

CORSO DI LAUREA IN
INGEGNERIA INFORMATICA E AUTOMATICA

Corso di RICERCA OPERATIVA

PROVA di AUTOVALUTAZIONE N.4

ESERCIZI

1. Una compagnia petrolifera americana dispone di tre terminal dai quali invia il greggio alle sue raffinerie mediante oleodotti. I tre terminal sono situati a Houston, a Casper e a Titusville e le raffinerie sono a Los Angeles, St. Louis, Freshair, Newark e Atlanta. Nella raffineria di Los Angeles c'è una richiesta mensile di 200000 barili di petrolio che può essere prelevato nel terminal di Houston e/o da quello di Casper; questi due terminal possono fornire greggio alla raffineria di Los Angeles ad un costo di, rispettivamente, 25\$ e 28\$ al barile. La raffineria di St. Louis richiede mensilmente 120000 barili e può ricevere il greggio da questi stessi due terminal al costo di, rispettivamente, 18\$ e 22\$ al barile. La raffineria di Freshair richiede mensilmente 230000 barili e può ricevere greggio oltre che da questi due terminal, anche dal terminal di Titusville ad un costo di, rispettivamente, 19\$, 21\$ e 17\$ al barile. La raffineria di Newark richiede 190000 barili al mese e può essere rifornita solamente dal terminal di Titusville ad un costo di 14\$ al barile. La raffineria di Atlanta richiede mensilmente 150000 barili di greggio e può essere rifornita da terminal di Titusville al costo di 14\$ al barile e dal terminal di Houston al costo di 20\$ al barile. I terminal hanno la seguente disponibilità mensile: Houston 350000 barili, Casper 250000 barili e Titusville 300000 barili. Inoltre, a causa della limitata capacità degli oleodotti, dal terminal di Casper a Los Angeles non possono essere trasportati ogni mese più di 180000 barili e non più di 150000 dal terminal di Houston a Los Angeles. Costruire un modello lineare che permetta di determinare un piano mensile per rifornire ciascuna raffineria del quantitativo di greggio richiesto, minimizzando il costo complessivo.
2. Un mobilificio costruisce un modello di libreria con assi di legno (stesso spessore e larghezza) ma di lunghezza variabile. Per la costruzione di uno stock di librerie sono necessari

1500	assi da metri	4
2000	"	2
2500	"	1.5

Il mobilificio si rifornisce presso una falegnameria che può fornire solo assi di due lunghezze fissate: da metri 7 al prezzo di 10 Euro ciascuno e da metri 3 al prezzo di 5 Euro ciascuno. Quindi il mobilificio deve acquistare assi di queste due lunghezze per poi ottenere assi delle lunghezze desiderate effettuando vari tagli. Si vuole determinare quanti sono gli assi da ordinare per realizzare queste librerie cercando di minimizzare gli scarti nel taglio (e quindi la spesa), supponendo che non ci siano vincoli di disponibilità massima da parte della falegnameria e supponendo che per vincoli tecnologici e anche per evidente convenienza le modalità di taglio sono solo quelle riportate nelle seguenti tabelle (in ogni colonna i dati indicano il numero di assi di una determinata lunghezza che si ottengono tagliando un modulo standard; ad esempio la prima colonna della prima tabella indica che tagliando il modulo standard da metri 7 secondo la modalità di taglio M1 si ottengono un asse da 4 metri e un asse da 2 metri):

Assi da metri 7:

	M1	M2	M3	M4	M5
Assi da 4 m.	1		1		
Assi da 2 m.	1			3	2
Assi da 1.5 m.		4	2		2

Assi da metri 3:

	N1	N2
Assi da 4 m.		
Assi da 2 m.	1	
Assi da 1.5 m.		2

Costruire un modello lineare che rappresenti la situazione descritta.

3. Risolvere graficamente i seguenti problemi di Programmazione Lineare:

$$(a) \quad \begin{cases} \min x_1 + 6x_2 \\ x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ 2x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} \max 2x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 13 \\ 4x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

QUESTIONARIO

1. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

- (a) l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 8, \ x_1 + x_2x_3 - 5x_3 \geq 2\}$ è un poliedro;
- ☒ (b) un poliedro è un insieme convesso;
- (c) un poliedro può essere costituito da un numero finito di punti (distinti);
- (d) un poliedro è un insieme limitato.

2. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

- (a) l'intersezione tra due poliedri non è, in generale, un insieme convesso;
- (b) dato un punto x_1 di un poliedro è sempre possibile determinare un altro punto x_2 appartenente al poliedro tale che esistono valori di $\lambda \in [0, 1]$ per cui il punto $z = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ non appartiene al poliedro;
- ☒ (c) un politopo è un insieme convesso;
- (d) l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 3, \ 0 \leq x_2 \leq 5, \ x_1 + x_2 \geq 1, \ x_1^2 + 2x_2 \geq 2\}$ è un politopo.

3. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

- (a) un insieme convesso ammette sempre vertici;
- ☒ (b) un insieme convesso può avere un numero infinito di vertici;
- ☒ (c) un politopo ammette sempre vertici;
- (d) un poliedro in \mathbb{R}^n possiede un numero di vertici pari al più ad n .

4. Si consideri il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, \ x \geq 0\}$ con A matrice $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette:

- (a) P ammette sempre vertici;
- (b) P non ammette vertici;
- ☒ (c) P può ammettere l'origine degli assi come vertice;
- (d) P è un politopo.

1. Una compagnia petrolifera americana dispone di tre terminal dai quali invia il greggio alle sue raffinerie mediante oleodotti. I tre terminal sono situati a Houston, a Casper e a Titusville e le raffinerie sono a Los Angeles, St. Louis, Freshair, Newark e Atlanta. Nella raffineria di Los Angeles c'è una richiesta mensile di 200000 barili di petrolio che può essere prelevato nel terminal di Houston e/o da quello di Casper; questi due terminal possono fornire greggio alla raffineria di Los Angeles ad un costo di, rispettivamente, 25\$ e 28\$ al barile. La raffineria di St. Louis richiede mensilmente 120000 barili e può ricevere il greggio da questi stessi due terminal al costo di, rispettivamente, 18\$ e 22\$ al barile. La raffineria di Freshair richiede mensilmente 230000 barili e può ricevere greggio oltre che da questi due terminal, anche dal terminal di Titusville ad un costo di, rispettivamente, 19\$, 21\$ e 17\$ al barile. La raffineria di Newark richiede 190000 barili al mese e può essere rifornita solamente dal terminal di Titusville ad un costo di 14\$ al barile. La raffineria di Atlanta richiede mensilmente 150000 barili di greggio e può essere rifornita da terminal di Titusville al costo di 14\$ al barile e dal terminal di Houston al costo di 20\$ al barile. I terminal hanno la seguente disponibilità mensile: Houston 350000 barili, Casper 250000 barili e Titusville 300000 barili. Inoltre, a causa della limitata capacità degli oleodotti, dal terminal di Casper a Los Angeles non possono essere trasportati ogni mese più di 180000 barili e non più di 150000 dal terminal di Houston a Los Angeles. Costruire un modello lineare che permetta di determinare un piano mensile per rifornire ciascuna raffineria del quantitativo di greggio richiesto, minimizzando il costo complessivo.

$i = \text{terminal}$ $j = \text{raffineria}$

$X_{HL}, X_{HS}, X_{HF}, X_{HA}$
 X_{CL}, X_{CS}, X_{CF}
 X_{TF}, X_{TN}, X_{TA}

} quantità di barre (10^3) da terminal i a raffineria j

funzione obiettivo:

$$\min [25X_{HL} + 28X_{CL} + 18X_{HL} + 22X_{CL} + 19X_{HL} + 21X_{CL} + 17X_{TF} + 14X_{TN} + 14X_{TA} + 20X_{HA}]$$

vincoli:

$$X_{HL} + X_{CL} = 200$$

$$X_{HL} + X_{HS} + X_{HF} + X_{HA} \leq 350$$

$$X_{CL} \leq 180$$

$$X_{HS} + X_{CS} = 120$$

$$X_{CL} + X_{CS} + X_{CF} \leq 250$$

$$X_{HL} \leq 150$$

$$X_{HF} + X_{CF} + X_{TF} = 230$$

$$X_{TF} + X_{TN} + X_{TA} \leq 300$$

$$X_{TN} = 190$$

$$X_{HA} + X_{TA} = 150$$

$$X_{ij} \geq 0$$

2. Un mobilificio costruisce un modello di libreria con assi di legno (stesso spessore e larghezza) ma di lunghezza variabile. Per la costruzione di uno stock di librerie sono necessari

1500	assi da metri	4
2000	"	2
2500	"	1.5

Il mobilificio si rifornisce presso una falegnameria che può fornire solo assi di due lunghezze fissate: da metri 7 al prezzo di 10 Euro ciascuno e da metri 3 al prezzo di 5 Euro ciascuno. Quindi il mobilificio deve acquistare assi di queste due lunghezze per poi ottenere assi delle lunghezze desiderate effettuando vari tagli. Si vuole determinare quanti sono gli assi da ordinare per realizzare queste librerie cercando di minimizzare gli scarti nel taglio (e quindi la spesa), supponendo che non ci siano vincoli di disponibilità massima da parte della falegnameria e supponendo che per vincoli tecnologici e anche per evidente convenienza le modalità di taglio sono solo quelle riportate nelle seguenti tabelle (in ogni colonna i dati indicano il numero di assi di una determinata lunghezza che si ottengono tagliando un modulo standard; ad esempio la prima colonna della prima tabella indica che tagliando il modulo standard da metri 7 secondo la modalità di taglio M1 si ottengono un asse da 4 metri e un asse da 2 metri):

Assi da metri 7:

	M1	M2	M3	M4	M5
Assi da 4 m.	1		1		
Assi da 2 m.	1			3	2
Assi da 1.5 m.		4	2		2

Assi da metri 3:

	N1	N2
Assi da 4 m.		
Assi da 2 m.	1	
Assi da 1.5 m.		2

Costruire un modello lineare che rappresenti la situazione descritta.

