**Prova di Analisi Matematica II - 17 Febbraio 2020 - Fila A**
**Ing. Informatica**
**Prof.ssa Virginia De Cicco**

| 1) | 2) | 3) | 4) | 5) | VOTO: |
|---|---|---|---|---|---|

**N.B.** La parte sovrastante è riservata al docente.

| Cognome | Nome |
|---|---|

Dichiaro di aver sostenuto con profitto l'esame di Analisi Matematica 1

FIRMA: ..........................................................................................

**ESERCIZIO 1.** Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata $-1$ punto ed ogni risposta non data 0 punti. (**10 pt.**)

1) (I) La funzione $f(z) = Log(Log\, z)$ è olomorfa in

(a) $\mathbb{C}^* \setminus \{z = x + iy \in \mathbb{C} : -1 \le x \le 1\}$

(b) $\mathbb{C}^*$

(c) $\mathbb{C}^{**}$

~~(d)~~ $\mathbb{C}^{**} \setminus \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |z| \le 1, x \ge 0\}$.

$Log(Log z) = Log(e^{log|z| + i Arg z})$ $\quad$ $Re < 0$ $\quad$ $Im = 0$

$log|z| < 0 \Rightarrow |z| < 1$

$Arg z = 0 \to Re(z) > 0 \Rightarrow x > 0$ se $x + iy = z$

(II) La successione di funzioni

$$f_n(x) = \log\left(\frac{x^2}{n} + 1\right)$$

converge uniformemente a $f(x) = 0$ su

(a) $\mathbb{R}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq A\}\,,\ 0 < A < 1$

~~(c)~~ $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq B\}\,,\ B > 0$

(d) $\{x \in \mathbb{R} : A \leq |x| \leq B\}\,,\ 0 < A < 1 < B.$

$Log\, i = i\frac{\pi}{2}$

(III) $\cos(Log\, i) =$

(a) $0$

~~(b)~~ $\cosh(\frac{\pi}{2})$

(c) $\sinh(\frac{\pi}{2})$

(d) $-i.$

$$\frac{e^{i Log\, i} + e^{-i Log\, i}}{2} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}}{2} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}}{2} = \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

(IV) Il dominio della funzione

$$f(z) = Log(|z - 1|)$$

è

(a) non connesso

(b) semplicemente connesso

~~(c)~~ connesso ma non semplicemente connesso

(d) limitato.

(V) La rappresentazione cartesiana del numero complesso

$$z = 2e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

è

$$= 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right] = \sqrt{2} - \sqrt{2} i$$

(a) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

(b) $z = 2 + 2i$

~~(c)~~ $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

(d) $z = 2 - 2i.$

**ESERCIZIO 2.**

(i) Si scriva l'espressione della serie di Fourier di una funzione $2\pi$-periodica pari.

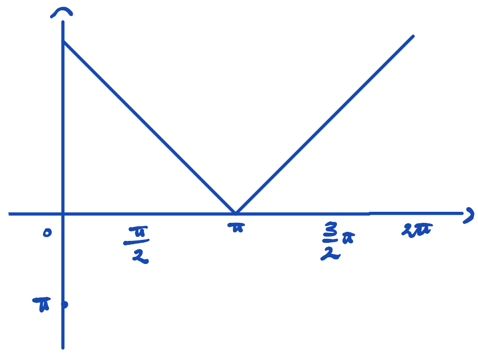
(ii) Si sviluppi in serie di Fourier la funzione:

$$f(x) = |x - \pi|, \quad x \in (0, 2\pi]$$

e prolungata per periodicità $\forall x \in \mathbb{R}$.

1) Se $f$ è pari $b_n = 0$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx)$$




2) $f(x) = |x - \pi| \quad x \in (0, 2\pi]$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |x-\pi|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2} - \pi x\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{4\pi^2}{2} - 2\pi^2\right) = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi} x\cos(nx)\,dx}_{1} - \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(nx)\,dx}_{2} =$$

1 $$\int_0^{2\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{x}{n}\sin nx - \frac{1}{n}\int \sin nx\,dx = \frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos(nx)$$

$$= \frac{1}{n}\left[x\overset{0}{\sin(nx)} + \frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = 0$$

2 $$\int_0^{2\pi}\cos(nx)\,dx = \sin(nx)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Quindi $a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi} x\sin(nx)\,dx}_{1} - \underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(nx)\,dx}_{2}$$

1 $$\int_0^{2\pi} x\sin(nx)\,dx = -\frac{x}{n}\cos(nx)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{n}\left[\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\sin nx}} - x\cos nx\right]_0^{2\pi}$$

$\cos(2n\pi)$

$\cos(0)$

$$= \frac{1}{n}\left(-2\pi + 0\right) = -\frac{2\pi}{n}$$

2 $$\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx = -\cos nx\Big|_0^{2\pi} = -(1-1) = 0$$

