Prova di Analisi Matematica II - 25 Gennaio 2018
Ing. Informatica
Prof.ssa Virginia De Cicco
Dott. Alessandro Ciallella

1)	2)	3)	4)	5)	VOTO:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Cognome	Nome

ESERCIZIO 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti. (**10 pt.**)

1) (I) Sia $f(x) = x\, cos\, x^3$, $x \in [-\pi, \pi)$ prolungata per periodicità $\forall x \in \mathbb{R}$. Il coefficiente a_0 dello sviluppo in serie di Fourier di f vale:

(a) $a_0 = 0$
(b) $a_0 = 1$
(c) $a_0 = \frac{\pi}{2}$
(d) $a_0 = \pi$.

(II) La trasformata di Laplace del segnale ritardato $f(t) = \cos(t-1)$ vale

(a) $F(s) = \frac{se^{-s}}{s^2+1}$
(b) $F(s) = \frac{se^{-s}}{s^2-2s+2}$
(c) $F(s) = \frac{s-1}{s^2-2s+1}$
(d) $F(s) = \frac{s}{s^2-2s+2}$.

(III) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^{2n}}$ per $x = 5$

(a) converge a 2
(b) converge a $\frac{1}{4}$
(c) converge a $\frac{1}{2}$
(d) diverge.

$$\Sigma \left(\frac{x-3}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x-3}{4}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

(IV) Il numero complesso $\mathrm{Log}(1+i)$ vale

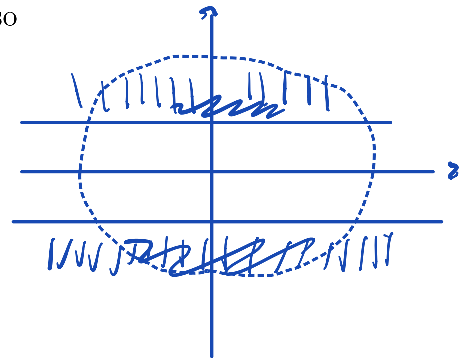
(a) $\frac{1}{2}\log 2 + i\frac{\pi}{4}$
(b) $\log 2 + i\frac{\pi}{2}$
(c) $\sqrt{2} + i\log\left(\frac{\pi}{4}\right)$
(d) i.

$$\mathrm{Log}(1+i) = \log|1+i| + i\arg(1+i) =$$
$$= \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\log 2 + i\frac{\pi}{4}$$

(V) L'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{4} + y^2 < 1,\ |y| \geq \frac{1}{2}\right\}$$

(a) è semplicemente connesso
(b) è chiuso
(c) non è connesso
(d) è aperto.



ESERCIZIO 2.

(i) Si dia la definizione di sviluppo in serie di Laurent centrato in z_0 per una funzione complessa.

(ii) Si scriva lo sviluppo in serie di Laurent della funzione $f(z) = \frac{1}{z}$ centrato in $z_0 = i$ e che converge per $|z - i| < 1$.

(iii) Si scriva lo sviluppo in serie di Laurent della funzione $f(z) = \frac{1}{z}$ centrato in $z_0 = i$ e che converge per $|z - i| > 1$.

- $$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{z+i-i} = \frac{1}{i+(z-i)} = \frac{1}{i}\,\frac{1}{1+\left[\frac{z-i}{i}\right]} = \frac{1}{i}\,\frac{1}{1-\left[-\left(\frac{z-i}{i}\right)\right]} =$$

$$= \frac{1}{i}\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{(z-i)^n}{i^n} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{i^{n+1}}(z-i)^n$$

Converge per $|z-i|<1$

- $$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{z+i-i} = = \frac{1}{i+(z-i)} = \frac{1}{(z-i)\left[\frac{i}{(z-i)}+1\right]} =$$

$$= \frac{1}{(z-i)}\cdot\frac{1}{1-\left[\left(-\frac{i}{(z-i)}\right)\right]} = \frac{1}{(z-i)}\sum(-1)^n\frac{i^n}{(z-i)^n}$$

ESERCIZIO 3.

(i) Si determini l'insieme

$$A = \{z : sen\, z = 0\}.$$

(ii) Si dia la dimostrazione di tale fatto.

(iii) Si cerchi l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della seguente funzione

$$f(z) = \frac{1}{sen(iz)}.$$

(iv) Si disegni tale insieme.

