N.B: I valori delle lunghezze del quadrilatero sono in funzione del lambda scelto! In conclusione, con i valori scelti le aste del nostro quadrilatero

risultano:

- Telaio = 1;
- Manovella = 0.1793;
- Biella = 0.7723;
- Bilanciere = 0.4146;

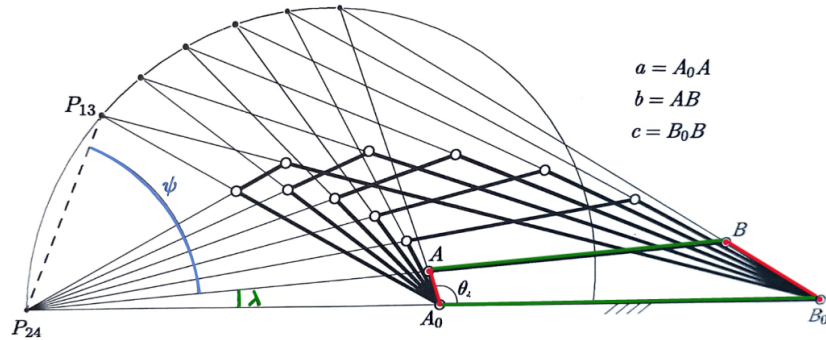


Figura 8: Sintesi del quadrilatero con cerchio di Carter - Hall.

3.1.6 Verifica coefficienti differenziali

Per la verifica della correttezza dei coefficienti angolari R , R' , R'' , si è proceduto come segue:

- 1) Sono state usate le lunghezze trovate nella sintesi nella procedura relativa all'analisi;
 - Tali lunghezze vengono, come già detto in precedenza, scelte dalla costruzione di CarterHall, tenendo conto che per tale scelta abbiamo 2 gradi di libertà (che ci variano le lunghezze del quadrilatero generato da tale metodo), la scelta dell'angolo λ e la scelta di un angolo del movente;
- 2) Abbiamo calcolato la relazione che lega θ_3 con θ_1 , fatto con il tool Curve Fitter;
- 3) Da queste, calcolate con la stessa procedura utilizzata precedentemente, sono stati calcolati i coefficienti differenziali.

Dando in pasto all'algoritmo dell'analisi le lunghezze normalizzate prese dalla sintesi infinitesima, la funzione tra θ_1 e θ_3 è stata ricavata dal tool fitter di MATLAB come qui sotto riportato:

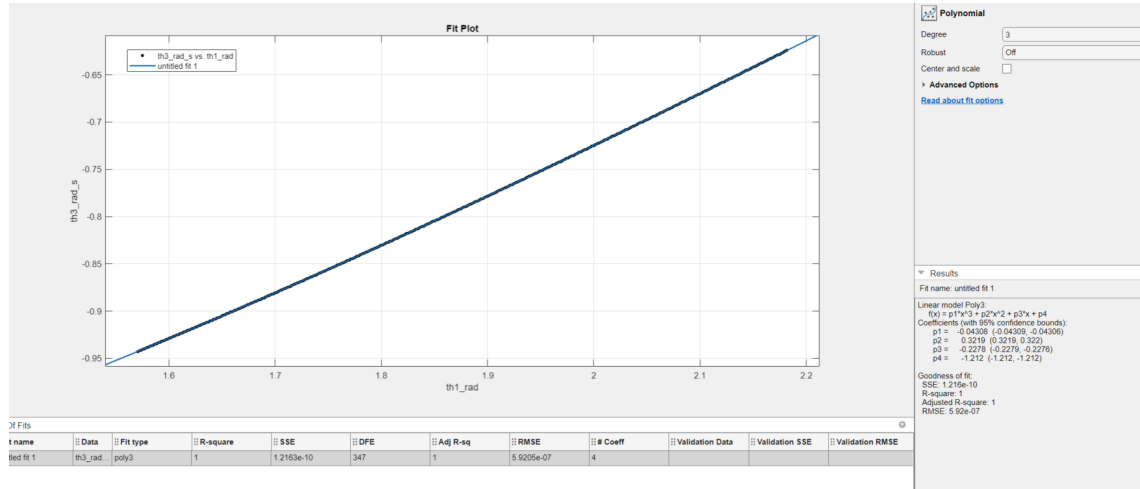


Figura 9: Funzione (θ_1, θ_3) con le nuove aste prese dalla sintesi infinitesima.

