Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica e Automatica

Corso di RICERCA OPERATIVA

PROVA di AUTOVALUTAZIONE N.6

ESERCIZI

1. Una compagnia aerea deve pianificare l'assunzione di nuovi piloti relativamente ai primi cinque mesi di un anno. Ogni assunzione può avvenire solo il primo giorno di ogni mese. Ogni pilota di nuova assunzione deve essere addestrato per un mese e poi diventa un pilota esperto. All'inizio dell' anno la compagnia dispone già di 90 piloti esperti. L'addestramento dei nuovi piloti viene effettuato dai piloti esperti di cui la compagnia già dispone ed è noto che per ragioni organizzative nei corsi di addestramento deve essere presente un pilota esperto ogni cinque nuovi piloti; inoltre i corsi di addestramento che si svolgono ogni mese non posso avere più di 15 nuovi piloti che vi partecipano. Ovviamente se un pilota esperto in un determinato mese è assegnato al corso di addestramento non può svolgere il regolare servizio. I nuovi piloti che hanno seguito l'addestramento mensile sono utilizzati nei mesi successivi come piloti esperti (quindi sia per svolgere il regolare servizio sia per tenere i corsi di addestramento). Il salario mensile di un pilota esperto è di L.5 milioni mentre il salario mensile di un pilota di nuova assunzione finchè non diventa esperto (cioè durante il mese di addestramento) è di L.2 milioni. Formulare un modello lineare che permetta alla compagnia di determinare il numero dei nuovi piloti da assumere nei mesi considerati minimizzando il costo complessivo dei salari dovuti sia a nuovi piloti durante il mese di formazione sia ai piloti esperti già assunti in precedenza, sapendo che in ciascuno di questi cinque mesi necessita rispettivamente di almeno 80, 90, 110, 120 e 110 piloti esperti che svolgono regolare servizio. (Si noti che nell'ultimo mese del periodo considerato non si assumono nuovi piloti e quindi non si tiene l'addestramento in quanto essendo l'ultimo mese del periodo i piloti che fossero assunti non sarebbe mai utilizzati come piloti esperti).

2. Determinare tutte le basi (ammissibili) e le soluzioni di base ammissibili del seguente sistema:

(non tutto)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 \le 2 \\ x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3. Sia dato il poliedro $P(\tau)$, con $\tau \geq 0$, definito da

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + \tau x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = \tau \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Determinare per quali valori non negativi di τ il poliedro $P(\tau)$ ammette tre vertici. Determinare inoltre per quali valori non negativi di τ il poliedro $P(\tau)$ ammette $(0, 0, 1)^T$ come suo vertice.

QUESTIONARIO

1. Si consideri il seguente polidero.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 7x_4 &= 9 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

(a) La prima e la seconda colonna della matrice dei vincoli formano una base ammissibile.

(b) Il punto $(1,\ 1,\ 0,\ 0)^T$ è un vertice del poliedro. Perchè il rango della matrice formata dai vincoli attivi non è massimo

NO (c) Il punto $(3,\ 0,\ 0, 0)^T$ è un vertice del polidero.

NO (d) Il poliedro può avere più di 6 vertici. $\binom{n^\circ \text{ incognite}}{n^\circ \text{ vincoli}} \to$ uso di segno $\binom{4}{2} = 6$

2. Dato un problema di PL in forma standard, dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

NO (a) In una SBA ottima il criterio di ottimalità deve essere soddisfatto.

(b) È possibile che esistano due Basi corrispondenti ad una stessa Soluzione di Base Ammissibile ottima.

(c) Se per ogni indice h tale che $\gamma_h < 0$ risulta $(B^{-1}N)_h > 0$, allora il problema è sicuramente limitato inferiormente.

(d) Se B è una base ammissibile, per ogni $i = 1, \ldots, m$ risulta $(B^{-1}N)_i \geq 0$.

3. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min\ (\ 2,\ \ -1,\ 1,\ 0,\ 0\ )\ x$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$x \in \Re^6,\ x \geq 0$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

(a) La base costituita dalla quarta e quinta colonna soddisfa il criterio di ottimalità.

(b) La base costituita dalla quarta e quinta colonna soddisfa il criterio di illimitatezza.

(c) Il vertice associato alla base costituita dalla quarta e quinta colonna è $(0, 0, 1, 0, 2)$.

(d) La funzione obiettivo è limitata inferiormente nell'insieme ammissibile.

