ESERCITAZIONE 5– DOCENTE: MAURO PICCIONI, TUTOR: HLAFO ALFIE MIMUN

April 4, 2020

1. ESERCIZI

Ex. 1: Ci sono n uova e da ogni uovo esce un pulcino con probabilità p (indipendentemente dalle altre uova). Ognuno dei pulcini nati, sopravvive con probabilità r, indipendentemente dagli altri pulcini.
(1a) Calcolare la PMF del numero di pulcini nati;
(1b) Calcolare la PMF del numero di pulcini che sopravvive.

Ex. 2: Una coppia decide di continuare ad avere figli fino a quando avranno almeno un figlio maschio ed una figlia femmina. Una volta che tale obiettivo verrà raggiunto, non avranno più figli. Assumiamo che la coppia non abbia mai gemelli e che ad ogni tentativo la probabilità di fare un maschio o una femmina è 1/2. Assumiamo anche che non ci siano limiti nel numero di figli. Qual è il valore atteso del numero di figli della coppia?

Ex. 3: Le gocce di pioggia cadono a terra ad un tasso di 20 gocce per centimetro quadro al minuto. Qual è una ragionevole distribuzione da usare per il numero di gocce di piogge che cadono a terra colpendo una regione particolare che misura 5 centimetri quadrati in t minuti? Usando tale distribuzione, si calcoli la probabilità che nella suddetta regione non cada una goccia di pioggia per 3 secondi.

Ex. 4: Ci sono 100 passeggeri allineati in una fila per salire a bordo di un aereo con 100 sedili. Ogni posto è assegnato ad un passeggero ed i passeggeri sono allineati a seconda del posto che gli è stato assegnato, ovvero al primo passeggero è assegnato il posto numero 1, al secondo passeggero è assegnato il posto numero 2, e così via. Nonostante ogni sedile sia assegnato ad un passeggero, il primo passeggero della fila decide di sedersi in un posto a caso (assumiamo che la scelta sia fatta in maniera uniforme, ovvero ogni sedile ha stessa probabilità di essere scelto). Ogni passeggero successivo si siede nel sedile assegnato se ancora disponibile, altrimenti si siede in un posto scelto uniformemente a caso. Qual è la probabilità che l'ultimo passeggero della fila si siede nel posto a lui assegnato?

Ex. 5: Sia $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ con $\lambda < 1$. Calcolare $\mathbb{E}[X!]$.

2. SOLUZIONI

Ex. 1:(1a) Numeriamo le n uova e, per $i = 1, \ldots, n$, denotiamo con X_i la variabile aleatoria definita come

$$X_i = \begin{cases} 1\,, & \text{se esce il pulcino dall'}i\text{-esimo uovo;} \\ 0\,, & \text{se non esce il pulcino dall'}i\text{-esimo uovo.} \end{cases}$$

Notiamo dunque che $X_i \sim \mathrm{Ber}(p)$ e che, essendo le uova tra di loro indipendenti, le variabili aleatorie $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti.
Il numero di pulcini nati è dunque dato da $Y = X_1 + \ldots + X_n$. Dunque Y conta il numero di successi (ovvero il numero di pulcini nati) su un numero di prove indipendenti pari a n (ovvero su un totale di n uova). Ogni prova ha probabilità di successo pari a p (ovvero la probabilità che da un uovo nasca il pulcino è p). Dunque

$$Y \sim \mathrm{Bin}(n, p)\,,$$

e quindi la PMF è

$$\mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,, \qquad k = 1, \ldots, n\,.$$

(1b) Sappiamo che ogni pulcino nato ha probabilità r di sopravvivere. Inoltre ogni uovo ha probabilità p di dare vita ad un pulcino. Poichè

$$\mathbb{P}(\text{pulcino sopravvive} \,|\, \text{pulcino nato}) = r\,,$$

$$\mathbb{P}(\text{pulcino sopravvive} \,|\, \text{pulcino non nato}) = 0\,,$$

$$\mathbb{P}(\text{pulcino nato}) = p\,,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{pulcino sopravvive}) &= \mathbb{P}(\{\text{pulcino sopravvive}\} \cap \{\text{pulcino nato}\}) + \\
&\quad + \mathbb{P}(\{\text{pulcino sopravvive}\} \cap \{\text{pulcino non nato}\}) = \\
&= \mathbb{P}(\{\text{pulcino sopravvive}\} \cap \{\text{pulcino nato}\}) + 0 = \\
&= \mathbb{P}(\{\text{pulcino sopravvive}\} \cap \{\text{pulcino nato}\}) = \\
&= \mathbb{P}(\text{pulcino sopravvive} \,|\, \text{pulcino nato}) \cdot \mathbb{P}(\text{pulcino nato}) = rp\,,
\end{aligned}$$

e dunque in particolare

$$\mathbb{P}(\text{pulcino sopravvive}) = \mathbb{P}(\{\text{pulcino sopravvive}\} \cap \{\text{pulcino nato}\}) = rp\,.$$

Definiamo per $i = 1, \ldots, n$

$$Z_i = \begin{cases} 1\,, & \text{se esce il pulcino dall'}i\text{-esimo uovo ed il pulcino sopravvive;} \\ 0\,, & \text{se non esce il pulcino dall'}i\text{-esimo uovo (e dunque il pulcino non sopravvive).} \end{cases}$$

