15

Рєпкіна В.Г.

Вчитель фізики і математики,

Вчитель вищої категорії,

Вчитель-методист

**]**

Комунальний заклад

«Середня загальноосвітня школа Ν8 м. Орджонікідзе Дніпропетровської області»

**ЗБІРНИК**

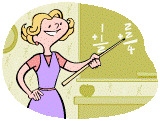
**ЗАВДАНЬ З ПАРАМЕТРАМИ та ЇХ РОЗВ’ЯЗКІВ**

з математики

для учнів

5-11 класів

РЄПКІНА В.Г.



**2015**

**Укладач:**

Рєпкіна Валентина Георгіївна, вчителька фізики і математики комунального закладу

« Середня загальноосвітня школа Ν8

м. Орджонікідзе Дніпропетровської області»

**Рецензент:**

Чернишова В.В., завідуюча ІМЦ управління освіти виконавчого комітету Орджонікідзевської міської ради

Затверджено на засіданні методоб’єднання вчителів математики

Зміст збірника містить:

- завдання з параметрами та їх розв’язки з тем програмного курсу математики в середній загальноосвітній школі;

-аналітичний та графічний методи розв’язування завдань з параметрами.

Збірка пропонована учням та вчителям для користування на уроках в звичайних класах, в профільних класах та для підготовки до ЗНО.

**Методичні вказівки**

При розв’язуванні задач з параметрами бажано додержуватись наступної послідовності:

-Уважно прочитати умову задачі та зрозуміти її зміст.

-Проаналізувати та співставити умову задачі з теоретичним матеріалом.

-Застосувати рекомендації для розв’язування того чи іншого типу завдань.

-Врахувати всі значення параметра з області визначення .

**1.** При яких значеннях параметра *а* рівняння

 має єдиний розв’язок?

*Розв’язання*

; ОДЗ: {

 [ 

Для того щоб рівняння мало єдиний корінь, необхідно, щоб *а* = -2 або *а* = 1.

*Відповідь*: *а*= -2 або *а* =1

Розглянуті стандарті способи розв’язування рівнянь в окремих випадках приводять до складних перетворень. Процес розв’язування може бути іноді спрощений, якщо застосувати графічне розв’язання.

**2.** Розв’яжемо рівняння │*х*-2│-│*х*-4│=*а.*

*Розв’язання*

Побудуємо графік функції *у* =│*х*-2│-│*х*-4│*.*

D(*у*)=R. Нулі під модульних функцій: *х*=2, *х*=4.

При  *у* = 2 – *х* – 4 + *х* = -2. При  *у =* *х* – 2 – 4 + *х* = 2*х* – 6.

При  *у =* *х* – 2 – *х +* 4 = 2.

Користуючись графіком (рис. 1), одержимо:

1. при *а* < -2 і *а* > 2 розв’язків немає;
2. при *а* = -2 
3. при -2 < *а* < 2 рівняння набуде вигляду : 2*х* – 6= *а*; 
4. при а = 2 

*Відповідь:* при *а* < -2 і *а* > 2 розв’язків немає; при *а* = -2 

при -2 < *а* < 2  при *а* = 2 

**3.** При яких значеннях *а* рівняння

( *а* + 4*х* – *х2* – 1)( *а* + 1 -│*х* - 2│) = 0 має рівно три корені.

*Розв’язання*

( *а* + 4*х* – *х2* – 1)( *а* + 1 -│*х* - 2│) = 0;

*а* + 4*х* – *х2* – 1 – 0 або *а* + 1 - │*х* - 2│= 0;

*х2* – 4*х* + 1 = *а,* │*х* - 2│- 1 = *а .*

Графіком сукупностіцих рівнянь є сукупність параболи й графіка функції │*х* - 2│- 1 = *у (*рис. 2).

Очевидно, що лише пряма *а* = -1 перетинає отримане об’єднання графіків у трьох точках.

*Відповідь :* *а* = -1

*у*

*у*

*х*

1 *х*

0 *х*

1 4 0 1 2 3

-1 -1

-3

Рис. 1 Рис. 2

**4.** При яких значеннях параметра *b* є рівносильними рівняння  і 

*Розв’язання*

Визначимо, при яких значеннях параметра *b* рівняння  і  є рівносильними. Розглянемо рівняння . При  рівняння має два корені *х* = - *b* і *х* = 2*b.* Зазначимо, що при *b=*0 дане рівняння коренів не має. Друге рівняння при має єдиний корінь *х* = - *х* = - *b,* а при  *b* = 0 не має коренів. Отже, тільки при *b* = 0 дані рівняння є рівносильними.

*Відповідь:* при *b* = 0.

**5.** Розв’яжемо нерівність 2 (*х - а)* < *ах* – 4.

*Розв’язання*

2 (*х - а)* < *ах* – 4;

2*х* -2*а* < *ах* – 4; ОДЗ: {

2*х* – *ах* <2*а* – 4;

*х(*2– *а)* <2*а* – 4;

*х(*2– *а)* <2(*а* – 2).

1. Якщо *а* < 2, то 2 – *а* > 0, отже, 
2. *х* < -2; 
3. Якщо *а* = 2, то 2 - 2=0, 0*х* < 0. Нерівність не має розв’язків.

Якщо *а* > 0, то 2 – *а* < 0, отже,  *х* > -2; 

*Відповідь:* при *а* < 2  при *а*=2 нерівність не має розв’язків; при *а* > 0 

**6.** Розв’яжемо нерівність 

*Розв’язання*





ОДЗ: 





Для розв’язування нерівності методом інтервалів порівняємо величини  і -3, розглянувши різницю: 

+

- -

0 -2 *m*

При  > -3, тоді маємо:

+ + *х*

-3 - 



При < 0 і при > 0 < -3, тоді маємо

+ +

* *х*

 -3



*Відповідь: при * 

при  .

