Testo della domanda 1Da un'urna che contiene 6 palline numerate da 1 a 6 si estraggono una alla volta le palline fino a svuotare l'urna. Se alla i-esima estrazione esce la pallina con il numero R(i) si ottiene un punteggio i R(i), per i da 1 a 6. Qual è il valore atteso del punteggio totale sulle 6 estrazioni? Scegli un'alternativa:

- a. 105/2
- b. 49/4
- c. 147/2
- d. 42

La variabile aleatoria T punteggio totale è la somma delle variabili aleatorie ixR(i) al variare di i da 1 a 6. Per linearità il valore atteso di T è la somma di ixE(R(i)), per i da 1 a 6.

Ma E(R(i)) non dipende da i, per la simmetria del modello rispetto a permutazioni delle prove, quindi E(T) è E(R(1))x21, dove il secondo fattore è la somma dei primi 6 numeri interi. Ma, dato che R(1) è uniforme sui primi 6 numeri, la sua media è proprio 21/6=7/2. Moltiplicando per 21, si ottiene il risultato finale.

Testo della domanda 2 Sapendo che la media dei voti degli studenti che superano l'esame di CpS è 24.3 con deviazione standard 2.7, usando l'approssimazione normale con correzione di continuità, con che probabilità il voto medio di un appello con 16 studenti che hanno superato l'esame è non superiore a 22? Scegli un'alternativa:

- a. Tra il 5 per cento e il 10 per cento
- b. Inferiore al 5 per mille
- c. Tra il 5 per mille e l'1 per cento
- d. Tra l'1 per cento e il 5 per cento

La correzione di continuità al teorema del limite centrale si applica a somme di variabili aleatorie i.i.d. a valori interi. Questo richiede di riformulare il problema in termini della somma dei voti dei 16 studenti, una variabile aleatoria di media 24.3x16=388,8 e deviazione standard 2.7x4=10,8. Il voto medio di 16 studenti non supera 22 se e solo se la somma dei voti non supera 22x16=352. L'approssimazione normale con correzione di continuità dunque approssima la probabilità richiesta con il valore della funzione di distribuzione normale standard calcolata in (352,5-388,8)/10,8=--3.36. Dato che l'ultimo valore riportato sulle tavole che vi ho mandato è 3.09, in corrispondenza del quale la funzione di distribuzione vale 1-10^(-4), la probabilità richiesta è minore di 10^(-4) e quindi sicuramente minore di 5x10^(-3). In ogni caso, se non si usa la correzione di continuità viene (352-388.8)/10.8=--3,41=4(22-24,3)/2,7 (in quest'ultimo caso lavorando direttamente sulla media campionaria) e le conclusioni sono evidentemente le stesse.

Testo della domanda 3 Si consideri la funzione f(x)=sen(x), per x nell'intervallo (0,pi greco), e nulla altrove. Qual è la costante c che moltiplicata per f la fa diventare una densità? Scegli un'alternativa:

- a. Nessun valore di c reale va bene.
- b. 1/(pi greco)

c. 1/2

d. 2

La funzione f(x) è positiva nell'intervallo considerato, e continua nella sua chiusura. Quindi è ivi integrabile, e il suo integrale definito si ottiene mediante il teorema fondamentale del calcolo infinitesimale come variazione di una primitiva (es. -cos(x)) nell'intervallo (0, pi greco), che è 2. Per ottenere una densità c deve essere uguale al reciproco di questo integrale definito.

Testo della domanda 4 Si consideri la densità g(x)=(1/2)exp(-|x|) per x appartenente all'intero asse reale. Qual è la sua varianza? Scegli un'alternativa:

a. 3

b. 2

c. 4

d. 14

La densità g è pari, quindi la media è nulla (previa verifica che x g(x) è ha un integrale improprio convergente su tutto l'asse reale positivo. La varianza è quindi la media del quadrato, che s vede facilmente coincide con la media del quadrato di una variabile con densità exp(-|x|), cioè esponenziale di media 1. Dato che questa variabile ha la varianza uguale alla media, la media del quadrato è uguale a 1+1=2.

Testo della domanda 5 In quanti modi distinti si possono permutare le lettere della parola IMMUNI? Scegli un'alternativa:

a. 180

b. 360

c. 90

d. 720

Ogni permutazione distinta della parola dà luogo a 2x2 permutazioni che lasciano la parola identica, trasponendo in tutti i modi possibili le due M e le due I. Dato che le permutazioni di una parola di 6 lettere (distinte o non a seconda di quali sono tali lettere) sono 6!=720, il risultato si ottiene dividendo questo numero per 4.

