ESERCITAZIONE 9– DOCENTE: MAURO PICCIONI, TUTOR: HLAFO ALFIE MIMUN

May 3, 2020

1. ESERCIZI

Ex. 1: Degli atleti stanno facendo una gara di salto in lungo ed a turno effettuano il salto. Sia X_j la lunghezza del salto del j-esimo atleta e supponiamo che $X_1, \dots, X_j$ siano i.i.d. con distribuzione continua. Il j-esimo atleta stabilisce un nuovo record se $X_j \geq \max\{X_1, \dots, X_{j-1}\}$. Diremo che un doppio record accade al tempo j se entrambi gli atleti $(j-1)$-esimo e j-esimo stabiliscono un nuovo record, ovvero $X_j > X_{j-1} > \max\{X_1, \dots, X_{j-2}\}$. Si calcolino

(1a) la varianza del numero di record ottenuti tra i primi n giocatori (esprimi il risultato come una somma). Cosa succede alla varianza se $n \to +\infty$?

(1b) il numero medio di doppi record tra i primi n giocatori (semplificare il più possibile l'espressione; può essere utile notare che $\frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}$). Cosa succede alla media se $n \to \infty$?

Ex. 2: Una moneta dà testa con probabilità $p \in (0,1)$. La moneta viene lanciata ripetutamente.

(2a) Qual è il valore atteso del numero di lanci fatti fino a quando si osserva la sequenza $Testa - Croce$?

(2b) Qual è il valore atteso del numero di lanci fatti fino a quando si osserva la sequenza $Testa - Testa$?

Suggerimento: se X denota il primo lancio in cui si vede $testa - croce$ si calcoli $\mathbb{E}[X]$ condizionando all'esito del primo lancio e del secondo lancio, notando ad esempio relazioni del tipo $\mathbb{E}[X \mid \text{primo lancio dà croce}] = 1 + \mathbb{E}[X]$. Questo tipo di relazioni permettono di scrivere equazioni in incognita $\mathbb{E}[X]$. Lo stesso discorso vale per la domanda del punto (2b).

Ex. 3: Si consideri un gruppo di n coppie che condividono una stanza in un campus universitario (dunque stiamo considerando $2n$ studenti). Ognuno di questi $2n$ studenti decide di fare un test con probabilità p indipendentemente dagli altri studenti. Sia N il numero (aleatorio) di studenti che decide di fare il test e sia X il numero di coppie che condividono una stanza in cui entrambi gli elementi della coppia eseguono il test. Si calcolino $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[X \mid N]$.

Ex. 4: Siano (X, Y) le coordinate di un punto uniformemente distribuito nel triangolo di vertici (0,1), (1,0), (0,0). Si calcoli la PDF congiunta di X, Y, la PDF marginale di X e la PDF condizionata di X data Y.

2. SOLUZIONI

Ex. 1(1a) Per $j = 1, \dots, n$ definiamo la variabile aleatoria

$$I_j = \begin{cases} 1, & \text{se il } j\text{-esimo atleta stabilisce un record} \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Notiamo che essendo $\{X_j\}_{j=1}^n$ variabili aleatorie con distribuzione continua, la probabilità di avere parimeriti è 0. Sappiamo per certo che fissati i primi j atleti, uno di loro stabilirà il record. Dunque essendo gli eventi $A_k := \{X_k = \max\{X_1, \dots, X_j\}\}$ per $k = 1, \dots, j$ equiprobabili e disgiunti, si ha

$$1 = \mathbb{P}(\text{tra i primi } j \text{ atleti, un atleta stabilisce il record}) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\cup_{k=1}^{j} A_k\right) = \sum_{k=1}^{j} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{j} \mathbb{P}(A_j) = j\mathbb{P}(A_j)$$

da cui

$$\mathbb{P}(A_j) = \frac{1}{j}\,.$$

Notiamo che l'evento A_j corrisponde anche all'evento che il j-esimo atleta stabilisce un record e dunque