**7.** Розв’яжемо нерівність *х*2 + 3*ах* – *а* > 0.

*Розв’язання*

*х*2 + 3*ах* – *а* > 0 ОДЗ: {

Нехай, D – дискримінант квадратного тричлена *х*2 + 3*ах* – *а* ;

*D* = 9*а*2+ 4*а.*

1) Якщо *D* < 0, тобто 9*а*2 + 4*а* < 0, *а*(9*а* + 4) < 0,

то при  *х*2 + 3*ах* – *а* > 0 для всіх

 ( оскільки коефіцієнт при *х*2 *а*

дорівнює 1 > 0).

*а*

 0

2) Якщо *D* = 0, тобто  або *а* = 0, то при 

при *а* = 0 

3) Якщо *D* > 0, то при  + +

квадратний тричлен має корені - *х*

 і 

+ - +

*х*2 *х*1 *х*

.

*Відповідь*: при 



при   при *а* = 0 

при  *х*R.

**8**. **Розв’яжіть нерівність**  *х*2 – 8*ах* < - 15*а*2.

*Розв’язання*

*х*2 – 8*ах* < - 15*а*2; ОДЗ: { *х* R,

*х*2 – 8*ах* + 15*а*2 < 0; *х *R.

*D*1 = 16*а*2 – 15*а*2 = *а*2.

1. Якщо *а* = 0, то *х*2 < 0 - розв’язків немає.
2. Якщо , то *х*1= 5*а*, *х*2 = 3*а.*

а) При *а* > 0 3*а* < 5*а.*

*//////////////// х*

 3а - 5а

б) При *а* < 0 3*а* > 5*а.*



*Відповідь:* якщо *а* < 0, 

якщо *а* > 0 , якщо

*а* =0 , розв’язків немає.

5а 3а *х*

*х*

**9 .**│*х+*3│ > - *а2*. *Розв’язання*

*Розв’язання* Зрозуміло, що при *а* ≠ 0 права частина нерівності від’ємна, і тоді при будь-якому *х* частина менша за ліву. Якщо *а* = 0, то вихідну нерівність задовольняють усі числа. Крім *х* = -3

*Відповідь*: при *а* ≠ 0  *х* € ( - ∞; + ∞ );

при *а* = 0  *х* € ( - ∞; -3 ) U ( -3; + ∞ ).

**10**. Розв’яжемо рівняння

*m* =



*Розв’язання*

*m* =



*m 2*(*х* – 1) = *х* – 1+ *m –* 1;

ОДЗ: *m* ≠ 0

*х* ≠ 1 *(m 2* – 1)( *х* – 1) = *m* – 1 .

1) Якщо *m=*1, то 0 (*х* – 1) = 0. Коренем рівняння є будь-яке число, крім 1.

2) Якщо *m=-* 1, то 0 (*х* – 1) = – 2. Рівняння не має коренів.

3) Якщо *m* ≠±1, то *х* – 1 = *х* = 1 +  *х* = .



Тепер необхідно перевірити, чи немає таких значень *m* , при яких знайдене значення *х* дорівнює 1.

*m* + 2 = *m* + 1; 2-1 – неправильно.



Отже, значень *m*, при яких знайдене значення *х* дорівнює 1, немає.

*Відповідь*: при *m* ≠±1, *m* ≠ 0  *х* = ; при *m=*1 *х* – будь-яке число, крім 1; *m=-* 1, *m=*0 розв’язків немає.



**11.** Розв’яжемо рівняння (*k* – 5) *х2*+3*kх -* (*k* – 5) = 0.

*Розв’язання*

1) Якщо *k* = 5, то 15 *х* = 0; *х* = 0. ОДЗ: *х* € **R**

*k* € **R.**

2) Якщо *k* ≠ 5, то розв’язуємо квадратне рівняння

(*k* – 5) *х2*+3*kх -* (*k* – 5) = 0; D = 9 *k2* + 4 (*k* – 5)2 > 0.

Оскільки D> 0, то рівняння має два дійсні корені

*х1,2* =



*Відповідь*: при *k* = 5  *х* = 0; при *k* ≠ 5

*х* =



**12.** *Розв’язання*

│*х*│( *х* + *а*) ≤ 0 ОДЗ: 

Оскільки │*х*│ ≤ 0 , то вихідна нерівність є рівносильною нерівності ( *х* + *а*) ≤ 0; *х* ≤ - *а .*

1) Якщо - а ≥ 0, тобто *а* ≤ 0, то 

2) Якщо - а ≥ 0, тобто *а* > 0, то або

*х* = 0.

*Відповідь:* якщо *а* > 0, то *х* = 0 ; якщо *а* ≤ 0, то 

**13. ** ОДЗ: { 

1) Якщо *m* > 0, то *х*2 - 2 *mх - х+*( *m2+ m*) > 0;

*х*2 – *х* (2*m +* 1) + (*m2+ m*) > 0; *D* = ~~4~~*~~m~~2* +~~4~~*~~m~~*+1- ~~4~~*~~m~~~~2~~*- ~~4~~*~~m~~* = 1

*D* > 0; 

//////// //////// *х*

*m m +* 1



2) Якщо *m* < 0, то *х*2 - *х* (2 *m+* 1)+ ( *m2+ m*) < 0; *D* =1; 

*Відповідь:* при *m* > 0 

при *m* < 0 

**14.** *Розв’язання*

ОДЗ:{



1) Якщо  то -2



2) Якщо то 

+

- 0   - *k*

а) при  *D* < 0, тоді *х***R**;

б) при   *D* = 0. Тоді нерівність має розв’язок при всіх *х,* окрім *х* = 0;

в) при   *D*  > 0, тоді *х1* = 

+ +

*х1* = /////// ///////

*х*2 - *х*1

*х* €    .

