UNITELMA SAPIENZA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Progettazione di algoritmi

Angelo Monti

Lezione 1:
I grafi

Lezione 1: Sommario

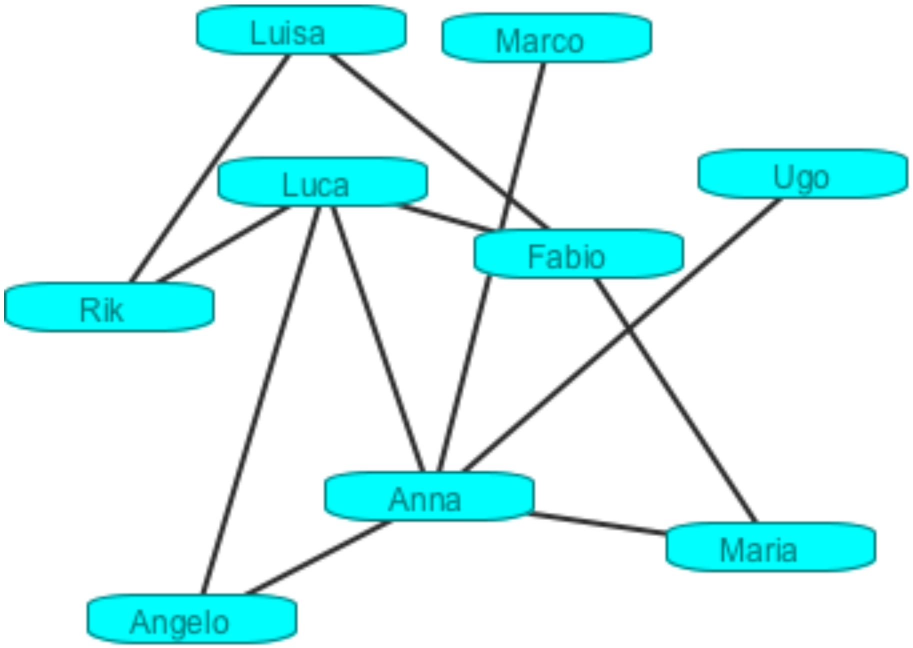
UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

- Grafi diretti e non diretti
- Rappresentazione di grafi con matrici di adiacenza o liste di adiacenza
- Il pozzo universale

I grafi

Def. Un grafo è una collezione di elementi con una relazione binaria tra essi.

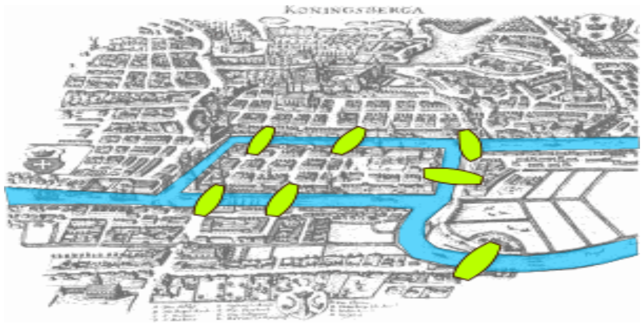
Esempio di relazione di amicizia tra persone:



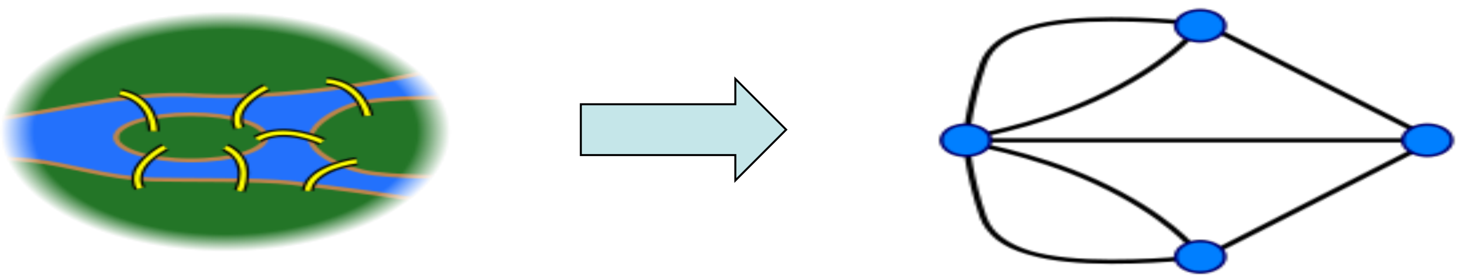
° Ogni elemento di un grafo è detto **nodo** o **vertice**.
° La relazione tra due nodi si chiama **arco**.

