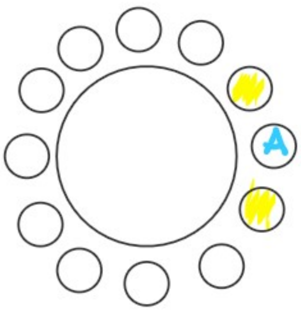
03 Esercizi seconda settimana

Esercizio 5

12 persone, tra cui Andrea e Bruno, si siedono ad un tavolo circolare, completamente a caso. Con che probabilità Andrea e Bruno saranno vicini?

$E =$ "A e B sono vicini"



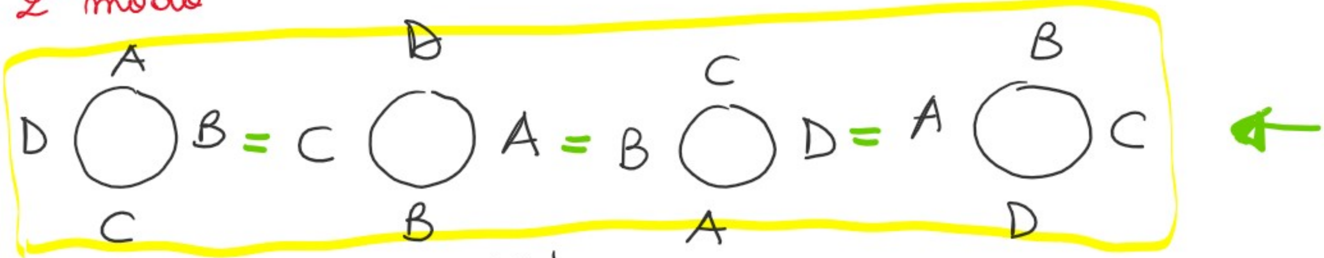
1° modo

$\#$ casi possibili $= 11$

$\#$ casi favorevoli $= 2$

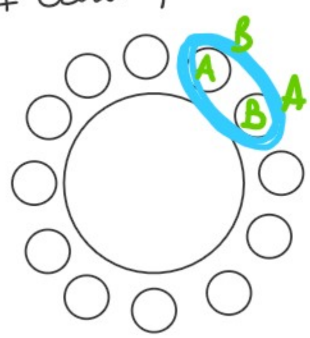
$$\Rightarrow \mathbb{P}(E) = \frac{2}{11}$$

2° modo



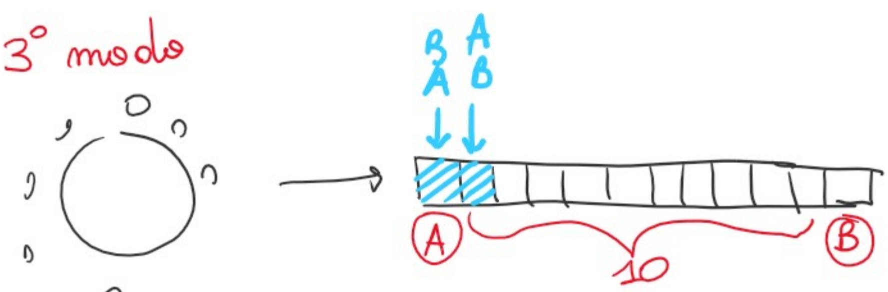
$$\# \text{ casi possibili} = \frac{12!}{12} = 11!$$

$$\# \text{ casi favorevoli} = \frac{11!}{11} \cdot 2 = 10! \cdot 2$$



$$\Rightarrow \mathbb{P}(E) = \frac{10! \cdot 2}{11!} = \frac{2}{11}$$

3° modo

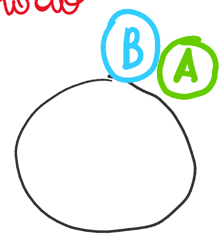


$$\# \text{ casi possibili} = 12!$$

$$\# \text{ casi favorevoli} = 11! \cdot 2 + 2 \cdot 10!$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(E) = \frac{11! \cdot 2 + 2 \cdot 10!}{12!} = \frac{2 \cdot 10!\,(11+1)}{12!} = \frac{2 \cdot \cancel{12}}{11 \cdot \cancel{12}} = \frac{2}{11}$$

4° modo



$\#$ casi possibili $= 11!$

$\#$ casi favorevoli $= 10! + 10!$

$$\mathbb{P}(E) = \frac{2 \cdot 10!}{11!} = \frac{2}{11}$$

Esercizio 6

Con quale probabilità una mano di 13 carte scelte tra 52 contiene almeno 3 carte di ciascun seme?

$\#$ casi possibili $= \binom{52}{13}$

$\#$ casi favorevoli $= 4 \cdot \binom{13}{4} \cdot \binom{13}{3}^3$

4C 3Q 3F 3P

3C 4F 3Q 3P

$$\binom{13}{4} \cdot \binom{13}{3}^3$$

$E =$ ci sono almeno 3 carte di ciascun seme

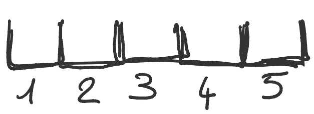
$$\mathbb{P}(E) = \frac{4 \cdot \binom{13}{4} \cdot \binom{13}{3}^3}{\binom{52}{13}} \simeq 0.105$$

Esercizio 7

Se si mettono a caso 5 monete in 5 scatole, con che probabilità rimarrà vuota soltanto una scatola?

