ESERCITAZIONE 2– DOCENTE: MAURO PICCIONI, TUTOR: HLAFO ALFIE MIMUN

March 10, 2020

I seguenti esercizi sono stati presi dalla pagina web di Joe Blitzstein.

1. ESERCIZI

Ex. 1: Un college propone 30 corsi differenti nell'arco di una settimana lavorativa (pensata formata da 5 giorni). I corsi sono divisi in gruppi da 6, ovvero in ognuno dei 5 giorni sono proposti 6 corsi diversi in slot orari diversi. Uno studente deve scegliere 7 corsi da frequentare. Supponendo che uno studente scelga i 7 corsi in modo casuale fra i 30 corsi offerti e che tutte le possibili scelte siano equiprobabili, calcolare la probabilità che nella scelta fatta ci sia almeno un corso per ognuno dei 5 giorni settimanali.

Ex. 2: Peschiamo 13 carte da un classico mazzo di 52 carte (dunque 13 carte per ogni seme). Calcolare la probabilità che almeno un seme non compaia nelle 13 carte pescate.

Ex. 3: Una famiglia ha 3 figli, che chiamiamo A, B, C. Calcolare la probabilità che A sia più grande di B sapendo che A è più grande di C.

Ex. 4: Due monete sono inserite in un cappello. Le due monete hanno lo stesso aspetto, ma una di esse è truccata e ha probabilità $\frac{1}{4}$ di dare testa. Si sceglie a caso una delle due monete dal cappello e chiamiamo X la moneta scelta.

(4a) Discutere se gli eventi $A_1 := \{\text{il primo lancio della moneta dà testa}\}$ ed $A_2 := \{\text{il secondo lancio della moneta dà testa}\}$ sono indipendenti.

(4b) Supponendo che la moneta C sia stata lanciata due volte ed ha dato testa, calcolare la probabilità che la moneta C sia la moneta non truccata.

Ex. 5: Una famiglia ha due figli. Assumiamo che
- il mese di nascita sia indipendente dal genere,
- essere maschio ha stessa probabilità di essere femmina,
- tutti i possibili mesi di nascita sono equiprobabili,
- le caratteristiche del figlio più grande siano indipendenti da quelle del figlio più piccolo.

Si calcoli

(5a) la probabilità che entrambi i figli siano femmine sapendo che il figlio più grande è una femmina che è nata a Marzo;

(5b) la probabilità che entrambi i figli siano femmine sapendo che almeno un figlio è una femmina che è nata a Marzo.

2. SOLUZIONI

Ex. 1: Poiché tutte le possibili scelte dei 7 corsi sono equiprobabili, possiamo usare la formula

$$\frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}\,.$$

Cominciamo col contare i casi possibili: dobbiamo scegliere 7 corsi da 30, dunque abbiamo $\binom{30}{7}$ casi possibili.

Contiamo adesso i casi favorevoli. Ogni giorno ha 6 possibili corsi da scegliere. Dobbiamo dunque scegliere sicuramente 1 corso da ognuno dei 5 gruppi da 6. Così facendo restano 2 corsi da scegliere e possiamo sceglierli in uno dei seguenti modi

(i) entrambi dallo stesso gruppo, che può essere scelto in 5 modi diversi (avendo in totale 5 gruppi);

(ii) i due corsi sono estratti da due gruppi differenti. Abbiamo dunque $\binom{5}{2}$ modi di scegliere i due gruppi da cui estraiamo i due corsi restanti (avendo in totale 5 gruppi).

Analizziamo i casi che rientrano in (i): scegliamo un gruppo da cui estraiamo 3 corsi, mentre dagli altri 4 gruppi estraiamo 1 corso. Ci sono $\binom{5}{1}$ modi di scegliere il gruppo da cui estraiamo i 3 corsi e sappiamo che ogni gruppo contiene 6 corsi. Dunque abbiamo

$$\binom{5}{1}\cdot\binom{6}{1}^4\cdot\binom{6}{3}\,.$$

Analizziamo i casi che rientrano in (ii): scegliamo due gruppi da cui estraiamo 2 corsi, mentre dagli altri 3 gruppi estraiamo 1 corso. Ci sono $\binom{5}{2}$ modi di scegliere i gruppi da cui estraiamo i 2 corsi e sappiamo che ogni gruppo contiene 6 corsi. Dunque abbiamo

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{6}{2}^2\cdot\binom{6}{1}^3\,.$$

Dunque i casi favorevoli in totale sono

$$\binom{5}{1}\cdot\binom{6}{1}^4\cdot\binom{6}{3}+\binom{5}{2}\cdot\binom{6}{2}^2\cdot\binom{6}{1}^3\,.$$

