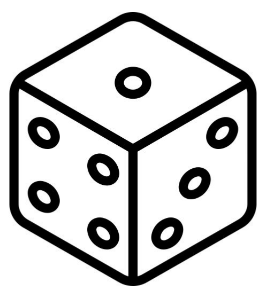
Elementy kombinatoryki

Valerija Artiomova
Uniwersytet Gdański

3 lutego 2023

Streszczenie

Kombinatoryka jest działem matematyki, który pomaga odpowiedzieć na pytania typu: "ile jest możliwych wyników w rzucie monetą?", "Na ile sposobów możemy wybrać delegację dwuosobową z klasy 28 osobowej?", itp. Aby rozwiązać tego typu zadania, często stosuje się wzory na permutacje, kombinacje, wariacje oraz wariacje z powtórzeniami. Na szczęście nie trzeba pamiętać tych wszystkich wzorów, aby szybko i skutecznie rozwiązywać zadania z kombinatoryki. Do rozwiązania większości zadań w zupełności wystarcza reguła mnożenia i wzór na kombinację.



1 Reguła mnożenia

Reguła mnożenia przydaje się podczas rozwiązywania wielu zadań z kombinatoryki.[2]

Przykład 1. Rzucamy trzy razy monetą. Ile jest wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia?

Rozwiązanie: Możliwe wyniki to np.: **(Orzeł,Orzeł,Reszka), (O,R,R), (R,O,R), (R,R,R)...**[3]
Zatem:

- W I rzucie może wypaść orzeł lub reszka, czyli są 2 możliwości.
- W II rzucie również może wypaść orzeł lub reszka, czyli są 2 możliwości.
- W III rzucie również może wypaść orzeł lub reszka, czyli są 2 możliwości.

W **I rzucie** są 2 możliwości	**i**	W **II rzucie** są 2 możliwości	**i**	W **III rzucie** są 2 możliwości

Reguła mnożenia mówi, że w takiej sytuacji mamy:

$$2 \cdot 2 = 8$$

możliwości.

W regule mnożenia zawsze zamieniamy spójnik i na mnożenie.

Przykład 2. Obliczmy, ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 3 i 4.

Pierwszy element ciągu (cyfrę tysięcy danej liczby) możemy wybrać na dwa sposoby, na drugim miejscu (cyfra setek) też możemy umieścić jedną z dwóch cyfr. Tak więc na dwóch pierwszych miejscach możemy umieścić cyfry na 4 sposoby. Na trzecim (cyfra dziesiątek) i czwartym (cyfra jedności) miejscu możemy również umieścić cyfry 3 lub 4. A więc liczba wszystkich możliwości wynosi

$$4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

Tłumacząc to zagadnienie na język matematyki, pytamy, ile ciągów czterowyrazowych możemy zbudować ze zbioru dwuelementowego, jeżeli elementy mogą się powtarzać.[1]
Każdy taki czterowyrazowy ciąg utworzony z cyfr 3 i 4, w którym elementy mogą się powtarzać, nazywamy czterowyrazową wariacją z powtórzeniami zbioru dwuelementowego $\{3, 4\}$.

Wariacją k-wyrazową z powtórzeniami zbioru n-elementowego, gdzie $k, n \in N_+$, nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg utworzony z k niekoniecznie różnych elementów tego zbioru.

Jeżeli ze zbioru składającego się z n elementów wybieramy k elementów ($k \leq n$), w ten sposób, że:

- istotna jest kolejność wybieranych elementów
- wybierane elementy mogą się powtarzać, to w ten sposób budujemy k-wyrazową wariację z powtórzeniami tego zbioru.

Ćwiczenie 1. Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1, 2 i 3?

Przykład 3. Dany jest zbiór Z składający się z liczb 5, 6, 7, 8, 9, czyli $Z = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

Ponieważ możemy utworzyć pięć jednowyrazowych ciągów z elementów zbioru Z, więc mamy pięć jednowyrazowych wariacji z powtórzeniami. Są nimi jednowyrazowe ciągi (5), (6), (7), (8), (9). Zatem $W_5^1 = 5$.

Dopisując w powyższych wariacjach na drugim miejscu kolejno elementy zbioru Z, otrzymamy dwuwyrazowe wariacje z powtórzeniami zbioru Z:

(5,5), (5,6), (5,7), (5,8), (5,9),
(6,5), (6,6), (6,7), (6,8), (6,9),
(7,5), (7,6), (7,7), (7,8), (7,9),
(8,5), (8,6), (8,7), (8,8), (8,9),
(9,5), (9,6), (9,7), (9,8), (9,9).

Zatem $W_5^2 = 5_5^1 = 5 \cdot 5 = 5^2$.

