ESERCITAZIONE 8– DOCENTE: MAURO PICCIONI, TUTOR: HLAFO ALFIE MIMUN

April 26, 2020

1. ESERCIZI

Ex. 1: Un bastone di lunghezza 1 viene diviso in due parti. Il punto di rottura ha una posizione aleatoria X con distribuzione Unif($[0,1]$). Si calcoli la PDF, la CDF ed il valore atteso della lunghezza del pezzo del bastone più lungo.

Ex. 2: Joe sta aspettando l'uscita di un libro e, fissato un dato istante iniziale, il tempo di attesa (in anni) si distribuisce come una variabile $T \sim \mathrm{Exp}(1/5)$. La notizia dell'uscita del libro viene pubblicata su un sito web che Joe guarda una volta alla fine di ogni giorno (piuttosto che esattamente al tempo T). Sia X la variabile che denota tale misurazione, nel senso che $X = 1$ vuol dire che la notizia verrà pubblicata entro il primo giorno, $X = 2$ vuol dire che la notizia viene postata entro il secondo giorno (ma dopo il primo giorno), e così via. Si assuma che l'anno abbia 365 giorni. Si trovi la PMF di X e si indichi se è una distribuzione nota.

Ex. 3 Sia $U \sim \mathrm{Unif}((-1,1))$.
- **(3a)** Si calcoli $\mathbb{E}[U]$, $\mathrm{Var}(U)$ e $\mathbb{E}[U^4]$.
- **(3b)** Si calcoli CDF e la PDF di U^2, $\mathbb{E}[U^2]$ e $\mathrm{Var}(U^2)$.

Ex. 4: Fred vuole vendere la sua macchina e decide di venderla alla prima persona che gli offra almeno 15.000 dollari. Assumiamo che le offerte siano variabili aleatorie i.i.d, ognuna con distribuzione esponenziale di media 10.000 dollari.
- **(4a)** Si calcoli il valore atteso del numero di offerte che Fred riceve;
- **(4b)** Si calcoli il valore atteso del guadagno che Fred riceve dalla macchina.

Ex. 5: Un ufficio postale ha due impiegati. Alice entra nell'ufficio postale e trova che entrambi gli impiegati stanno servendo due clienti: Bob e Claire. Alice è la prossima cliente che sarà servita non appena uno tra Bob e Claire avrà finito. Si assuma che ogni impiegato impiega un tempo aleatorio con distribuzione $\mathrm{Exp}(\lambda)$ per servire un cliente, indipendentemente dagli altri clienti.
- **(5a)** Si calcoli la probabilità che Alice sia l'ultima ad essere servita completamente (ovvero Bob e Claire sono già stati serviti completamente quando Alice ha concluso l'operazione).
- **(5b)** Si calcoli il tempo medio che Alice passa nell'ufficio postale.

2. SOLUZIONI

Ex. 1: Il bastone viene diviso in due pezzi, uno di lunghezza X e l'altro di lunghezza $1-X$. Denotiamo con Y la lunghezza del pezzo più lungo e notiamo che $Y = \max\{X, 1-X\}$. Studiamo la CDF di Y, dunque calcoliamo $\mathbb{P}(Y \le t)$ per $t \in \mathbb{R}$. Notiamo che Y deve essere almeno $1/2$ ed inoltre

– $\mathbb{P}(Y \le t) = 1$ se $t > 1$ (in quanto il bastone è lungo al più 1 e dunque ogni pezzo in cui è stato diviso è lungo al più 1.);
– $\mathbb{P}(Y \le t) = 0$ se $t < 1/2$ (in quanto la lunghezza del pezzetto più lungo è almeno 1/2).