Dunque il risultato è dato da

$$\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{6}{1}^4\cdot\binom{6}{3}+\binom{5}{2}\cdot\binom{6}{2}^2\cdot\binom{6}{1}^3}{\binom{30}{7}}\approx 0.3\,.$$

Ex. 2: Chiamiamo Cuori, Fiori, Picche, Quadri come primo, secondo, terzo e quarto seme, rispettivamente. Definiamo gli eventi A_1, A_2, A_3, A_4 come

$$A_i = \{\text{l'}i\text{-esimo seme non compare tra le 13 carte pescate}\} \qquad \text{per } i = 1,2,3,4.$$

Dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$. Usando il principio di inclusione-esclusione si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\le i<j\le 4} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \\ + \sum_{1\le i<j<k\le 4} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)\,.\end{aligned} \tag{1}$$

Iniziamo a calcolare i singoli pezzi.

Cominciamo con la prima sommatoria in (1) (composta da 4 addendi). Notiamo che A_i si realizza se estraiamo le 13 carte da un gruppo fatto dalle carte che non sono del seme i-esimo (dunque da un gruppo di $52 - 13 = 39$ carte). Si ha allora per $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}}\,.$$

Calcoliamo adesso i termini della seconda sommatoria in (1) (che come noteremo è fatta da 6 addendi). Si noti che

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le 4} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) + \\ + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_3 \cap A_4)\,.\end{aligned}$$

Per $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, con $i < j$, si ha che l'evento $A_i \cap A_j$ si realizza se estraiamo le 13 carte da un gruppo fatto dalle carte che non sono dei semi i-esimo e j-esimo (dunque da un gruppo di $52 - 2 \cdot 13 = 26$ carte). Allora per $i, j \in 1, 2, 3, 4$, con $i < j$, si ha

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{\binom{26}{13}}{\binom{52}{13}}\,.$$

Calcoliamo adesso i termini della terza sommatoria in (1) (che come noteremo è fatta da 4 addendi). Si noti che

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j<k\le 4} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \\ + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4)\,.\end{aligned}$$

Per $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$, con $i < j < k$, si ha che l'evento $A_i \cap A_j \cap A_k$ si realizza se estraiamo le 13 carte da un gruppo fatto dalle carte che non sono dei semi i-esimo, j-esimo e k-esimo (dunque da un gruppo di $52 - 3 \cdot 13 = 13$ carte). Allora per $i, j, k \in 1, 2, 3, 4$, con $i < j < k$, si ha

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{\binom{13}{13}}{\binom{52}{13}} = \frac{1}{\binom{52}{13}}\,.$$

Rimane l'ultimo termine della sommatoria in (1). Notiamo che $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ è un evento impossibile in quanto stiamo chiedendo di pescare 13 carte, ognuna delle quali non appartiene a nessuno dei 4 semi. Dunque

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0\,.$$

A questo punto possiamo calcolare il membro destro dell'espressione in (1)

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 4 \cdot \frac{\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}} - 6 \cdot \frac{\binom{26}{13}}{\binom{52}{13}} + 4 \cdot \frac{1}{\binom{52}{13}} - 0 \approx 0.05\,.$$

Ex. 3: Supponiamo di ordinare i figli in un vettore di 3 coordinate, in modo tale che il figlio nell'i-esima coordinata sia più grande del figlio nella coordinate $(i+1)$-esima. Ad esempio se chiamiamo i figli A, B, C, il vettore (C, A, B) dice che C è più grande di A e che A è più grande di B. Notiamo che tutti gli ordinamenti sono equiprobabili (in quanto non ci sono ordinamenti preferiti rispetto agli altri). Con $\{A < B\}$ indichiamo l'evento che B è più grande di A.

Dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(A > B \,|\, A > C)$. Dalla formula della probabilità condizionata, sappiamo che

$$\mathbb{P}(A > B \,|\, A > C) = \frac{\mathbb{P}(\{A > B\} \cap \{A > C\})}{\mathbb{P}(A > C)}\,. \tag{2}$$

Calcoliamo separatamente numeratore e denominatore. Per calcolare entrambe le probabilità usiamo la formula

$$\frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}\,, \tag{3}$$

in quanto tutti i possibili vettori che possiamo fare permutando A, B, C sono equiprobabili. Le terne possibili sono

$$3! = 6\,. \tag{4}$$

Per quanto riguarda il numeratore in (2), per calcolare $\mathbb{P}(\{A > B\} \cap \{A > C\})$ usiamo la formula (3) dove il denominatore è stato calcolato in (4). I casi favorevoli sono le terne (A, B, C) e (A, C, B) (ovvero due casi). Dunque usando (3) si ha

$$\mathbb{P}(\{A > B\} \cap \{A > C\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\,. \tag{5}$$

