Esame di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica e Automatica

15 gennaio 2021 – TURNO C

Istruzioni

- Usate i fogli bianchi allegati per calcoli, ragionamenti e quanto altro reputiate necessario fare per rispondere alle 10 domande seguenti.
- Per ciascuna delle 10 domande indicare in corrispondenza di ciascuna delle affermazioni *a)*, *b)*, *c)* e *d)* se essa è VERA o FALSA, apponendo un segno sul rettangolo $\boxed{\text{VERO}}$ o sul rettangolo $\boxed{\text{FALSO}}$ sul *foglio risposte*.
- Ricordatevi di scrivere su tale *foglio risposte* tutte le informazioni richieste ed in particolare il vostro nome e cognome (i fogli senza nome e cognome saranno cestinati e dovrete ripetere l'esame in un'altra sessione).
- Avete un'ora esatta di tempo per svolgere gli esercizi. Al termine del tempo dovete consegnare il solo *foglio risposte* (potete tenere il testo delle domande e i fogli bianchi).
- Ricordatevi di segnare esattamente sui fogli che rimarranno a voi le risposte che avete dato in modo da potervi autovalutare una volta che vi verrà fornita la soluzione.
- Scaduta l'ora rimanete seduti. Passeremo a raccogliere i *fogli risposte*. Chi non consegna immediatamente il foglio al nostro passaggio non avrà altra possibilità di consegna e dovrà ripetere l'esame in un altro appello.
- ATTENZIONE. Durante la prova di esame:
  - Non è possibile parlare, per nessuna ragione, con i vostri colleghi.
  - Non è possibile allontanarsi dall'aula.
  - Non si possono usare telefoni cellulari o tablet.
  - Non è possibile usare dispense, libri o appunti.

  Chi contravviene anche a una sola di queste regole dovrà ripetere la prova di esame in altro appello.

Valutazione

- Per ogni affermazione VERO/FALSO correttamente individuata viene assegnato **1 punto**
- Per ogni affermazione VERO/FALSO non risposta vengono assegnati **0 punti**
- Per ogni affermazione VERO/FALSO NON correttamente individuata viene assegnato un punteggio negativo pari a **-0.25 punti**

Supera la prova chi totalizza un punteggio pari ad almeno 28 punti

1. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.
   (a) La regione ammissibile di un problema di PL può essere un insieme non convesso.
   (b) La regione ammissibile di un problema di PL è sempre un politopo.
   (c) L'insieme $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 - \frac{2}{7}x_2 \geq 3\}$ è un poliedro.
   (d) L'unione di due poliedri è un poliedro.
2. Si consideri il problema in due variabili
$$\begin{array}{l} \min \dfrac{2}{x_1 + x_2} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$
   Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.
   (a) Per il teorema fondamentale della programmazione lineare, il problema ammette sempre soluzione ottima.
   (b) L'insieme ammissibile del problema è un poliedro che ammette vertici.
   (c) Il problema è inammissibile.
   (d) L'insieme ammissibile del problema non è un poliedro.
3. Si consideri il seguente polidero.
$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 3 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 7x_4 & = & 9 \\ x & \geq & 0. \end{array}$$
   Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.
   (a) La prima e la seconda colonna della matrice dei vincoli formano una base ammissibile.
   (b) Il punto $(1,\ 1,\ 0,\ 0)^T$ è un vertice del poliedro.
   (c) Il punto $(3,\ 0,\ 0, 0)^T$ è un vertice del polidero.
   (d) Il poliedro può avere più di 6 vertici.
4. Si consideri il problema di PL (con A matrice $m \times n$)
$$\text{(P)} \qquad \begin{array}{l} \min c^\top x \\ Ax \leq b. \end{array}$$
   (a) Il duale di (P) è
$$\begin{array}{l} \min b^\top u \\ -A^\top u \leq c \\ u \geq 0 \end{array}$$
   (b) Il duale di (P) ha necessariamente un numero di vincoli uguale a n.
   (c) Se (P) fosse inammissibile, allora anche il suo duale lo sarebbe.
   (d) Il duale di (P) è
$$\begin{array}{l} \max b^\top u \\ -A^\top u \leq c \\ u \geq 0. \end{array}$$

