Prova B di Analisi Matematica II - 23 Gennaio 2020
Ing. Informatica
Prof.ssa VIRGINIA DE CICCO

1)	2)	3)	4)	5)	VOTO:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Cognome	Nome

Dichiaro di aver sostenuto con profitto l'esame di Analisi Matematica 1

FIRMA: ....

ESERCIZIO 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti. (**10 pt.**)

1)

$$\cos(i) =$$

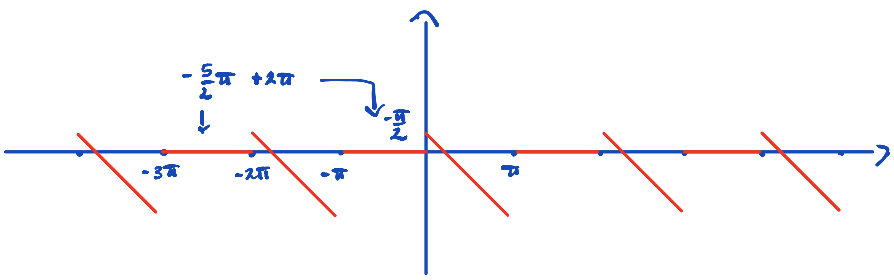
(a) $i\cos(1)$
(b) $\cosh(1)$
(c) $\sinh(1)$
(d) $i\sin(1)$.

$$\frac{e^{i\cdot i}+e^{-i\cdot i}}{2} = \frac{e^{-1}+e^{1}}{2} = \frac{e+e^{-1}}{2} = \cosh(1)$$

2) La serie di Fourier della funzione, periodica di periodo 2π, definita per $x \in [-\pi, \pi[$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ 1 - x & 0 \le x < \pi, \end{cases}$$

converge in $x = -\frac{5}{2}\pi$ a



(a) $1 + \frac{5}{2}\pi$

~~(b)~~ 0

(c) $-\frac{\pi}{2}$

(d) $\frac{\pi}{2}$.

3) La somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(iz)^n} = \frac{1}{1-iz}$$

vale

(a) $\frac{i}{1-iz}$

~~(b)~~ $\frac{1}{1-iz}$

(c) $\frac{z}{i-z}$

(d) $\frac{iz}{iz-1}$.

4) La trasformata di Laplace della convoluzione

$$(t^2 * e^{2t})$$

è

$$\frac{2!}{s^3} \cdot \frac{1}{s-2}$$

(a) $\frac{s-2}{s^3}$

~~(b)~~ $\frac{2}{s^3(s-2)}$

(c) $\frac{2}{s^2(s-2)}$

(d) $\frac{1}{2s(s-2)^2}$.

5) L'integrale

$$\int_\gamma \frac{dz}{e^z(z^2+4)}$$

$z^2 = -4 \to z = \pm 2i$

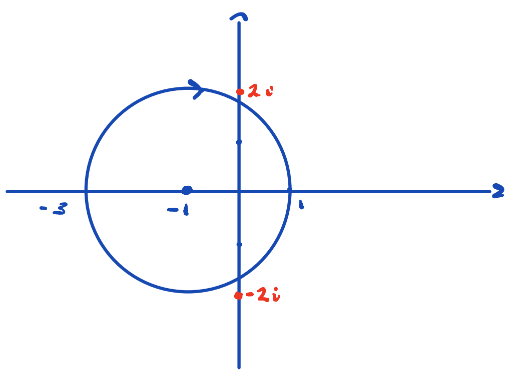
dove $\gamma(t) = -1 + 2e^{-it}$, $t \in [-\pi, \pi]$ vale

(a) $\frac{2i}{e}$

(b) $\frac{\pi i}{e}$

~~(c)~~ 0

(d) $-\frac{\pi}{e}$.



ESERCIZIO 2. (i) Si dia la definizione di residuo.

(ii) Si espongano i vari metodi per il calcolo dei residui.

(iii) Si calcolino i residui in $z = 3$ delle seguenti funzioni

$$f(z) = \frac{z-3}{e^{z-3}} \quad , \quad g(z) = e^{\frac{1}{(z-3)^2}} \quad , \quad h(z) = \frac{\sin(z-3)}{(z^2-9)^2} \quad .$$

1) Si definisce residuo di f in z_0 il numero

$$\operatorname{res}(f, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz$$

dove γ e' un circuito contenuto in A e contenente z_0 e nessun altra singolarità di f.

