ESERCITAZIONE 2– DOCENTE: MAURO PICCIONI, TUTOR: HLAFO ALFIE MIMUN

March 27, 2020

1. ESERCIZI

Ex. 1: Due palline vengono estratte in blocco da un'urna che contiene 8 palline bianche, 4 palline nere, 2 palline gialle. Si vincono 2 euro per ogni pallina nera estratta e si perde 1 euro per ogni pallina bianca estratta. Si denoti con X la variabile aleatoria che indica il guadagno (o eventualmente perdita) totale ottenuto con le due estrazioni. Si calcoli la PMF di X.

Ex. 2: Stiamo giocando a tombola. Denotiamo con X e Y il primo ed il secondo numero estratto, rispettivamente. Si calcoli la PMF di X e si calcoli la probabilità che $Y = X + 1$.

Ex. 3: Si sta partecipando ad una gara di canto e la giuria è formata da 7 membri. Ogni membro della giuria vota Sì o NO e per vincere la gara servono almeno 5 Sì. Si è stimato che un giudice dica Sì con probabilità $\frac{1}{3}$ e NO con probabilità $\frac{2}{3}$. Si calcoli la probabilità di passare la prova.

Ex. 4: Si sta lanciando ripetutamente una moneta truccata con probabilità di dare testa pari a $p \in [0, 1]$. Si calcoli

(4a) la probabilità che la prima testa si ottenga al quarto lancio;

(4b) la probabilità che la seconda testa si ottenga al settimo lancio sapendo che la prima testa è stata ottenuta al quarto lancio.

Ex. 5: Un rivenditore acquista le componenti elettriche a lotti di 10. La sua politica è di controllare 3 componenti a caso di ogni lotto e di accettarlo solo se nessuno dei tre pezzi controllati risulta difettoso. Se il 30% dei lotti ha quattro pezzi difettosi e il 70% dei lotti ha un solo pezzo difettoso, qual è la probabilità che il rivenditore rifiuterà il lotto?

2. SOLUZIONI

Ex. 1: Poiché estraiamo 2 palline in blocco da un'urna contenente 8 palline bianche, 4 palline nere, 2 palline gialle, i guadagni (o eventualmente perdite) possibili sono:

(i) 2 palline bianche con probabilità $\binom{8}{2}/\binom{14}{2}$;

(ii) 2 palline nere con probabilità $\binom{4}{2}/\binom{14}{2}$;

(iii) 2 palline gialle con probabilità $\binom{2}{2}/\binom{14}{2}$;

(iv) 1 pallina bianca ed 1 pallina nera con probabilità $\left(\binom{8}{1} \cdot \binom{4}{1}\right)/\binom{14}{2}$;

(v) 1 pallina bianca ed 1 pallina gialla con probabilità $\left(\binom{8}{1} \cdot \binom{2}{1}\right)/\binom{14}{2}$;

(vi) 1 pallina gialla ed 1 pallina nera con probabilità $\left(\binom{4}{1} \cdot \binom{2}{1}\right)/\binom{14}{2}$;

Denotiamo con B la pallina bianca, G la pallina gialla, N la pallina nera. Se estraiamo 1 pallina bianca ed 1 nera, denotiamo l'esito con (B, N) (e così via per le altre estrazioni). Dunque, poiché vinciamo 2 euro per ogni pallina nera estratta e perdiamo 1 euro per ogni pallina bianca estratta, si ha

$$(B,B) \Rightarrow X = -1-1 = -2\,, \qquad (N,N) \Rightarrow X = 2+2 = 4\,, \qquad (G,G) \Rightarrow X = 0+0 = 0\,,$$

$$(B,N) \Rightarrow X = -1+2 = 1\,, \qquad (B,G) \Rightarrow X = -1+0 = -1\,, \qquad (N,G) \Rightarrow X = 2+0 = 2\,.$$

Dunque la PMF di X è data dalla funzione

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k)\,,$$

per $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$. Dunque

$$p_X(-2) = \mathbb{P}(X = -2) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{14}{2}};$$

$$p_X(-1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{14}{2}};$$

$$p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{14}{2}};$$

$$p_X(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{14}{2}};$$

$$p_X(2) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{14}{2}};$$

$$p_X(4) = \mathbb{P}(X = 4) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{14}{2}}\,.$$

Si può pensare di calcolare $p_X(k)$ per $k \notin \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$ definendo $p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = 0$.

Ex. 2: Si noti che X assume i valori da 1 a 90 ognuno con stessa probabilità. Dunque

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{90}\,, \qquad \text{per } k = 1, 2, \ldots, 90\,.$$

Dunque X ha distribuzione uniforme sull'insieme $\{1, 2, \ldots, 90\}$.

Supponiamo ora che l'evento $\{X = k\}$ accada per qualche $k \in \{1, 2, \ldots, 90\}$. Allora Y può assumere i valori $\{1, 2, \ldots, 90\} \setminus \{k\}$, ognuno con probabilità $\frac{1}{89}$. Dunque Y, condizionatamente all'evento $X = k$, si distribuisce come una variabile uniforme sull'insieme $\{1, \ldots, 90\} \setminus \{k\}$.