1) $\operatorname{sen} z = 0$, $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \to e^{iz} - e^{-iz} = 0$

$z = x + iy$: $e^{ix-y} - e^{-ix+y} = 0$

$e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^{y}(\cos(-x) + i \sin(-x)) = 0$

$e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^{y}(\cos(x) - i \sin(x)) = 0$

$e^{-y}\cos x - e^{y}\cos x + i e^{-y}\sin x + i e^{y} \sin x = 0$

$\begin{cases} \cos x\,(e^{-y} - e^{y}) = 0 \\ \sin x\,(e^{-y} + e^{y}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-y} - e^{y} = 0 \\ x = k\pi \end{cases} \to \begin{cases} y = 0 \\ x = k\pi \end{cases} \to \mathbb{C} \setminus \{z = k\pi\}$

2) $f(z) = \frac{1}{\sin(iz)} = \frac{1}{i \sinh(z)} = -\frac{i}{\sinh(z)}$ $\qquad \sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$

$= -i \frac{2}{e^{z} - e^{-z}} = \frac{-2i}{e^{x+iy} - e^{-x-iy}}$

$e^{x+iy} - e^{-x-iy} = 0 \to e^{x}\cos y + i e^{x} \sin y - e^{-x}\cos(y) + i e^{-x}\sin(y) = 0$

$\begin{cases} \cos y\,(e^{x} - e^{-x}) = 0 \\ \sin y\,(e^{x} + e^{-x}) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = k\pi \end{cases}$ $\qquad \mathbb{C} \setminus \{z = k\pi i\}$ ins. di def. e olomorfia

$\sqrt{x+iy}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+iy}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{i}{2\sqrt{x+iy}} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x+iy}} = -i\,\frac{i}{2\sqrt{x+iy}}$$

Olomorfa in $\mathbb{C}^{**}$, definita e continua in $\mathbb{C}$.

ESERCIZIO 4.

(i) Si dia la definizione della funzione $f(z) = \sqrt{z}$ in campo complesso, precisandone l'insieme di definizione, di continuità e di olomorfia.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

(ii) Si determini l'aperto di olomorfia della funzione

$$g(z) = \sqrt{i(|z+2|^2 - 9) - 1}$$

e lo si rappresenti graficamente sul piano complesso.

$f(z) = z^{\beta}$ con $\beta = \frac{1}{n}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ è definita e continua in $\mathbb{C}$

e olomorfa in $\mathbb{C}^{**}$

$$z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log z} = e^{\frac{1}{2}(\log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi))} =$$

$$e^{\log|z|^{\frac{1}{2}}} e^{i\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{2}\right)} = |z|^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{2}\right)\right)$$

$$g(z) = \sqrt{i(|z+2|^2 - 9) - 1}$$

$$= \sqrt{i(|x+iy+2| - 9) - 1} =$$

$$= \sqrt{i(|(x+2)+iy| - 9) - 1} =$$

$$= \sqrt{i((x+2)^2 + y^2 - 9) - 1} = \sqrt{i(x^2 + 2x + 4 + y^2 - 9) - 1} =$$

$$= \sqrt{i(x^2 + y^2 + 2x - 5) - 1}$$

$$\mathbb{C} \setminus \begin{cases} \operatorname{Re}(i(|z+2|^2 - 9) - 1) \le 0 \\ \operatorname{Im}(i(|z+2|^2 - 9) - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{C} \setminus \{x^2 + y^2 + 2x - 5 = 0\}$$

ESERCIZIO 5.

(i) Sia dia la definizione di convergenza uniforme per una successione di funzioni.

(ii) Si studi la convergenza puntuale e si determini un intervallo di convergenza uniforme della seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = \arctan(3^{-nx}), \quad x \in [0, +\infty).$$

$f_n(x) = \arctan(3^{-nx}) \quad x \in [0, +\infty)$

Se $x = 0$ $\quad f_n(x) \to \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \quad n \to +\infty$

Se $x \in (0, +\infty)$ $\quad f_n(x) \to \arctan(0) = 0 \quad n \to +\infty$

In $[A, +\infty)$ con $A > 0$

$$\sup_{[A,+\infty)} \left| \arctan(3^{-nx}) \right| = \arctan(3^{-nA}) \to 0 \text{ per } n \to +\infty$$