Notiamo dunque che $Z_i \sim \mathrm{Ber}(p)$ e che, essendo le uova tra di loro indipendenti, le variabili aleatorie $Z_1, \ldots, Z_n$ sono indipendenti. Il numero di pulcini nati è dunque dato da $W = Z_1 + \ldots + Z_n$. Dunque W conta il numero di successi (ovvero il numero di pulcini nati che sono sopravvissuti) su un numero di prove indipendenti pari a n (ovvero su un totale di n uova). Ogni prova ha probabilità di successo pari a rp (ovvero la probabilità che da un uovo nasce il pulcino e sopravvive è rp). Dunque

$$W \sim \mathrm{Bin}(n, rp)\,,$$

e quindi la PMF è

$$\mathbb{P}(W = k) = \binom{n}{k} (rp)^k (1-rp)^{n-k}\,, \qquad k = 1, \ldots, n\,.$$

Ex. 2: Fissiamo il genere del primo figlio. Denotiamo con X il numero di figli che la coppia fa dopo il primo. Se $X = k$, allora vuol dire che, dopo il primo figlio, la coppia ha fatto k figli. Poiché la coppia smette di far figli non appena ha almeno un figlio di entrambi i generi, allora, se $X = k$, si ha che la coppia (dopo il primo figlio) ha fatto $k - 1$ figli dello stesso sesso del primo figlio ed 1 figlio di sesso opposto. Dunque per $k = 1, 2, \ldots$

$$\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2},$$

dove $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ è la probabilità che la coppia abbia ottenuto (dopo il primo figlio) $k-1$ figli dello stesso genere del primo figlio, mentre $\frac{1}{2}$ è la probabilità che la coppia abbia ottenuto un figlio del genere opposto.

Dunque $X \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{1}{2}\right)$ e quindi

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Poiché $\mathbb{E}[X] = 2$ è il numero medio di figli che la coppia fa dopo il primo figlio, il numero medio di figli che la coppia ha è $1 + \mathbb{E}[X] = 2 + 1 = 3$.

Ex. 3: Notiamo che le gocce di pioggia sono tra loro indipendenti, nel senso che il fatto che sia caduta una goccia in una regione non mi dà informazioni su dove cadranno le altre. Sappiamo inoltre che tutte le gocce hanno la stessa probabilità di cadere in una data regione. Sappiamo infine che il tasso di gocce che cade in una regione di un centimetro quadrato in un minuto è 20. Di conseguenza il tasso di gocce che cade in una regione di 5 centimetri quadrati in t minuti è $20 \cdot 5 \cdot t = 100t$. Dunque, se X è una variabile aleatoria che conta il numero di gocce che cadono in una regione di 5 centimetri in t minuti, è ragionevole pensare che X abbia distribuzione di Poisson di tasso $100t$, in simboli

$$X \sim \mathrm{Pois}(100t).$$

Dunque per $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-100t} \cdot \frac{(100t)^k}{k!}.$$

Vogliamo calcolare la probabilità che nella regione di 5 centimetri quadrati non cadano gocce per 3 secondi, ovvero $\mathbb{P}(X = 0)$. Notiamo che in questo caso t (che misura il tempo in minuti) deve essere 3 secondi, cioè $\frac{3}{60} = \frac{1}{20}$ minuti. Dunque dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(X = 0)$ con $t = \frac{1}{20}$, ovvero

$$\mathbb{P}(X = 0) = e^{-100 \cdot \frac{1}{20}} \cdot \frac{\left(100 \cdot \frac{1}{20}\right)^0}{0!} = e^{-100 \cdot \frac{1}{20}} = e^{-5}.$$

Ex. 4: Sia j un numero intero compreso tra 2 e 99. Se il posto numero j è libero, allora verrà occupato dalla j-esima persona della fila. Se invece il posto numero j è occupato, allora la j-esima persona della fila sceglierà un posto a caso. In entrambi i casi, il posto numero j risulta occupato e questo ragionamento vale per tutti i j-esimi posti con $j = 2, 3, \ldots, 99$. Dunque nel momento in cui l'ultimo passeggero si dovrà sedere, potrà vedrere liberi solo posto numero 1 o il posto numero 100 (in quanto, come discusso poco fa, tutti i j-esimi posti, con $j = 2, 3, \dots, 99$, risultano occupati). Si noti che, quando il j-esimo passeggero (con $j = 2, 3, \dots, 99$) si deve sedere ed il suo posto è occupato, non avrà preferenze tra il posto numero 1 ed il posto numero 100, se entrambi disponibili. Inoltre il posto numero 1 ed il posto numero 100 hanno stessa probabilità di essere occupati ogni volta che il j-esimo passeggero, con $j = 2, 3, \dots, 99$, prende posto. Ciò ci permette di dedurre che il centesimo passeggero potrà sedersi solo nei posti numero 1 e 100 ed entrambi i posti hanno stessa probabilità (ovvero 1/2) di essere il posto in cui si siederà il centesimo passeggero. Dunque la probabilità che il centesimo passeggero della fila si siederà al centesimo posto è 1/2.

Ex. 5: Si ricordi che, data una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il valore atteso di $g(X)$ è dato da

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_k g(k) \cdot \mathbb{P}(X = k)\,.$$

Dunque definendo $g(k) = k!$ si ha

$$\mathbb{E}[X!] = \sum_{k=0}^{\infty} k! \cdot \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k! \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \lambda^k =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{1-\lambda} = \frac{e^{-\lambda}}{1-\lambda}\,,$$

dove abbiamo usato l'identità

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = \frac{1}{1-\lambda} \quad \text{se } \lambda < 1\,.$$