Prova di Analisi Matematica II - 20 Settembre 2018
Ing. dell'informazione
Prof.ssa Virginia De Cicco

1)	2)	3)	4)	5)	VOTO:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Cognome	Nome

ESERCIZIO 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti. (**10 pt.**)

1) (I) Il valore del seguente integrale curvilineo in $\mathbb{C}$

$$\int_\gamma cosh\, z\, dz, \qquad \gamma(t) = log(3+t) - \pi i t^2, \quad t \in [0,1]$$

è

(a) $i\frac{77}{24}$
(b) $\frac{77}{24}$
(c) $-\frac{77}{24}$
(d) $-i\frac{77}{24}$.

$$\int_{\log 3}^{\log 4-\pi i} \cosh(z)\,dz = \sinh(z)\Big|_{\log 3}^{\log 4-\pi i} = \frac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right)\Big|_{\log 3}^{\log 4-\pi i} = \frac{1}{2}\left[e^{\log 4-\pi i} - e^{\pi i-\log 4} - \left(e^{\log 3} - e^{-\log 3}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{\log 4}\cdot e^{-\pi i} - e^{\pi i}\cdot e^{-\log 4} - e^{\log 3} + e^{-\log 3}\right] = \frac{1}{2}\left[4\cdot e^{-\pi i} - \frac{1}{4}e^{\pi i} - 3 + \frac{1}{3}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[4\cos(-\pi) + i\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\sin(-\pi)}} - \frac{1}{4}\cos(\pi) + i\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\sin(\pi)}} - \frac{8}{3}\right] = \frac{1}{2}\left[-4 + \frac{1}{4} - \frac{8}{3}\right] = -\frac{77}{24}$$

$$= -\frac{3i}{z-1} + \frac{1}{i(z-1)} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{3}{(z-i)}$$

$$= \left(-3i + \frac{1}{i}\right)\frac{1}{(z-1)} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{3}{(z-i)}$$

(II) Sia

$$f(z) = \frac{3i}{1-z} - \frac{1}{i-zi} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{3}{z-i},$$

allora il $Res(f,1)$ vale

(a) 3

(b) $3i$

(c) $-3i$

~~(d)~~ $-4i$.

(III) Il coefficiente a_0 dello sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = 3 - 6\sin(5x)\cos(7x)$ vale

(a) 1

(b) 4

(c) 6

~~(d)~~ $\frac{3}{2}$.

(IV) La successione di funzioni $f_n(x) = e^{-n(x+2)}$

(a) converge puntualmente $\forall x \in \mathbb{R}$

~~(b)~~ converge uniformemente per $x \in [-1, +\infty)$

(c) converge uniformemente per $x \geq -2$

(d) converge puntualmente per $x = -4$.

(V) L′equazione di Cauchy-Riemann in coordinate polari è

(a)
$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{i}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

(b)
$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

~~(c)~~
$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{1}{i\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

(d)
$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = -\frac{1}{i\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

ESERCIZIO 2.

(i) Si enunci il Lemma di Jordan.

(ii) Si calcoli il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(2x)}{x^2+3x+4}dx.$$

1) Sia g una funzione definita e continua in un settore angolare S contenuto nel semipiano $Im(z) \geq 0$:

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : 0 \leq \theta_1 \leq Arg(z) \leq \theta_2 \leq \pi \}$$

Supponiamo inoltre che $\lim\limits_{R \to +\infty} g(z) = 0$, allora

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} g(z) e^{iz} dz = 0$$

dove γ_R e' l'intersezione della circonferenza di raggio R e centro l'origine con il settore considerato.

