2. Siano U e V le coordinate di un punto scelto uniformemente nel quadrato $(0,1)^2$ del piano cartesiano.

a) Determinare la media e la varianza di $U+V-1$.

b) Determinare esattamente $P(|U+V-1| \geq t)$, con $t \in (0,1)$,

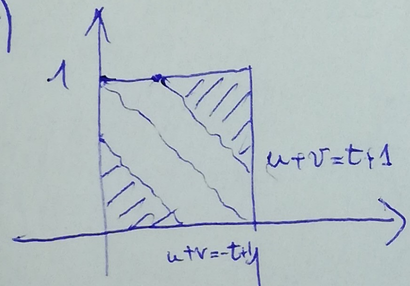
c) Se l'esperimento si ripete 4 volte indipendentemente e se $\bar{U}_4$ e $\bar{V}_4$ sono le medie campionarie delle ascisse, rispettivamente delle ordinate, determinare una maggiorazione per $P(|\bar{U}_4+\bar{V}_4-1| \geq t)$, per i soli valori di $t \in (0,1)$ per i quali risulta non banale.

a) Ovviamente U e V sono uniformi in $(0,1)$ e indipendenti

Di conseguenza $\mathbb{E}(U)=\mathbb{E}(V)=\frac{1}{2}$ $\quad var(U)=var(V)=\frac{1}{12}$, $cov(U,V)=0$

quindi $\mathbb{E}(U+V-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0$ $\quad var(U+V-1)=var(U+V)=var(U)+var(V)=\frac{1}{6}$.

b)



La probabilità richiesta è l'area della regione tratteggiata, cioè

$\cancel{2}\cdot\frac{(1-t)^2}{\cancel{2}}$, per $0 \leq t \leq 1$.

c) Per la disuguaglianza di Chebyshev $\forall t \in (0,1)$

$$P\left(|\bar{U}_4+\bar{V}_4-1| \geq t\right) \leq \frac{var(\bar{U}_4+\bar{V}_4)}{t^2} = \frac{1}{24t^2}$$

dato che $var(\bar{U}_4+\bar{V}_4)=\frac{1}{4}\left[var(U_1)+var(V_1)\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{24}$

Naturalmente la disuguaglianza dà delle informazioni non banali a patto che

$24t^2>1$, cioè $t^2>\frac{1}{24} \iff t>\frac{1}{2\sqrt{6}}$