ESERCIZIO 4

Sia X il numero delle teste in 6 lanci di moneta bilanciata.

A) Determinare la PMF di X condizionata all'evento $A_{1,2}$={i primi 2 lanci testa}

B) Determinare la PMF di X condizionata all'evento B={almeno due lanci testa}

C) Un amico afferma che le due probabilità sono identiche in base al seguente ragionamento:

> *nell'esercizio A) al posto di $A_{1,2}$ posso prendere $A_{i,j}$={il lancio i e il lancio j testa}, con i diverso da j, e il risultato rimane lo stesso, quindi dato che l'evento B è unione degli $A_{i,j}$ con i diverso da j, per la formula delle probabilità totali le due PMF sono identiche.*

Dove sta l'errore?

A) $X = \#$ teste in 6 lanci $\qquad X \in \{0, 1, \dots, 6\}$

$\mathbb{P}(X = k \mid A_{12}) = 0 \qquad k = 1, 0$

TTCCCC

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X=2 \mid A_{12}) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \left(= \frac{\mathbb{P}(\{X=2\} \cap A_{12})}{\mathbb{P}(A_{12})} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right) \\ \mathbb{P}(X=3 \mid A_{12}) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}(X=4 \mid A_{12}) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8} \\ \mathbb{P}(X=5 \mid A_{12}) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}(X=6 \mid A_{12}) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \end{cases}$$

B) $\mathbb{P}(\text{nessuna testa}) = \mathbb{P}(CCCCCC) = \left(\frac{1}{2}\right)^6$, with $\mathbb{P}(\text{nessuna testa}) = \mathbb{P}(X=0)$

$\mathbb{P}(\text{esattam. 1 testa}) = \mathbb{P}(X=1) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$

$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 =$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^6 (2^6 - 7) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot 57$

$X \in \{2, 3, \dots, 6\}$

$$\mathbb{P}(X=k \mid B) = 0 \quad \text{se } k \notin \{2,3,\dots,6\}$$

$$\mathbb{P}(X=2 \mid B) = \frac{\mathbb{P}(X=2, B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(X=2)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\binom{6}{2}\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^6}}{\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^6}\cdot 57} = \frac{15}{57}$$

$$\mathbb{P}(X=3 \mid B) = \frac{\binom{6}{3}\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^6}}{\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^6}\cdot 57} = \frac{20}{57}$$

$$\mathbb{P}(X=4 \mid B) = \frac{\binom{6}{4}}{57} = \frac{15}{57}$$

$$\mathbb{P}(X=5 \mid B) = \frac{\binom{6}{5}}{57} = \frac{6}{57}$$

$$\mathbb{P}(X=6 \mid B) = \frac{1}{57}$$

c) $\mathbb{P}(X=k \mid A_{ij}) = \mathbb{P}(X=k \mid A_{12}) \qquad \forall\, i \neq j,\ i,j \in \{1,\dots,6\}$

$$B = \bigcup_{i \neq j} A_{ij}$$

$$\mathbb{P}(X=k \mid B) = \sum_{i \neq j} \mathbb{P}(X=k \mid B, A_{ij})\, \mathbb{P}(A_{ij} \mid B)$$

$$= \sum_{i \neq j} \mathbb{P}(X=k \mid A_{ij})\, \mathbb{P}(A_{ij} \mid B)$$

$$= \mathbb{P}(X=k \mid A_{12}) \sum_{i \neq j} \mathbb{P}(A_{ij} \mid B)$$

A_{ij} NON SONO DISGIUNTI

$A_{12} \cap A_{34} \neq \emptyset$

TTTTTT

ESERCIZIO 5

In una città americana ci sono n elettori, ciascuno dei quali ha una probabilità 4/5 di registrarsi per le elezioni presidenziali. Sia X il numero degli elettori che si registrano. Se un elettore si registra, decide successivamente di votare con probabilità 3/4. Sia quindi Y il numero dei votanti alle elezioni presidenziali.

A) Qual è la PMF di Y?

B) Sapendo che Y=j, quale la PMF di X-Y?

C) Sapendo che Y=j, determinare infine la PMF di X

R_i = l'elettore i si registra $\qquad \mathbb{P}(R_i) = \frac{4}{5}$

X = # elettori che si registrano $= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(R_i)$

V_i = l'elettore i va a votare

$\mathbb{P}(V_i \mid R_i) = \frac{3}{4}$

Y = # elettori che vanno a votare $= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(V_i)$

$\tilde{R}_i = \mathbb{1}(R_i) \sim \text{Bernoulli}(4/5)$

$\boxed{X \sim \text{Binomiale}(n, 4/5)}$

$$\mathbb{P}(V_i) = \mathbb{P}(V_i \mid R_i)\,\mathbb{P}(R_i) + \mathbb{P}(V_i \mid R_i^c)\,\mathbb{P}(R_i^c) =$$

$$= \frac{3}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

A) $\tilde{V}_i = \mathbb{1}(V_i) \sim \text{Bernoulli}(3/5)$

$Y = \sum_{i=1}^{n} \tilde{V}_i \sim \text{Binomiale}(n, 3/5)$

$$\boxed{\mathbb{P}(Y=k) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-k}} \qquad k = 0, \dots, n$$

