Esame di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in *Ingegneria Informatica e Automatica*

30 aprile 2020

1. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

   V V (a) L'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq x^2\}$ è un insieme convesso.

   V V (b) L'intersezione di due politopi è un insieme limitato.

   V V (c) L'insieme delle soluzione di un sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ è un insieme convesso.

   F F (d) L'insieme ammissibile di un problema di Programmazione Lineare può non essere un insieme convesso.

2. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

   F F (a) Un insieme convesso ammette sempre vertici.

   V V (b) Sia $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$ con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, e $b \in \mathbb{R}^m$. P è un poliedro e se $P \neq \emptyset$, ammette sempre vertici.

   F V (c) Siano dati due segmenti sul piano $\mathbb{R}^2$ denotati con s_1 e s_2 tali che $s_1 \cap s_2 \neq \emptyset$. L'insieme $s_1 \cup s_2$ ammette esattamente 5 vertici.

   V (d) Se il numero dei vertici di un insieme convesso è infinito, allora l'insieme non può essere un poliedro.

3. Si consideri la Fase I del metodo del simplesso applicata ad un problema di Programmazione Lineare in forma standard. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

   F F (a) Il problema originario è ammissibile se la funzione obiettivo del problema artificiale all'ottimo vale zero, ma non vale il viceversa.

   V V (b) Al termine della Fase I siamo in grado di verificare se nel problema originiario è presente un vincolo ridondante.

   F (c) Se alla fine della Fase I il problema origniario risulta ammissibile, allora sarà necessario effettuare uno scambio degenere se e soltanto se il problema originiario non presenta vincoli ridondanti.

   F F (d) Il numero delle variabili artificiali introdotte nel problema artificiale non può essere minore al numero dei vincoli del problema originario.

4. Sia P il poliedro descritto dal seguente sistema

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 3 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\
x_2 + x_4 &= 1 \\
x_i \geq 0, & \qquad i = 1, \ldots, 4
\end{aligned}
$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

V V (a) Il punto $(2,\ 1,\ 1,\ 0)^T$ è vertice di P.

F F (b) Il punto $(2,\ 1,\ 1,\ 1)^T$ è vertice di P.

F F (c) Il punto $(1,\ 2,\ 1,\ -1)^T$ appartiene a P.

può essere vertice

F V (d) Dal fatto che deve essere $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, si deduce che l'origine degli assi è vertice di P.

5. Al termine della Fase I del metodo del simplesso applicato alla soluzione di un problema di Programmazione Lineare risulta $x_B = (x_2, \alpha_2, \alpha_3, x_3)^T$, $x_N = (x_1, x_4, \alpha_4, \alpha_1)^T$,

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

V V (a) Il problema originario è ammissibile.

V V (b) È presente un vincolo ridondante.

V V (c) Una base ammissibile per il problema originario da cui far partire la fase II è data da $x_B = (x_2,\ x_4,\ x_3)^T$

F F (d) La matrice dei vincoli del problema originario ha rango pieno.

6. Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\min\ (\ 2,\ \ -1,\ 3,\ 1,\ 0,\ 0\ )\ x$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \end{pmatrix}$$
$$x \in \mathbb{R}^6,\ x \geq 0$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

V V (a) Per $\tau = 2$, una soluzione ottima è $\bar{x} = (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0, 3)^T$

F F (b) Se $\tau = 0$ e se si considera la Base formata dalla 5^a e 6^a colonna della matrice dei vincoli, la soluzione di base ammissibile corrispondente soddisfa il criterio di ottimalità .

F V (c) Il soddisfacimento del criterio di ottimalità da parte di una SBA è indipendente da τ.

F V (d) Indipendentemente dai valori assunti da τ, al problema può essere applicata direttamente la Fase II del metodo del simplesso.

7. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

F F (a) Una formulazione lineare P di un problema di Programmazione Lineare Intera è un insieme convesso, ma non necessariamente un poliedro.

V V (b) La formulazione ottima di un problema di Programmmazione Lineare Intera ha sempre tutti i vertici interi.

F V (c) Se P_1 e P_2 sono due formulazioni di un Problema di Programmazione Lineare Intera, se $P_1 \supseteq P_2$, allora P_1 è migliore di P_2.

$\subset$

V V (d) Se la soluzione ottima del rilassamento lineare di un Problema di Programmazione Lineare Intera è a componenti intere, allora è anche soluzione ottima del problema di Programmazione Lineare Intera.

? 8. Si consideri il seguente poliedro definito da

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \leq & 3 \\ 4x_1 + \tau x_2 + x_3 & \geq & 5 \\ x_3 & \leq & 1 \\ x_1 & \geq & 0 \\ x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & \tau & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\tau - 12$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

$\min \; c_B^T B^{-1} b + \gamma^T x_N$

$$\begin{cases} x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N \\ x_N \geq 0_{n-m} \end{cases}$$

F F (a) Il punto $(1,\ 0,\ 1)^T$ è vertice del poliedro per ogni valore di τ.

F V (b) Per $\tau = 0$ il poliedro è vuoto.

F F (c) L'origine degli assi $(0,\ 0,\ 0)^T$ è vertice del poliedro.

V F (d) Per $\tau = 5$ il punto $(0,\ 1,\ 0)^T$ è vertice del poliedro.

9. Sia data una soluzione di base ammissibile $\bar{x}$ di un problema di Programmazione Lineare (in forma standard). Si supponga che le variabili x_1, x_2, x_3 siano in base mentre le variabili x_4, x_5, x_6, x_7 sono fuori base. Il valore della funzione obiettivo in $\bar{x}$ è 7 e i coefficienti di costo ridotto sono $\gamma^T = (0, 2, -1, 2)$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

V F (a) Il valore della funzione obiettivo nel punto ammissibile $x^T = (3, 7, 9, 25, 1, 3, 4)$ è 14.

F V (b) Non sono dati elementi sufficienti per calcolare il valore della funzione obiettivo nel punto ammissibile $x^T = (3, 7, 9, 25, 1, 3, 4)$.

F F (c) Il valore della funzione obiettivo nel punto ammissibile $x^T = (3, 7, 9, 25, 1, 3, 4)$ è 19.

F F (d) La Soluzione di Base Ammissibile corrente soddisfa il criterio di ottimalità.

10. Si consideri un problema di Programmazione Lineare in forma standard, ovvero un problema in cui l'insieme ammissibile è dato dal poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$, con A matrice $m \times n$ e $rango(A) = m$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

F F (a) La Fase II del metodo del simplesso con l'uso di regole anticiclaggio applicato a questo problema può non terminare dopo un numero finito di iterazioni.

F V (b) Se un punto $\bar{x}$ è vertice di P, allora almeno $n - m$ componenti di $\bar{x}$ sono non nulle.

F V (c) Esiste una corrispondenza biunivoca tra Soluzioni di Base Ammissibili e vertici di P.

F F (d) La Fase II del metodo del simplesso ad ogni iterazione, genera una Soluzione di Base Ammissibile diversa dalla precedente.