Per quanto riguarda il denominatore in (2), per calcolare $\mathbb{P}(A > C)$ usiamo la formula (3) dove il denominatore è stato calcolato in (4). I casi favorevoli sono le terne

$$(A, C, B),\ (A, B, C),\ (B, A, C)\,,$$

ovvero 3 terne (che corrispondono al numero di modi di posizionare un un gruppo di 2 persone in 3 posti (cioè $\binom{3}{2} = 3$). Dunque usando (3) si ha

$$\mathbb{P}(A > C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\,. \tag{6}$$

Dunque da (2), (5) e (6) si ha

$$\mathbb{P}(A > B \,|\, A > C) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\,.$$

Si noti che similmente a (6) si può calcolare $\mathbb{P}(A > B)$, ottenendo che

$$\mathbb{P}(A > B) = \frac{1}{2}\,.$$

Dunque notiamo che la probabilità dell'evento $\{A > B\}$ aumenta nel momento in cui si condiziona all'evento $\{A > C\}$

Ex. 4: (4a) Calcoliamo $\mathbb{P}(A_1)$ e $\mathbb{P}(A_2)$. Dobbiamo dunque calcolare la probabilità che esca testa e dovremmo ipotizzare di aver lanciato la moneta truccata o non truccata. Per fare ciò usiamo la formula delle probabilità totali combinata con la definizione di probabilità condizionata.
Definiamo l'evento $E := \{\text{peschiamo la moneta truccata}\}$.
Per la formula delle probabilità totali e per $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_i) &= \mathbb{P}(A_i \cap E) + \mathbb{P}(A_i \cap E^c) = \\ &= \mathbb{P}(A_i \mid E) \cdot \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(A_i \mid E^c) \cdot \mathbb{P}(E^c) .\end{aligned} \tag{7}$$

Ora

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E^c) = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(A_1 \mid E) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}(A_2 \mid E) = \frac{1}{4},$$
$$\mathbb{P}(A_1 \mid E^c) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(A_2 \mid E^c) = \frac{1}{2},$$

e dunque usando (7)

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$
$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

Calcoliamo $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$. Applichiamo la formula (7) con $A_1 \cap A_2$ al posto di A_i. Poiché

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E^c) = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \mid E) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \mid E^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

applicando la formula (7) con $A_1 \cap A_2$ al posto di A_i

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{32}.$$

Quindi

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{5}{32} \neq \frac{9}{64} = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2),$$

e dunque A_1 ed A_2 non sono eventi indipendenti.

(4b) Definiamo gli eventi

$$F = \{\text{la moneta scelta viene lanciata due volte e dà testa}\},$$
$$G = \{\text{la moneta scelta è non truccata}\}.$$

Dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(G \mid F)$. Sarebbe molto più facile calcolare $\mathbb{P}(G \mid F)$ e dunque ragioniamo nel seguente modo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G \mid F) &= \frac{\mathbb{P}(G \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(G \cap F)}{\mathbb{P}(F)} \cdot \frac{\mathbb{P}(G)}{\mathbb{P}(G)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(G \cap F)}{\mathbb{P}(G)} \cdot \frac{\mathbb{P}(G)}{\mathbb{P}(F)} = \mathbb{P}(F \mid G) \cdot \frac{\mathbb{P}(G)}{\mathbb{P}(F)} .\end{aligned} \tag{8}$$

Per calcolare $\mathbb{P}(F)$ dobbiamo ipotizzare di aver estratto la moneta truccata o la moneta non truccata. Per farlo, usiamo la formula delle probabilità totali combinata con la definizione di probabilità condizionata, ovvero

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F \,|\, G) \cdot \mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(F \,|\, G^c) \cdot \mathbb{P}(G^c)\,.$$

Inserendo quest'ultima espressione in (8), si ha

$$\mathbb{P}(G \,|\, F) = \frac{\mathbb{P}(F \,|\, G) \cdot \mathbb{P}(G)}{\mathbb{P}(F \,|\, G) \cdot \mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(F \,|\, G^c) \cdot \mathbb{P}(G^c)}\,. \tag{9}$$

Quest'ultima è esattamente la formula di Bayes. Si noti che

$$\mathbb{P}(F \,|\, G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,,$$
$$\mathbb{P}(F \,|\, G^c) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}\,,$$
$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(G^c) = \frac{1}{2}\,.$$

Inserendo questi dati nella formula (9) si ha

$$\mathbb{P}(G \,|\, F) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{32}} = \frac{4}{5}\,.$$