Derivando in nuovi polinomi, possiamo andare a confrontare le R nominali (sintesi originale) e R stimate (controprova sintesi), ricordando che il polinomio è stato calcolato con lo stesso angolo per la costruzione di Carter Hall ($\theta_1 = 105,4^\circ$):

$$R = 0.5193$$

$$R' = 0.1693$$

$$R'' = -0.2546$$

$$R_s = 0.5193$$

$$R'_s = -0.6190$$

$$R''_s = -0.2585$$

3.2 Codice MATLAB

```
clear all
close all
clc

syms t

th1_deg = 90:0.1:125;

n = size(th1_deg);
n = n(2);

th3_deg = zeros(1,n);

differentialCoefficients = zeros(n,3); %[R, R', R"]

% p1 =      -0.04238   (-0.04243, -0.04233)
% p2 =          0.319   (0.3188, 0.3193)
% p3 =      -0.2223   (-0.2228, -0.2218)
% p4 =          1.926   (1.926, 1.926)

p1 = -0.04243;
p2 = 0.3188;
p3 = -0.2228;
p4 = 1.926;

th1_rad = deg2rad(th1_deg);
th2_rad = th1_rad;

lunghezze = zeros(n, 3);
% si procede con il calcolo dei coefficienti R, R', R"

for i = 1:1:n
    differentialCoefficients(i, 1) = 3*p1*th1_rad(i)^2 +
        2*p2*th1_rad(i) + p3;
    differentialCoefficients(i, 2) = 6*p1*th1_rad(i) +
        2*p2;
    differentialCoefficients(i, 3) = 6*p1;
```

```

lambda = deg2rad(9.5);
f = 1;      %telaio

% [manovella      biella      bilanciere]
[lunghezze(i, 1), lunghezze(i, 2), lunghezze(i, 3)]
    = thirdOrderSintesys(f,differentialCoefficients(i
    , 1),differentialCoefficients(i, 2),
    differentialCoefficients(i, 3),lambda, th2_rad(i)
    );
end

% una volta ricavati i coefficienti differenziali,
% verifico se sono corretti con l analisi.

th2_rad_s = zeros(1,n);
th3_rad_s = zeros(1,n);

index = 155;

r1 = lunghezze(index, 1);      % Manovella
r2 = lunghezze(index, 2);      % Biella
r3 = lunghezze(index, 3);      % Bilanciere
r4 = 1;                        % Telaio

for i = 1 : 1 : n
    % Scrivo le mie varibili per andare a trovare th3
    A = 2 * r1 * r3 * sin(th1_rad(i));
    B = - 2 * r3 * r4 + 2 * r1 * r3 * cos(th1_rad(i));
    C = r1^2 - r2^2 + r3^2 + r4^2 - 2 * r1 * r4 * cos(
        th1_rad(i));

    % Definisco la mia equazione di 2 grado da
    risolvere
    eq = t^2*(C-B) + 2*A*t + B + C == 0;

    res = solve(eq,t);

    root1 = 2 * atan(res(1));
    root2 = 2 * atan(res(2));

```

```

% Prendo la radice negativa dal risultato dell'
    equazione di 2    grado
if root1 < 0

    th3_rad_s(i) = root1;
else

    th3_rad_s(i) = root2;
end

% Mi trovo th2 andando a sostituire i valori di th3
    appena trovati
y(i) = - r1*sin(th1_rad(i)) - r3*sin(th3_rad_s(i));
x(i) = r4 - r1*cos(th1_rad(i)) - r3*cos(th3_rad_s(i)
    );

    th2_rad_s(i) = atan2(y(i),x(i));

end

th2_deg_s = rad2deg(th2_rad_s);
th3_deg_s = rad2deg(th3_rad_s);

TxAngle_s = 180 + th3_deg_s - th2_deg_s;

figure(3)
plot(th1_deg,TxAngle_s);
xlabel("Fork Angle (deg)");
ylabel("Trasmission Angle Synthesis (deg)");

%cftool
% tramite l analisi    stata ricalcolata la relaizione
    tra theta1 e theta3.

p1_s = -0.04308;
p2_s = 0.3219;
p3_s = -0.2278;
p4_s = -1.212;

