

## Esercizi settimana 5

1. Supponiamo di avere due monete, una delle quali è bilanciata, l'altra ha testa su entrambe le facce. Si sceglie a caso una moneta e la si lancia due volte, la seconda volta indipendentemente dalla prima. Chiamiamo  $X(0)$  l'indicatrice dell'evento che la moneta scelta sia bilanciata,  $X(1)$  e  $X(2)$  le indicatrici rispettivamente degli eventi primo lancio testa e secondo lancio testa. A) Calcolare la probabilità che  $X(0)=1$ , sapendo che  $X(1)=1$ . B) Calcolare la probabilità che  $X(2)=1$ , sapendo che  $X(1)=1$ . C) Dedurre che  $X(1)$  e  $X(2)$  non sono indipendenti, e dire se uno è favorevole o sfavorevole all'altro.
2. Un videogioco consta di 3 livelli. Un giocatore, arrivato al livello  $j=0,1,2$  ha probabilità  $1/(2^{j+1})$  di passare al livello superiore. A) con che probabilità il giocatore vince la prova, cioè arriva al livello 3? B) Sapendo che il giocatore non ha superato la prova, determinare la PMF del livello  $X$  a cui si è fermato. C) Se due giocatori giocano indipendentemente l'uno dall'altro, con che probabilità si fermano allo stesso livello?
3. Consideriamo un professore che prende nota del compleanno degli studenti che sostengono un esame. Ignorando gli studenti nati il 29 febbraio, e supponendo che all'esame partecipino più di 365 studenti, sia  $X$  il numero d'ordine del primo studente che ha un compleanno che il professore ha già annotato. A) Determinare il supporto della variabile  $X$ , cioè l'insieme degli interi  $k$  tali che  $P(X=k)>0$ ; B) Determinare  $P(X>k-1)$ ; C) Determinare  $P(X=k)$ , essendo  $k$  nel supporto della variabile.
4. Sia  $X$  il numero delle teste in 6 lanci di moneta bilanciata. A) Determinare la PMF di  $X$  condizionata all'evento  $A_{\{1,2\}}=\{i \text{ primi 2 lanci testa}\}$ ; B) Determinare la PMF di  $X$  condizionata all'evento  $B=\{\text{almeno due lanci testa}\}$ . C) Un amico afferma che le due probabilità sono identiche in base al seguente ragionamento: nell'esercizio A) al posto di  $A_{\{1,2\}}$  posso prendere  $A_{\{i,j\}}=\{\text{il lancio } i \text{ e il lancio } j \text{ testa}\}$ , con  $i$  diverso da  $j$ , e il risultato rimane lo stesso, quindi dato che l'evento  $B$  è unione degli  $A_{\{i,j\}}$  con  $i$  diverso da  $j$ , per la formula delle probabilità totali le due PMF sono identiche. Dove sta l'errore?
5. In una città americana ci sono  $n$  elettori, ciascuno dei quali ha una probabilità  $4/5$  di registrarsi per le elezioni presidenziali. Sia  $X$  il numero degli elettori che si registrano. Se un elettore si registra, decide successivamente di votare con probabilità  $3/4$ . Sia quindi  $Y$  il numero dei votanti alle elezioni presidenziali. A) Qual è la PMF di  $Y$ ? B) Sapendo che  $Y=j$ , quale la PMF di  $X-Y$ ? C) Sapendo che  $Y=j$ , determinare infine la PMF di  $X$ .
6. Si consideri una mano di poker in quattro (32 carte 7,8,9,10, J, Q, K, A per ciascuno dei 4 semi, da cui se ne scelgono 5 per ciascuno). Sia  $X$  il numero massimo di carte uguali tra loro tra le carte distribuite ad un giocatore. A) Determinare la probabilità che  $X=4$  e che  $X=3$ . B) Determinare la probabilità che  $X=0$  e  $X=2$ . C) Come queste probabilità sono legate alle probabilità dei punti del poker?