Ex. 5: (5a) Cominciamo con l'osservare che essendo il genere indipendente dal mese di nascita, il fatto che il più grande sia nato a Marzo non dà alcuna informazione sul fatto che entrambi i figli sono femmine. Dunque la domanda si trasforma nella seguente: calcolare la probabilità che entrambi i figli siano femmine sapendo che il figlio più grande è una femmina.
Definiamo gli eventi

$$E = \{\text{entrambi i figli sono femmine}\}$$

$$G = \{\text{il figlio più grande è femmina}\}$$

Dobbiamo calcolare

$$\mathbb{P}(E \,|\, G) = \frac{\mathbb{P}(E \cap G)}{\mathbb{P}(G)}\,. \tag{10}$$

Ordiniamo i generei dei due figli in un vettore di due coordinate:

$$(F, F)\,,\ (M, M)\,,\ (F, M)\,,\ (M, F)\,.$$

Assumiamo che il figlio associato alla prima coordinata sia più grande di quello associato alla seconda coordinata. Poiché ognuno di questi 4 vettori è equiprobabile possiamo usare la formula

$$\frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}\,, \tag{11}$$

per calcolare numeratore e denominatore nel membro di destra in (12). Sia per il numeratore sia per il denominatore, il numero di casi possibili che andremo ad inserire quando applicheremo la formula (13) è dato dal numero di tutte le possibili coppie di figli che, come visto in precedenza, sono 4.

Cominciamo col calcolare $\mathbb{P}(E \cap G)$. I casi favorevoli per $E \cap G$ sono le coppie in cui entrambi i figli sono femmine, cioè la coppia (F, F). Dunque

$$\mathbb{P}(E \cap G) = \frac{1}{4}\,.$$

Calcoliamo adesso $\mathbb{P}(G)$. L'evento G è realizzato dalle coppie (F, F), (F, M) (cioè due coppie). Dunque

$$\mathbb{P}(G) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\,.$$

Applicando quindi (12) si ha

$$\mathbb{P}(E \,|\, G) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,.$$

(5b) Cominciamo con l'osservare che essendo il genere indipendente dal mese di nascita, il fatto che il più grande sia nato a Marzo non dà alcuna informazione sul fatto che entrambi i figli sono femmine. Dunque la domanda si trasforma nella seguente: calcolare la probabilità che entrambi i figli siano femmine sapendo che almeno un figlio è una femmina.
Definiamo gli eventi

$$E = \{\text{entrambi i figli sono femmine}\}$$

$$G = \{\text{almeno un figlio è femmina}\}$$

Dobbiamo calcolare

$$\mathbb{P}(E \,|\, G) = \frac{\mathbb{P}(E \cap G)}{\mathbb{P}(G)}\,. \tag{12}$$

Ordiniamo i generei dei due figli in un vettore di due coordinate:

$$(F, F)\,,\ (M, M)\,,\ (F, M)\,,\ (M, F)\,.$$

Assumiamo che il figlio associato alla prima coordinata sia più grande di quello associato alla seconda coordinata. Poiché ognuno di questi 4 vettori è equiprobabile possiamo usare la formula

$$\frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}\,, \tag{13}$$

per calcolare numeratore e denominatore nel membro di destra in (12). Sia per il numeratore sia per il denominatore, il numero di casi possibili che andremo ad inserire quando applicheremo la formula (13) è dato dal numero di tutte le possibili coppie di figli che, come visto in precedenza, sono 4.
Cominciamo col calcolare $\mathbb{P}(E \cap G)$. I casi favorevoli per $E \cap G$ sono le coppie in cui entrambi i figli sono femmine, cioè la coppia (F, F). Dunque

$$\mathbb{P}(E \cap G) = \frac{1}{4}\,.$$

Calcoliamo adesso $\mathbb{P}(G)$. L'evento G è realizzato dalle coppie (F, F), (F, M), (M, F) (cioè tre coppie). Dunque

$$\mathbb{P}(G) = \frac{3}{4}\,.$$

Applicando quindi (12) si ha

$$\mathbb{P}(E \mid G) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}\,.$$

Notiamo dunque il seguente (apparente) paradosso: in entrambi i casi stiamo condizionando ad un informazione del tipo "un figlio è femmina", ma in un caso (ovvero il (5a)) abbiamo specificato che tale figlio è il più grande. Come vediamo l'aver specificato quest'ultima condizione ha cambiato la probabilità dell'evento "entrambi i figli sono femmine" portandola da $\frac{1}{3}$ (caso (5b)) a $\frac{1}{2}$ (caso (5a)).