Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Prova di esame di *Ricerca Operativa*

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU devono risolvere gli esercizi 1) e 2). Tempo a disposizione 60 minuti.

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 9 CFU devono risolvere gli esercizi 1), 2) e 3). Tempo a disposizione 90 minuti.

Esercizio 1
Un'industria produce televisori utilizzando 3 reparti di cui dispone (Rep1, Rep2, Rep3) le cui caratteristiche sono riportate nella tabella che segue in termini di numero di operai, assegnati ad ogni reparto, costo unitario di produzione (in Euro per televisore), ore di lavorazione necessarie per fabbricare un televisore:

	Rep1	Rep2	Rep3
numero operai	50	60	55
costo produzione	350	380	370
ore necessarie	3	2.5	2

Ogni reparto è in grado di costruire autonomamente un televisore pronto per la vendita. Tutti i televisori prodotti vengono venduti giornalmente e per effettuare la vendita possono essere trasportati a due centri di vendita (C1, C2) e il costo del trasporto di un televisore da ciascun reparto a ciascun centro è riportato nella tabella che segue (in Euro) insieme alla capacità massima giornaliera di ciascun centro vendita in termini di numero massimo di televisori che possono essere ricevuti e quindi venduti da ciascun centro (assumere che tutti i televisori ricevuti giornalmente da ciascun centro sono venduti nello stesso giorno):

	Rep1	Rep2	Rep3	Capacità max
C1	5	6	5.5	10000
C2	3.5	4.5	3	8500

Per far funzionare i centri di vendita giornalmente c'è una spesa giornaliera rispettivamente di 1000 e di 1200 Euro. Costruire un modello lineare che permetta di decidere giornalmente, in base ai quantitativi di televisori prodotti, quale dei centri utilizzare (o eventualmente entrambi) in modo da massimizzare il profitto netto sapendo che ogni televisore è venduto a 980 Euro e che ogni operaio lavora 8 ore al giorno.

Esercizio 2
Utilizzando il metodo del simplesso in due fasi, risolvere il seguente problema di PL

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_1 + x_2 + 6x_3 \\
& 2x_1 + x_3 \leq 10 \\
& x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4 \\
& 3x_1 + x_2 \leq 5 \\
& x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

Esercizio 3
Risolvere con il metodo Branch& Bound il seguente problema di PLI

$$
\begin{aligned}
\max\ & 100x_1 + 35x_2 + 45x_3 + 50x_4 + 18x_5 - 30x_6 \\
& 25x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 10x_4 + 9x_5 - 6x_6 \leq 14 \\
& x_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Esercizio 1

Un'industria produce televisori utilizzando 3 reparti di cui dispone (Rep1, Rep2, Rep3) le cui caratteristiche sono riportate nella tabella che segue in termini di numero di operai, assegnati ad ogni reparto, costo unitario di produzione (in Euro per televisore), ore di lavorazione necessarie per fabbricare un televisore:

	Rep1	Rep2	Rep3
numero operai	50	60	55
costo produzione	350	380	370
ore necessarie	3	2.5	2

Ogni reparto è in grado di costruire autonomamente un televisore pronto per la vendita. Tutti i televisori prodotti vengono venduti giornalmente e per effettuare la vendita possono essere trasportati a due centri di vendita (C1, C2) e il costo del trasporto di un televisore da ciascun reparto a ciascun centro è riportato nella tabella che segue (in Euro) insieme alla capacità massima giornaliera di ciascun centro vendita in termini di numero massimo di televisori che possono essere ricevuti e quindi venduti da ciascun centro (assumere che tutti i televisori ricevuti giornalmente da ciascun centro sono venduti nello stesso giorno):

	Rep1	Rep2	Rep3	Capacità max
C1	5	6	5.5	10000
C2	3.5	4.5	3	8500

Per far funzionare i centri di vendita giornalmente c'è una spesa giornaliera rispettivamente di 1000 e di 1200 Euro. Costruire un modello lineare che permetta di decidere giornalmente, in base ai quantitativi di televisori prodotti, quale dei centri utilizzare (o eventualmente entrambi) in modo da massimizzare il profitto netto sapendo che ogni televisore è venduto a 980 Euro e che ogni operaio lavora 8 ore al giorno.