B) $\mathbb{P}(X - Y = k \mid Y = j) = \qquad \boxed{k = 0, \dots, n-j}$

$X = k + j$

$$= \frac{\mathbb{P}(X - Y = k, Y = j)}{\mathbb{P}(Y = j)} = \frac{\mathbb{P}(X - j = k, Y = j)}{\mathbb{P}(Y = j)} =$$

$\mathbb{P}(Y = j \mid X = k+j)\, \mathbb{P}(X = k+j)$

$$= \frac{\mathbb{P}(Y=j \mid X=k+j)\,\mathbb{P}(X=k+j)}{\mathbb{P}(Y=j)} =$$

$$\mathbb{P}(Y=j \mid X=k+j) = \binom{k+j}{j}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{j}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k}$$

$k+j$ elettori registrati
j vanno a votare

$$= \frac{\binom{k+j}{j}\left(\frac{3}{\cancel{4}}\right)^{j}\left(\frac{1}{\cancel{4}}\right)^{k}\cdot\binom{n}{k+j}\cdot\left(\frac{\cancel{4}}{5}\right)^{k+j}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-k-j}}{\binom{n}{j}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{j}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-j}} =$$

$$= \frac{\binom{k+j}{j}\binom{n}{k+j}}{\binom{n}{j}}\cdot 3^{j-j}\cdot 5^{\cancel{-k}\cancel{-j}\cancel{-n}\cancel{+k}\cancel{+j}\cancel{+j}\cancel{+n}\cancel{-j}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j}\frac{\cancel{(k+j)!}}{\cancel{j!}\,k!}\cdot\frac{\cancel{n!}}{\cancel{(k+j)!}\,(n-k-j)!}\cdot\frac{\cancel{j!}\,(n-j)!}{\cancel{n!}} =$$

$$= \frac{(n-j)!}{k!\,(n-j-k)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} = \binom{n-j}{k}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j-k}}$$

Binomiale $(n-j, \frac{1}{2})$

j sono andati a votare
$n-j$ no

$X-Y=$ # elettori registrati ma che non sono

$X - Y =$ # elettori registrati ma che non sono andati a votare

$$\mathbb{P}(R_i \mid V_i^c) = \frac{\mathbb{P}(V_i^c \mid R_i)\,\mathbb{P}(R_i)}{\mathbb{P}(V_i^c)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$$

c) $\mathbb{P}(X = k \mid Y = j) = \mathbb{P}(X - j = k - j \mid Y = j) =$

$k = j, \dots, n$

$$= \mathbb{P}(X - Y = k - j \mid Y = j) =$$

$$= \binom{n-j}{k-j} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j}$$

ESERCIZIO 6

Si consideri una mano di poker in quattro (32 carte 7,8,9,10, J, Q, K, A per ciascuno dei 4 semi, da cui se ne scelgono 5 per ciascuno). Sia X il numero massimo di carte uguali tra loro tra le carte distribuite ad un giocatore.

A) Determinare la probabilità che X=4 e che X=3

B) Determinare la probabilità che X=0 e X=2

C) Come queste probabilità sono legate alle probabilità dei punti del poker?

7, 8, 9, 10, J, Q, K, A $\qquad 4 \cdot 8 = 32$

es: $\underbrace{7F, 7Q, 7P,}\ \underbrace{AQ, AP} \Rightarrow X = 3$

scelgo la carta diversa

POKER

A) $\mathbb{P}(X=4) = \dfrac{8 \cdot (7 \cdot 4)}{\binom{32}{5}} = \dfrac{\cancel{8}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{32}\cdot 31\cdot\cancel{30}\cdot 29\cdot\cancel{28}} = \dfrac{1}{31\cdot 29} = \dfrac{1}{899}$

numero di cui ho 4 carte

$$\mathbb{P}(X=3) = \frac{8\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{28}{2}}{\binom{32}{5}} = \frac{\cancel{8}\cdot\cancel{4}\cdot\frac{\cancel{28}\cdot 27}{\cancel{2}}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}^{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{32}\cdot 31\cdot\cancel{30}\cdot 29\cdot\cancel{28}} =$$

$$= \frac{27 \cdot 2}{31 \cdot 29} = \frac{54}{899}$$

TRIS 777AK
o
FULL 777AA

B)

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{\binom{8}{5} \cdot 4^5}{\binom{32}{5}} = \frac{\frac{\cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cancel{5} \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{32} \cdot 31 \cdot \cancel{30} \cdot 29 \cdot \cancel{28}} =$$

$$= \frac{4^4}{31 \cdot 29} = \frac{256}{899}$$

- 1 carta
- scala
- scala reale
- colore

$$\mathbb{P}(X=2) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=3) - \mathbb{P}(X=4) =$$

$$= \frac{899 - 256 - 54 - 1}{899} = \frac{588}{899}$$

- coppia
- doppia coppia