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2+3x+4} dx = Im \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2iz}}{z^2+3z+4} dz \right] = 0$$

$$z^2+3z+4 = 0 \to z = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

Solo $\frac{-3+i\sqrt{7}}{2}$ si trova in $Im(z) \geq 0$

Per il lemma di Jordan:

$$\int \frac{e^{2iz}}{z^2+3z+4} dz = 2\pi i \, res(f, z_0) = 2\pi i \left. \frac{e^{2iz}}{2z+3} \right|_{z_0} = 2\pi i \frac{e^{-\sqrt{7}-3i}}{i\sqrt{7}} =$$

$$= 2\pi \frac{e^{-\sqrt{7}} \cdot e^{-3i}}{\sqrt{7}} = \frac{2\pi}{\sqrt{7}} e^{-\sqrt{7}} (\cos(-3) + i \sin(-3))$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{7}} e^{-\sqrt{7}} (\cos(-3) + i\sin(-3))\right) = -\frac{2\pi}{\sqrt{7}} e^{-\sqrt{7}} \sin(3)$$

ESERCIZIO 3.

(i) Si dia la definizione di serie di Taylor centrata in $z_o \in \mathbb{C}$ per una funzione $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

(ii) Data la funzione di variabile complessa

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$$f(z) = (z-1)^3 Log(2-z),$$

si calcoli la derivata $f^{(23)}(1)$ di ordine 23 nel punto $z = 1$.

$$f(z) = (z-1)^3 Log(2-z) = (z-1)^3 Log\left[1 + (-z+1)\right] = (z-1)^3 Log\left[1 + [-(z-1)]\right] =$$

$$= (z-1)^3 \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot (-1)^{n+1} (z-1)^{n+1} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{2n+1}}{n+1} (z-1)^{n+4}$$

$$n+4 = 23 \Rightarrow n = 19$$

$$f^{(23)}(1) = (23)! \cdot \frac{(-1)^{2\cdot 19+1}}{20} = \frac{(-1)^{39}}{20} \cdot (23)! = -\frac{(23)!}{20}$$

ESERCIZIO 4.

(i) Si espongano i vari metodi per calcolare i residui.

(ii) Data la funzione

$$f(z) = \frac{z}{sen\, z(e^z - 1)}$$

si classifichino le sue singolarità isolate.

(iii) Si calcolino i residui in tali singolarità .

2) $f(z) = \dfrac{z}{sin(z)(e^z-1)}$

$\lim_{z\to 0} \dfrac{z}{sin z} \cdot \dfrac{1}{e^z-1} = \lim_{z\to 0} \dfrac{1}{z} \cancel{\nexists} \Rightarrow$ singolarità essenziale in $z_0 = 0$

$\lim_{z\to 0} z \cdot \dfrac{z}{sin(z)(e^z-1)} = \dfrac{z}{z} = 1 \Rightarrow z_0 = 0$ polo semplice

$\lim_{z\to k\pi} (z-k\pi) \dfrac{z}{sin(z)(e^z-1)} = \dfrac{z^2 - zk\pi}{sin(z)(e^z-1)} = \dfrac{2z - k\pi}{cos(z)(e^z-1) + e^z sin z} =$

$= \dfrac{k\pi}{(-1)^k (e^{k\pi}-1)} \Rightarrow k\pi$ polo semplice ??

$\lim_{z\to 0} z \cdot \dfrac{z}{sin(z)(e^z-1)} = 1$

ESERCIZIO 5.

(i) Si enunci il Teorema integrale di Cauchy.

(ii) Si dimostri tale teorema.

(iii) Si calcoli

$$\int_\gamma \frac{z^3-1}{z-\pi} dz,$$

dove $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi[$.

1) Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso e sia $f: A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora per ogni γ circuito regolare a tratti, contenuto in A e tale che γ e' la frontiera di un aperto D interamente contenuto in A, si ha che:

$$\int_\gamma f(z)\, dA = 0$$

3) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^3-1}{z-\pi} dz$ $\quad \gamma = 2e^{it}$ $\quad t \in [0, 2\pi)$ circonferenza di centro 0 e raggio 2.

L'integrale e' nullo perchè non ci sono singolarità in D.