martedì 29 giugno 2021 11:27

1. Si consideri una PMF proporzionale a 2^n (ln 2)^n /n! per n intero non negativo. Qual è la massa che assegna a 0? Scegli un'alternativa: a. 1/4 b. 1/e c. ln 2 d. 1/2.

Si tratta di una PMF di Poisson di media $2\ln 2 = \ln 4$, quindi la probabilità di 0 è $e^{-\ln 4} = 1/4$.

1. Se X=1/(1-U)^2 , con U uniforme in (0,1) quale tra queste è la funzione di DENSITA' di X, per x>1? Scegli un'alternativa: a. 1/[2(√x)^3] b. 1/x c. 1-1/√x d. 2/(x-1)^3.

La CDF di X è $P((1-U)^{-2} \le x) = \mathbb{P}\left(U \le 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$
$= 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x > 1$, derivando si ottiene $\frac{1}{2x^{3/2}}$

1. Per dimezzare la lunghezza di un intervallo di confidenza per la media di una variabile normale con varianza nota, a parità di livello di confidenza, occorre che la numerosità campionaria sia: Scegli un'alternativa: a. dimezzata b. quadruplicata c. raddoppiata d. moltiplicata per il doppio della varianza della variabile campionata.

La lunghezza dell'intervallo è $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$: per dimezzarla n va moltiplicato per 4.

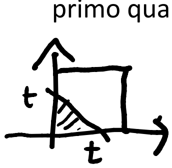
1. Per modellizzare la rete delle conoscenze tra 8 amici, supponiamo che due qualunque tra di essi si conoscano con probabilità 1/2, indipendentemente per tutte le coppie non ordinate di amici. Quando 3 tra questi si conoscono a vicenda, diciamo che si è verificata una TERNA. Quante terne ci attendiamo in media? Scegli un'alternativa: a. 8 b. 7 c. 42 d. 6.

Il numero delle terne è la somma delle $\binom{8}{3} = 7 \cdot 8 = 56$ indicatrici delle terne tra tutti i sottoinsiemi di amici di 3 elementi. Il valore atteso di una qualsiasi tra queste è $1/8$, quindi il valor atteso cercato è $56/8 = 7$.

1. Partendo da un'urna con una pallina bianca e una nera, si estraggono successivamente delle palline: in caso di estrazione bianca la pallina estratta viene rimessa nell'urna insieme ad un'altra pallina bianca. Sia X il numero di estrazioni fino a quando viene estratta la pallina nera. Scegli un'alternativa: a. ∞ b. 2 c. e d. π /6.

$$\mathbb{P}(X > k) = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\cdots\frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1} \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k) = +\infty$$

1. Se (U,V) è una coppia di variabili aleatorie con legge uniforme sul quadrato (0,1) , quale tra questi è il primo quartile di U+V? Scegli un'alternativa: a. 1/2 b. √2/2 c. 1/4 d. √3/2.



Si vuole che l'area tratteggiata sia uguale a $1/4$ quindi $\frac{t^2}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1. Una moneta bilanciata è lanciata fino a che esce la terza testa o la terza croce, la prima tra le due. Sapendo che questa condizione si è verificata PRIMA del quinto lancio, con che probabilità i primi tre lanci hanno dato un identico risultato? Scegli un'alternativa: a. 2/7 b. 3/8 c. 3/5 d. 2/5.

TTT TCTT e quelli che si ottengono scambiando che questa condizione si è verificata PRIMA del quinto lancio, con che probabilità i primi tre lanci hanno dato un identico risultato? Scegli un'alternativa: a. 2/7 b. 3/8 c. 3/5 d. 2/5.

TTT TCTT e quelli che si ottengono scambiando
CTTT TTCT T con C realizzano l'evento osservato.
Naturalmente il primo esito ha probabilità doppia
quindi la probabilità richiesta è 2/5.

1. Se X e Y sono variabili aleatorie nello spazio L tali che var(X)>var(X+Y)>var(X-Y) cosa possiamo dedurre da TUTTE queste disuguaglianze? Scegli un'alternativa: a. cov(X,Y)<-var(Y)/2 b. cov (X,Y)<0 c. cov(X,Y)>0 d. E' impossibile che valgano tutte queste disuguaglianze.

Per la prima disuguaglianza $0 > 2\,\mathrm{cov}(X,Y) + \mathrm{var}(Y)$,
per la seconda $\mathrm{cov}(X,Y) > 0$, che sono impossibili da
essere soddisfatte nello stesso tempo.

1. 4 amici vestono giacche di colore diverso, ad esempio di colore giallo, rosso, verde e blu, e le appoggiano a caso su 4 stampelle di questi stessi colori. Se la giacca rossa è appoggiata sulla stampella gialla e la giacca gialla sulla stampella rossa diciamo che si è verificata una TRASPOSIZIONE. Con quale probabilità si verifica ALMENO una trasposizione? Scegli un'alternativa: a. 1/2 b. 3/8 c. 5/24 d. 1/6.

Se parliamo di colori invece di numeri 1, 2, 3, 4 sia
A_{ij} = trasposizione tra i e j, una qualsiasi delle 6 coppie
NON ORDINATE di indici da 1 a 4. Ora
$P(A_{ij}) = \frac{2}{4!} = \frac{1}{12}$ mentre $P(A_{ij} \cap A_{kl}) = 0$ a
meno che kl sia complementare a ij e allora è 1/24.
Per il principio di inclusione - esclusione
$$P\Big(\bigcup_{i,j} A_{ij}\Big) = 6 \cdot \frac{1}{12} - 3 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

1. Il coefficiente di variazione campionario V è il rapporto tra la media campionaria e la radice quadrata della varianza campionaria (corretta), calcolato su di un campione di numerosità n. Per il test dell'ipotesi che la media di una distribuzione normale è nulla, con la varianza ignota, se: i) V=1.5, n=9, oppure: ii) V=0,75, n= 25, quale di queste affermazioni è corretta? a. Le tavole non permettono di fare nessuna delle altre tre affermazioni. b. L'evidenza contro l'ipotesi è identica in i) e in ii). c. L'evidenza contro l'ipotesi è maggiore in ii) che in i). d. L'evidenza contro l'ipotesi è maggiore in i) che in ii).

Sotto l'ipotesi si osserva il valore di una v.a.
t di Student con n-1 gradi di libertà, pari a $\sqrt{n}\,V = t_{obs}$.
L'evidenza contro l'ipotesi è quantificata dal
p-value $2P(T_{n-1} > obs)$. Nel primo caso con $t_{obs} = 4.5$
con 8 gradi di libertà questa quantità è all'incirca 2‰
[illegible]

con 8 gradi di libertà questa quantità è dell circa 2‰
nel secondo $t_{obs} = 3.75$ con 24 gradi di libertà
il p-value è minore dell' 1‰.