Consideriamo dunque $t \in [1/2, 1]$. SI osservi che il pezzo più lungo risulta più corto di t se entrambi i pezzi in cui è stato diviso il bastone sono più corti di t, ovvero

$$\mathbb{P}(Y \le t) = \mathbb{P}(X \le t, 1 - X \le t)\,.$$

Notiamo che

$$\mathbb{P}(X \le t, 1 - X \le t) = \mathbb{P}(X \le t, X \ge 1 - t) = \mathbb{P}(1 - t \le X \le t) = F(t) - F(1 - t)\,,$$

dove F è la CDF della variabile aleatoria $X \sim \mathrm{Unif}([0, 1])$ ed è definita come

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0; \\ t, & \text{se } t \in [0, 1]; \\ 1, & \text{se } t > 1\,. \end{cases}$$

Dunque poiché stiamo analizzando il caso $t \in [1/2, 1]$ si ha

$$\begin{aligned} G(t) := \mathbb{P}(Y \le t) = \mathbb{P}(X \le t, 1 - X \le t) = \mathbb{P}(X \le t, X \ge 1 - t) = \\ = \mathbb{P}(1 - t \le X \le t) = F(t) - F(1 - t) = t - (1 - t) = 2t - 1\,. \end{aligned}$$

Dunque Y ha CDF

$$\mathbb{P}(Y \le t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 1/2; \\ 2t - 1, & \text{se } t \in [1/2, 1]; \\ 1, & \text{se } t > 1\,. \end{cases}$$

Si noti che questa è esattamente la CDF di una variabile aleatoria con distribuzione $\mathrm{Unif}([1/2, 1])$ e dunque $Y \sim \mathrm{Unif}([1/2, 1])$.

La PDF di Y (che denotiamo con g) è data dalla derivata della sua CDF (cioè di G). Dunque

$$g(t) = G'(t) = \begin{cases} 2, & \text{se } t \in [1/2, 1], \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Infine, dalla teoria studiata a lezione, sappiamo che una variabile aleatoria con distribuzione $\mathrm{Unif}([a, b])$ ha valore atteso $\frac{a+b}{2}$. Dunque, essendo $Y \sim \mathrm{Unif}([1/2, 1])$, si ha che $\mathbb{E}[Y] = \frac{3}{4}$.

Ex. 2: Sia $k \in \mathbb{N}$. Poiché T è il tempo di attesa misurato in anni. Se ad esempio $X = 2$, significa che quando Joe controlla la sera del secondo giorno il sito e trova la notizia dell'uscita del libro. Poiché T è misurato in anni ed una anno contiene 365 giorni, si ha che $X = 2$ implica $\frac{1}{365} \le T < \frac{2}{365}$. In generale

$$X = k \Rightarrow \frac{k - 1}{365} \le T < \frac{k}{365}\,.$$

Essendo $T \sim \mathrm{Exp}(1/5)$ si ha che

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}\left(\frac{k - 1}{365} \le T < \frac{k}{365}\right) = F\left(\frac{k}{365}\right) - F\left(\frac{k - 1}{365}\right)\,, \tag{1}$$

dove F è la CDF di T data da

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t/5}, & \text{se } t \geq 0; \\ 0, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Dunque da (1) si ha per $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X = k) = F\left(\frac{k}{365}\right) - F\left(\frac{k-1}{365}\right) = 1 - e^{-\frac{k}{1825}} - (1 - e^{-\frac{k-1}{1825}}) =$$
$$= e^{-\frac{k-1}{1825}} - e^{-\frac{k}{1825}} = \left(1 - e^{-\frac{1}{1825}}\right) e^{-\frac{k-1}{1825}}.$$

Notiamo dunque che $X \sim \text{Geo}\left(1 - e^{-\frac{1}{1825}}\right)$.

Ex. 3:(3a) Sappiamo che una variabile con distribuzione $\text{Unif}((a,b))$ ha media $\frac{a+b}{2}$ e varianza $\frac{(b-a)^2}{12}$. Dunque essendo $U \sim \text{Unif}((-1,1))$ si ha

$$\mathbb{E}[U] = \frac{-1+1}{2} = 0, \qquad \text{Var}(U) = \frac{(1-(-1))^2}{12} = \frac{1}{3}.$$

Calcoliamo $\mathbb{E}[U^4]$ ricordando che la PDF di $U \sim \text{Unif}((-1,1))$ è

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}, & \text{se } t \in (-1,1); \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si ha

$$\mathbb{E}[U^4] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 \cdot f(t)\, dt = \int_{-1}^{1} t^4 \cdot \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