I grafi: le origini

- Un utile strumento di modellizzazione.



Il problema dei sette ponti di kőnigsberg:
È possibile fare una passeggiata che attraversa tutti e sette i ponti passando una sola volta su ogni ponte?

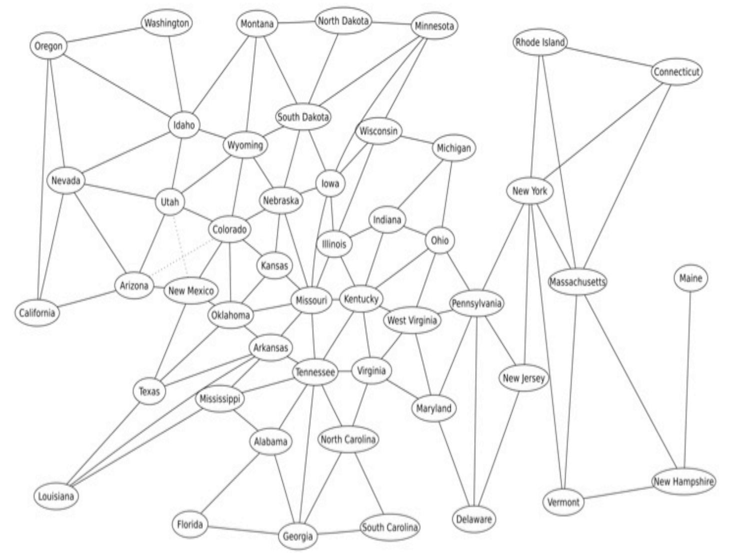


i 4 nodi sono le 4 zone in cui il fiume divide la città e i 7 archi sono i 7 ponti che la collegano.

Una tale passeggiata non esiste perché un nodo che non è né l'inizio né la fine della passeggiata deve avere grado pari (se si entra nel nodo da un ponte si deve uscire da un altro ponte) ma tutti e quattro i nodi hanno grado dispari.

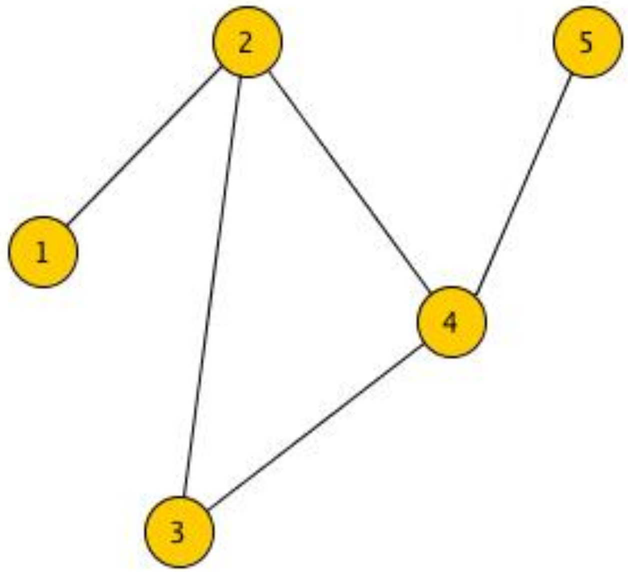
Eulero 1735

Colorare una mappa:



notazioni

- $G = (V, E)$
  - $V =$ **nodi**
  - $E =$ **archi tra coppie di nodi**
- **Parametri del grafo:** $n = |V|$, $m = |E|$

