Operacje na macierzach

Valerija Artiomova 287111

3 lutego 2023

Spis treści

1. Operacje na macierzach
   - Dodawanie
   - Mnożenie
   - Transpozycja macierzy
   - Wyznacznik
   - Odwracanie
2. Bibliografia

Operacje na macierzach

Podstawowe operacje na macierzach:

1. Dodawanie
2. Mnożenie
3. Transpozycja
4. Obliczanie wyznacznika
5. Odwracanie

Dodawanie

Definicja

Suma dwóch macierzy $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ i $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ jest równa macierzy $C \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, której każdy element jest opisany następującym wzorem:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{1,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \cdots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{bmatrix}$$

Mnożenie

Definicja

Jeżeli $A \in M_{l\times m}(\mathbb{R})$ i $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ są macierzami, to ich iloczyn [1], oznaczany AB, jest macierzą $C \in M_{l\times n}(\mathbb{R})$

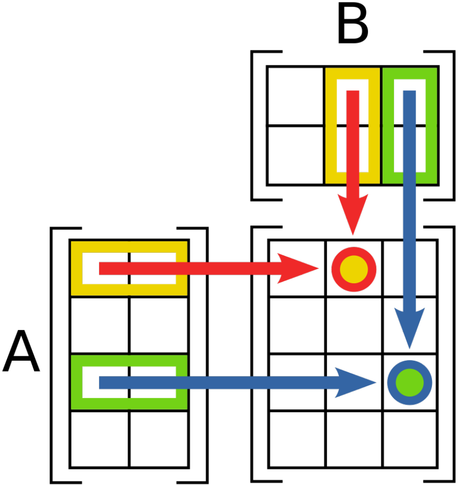
$$C = AB, \text{ gdzie } c_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir}b_{rj} = a_{i1}b_{j1} + a_{ir}b_{ri} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

Mnożenie c.d.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l,1} & a_{l,2} & \cdots & a_{l,m} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l,1} & c_{l,2} & \cdots & c_{l,n} \end{bmatrix}, \text{ gdzie } c_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} b_{rj}$$

Mnożenie c.d.



Mnożenie - przykład

Przykład

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 42 \\ 11 & 27 \end{bmatrix}$$

Macierz transponowana

Definicja

Macierz transponowana[4] macierzy A – macierz A^T - która powstaje z danej macierzy poprzez zamianę jej wierszy na kolumny i kolumn na wiersze.

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 8 & 0 & 2 \\ 9 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} A^T = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 & 3 \\ 6 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik

Definicja

Pierścień przemienny (komutatywny) – pierścień, w którym mnożenie jest przemienne, czyli którego wszystkie elementy ze sobą komutują, tj. dla dowolnych elementów a, b danego pierścienia $\mathbb{R}$ zachodzi

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Definicja

Wyznacznikiem [2] nazywamy funkcję przyporządkowującą każdej macierzy kwadratowej $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ o współczynnikach z pierścienia przemiennego $\mathbb{R}$ pewien element tego pierścienia. Wyznacznik macierzy kwadratowej A oznaczany jest przez $|A|$, $\det A$, czasem tez $\Delta(A)$.

Wyznacznik c.d.

Definicja (Definicja permutacyjna)

Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest macierzą. Wówczas:

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{Inv(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(2n)}$$

gdzie S_n oznacza zbiór wszystkich permutacji zbioru $1, 2, \cdots, n$, zaś $Inv(\sigma)$ oznacza liczbę inwersji danej permutacji $\sigma \in S_n$

Definicja (Definicja rekurencyjna)

Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest macierzą.Wyznacznikiem macierzy nazywamy funkcję $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R})) \to \mathbb{R})$ spełniająca:

1. jeśli $n = 1$, to $\det A = a_{11}$
2. jeśli n >1, to $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$, gdzie i jest dowolną liczbą naturalną z zakresu $1 \le j \le n$, a przez A_{ij} oznaczamy macierze stopnia n-1, powstałą z macierzy A poprzez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny (minor).

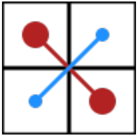
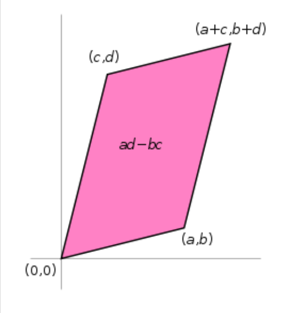
Wyznacznik c.d.

Przykład

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} ad + (-1)^{1+2} cb = ad - cb$$

Przykładowo:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 3 - 8 = -5$$

Odwracanie macierzy

Definicja

Niech A jest macierzą kwadratową ustalanego stopnia. Macierz A jest odwracalna, jeżeli istnieje taka macierz B, że zachodzi:

$$AB = BA = I$$

Własności

- Macierz odwrotna [3] do macierzy odwracalnej jest odwracalna, operacja odwracania macierzy jest inwolucją

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

- Iloczyn macierzy odwracalnych jest macierzą odwracalną (kolejność macierzy jest istotna)

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$

- Jeżeli macierz A jest odwracalna, to także A^T jest odwracalna

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Odwracanie macierzy c.d.

Przykład (Metoda operacji elementarnych)

$$[A|I] \to [I|A^{-1}]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A|I = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Mnożenie macierzy, online:
https://pl.wikipedia.org/wiki/Mno%C5%BCenie_macierzy, dostęp: 03.02.2022

Wyznacznik, online:
https://pl.wikipedia.org/wiki/Wyznacznik, dostęp: 03.02.2022

Macierz odwrotna, online:
https://pl.wikipedia.org/wiki/Macierz_odwrotna, dostęp: 03.02.2022

Macierz transponowana, online:
https://pl.wikipedia.org/wiki/Macierz_transponowana, dostęp: 03.02.2022