(3b) Calcoliamo la CDF di U^2, che denotiamo con $G(t)$ per $t \in \mathbb{R}$. Se denotiamo con F la CDF di $U \sim \text{Unif}((-1,1))$

$$G(t) = \mathbb{P}(U^2 \leq t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0, \\ \mathbb{P}(|U| \leq \sqrt{t}) = \mathbb{P}(-\sqrt{t} \leq U \leq \sqrt{t}) = F(\sqrt{t}) - F(-\sqrt{t}), & \text{se } t \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ricordiamo che essendo $U \sim \text{Unif}((-1,1))$, la sua CDF è

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq -1; \\ \frac{t-(-1)}{1-(-1)} = \frac{t+1}{2}, & \text{se } t \in (-1,1); \\ 1, & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Dunque

$$F(\sqrt{t}) - F(-\sqrt{t}) = \begin{cases} 1 - 0 = 1, & \text{se } t \geq 1; \\ \frac{\sqrt{t}+1}{2} - \frac{-\sqrt{t}+1}{2} = \sqrt{t}, & \text{se } t \in [0,1). \end{cases} \tag{3}$$

Dunque da (2) e (3) si ha che la CDF di U^2 è data da

$$G(t) = \mathbb{P}(U^2 \leq t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0; \\ \sqrt{t}, & \text{se } t \in [0,1); \\ 1, & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Dunque la PDF di U^2 è data da

$$g(t) := G'(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t}}, & \text{se } t \in [0,1); \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcoliamo $\mathbb{E}[U^2]$

$$\mathbb{E}[U^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot g(t)\,dt = \int_0^1 t^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \int_0^1 \frac{t^{3/2}}{2}\,dt = \frac{1}{2}\cdot \frac{t^{5/2}}{5/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}\,.$$

Calcoliamo $\mathrm{Var}(U^2)$. Ricordiamo che nella parte (3a) di questo esercizio abbiamo calcolato che $\mathbb{E}[U^4] = \frac{1}{5}$. Dunque

$$\mathrm{Var}(U^2) = \mathbb{E}[(U^2)^2] - \mathbb{E}[U^2]^2 = \mathbb{E}[U^4] - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} = \frac{4}{25}\,.$$

Ex. 4:(4a) Si ricordi che se X è una variabile con distribuzione esponenziale di media 10.000, allora $X \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{10.000}\right)$. Indichiamo con N il numero di offerte che Fred riceve. Se $N = k$, vuol dire che le prime $k-1$ offerte erano tutte inferiori a 15.000 dollari, mentre la k-esima è maggiore o uguale a 15.000 dollari. Poiché le offerte sono indipendenti tra loro ed ogni offerta ha probabilità di essere maggiore di 15.000 dollari pari a $p := \mathbb{P}(X \geq 15.000)$, dove $X \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{10.000}\right)$. Dunque

$$\mathbb{P}(N = k) = (1-p)^{k-1}p\,,$$

e quindi $N \sim \mathrm{Geo}(p)$. Calcoliamo p. Se definiamo F la CDF di $X \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{10.000}\right)$, che ricordiamo essere data da

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{10.000}}, & \text{se } t \geq 0; \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

si ha

$$p := \mathbb{P}(X \geq 15.000) = 1 - \mathbb{P}(X < 15.000) = 1 - F(15.000) = 1 - (1 - e^{-\frac{15.000}{10.000}}) = e^{-\frac{3}{2}}\,.$$

Dunque $N \sim \mathrm{Geo}\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)$. Di conseguenza $\mathbb{E}[N] = \frac{1}{e^{-3/2}} = e^{3/2}$.

(4b) Sia X l'offerta che viene accettata. Di questa offerta sappiamo che è maggiore di 15.000 dollari. Dunque dobbiamo calcolare per $X \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{10.000}\right)$ il valore atteso condizionato $\mathbb{E}[X \,|\, X \geq 15.000]$. Quando condizioniamo all'evento $X \geq 15.000$, possiamo definire $X = Y + 15.000$. Per la proprietà di perdita di memoria della distribuzione esponenziale, si ha che $Y \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{10.000}\right)$ e dunque $\mathbb{E}[Y] = 10.000$. Quindi dalla linearità del valore atteso si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X \,|\, X \geq 15.000] &= \mathbb{E}[Y + 15.000 \,|\, Y \geq 0] = \mathbb{E}[Y + 15.000] = \\ &= \mathbb{E}[Y] + 15.000 = 10.000 + 15.000 = 25.000\,, \end{aligned}$$

dove l'uguaglianza $\mathbb{E}[Y + 15.000 \,|\, Y \geq 0] = \mathbb{E}[Y + 15.000]$ è dovuta al fatto che, essendo $Y \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{10.000}\right)$, si ha che $\mathbb{P}(Y \geq 0) = 1$ e dunque stiamo condizionando ad un evento certo, che è equivalente a non condizionare.