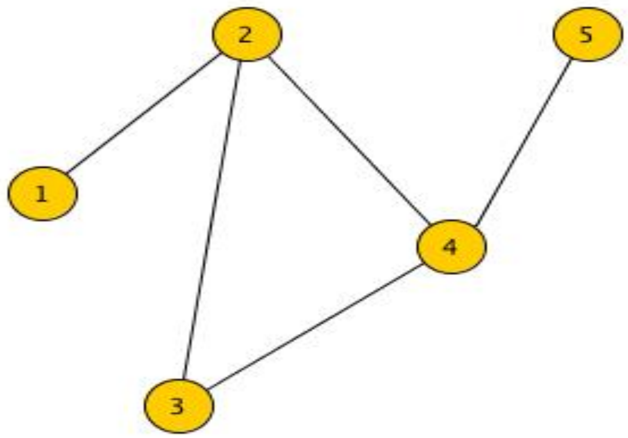


$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$$
$$n = 5$$
$$m = 5$$

UNITELMA SAPIENZA
SAPIENZA Università di Roma
Dipartimento di Informatica

Dato un nodo u del grafo G:
DEF. I nodi adiacenti ad u sono quelli direttamente connessi ad u tramite un arco. Il numero di nodi adiacenti ad u è detto grado di u.

- $adj(u)$ = l'insieme dei nodi adiacenti al nodo u
- d_u = il grado del nodo u



$$adj(2) = \{1, 3, 4\}$$
$$d_2 = 3$$

$$adj(5) = \{4\}$$
$$d_5 = 1$$

Un grafo è denso se il numero dei suoi archi è vicino al massimo numero possibile.

Un grafo è sparso se ha pochi archi.

$$m \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

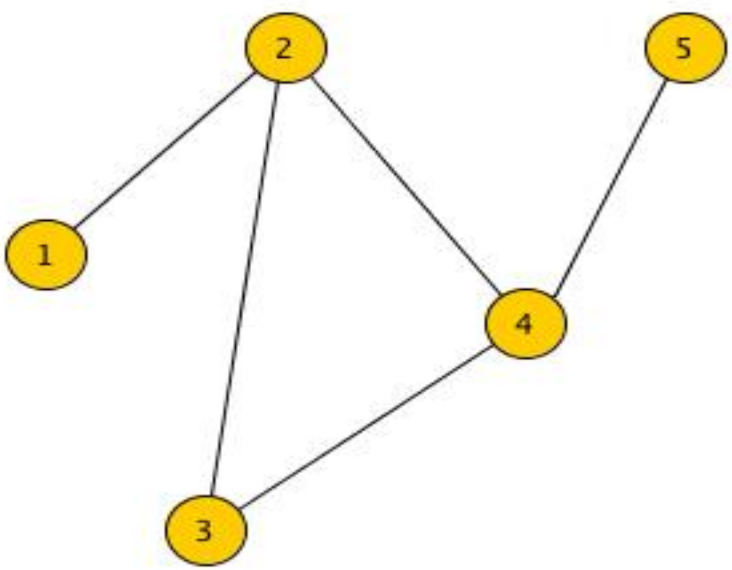
$$m = O(n^2)$$

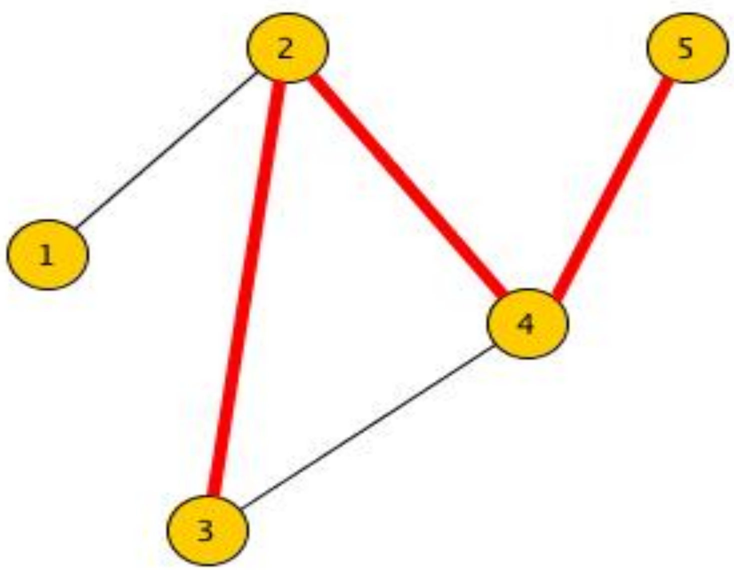
Un grafo si dice sparso se m=O(n)

Cammini, cicli e connettività

Dato un grafo G=(V,E):