Testo della domanda 6 In un casello autostradale ci sono due varchi d'uscita con tagliando e una con Telepass. Ad ogni varco il numero di passaggi è un processo di Poisson indipendente dagli altri. Il numero medio di passaggi in un minuto è uguale a ln(5) per ciascuna delle 2 uscite con tagliando e a ln(4) per l'uscita con Telepass: qual è la probabilità che in mezzo minuto passi almeno un auto? Scegli un'alternativa:

a. 19/20

b. ln(10)/10

c. 99/100

d. 9/10

Dato che i passaggi in ciascun casello seguono un processo di Poisson, il numero di passaggi in mezzo minuto segue ancora una legge di Poisson in cui la media è dimezzata. Quindi la probabilità che nei tre caselli passi almeno un auto è il complemento a 1 della probabilità che non ne passi nessuna in tutti e tre caselli. Per l'indipendenza questa probabilità è l'esponenziale negativo di ln(5)+ln(4)/2=ln(10), e cioè 1/10.

Testo della domanda 7 Se P(A)=P(B)=P(C)=k, P(A e C)=P(B e C)=P(A e B)=k/2, P(A e B e C)=k/4 e P(A o B o C)=1/2, quanto vale k? Scegli un'alternativa:

- a. 3/8
- b. 2/7
- c. 2/19
- d. 1

Per il principio di inclusione-esclusione ½=3k-3k/2+k/4, e quindi 7k/2=1, da cui la soluzione.

Testo della domanda 8 In un sacchetto ci sono delle monete che sono bilanciate in proporzione p e hanno testa su entrambe le facce in proporzione 1-p. Si estrae una moneta, la si lancia ed esce la faccia testa. Quanto deve valere p affinché la probabilità (condizionata all'osservazione di questo evento) che la moneta lanciata sia bilanciata sia uguale a 1/2? Scegli un'alternativa:

- a. 3/4
- b. 2/3
- c. 1/3
- d. 1/2

Per rispondere alla domanda basta considerare le odds dell'evento che sia stata lanciata una moneta bilanciata (contro il suo complementare) a posteriori, cioè condizionate all'evento che il lancio ha dato testa. Per la formula di Bayes queste sono le odds a priori, p/(1-p) moltiplicate per il rapporto tra le probabilità che esca testa d una moneta bilanciata (1/2) e da una moneta "truccata" (1). Quindi per ottenere il valore 1 corrispondente alla equiprobabilità deve essere p/2(1-p)=1, che risolta dà la soluzione.

Testo della domanda 9 Nel gioco del domino ci sono 28 tessere che hanno il dorso diviso in due sezioni quadrate (tra loro indistinguibili), che presentano un numero di puntini bianchi variabile da 0 a 6, in tutti i modi possibili. Qual è la probabilità che due tessere scelte a caso si possano attaccare (cioè abbiano almeno una sezione quadrata ciascuna con indicato uno stesso numero di punti)? Scegli un'alternativa:

- a. 7/18
- b. 3/14
- c. 1/4
- d. 2/9

Conviene applicare la formula delle probabilità totali rispetto alla partizione negli eventi A=il primo pezzo porta lo stesso numero sui due lati e A^c=il primo pezzo porta due numeri distinti su ciascuno dei lati. Se B è l'evento di interesse P(B!A)=6/27 e P(B|A^c)=12/27. Dato che P(A)=7/28 e P(A^c)=21/28, si ottiene che P(B)=(7/28)(6/27)+(21/28)(12/27)=7/18.

Testo della domanda 10 Si lanciano simultaneamente due dadi. Che si può dire sul valore atteso del prodotto del punteggio più alto per il punteggio più basso tra i due lanci? Scegli un'alternativa:

- a. Appartenente a (13,14]
- b. Appartenente a (11,12]
- c. Appartenente a (10,11]
- d. Appartenente a (12,13]

Dado che i dadi sono due, il prodotto del punteggio più alto per quello più basso è semplicemente il prodotto del punteggio del primo e del secondo dado. Dato che questi sono indipendenti, e ciascuno distribuito uniformemente tra 1 e 6, con media 7/2, La media del prodotto è 49/4, che è compreso tra 48/4=12 e 52/4=13.