Prova di Analisi Matematica II - 18 Luglio 2018
Ing. Informatica
Prof.ssa Virginia De Cicco

1)	2)	3)	4)	5)	VOTO:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Cognome	Nome

FIRMA: ....

ESERCIZIO 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti. (**10 pt.**)

1) L'argomento del numero complesso $z = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + i\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ è

   (a) 0
   (b) $\pi/4$
   (c) $\pi/2$
   (d) π.

2) Sia $\theta = Arg\, z$, $z \in \mathbb{C}$. La formula della potenza ennesima di z, detta formula di De Moivre, è

   (a) $z^n = |z|^n(cos\,\theta + isen\,\theta) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$
   (b) $z^n = |z|^n(cos^n\theta + isen^n\theta) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$
   (c) $z^n = |z|^n(cos\,n\theta + isen\,n\theta) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$
   (d) $z^n = |z|^n(cos(n+\theta) + isen(n+\theta)) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

3) La condizione di Cauchy-Riemann (CR1) per una funzione olomorfa è

(a)
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

(b)
$$\frac{\partial f}{\partial x} = i\frac{\partial f}{\partial y}$$

(c)
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial x}$$

(d)
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

4) Calcolando il $Log\, i$ si ha

(a) $i\pi/4$

(b) $i\pi$

(c) $i\pi/2$

(d) i.

5) La somma della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\log\, x)^{2k}}{(2k+1)!} \qquad x > 0\,,$$

(a)
$$\frac{cosh(log\, x)}{log\, x}$$

(b)
$$sen(log\, x)$$

(c)
$$\frac{senh(log\, x)}{log\, x}$$

(d)
$$senh(log\, x).$$

ESERCIZIO 2.

(i) Si enunci il teorema di continuità del limite per una successione di funzioni.

(ii) Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = \arctan\left(n + n^2 x\right), \qquad x \leq 0.$$

(iii) Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} f_n(x)dx.$$

1) Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue definite in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: I \to \mathbb{R}$ tale che $f_n \to f$ uniformemente in I. Allora la funzione f è continua.

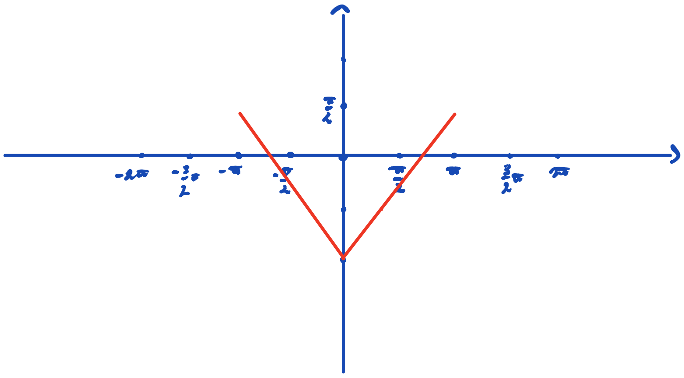
2) $f_n(x) = \arctan(n+n^2x) \quad x \leq 0$

c.p. $\lim_{n\to+\infty} \arctan(n+n^2x) = \lim_{n\to+\infty} \arctan\left[n^2\left(\frac{1}{n}+x\right)\right] = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x=0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x\in(-\infty,0) \end{cases}$

c.u. In $(-\infty, A]$ con $A<0$:

$$\sup_{(-\infty,A]} \left|\arctan\left(n+n^2x\right)+\frac{\pi}{2}\right| = \arctan\left(n+n^2A\right)+\frac{\pi}{2} \to 0 \quad \text{per } n\to+\infty$$

3) $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi/4} (-\pi/2)\,dx = -\frac{\pi}{2}\left[x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi/4} = -\frac{\pi}{2}\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right] = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi^2}{8}$



ESERCIZIO 3.

(i) Si scriva l'espressione dei coefficienti di Fourier di una funzione $f(x)$ 2π-periodica.

(ii) Si determini lo sviluppo in serie di Fourier del prolungamento periodico della seguente funzione:

$$f(x) = 2|x| - \pi, \quad x \in (-\pi, \pi].$$

(iii) Si calcoli la somma della serie di Fourier per $x_0 = \frac{7}{4}\pi$.

1) $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

2) $f(x) = 2|x| - \pi \quad x \in (-\pi, \pi]$ è una funzione pari $\Rightarrow b_n = 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2|x| - \pi)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x - \pi)\cos(nx)\,dx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx}_{1} - 2\underbrace{\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx}_{2}$$

① $\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{4}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin(nx) + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{4}{n\pi}\left[\underset{0}{x\sin(nx)} + \underset{\frac{1}{n}[\cos(n\pi) - \cos(0)]}{\frac{1}{n}\cos(nx)}\right]_0^{\pi} =$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\left[\cos(n\pi) - \cos(0)\right] = \frac{4}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

② $2\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{2}{n}\left[\sin(nx)\right]_0^{\pi} = 0$

Quindi: $a_n = \frac{4}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$, $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x - \pi)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[x^2 - \pi x\right]_0^{\pi} = 0$

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{4}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos(nx)$$

3) $f\left(\frac{7}{4}\pi\right) = f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left|-\frac{\pi}{4}\cdot 2\right| - \pi = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$

ESERCIZIO 4.

(i) Si scriva lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = (z-7i)^2 sen\frac{1}{z-7i}\,,$$

intorno al punto $z = 7i$.

(ii) Si specifichi in quale regione vale e di che tipo di singolarità si tratta.

(iii) Si calcoli infine il residuo in tale punto.

1) $(z-7i)^2 sen\frac{1}{z-7i} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{(z-7i)^{2n-1}}$

2) Vale in un intorno di $z = 7i$.

Dato che ho infiniti termini nella parte singolare, la singolarità è essenziale.

3) $res(f, 7i) = c_{-1} = -\frac{1}{6}$

ESERCIZIO 5. Usando la trasformata di Laplace, si cerchi il segnale $y(t)$ soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - y(t) = e^t\,, & t \geq 0 \\ y(0) = 0, & y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[y''+y](s) = \mathcal{L}[y''](s) + \mathcal{L}[y](s) =$$

$$= s^2 Y(s) - \left(s y(0) + y'(0)\right) + Y(s) = s^2 Y(s) - s\overset{0}{\overset{\shortparallel}{y(0)}} - \overset{1}{\overset{\shortparallel}{y'(0)}} + Y(s) =$$

$$= Y(s)\left(s^2+1\right) - 1 = \frac{1}{s-1}$$

$$Y(s) = \left[\frac{1}{s-1} + 1\right] \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{1+s-1}{s-1} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{s}{(s-1)(s^2+1)} =$$

$$= \frac{R_1}{s-1} + \frac{R_2 s + R_3}{s^2+1}$$

$$R_1 = \frac{1}{2}$$

R_2, R_3 : $s=0$ $\quad 0 = -\frac{1}{2} + R_3 \Rightarrow R_3 = \frac{1}{2}$

$s=2$ $\quad \frac{2}{5} = \frac{1}{2} + \frac{2R_2 + \frac{1}{2}}{5} \rightarrow R_2 = -\frac{1}{2}$

$$Y(s) = \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2} \sin(t)$$