- DEF. Un cammino è una sequenza di nodi $u_1,u_2......u_k$ con la proprietà che ciascuna coppia consecutiva u_i,u_{i+1} è collegata da un arco in E



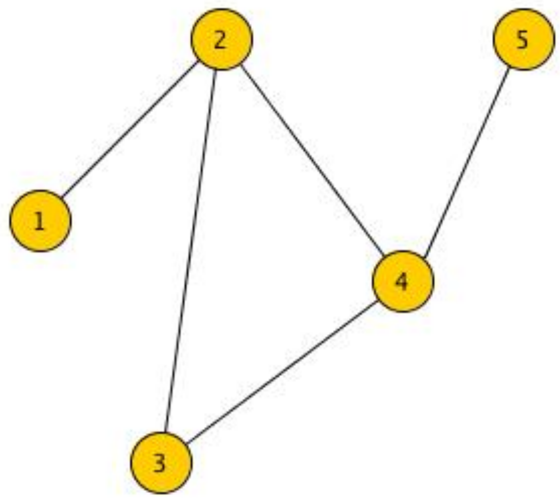


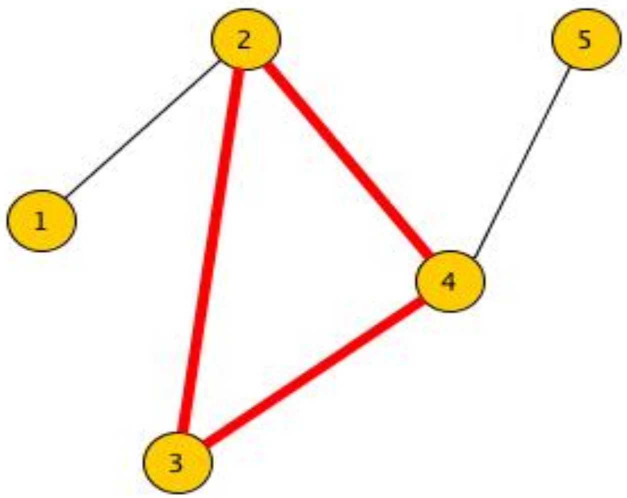
Un cammino: 3,2,4,5

Cammini, cicli, connettività

Dato un grafo G=(V,E):

- DEF. Un cammino è una sequenza di nodi $u_1,u_2......u_k$ con la proprietà che ciascuna coppia consecutiva u_i,u_{i+1} è collegata da un arco in E
- DEF. Un ciclo è un cammino $u_1,u_2......u_k$ dove $u_1= u_k$.