$$b_n = -\frac{2\pi}{n}$$

$$f_n(x) = \sum_{n\geq 1} -\frac{2\pi}{k}\sin(kx)$$

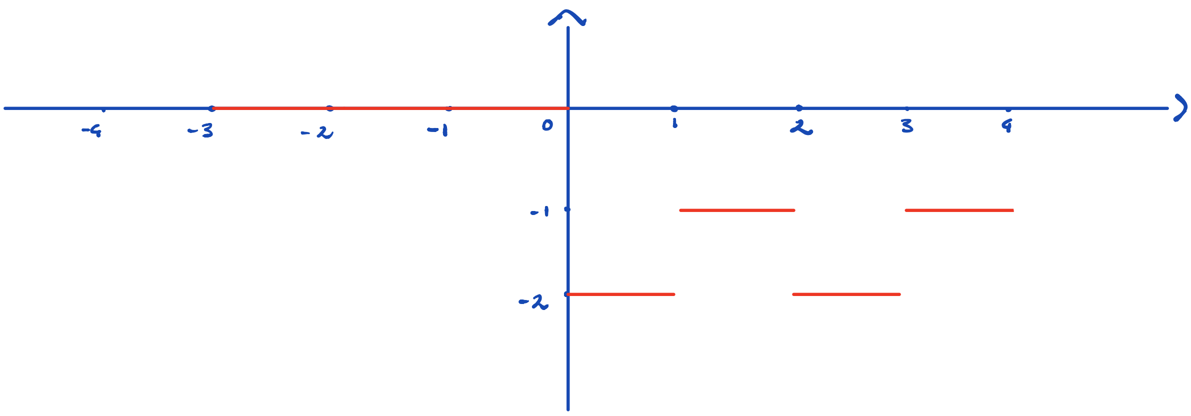
**ESERCIZIO 3.**

(i) Si scriva la definizione di trasformata di Laplace e di ascissa di convergenza.

(ii) Si dia la formula della trasformata di Laplace di un segnale periodico.

(iii) Si calcoli la trasformata della seguente onda quadra modificata:

$$f(t) = \begin{cases} -2 & 2n \leq t \leq 2n+1, \quad n \geq 0 \\ -1 & 2n+1 < t < 2n+2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$




$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^1 -2\,dt + \frac{1}{\pi}\int_1^2 -1\,dt = \frac{1}{\pi}\left[-2t\right]_0^1 + \frac{1}{\pi}\left[-t\right]_1^2 = -\frac{3}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^1 -2\cos nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_1^2 -\cos nt\,dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^1 - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_1^2 = -\frac{2}{n\pi}\sin(n) - \frac{1}{n\pi}\sin(2n) + \frac{1}{n\pi}\sin(n)$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\sin(n) - \frac{1}{n\pi}\sin(2n) = -\frac{1}{n\pi}\left(\sin(n) + \sin(2n)\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^1 -2\sin(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_1^2 -\sin(nt)\,dt = \frac{2}{n\pi}\left(\cos(n)-1\right) + \frac{1}{\pi n}\left(\cos(2n) - \cos(n)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi n}\cos(n) - \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi n}\cos(2n) - \frac{1}{\pi n}\cos(n) = \frac{1}{\pi n}\cos(2n) - \frac{1}{\pi n}\cos(n) - \frac{2}{\pi n}$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(\cos(2n) - \cos(n) - 2\right)$$

$$-\frac{3}{2\pi} + \sum_{n\geq 1}\left[-\frac{1}{n\pi}(\sin(n)+\sin(2n)\right]\cos(nx) + \left[\frac{1}{\pi n}\left(\cos(2n)-\cos(n)-2\right)\right]\sin(nx)$$

**ESERCIZIO 4.**

(i) Data una funzione analitica $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, si scrivano le formule integrali di Cauchy per $f$ e per le sue derivate.

(ii) Si calcolino i seguenti integrali in campo complesso:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z-1}dz, \quad \int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^8}dz,$$

dove $\gamma$ è la curva $|z-1|=17$, percorsa in verso antiorario.

1) $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$ , per $n=0$ $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = 2\pi i f(z_0)$

2) $|z-1|=17 \to -17 < z-1 < 17 \to \begin{cases} z > -16 \\ z < 18 \end{cases}$

$\begin{cases} x+iy > -16 \\ x+iy < 18 \end{cases} \to \begin{cases} -16 < x < 18 \\ y=0 \end{cases}$

$$\int \frac{e^z}{z-1}dz = 2\pi i e$$

$$\int \frac{e^z}{(z-1)^8}dz = \frac{2\pi i}{7!}e$$

**ESERCIZIO 5.**

(i) Si diano le diverse definizioni di convergenza per una serie di funzione

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Si studino le varie convergenze della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^{\log x}, \quad x > 0$$

ed i legami fra di loro.

$$\log x = \begin{cases} 0 & \text{per } x=1 \\ 1 & \text{per } x=e \\ <0 & \text{per } x\in(0,1) \\ <1 & \text{per } x\in(1,e) \\ >1 & \text{per } x\in(e,+\infty) \end{cases}$$

C.P. $f_n(x) = (-1)^n n^{\log x}$

Se $x\in(0,1)$, $(-1)^n n^{\log x} = (-1)^n \frac{1}{n^t} \to 0$ con $t>0$ per Lib

Se $x=1$, $(-1)^n$ non converge

Se $x\in(1,+\infty)$ $(-1) n^{\log x} = (-1) n^t$ con $t>0$, non converge.

Converge puntualmente a 0 per $x\in(0,1)$

C.A $\left|(-1)^n n^{\log x}\right| = n^{\log x}$, $\sum n^{\log x}$ converge se $x\in(0,\frac{1}{e})$

C.U. In $(0,A]$ con $0<A<\frac{1}{e}$

$$\sup_{(0,A]} \left|(-1)^n n^{\log x}\right| = n^{\log A} \to 0 \text{ per } n\to+\infty$$

C.T. $\left|(-1) n^{\log x}\right| < \frac{1}{n^A} = M_n$ con $0<A<\frac{1}{e}$ e $\sum M_n < +\infty$