Prova scritta di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in *Ingegneria Informatica e Automatica*

3 settembre 2020

Istruzioni

- Usate i fogli bianchi allegati per calcoli, ragionamenti e quanto altro reputiate necessario fare per rispondere alle 10 domande seguenti.
- Per ciascuna delle 10 domande indicare in corrispondenza di ciascuna delle affermazioni *a)*, *b)*, *c)* e *d)* se essa è VERA o FALSA, apponendo un segno sul rettangolo $\boxed{\text{VERO}}$ o sul rettangolo $\boxed{\text{FALSO}}$ sul *foglio risposte*.
- Ricordatevi di scrivere su tale *foglio risposte* tutte le informazioni richieste ed in particolare il vostro nome e cognome (i fogli senza nome e cognome saranno cestinati e dovrete ripetere l'esame in un'altra sessione).
- Avete un'ora esatta di tempo per svolgere gli esercizi. Al termine del tempo dovete consegnare il solo *foglio risposte* (potete tenere il testo delle domande e i fogli bianchi).
- Ricordatevi di segnare esattamente sui fogli che rimarranno a voi le risposte che avete dato in modo da potervi autovalutare una volta che vi verrà fornita la soluzione.
- Scaduta l'ora rimanete seduti. Passeremo a raccogliere i *fogli risposte*. Chi non consegna immediatamente il foglio al nostro passaggio non avrà altra possibilità di consegna e dovrà ripetere l'esame in un altro appello.
- ATTENZIONE. Durante la prova di esame:
  - Non è possibile parlare, per nessuna ragione, con i vostri colleghi.
  - Non è possibile allontanarsi dall'aula.
  - Non si possono usare telefoni cellulari
  - Non si possono usare calcolatrici, palmari o simili
  - Non è possibile usare dispense, libri o appunti.

  Chi contravviene anche a una sola di queste regole dovrà ripetere la prova di esame in altro appello.

Valutazione

- Per ogni affermazione VERO/FALSO correttamente individuata viene assegnato **1 punto**
- Per ogni affermazione VERO/FALSO non risposta vengono assegnati **0 punti**
- Per ogni affermazione VERO/FALSO NON correttamente individuata viene assegnato un punteggio negativo pari a **-0.25 punti**

Supera la prova chi totalizza un punteggio pari ad almeno 28 punti

1. Sia $P = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \ldots, n\}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

F F (a) Il punto $(1/2,\ 1/2, \ldots, 1/2)^\top$ è un vertice di P.

V F (b) Il punto $(0,\ 0, \ldots, 0,\ 1)^\top$ è un vertice di P.

V F (c) Nel punto $(0,\ 0, \ldots, 0)^\top$ sono attivi n vincoli.

F F (d) Nell punto $(0,\ 1/2,\ 0, \ldots, 0)^\top$ sono attivi n vincoli.

2. Sia $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ un poliedro, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, e sia $v \in P$ un suo vertice.

F F (a) È sempre possibile trovare un vettore $d \neq 0_n$ tale che risulti $x = v + \lambda d \in P$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

V V (b) In v sono attivi almeno n vincoli.

F F (c) In v sono attivi al più n vincoli.

V V (d) P può contenere semirette, ma non rette.

3. Sia PL un problema di Programamazione Lineare.

F V V (a) Se l'insieme ammissibile di PL è un politopo, allora PL ammette sempre soluzione ottima.

F V (b) PL non può ammetere un numero finito maggiore o uguale a 2 di soluzioni ottime distinte.

V F (c) PL può ammettere un numero infinito di soluzioni ottime distinte.

V V (d) Affinché PL sia illimitato è necessario, ma non sufficiente che il suo insieme ammissibile sia illimitato.

4. Sia (PA) il problema che si risolve nella Fase I del metodo del Simplesso.

F F (a) (PA) ammette soluzioni il cui valore della funzione obiettivo è negativo.

F F (b) Per il problema (PA) esiste sempre soluzione ottima con valore ottimo pari a zero.