Ex. 5:(5a) Supponiamo che Bob finisca prima di Claire. Condizionando al tempo impiegato da Bob, il tempo che impiegherà ulteriormente Claire a finire l'operazione ha sempre distribuzione $\mathrm{Exp}(\lambda)$ per la proprietà di perdita di memoria della distribuzione esponenziale. Dunque il tempo che impiegherà Claire a finire l'operazione dal momento in cui Bob ha finito ed il tempo che impiegherà Alice a finire l'operazione hanno stessa distribuzione $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Poichè Alice cominicia nel momento in cui Bob finisce, il quesito (5a) si tramuta nel capire quale tra due variabili con stessa distribuzione $\mathrm{Exp}(\lambda)$ è maggiore dell'altra. Dunque definite $Y, X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ si ha che il problema è equivalente a calcolare $\mathbb{P}(Y < Z)$. Poiché $\mathbb{P}(Y = Z) = 0$ essendo Y, Z variabili aleatorie continue e poiché per simmetria (avendo Y, Z stessa distribuzione) si ha $\mathbb{P}(Y < Z) = \mathbb{P}(Z > Y)$, allora

$$1 = \mathbb{P}(Y < Z) + \mathbb{P}(Z > Y) + \mathbb{P}(Z = Y) \Rightarrow 1 = 2\mathbb{P}(Y < Z) + 0 \Rightarrow \mathbb{P}(Y < Z) = \frac{1}{2}\,.$$

Dunque la risposta al quesito (5a) è $\frac{1}{2}$ se Bob finisce prima di Claire. Notiamo che il problema portava alla stessa soluzione se avesse finito prima Claire e poi Bob (essendo la distribuzione del tempo impiegato da Bob uguale a quella del tempo impiegato da Claire). Dunque se definiamo gli eventi

$$A = \{\text{Alice finisce per ultima}\}\,,$$

$$B = \{\text{Bob è il primo a finire}\} \Rightarrow B^c = \{\text{Claire è la prima a finire}\}\,,$$

si ha

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \,|\, B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \,|\, B^c)\mathbb{P}(B^c) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(B) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B^c) = \frac{1}{2}\,.$$

Dunque $\frac{1}{2}$ è la risposta al quesito (5a).

(5b) Sia U la variabile che denota il tempo impiegato da Bob per effettuare le operazioni, V la variabile che denota il tempo impiegato da Claire e Z il tempo impiegato da Alice. Dunque sia ha che il tempo medio che Alice passa nell'ufficio postale è dato da

$$\mathbb{E}[\min\{U, V\}] + \mathbb{E}[Z]\,.$$

Essendo $U, V \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ ed indipendenti, si ha che la CDF di $\min\{U, V\}$ è data da

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\min\{U, V\} \le t) &= 1 - \mathbb{P}(\min\{U, V\} > t) = 1 - \mathbb{P}(U > t, V > t) = 1 - \mathbb{P}(U > t)\mathbb{P}(V > t) = \\ &= 1 - [1 - \mathbb{P}(U \le t)][1 - \mathbb{P}(V \le t)] = \\ &= 1 - [1 - F(t)][1 - F(t)] = 1 - [1 - F(t)]^2 = \begin{cases} 1 - e^{-2\lambda}\,, & \text{se } t \ge 0; \\ 0, & \text{se } t < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

dove F è la CDF di una variabile aleatoria con distribuzione $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Dunque notiamo che la variabile aleatoria $\min\{U, V\}$ ha distribuzione $\mathrm{Exp}(2\lambda)$. Poiché una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di parametro λ ha media $1/\lambda$, si ha

$$\mathbb{E}[\min\{U, V\}] + \mathbb{E}[Z] = \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{3}{2\lambda}\,,$$

che è la risposta al quesito (5b).