Prova di Analisi Matematica II - 15 Settembre 2020
Ing. Informatica
Prof.ssa Virginia De Cicco

ESERCIZIO 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 3 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti. (**12 pt.**)

1) Il residuo della funzione

$$f(z) = ae^{\frac{1}{bz-bc}} + ce^{\frac{1}{z}}$$

in $z_0 = c$ è

a) 0 b) a c) a/b d) b . $a \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{b^n(z-c)^n}$ per $n=1$ $c_{-1} = \frac{a}{b}$

Soluzione: (c) essendo

$$ae^{\frac{1}{bz-b}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a \frac{1}{n!} \frac{1}{(bz-bc)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{b^n} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-c)^n}$$

2) La somma della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na^n z^{n-1}, \qquad |z| < 1,$$

è la funzione

(a) $\frac{1}{(az-1)^2}$
(b) $\frac{a}{(az-1)^2}$ $= a \sum n\,(az)^{n-1} = \sum n a^n z^{n-1}$
(c) $\frac{a}{(z-1)^2}$
(d) $\frac{1}{(z-1)^2}$.

Soluzione: (b) Infatti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na^n z^{n-1} = a \sum_{n=1}^{+\infty} n(az)^{n-1} = D(\sum_{n=0}^{+\infty} (az)^n) = D(\frac{1}{1-az}) = \frac{a}{(az-1)^2}$$

3) La funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = z^{az}$$

è definita

$e^{az \log z}$

(a) in $\mathbb{C}$

~~(b)~~ in $\mathbb{C}^*$

(c) in $\mathbb{C}$ privato di un asse

(d) in $\mathbb{C}$ privato di una circonferenza.

Soluzione: (b) Infatti
$$f(z) = z^{az} = e^{azLogz}.$$

4) La serie di funzioni
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a + b^n x^n}, \;\; x \geq 0$$
converge totalmente per

(a) $x \geq 0$

(b) $0 \leq x \leq h$, con $h < a$

~~(c)~~ $x \geq h$, con $h > 1/b$

(d) $d \leq x \leq h$, con $h > b$, $d < 1$.

Soluzione: (c)

Infatti
$$\frac{1}{a + b^n x^n} \leq \frac{1}{b^n x^n} \leq \frac{1}{b^n h^n} = \frac{1}{(bh)^n}, \;\; bh > 1.$$

ESERCIZIO 2. (10 pt.) Si calcoli il seguente integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^4 + x^4} dx.$$

Soluzione: Consideriamo $f(z) = \frac{1}{a^4+z^4}$, che ha quattro poli semplici, le radici quarte di $-a^4$

$$z_1 = ae^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = ae^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_3 = ae^{i\frac{5\pi}{4}}, \quad z_4 = ae^{i\frac{7\pi}{4}}$$

$$z_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{ai}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = -\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{ai}{\sqrt{2}}, \quad z_3 = -\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{ai}{\sqrt{2}}, \quad z_4 = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{ai}{\sqrt{2}}.$$

Fra queste consideriamo le prime due che stanno nel semipiano

$$\{z \in \mathbb{C} \ : \text{Im z} > 0\}.$$

Dal teorema dei residui e dal Lemma del grande cerchio si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{2} res(f, z_k).$$

Si ha per $k = 1, 2$

$$res(f, z_k) = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4}\frac{1}{z_k^4} = -\frac{z_k}{4a^4},$$

dove si è usato che $z_k^4 + a^4 = 0$ e quindi $z_k^4 = -a^4$. Quindi

$$res(f, z_1) = -\frac{z_1}{4a^4} = -\frac{1}{4a^3\sqrt{2}} - \frac{i}{4a^3\sqrt{2}},$$

$$res(f, z_2) = -\frac{z_2}{4a^3} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}} - \frac{i}{4a^3\sqrt{2}}.$$

Dunque

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i[res(f, z_1) + res(f, z_2)] =$$

$$= 2\pi i \left[-\frac{1}{4a^3\sqrt{2}} - \frac{i}{4a^3\sqrt{2}} + \frac{1}{4a^3\sqrt{2}} - \frac{i}{4a^3\sqrt{2}}\right] = \frac{\pi}{a^3\sqrt{2}}.$$

ESERCIZIO 3. (10 pt.)

(i) Si studi l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della funzione

$$g(z) = Log(a^2 + z^2), \ z \in \mathbb{C} \ .$$

(ii) Si disegnino tali insiemi.