5. Siano dati i due problemi

$$(A) \quad \begin{array}{c}\min f(x) \\ x \in X\end{array} \qquad\qquad (B) \quad \begin{array}{c}\min g(y) \\ y \in Y\end{array}$$

con $X, Y \in \mathbb{R}^n$ e $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

(a) Se $X \subseteq Y$ allora (B) è un rilassamento di (A) qualunque siano f e g.

(b) Se $g(x) \geq f(x)$ per ogni $x \in X$ allora (A) è un rilassamento di (B)

(c) Non è possibile definire un problema rilassato di un problema che ha per funzione obiettivo una funzione generale (non necessariamente lineare).

(d) Se $g = f$ allora il fatto che $X \subseteq Y$ implica che (B) è un rilassamento di (A).

6. Dato un problema di PL in forma standard, dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

(a) In una SBA ottima il criterio di ottimalità deve essere soddisfatto per ogni base che la genera.

(b) È possibile che esistano due Basi corrispondenti ad una stessa Soluzione di Base Ammissibile ottima.

(c) Se per ogni indice h tale che $\gamma_h < 0$ risulta $(B^{-1}N)_h > 0$, allora il problema è sicuramente limitato inferiormente.

(d) Se B è una base ammissibile, per ogni $i = 1, \dots, m$ risulta sempre $(B^{-1}N)_i \geq 0$.

7. Al termine della fase I del metodo del simplesso applicato alla soluzione di un problema di PL risulta $x_B = (x_2, \alpha_2, \alpha_3, x_3)^T$, $x_N = (x_1, x_4, \alpha_4, \alpha_1)^T$,

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

(a) Il problema originario non è ammissibile.

(b) È presente un vincolo ridondante.

(c) Una base ammissibile per il problema originario da cui far partire la fase II è data da $x_B = (x_2,\ x_4,\ x_3)^T$

(d) La matrice dei vincoli del problema originario ha rango pieno.

8. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min \ (\ 2,\ -1,\ 3,\ 1,\ 0,\ 0\ )\ x$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \end{pmatrix}$$
$$x \in \mathbb{R}^6,\ x \geq 0$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

(a) Per $\tau = 2$, una soluzione ottima è $\bar{x} = (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0, 3)^T$

(b) Se $\tau = 0$ e se si considera la Base formata dalla 5^a e 6^a colonna della matrice dei vincoli, la soluzione di base ammissibile corrispondente soddisfa il criterio di ottimalità .

(c) Il soddisfacimento del criterio di ottimalità da parte di una SBA è indipendente da τ.

(d) La funzione obiettivo ha il valore 0 come limitazione inferiore.

9. Sia dato il seguente poliedro

$$\begin{array}{rcrl} -\frac{1}{2}x_1 & + & x_2 \geq & -4 \\ -4x_1 & + & x_2 \leq & 4 \\ x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 \leq & \frac{11}{2} \\ x_1 & \geq 0 & & \\ & & x_2 \geq & 0 \end{array}$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

(a) nel punto $(0,4)^T$ sono attivi tre vincoli.

(b) il punto $(0,11)^T$ è un vertice.

(c) l'origine $(0,0)^T$ è un vertice.

(d) Il punto $(0,4)^T$ è un vertice.

10. In un'iterazione del metodo del simplesso risulta $x_B = (x_1, x_3, x_5)^T$, $x_N = (x_2, x_6, x_7, x_4)^T$,

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

(a) Le variabili x_7 e x_4 sono candidate ad entrare in base.

(b) Non è soddisfatto il criterio di illimitatezza.

(c) La soluzione di base corrente non soddisfa il criterio di ottimalità.

(d) La prossima soluzione di base ammissibile sarà degenere.