2. Siano U e V le coordinate di un punto scelto uniformemente nel quadrato $(0,1)^2$ del piano cartesiano.

a) Determinare la media e la varianza di $U - V$.

b) Determinare esattamente $P(|U-V| \ge t)$, con $t \in (0,1)$,

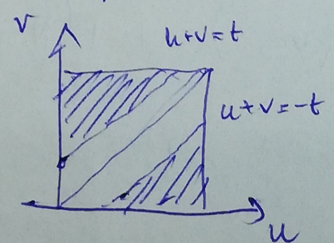
c) Se l'esperimento si ripete 5 volte indipendentemente e se $\bar{U}_5$ e $\bar{V}_5$ sono le medie camp[...] e ascisse, rispettivamente delle ordinate, determinare una maggiorazione per $P(|\bar{U}_5 - \bar{V}_5| \ge t)$ [...] $t \in (0,1)$ per i quali risulta non banale.

a) $\mathbb{E}(U-V) = \mathbb{E}(U) - \mathbb{E}(V) = 0$

$\text{var}(U-V) = \text{var}(U) + \text{var}(V) = \frac{1}{6}$

dato che ~~...~~ U e V sono uniformemente distribuiti in $(0,1)$ e indipendenti.

b)



La probabilità richiesta è l'area della regione più scura, che è

$$2 \cdot \frac{(1-t)^2}{2} = (1-t)^2, \quad 0 < t \le 1$$

c) Per la disuguaglianza di Chebyshev $\forall t \in (0,1)$

$$\mathbb{P}(|\bar{U}_5 - \bar{V}_5| \ge t) \le \frac{\text{var}(\bar{U}_5 - \bar{V}_5)}{t^2} = \frac{2 \cdot \text{var}(U_1)}{5t^2} = \frac{1}{30t^2}$$

che evidentemente dà informazioni non banali purché $30t^2 > 1$, cioè $t > \frac{1}{\sqrt{30}}$.