3) Якщо  то маємо:

- 0   -

а) при *k* €  *D* < 0, тоді

розв’язків немає;

*х*

б) при *k* = 0 *D* = 0, тоді *х*

розв’язків немає;

*х*

в) при   *D*  > 0, тоді

*х*2

*х*1 *х*2

////////////////////////

*х* €; .

*Відповідь:* при  розв’язків немає; 

*х* €; ; при   при 

*х* € ; при  *х* € **R,** *х* ≠ 0;

при  *х* € **R.**

**15.**  Розв’яжемо рівняння 

*Розв’язання*

ОДЗ: *х* ≥ 3,



*а* € ***R.***

1) Якщо *а*  > 0, то 

2) Якщо *а*  < 0, то рівняння не має коренів.

3) Якщо *а*  = 0, то 

*Відповідь:* при  при  дійсних коренів немає.

**16.** Розв’яжемо рівняння

*Розв’язання*

 ОДЗ: { *х* ≥ 3,

*а* € ***R.***

 або 

з урахуванням ОДЗ.

*х* = *а.*

*Відповідь:* якщо *а*  < 5, то  або  якщо *а*  = 5, то якщо , то 

**17.** Розв’яжемо рівняння 

*Розв’язання*



Якщо *а* = 2, то рівняння не має коренів;

Якщо  то *х*=

Враховуючи, що *х* ≥ -1, одержимо: 

*Відповідь:*при  рівняння не має коренів;

при  *х*= 

**18. Розв’яжіть рівняння** 

*Розв’язання*

ОДЗ: *х* ≥ 2,



*х* ≥ - *а,*

(\*) *а* € **R.**



(\*\*)



Враховуючи обмеження (\*) і (\*\*), отримаємо систему нерівностей:

   -27 ≤ а ≤ 23.

Оскільки то умова  *х ≥* 2 виконується, а оскільки , то

*х* + *а* ≥ 0, тобто *х* ≥ - *а*.

*Відповідь:* при  рівняння не має коренів; якщо , то



**19. Розв’яжіть рівняння** 

*Розв’язання*

 ОДЗ: 



 більше того, *х* > *а,*оскільки 

 2*ах* = -1.

Якщо *а* = 0, то рівняння не має коренів; якщо *а* ≠ 0, то .

Враховуючи умову *х* ≥ *а,* маємо:

тобто *а*  < 0.

*Відповідь:* при *а* ≥ 0 рівняння не має коренів; при *а*  < 0 .

**20. Розв’яжіть рівняння .**

*Розв’язання*

**;** ОДЗ : *х* ≥ 0,

*х* ≥ 4*а* - 16, ****

*х* ≥ 0,

ОДЗ: *х* ≥ 4*а* - 16,

*х* ≥ 2*а* - 4.

,









Для  умови ОДЗ виконуються. Перевіримо, для яких значень *а* виконується умова  або *а* 

*Відповідь:* при рівняння не має розв’язків; при  

**21.**  Розв’яжемо нерівність 

*Розв’язання*

Задана нерівність рівносильна системі нерівностей:





*Відповідь:* якщо *а*  ≤ 1, то задана нерівність не має розв’язків; якщо *а*  > 1, то 

**22.**  Розв’яжемо нерівність 

*Розв’язання*

Очевидно, що *х* ≥ 0. Оскільки , то при

*а* ≤ 1 дану нерівність задовольняє будь-яке значення *х* ≥ 0.

При *а* > 1 ліва частина нерівності невід’ємна, тому в цьому випадку

х = 0 – єдиний розв’язок.

*Відповідь:* якщо *а* ≤ 1, то  якщо *а* > 1, то *х* = 0.

**23.**  Розв’яжемо нерівність (1 – *а*).

*Розв’язання*

Зрозуміло, що  Оскільки то при будь-якому  при

а ≥ 1 розв’язком буде Якщо 1 – *а* > 0, то  і 

*Відповідь:* якщо *а* ≥ 1, то ;якщо  *а* < 1, то 

**24.** Розв’яжемо нерівність ****.

*Розв’язання*

При  *х* ≥ *а2* ліва частина нерівності невід’ємна, тому якщо *а* ≤ 0, то всі значення змінної з проміжку  є розв’язками.

Якщо *а* > 0, то внаслідок піднесення обох частин нерівності до квадрата маємо: 

Звідси видно, що всі значення  є розв’язками, оскільки ліва частина нерівності при таких значеннях *х* додатна, а права – недодатна.

Якщо ж , то внаслідок піднесення обох частин нерівності до квадрата отримаємо:

звідки випливає, що ****, тобто . Таким чином, при *а* > 0 нерівність задовольняє .

*Відповідь:* якщо *а* ≤ 0, ; якщо *а* > 0, то .

1. Розв’яжіть нерівність .

*Розв’язання*

Очевидно, що *х* ≥-1. Якщо *а* > 0 , то  і

- 1.

Якщо *а* = 0, то . Якщо *а* < 0, 

*Відповідь* :при *а* > 0 при *а* ≤ 0.

**25 .**Розв’яжіть рівняння :

cos *x* - sinх *=a*.

*Розв’язання*

cos *x* - sin *x* = *a*; cos , .

