Prova di Analisi Matematica II - 12 Ottobre 2020
Ing. Informatica
Prof.ssa Virginia De Cicco

ESERCIZIO 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 3 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti. (**12 pt.**)

1) Uno solo dei seguenti insiemi è semplicemente connesso. Quale?

b>a>0.

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x^2 + y^2 \leq b\}$ b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq a\}$

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 \leq a\}$ d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2+y^2 \leq a\}$.

Soluzione d)

2) La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n}{b^n} x^n \,, \qquad |x| < \frac{b}{a}\,, \qquad a,b > 0.$$

ha somma a) $\frac{1}{a+bx}$ b) $\frac{1}{b+ax}$ c) $\frac{b}{b+ax}$ d) $\frac{a}{b+ax}$.

Soluzione c)

3) Data la funzione 2π-periodica, definita nell'intervallo $]-\pi,\pi]$ da

$$f(x) = sen\, x - |x|,$$

il coefficiente b_3 del suo sviluppo di Fourier è

a) $b_3 = 0$ b) $b_3 = -1$ c) $b_3 = 1$ d) $b_3 = 3$.

Soluzione a)

4) Il seguente limite

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^{z^a} - 1}{z^b}$$

Se $a = b$ vale 1

Se $a > b$ vale 0

(a) vale 1

$$\lim_{z \to 0} \frac{z^a}{z^b} = z^{a-b}$$

se $a > b$ z^k con $k > 0$ tende a 0

se $b > a$ z^k con $k < 0 \Rightarrow \frac{1}{z^k} \to +\infty$

se $b=a$ $z^0=1$

(b) non esiste

~~(c)~~ vale 0

(d) è infinito.

Soluzione: a) se $a = b$, c) se $a > b$

ESERCIZIO 2. (10 pt.) Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2}{x^2 + an^2}, \qquad a > 0.$$

Soluzione: la funzione limite è $f(x) = \frac{1}{a}$. Per studiare la convergenza uniforme, osserviamo che

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^2}{a(x^2 + an^2)} \leq \frac{x^2}{a^2 n^2}.$$

Quindi vale su $|x| \leq M$, $M > 0$.

ESERCIZIO 3. (10 pt.) Si calcoli la trasformata del seguente segnale periodico (per $t \geq 0$) definita su (0,a) ed estesa per periodicità

$$f(t) = \begin{cases} b & 0 \leq t \leq \frac{1}{c}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Soluzione: È un segnale periodico per $t \geq 0$ di periodo a.

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{1 - e^{-as}} \int_0^{\frac{1}{c}} b e^{-st}\, dt = \frac{b}{1 - e^{-as}} \frac{1 - e^{-\frac{s}{c}}}{s} \qquad Re(s) > 0.$$

ESERCIZIO 2. **(10 pt.)** Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2}{x^2 + an^2}, \qquad a > 0.$$

$$f_n(x) = \frac{n^2}{x^2 + an^2} \qquad a>0$$

$$= \frac{n^2}{n^2\left(\frac{x^2}{n^2}+a\right)} = \frac{1}{\frac{x^2}{n^2}+a} \to \frac{1}{a} \quad \text{per } n \to +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

In $[-A, A]$ con $0 < A < +\infty$

$$\sup_{[-A,A]} \left| \frac{n^2}{x^2+an^2} - \frac{1}{a} \right| = \sup_{[-A,A]} \left| \frac{\cancel{an^2} - x^2 + \cancel{an^2}}{ax^2 + a^2n^2} \right| =$$

$$= \sup_{[-A,A]} \frac{x^2}{ax^2+a^2n^2} = \frac{A^2}{aA^2+a^2n^2} \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

ESERCIZIO 3. **(10 pt.)** Si calcoli la trasformata del seguente segnale periodico (per $t \geq 0$) definita su (0,a) ed estesa per periodicità

$$f(t) = \begin{cases} b & 0 \leq t \leq \frac{1}{c}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$$

$$F(t) = \frac{1}{1-e^{as}} \int_0^{1/c} e^{-st}\, b\, dt = \frac{b}{1-e^{as}} \frac{\left(-e^{-st}\right)_0^{1/c}}{s} =$$

$$= -\frac{b}{1-e^{as}} \frac{e^{-1/c\, s} - 1}{s}$$

$$f_n(x) = \arctan(n + n^2 x) \qquad x \leq 0$$

Se $x = 0$ $\quad \arctan(n) \to \frac{\pi}{2}$ per $n \to +\infty$

Se $x \in (-\infty, 0)$ $\quad \arctan\left(n^2\left(\frac{1}{n} + x\right)\right) \to -\frac{\pi}{2}$ per $n \to +\infty$

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

In $(-\infty, A]$ $\quad A < 0$

$$\sup_{(-\infty, A]} \left| \arctan(n + n^2 x) + \frac{\pi}{2} \right| = \arctan(n + n^2 A) + \frac{\pi}{2}$$

$$= \arctan\left(n^2\left(\frac{1}{n} + A\right)\right) + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi/4} -\frac{\pi}{2}\, dx = -\frac{\pi}{2}\left[x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi/4} = -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{8}$$