$$\frac{1}{j} = \mathbb{P}(A_j) = \mathbb{P}(I_j = 1)\,.$$

Quindi abbiamo che $I_j \sim \text{Ber}(1/j)$ che implica $\mathbb{E}[I_j] = 1/j$. Inoltre $I_j^2 = I_j$ e dunque $\mathbb{E}[I_j^2] = \mathbb{E}[I_j] = \frac{1}{j}$.
Mostriamo che le variabili $\{I_j\}_j$ sono indipendenti. Supponiamo $i < j$ e calcoliamo $\mathbb{P}(I_i = 1, I_j = 1)$. Per calcolare tale probabilità usiamo la formula

$$\frac{\#\text{caso favorevoli}}{\#\text{caso possibili}}\,,$$

nel seguente modo. Pensiamo di conoscere gli esiti dei salti dei primi j giocatori senza sapere a chi appartiene ogni esito: il numero di casi possibili è il numero di possibili ordinamenti dei j esiti, ovvero $j!$, mentre il numero di casi favorevoli sarà il numero di permutazioni in cui

(i) il j-esimo atleta è associato al primo esito più grande
(ii) l'i-esimo atleta è associato ad un esito maggiore degli esiti associati ai primi $i-1$ atleti.

Calcoliamo il numero di casi favorevoli, ovvero le permutazioni di j esiti che soddisfano (i) e (ii). Per contarle ragioniamo così: fissiamo il maggiore degli esiti come il j-esimo. A questo punto scegliamo tra gli esiti rimanenti, ovvero $j-1$, gli esiti che occuperanno le posizioni $i+1, i+2, i+3, \dots, j-1$ (ovvero $j-1-i$ posizioni). Dunque dobbiamo contare i modi di scegliere $j-1-i$ oggetti da $j-1$, ovvero $\binom{j-1}{j-i-1}$. Questi ultimi esiti scelti possono essere messi in $(j-1-i)!$ modi diversi. Dunque $\binom{j-1}{j-i-1}\cdot(j-1-i)!$ sono i modi di disporre gli esiti dalla posizione $i+1$ alla $j-1$. Ora tra gli i esiti rimanenti, fissiamo il più grande in posizione i-esima. I rimanenti $i-1$ esiti possono essere disposti in $(i-1)!$ modi nelle prime $i-1$ posizioni. Dunque abbiamo che il numero di casi favorevoli è dato da

$$\binom{j-1}{j-i-1} \cdot (j-1-i)! \cdot (i-1)!\,.$$

Dunque

$$\mathbb{P}(I_i = I_j = 1) = \frac{\binom{j-1}{j-i-1} \cdot (j-1-i)! \cdot (i-1)!}{j!} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{j} = \mathbb{P}(I_i = 1)\mathbb{P}(I_j = 1)\,,$$

da cui otteniamo che I_i ed I_j sono indipendenti.
Calcoliamo ora la varianza del numero di record ottenuti tra i primi n giocatori. Poichè $\{I_i\}_{i=1}^n$ sono indipendenti, si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n I_i\right) &= \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}\,(I_i) = \sum_{i=1}^n \left(\mathbb{E}[I_i^2] - \mathbb{E}[I_i]^2\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}\,.\end{aligned}$$

Se $n \to \infty$ abbiamo che

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} I_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2}\,,$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che la serie $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i}$ diverge (e dunque dà risultato $+\infty$), mentre la serie $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2}$ converge.

(1b) Sia J_i la variabile aleatoria così definita per $i = 2, \ldots, n$

$$J_i = \begin{cases} 1, & \text{se all'}i\text{-esimo tempo c'è un doppio record} \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Notiamo che, essendo le variabili $\{I_i\}_i$ (introdotte nel punto (1a) dell'esercizio) indipendenti, si ha

$$\mathbb{P}(J_i = 1) = \mathbb{P}(I_i = I_{i-1} = 1) = \mathbb{P}(I_i = 1)\mathbb{P}(I_{i-1} = 1) = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{i-1}\,.$$

