Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Prova di esame di *Ricerca Operativa*

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU devono risolvere gli esercizi 1) e 2). Tempo a disposizione 60 minuti.

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 9 CFU devono risolvere gli esercizi 1), 2) e 3). Tempo a disposizione 90 minuti.

Esercizio 1

Un'industria deve costruire tre grandi silos per contenere un detergente liquido che viene poi prelevato da ciascun silos per essere trasportato a due centri di confezionamento (C1, C2) dove il detergente viene confezionato in confezioni pronte per essere vendute. Ci sono cinque aree disponibili (A1, A2, A3, A4, A5) su ciascuna delle quali è possibile costruire un silos. La tabella che segue riporta, per ciascuna area disponibile, il costo di costruzione (in migliaia di Euro) di un silos in quell'area, la capacità (in litri) che esso avrebbe se costruito in quell'area e il costo (in Euro) del trasporto di un litro di prodotto da un silos se costruito in quell'area a ciascuno dei centri di confezionamento:

	A1	A2	A3	A4	A5
costo costruzione	2	2.5	1.8	2.2	1.9
capacità massima	100000	230000	140000	170000	130000
C1	0.3	0.7	0.6	1	0.9
C2	1.1	0.9	1.2	0.7	0.6

Si vuole costruire un modello lineare che permetta di selezionare tre delle cinque aree disponibili per la costruzione dei tre silos e di determinare i quantitativi di detergente da prelevare da ciascuno dei silos costruiti per essere trasportato a ciascun centro di confezionamento in modo da minimizzare il costo complessivo e assicurando che al centro C1 arrivino almeno 150000 litri di detergente e al centro C2 arrivino almeno 250000 litri di detergente.

Esercizio 2

Usando il metodo del simplesso risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ & x_1 - x_3 \geq 3 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Esercizio 3

Risolvere con il metodo Branch & Bound il seguente problema di PLI

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 9x_2 + 8x_3 - 6x_4 + x_5 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \leq 3 \\ & x_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Esercizio 1

Un'industria deve costruire tre grandi silos per contenere un detergente liquido che viene poi prelevato da ciascun silos per essere trasportato a due centri di confezionamento (C1, C2) dove il detergente viene confezionato in confezioni pronte per essere vendute. Ci sono cinque aree disponibili (A1, A2, A3, A4, A5) su ciascuna delle quali è possibile costruire un silos. La tabella che segue riporta, per ciascuna area disponibile, il costo di costruzione (in migliaia di Euro) di un silos in quell'area, la capacità (in litri) che esso avrebbe se costruito in quell'area e il costo (in Euro) del trasporto di un litro di prodotto da un silos se costruito in quell'area a ciascuno dei centri di confezionamento:

	A1	A2	A3	A4	A5
costo costruzione	2	2.5	1.8	2.2	1.9
capacità massima	100000	230000	140000	170000	130000
C1	0.3	0.7	0.6	1	0.9
C2	1.1	0.9	1.2	0.7	0.6

Si vuole costruire un modello lineare che permetta di selezionare tre delle cinque aree disponibili per la costruzione dei tre silos e di determinare i quantitativi di detergente da prelevare da ciascuno dei silos costruiti per essere trasportato a ciascun centro di confezionamento in modo da minimizzare il costo complessivo e assicurando che al centro C1 arrivino almeno 150000 litri di detergente e al centro C2 arrivino almeno 250000 litri di detergente.

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se il silos e' costruito in } A_i \\ 0 & \text{se il silos non e' costruito in } A_i \end{cases} \qquad i = 1, \dots, 5$$

$$y_{ij} = \text{quantità detergente del silos in } A_i \text{ per } C_j \qquad i = 1, \dots, 5 \quad j = 1,2$$

Funzione obiettivo:

$$\min \big[2x_1 + 2{,}5x_2 + 1{,}8x_3 + 2{,}2x_4 + 1{,}9x_5 + (0{,}3 + 1{,}1)x_1 + (0{,}7 + 0{,}9)x_2 +$$
$$+ (0{,}6 + 1{,}2)x_3 + (1 + 0{,}7)x_4 + (0{,}9 + 0{,}6)x_5 \big)$$

Vincoli:

$$y_{11} + y_{12} \le 100\,000\, x_1$$

$$y_{21} + y_{22} \le 230\,000\, x_2$$

$$y_{31} + y_{32} \le 140\,000\, x_3$$

$$y_{41} + y_{42} \le 170000\, x_4$$

$$y_{51} + y_{52} \le 130\,000\, x_5$$

$$y_{11} + y_{21} + y_{31} + y_{41} + y_{51} \ge 150\,000$$

$$y_{12} + y_{22} + y_{32} + y_{42} + y_{52} \ge 250\,000$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$$

$$y_{ij} \ge 0, \quad x_i = \{0,1\} \quad i = 1, \dots, 5, \quad j = 1,2$$

Esercizio 2

Usando il metodo del simplesso risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ & x_1 - x_3 \geq 3 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

$$\min\ -3x_1 + x_2 - x_3$$

$$PS \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ x_2 + 2x_3 - x_5 = 4 \\ x_1 - x_3 - x_6 = 3 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array}$$
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

FASE 1

$$\min\ \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ x_2 + 2x_3 - x_5 + \alpha_1 = 4 \\ x_1 - x_3 - x_6 + \alpha_2 = 3 \\ x_i \geq 0 \quad \alpha_i \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}N = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} x_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{array}$$

$$c^T_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad c^T_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} x_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_5 & x_6 \end{array}$$

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$h = 1 \qquad \pi_h = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\bar{\rho} = \min\{3, \cdot, 3\} = 3 \rightarrow k = 1$. Esce x_4 entra x_1.

$$\rightarrow \left[\begin{array}{c|cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$c_B^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{matrix} \end{array} \qquad c_N^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_4 & x_2 & x_3 & x_5 & x_6 \end{matrix} \end{array}$$

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$h = 2 \qquad \pi_h = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\bar{\rho} = \min\{6, 4, \cdot\} = 4 \qquad k = 2$. Esce α_1 entra x_2

$$\rightarrow \left[\begin{array}{c|cccccc|c} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|cccccc|c} 0 & 1/2 & -1/2 & -1 & 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$c_B^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & \alpha_2 \end{matrix} \end{array} \qquad c_N^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_4 & \alpha_1 & x_3 & x_5 & x_6 \end{matrix} \end{array}$$

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 & -1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

La SBA attuale è ottima. $\bar{x} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{matrix} \end{array}$

Dato che α_2 è in base con valore non nullo, il problema originario è inammissibile.