

2. Due giocatori scoprono 10 carte di cui 5 rosse e 5 nere. Inizia il turno Andrea, segue Bruno e via di seguito per 5 volte. Sia N il numero delle volte che Bruno scopre una carta di colore uguale a quella scoperta da Andrea immediatamente prima.

a) Determinare la media di N .

b) Calcolare la probabilità che $N = 0$.

$$a) P(\text{Andrea e Bruno scoprono carte diverse in un turno}) = \frac{4}{9}$$

quindi $E(N) = \frac{20}{9}$

$$b) P(N=0) = \frac{32}{63} = \frac{8}{63}$$

Risoluzione.

a) Si può scrivere la variabile N come somma delle variabili aleatorie I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5 . Dato che il modello uniforme sulle permutazioni di 10 elementi rimane inalterato se si permutano gli estratti in modo qualunque I_j ha la stessa distribuzione di I_1 per $j = 2, \dots, 5$. Quindi $E(N) = E(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5) = 5P(I_1=1)$ e $P(I_1=1) = \frac{4}{9}$ (qualunque sia la carta scoperta da Andrea, questa è la probabilità che la carta di Bruno sia dello stesso colore).

b) Fissate le posizioni delle 5 carte rosse (e quindi delle 5 carte nere) la probabilità di scoprire le 10 carte con i colori nelle posizioni scelte è $\frac{5!5!}{10!} = \frac{1}{\binom{10}{5}}$.

Dato che ci sono $2^5 = 32$ modi di scegliere per ognuna delle 5 coppie di estrazioni effettuate da Andrea e Bruno se la prima carta estratta è rossa o nera per realizzare l'evento $\{N=0\}$ si ha che

$$P(N=0) = \frac{32}{\binom{10}{5}} = \frac{8}{63}$$