Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Prova di esame di *Ricerca Operativa*

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU devono risolvere gli esercizi 1) e 2). Tempo a disposizione 60 minuti.

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 9 CFU devono risolvere gli esercizi 1), 2) e 3). Tempo a disposizione 90 minuti.

Esercizio 1

Un'industria produce coloranti sintetici ed ha una gestione mensile della produzione. La pianificazione della produzione di questa industria è suddivisa in settimane; in particolare, ogni settimana deve essere soddisfatto esattamente un ordine pari a 180000 litri nella prima settimana, 120000 litri nella seconda, 170000 litri nella terza e 132000 nella quarta. La gestione di questa industria avviene nel seguente modo: all'inizio del mese il deposito utilizzato per contenere il colorante è vuoto e viene lavato (quindi alla fine del mese non ci può essere colorante immagazzinato). Per ciascuna delle settimane successive, l'industria deve decidere se attivare la produzione e in caso affermativo deve determinare la quantità di colorante da produrre in quella settimana; inoltre, tranne che nell'ultima settimana, c'è la possibilità di immagazzinare colorante invenduto in una settimana per venderlo nella settimana successiva. Naturalmente l'attivazione della produzione durante una settimana comporta un costo di attivazione (indipendente dalla quantità di colorante prodotto e diverso in ciascuna settimana), e anche l'immagazzinamento comporta un costo unitario (differente in ciascuna settimana). Questi dati sono riportati nella tabella che segue insieme ai costi unitari di produzione:

	1^a settimana	2^a sett.	3^a sett.	4^a sett.
costi di attivazione (in Euro)	500	400	470	425
costi di immagazzinamento (in Euro al litro)	0.75	0.90	0.55	—
costi di produzione (in Euro al litro)	1.5	1.3	1.6	1.7

Costruire un modello lineare che permetta di pianificare la produzione di questa industria, ovvero di determinare in quali settimane attivare la produzione, quanto produrre ogni settimana in cui si è attivata la produzione e le quantità di colorante eventualmente da immagazzinare in modo da soddisfare le richieste, minimizzando il costo complessivo e sapendo che la produzione non può essere attivata mai per due settimane di seguito (ovvero la prima e la seconda settimana, la seconda e la terza, la terza e la quarta).

Esercizio 2

Utilizzando il metodo del simplesso in due fasi, risolvere il seguente problema di PL

$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 + 3x_2 \\
& -7x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\
& x_1 + 3x_2 \leq 24 \\
& x_2 + x_4 = 8 \\
& x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

Esercizio 3

Risolvere con il metodo Branch & Bound il seguente problema di PLI

$$
\begin{aligned}
\max\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 12x_4 + 15x_5 \\
& x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 \leq 4 \\
& x_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Esercizio 1

Un'industria produce coloranti sintetici ed ha una gestione mensile della produzione. La pianificazione della produzione di questa industria è suddivisa in settimane; in particolare, ogni settimana deve essere soddisfatto esattamente un ordine pari a 180000 litri nella prima settimana, 120000 litri nella seconda, 170000 litri nella terza e 132000 nella quarta. La gestione di questa industria avviene nel seguente modo: all'inizio del mese il deposito utilizzato per contenere il colorante è vuoto e viene lavato (quindi alla fine del mese non ci può essere colorante immagazzinato). Per ciascuna delle settimane successive, l'industria deve decidere se attivare la produzione e in caso affermativo deve determinare la quantità di colorante da produrre in quella settimana; inoltre, tranne che nell'ultima settimana, c'è la possibilità di immagazzinare colorante invenduto in una settimana per venderlo nella settimana successiva. Naturalmente l'attivazione della produzione durante una settimana comporta un costo di attivazione (indipendente dalla quantità di colorante prodotto e diverso in ciascuna settimana), e anche l'immagazzinamento comporta un costo unitario (differente in ciascuna settimana). Questi dati sono riportati nella tabella che segue insieme ai costi unitari di produzione:

	1^a settimana	2^a sett.	3^a sett.	4^a sett.
costi di attivazione (in Euro)	500	400	470	425
costi di immagazzinamento (in Euro al litro)	0.75	0.90	0.55	—
costi di produzione (in Euro al litro)	1.5	1.3	1.6	1.7

Costruire un modello lineare che permetta di pianificare la produzione di questa industria, ovvero di determinare in quali settimane attivare la produzione, quanto produrre ogni settimana in cui si è attivata la produzione e le quantità di colorante eventualmente da immagazzinare in modo da soddisfare le richieste, minimizzando il costo complessivo e sapendo che la produzione non può essere attivata mai per due settimane di seguito (ovvero la prima e la seconda settimana, la seconda e la terza, la terza e la quarta).

x_i = quantità colorante prodotta la settimana i, $i = 1, \dots, 4$

x_j^{IM} = quantità colorante immagazzinata la settimana j, $j = 1, \dots, 3$

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{produzione attivata la settimana } k \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad , k = 1, \dots, 4$$

$$\begin{cases} x_k \geq 0 \Rightarrow \delta_k = 1 \Rightarrow x_{k+1} = 0 \\ x_k = 0 \Rightarrow \delta_k = 0 \Rightarrow x_{k+1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_k \leq M \delta_k \\ x_{k+1} \leq M(\delta_k - 1) \end{cases} \text{ con } M >> x_k.$$

funzione obiettivo:

$$\min \Big[500\delta_1 + 400\delta_2 + 470\delta_3 + 480\delta_4 + 0{,}75\, x_1^{IM} + 0{,}90\, x_2^{IM} + 0{,}55\, x_3^{IM} + 1{,}5\, x_1 + 1{,}3\, x_2 + 1{,}6\, x_3 + 1{,}7\, x_4 \Big]$$

vincoli:

$x_1 = 180.000 + x_1^{IM}$	$x_1 \leq M\delta_1$	$x_2 \leq M(\delta_1 - 1)$	$\delta_1 + \delta_2 \leq 1$
$x_2 + x_1^{IM} = 120.000 + x_2^{IM}$	$x_2 \leq M\delta_2$	$x_3 \leq M(\delta_2 - 1)$	$\delta_2 + \delta_3 \leq 1$
$x_3 + x_2^{IM} = 170.000 + x_3^{IM}$	$x_3 \leq M\delta_3$	$x_4 \leq M(\delta_3 - 1)$	$\delta_3 + \delta_4 \leq 1$
$x_4 + x_3^{IM} = 132.000$			$\delta_4 \leq 1$

$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4 \qquad x_j^{IM} \geq 0 \quad j = 1, \dots, 3 \qquad \delta_k = \{0, 1\}, \; k = 1, \dots, 3$

Esercizio 2

Utilizzando il metodo del simplesso in due fasi, risolvere il seguente problema di PL

$$\begin{aligned}\max\ & x_1 + 3x_2\\ & -7x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\\ & x_1 + 3x_2 \le 24\\ & x_2 + x_4 = 8\\ & x_i \ge 0\end{aligned}$$

min $-x_1 - 3x_2$

$$\begin{cases} -7x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 24 \\ x_2 + x_4 = 8 \\ x_i = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -7 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fase I

min α_1

$$\begin{cases} -7x_1 + 3x_2 - x_3 + \alpha_1 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 24 \\ x_2 + x_4 = 8 \\ x_i \ge 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -7 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -7 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c_B^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_4 & x_5 & \alpha_1 \end{matrix} \end{array} \qquad c_N^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \end{array}$$

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h = 2 \qquad \pi_h = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \bar{\rho} = \min\{8, 8, 0\} = 0, \quad k = 3.$$

Esce α_1, entra x_2.