$x_i \equiv$ assi da 7m tagliati con modalità M_i , $i=1, \dots, 5$

$y_j \equiv$ assi da 3m tagliati con modalità N_j , $j=1, 2$

Funzione obiettivo: $\min [10(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 5(y_1 + y_2)]$

Vincoli:

$$x_1 + x_3 \geq 1500$$

$$x_1 + 3x_4 + 2x_5 + y_1 \geq 2000$$

$$4x_2 + 2x_3 + 3x_5 + 2y_2 \geq 2500$$

$$x_i \geq 0, y_j \geq 0$$

3. Risolvere graficamente i seguenti problemi di Programmazione Lineare:

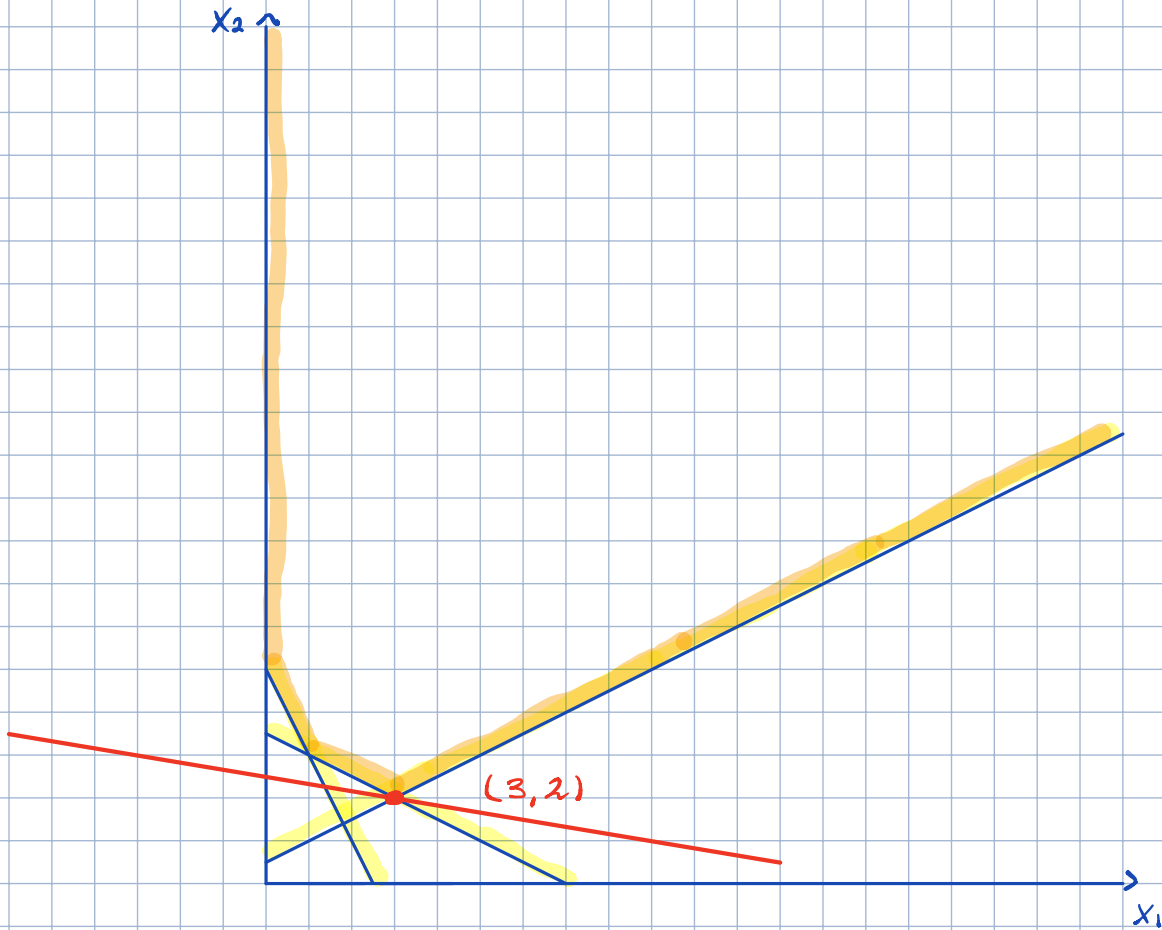
(a)

$$\begin{cases} \min x_1 + 6x_2 \\ x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ 2x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \max 2x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 13 \\ 4x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a)



b)