```

```

R_estimated = zeros(1, 3);
R_estimated(1) = 3*p1_s*th1_rad(index)^2 + 2*p2_s*
    th1_rad(index) + p3_s;
R_estimated(2) = 6*p1_s*th1_rad(index) + 2*p2_s;
R_estimated(3) = 6*p1_s;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% thirdOrderSintesys FUNCTION
% INPUT:
%   Come input sono stati passati rispettivamente:
%   - Lunghezza telaio (unitaria)
%   - Coefficienti differenziali R, R', R''
%   - Angolo lambda tra la biella e il telaio
%   - Angolo del movente theta2

% OUTPUT:
%   Come output vengono calcolate le lunghezze delle
%   aste del quadrilatero
%   normalizzate per il telaio , in tale ordine:
%
%   - movente = manovella del quadrilatero;
%   - biella
%   - cedente = bilanciere;

function [movente, biella, cedente] = thirdOrderSintesys
    (f, R, R_1, R_2, lambda, theta2)

% angolo tra l'asse di collineazione e la biella;
psi = atan(R*(1-R)/R_1);

% diametro del cerchio di Carter-Hall
dc = 3*((R^2*(1-R)^2 + R_1^2)*f)/((1-R)*(R*(1-R)^3 + 2*R
    ^2*(1-R)^2 + 3*R_1^2 + R_2*(1-R)));

% calcolo lunghezza manovella e bilanciere
P24_P13 = dc*cos(lambda+psi);
A_P13 = P24_P13*sin(psi)/abs(sin(pi-theta2+lambda));
A0_P13 = P24_P13*sin(lambda+psi)/abs(sin(pi-theta2));

```

```

% lunghezza manovella
P24_A0 = f*R/(1-R);
A0_A = P24_A0*sin(lambda)/sin(theta2 - lambda);

P24_B0 = f/(1-R);

P13_B0 = sqrt(P24_P13^2 + P24_B0^2 - 2*P24_B0*P24_P13*
    cos(lambda+psi));
alfa = theta2-lambda;
delta = pi-alfa;
P13_B = P24_P13*sin(psi)/sin(delta);

sbeta = sin(theta2)*A0_P13/P13_B0;
cbeta = sqrt(1-sbeta^2);
beta = atan2(sbeta, cbeta);

gamma = 2*pi - beta - delta-theta2;
% lunghezza bilanciere
B0_B = P24_B0*sin(lambda)/sin(gamma);
% calcolo lunghezza biella
P24_B = B0_B*sin(beta)/sin(lambda);
P24_A = A0_A*sin(pi-theta2)/sin(lambda);
AB = P24_B - P24_A;

biella = AB;
movente = A0_A;
cedente = B0_B;

end

```

3.3 Procedura di calcolo della sitesi per moti finiti tramite equazione di Freudeinstain

Usando la stessa relazione usata per la sinstesi infinitesimale, si vanno a prendere 3 punti della nostra funzione.

Tali punti sono stati presi più o meno equidistanti:

$$\begin{cases} \theta_{3_0} = f(\theta_{1_0}) \\ \theta_{3_{max/2}} = f(\theta_{1_{max/2}}) \\ \theta_{3_{max}} = f(\theta_{1_{max}}) \end{cases}$$

Ora facendo osservazioni geometriche si adatta θ_1 a ϕ e θ_3 a ψ , tramite le seguenti trasformazioni:

$$\phi = \pi - \theta_1 \qquad \psi = -\theta_3$$

vado a risolvere il sistema di equazioni di Freudeinstain:

$$\begin{cases} R_1 \cos \phi_1 - R_2 \cos \psi_1 + R_3 = \cos(\phi_1 - \psi_1); \\ R_1 \cos \phi_2 - R_2 \cos \psi_2 + R_3 = \cos(\phi_2 - \psi_2); \\ R_1 \cos \phi_3 - R_2 \cos \psi_3 + R_3 = \cos(\phi_3 - \psi_3); \end{cases}$$

con

$$R_1 = \frac{d}{c} \qquad R_2 = \frac{d}{a} \qquad R_3 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2ac}$$

e andando a prendere

- a = manovella;
- b = biella;
- c = bilanciante;
- d = telaio;

Si è riusciti quindi ad avere una sistema di 3 equazioni in 3 incognite, quindi trovati R1, R2, R3 e andando a fissare la lunghezza del telaio come unitaria, si può univocamente determinare la lunghezza degli altri membri.

