Prova di Analisi Matematica II - 9 Aprile 2018
Ing. Informatica
Prof.ssa V. DE CICCO

1)	2)	3)	4)	5)	VOTO:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Cognome	Nome

ESERCIZIO 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti. (**10 pt.**)

1) L'antitrasformata di Laplace della funzione $F(s) = \frac{1}{(s-1)^2-1}$ è

   (a) $f(t) = \sinh(t)$
   (b) $f(t) = \cosh t$
   (c) $f(t) = e^t \cosh t$
   X (d) $f(t) = e^t \sinh t$.

2) Sia γ la frontiera del dominio $\{z = (x, y) \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 \leq 2\}$. Si indichi l'unico integrale non nullo tra i seguenti:

   X (a) $\int_\gamma \frac{1}{z-1} dz$
   (b) $\int_\gamma \frac{1}{(z-1)^2} dz$
   (c) $\int_\gamma \frac{1}{(z-1)^3} dz$
   (d) $\int_\gamma \frac{1}{(z-1)^4} dz$.

3) La funzione $f(z) = \sin(iz)$, $z \in \mathbb{C}$ è

(a) intera
(b) a valori immaginari
(c) a valori reali
(d) limitata.

$\sin(iz) = \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

4) La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(x-3)^n$$

è lo sviluppo di Taylor in $x = 3$ della funzione

(a) e^x
(b) e^{x^2}
(c) $e^{(x-3)^2}$
(d) e^{3-x}. $= e^{-(x-3)} = \sum (-1)^n \frac{(x-3)^n}{n!}$

5) L'insieme di definizione della funzione

$$f(z) = \mathrm{Log}(|z^2+1|)\,, \quad z \in \mathbb{C}$$

è

$|z^2+1| \neq 0 \to z^2+1 \neq 0 \to z = \pm i$

(a) $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$
(b) $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$
(c) $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1, -i, i\}$
(d) $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$.

ESERCIZIO 2. Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = (\log(x+1))^n, \quad x > -1.$$

$$f_n(x) = [\log(x+1)]^n \quad x > -1$$

$$|\log(x+1)| < 1 \to -1 < \log(x+1) < 1 \to \begin{cases} \log(x+1) < 1 \to x+1 < e \\ \log(x+1) > -1 \to x+1 > \frac{1}{e} \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x < e-1 \\ x > \frac{1}{e} - 1 \end{cases} = x \in \left(\frac{1}{e} - 1, e-1\right) \quad f_n(x) \to 0$$

Per $x+1 = e \to x = e-1 \quad f_n(x) \to 1$

In $I = \left(\frac{1}{e} - 1 + A, e - 1 - A\right) \quad 0 < A < e$

$$\sup_I \left|[\log(x+1)]^n\right| = [\log(e-A)]^n \to 0$$

ESERCIZIO 3.

(i) Si dia la definizione di $\operatorname{Log} z$ per $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, e si discuta la sua continuità e la sua olomorfia.

(ii) Si studi la continuità e l'olomorfia della funzione

$$f(z) = z^{\sqrt{3}}.$$

1) $\operatorname{Log}(z)$ è la determinazione principale del logaritmo definita come:

$$\operatorname{Log}(z) = \log|z| + i\operatorname{Arg}(z) = \log\rho + i\theta$$

2) $f(z) = z^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\log(z)} = e^{\sqrt{3}(\log(z) + i\arg(z))}$

definito in $\mathbb{C}^*$, per $z \neq 0$

ESERCIZIO 4.

~~(i)~~ Sia dia la definizione di convergenza puntuale per una serie di funzioni.

(ii) Sia assegnata la seguente serie in campo complesso:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(z+i)^n}.$$

(iii) Se ne determini l'insieme di convergenza E.

(iv) Se ne calcoli la somma $\forall z \in E$.

1) Supponiamo che $\forall x \in A \subseteq I$ la successione di funzioni $S_n(x)$ ammetta limite finito $S(x)$ per $n \to +\infty$: $S(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x)$.

In questo caso la serie di funzioni di termine generale $f_n(x)$ converge puntualmente ad $S(x)$ in A e $S(x)$ è la somma della serie e si scrive:

$$\sum_{n \geq 0} f_n(x) = S(x)$$

A è l'insieme di conv. puntuale.

2) $$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!(z+i)^n} = e^{\frac{1}{z+i}}$$

$$f_n = \frac{1}{n!\,(z+i)^n} \to \begin{cases} +\infty & \text{se } z = -i \\ 0 & \text{se } z \neq -i \end{cases} \quad \text{c. P.}$$

C.T: $$\left| \frac{1}{n!\,(z+i)^n} \right| \leq \frac{1}{n!} = M_n, \quad \sum M_n < +\infty \quad \text{per } z \neq -i$$

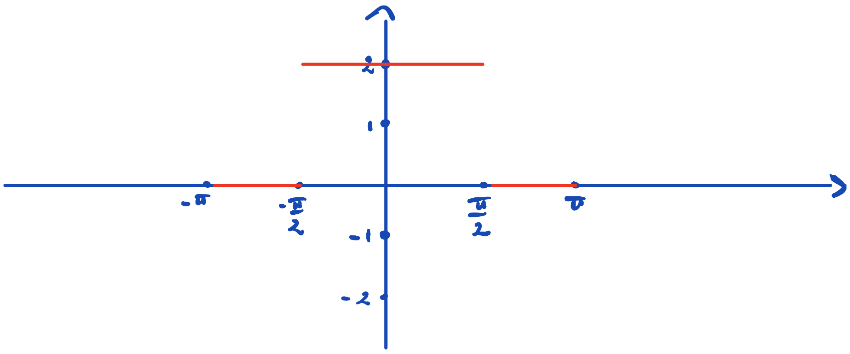
ESERCIZIO 5.

(i) Si scriva la serie di Fourier della funzione periodica di periodo 2π che nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ vale

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

calcolandone esplicitamente i coefficienti.

(ii) Sia poi $S(x)$ la funzione somma della serie di Fourier di $f(x)$. Si tracci il grafico di $S(x)$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ precisandone il valore nei punti di salto.



funzione pari

$b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} 2\,dx = \frac{4}{\pi}\Big[x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\right] = 2 \qquad , \frac{a_0}{2} = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos(nx)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(nx)\,dx = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} (-1)^n \dfrac{4}{n\pi} & n = 2k+1 \\ 0 & n = 2k \end{cases}$$

$$f(x) = 1 + \sum_{k \geq 1} (-1)^{2k+1} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin\left[(2k+1)x\right]$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0+2}{2} = 1 \qquad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0+2}{2} = 1$$