Soluzione: L'insieme di definizione è

$$I.D. = \mathbb{C} \ \setminus \{\pm \mathrm{ai}\}.$$

L'aperto di olomorfia è

$$AO = \mathbb{C} \ \setminus \{\mathrm{z} \in \mathbb{C} \ : \mathrm{Re}(\mathrm{a}^2 + \mathrm{z}^2) \leq 0, \ \mathrm{Im}(\mathrm{a}^2 + \mathrm{z}^2) = 0\} =$$

$$= \mathbb{C} \ \setminus \{\mathrm{z} \in \mathbb{C} \ : \mathrm{x} = 0, \mathrm{y} \leq -\mathrm{a} \text{ oppure } \mathrm{y} \geq \mathrm{a}\}.$$

Infatti

$$a^2 + z^2 = a^2 + x^2 - y^2 + 2ixy$$

$xy = 0$ se e solo se *o* $x = 0$ *oppure* $y = 0$. Se $y = 0$ (asse delle x), allora $a^2 + x^2 \leq 0$ non ha soluzioni. Se $x = 0$ (asse delle y), allora $a^2 - y^2 \leq 0$ implica o $y \leq -a$ oppure $y \geq a$.

ESERCIZIO 2. (10 pt.) Si calcoli il seguente integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^4 + x^4} dx.$$

$$f(z) = \frac{1}{a^4 + z^4}$$

$$z^4 = -a^4 \qquad |W| = a^4 \qquad \theta = \pi \qquad n = 4$$

$$z_n = \sqrt[4]{a^4}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{4}\right)\right) \qquad n = 0,1,2,3$$

$$z_1 = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = ae^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = ae^{i\frac{3}{4}\pi}$$

$$z_3 = a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = ae^{i\frac{5}{4}\pi}$$

$$z_4 = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = ae^{i\frac{7}{4}\pi}$$

z_1 e z_2 cadono nel semipiano $\mathrm{Im}(z) > 0$.
Inoltre $f(z)$ non ha singolarità sull'asse reale, quindi per il lemma del grande cerchio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^4 + x^4} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{2} \mathrm{res}(f, z_k)$$

$$\mathrm{res}(f, z_k) = \frac{1}{4z^3} = \frac{z}{4} \cdot \frac{1}{z^4} = \frac{z}{-4a^4}$$

$$\mathrm{res}(f, z_1) = -\frac{a}{4a^4} \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = -\frac{\sqrt{2}}{8} \frac{1+i}{a^3}$$

$$\mathrm{res}(f, z_2) = -\frac{a}{4a^4} \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1) = -\frac{\sqrt{2}}{8} \frac{i-1}{a^3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \left[-\frac{\sqrt{2}}{8} \frac{i+1}{a^3} - \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{i-1}{a^3} \right] = -\frac{\sqrt{2}}{8} 2\pi i \left[\frac{i}{a^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{i}{a^3} - \frac{1}{a^3} \right]$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4} \pi i \cdot \frac{2i}{a^3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{a^3}$$

ESERCIZIO 3. (10 pt.)

(i) Si studi l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della funzione

$$g(z) = Log(a^2 + z^2), \ z \in \mathbb{C} .$$

(ii) Si disegnino tali insiemi.

$Log(a^2+z^2)$

Insieme di definizione: $z^2 \neq -a^2 \rightarrow z = \pm ia$

$|w| = a^2 \quad n=2 \quad \theta = \pi$

$$z_k = a\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{2}\right)\right) \quad k=0,1$$

$z_1 = ai \ , \ z_2 = -ia$

1 $\mathbb{C} \setminus \{\pm ia\}$

Insieme di continuità e olomorfia:

$$z^2+a^2 = x^2-y^2+2ixy+a^2 = \underbrace{x^2+a^2-y^2}_{\mathrm{Re}} + \underbrace{2ixy}_{\mathrm{Im}}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re} < 0 \\ \mathrm{Im} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+a^2-y^2 < 0 \\ 2ixy = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+a^2 < y^2 \\ xy = 0 \end{cases}$$

Se $y=0 \rightarrow x^2+a^2<0$ non ho soluzione, se $x=0$,

$\rightarrow y^2 > a^2 \rightarrow y \leq -a \ , y \geq a$

Quindi

(2) $\mathbb{C} \setminus \{z : x = 0, y \geq a, y \leq -a\}$

(1)