Calcoliamo adesso $\mathbb{P}(Y = X + 1)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = X+1) &= \sum_{i=1}^{90} \mathbb{P}(Y = i+1 \,|\, X = i) \cdot \mathbb{P}(X = i) = \\
&= \sum_{i=1}^{89} \frac{1}{89} \cdot \frac{1}{90} + \mathbb{P}(Y = 91 \,|\, X = 90) = \\
&= \frac{1}{90} + 0 = \frac{1}{90}\,.
\end{aligned}$$

Alternativamente potevamo calcolare $\mathbb{P}(Y = X+1)$ con la classica formula

$$\frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}\,. \tag{1}$$

Come casi possibili dobbiamo considerare tutti i possibili modi di fare le due estrazioni. Essi sono $90 \cdot 89$, in quanto il primo numero può essere estratto in 90 modi, mentre il secondo in 89.

Contiamo ora i casi favorevoli: il primo numero estratto può variare tra $1, 2, \ldots, 89$ (90 non può essere considerato in quanto il secondo numero non può essere 91). Fissato il numero della prima estrazione, il secondo numero estratto deve essere ottenuto aggiungendo 1 al primo numero estratto. Dunque per ognuna delle 89 possibilità per il primo numero, abbiamo una possibilità per il secondo numero e quindi i casi favorevoli sono $89 \cdot 1 = 89$. Dunque applicando (1) si ha

$$\mathbb{P}(Y = X+1) = \frac{89}{90 \cdot 89} = \frac{1}{90}\,.$$

Ex. 3: Denotiamo con X la variabile aleatoria che conta il numero di Sì ottenuti. Poiché ogni membro della commissione dice di Sì con probabilità $\frac{1}{3}$ ed è ragionevole assumere che ogni membro della commissione giudichi in modo indipendente dagli altri, si ha che

$$X \sim \text{Bin}\left(7, \frac{1}{3}\right)\,.$$

Dobbiamo dunque calcolare $\mathbb{P}(X \geq 5)$.

$$\mathbb{P}(X \geq 5) = \mathbb{P}(X=5) + \mathbb{P}(X=6) + \mathbb{P}(X=7) =$$
$$= \binom{7}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{7}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{7}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7\left(\frac{2}{3}\right)^0 \approx 0.002\,.$$

Ex. 4: Indicizziamo i lanci con i numeri 1,2,3,..., e denotiamo con X e Y gli indici del primo e del secondo lancio in cui si ottiene testa, rispettivamente. Poiché la probabilità di ottenere testa è p, si ha che $X \sim \text{Geom}(p)$ e dunque

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p\,, \qquad \text{per } k = 1, 2, \ldots.$$

(4a) $\mathbb{P}(X = 4) = (1-p)^3 p$;

(4b) Si noti che l'evento $\{Y = 7,\, X = 4\}$ corrisponde al fatto di ottenere testa al quarto e settimo lancio ed ottenere croce al primo, secondo, terzo, quinto e sesto lancio. Dunque

$$\mathbb{P}(Y = 7\,,\, X = 4) = p^2(1-p)^5\,.$$

Usando la definizione di probabilità condizionata, si ha

$$\mathbb{P}(Y = 7 \,|\, X = 4) = \frac{\mathbb{P}(Y = 7,\, X = 4)}{\mathbb{P}(X = 4)} = \frac{p^2(1-p)^5}{p(1-p)^3} = p(1-p)^2 = \mathbb{P}(X = 3)\,.$$

Definendo $Z := Y - 4$, l'uguaglianza appena mostrata si traduce in

$$\mathbb{P}(Z = 3 \,|\, X = 4) = (1-p)^2 p\,.$$

Notiamo dunque che la variabile aleatoria $Z = Y - 4$, condizionando all'evento $X = 4$, si distribuisce come una variabile aleatoria geometrica di parametro p.

Dunque la probabilità di vedere la seconda testa, condizionata a quando si è vista la prima testa, è pari alla probabilità di vedere la prima testa.

Ex. 5: Definiamo gli eventi

$$A := \{\text{il rivenditore accetti il lotto}\}\,,$$
$$E_1 = \{\text{il lotto ha 1 pezzo difettoso}\}\,,$$
$$E_4 = \{\text{il lotto ha 4 pezzi difettosi}\}\,.$$

Dunque

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid E_1)\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(A \mid E_4)\mathbb{P}(E_4)\,. \tag{2}$$

I dati ci dicono che

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}\,, \qquad \mathbb{P}(E_4) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}\,.$$

Per calcolare $\mathbb{P}(A \mid E_1)$ dobbiamo calcolare la probabilità che il rivenditore estragga i 3 componenti "sani" da un lotto formato da 9 componenti "sani" ed 1 componente difettoso. Se indichiamo con X il numero di componenti difettosi estratti, notiamo che X ha distribuzione ipergeometrica di parametri $10, 1, 3$. Dunque

$$\mathbb{P}(A \mid E_1) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{\binom{1}{0}\binom{9}{3}}{\binom{10}{3}}\,.$$

Per calcolare $\mathbb{P}(A \mid E_4)$ dobbiamo calcolare la probabilità che il rivenditore estragga i 3 componenti "sani" da un lotto formato da 6 componenti "sani" e 4 componenti difettosi. Se indichiamo con Y il numero di componenti difettosi estratti, notiamo che Y ha distribuzione ipergeometrica di parametri $10, 4, 3$. Dunque

$$\mathbb{P}(A \mid E_4) = \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}\,.$$

Applicando infine (2) si ha

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid E_1)\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(A \mid E_4)\mathbb{P}(E_4) =$$
$$= \frac{\binom{1}{0}\binom{9}{3}}{\binom{10}{3}} \cdot \frac{7}{10} + \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} \cdot \frac{3}{10} = \frac{54}{100}\,.$$

Dunque il rivenditore rifiuta il lotto con probabilità pari a $46/100$.