2) $\operatorname{res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \left. \frac{f_1(z)}{f_2'(z)} \right|_{z = z_0}$$

$$\operatorname{res}(f, z_0) = c_{-1}$$

3) • $f(z) = \dfrac{z-3}{e^{z-3}} = (z-3) \displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(z-3)^n} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(z-3)^{n-1}}$

$$c_{-1} = \operatorname{res}(f, 3) = \frac{1}{2}$$

• $g(z) = e^{\frac{1}{(z-3)^2}}$ $\quad \lim_{z \to 3} (z-3)\, e^{\frac{1}{(z-3)^2}} = 0 \quad \displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-3)^{2n}} \Rightarrow c_{-1} = 0$

• $h(z) = \dfrac{\sin(z-3)}{(z^2-9)^2} = \dfrac{\sin(z-3)}{(z+3)^2 (z-3)^2} = \dfrac{1}{(z+3)^2 (z-3)}$ $\qquad z_0 = 3, \; z_1 = -3$

$$\lim_{z \to 3} \cancel{(z-3)} \frac{1}{(z+3)^2 \cancel{(z-3)}} = \frac{1}{36} \quad , \quad \lim_{z \to -3} \frac{d}{dz} \left[\frac{\sin(z-3)}{(z-3)^2} \right] = \lim_{z \to -3} \frac{\cos(z-3)(z-3)^2 - 2(z-3)\sin(z-3)}{(z-3)^4} =$$

$$= \frac{\cos(z-3)}{(z-3)^2} - \frac{2}{(z-3)^2} = \frac{\cos(-6)}{36} - \frac{1}{18}$$

ESERCIZIO 3. (i) Si dia la definizione di serie di Laurent di una funzione f analitica in una corona circolare centrata in z_0 e si scriva la formula per i coefficienti di Laurent.

(ii) Si scriva lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z(z-3)^2}$$

in $z_0 = 0$ specificandone l'insieme di convergenza.

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{(z-3)^2} = \frac{1}{z}\frac{1}{\left[3\left(\frac{z}{3}-1\right)\right]^2} = \frac{1}{9z}\frac{1}{\left(\frac{z}{3}-1\right)^2} = \frac{1}{9z}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{3}\right)^2} \qquad W = \frac{z}{3} \to z = 3W$$

$$= \frac{1}{27W}\cdot\frac{1}{(1-W)^2} = \frac{1}{27W}\sum_{n\geq 0}(n+1)W^n = \frac{1}{27}\sum_{n\geq 0}(n+1)W^{n-1} = \sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{27}\left(\frac{z}{3}\right)^{n-1} =$$

$$= \sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{3^3}\frac{z^{n-1}}{3^{n-1}} = \sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{3^{n+2}}z^{n-1}$$

Converge per $|z| < 1$

ESERCIZIO 4. (i) Si enunci e si dimostri il teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale per successioni.

(ii) Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{x}{3x + \frac{5}{n^2}}.$$

(iii) Si calcoli il

$$\lim_{n\to+\infty} \int_2^4 f_n(x)dx.$$

2) $f_n(x) = \dfrac{x}{3x + \frac{5}{n^2}}$

Per $n \to +\infty$ $f_n(x) \to \frac{1}{3}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

In $[-A, A]$ con $A > 0$

$$\sup_{[-A,A]} \left| \frac{x}{3x + \frac{5}{n^2}} - \frac{1}{3} \right| \leq \frac{A}{3A + \frac{5}{n^2}} - \frac{1}{3} = 0 \text{ per } n \to +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_2^4 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} x \Big|_2^4 = \frac{1}{3}[4-2] = \frac{2}{3}$$

ESERCIZIO 5. (i) Si enunci il Lemma del Grande Cerchio.

(ii) Usando i metodi della variabile complessa, si calcoli il seguente integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+100}\,dx.$$

Consideriamo $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{1}{z^2+100}\,dz$

$f(z) = \dfrac{1}{z^2+100}$, $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \frac{z}{z^2+100} = 0$, quindi per L.G.C.

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{z^2+100}\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{2} \operatorname{res}(f, z_k)$$

$z^2+100=0 \to z^2=-100 \to z = \pm 10i$. Solo $z_0 = 10i$ si trova in $\operatorname{Im}(z) \geq 0$, quindi:

$$\operatorname{res}(f, 10i) = \frac{1}{2z}\Big|_{z=10i} = \frac{1}{20i}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+100}\,dx = 2\pi i \, \frac{1}{20i} = \frac{\pi}{10}$$