F F (c) Se il problema originario è inammissibile allora (PA) è illimitato inferiormente.

V V (d) (PA) ammettere sempre soluzioni di base ammissibili.

5. Sia data una soluzione di base ammissibile $x = (1,\ \ 2,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0)^T$ di un problema di Programmazione Lineare (in forma standard) alla quale corrisponde un valore della funzione obiettivo pari a 28. Sia $\gamma = (-2,\ \ 2)^T$ il vettore dei costi ridotti associati alle variabili fuori base x_3, x_5. Se $y = (1,\ \ 2,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 4)^T$ è un punto ammissibile, dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette

F F (a) Il valore della funzione obiettivo nel punto y vale 18.

F F (b) Il valore della funzione obiettivo nel punto y è sicuramente minore o uguale di 28.

V V (c) Non sono fornite tutte le informazioni necessarie per determinare il valore della funzione obiettivo nel punto y.

V V (d) Se il problema di PL è in forma di minimizzazione, allora utilizzando le informazioni date si può escludere che x sia soluzione ottima del problema.

6. Si consideri il seguente poliedro

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 & \leq & \tau \\ x_1 + x_3 & \geq & 2 \\ x_3 & \leq & 0 \\ x_1 & \geq & 0 \end{array}$$

F F (a) Il punto $(2,\ 1,\ 0)^\top$ è un vertice per ogni $\tau \in \mathbb{R}$.

F F (b) Il punto $(2,\ -1,\ 0)^\top$ è un vertice per ogni $\tau \in \mathbb{R}$.

F F (c) Per $\tau = 2$, il punto $(2,\ -1,\ 0)^\top$ è un vertice.

F F (d) Per $\tau = 1$, il punto $(0,\ 1,\ 0)^\top$ è un vertice.

7. Al termine della Fase I del metodo del Simplesso risulta

$$x_B = (x_1,\ \alpha_1,\ x_3)^\top, \qquad x_N = (x_2,\ \alpha_2, x_4)^\top,$$

$k = 2$

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

F F (a) Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, il problema originario è inammissibile.

F F (b) Se $\beta > 0$, nel problema originario è presente un vincolo ridondante.

F V (c) Se $\beta = 0$, il problema orginario è ammissibile e una base ammissibile da cui far partire la Fase II del metodo del Simplesso è $\{x_1,\ x_4,\ x_3\}$.

V V (d) Se $\beta = 0$, il problema originario è ammissibile.

8. Sia A una matrice $m \times n$ di rango m.

F F (a) A si dice totalmente unimodulare se ogni sua sottomatrice quadrata ha determinante pari a 0, 1, o -1.

F F (b) Se A è non singolare e ha elementi pari a 0, 1 o -1 allora è totalmente unimodulare.

V V (c) Se A è totalmente unimodulare allora i suoi elementi devono essere pari a 0, 1 o -1.

V F (d) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è totalmente unimodulare.

9. Sia $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0_n\}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Inoltre risulti $rg(A) = m$.

F F (a) Una sottomatrice B di A, quadrata e di rango m è una base ammissibile se e solo se $B^{-1}b > 0$.

V V (b) Una sottomatrice B di A, quadrata e di rango m è una base ammissibile se e solo se $B^{-1}b \geq 0$.

F F (c) Esistono matrici di base di ordine strettamente minore di m.

V V (d) Esiste sempre una matrice di base di A.

10. Sia dato un problema di PL in forma standard di minimizzazione.

F F (a) La Fase II del metodo del simplesso con regole anticiclaggio si arresta, in un numero finito di passi, in una SBA ottima.

F F (b) La Fase I del metodo del Simplesso con regole anticiclaggio determina, in un numero finito di passi una prima SBA.

F F (c) La Fase I del metodo del Simplesso con regole anticiclaggio determina, in un numero finito di passi se il problema è illimitato inferiormente.

V V (d) La Fase I del metodo del Simplesso con regole anticiclaggio determina, in un numero finito di passi se il problema è ammissibile.

31.25