Тоді arccosn, n**Z.** При  рівняння розв’язків немає.

*Відповідь:* при   arccos n, n**Z;** при  розв’язків немає.

**26 .** Розв’яжемо рівняння

sin2 *х* + 2(*а* – 1) sin*х* – 4а = 0.

*Розв’язання*

Нехай sin *x* = *t* │*t*│≤ 1, *t*2 + 2(*а* – 1)t - 4*a* = 0,



 не задовольняє умову │*t*│≤ 1.



sin *x* = -2*a*; arcsin(2*a*)+πn, n€**Z.**

*Відповідь:* при  arcsin(2*a*)+πn, n€**Z.**

**Приклад 27 .** Розв’яжемо рівняння : sin4*х* = *а*(sin3*х* - sin*х*).

*Розв’язання*

2sin2*x*\* cos2 *x =* *a* \* 2sin2*x*\* cos2 *x*, звідки cos2 *x(*sin2 *x*- *a* sin *x*) = 0;

cos2 *x* = 0 або 2sin*x\** cos *x = а*sin*x;*

sin *x*(2cos *x – а*) = 0.



cos2 *x* = 0 ,

sin *x =* 0,

cos *x = *



*Відповідь:* 

при

**Приклад 28**. Розв’яжемо рівняння : tg *x* + tg2 *x* = *m* tg3 *x*.

*Розв’язання*

tg *x* + tg2 *x* = *m* tg3 *x*. ОДЗ:



Застосовуємо формулу



Яку легко отримати з формули додавання

для тангенса.



1. tg3 *x* = 0$ 3*x* = π*n*?  ОДЗ : 

або

2) 1- tg *x* \* tg2 *x*-*m* = 0;

1- tg *x* \* tg2 *x* = *m*; tg *x\** tg2 *x* = 1- *m*;

**** tg*x* *= t,* 

tg2(*m*-3) = *m* – 1.Якщо *m* ≠ 3 і маємо *m* < 1, *m* > 3.

+ +

1 - 3



*Відповідь*: якщо  то 

Якщо *m* , то розв’язків немає.

**29. Розв’яжіть рівняння** sin4 *x* +cos4 *x* = *a.*

*Розв’язання*

sin4 *x* +cos4 *x* = *a; (*sin2 *x* +cos2 *x*)2 - 2 sin2 *x* cos2 *x* = *a*



Якщо  або , тобто  або *а* > 1, то рівняння коренів не має. При : якщо  то



*Відповідь*: при  коренів немає;

при  

**30. Розв’яжіть рівняння** sin3 *x* + sin2 *x* = *m* sin*x.*

*Розв’язання*

sin3 *x* + sin2 *x* = *m* sin*x;* sin(2*x + x)* + sin2 *x* = *m* sin*x;*

sin2 *x* cos*x +*  cos2*x* sin *x +* sin2 *x - m* sin*x* = 0;

2sin*x*cos2 *x +* cos2*x* sin *x +* 2sin*x*cos*x - m* sin*x*=0;

sin *x(*2cos2 *x* + cos2*x+* 2cos*x – m) = 0;*

1. sin*x*=0; 
2. 2cos2 *x+*2cos2 *x-1+*2cos*x– m = 0;* 4cos2 *x+*2cos*x –*( *m+*1) = 0;

cos*x* =t, 

Щоб задане рівняння мало розв’язок, треба, щоб

4*m* + 5 ≥0,

 і щоб .

 тоді 

1. -4 ≤ 1 +
2. -4 ≤ 1 -

Отже, при рівняння коренів не має. При При При 

 При  рівняння коренів не має.

**31. Розв’яжіть рівняння **

*Розв’язання*

****

При  одержимо:  або 

Це рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь: cosде і

тоді 

При  рівняння

(3а – 1) рівносильне рівнянню  що має два розв’язки відносно 

 при  тобто при 

Отже, при  рівняння має дві множини коренів:

 і 

**32.** *Розв’язання*

Очевидно, що 

отже, при

*Відповідь:* при   При  рівняння коренів не має.

**33.** *Розв’язання*

 Нехай  Тоді дане рівняння набуде вигляду:



- корені дійсні, якщо







****

 тобто 

При 

Якщо , то коренів немає.

*Відповідь:* при при  коренів немає.

**34.** *Розв’язати*

****

****







**35.** , оскільки якби то й  що неможливо одночасно.



**36**.

а) якщо a = b = 0, то будь-яке число;

б) якщо 

в)якщо 

г) якщо ****

*Відповідь:* при ; х – будь-яке число; якщо  якщо  якщо ****

**37.** Розв’яжемо нерівність 

*Розв’язання*

Якщо  то 

Якщо  то 

Якщо  то нерівність не має розв’язків.

*Відповідь:* при 

при  при  розв’язків немає.

**38** Розв’яжемо нерівність 

*Розв’язання*

ОДЗ:



При  

*Відповідь:* при 

**39.** Розв’яжемо нерівність 

*Розв’язання*

ОДЗ:  
  *у*



*у*

Якщо , то



0 *х* 0 *х*

Якщо , то



Якщо , то розв’язків немає.

*Відповідь:* при  при 

 при **** розв’язків немає.

**40.** Розв’яжемо нерівність

*Розв’язання*

Спростимо ліву частину нерівності:



Маємо: звідки **** (\*)

Якщо , то**** і нерівність (\*) не має розв’язків.

Якщо  то **** тоді ****

****

Якщо , то **** і нерівність (\*) справджується при 

*Відповідь:* при  не має розв’язків; при ****

при 

**41.** Розв’яжемо нерівність 

*Розв’язання*

 ОДЗ : 

Якщо  то розв’язків немає.

