Prova 1 di Analisi Matematica II - 22 Gennaio 2021
Ing. Informatica
Prof.ssa Virginia De Cicco, Prof. Pietro Mercuri

ESERCIZIO 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 3 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti. (**12 pt.**)

1) La successione di funzioni $f_n(x) = \frac{e^{x^n}-1}{x^n}$ converge puntualmente se

(a) $|x| \leq 1$
(b) $|x| < 1$
(c) $0 < x < 1$
(d) $-1 < x \leq 1$.

Soluzione: (d)

2) Il coefficiente di Taylor a_3 della funzione

$$f(x) = 3x^3 + 3\cos x$$

$a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!}$

$f' = 9x^2 - 3\sin x$

$f'' = 18x - 3\cos x$

$f''' = 18 + 3\sin x \big|_{x=0} = 18$

è

a) $a_3 = 1$ b) $a_3 = 2$ c) $a_3 = 3$ d) $a_3 = 0$.

$a_3 = \frac{18}{3!} =$

Soluzione: c) poichè $\cos x$ è pari e quindi non dà contributo nel calcolo di a_3, essendo 3 un numero dispari.

3) Le radici quadrate complesse di $z = i$ sono: $\sqrt{i}$ $n=2$ $|i|=1$ $\theta = \frac{\pi}{2}$

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$;
(b) $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$;
(c) $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$;
(d) $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$.

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(i+1)$

$\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}(-i-1)$

Soluzione: (c)

4) Sia γ la circonferenza di centro 0 e raggio 1 in $\mathbb{C}$. Il valore dell'integrale
$$\int_\gamma \frac{\cos^2 z}{(z-\frac{\pi}{4})^2}dz$$ è:

$\cos z \cdot \cos z$ $\quad -\sin z \cos z + (-\sin z \cos$

$\text{res}\left(f, \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{d}{dz} \cancel{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2} \frac{\cos^2 z}{\cancel{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2}} = \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \left(-2\sin(z)\cos(z)\right) = -1$

(a) πi;

(b) 0;

(c) $2\pi i$;

(d) $-2\pi i$.

Soluzione: (d)

ESERCIZIO 2. (10 pt.) Si calcolino gli sviluppi di Laurent in $z_0 = i$, specificando in quali regioni sono validi, della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}.$$

Soluzione: Se $0 < |z-i| < 2$, si ha

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{(z-i)2i\left(1-\frac{z-i}{-2i}\right)} = \frac{1}{2i(z-i)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(-2i)^n} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^{n-1}}{(-1)^n(2i)^{n+1}}.$$

Se $|z-i| > 2$, si ha

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{(z-i)^2\left(1-\frac{-2i}{z-i}\right)} = \frac{1}{(z-i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2i)^n}{(z-i)^n} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2i)^n}{(z-i)^{n+2}}.$$

ESERCIZIO 3. (10 pt.) Si calcoli l'antitrasformata di Laplace $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$ della seguente funzione

$$F(s) = \frac{s}{(s-2)(s-1)^2}$$

Soluzione: $F(s)$ ha un polo singolo in $s = 2$ ed un polo doppio in $s = 1$. Utilizzando la formula d'inversione, si ha allora che

$$f(t) = res\left(\frac{se^{st}}{(s-2)(s-1)^2}, 1\right) + res\left(\frac{se^{st}}{(s-2)(s-1)^2}, 2\right).$$

Poiché

$$res\left(\frac{se^{st}}{(s-2)(s-1)^2}, 2\right) = \lim_{s\to 2}\frac{se^{st}}{(s-1)^2} = 2e^{2t}$$

ed inoltre

$$res\left(\frac{se^{st}}{(s-2)(s-1)^2}, 1\right) = \lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left(\frac{se^{st}}{s-2}\right)$$
$$= \lim_{s\to 1}\frac{(e^{st}+ste^{st})(s-2)-se^{st}}{(s-2)^2} = -te^t - 2e^t,$$

segue che

$$f(t) = -te^t - 2e^t + 2e^{2t}.$$

ESERCIZIO 2. **(10 pt.)** Si calcolino gli sviluppi di Laurent in $z_0 = i$, specificando in quali regioni sono validi, della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}.$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{(z-i)(z-i+2i)} = \frac{1}{(z-i)2i\left(1+\frac{z-i}{2i}\right)} = \frac{1}{2i(z-i)} \frac{1}{\left[1-\left(\frac{z-i}{-2i}\right)\right]}$$

Converge per $\left|\frac{z-i}{-2i}\right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{z-i}{-2i} < 1 \to 2i > z-i > -2i$

$\to z < 3i, \ z > -i$

1 $\frac{1}{2i(z-i)} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(-2i)^n}(z-i)^n$

ESERCIZIO 3. **(10 pt.)** Si calcoli l'antitrasformata di Laplace $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$ della seguente funzione

$$F(s) = \frac{s}{(s-2)(s-1)^2}$$

$$F(s) = \frac{R_1}{s-2} + \frac{R_2}{(s-1)^2} + \frac{R_3}{s-1}$$

$$R_1 = \lim_{s\to 2} \frac{s}{(s-1)^2} = 2$$

$$R_2 = \lim_{s\to 1} \frac{s}{s-2} = -1$$

$$R_3 = \lim_{s\to 1} \frac{-2}{(s-2)^2} = -2$$

$$f(t) = 2e^{2t} - te^{t} - 2e^{t}$$