

Esercizi proposti per il 7 e l'8 aprile

1. Consideriamo il seguente modello. Supponiamo di avere un alfabeto di n lettere, e di scrivere a caso una parola scegliendo k lettere a caso, con reimmissione delle lettere estratte. In alcuni punti occorre pensare che tali lettere siano ordinate da 1 a n . Si calcoli il valore atteso delle seguenti variabili aleatorie:

- a) Numero delle volte che compare la lettera numero 1;
- b) Numero delle lettere che non compaiono nella parola;
- c) Numero delle lettere che compaiono nella parola;
- d) Numero delle lettere che compaiono esattamente una volta nella parola;
- e) Numero di lettere che compaiono più di una volta nella parola;
- f) Numero delle volte in cui una lettera estratta è più grande delle lettere estratte precedentemente;
- g) Numero di coppie di estrazioni in cui è estratta la stessa lettera;
- h) Numero di r -ple di estrazioni in cui sono estratte le stesse lettere.

2. N oggetti numerati da 1 a N vengono estratti uno dopo l'altro, senza reimmissione. Sia A_i l' i -esimo estratto, $i = 1, 2, \dots, N$ (si tratta quindi di una permutazione aleatoria). Si calcoli il valore atteso delle seguenti variabili aleatorie:

- a) Numero delle volte che $A_j = j$;
- b) Numero di volte che $A_i > A_j$ per $i < j$;
- c) Numero di massimi locali ($i = 2, \dots, N-1$ è massimo locale se $A_{i-1} < A_i$ e $A_i > A_{i+1}$, $i = 2, \dots, N-1$, mentre 1 è massimo locale se $A_1 > A_2$ e N è massimo locale se $A_N > A_{N-1}$);
- d) Numero dei tratti monotoni massimali (un tratto è monotono di lunghezza $l-h$ quando $A_h < A_{h+1} < \dots < A_l$ oppure $A_h > A_{h+1} > \dots > A_l$ per qualche coppia $h < l$, ed è massimale quando non può essere esteso ad un tratto più lungo);
- e) Numero dei tratti monotoni di lunghezza l fissata;
- f) $\sum_{i=1}^N a_i A_i$, dove $a_i, i = 1, \dots, N$ è una qualunque N -pla di costanti reali;
- g) Numero delle trasposizioni (una trasposizione si ha quando, per qualche coppia b_1, b_2 si ha $A_{b_1} = b_2, A_{b_2} = b_1$);
- h) Numero di cicli di lunghezza l (un ciclo di lunghezza l si ha quando esistono $b_1, \dots, b_l \in \{1, \dots, N\}$ tali che $A_{b_j} = b_{j+1}$ per $j = 1, \dots, l$, dove $b_{l+1} = b_1$), una trasposizione è un ciclo di lunghezza $l = 2$;
- i) Numero di cicli di lunghezza qualunque.