Якщо  то 

Якщо  то .

*Відповідь:* при  розв’язків немає;при 

**42**. **Розв’яжемо нерівність** 

ОДЗ :   




Маємо:  ****(\*)

Якщо , то**** і нерівність (\*) не має розв’язків.

Якщо  то **** тоді ****

****

Якщо , то **** і нерівність (\*) справджується при 

*Відповідь:* при  не має розв’язків; при ****

при 

**43.** **Розв’яжемо нерівність** 

*Розв’язання*

ОДЗ : 



Якщо , то 

Якщо  то 

Якщо  то не має розв’язків;

*Відповідь:* при при , при 

не має розв’язків.

**44.** 

*Розв’язання*

 ОДЗ: 

Оскільки при то , при

При  *а* = 1 нерівність задовольняють усі числа, крім 

При  *а* ≥ 2 не має розв’язків.

Якщо  то піднесенні до квадрата обох частин вихідної нерівності та з урахуванням того, що  і , отримаємо: 

звідки ****Якщо 

**45.** *Розв’язання*

 ОДЗ : 

Якщо , то не має розв’язків;

Якщо  то 

Якщо  то 

**46.** *Розв’язання*

 ОДЗ: 

Якщо ****, то****



Якщо то 





Якщо , то 

*Відповідь:* при ; при **** , 

**47.**Знайдіть усі значення параметра «а», при яких система рівнянь

a\*x+4\*y=6+a

2\*x+(2+a)\*y=8

має безліч розв’язків.

Якщо таке значення одне, то запищіть його у відповідь. Якщо таких значень кілька, то у відповідь запищіть їх суму

Розв’язання

Рівняння системи – це рівняння прямих, так як задаються лінійними функціями:

4\*y=6+a-a\*x y= -a/4\*x+(6+a)/4

(2+a)\*y=8-2\*x; y= -2/(2+a)\*x+8/(2+a);

Система буде мати безліч розв’язків, якщо графіки заданих функцій збігаються, а це при умові рівності кутових коефіцієнтів прямих к1=к2, та вільних членів b1=b2

Кутові коефіцієнти лінійної функції y=kx+b першого та другого рівнянь системи:

к1= -а/4, к2= -2/(2+а), b1=(6+а)/4, b2=8/(2+а).

Маємо:

-а/4= -2/(2+а) а2+2а-8=0

(6+а)/4=8/(2+а); а2+8а+12-32=0;

а2+2а-8=0 а1= -4

а2+8а-20=0 а2= 2 а=2

а1= -10

а2= 2

Відповідь: При а= 2 система має безліч розв’язків

**48.**Знайдіть усі значення параметра а, при яких система

x2+(y-a)2=4

y= -5

має єдиний розв’язок

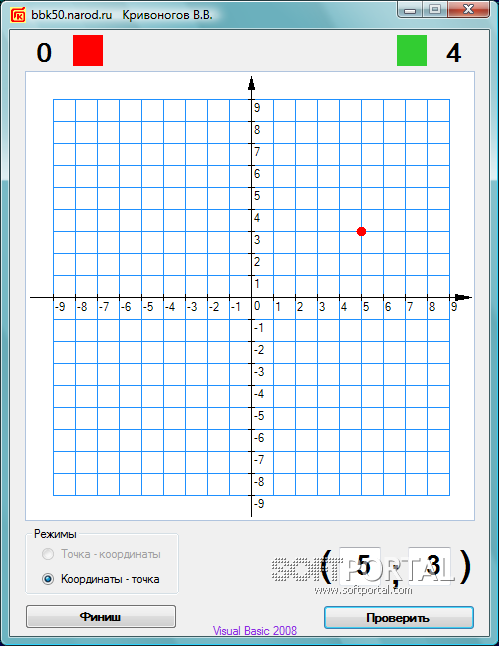
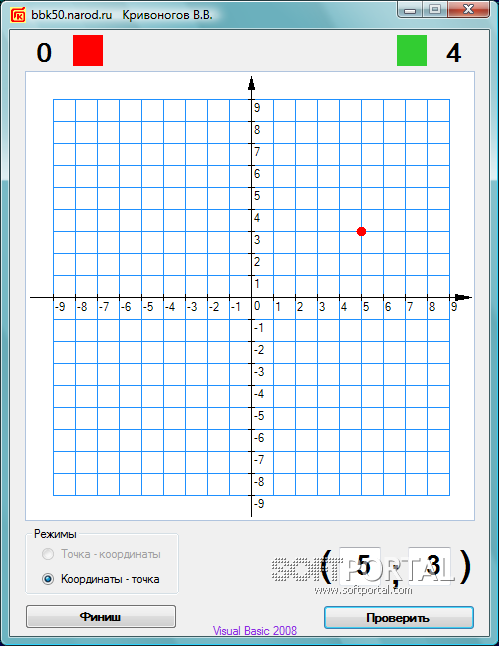
У відповідь запищіть їх суму

**Розв’язання**

Для розв’язання даної системи рівнянь скористуємось графічним методом:

а=-3Перше рівняння системи – це рівняння кола з центром в т. О(0;а) та радіусом R=2

Друге рівняння – рівняння прямої паралельної вісі OX, яка проходить через ординату y= -5