3.3.1 Codice implementativo e risultati

Siccome dal brevetto si è evinto che $\theta_1 \in [90^\circ, 125^\circ]$, i 3 angoli di θ_1 presi come riferimento sono:

$$\begin{cases} \theta_{1_0} = 90^\circ; \\ \theta_{1_{max/2}} = 107^\circ; \\ \theta_{1_{max}} = 125^\circ; \end{cases}$$

e di conseguenza dati alla funzione f che lega θ_1 a θ_3 abbiamo:

$$\begin{cases} -53.133^\circ = f(90^\circ) \\ -45.0836^\circ = f(107^\circ) \\ -35.7535^\circ = f(125^\circ) \end{cases}$$

Trasformati questi gradi in radianti, tramite le trasformazioni viste sopra, si riportano in funzione da poterli chiamare ϕ e ψ . Si va a creare dei vettori che contegano questi valori:

$$\phi = [1.5708, 1.2741, 0.9599]$$

$$\psi = [0.9273, 0.7869, 0.6240]$$

questi vengono dati in pasto alla seguente funzione "eq freudenstain", essa mi sputerà in output le lunghezze dei membri del nostro quadrilatero articolato.

```
% INPUT:
%   Come vettori di input siamo andati a prendere i
%   valori di
%   3 angoli del movente e rispettivamente del cedente,
%   relazionati dalla funzione.
%
%   phi: [phi(1) phi(2) phi(3)];
%   psi: [psi(1) psi(2) psi(3)];

% OUTPUT:
%   Come output abbiamo le lunghezze delle aste del
%   quadrilatero
%   normalizzate per il telaio (preso unitario).
%
%   a = manovella;
%   b = biella;
%   c = bilanciere;
%   d = telaio;
```

```

function [a,b,c,d] = eq_freudenstain(phi,psi)

    if(nargin < 2)
        error("Too few input arguments.");
    end

    if(nargout < 4)
        error("Too few output arguments.");
    end

    syms R1 R2 R3

    eq1 = R1*cos(phi(1)) - R2*cos(psi(1)) + R3 == cos(
        phi(1)-psi(1));
    eq2 = R1*cos(phi(2)) - R2*cos(psi(2)) + R3 == cos(
        phi(2)-psi(2));
    eq3 = R1*cos(phi(3)) - R2*cos(psi(3)) + R3 == cos(
        phi(3)-psi(3));

    eqns = [eq1, eq2, eq3];

    S = solve(eqns,[R1 R2 R3]);

    if(S.R1 == 0 || S.R2 == 0)
        error("R1 = 0 or R2 = 0. You cannot divide by
            zero!");
    end

    d = 1;

    c = d/S.R1;

    a = d/S.R2;

    b = sqrt(a^2+c^2+d^2-2*a*c*S.R3);
end

```

Con i valori scelti le aste del nostro quadrilatero risultano:

- Telaio = 1;

- $\text{Manovella} = 0.1793$;
- $\text{Biella} = 0.7725$;
- $\text{Bilanciere} = 0.4137$;

Le aste del quadrilatero generato dalla sintesi finita vengono uguali a quelle prese dal brevetto, se non per un errore pari alla 4 cifra decimale (sulle lunghezze normalizzate).

4 Angolo di trasmissione

4.1 Perché è importante tenere l'angolo di trasmissione intorno ai 90°?

Anche intuitivamente, è possibile capire che tenere l'angolo di trasmissione μ come angolo retto, porta il vantaggio di andare a massimizzare la trasmissione del momento generato dal movente al cedente.

4.2 Come siamo andati a calcolare l'angolo di trasmissione?

Banalmente dalla geometria abbiamo:

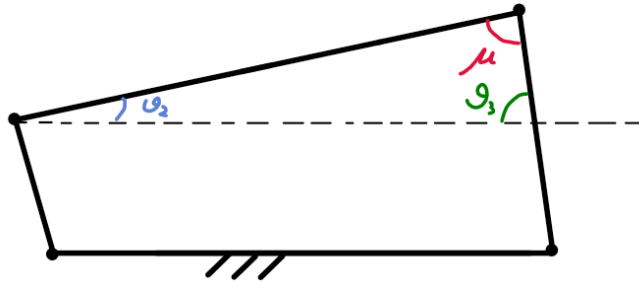


Figura 10: Geometria per l'individuazione dell'angolo di trasmissione μ

Si tratta solamente di applicare una sottrazione di angoli sapendo che la somma degli angoli interni del triangolo è 180°:

$$\mu = \pi - \theta_2 - \theta_3$$

4.3 Come relazioniamo l'andamento dell'angolo di trasmissione con il forcellone della nostra moto?

Si nota quindi che il l'escursione di angolo del forcellone può essere relazionato con l'escursione dell'angolo del movente, andando ad utilizzare:

$$\alpha = \theta_1 - \pi$$

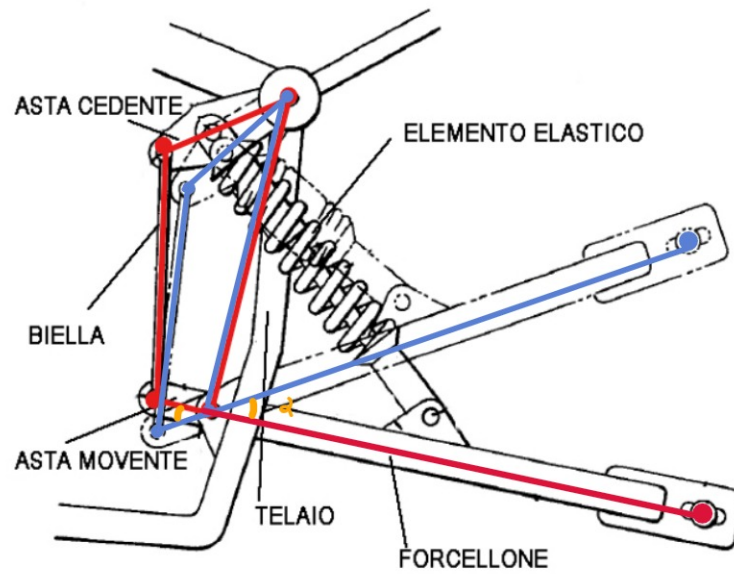


Figura 11: Relazione geometrica tra movente e forcellone

4.4 Andamenti angolo di trasmissione per diversi quadrilateri

Andiamo a vedere come primo andamento l'angolo di trasmissione del quadrilatero articolare preso dal brevetto.

