Anno Accademico 2018-2019 11 luglio 2019

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Prova di esame di

Ricerca Operativa (6 cfu)

Cognome: Nome: matricola:

Quesito Teoria	Esercizio 1	Esercizio 2	Punteggio Totale

Parte 1 – *Quesiti teorici*

1) (Punti 10)
Enunciare e dimostare il teorema che fornisce una caratterizzazione algebrica dei vertici di un poliedro *in forma standard.*

Parte 2 – *Esercizi*

1) (Punti 10)
Un'industria chimica produce due solventi (S1, S2) miscelando quattro prodotti base (B1, B2, B3, B4) che vengono acquistati all'esterno. La tabella che segue riporta le caratteristiche di questi prodotti base: il livello di acidità, il costo di acquisto (in Euro al litro) e la massima disponibilità giornaliera (in litri).

	B1	B2	B3	B4
acidità	2	6	1	4
costi	10	9.5	12	10.5
disponibilità massima	100	200	250	180

Il prezzo di vendita dei solventi S1 e S2 è rispettivamente di Euro 25 ed Euro 20 al litro ed inoltre è noto che il mercato richiede giornalmente almeno 125 litri del solvente S1 e almeno 110 litri del solvente S2. Nel processo di miscelazione dei prodotti base non c'è alcuna perdita di masse e si suppone che l'acidità dei solventi dipende linearmente dall'acidità dei componenti. Si vuole che il solvente S1 abbia un livello di acidità compreso tra 3 e 5, mentre il livello di acidità del solvente S2 non deve superare 4. Costruire un modello lineare che permetta di pianificare la produzione giornaliera di questa industria determinando le quantità di solventi che si devono produrre e la loro composizione in modo da massimizzare il profitto netto complessivo (ricavo – costo) tenendo conto che la produzione del solvente S1 deve essere pari ad almeno il 20% della produzione totale. Si tenga inoltre conto del fatto che, per ragioni tecniche, nella produzione del solvente S1 se è utilizzato il prodotto di base B4, allora non può essere utilizzato il prodotto di base B2.

2) (Punti 12)
Usando il metodo del simplesso risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare

$$
\begin{aligned}
&\min 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 \\
&2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 10 \\
&-x_1 - 10x_2 + x_3 + x_4 = -9 \\
&x \geq 0.
\end{aligned}
$$

1) (Punti 10)
Un'industria chimica produce due solventi (S1, S2) miscelando quattro prodotti base (B1, B2, B3, B4) che vengono acquistati all'esterno. La tabella che segue riporta le caratteristiche di questi prodotti base: il livello di acidità, il costo di acquisto (in Euro al litro) e la massima disponibilità giornaliera (in litri).

	B1	B2	B3	B4
acidità	2	6	1	4
costi	10	9.5	12	10.5
disponibilità massima	100	200	250	180

Il prezzo di vendita dei solventi S1 e S2 è rispettivamente di Euro 25 ed Euro 20 al litro ed inoltre è noto che il mercato richiede giornalmente almeno 125 litri del solvente S1 e almeno 110 litri del solvente S2. Nel processo di miscelazione dei prodotti base non c'è alcuna perdita di masse e si suppone che l'acidità dei solventi dipende linearmente dall'acidità dei componenti. Si vuole che il solvente S1 abbia un livello di acidità compreso tra 3 e 5, mentre il livello di acidità del solvente S2 non deve superare 4. Costruire un modello lineare che permetta di pianificare la produzione giornaliera di questa industria determinando le quantità di solventi che si devono produrre e la loro composizione in modo da massimizzare il profitto netto complessivo (ricavo – costo) tenendo conto che la produzione del solvente S1 deve essere pari ad almeno il 20% della produzione totale. Si tenga inoltre conto del fatto che, per ragioni tecniche, nella produzione del solvente S1 se è utilizzato il prodotto di base B4, allora non può essere utilizzato il prodotto di base B2.

x_{ij} = quantità di B_i utilizzato per S_j, $i=1,\dots,4$, $j=1,2$

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{se in } S_1 \text{ e' utilizzato } B_4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{41} \geq \;\Rightarrow \delta = 1 \Rightarrow x_{21} = 0 \\ x_{21} \geq 0 \Rightarrow \delta = 0 \Rightarrow x_{41} = 0 \end{array}$$

Preso $M \gg x_{41}, x_{21} \Rightarrow \begin{cases} x_{41} \leq M\delta \\ x_{21} \leq M(1-\delta) \end{cases}$