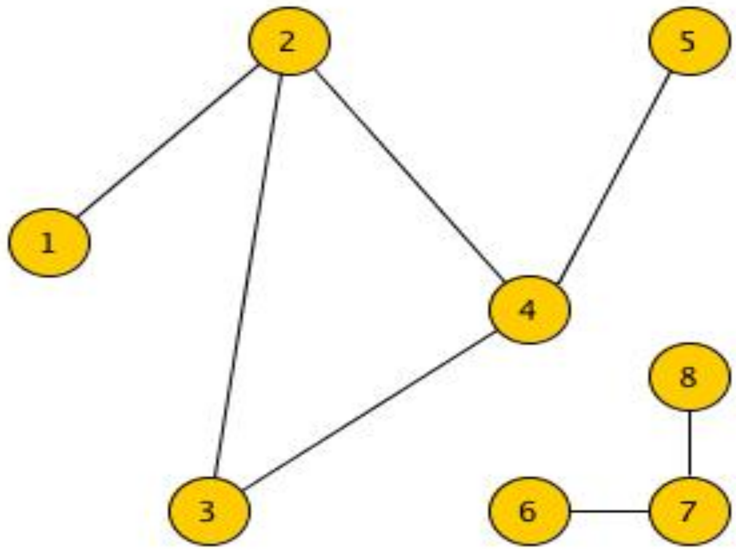


Un ciclo: 2,4,3,2

Cammini, cicli, connettività

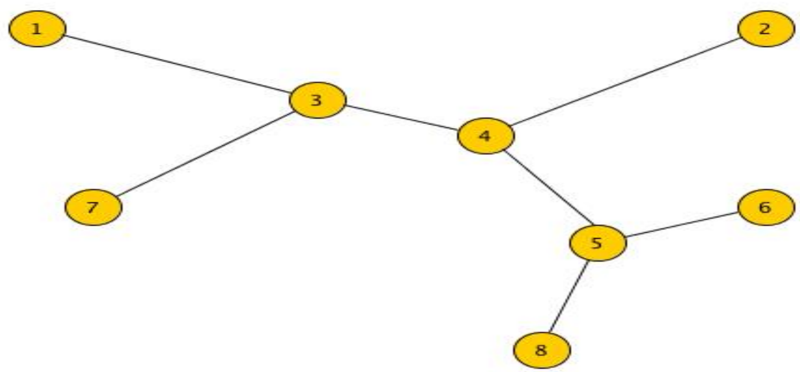
Dato un grafo G=(V,E):

- DEF. Un cammino è una sequenza di nodi $u_1, u_2 \ldots\ldots u_k$ con la proprietà che ciascuna coppia consecutiva u_i, u_{i+1} è collegata da un arco in E.
- DEF. Il grafo è connesso se per ogni coppia di nodi *u,v* c'è un cammino tra *u* e *v.*



Grafo non connesso

Def. Un albero è un grafo <u>connesso</u> e <u>senza cicli</u>.



n = 8
m= 7 = n-1

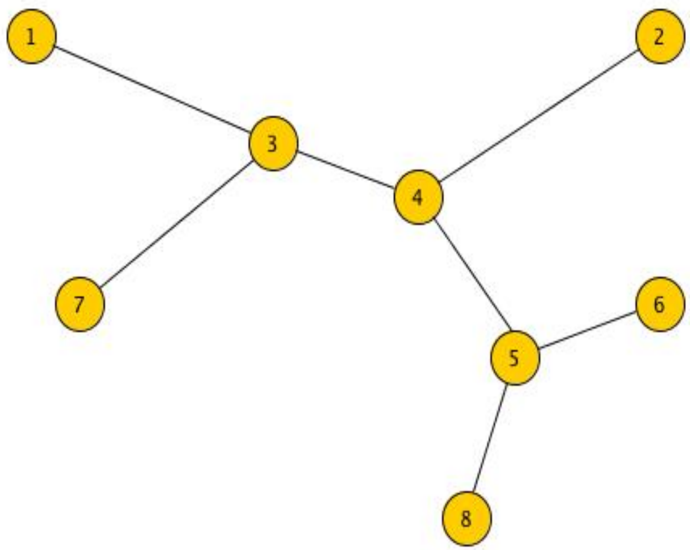
- Per induzione sul numero di nodi non è difficile provare che:

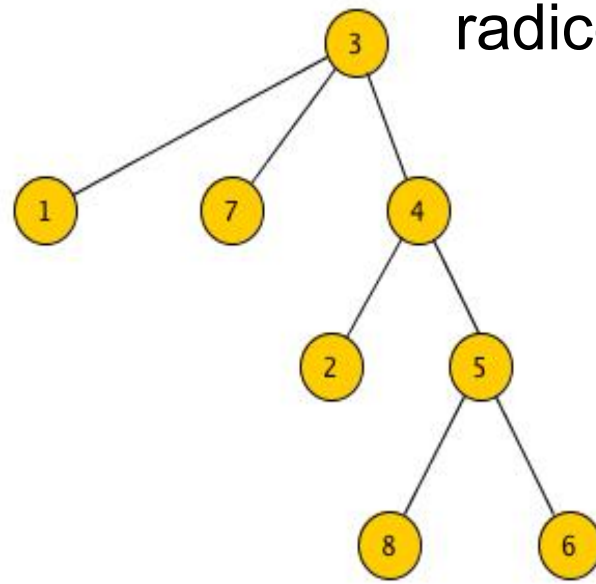
Un albero di *n* nodi ha *n-1* archi.

Un albero è un grafo sparso.

Alberi radicati

Dato un albero, scegli un nodo radice *r* e orienta di conseguenza tutti gli archi.