а=-3

а=-7

Тоді: а1+а2= -3+(-7)= -10

Відповідь: а1+а2= -10

**47.**Знайдіть найменше значення параметра «а», при якому система

x2+y2=a2

(x-7)2+y2=1 має єдиний розв’язок

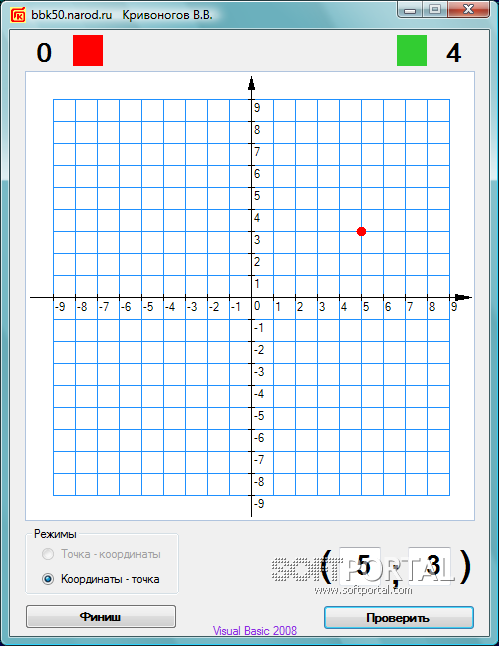
*Розв’язання*

Графічний метод.

Єдиний розв’язок система буде мати ,якщо графіки рівнянь мають одну спільну точку.

Графік першого рівняння – це рівняння кола з центром в т.О1(0;0) та радіусом R1=a

Графік другого рівняння – рівняння кола з центром в т.О2(7;0) та радіусом R2=1



Маємо єдиний розв’язок системи при:

а2=8 а1=6

Звідси найменше значення параметра аmin=6

Відповідь: При найменшому значенні а=6 система має єдиний розв’язок

**48.**Знайдіть найбільше ціле значення параметра «а», при якому система рівнянь

y-x= a

x2+y2= 1, має два розв’язки

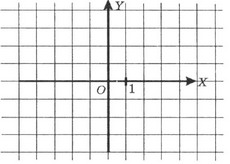
*Розв’язання*

Графічний метод

Графіком першого рівняння системи є пряма - бісектриса І та ІІІ чверті з паралельними переміщення вздовж осі oy на a одиниці

y=x+a

Графік другого рівняння - коло з центром О (0; 0) та радіусом R=1



Цілі значення а,при яких система має два розв’язки:

а1 = 1, а2 = -1, а=0.

Найбільшим цілим серед них

амах = 1.

Відповідь: При найбільшому цілому значенні параметра а=1 система має два розв’язки.

**49.**Знайдіть усі значення параметра а, при яких система рівнянь

x2+ y2=4

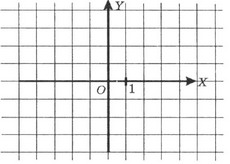
y= x2=a, має єдиний розв’язок

Якщо таке значення одне, то запишіть його у відповідь. Якщо таких значень кілька, то у відповідь запишіть їх суму.

*Розв’язання*

Графіком першого рівняння є коло з центром О (0;0) та радіусом R=2, а графіком другого рівняння є парабола з вітками вгору, яка паралельно перенесена на а одиниць вгору, якщо а > 0 та на а одиниць вниз, якщо а < 0

Маємо:



З графіку видно, що тільки при одному значенні а=2 система рівнянь має єдиний розв’язок.

Відповідь: При а=2 система має єдиний розв’язок.

**50.**Використовуючи графік рівняння

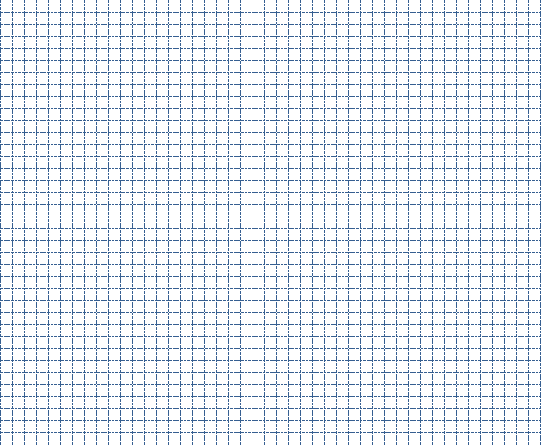
│y│= 1- │x-12│ знайдіть усі значення параметра а, при яких система

│x-12│+ │y│

( x-a)2+ y2=4, має єдиний розв’язок .

У відповідь запишіть їх суму.

*Розв’язання*



**у y**

а=9  **а2=15**

-1 1 9 12 15 х

Графіком другого рівняння системи є коло з центром О (а; 0) та радіусом R=2.

Єдиний розв’язок система матиме при а1=9 та а2=15.

Тоді :

9+15=24.

Відповідь: а1 + а2=24

**51.** При яких значеннях параметра *а* квадратне рівняння не має дійсних коренів:



Розв,язання:

D=4*а2*-4(2*а2*-1)=4*а2-8а2+4=-4а2+4*

D<0; -*4а2+4<0*

-4*(а2-4)<0*

*а2-4>0*

*1< а<-1*

*Відповідь:* При *а є (-∞; -1)U( 1; +∞)* рівняння не має дійсних коренів

**52.**При яких значеннях *p* нерівність  вірна при будь якому значенні *х?*

*Розв,язання:*

Так як вітки параболы  

напрямлені вгору, то умова задачі буде рівносильна умові :D < 0 .