Dunque, notando che $\frac{1}{i} \cdot \frac{1}{i-1} = \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}$, si ha

$$\mathbb{E}[J_i] = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{i-1} = \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\,.$$

Dunque il numero medio di doppi record tra i primi n atleti è dato da

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=2}^n J_i\right] = \sum_{i=2}^n \mathbb{E}[J_i] = \sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\right)\,.$$

Si noti che la somma $\sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\right)$ è telescopica, ovvero

$$\sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}\,.$$

Dunque

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=2}^n J_i\right] = \sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\right) = 1 - \frac{1}{n}\,.$$

Se calcoliamo ora il limite per $n \to +\infty$ si ha

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=2}^{+\infty} J_i\right] = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1\,.$$

Dunque, quando $n \to +\infty$, il numero atteso di record tende a $+\infty$, mentre il numero atteso di doppi record tende a 1.

Ex. 2(2a) Denotiamo con X il primo lancio in cui si ottiene croce dopo la prima testa ottenuta. Definiamo gli eventi

$$H = \{\text{il primo lancio è testa}\}\,, \qquad T = H^c\,,$$

$$HH = \{\text{i primi due lanci sono teste}\}\,,$$

$$TT = \{\text{i primi due lanci sono croci}\}\,,$$

$$TH = \{\text{il primo lancio è croce ed il secondo è testa}\}\,,$$

$$HT = \{\text{il primo lancio è testa ed il secondo è croce}\}\,.$$

Notiamo che

$$\mathbb{E}[X \mid T] = \mathbb{E}[X] + 1\,, \qquad \mathbb{E}[X \mid HT] = 2\,, \qquad \mathbb{E}[X \mid HH] = \mathbb{E}[X \mid H] + 1\,.$$

Dunque

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X \mid H]p + \mathbb{E}[X \mid T](1-p) = \mathbb{E}[X \mid H]p + (\mathbb{E}[X]+1)(1-p)\,,$$

$$\mathbb{E}[X \mid H] = \mathbb{E}[X \mid HH]p + \mathbb{E}[X \mid HT](1-p) = (\mathbb{E}[X \mid H]+1)p + 2(1-p)\,,$$

da cui

$$\mathbb{E}[X \mid H] = \frac{2-p}{1-p}\,,$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{2-p}{1-p}p + (\mathbb{E}[X]+1)(1-p) \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \frac{1}{p(1-p)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\,.$$

(2b) Denotiamo con X il primo lancio in cui si ottiene testa avendo ottenuto testa nel lancio precedente. Usando la notazione introdotta nel punto (2a), notiamo che

$$\mathbb{E}[X \mid T] = \mathbb{E}[X] + 1\,, \qquad \mathbb{E}[X \mid HH] = 2\,, \qquad \mathbb{E}[X \mid HT] = \mathbb{E}[X] + 2\,.$$

Dunque

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X \mid H]p + \mathbb{E}[X \mid T](1-p) = \mathbb{E}[X \mid H]p + (\mathbb{E}[X]+1)(1-p)\,,$$

$$\mathbb{E}[X \mid H] = \mathbb{E}[X \mid HH]p + \mathbb{E}[X \mid HT](1-p) = 2p + (2+\mathbb{E}[X])(1-p)\,,$$

da cui

$$\mathbb{E}[X] = (2p + (2+\mathbb{E}[X])(1-p))p + (\mathbb{E}[X]+1)(1-p) \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \frac{1+p}{p^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}\,.$$

Ex. 3: Numeriamo le n camere e definiamo per $j = 1, \dots, n$

$$I_j = \begin{cases} 1, & \text{se la } j\text{-esima camera è abitata da 2 studenti che hanno fatto il test;} \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Notiamo che $\mathbb{P}(I_j = 1) = p^2$ e dunque $\mathbb{E}[I_j] = p^2$. Essendo X il numero di coppie che condividono una stanza in cui entrambi gli elementi della coppia eseguono il test, si ha che

$$X = \sum_{j=1}^{n} I_j \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[I_j] = np^2 .$$