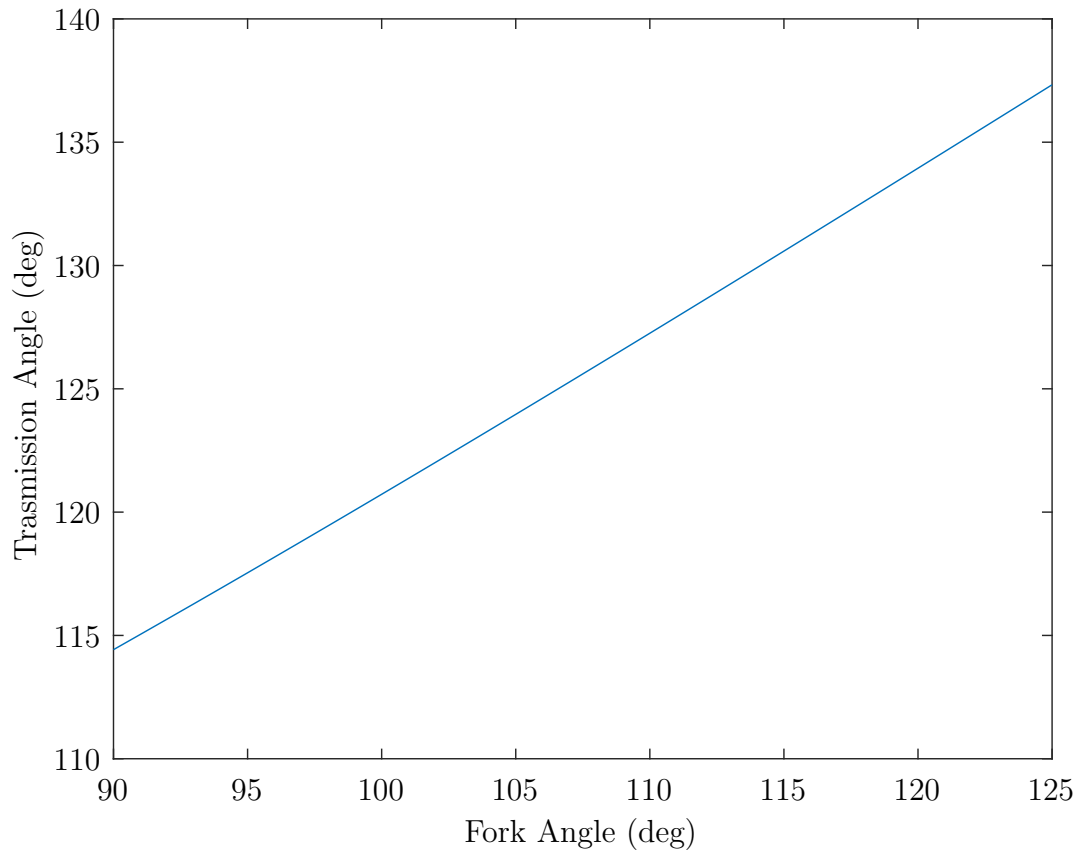


Figura 12: Andamento angolo trasmissione μ rispetto all'angolo del forcellone sul quadrilatero dell'analisi

Mentre per quanto riguarda il quadrilatero trovato dalla sintesi infinitesima notiamo un miglioramento del nostro quadrilatero articolato:

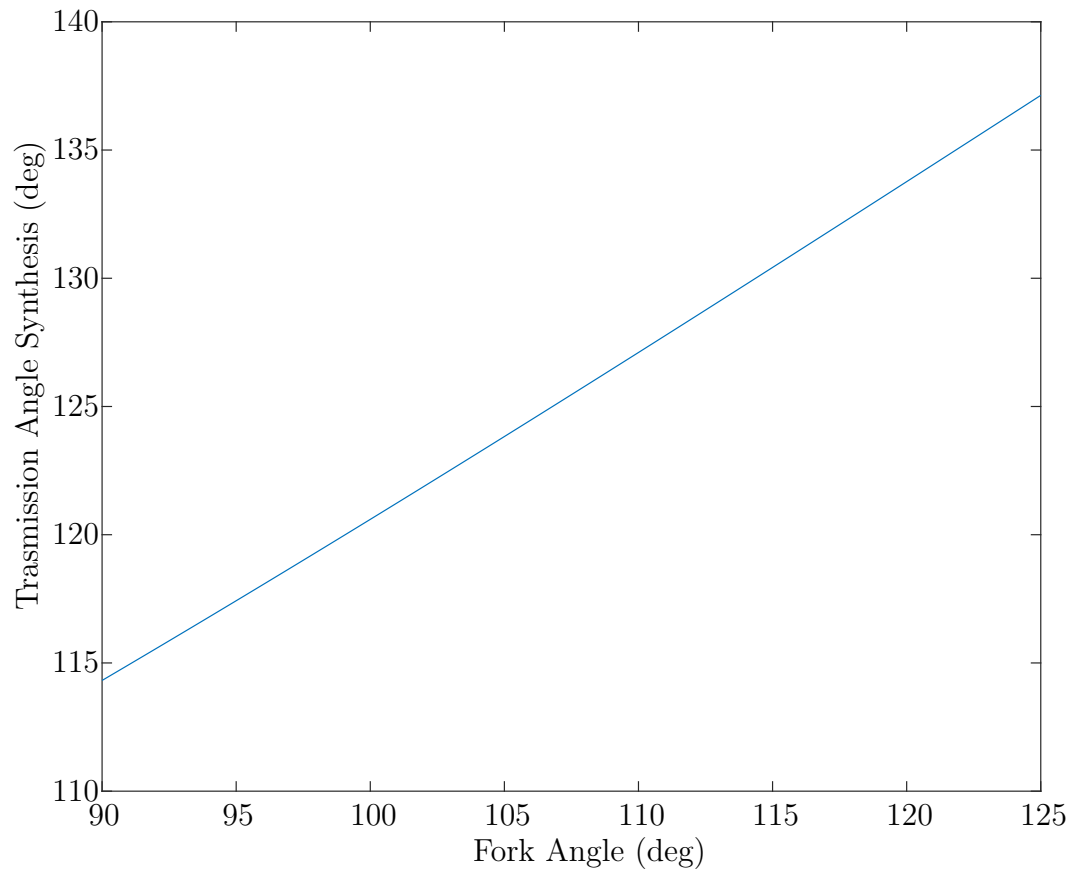


Figura 13: Andamento angolo trasmissione μ rispetto all'angolo del forcellone sul quadrilatero ottenuto dalla sintesi infinitesima

5 Bibliografia

- Ettore Pennestrì - Mattia Cera, Engineering Kinematics, Curvature Theory of Plane Motion