Розв, яжемо отриману нерівніствь, маємо:

p2-2p-3<0,

-1<p<3

Відповідь: При *р* є (-1 ; 3) нерівність вірна при будь якому значенні *х.*

**53.**При яких значеннях параметра *а* квадратне рівняння не має дійсних коренів:



Відповідь: При а є (0; 0,5) U (2;+∞) квадратне рівняння не має дійсних коренів

**54.**При яких цілих значеннях *p* нерівність вірна при будь якому значенні *х?*



*Розв,язання***:**

Нерівеніствь виконується для будь якого х,

якщо дискриминант нерівності від ,ємний.

Тобто 

*Відповідь:* 1;2;3;4;5;6;

**55.**Знайти всі значення параметра , при яких уравнение



Має два різні кореня рівновіддалених від точки 

*Розв ,язання :*

Зробимо заміну: 

Тоді рівняння прийме вигляд:





Рівняння завжди має два кореня

,

,

, х=43а+12 и х=43а+11

43а+12+ 43а+11 = 40\*2 та *а*=-3

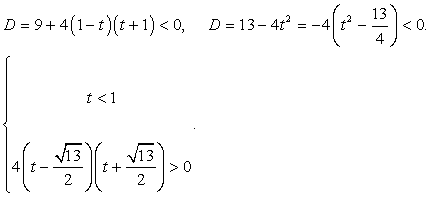
*Відповідь :* *а*=-3.

**56.**Знайти найбільше ціле значення параметра t, для якого виконується нерівність:

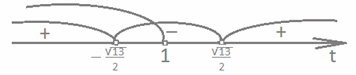
(1 - t)x2 + 3x - t - 1 > 0.

*Розв,язання:*

В лівій частині нерівності квадратний тричлен, який буде завжди додатнім при вітках параболи, напрямлених вгору (тобто 1 – t > 0 або t < 1) та від ,ємним при дискриминанті:



Покажемо розв ,язок системи на числовій прямій Усі розв ,язки нерівності : .



Найбільше ціле число -2, так як .



*Відповідь:* - 2

**57.**При яких значеннях *b* система має єдиний розв ,язок ?



*Розв,язання:*

Виразимо *y* через *x* з другого рівняння та підставимо його в перше рівняння, отримаємо:



Ця система має єдиний розв ,язок тоді і тільки тоді, коли дискримінант першого рівняння дорівнює нулю, тобто коли , .



Примітка: Краще розв ,язувати цю задачу графічно, розглядаючи умову дотику кола і прямої.

*Відповідь:* При .



**58.**Знайдіт всі значення параметра *а*, при яких парабола і прямая  не мають спільних точок.

*Розв,язання:*

Парабола і прямая не мають спільнихточок, таким чином



Рівняння не має коренів, коли D<0

*Відповідь:* .

**59**.Знайдіт всі значення параметра *а*, при кожному з яких або кількість коренів рівняння дорівнює кількості коренів рівняння



, або обидва ці рівняння не мають розв, язків.



*Розв,язання:*

Так як рівняння є лінійним, то у нього може бути або: один корінь, нескінчена множина коренів або взагалі не має розв.язків, в залежності від параметра:



Так как уравнение является линейным, то у него может быть либо: один корень, бесчисленное множество корней или вообще не имеет решений, в зависимости от параметра.



**60.**Найти все значения параметра *а*, при каждом из которых либо число корней уравнения равно числу корней уравнения , либо оба эти уравнения не имеют решений.



*Розв,язання*

Так как уравнение является линейным, то у него может быть либо: один корень, бесчисленное множество корней или вообще не имеет решений, в зависимости от параметра



Знайдіть усі значення параметра *а*, при кожному з яких система мас один розв’язок:



Здійснимо перетворення:

1) 

х 0 7

Маємо   у 7 0

*у*

7 *у*=7

*В* (3;1) *Д*

*С(3;4)*

А 1

0 *х*

7 *у* =7-х

*х*=3

а) АВ: 

При *а* > 2 – немає розв’язків; *а* = 2 – є розв’язок;

б)  - один розв’язок;

в)  - не задовольняє

 - є розв’язок;

 - не задовольняє

*Відповідь: *

**61.**Знайдіть всі значення параметра *а*, при яких рівняння має 1) нескінчену множину розв’язків; 2) не має розв’язків

І 

ІІ 

ІІІ 

ІV 

Перетворимо І систему:



+ - +

0 14

- + -

0 



**

*Розв’язок:*

При *а*=0, то *х*=0

Розглянемо ІІ систему:



При *а*=0, то *х*=0

Розглянемо ІІІ систему:





+ - + *а*

-8 0

+ - +

0  *а*



**Загальна множина розв’язків

 для кожного

*а* свій *х.*

Розв’яжемо ІV









+ - + *а*

-8 0

- + -

*а*

14



** 

Для кожного *а* буде свій *х*

1) При  та  - немає розв’язків;

2) При  ІІІ та ІV системи мають розв’язки;

3) При *а* = 0 І, ІІ, ІІІ, ІV мають розв’язки;

При  - скінчена кількість розв’язків.