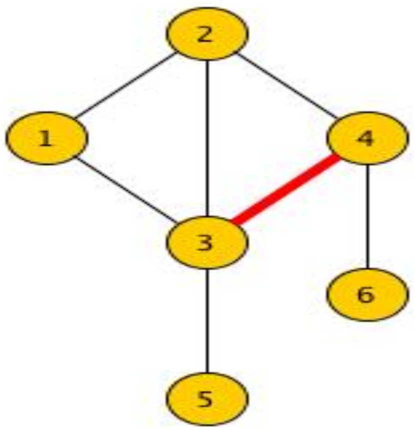
radice

4 è padre di 5

5

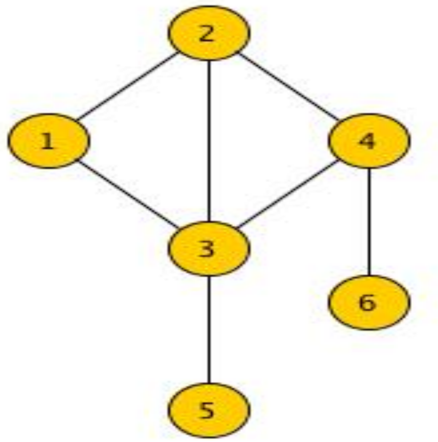
6 è figlio di 5

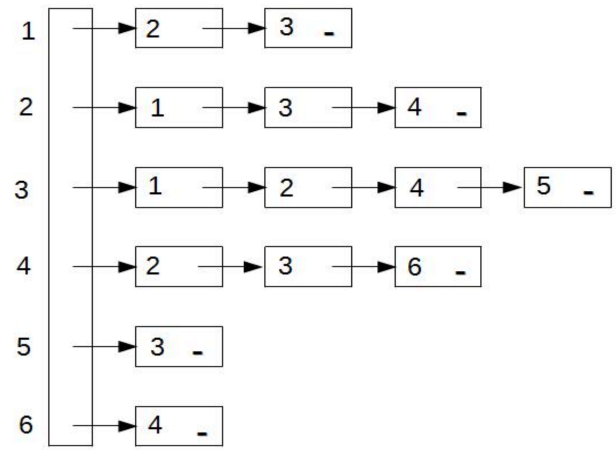
Importanti per modellare strutture gerarchiche.



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0
3	1	1	0	1	1	0
4	0	1	1	0	0	1
5	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0

- **Ogni arco è rappresentato due volte (la matrice è simmetrica)**
- **Verificare la presenza di un arco** $\{u, v\}$ **richiede tempo** $O(1)$
- **Identificare tutti gli archi richiede** $O(n^2)$
- **Spazio richiesto** $\Theta(n^2)$

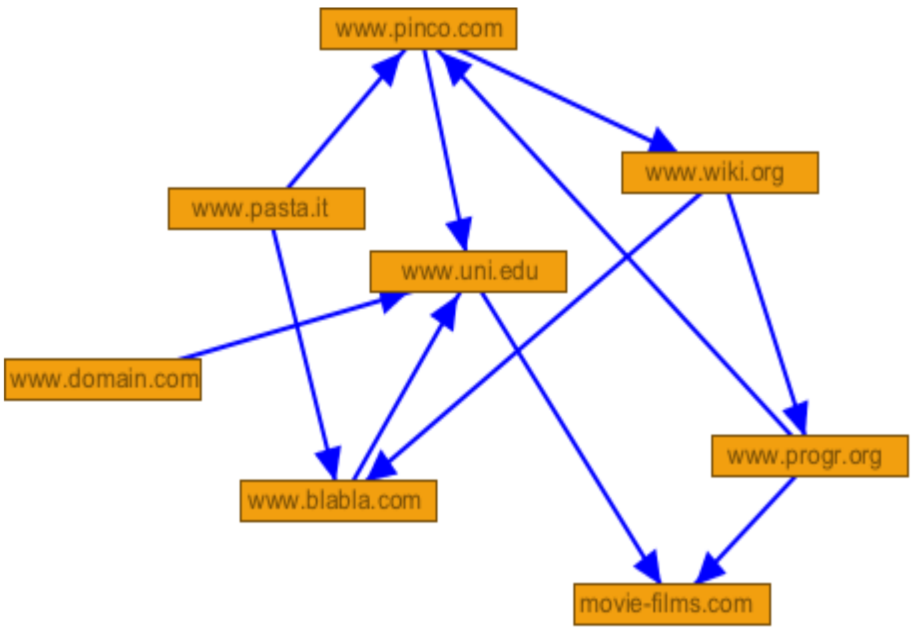




- **Ogni arco è rappresentato due volte**
- **Verificare la presenza di un arco** $\{u, v\}$ **richiede** $O(d_v)$
- **Identificare tutti gli archi richiede** $O(n+m)$
- **Spazio richiesto** $\Theta(n+m)$

