Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Prova di esame di *Ricerca Operativa*

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU devono risolvere gli esercizi 1) e 2). Tempo a disposizione 60 minuti.

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 9 CFU devono risolvere gli esercizi 1), 2) e 3). Tempo a disposizione 90 minuti.

Esercizio 1
Un'azienda ha intenzione di sviluppare il suo reparto vendite in modo da poter rifornire con i suoi prodotti 5 regioni (Reg1, Reg2, Reg3, Reg4, Reg5) non ancora raggiunte dalle sue vendite. A tale scopo ha la possibilità di creare delle rappresentanze di area dalle quali inviare i prodotti alle 5 regioni. Ci sono tre possibili località (L1, L2, L3) nelle quali creare una rappresentanza di area, ma, per ragioni economiche, non possono esserne create più di due. La tabella che segue riporta per ogni possibile località e per ogni regione il costo del trasporto di un prodotto (in Euro), la capacità massima (in unità di prodotti) di ogni magazzino di cui è dotata una rappresentanza di area (se eventualmente creata in quella località) e le quantità minime richieste da ciascuna regione (in unità di prodotti):

	Reg1	Reg2	Reg3	Reg4	Reg5	Capacità Max
L1	1.3	1.2	1.0	1.4	1.9	5200
L2	1.6	1.9	1.5	1.4	2.0	6200
L3	1.2	1.7	1.8	1.3	1.1	5000
richieste minime	1500	1700	2000	1300	1800	

Naturalmente la creazione di una rappresentanza di area comporta un costo iniziale che è diverso a seconda delle località; tali costi (in migliaia di Euro) sono pari a 3.5, 2.8 e 3.0 rispettivamente per la località L1, L2 e L3. Costruire un modello lineare che permetta di determinare quali rappresentanze di area creare (tra le tre possibili), e le quantità di prodotto da inviare da ciascuna delle rappresentanze costruite a ciascuna regione in modo da minimizzare il costo complessivo (si assuma che prodotti non siano necessariamente interi).

Esercizio 2
Utilizzando il metodo del simplesso in due fasi, risolvere il seguente problema di PL

$$
\begin{aligned}
\max\ & -x_1 - 2x_2 \\
& 3x_1 - 7x_2 - x_3 = 0 \\
& x_1 + x_2 \leq 5 \\
& x_1 + x_4 = 5 \\
& x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

Esercizio 3
Risolvere con il metodo Branch & Bound il seguente problema di PLI

$$
\begin{aligned}
\max\ & 4x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 + 12x_5 \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 \leq 5 \\
& x_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Esercizio 1

Un'azienda ha intenzione di sviluppare il suo reparto vendite in modo da poter rifornire con i suoi prodotti 5 regioni (Reg1, Reg2, Reg3, Reg4, Reg5) non ancora raggiunte dalle sue vendite. A tale scopo ha la possibilità di creare delle rappresentanze di area dalle quali inviare i prodotti alle 5 regioni. Ci sono tre possibili località (L1, L2, L3) nelle quali creare una rappresentanza di area, ma, per ragioni economiche, non possono esserne create più di due. La tabella che segue riporta per ogni possibile località e per ogni regione il costo del trasporto di un prodotto (in Euro), la capacità massima (in unità di prodotti) di ogni magazzino di cui è dotata una rappresentanza di area (se eventualmente creata in quella località) e le quantità minime richieste da ciascuna regione (in unità di prodotti):

	Reg1	Reg2	Reg3	Reg4	Reg5	Capacità Max
L1	1.3	1.2	1.0	1.4	1.9	5200
L2	1.6	1.9	1.5	1.4	2.0	6200
L3	1.2	1.7	1.8	1.3	1.1	5000
richieste minime	1500	1700	2000	1300	1800	

Naturalmente la creazione di una rappresentanza di area comporta un costo iniziale che è diverso a seconda delle località; tali costi (in migliaia di Euro) sono pari a 3.5, 2.8 e 3.0 rispettivamente per la località L1, L2 e L3. Costruire un modello lineare che permetta di determinare quali rappresentanze di area creare (tra le tre possibili), e le quantità di prodotto da inviare da ciascuna delle rappresentanze costruite a ciascuna regione in modo da minimizzare il costo complessivo (si assuma che prodotti non siano necessariamente interi).

x_{ij} = quantità prodotto inviata alla regione j da L_i, $i=1,2,3$ $j=1,2,3,4,5$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se viene creata la rappresentanza in } L_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i=1,2,3$$

$$\min\Big[1{,}3\,x_{11} + 1{,}2\,x_{12} + 1.0\,x_{13} + 1.4\,x_{14} + 1.9\,x_{15} + 1.6\,x_{21} + 1.9\,x_{22} + 1.5\,x_{23} + 1.4\,x_{24} + 2.0\,x_{25} + 1.2\,x_{31} + 1.7\,x_{32} + 1.8\,x_{33} + 1.3\,x_{34} + 1.1\,x_{35} + 3.5\,\delta_1 + 2{,}8\,\delta_2 + 3.0\,\delta_3\Big]$$

vincoli

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 5200\,\delta_1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 6200\,\delta_2$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 5000\,\delta_3$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 1500$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 1700$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 2000$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 1300$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} \geq 1800$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 2$$