1. Una compagnia aerea deve pianificare l'assunzione di nuovi piloti relativamente ai primi cinque mesi di un anno. Ogni assunzione può avvenire solo il primo giorno di ogni mese. Ogni pilota di nuova assunzione deve essere addestrato per un mese e poi diventa un pilota esperto. All'inizio dell' anno la compagnia dispone già di 90 piloti esperti. L'addestramento dei nuovi piloti viene effettuato dai piloti esperti di cui la compagnia già dispone ed è noto che per ragioni organizzative nei corsi di addestramento deve essere presente un pilota esperto ogni cinque nuovi piloti; inoltre i corsi di addestramento che si svolgono ogni mese non posso avere più di 15 nuovi piloti che vi partecipano. Ovviamente se un pilota esperto in un determinato mese è assegnato al corso di addestramento non può svolgere il regolare servizio. I nuovi piloti che hanno seguito l'addestramento mensile sono utilizzati nei mesi successivi come piloti esperti (quindi sia per svolgere il regolare servizio sia per tenere i corsi di addestramento). Il salario mensile di un pilota esperto è di L.5 milioni mentre il salario mensile di un pilota di nuova assunzione finchè non diventa esperto (cioè durante il mese di addestramento) è di L.2 milioni. Formulare un modello lineare che permetta alla compagnia di determinare il numero dei nuovi piloti da assumere nei mesi considerati minimizzando il costo complessivo dei salari dovuti sia a nuovi piloti durante il mese di formazione sia ai piloti esperti già assunti in precedenza, sapendo che in ciascuno di questi cinque mesi necessita rispettivamente di almeno 80, 90, 110, 120 e 110 piloti esperti che svolgono regolare servizio. (Si noti che nell'ultimo mese del periodo considerato non si assumono nuovi piloti e quindi non si tiene l'addestramento in quanto essendo l'ultimo mese del periodo i piloti che fossero assunti non sarebbe mai utilizzati come piloti esperti).

X_{NJ} = piloti nuovi nei mesi J, $J = 1, \dots, 4$

Funzione obiettivo:

$$\min \Big[5 \cdot 90 + 5(90 + X_{N1}) + 5(90 + X_{N1} + X_{N2}) + 5(90 + X_{N1} + X_{N2} + X_{N3}) + 5(90 + X_{N1} + X_{N2} + X_{N3} + X_{N4}) + 2(X_{N1} + X_{N2} + X_{N3} + X_{N4})\Big]$$

Vincoli

$\frac{3}{15}$ → 1 pilota esperto ogni 5 nuovi → max nuovi piloti per ogni corso

$$90 - \frac{3}{15} X_{N1} \geq 80$$

$$90 + X_{N1} - \frac{3}{15} X_{N2} \geq 90$$

$$90 + X_{N1} + X_{N2} - \frac{3}{15} X_{N3} \geq 110$$

$$90 + X_{N1} + X_{N2} + X_{N3} - \frac{3}{15} X_{N4} \geq 120$$

$$90 + X_{N1} + X_{N2} + X_{N3} + X_{N4} \geq 110$$

$X_{Ni} \geq 0$ intere $i = 1, \dots, 4$

2. Determinare tutte le basi (ammissibili) e le soluzioni di base ammissibili del seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 2 \\ X_1 + X_4 = 2 \\ X_2 + X_5 = 1 \\ X_i \geq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{1,2,3}{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \not\geq 0$$ non e' ammissibile

$$\underset{1,2,4}{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ base ammissibile

$$\underset{1,2,5}{B_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ base ammissibile degenere

$$\underset{1,3,4}{B_4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ non e' base

$$\underset{1,3,5}{B_5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ base ammissibile degenere

$$\underset{1,4,5}{B_6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ base ammissibile degenere

3. Sia dato il poliedro $P(\tau)$, con $\tau \geq 0$, definito da

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + \tau x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = \tau \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Determinare per quali valori non negativi di τ il poliedro $P(\tau)$ ammette tre vertici. Determinare inoltre per quali valori non negativi di τ il poliedro $P(\tau)$ ammette $(0,0,1)^T$ come suo vertice.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \tau \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ \tau \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B_1^{-1} = -\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_1^{-1} b = \begin{bmatrix} 4 - \tau \\ 2 - \tau \end{bmatrix} \rightarrow \text{si ha un vertice per } \tau \leq 2$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B_2^{-1} = \frac{1}{2-\tau} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\tau & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2-\tau} \begin{bmatrix} 2 & -\tau \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2^{-1} b = \begin{bmatrix} 2 + \tau \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{non è SBA}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} -1 & \tau \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B_3^{-1} = \frac{1}{2(\tau-1)} \begin{bmatrix} 2 & -\tau \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_3^{-1} b = \begin{bmatrix} \dfrac{\tau^2 - 4}{2(1-\tau)} \\ \\ \dfrac{\tau - 4}{2(1-\tau)} \end{bmatrix} \quad \text{si ha un vertice per } 1 \leq \tau \leq 4$$

Quindi $P(\tau)$ ha 3 vertici per $1 < \tau < 2$.

$(0,0,1)$ è vertice per $\tau = 2$.