1. Una coppia di monete bilanciate viene lanciata ripetutatamente fino a quando escono 2 teste. Ogni 3 lanci effettuati in cui questo risultato non si e verificato si vince 1 euro. Sia X il totale della vincita nel gioco.

a) Determinare $P(X > 0)$.

b) Determinare $P(X = k)$, con k intero non negativo qualunque.

c) Determinare $E(X)$.

a) Sia $(TT)_i$ l'evento che l'i-esimo lancio è una doppia testa e $(TT)_i^c$ il suo complementare. Allora $\{X>0\} = (TT)_1^c \cap (TT)_2^c \cap (TT)_3^c$; per l'indipendenza dei lanci

$$\mathbb{P}(X>0) = \mathbb{P}((TT_1)^c)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}, \quad \mathbb{P}(X=0) = \frac{37}{64}$$

b) Analogamente per k intero positivo qualunque

$$\{X \geq k\} = \bigcap_{i=1}^{3k} (TT)_i^c$$ e quindi

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}((TT_1)^c)^{3k} = \left(\frac{3}{4}\right)^{3k} = \left(\frac{27}{64}\right)^k$$ e

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1) = \left(\frac{27}{64}\right)^k \left(1 - \frac{27}{64}\right) = \left(\frac{27}{64}\right)^k \frac{37}{64}$$

c) Infine $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{27}{64}\right)^k = \frac{27/64}{1-27/64} = \frac{27}{37}.$$

Naturalmente $X+1$ ha distribuzione geometrica $\left(\frac{37}{64}\right)$: osservando questo i calcoli erano ancora più brevi.