

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA PROPOSTE NELL'ESEME SCRITTO DEL 21 GENNAIO

1. Si consideri una PDF $f(x)=c(1-x^2)$, definita per x nell'intervallo $[-1,1]$ (e nulla altrove), dove c è una opportuna costante di normalizzazione. Quale tra queste è la corrispondente CDF $F(x)$, sempre per x nell'intervallo $[-1,1]$? Risposte: A) $(3x-x^3)/4+1/2$; B) $x-(x^3/3)$; C) $(3x-x^3)/4$; D) $(3x-x^3+2)/3$. Corretta A: Tutte le funzioni proposte sono primitive di un multiplo di $(1-x^2)$, ma solo la prima vale 0 in -1 e 1 in 1, come deve essere.
2. Il numero di segnalazioni di guasto che arrivano al servizio assistenza ascensori di una ditta durante il fine settimana (sabato e domenica) seguono un processo di Poisson con una media di due segnalazioni al giorno. Sapendo che durante un fine settimana è arrivata una sola segnalazione, con che probabilità è arrivata di sabato? Risposte: A) $1/2$; B) $2/e^2$; C) $1/4$; D) $2/e^4$. Corretta A: La legge del numero $M+n$ delle chiamate nel fine settimana è Poisson con media 4, mentre quelle le M che arrivano di sabato (le N di domenica) hanno legge Poisson di media 2, e sono indipendenti. La risposta è $P(M=1, N=0)/P(M+N=1)=2e^{-2}e^{-2}/(4e^{-4})=1/2$.
3. Si effettua un'intervista per conoscere la proporzione di abitanti di un paese che disapprova l'operato del sindaco. Tuttavia, per mantenere la privacy, si istruiscono gli intervistati a lanciare una moneta bilanciata e solo se esce croce dare una risposta sincera, altrimenti se esce testa disapprovare in ogni caso. Sapendo che il 70 per cento ha affermato di disapprovare, qual è la proporzione che approva "sinceramente" l'operato del sindaco? Risposte: A) 60%; B) 80%; C) 70 %; D) 50 %. Corretta A: La probabilità che un intervistato approvi "sinceramente" l'operato del sindaco dà luogo alla probabilità di esprimere disapprovazione nell'intervista pari a $0.5+0.5(1-p)=0.7$ (legge delle probabilità totali basata sul risultato del lancio della moneta) da cui $p=0.6$.
4. Un gioco consiste nell'estrarre una dopo l'altra le carte da un mazzo italiano (40 carte, 10 carte per ognuno dei 4 semi con valori dall'asso fino al re) ed ottenere un euro se esce una carta del seme di denari o dal valore asso. Quanti euro si ottengono in media in 20 estrazioni? Risposte: A) 6,5; B) 7; C) 6; D) nessuna delle altre risposte. Corretta A: La probabilità che esca una carta che paga un euro è $13/40$, quindi per linearità su 20 tentativi ci si attendono $13/2=6,5$ euro (si noti che, per la scambiabilità delle estrazioni, questo vale sia nel caso di reimmissione che senza reimmissione della carta estratta).
5. Si consideri una funzione di densità positiva sull'intero asse reale, simmetrica rispetto all'origine e standardizzata. Utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev, si può affermare che la differenza interquartile (differenza tra il terzo e il primo quartile) non è superiore a: Risposte: A) $2\sqrt{2}$; B) $\sqrt{2}$; C) 2; D) $1/(2\sqrt{2})$. Corretta A: La probabilità che una variabile standardizzata prenda valori che superano $d/2$ è al più $4/d^2$. Ora, scegliendo d uguale alla differenza interquartile questa probabilità è $1/2$ (la probabilità di un valore compreso tra il primo e il terzo quartile), da cui d^2 non supera 8, cioè d non supera $2\sqrt{2}$.
6. Assumiamo la uguale probabilità dei segni 1, X e 2 e la mutua indipendenza per ciascuna delle partite di calcio del campionato di serie A. Consideriamo ora una serie di 96 partite e calcoliamo la differenza tra il numero di segni 1 e il numero di segni 2. Calcolare approssimativamente la probabilità che questo numero non superi 8 in valore assoluto (trascurare la correzione di continuità). Risposte: A) all'incirca 0.68; B) all'incirca 0.84; C) all'incirca 0.5; all'incirca 0.32. Corretta A: Standardizzando la variabile differenza tra numero di 1 e numero di 2 si ottiene una variabile approssimabile con una normale standard (in virtù del teorema del limite centrale). Ora la variabile che assume il valore +1 quando esce 1 e -1 quando esce 2 ha media nulla e varianza $2/3$ (lo scarto al quadrato dalla media è una bernoulliana con $p=2/3$), quindi la somma di 96 variabili indipendenti con questa legge ha media sempre 0 e varianza $96 \times 2/3 = 64$, quindi la deviazione standard è 8. Si conclude ricordando che la probabilità che una normale standard prenda valori minori di 1 in modulo è all'incirca 0.68 (controllare sulle tavole).
7. Tre città sono collegate da tre strade, ciascuna delle quali collega una diversa coppia di esse. Se ciascuna strada è aperta con probabilità p , indipendentemente dalle altre,