Se al posto di 5 si mette un intero n qualsiasi?

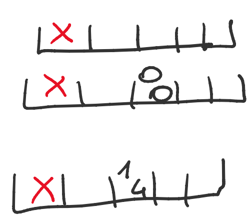
1 2 3 4 5 $\longrightarrow 5^5$ 1 1 4 3 5



$\#$ casi possibili $= 5^5$ (n^n)

$\#$ casi favorevoli $= n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)! =$

- quale scatola rimane vuota 5 n
- quale scatola ha 2 monete $5-1=4$ $n-1$
- quali monete vanno insieme $\binom{5}{2}$ $\binom{n}{2}$



• quali monete vanno insieme $\binom{5}{2}$ $\qquad \binom{n}{2}$ $\quad$ | X | | ^{1}4 | |

• permuto le monete rimaste $3!$ $\qquad (n-2)!$ $\quad$ | X | 3 | ^{1}4 | 2 | 5 |

2, 3, 5

3 2 5

$$= n(n-1)\,\frac{n!}{2\cdot\cancel{(n-2)!}}\,\cancel{(n-2)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}\cdot n! = \binom{n}{2}\, n!$$

Esercizio 8

Andrea e Bruno giocano a scacchi 7 partite. Ogni partita ha come possibili risultati la vittoria di Andrea (che in tal caso vince il punto in palio), la vittoria di Bruno (idem) o il pareggio (nel qual caso entrambi conquistano mezzo punto).

a) Quante scelte ci sono sapendo che Andrea ne ha vinte 3, Bruno ne ha vinte 2 e 2 sono finite in pareggio?

b) Quante scelte in cui Andrea finisce con 4 punti e Bruno con 3?

c) Quante scelte se Andrea raggiunge 4 punti alla settima partita?

a) $\underbrace{AAA\,BB\,PP}_{\text{anagrammi}}$ $\qquad \binom{7}{3\ 2\ 2}$

$$\#\,\text{possibilità} = \binom{7}{3\ \ 2} = \frac{7!}{3!\,2!\,(7-3-2)!} = 210$$

b) Andrea 4 punti
Bruno 3 punti

AAAA BBB $\to \dfrac{7!}{4!\,3!} = 35$

AAA PP BB $\to 210$

AA PP PP B $\to \dfrac{7!}{2!\,4!\,1!} = 105$

A PP PP PP $\to 7$

$$\#\,\text{possibilità} = 35 + 210 + 105 + 7 = 357$$

c) $\cancel{AAAA}\,BBB$

AAAPPB $\boxed{B}$ $\qquad$ AAAPPB $\boxed{B}$ $\qquad$ AAPPPP $\boxed{B}$

c) $AAA\cancel{A}\,\cancel{BBB}$

$\underbrace{AAAABB}_{\frac{6!}{4!\,2!} = 15}\boxed{B}$ $\qquad$ $\underbrace{AAAPPB}_{\frac{6!}{3!\,2!\,1!} = 60}\boxed{B}$ $\qquad$ $\underbrace{AAPPPP}_{\frac{6!}{2!\,4!} = 15}\boxed{B}$

$\#$ possibilità $= 357 - (15 + 60 + 15) = 267$

Esercizio 9

Ad una riunione si incontrano 10 studenti del terzo anno, 15 del secondo e 12 del primo. Si devono scegliere a caso 5 studenti che si devono presentare alle elezioni studentesche.

a) Con che probabilità verranno scelti esattamente 3 studenti del secondo anno?

b) Con che probabilità ci sarà almeno uno studente per ciascun anno di corso?

10 T
15 S $\rightarrow$ 37 studenti
12 P

a) $\#$ casi possibili $= \binom{37}{5}$

$\#$ casi favorevoli $= \binom{15}{3} \cdot \binom{22}{2}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(E) = \dfrac{\binom{15}{3} \cdot \binom{22}{2}}{\binom{37}{5}} \simeq 0.24$

b) $F =$ c'è almeno uno studente per ciascun anno

$F^c =$ c'è un anno di corso dal quale non proviene nessuno stud.

$A_i =$ nessuno studente dell'anno i $\qquad i = 1, 2, 3$

$\mathbb{P}(F^c) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$

$= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$$\mathbb{P}(F^c) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$$

$$= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \underbrace{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}_{= 0}$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{\binom{25}{5}}{\binom{37}{5}} \qquad \mathbb{P}(A_2) = \frac{\binom{22}{5}}{\binom{37}{5}} \qquad \mathbb{P}(A_3) = \frac{\binom{27}{5}}{\binom{37}{5}}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{\binom{10}{5}}{\binom{37}{5}} \qquad \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{\binom{12}{5}}{\binom{37}{5}} \qquad \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \frac{\binom{15}{5}}{\binom{37}{5}}$$

$$\mathbb{P}(F) = 1 - \mathbb{P}(F^c) \simeq 0.64$$