Funzione obiettivo:

$$\max \left[25(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}) + 20(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}) - 10(x_{11}+x_{12}) + 9.5(x_{21}+x_{22}) + 12(x_{31}+x_{32}) + 10.5(x_{41}+x_{42}) \right]$$

Vincoli:

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} \geq 125$

$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} \geq 110$

$2x_{11}+6x_{21}+x_{31}+x_{41} \leq 5$

$2x_{11}+6x_{21}+x_{31}+x_{41} \geq 3$

$2x_{12}+6x_{22}+x_{32}+x_{42} \leq 4$

$x_{11}+x_{12} \leq 100$

$x_{21}+x_{22} \leq 200$

$x_{31}+x_{32} \leq 250$

$x_{41}+x_{42} \leq 180$

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} \geq 0{,}2 \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2} x_{ij}$

$x_{41} \leq M\delta$

$x_{21} \leq M(\delta-1)$

$x_{ij} \geq 0 \quad i=1,\dots,4,\ j=1,2$

$\delta \in \{0,1\}$

2) (Punti 12)
Usando il metodo del simplesso risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{aligned}&\min 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4\\ &2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 10\\ &-x_1 - 10x_2 + x_3 + x_4 = -9\\ &x \geq 0.\end{aligned}$$

$$\min 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_5 = 10 \\ x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4 = 9 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 10 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_i \geq 0$$

Fase 1:

$$\min \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_5 + \alpha_1 = 10 \\ x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4 + \alpha_2 = 9 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_i \geq 0 \quad \alpha_i \geq 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}N = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 10 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_B^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \end{array} \qquad C_N^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \end{array}$$

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 9 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -9 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$h = 1 \quad \pi_h = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{p} = \min\{5, 9\} = 5 \quad k = 1$ Esce α_1 entra x_1.

$$\rightarrow \left[\begin{array}{c|ccccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 & 0 & -1 & 10 \\ 1 & 0 & 10 & -1 & -1 & 0 & 9 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{c|ccccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 2 & 0 & -1/2 & 5 \\ 0 & -1/2 & 21/2 & -3 & -1 & 1/2 & 4 \end{array}\right]$$

$$c^T_B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \;\; x_1 \;\; \alpha_2 \end{array} \qquad c^T_N = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \;\; \alpha_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4 \;\; x_5 \end{array}$$

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/2 & 21/2 & -3 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3/2 & -21/2 & 3 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$h = 2 \quad \pi_h = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 21/2 \end{bmatrix} \quad \bar{\rho} = \min\{\cdot, 8/21\} \quad k = 2$ Esce α_2 entra x_2

$$\rightarrow \left[\begin{array}{c|ccccc|c} -1/2 & 1/2 & 0 & 2 & 0 & -1/2 & 5 \\ 21/2 & -1/2 & 1 & -3 & -1 & 1/2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|ccccc|c} 0 & 10/21 & 1/21 & 13/7 & -1/42 & -11/21 & 101/21 \\ 1 & -1/21 & 2/21 & -6/21 & -1/21 & 1/21 & 8/21 \end{array}\right]$$

$$c^T_B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \;\; x_1 \;\; x_2 \end{array} \qquad c^T_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\gamma^T \geq 0$ La sol attuale e' ottima

$$\min\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13/7 & -1/42 & -11/21 \\ -6/21 & -1/21 & 1/21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 101/21 \\ 8/21 \end{bmatrix}$$

$$c^T_B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \\ \;\; x_1 \;\; x_2 \end{array} \qquad c^T_N = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \;\; x_3 \;\; x_4 \;\; x_5 \end{array}$$

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{20}{7} & \frac{-4}{21} & \frac{-19}{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6/7 & -17/21 & 19/21 \end{bmatrix}$$

$h = 1 \quad \pi_h = \begin{bmatrix} 13/7 \\ -6/21 \end{bmatrix} \quad \bar{\rho} = \min\left\{\frac{101}{39}, \cdot\right\} \quad k = 1$ Esce x_1 entra x_3

$$\rightarrow \left[\begin{array}{c|ccc|c} 13/7 & 1 & -1/42 & -11/21 & 101/21 \\ -6/21 & 0 & -1/21 & 1/21 & 8/21 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 7/13 & -1/78 & -11/39 & 101/39 \\ 0 & 2/13 & -2/39 & -3/91 & 102/91 \end{array}\right]$$

BOH