determinare la probabilità che la rete sia connessa, cioè che sia possibile recarsi in una qualsiasi città partendo da una qualsiasi altra. Risposte: A) $3p^2-2p^3$; B) $2p^2-3p^3$; C) p^3-3p^2+3p ; D) $3p^2$. Corretta A: La quantità richiesta è la probabilità che una binomiale (3,p) valga almeno 2 (cioè o 2 o 3), che è $p^3+3p^2(1-p)$. In ogni caso si può escludere B) (quando $p=1$ è negativa) e D) (quando $p=1$ vale 3).

8. Un'urna contiene una pallina nera e una pallina bianca. Ogni volta che viene estratta pallina bianca, viene rimessa nell'urna insieme ad un'altra pallina bianca. Le estrazioni vengono arrestate quando viene estratta per la prima volta la pallina nera. Qual è il numero medio di estrazioni che si effettuano? Risposte: A) Nessuna delle altre risposte; B) 2; C) e; D) π greco. Corretta A: Per la formula delle probabilità composte, detto X il numero delle estrazioni, si ha $P(X=n)=(1/2)(2/3)\dots(n-1)/n \times 1/(n+1)=1/n(n+1)$ e quindi moltiplicando per n si ottiene una serie divergente, quindi la media di X è infinita.

9. Un bersaglio per il gioco delle freccette ha forma quadrata. All'interno del bersaglio è disegnato un quadrato più piccolo, il cui lato è la metà del lato dell'intero bersaglio. Vogliamo assegnare un punteggio al quadrato più piccolo e alla parte ad esso complementare del bersaglio, in modo inversamente proporzionale alle probabilità che vengano raggiunti lanciando una freccetta a caso verso il bersaglio. Quanto deve valere il rapporto tra il punteggio assegnato al quadrato più piccolo e quello assegnato al suo complementare? Risposte: A) 3; B) 2; C) 4; D) $4/3$. Corretta A: la probabilità del quadrato più piccolo è evidentemente $1/4$ e quella del complementare è $3/4$, per cui il rapporto tra le due è $1/3$, quindi il rapporto tra i punteggi assegnati deve essere 3.

10. Si considerino intervalli di confidenza per la media di una variabile gaussiana con varianza ignota, costruiti attraverso la statistica t. Passando dal livello di confidenza 90 per cento al 99 per cento, con dimensione campionaria $n=6$, quanto si allarga l'intervallo? Risposte: A) all'incirca del 100%; B) all'incirca del 30%; C) all'incirca del 90%; D) all'incirca del 75%. Corretta A: Consultando le tavole della distribuzione t di Student con $n-1=5$ gradi di libertà, si verifica che la soglia che ha 0.05 (la metà di 0.1) di area sottesa alla destra è 2.015, mentre quella che ha 0.005 (la metà di 0.01) di area sottesa alla destra è 4.032, all'incirca il doppio.