Dalej weźmy dwuwyrazowe wariacje z powtórzeniami zaczynające się od liczby 5 i dopiszmy na trzecim miejscu kolejno elementy zbioru Z, otrzymując trzyelementowe wariacje zbioru Z:

(5,5,5), (5,5,6), (5,5,7), (5,5,8), (5,5,9),
(5,6,5), (5,6,6), (5,6,7), (5,6,8), (5,6,9),
(5,7,5), (5,7,6), (5,7,7), (5,7,8), (5,7,9),
(5,8,5), (5,8,6), (5,8,7), (5,8,8), (5,8,9),
(5,9,5), (5,9,6), (5,9,7), (5,9,8), (5,9,9).

Postępując analogicznie z pozostałymi dwuwyrazowymi wariacjami, dochodzimy do wniosku, że $W_5^3 = 5 \cdot W_5^2 = 5_5^1 = 5 \cdot 5 = 5^3$.
Następnie, biorąc trzywyrazowe wariacje z powtórzeniami i dopisując na czwartym miejscu kolejno elementy zbioru Z, otrzymujemy czteroelementowe wariacje

z powtórzeniami zbioru Z. Rozumując tak jak wyżej, mamy $W_5^4 = 5 \cdot W_5^3 = 5 \cdot W_5^2 = 5_5^1 = 5 \cdot 5 = 5^4$.

Liczba wszystkich k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n elementowego wyraża się wzorem $W_n^k = n^k$.

Przykład 4. Obliczmy, ile jest wszystkich liczb dwucyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 1, 2, 3, 4, 5 i żadna z cyfr się nie powtarza.

Zauważmy, że pierwszą cyfrę możemy wybrać na 5 sposobów, a drugą na 4 sposoby. Zgodnie z regułą mnożenia otrzymujemy $5 \cdot 4 = 20$. Są to następujące liczby:

12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54.

Stosując język matematyki, pytamy, ile ciągów dwuwyrazowych możemy zbudować, używając różnych elementów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Każdy taki dwuwyrazowy ciąg utworzony z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, w którym wyrazy nie powtarzają się, nazywamy dwuwyrazową wariacją bez powtórzeń zbioru 1, 2, 3, 4, 5.

Wariacją k-wyrazową bez powtórzeń zbioru n-elementowego, gdzie $k, n \in N_+$, oraz $k \leq n$, nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg utworzony z k różnych elementów tego zbioru.

Ćwiczenie 2. Ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i żadna cyfra się nie powtarza?

Przykład 4. Dany jest zbiór Z składający się z liczb 5, 6, 7, 8, 9, czyli $Z = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

Mamy pięć jednowyrazowych wariacji bez powtórzeń, są nimi jednowyrazowe ciągi

(5), (6), (7), (8), (9),

więc $V_5^1 = 5$.

Dopisując w powyższych wariacjach na drugim miejscu kolejno elementy zbioru Z niewystępujące w tej wariacji, otrzymamy dwuwyrazowe wariacje bez powtórzeń zbioru Z:

(5,5), (5,6), (5,7), (5,8), (5,9),
(6,5), (6,6), (6,7), (6,8), (6,9),

(7,5), (7,6), (7,7), (7,8), (7,9),
(8,5), (8,6), (8,7), (8,8), (8,9),
(9,5), (9,6), (9,7), (9,8), (9,9).

więc $V_5^2 = 4 \cdot V_5^1 = 4 \cdot 5$.

Dalej weźmy dwuwyrazowe wariacje bez powtórzeń i dopiszmy na trzecim miejscu kolejno elementy zbioru Z niewystępujące w tej wariacji. Otrzymamy trzyelementowe wariacje bez powtórzeń zbioru Z.

(5,6,7), (5,6,8), (5,6,9),
(5,7,6), (5,7,8), (5,7,9),
(5,8,6), (5,8,7), (5,8,9),
(5,9,6), (5,9,7), (5,9,8).

Postępując analogicznie z pozostałymi dwuwyrazowymi wariacjami, dochodzimy do wniosku, że $V_5^3 = 3 \cdot V_5^2 = 3 \cdot 4 \cdot 5$.

Następnie do trzywyrazowych wariacji z powtórzeniami dopiszemy na czwartym miejscu kolejno elementy zbioru Z. Otrzymamy czteroelementowe wariacje bez powtórzeń zbioru Z.

W wyniku otrzymujemy $V_5^4 = 2 \cdot V_5^3 = 3 \cdot 4 \cdot 5$.

Liczba wszystkich k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego,gdzie $k, n \in N_+$ oraz $k \leq n$, wyraża się wzorem $V_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$.

Twierdzenie można udowodnić za pomocą indukcji matematycznej.

Literatura

[1] Katarzyna Nowoświat, *Matematyka Europejczyka*, Wydawnictwo Helion, 2014

[2] Reguła mnożenia, online:`https://www.matemaks.pl/regula-mnozenia.html`, dostęp: 03.02.2022

[3] Wprowadzenie do kombinatoryki, online: `https://docplayer.pl/48256449-Wprowadzenie-do-kombinatoryki.html`, dostęp: 03.02.2022