$\delta_i = \{0,1\}$ $i=1,2,3$

$y_{ij} \geq 0$ $i=1,2,3$ $j=1,\dots,5$

Esercizio 2
Utilizzando il metodo del simplesso in due fasi, risolvere il seguente problema di PL

$$\max\ -x_1 - 2x_2$$
$$3x_1 - 7x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_1 + x_4 = 5$$
$$x_i \geq 0$$

$\min\ x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1 + x_4 = 5 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

F I

$\min\ \alpha_1$

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 - x_3 + \alpha_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1 + x_4 = 5 \\ x_i \geq 0 \quad \alpha_i \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_4 & x_5 & \alpha_1 \end{matrix} \end{array} \quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C^T_B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_4 & x_5 & \alpha_1 \end{matrix} \end{array} \quad C^T_N = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \end{array}$$

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$h = 1 \qquad \bar{u}_h = \begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{bmatrix}5\\5\\0\end{bmatrix}$

$\bar{\rho} = \min\left\{5, \frac{5}{3}, 0\right\} = 0 \rightarrow k = 3$. Esce x_1, entra x_1.

$$\rightarrow \left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -7 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{c|ccc|c} 0 & -1/3 & 7/3 & 1/3 & 5 \\ 0 & -1 & 8 & 1 & 5 \\ 1 & 1/3 & -7/3 & -1/3 & 0 \end{array}\right]$$

$$c^T_B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_4 & x_5 & x_1 \end{matrix} \end{array} \qquad c^T_N = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \end{array}$$

$\gamma^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

La SBA attuale è ottima: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

$$\min \; x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/3 & 1/3 \\ 8 & 1 \\ -7/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$c^T_B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_4 & x_5 & x_1 \end{matrix} \end{array} \qquad c^T_N = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_2 & x_3 \end{matrix} \end{array}$$

$\gamma^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ STOP

$\downarrow$ da qua in poi sono un coglione

$h = 1 \qquad \bar{u}_h = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 8 \\ -7/3 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\bar{\rho} = \min\left\{\frac{15}{7}, \frac{5}{8}, \cdot \right\} = \frac{5}{8} \rightarrow k = 2$ Esce x_5, entra x_2

$$\rightarrow \left[\begin{array}{c|ccc|c} 7/3 & 0 & 1/3 & 5 \\ 8 & 1 & 1 & 5 \\ -7/3 & 0 & -1/3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|cc|c} 0 & -7/24 & 1/24 & 85/24 \\ 1 & 1/8 & 1/8 & 5/8 \\ 0 & 7/24 & -1/24 & 35/24 \end{array}\right]$$

$$c^T_B = \begin{array}{c} \left[\begin{matrix} 0 & 2 & 1 \end{matrix}\right] \\ \begin{matrix} x_4 & x_2 & x_1 \end{matrix} \end{array} \qquad c^T_N = \begin{array}{c} \left[\begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix}\right] \\ \begin{matrix} x_5 & x_3 \end{matrix} \end{array}$$

$$\gamma^T = \left[\begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix}\right] - \left[\begin{matrix} 13/24 & 5/24 \end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} -\frac{13}{24} & -\frac{5}{24} \end{matrix}\right]$$

$$h = 1 \qquad \bar{u}_h = \begin{bmatrix} -7/24 \\ 1/8 \\ 7/24 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 85/24 \\ 5/8 \\ 35/24 \end{bmatrix}$$

$\bar{\rho} = \min\{\cdot, 5, 5\} = 5 \rightarrow h = 2$. Esce x_2 entra x_5.

$$\rightarrow \left[\begin{array}{c|cc|c} -7/24 & 0 & 1/24 & 85/24 \\ 1/8 & 1 & 1/8 & 5/8 \\ 7/24 & 0 & -1/24 & 35/24 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|cc|c} 0 & 7/3 & 1/3 & 5 \\ 1 & 8 & 1 & 5 \\ 0 & -7/3 & -1/3 & 0 \end{array}\right]$$

$$c^T_B = \begin{array}{c} \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \\ \begin{matrix} x_4 & x_5 & x_1 \end{matrix} \end{array} \qquad c^T_N = \begin{array}{c} \left[\begin{matrix} 2 & 0 \end{matrix}\right] \\ \begin{matrix} x_2 & x_3 \end{matrix} \end{array}$$

$$\gamma^T = \left[\begin{matrix} 2 & 0 \end{matrix}\right] - \left[\begin{matrix} -7/3 & -1/3 \end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} \frac{13}{3} & 1/3 \end{matrix}\right] \geq 0$$

La SBA attuale è ottima:

$$\bar{x} = \begin{array}{c} \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{matrix}\right] \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \end{array}$$