Ricordiamo che N è il numero (aleatorio) di studenti che decide di fare il test. Abbiamo che

$$X = \sum_{j=1}^{n} I_j \Rightarrow \mathbb{E}[X \mid N] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[I_j \mid N] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[I_1 \mid N] = n\mathbb{E}[I_1 \mid N] ,$$

dove l'uguaglianza in blu è dovuta al fatto che le variabili $\{I_j\}_{j=1}^n$ sono i.i.d. e dunque $\mathbb{E}[I_j \mid N] = \mathbb{E}[I_1 \mid N]$ per ogni $j = 1, \dots, n$. Dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(I_1 \mid N)$. Sappiamo che abbiamo $2n$ studenti di cui N hanno fatto il test. Per calcolare $\mathbb{P}(I_1 \mid N)$ dobbiamo "estrarre" due studenti e calcolare la probabilitè che questi studenti facciano parte degli N studenti che hanno fatto il test. Dunque abbiamo

$$\mathbb{P}(I_1 \mid N) = \frac{\binom{N}{2}}{\binom{2n}{2}} = \frac{N(N-1)}{2n(2n-1)} = \frac{N}{2n} \cdot \frac{N-1}{2n-1} .$$

Dunque

$$\mathbb{E}[I_1 \mid N] = \frac{N}{2n} \cdot \frac{N-1}{2n-1} ,$$

da cui

$$\mathbb{E}[X \mid N] = n \cdot \mathbb{E}[I_1 \mid N] = n \cdot \frac{N}{2n} \cdot \frac{N-1}{2n-1} = \frac{N(N-1)}{2(2n-1)} .$$

Ex. 4: Indichiamo con $\mathcal{T}$ il triangolo di vertici i punti (0,1), (1,0), (0,0) e notiamo che tale triangolo ha area $\frac{1}{2}$. Dunque la PDF congiunta di (X, Y) è data da

$$f_{X,Y}(w, z) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Area}(\mathcal{T})} = 2, & \text{se } (w, z) \in \mathcal{T}, \\ 0, & \text{se } (w, z) \notin \mathcal{T}. \end{cases}$$

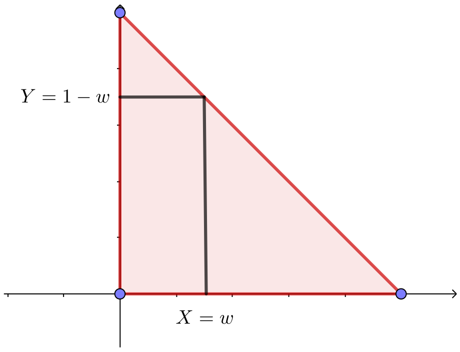
La PDF marginale di X si ricava dalla PDF congiunta di X, Y integrando su tutti i possibili valori di Y. Notiamo che se fissiamo $X = w \in [0, 1]$, allora $Y =\in [0, 1 - w]$. Dunque denotando con $f_X(w)$ la PDF di X si ha

$$f_X(w) = \int_0^{1-w} f_{X,Y}(w, z)\, dz = \int_0^{1-w} 2\, dz = 2(1 - w) .$$

Dunque

$$f_X(w) = \begin{cases} 2(1 - w), & \text{se } w \in [0, 1], \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Notiamo che per la simmetria del problema X ed Y avranno stessa PDF.



La PDF condizionata di X data Y è data da

$$f_{X\,|\,Y}(w\,|\,z) := \frac{f_{X,Y}(w,z)}{f_Y(z)} = \begin{cases} \frac{2}{2(1-z)} = \frac{1}{1-z}, & \text{se } (w,z) \in \mathcal{T}, \\ 0, & \text{se } (w,z) \notin \mathcal{T}. \end{cases}$$

Notare che essendo z fissata quando si condiziona all'evento $Y = z$, si ha che, condizionato al valore di Y in $[0,1]$, X ha distribuzione $\mathrm{Unif}([0, 1-Y])$ (in quanto X ha densità costante pari a $\frac{1}{1-Y}$ se $X \in [0, 1-Y]$).