Grafi diretti

La relazione tra i nodi può essere asimmetrica, come per i link tra le pagine del Web:

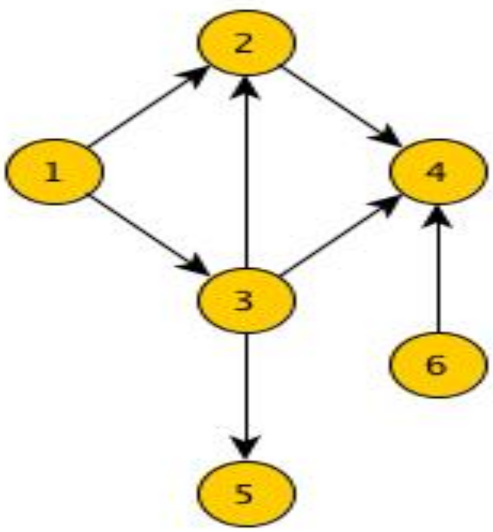


In questo caso l'arco del grafo è detto *diretto* o *orientato* ed è denotato con ***(u,v)***, cioè come coppia ordinata di elementi e il verso dell'arco è dal primo nodo ***u*** della coppia al secondo nodo ***v***.

Dato un nodo u del grafo G:

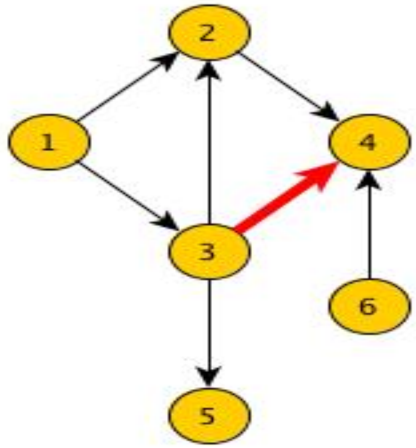
DEF. I nodi adiacenti ad u sono quelli raggiungibili da u tramite un arco. Il numero di nodi adiacenti ad u è detto grado (uscente) di u.

- $adj(u)$ = **l'insieme dei nodi adiacenti al nodo u**
- d_u = **il grado uscente del nodo u**



$$E = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,2),(3,4),(3,5),(6,4)\}$$

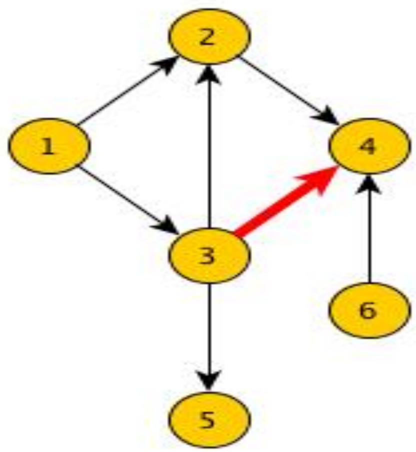
$$adj(3) = \{2,4,5\}$$
$$d_3 = 3$$



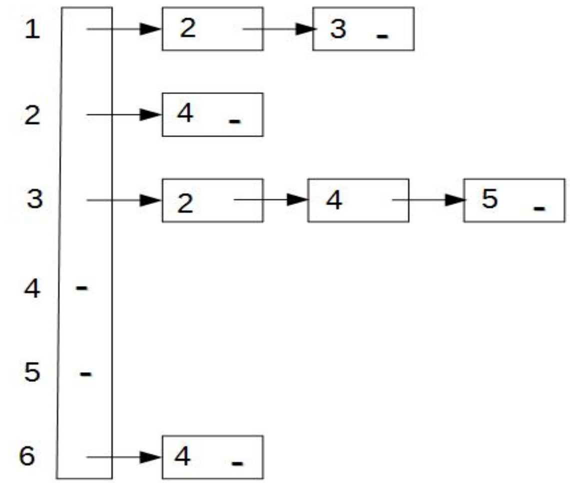
n=6
m=7

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0

- **Verificare la presenza di un arco** (u, v) **richiede** $O(1)$
- **Identificare tutti gli archi richiede** $O(n^2)$
- **Spazio richiesto** $\Theta(n^2)$