$$\rightarrow \left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 24 \\ 3 & -7 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 7/3 & -1/3 & 1/3 & 8 \\ 0 & 8 & -1 & 1 & 24 \\ 1 & -7/3 & 1/3 & -1/3 & 0 \end{array}\right]$$

$$c_B^T = \begin{array}{ccc} [\,0 & 0 & 0\,] \\ x_4 & x_5 & x_2 \end{array} \qquad c_N^T = \begin{array}{ccc} [\,0 & 1 & 0\,] \\ x_1 & x_1 & x_3 \end{array}$$

$$\gamma^T = [0 \quad 1 \quad 0]$$

La SBA attuale e' ottima.

$$\min -x_1 - 3x_2$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/3 & 1/3 \\ 8 & 1 \\ -7/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$c_B^T = \begin{array}{ccc} [\,0 & 0 & -3\,] \\ x_4 & x_5 & x_2 \end{array} \qquad c_N^T = \begin{array}{cc} [\,-1 & 0\,] \\ x_1 & x_3 \end{array}$$

$$\gamma^T = [-1 \quad 0] - [7 \quad 1] = [-8 \quad -1]$$

$$h = 1 \qquad \bar{u}_h = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 8 \\ -7/3 \end{bmatrix} \qquad \bar{\rho} = \min\left\{ \underset{3,5}{\frac{24}{7}}, 3, \cdot \right\} = 3 \rightarrow k = 2$$

Esce x_5, entra x_1.

$$\rightarrow \left[\begin{array}{c|cc|c} 7/3 & 0 & 1/3 & 8 \\ 8 & 1 & 1 & 24 \\ -7/3 & 0 & -1/3 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{c|cc|c} 1 & -7/24 & 1/24 & 1 \\ 1 & 1/8 & 1/8 & 3 \\ 0 & 7/24 & -1/24 & 7 \end{array}\right]$$

$$c_B^T = \begin{array}{ccc} [\,0 & -1 & -3\,] \\ x_4 & x_1 & x_2 \end{array} \qquad c_N^T = \begin{array}{cc} [\,0 & 0\,] \\ x_5 & x_3 \end{array}$$

$$\gamma^T = [0 \quad 0] - [-1 \quad 0] = [1 \quad 0]$$

La SBA attuale e' ottima: $\bar{x} = \begin{array}{ccccc} [\,3 & 7 & 0 & 1 & 0\,] \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$

$$\min \; -x_1 - 3x_2$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 24 \\ x_2 + x_4 = 8 \\ x_i = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 24 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}N = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c^T_B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \end{array} \qquad c^T_N = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \end{array}$$

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$h = 1 \qquad \pi_h = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{\rho} = \min\{0, \cdot, 24\} = 0 \;, \; k = 1$$

Esce x_3, entra x_1.

$$\to \left[\begin{array}{c|cc|c} 7 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 24 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|cc|c} 1 & 1/7 & -3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & -1/7 & 24/7 & 24 \end{array}\right]$$

$$c^T_B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_4 & x_5 \end{array} \end{array} \qquad c^T_N = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & -3 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} x_3 & x_2 \end{array} \end{array}$$

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/7 & 3/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 & -\frac{24}{7} \end{bmatrix}$$

$$h = 2 \qquad \pi_h = \begin{bmatrix} -3/7 \\ 1 \\ 24/7 \end{bmatrix} \qquad \bar{\rho} = \min\{\cdot, 8, 7\} = 7 \qquad k = 3$$

Entra x_2, esce x_5

$$\rightarrow \left[\begin{array}{c|cc|c} -3/7 & 1/7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 8 \\ 24/7 & -1/7 & 1 & 24 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|cc|c} 0 & 1/8 & 1/8 & 3 \\ 0 & 1/24 & -7/24 & 1 \\ 1 & -1/24 & 7/24 & 9 \end{array}\right]$$

$$c_B^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_4 & x_2 \end{array} \end{array} \qquad c_N^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} x_3 & x_5 \end{array} \end{array}$$

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La SBA ottenuta e' ottima: $\bar{x} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \end{array}$