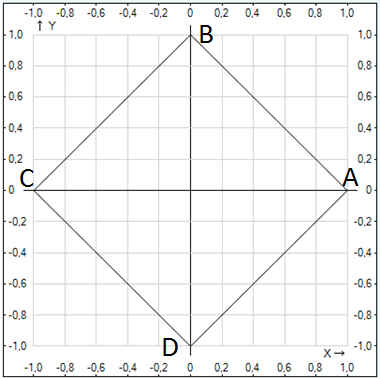
Відповідь: 1) Немає нескінченної кількості розв’язків; 2) При  та  немає розв’язків

**62.**Розв’язати рівняння з параметром:

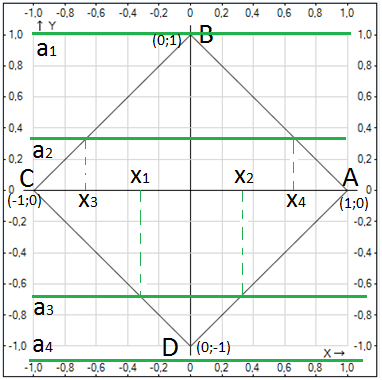
│х│+│а│=1  
Згідно з методикою на першому кроці ми повинні побудувати графік заданого рівняння ІаІ=1-ІхІ , в даному випадку це квадрат ABCD:

Графік функції

Будуємо відрізок АВ у першій чверті (АВ =–х+1) і симетрично відображаємо його відносно обох осей. Таким чином, знаючи рішення в одній чверті, ми можемо отримати рішення в інших чвертях.Тепер необхідно записати рівняння отриманого відрізка для кожної чверті.  
Перша чверть: відрізок АВ, АВ =–х+1  
Друга чверть: відрізок ВС :ВС=х+1. Щоб отримати дане рівняння необхідно взяти симетрію для рівняння першої чверті відносно осі у, при цьому замість х підставляємо -х.  
Третя чверть: відрізок CD, СD=-х-1  
Четверта чверть: відрізок AD, AD=х-1  
Далі згідно з методикою необхідно розсікти отримане геометричне місце точок сімейством прямих а=соnst і знайти точки перетину.

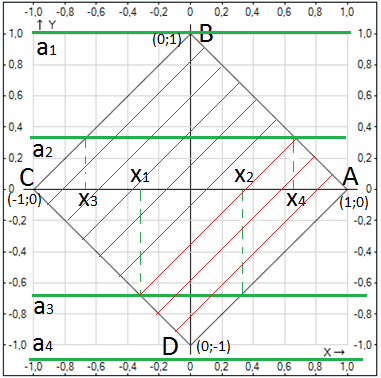


пеТепер дивлячись на графік, можемо виписати відповідь: при ає(-∞;-1)U(1;+∞) рівняння не має рішень; при а=-1 або а=1 рівняння має єдине рішення х=0 ; при а є(-∞;0) рівняння має дварішення–х=-1; х=1 ; при рівняння має два рішення ; при а Є (0;1)\_рівняння має два рішення –х=а-1; х=-а+1



Постановка задачі при вирішенні рівняння з параметром може бути різною, наприклад, знайти значення параметра, при яких рівняння не має рішень, але для того, щоб вирішувати різноманітні більш вузькі завдання, необхідно вирішити повну завдання – перебрати всі значення параметра, при кожному знайти рішення рівняння.

**63**.Розв’язати графічним методом нерівність з параметром: │х│+│а│<1



Згідно з методикою спочатку потрібно побудувати графік заданої нерівності в осях х, а. у попередньому прикладі ми будували графік рівняння, що стоїть в лівій частині. Для побудови графіка даного нерівності необхідно лише заштрихувати всі значення всередині квадрата, так як це і є рішення нерівності.

Далі необхідно розсікти графік сімейством прямих а=const і знайти точки перетину. Розтин виконано на малюнку 21.3, точки перетину знайдено в прикладі 1. при вирішенні рівняння:   
 .Дивлячись на графік, можемо виписати



відповідь: при ає(-∞;-1)U(1$+∞) нерівність не має розв'язків; при а=-1 або а=1 нерівність має єдине рішення х=0; при ає(-1; 0) нерівність має безліч рішень Хє(-а-1; а+1); при а=0 нерівність має безліч рішень[-1;1] ; при ає(0;1) нерівність має безліч рішень(а-1;-а+1) .

**64.** З'ясувати, скільки розв'язків може мати завдання на побудову трикутника, заданого кутом α, прилеглій до нього стороною, що має довжину 4 см, і різницею двох інших сторін - 2.

**65.** . Потрібно отримати переливанням 15% - й розчин кислоти. Для цього у нас є дві посудини з кислотою, кожен з яких має ємність три літри. У першому посудині знаходиться два літри 5% -го розчину кислоти. У другому посудині знаходиться два літри r%-го розчину цієї кислоти. Необхідно з'ясувати, при яких значеннях р, переливаючи розчин з другої посудини в першу, можна домогтися бажаного результату.

**66.** Якої сили кидка «від грудей» (висота ? 1,5 м) необхідно домогтися баскетболіста, щоб потрапити м'ячем у кошик, розташовану на висоті 3,05 м з відстані 6,25 м (триочковий кидок)?

**67.**Як в залежності від кута міжнапрямком сили та переміщення змінюється знак роботи?

**68.**Як міняється стан ідеального газу в залежності від зміни термодинамічних параметрів?

**69.**В колі,яке складається резисторів R1=1Ом,до якого послідовно приєднані опори R2=2Ом,R3=4 Ом,з’єднані між собою паралельно.

Розв’язок:

Опір на паралельній ділянці кола

R2,3= R2 R 3/R 2+R 3 =4/3 (Ом).Напруга на третьому резисторі U3 =І 3R 3=4І3=U2,3, тоді І1=3І3.

Відповідь: І1=3І3

U3 =І 3R 3=4І3=U2,3, тоді І1=3І3.

**ЗМІСТ**

1. Методичні вказівки 4

2.Лінійні рівняння та лінійні нерівності 5

3.Квадратичні рівняння та нерівності 11

4.Ірраціональні рівняння і нерівності 19

5.Тригонометричні рівняння та нерівності 28

6.Графічний метод розв’язування завдань з 46 параметрами

7.Логаріфмічні рівняння 54

8.Системи рівнянь 62

9.Прикладні задачі 73