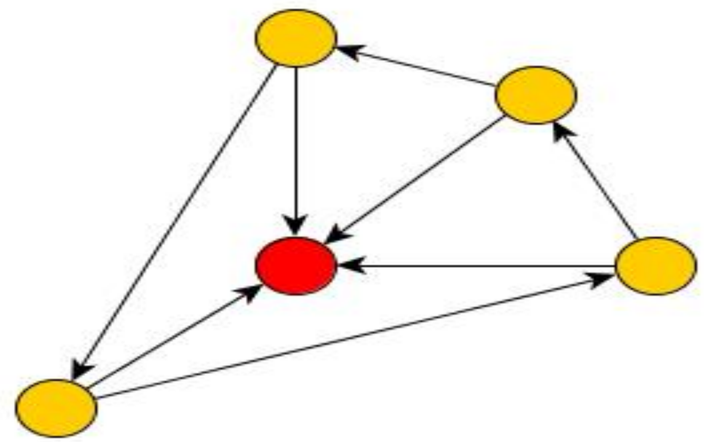


n=6
m=7



- **Verificare la presenza di un arco** (u, v) **richiede** $O(d_u)$
- **Identificare tutti gli archi richiede** $O(n + m)$
- **Spazio richiesto** $\Theta(n + m)$

DEF. In un grafo diretto un pozzo è un nodo con grado uscente pari a zero, se poi il suo grado entrante è n-1 allora si parla di pozzo universale.



Problema: Dato un grafo diretto **G** vogliamo determinare se in **G** è presente o meno un pozzo universale.

- **Verificare se un determinato nodo u del grafo è un pozzo universale o meno è piuttosto semplice:**

pozzo(u)
    FOR $i = 1$ **to** n **DO**
        IF$($$i \neq u$ **AND** $(M[i,u] = 0$ **OR** $M[u,i] = 1))$ **return false**
    ENDFOR
    return true

- **La procedura richiede tempo $O(n)$ e da questa è facile ricavarne una per la ricerca del pozzo universale:**

pozzoUniversale(u)
    FOR $i = 1$ **to** n **DO**
        IF(pozzo(i**)) return** i
    ENDFOR
    return 0

- **La procedura lavora in tempo $O(n^2)$ e restituisce il pozzo universale se c'è (0 altrimenti)**

Un algoritmo che risolve il problema in ***O(n²)*** è dunque "banale". Si può fare di meglio?

Dati due nodi **u** e **v** del grafo, in tempo O(1) posso individuarne uno che non è pozzo universale.

$$\begin{aligned} \text{IF}(M[u,v]=1)\ \text{THEN}\ & u \text{ non è pozzo (universale)} \\ \text{ELSE}\ & v \text{ non è pozzo universale} \end{aligned}$$

IDEA:

- “Confronta” i nodi del grafo a coppie e ad ogni “confronto” puoi escludere un nodo dai candidati all’essere pozzo universale.
- Dopo $n - 1$ confronti rimane un solo nodo p candidato ad essere pozzo universale.
- Applica la procedura $pozzo(p)$ per scoprire se p è effettivamente il pozzo universale del grafo.

pozzoUniversale()
    $p \leftarrow 1$
    FOR $i = 2$ **TO** n **DO**
        IF$(M[p, i] = 1)$ **THEN** $p \leftarrow i$
    ENDFOR
    $x \leftarrow pozzo(p)$
    IF $(x = true)$ **THEN** **return** p
   return 0

- **La nuova procedura lavora in tempo $O(n)$ e restituisce il pozzo universale se c’è (0 altrimenti).**

- **Abbiamo una procedura che permette di trovare un eventuale pozzo universale in un grafo diretto in tempo $O(n)$.**

- **Nel calcolo della complessità abbiamo assunto che il grafo è rappresentato tramite matrice d'adiacenza (verificare l'esistenza o meno di un arco tra due nodi richiede in questo caso $O(1)$)**

- **Qual è la complessità nel caso in cui il grafo è rappresentato tramite liste d'adiacenza?**

- **Si riesce a fare di meglio?**