x_{ij} = quantità televisori prodotti da R_i e trasportati a C_j $\quad i=1,\dots,3,\ j=1,2$

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & C_k \text{ è in funzione} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad k=1,2$$

funzione obiettivo:

$$\max \Big[980(x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22}+x_{31}+x_{32}) - 5x_{11} - 6x_{21} - 5.5x_{31} - 3.5x_{12} - 4.5x_{22} - 3x_{32} - 350(x_{11}+x_{12}) - 380(x_{21}+x_{22}) - 390(x_{31}+x_{32}) - 1000\delta_1 - 1200\delta_2 \Big]$$

vincoli:

$$3(x_{11}+x_{12}) \le 8\cdot 50$$

$$2.5(x_{21}+x_{22}) \le 8\cdot 60$$

$$2(x_{31}+x_{32}) \le 8\cdot 55$$

$$x_{11}+x_{21}+x_{31} \le 10.000\,\delta_1$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32} \le 8500\,\delta_2$$

$$x_{ij} \ge 0$$

$$\delta_i \in \{0,1\}$$

Esercizio 2
Utilizzando il metodo del simplesso in due fasi, risolvere il seguente problema di PL

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + x_2 + 6x_3 \\ & 2x_1 + x_3 \le 10 \\ & x_1 + x_2 - 2x_3 \le 4 \\ & 3x_1 + x_2 \le 5 \\ & x_i \ge 0 \end{aligned}$$

$$\min\ -3x_1 - x_2 - 6x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_6 = 5 \\ x_i \ge 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}N = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_B^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \ \ x_4 \quad x_5 \quad x_6 \end{array} \qquad c_N^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -3 & -1 & -6 \end{bmatrix} \\ \ \ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \end{array}$$

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$h = 1 \qquad \pi_h = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \bar{\rho} = \min\left\{5, 4, \tfrac{5}{3}\right\} \rightarrow k = 3 \quad \text{Esce } x_6 \text{ entra } x_1$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{c|ccc|c} 0 & -2/3 & -2/3 & 1 & 20/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & -2 & 7/3 \\ 1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 5/3 \end{array}\right]$$

$$c_B^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\ \ \ x_4 \quad x_5 \quad x_1 \end{array} \qquad c_N^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -6 \end{bmatrix} \\ \ \ x_6 \quad x_2 \quad x_3 \end{array}$$

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$h = 3 \quad \pi_h = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\rho} = \min\left\{\tfrac{20}{3}, \cdot, \cdot\right\} \quad k = 1 \quad \text{Esce } x_4 \text{ entra } x_3$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & -2/3 & -2/3 & 1 & 20/3 \\ -2 & -1/3 & 2/3 & 0 & 7/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 5/3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & -2/3 & -2/3 & 1 & 20/3 \\ 0 & -5/3 & -2/3 & 2 & 47/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 5/3 \end{array}\right]$$

$$c_B^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -6 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\ \;\; x_3 \;\; x_5 \;\; x_1 \end{array} \qquad c_N^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \;\; x_6 \;\; x_2 \;\; x_4 \end{array}$$

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$h = 1 \quad \pi_h = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -5/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \quad \bar{\rho} = \min\{\cdot, \cdot, 5\} = 5 \quad k = 3$ Esce x_1 entra x_6

$$\left[\begin{array}{c|ccc|c} -2/3 & 0 & -2/3 & 1 & 20/3 \\ -5/3 & 0 & -2/3 & 2 & 47/3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & 0 & 5/3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 24 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

$$c_B^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \;\; x_3 \;\; x_5 \;\; x_6 \end{array} \qquad c_N^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \;\; x_1 \;\; x_2 \;\; x_4 \end{array}$$

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$h = 2 \quad \pi_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{\rho} = \min\{\cdot, 24, 5\} = 5 \quad k = 3$ Esce x_6 entra x_2

$$\left[\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 24 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 19 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

$$c_B^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -6 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \;\; x_3 \;\; x_5 \;\; x_2 \end{array} \qquad c_N^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \;\; x_1 \;\; x_6 \;\; x_4 \end{array}$$

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -15 & -1 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

La SBA attuale e' ottima

$$\bar{X} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & 0 & 19 & 0 \end{bmatrix} \\ \;\; x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4 \;\; x_5 \;\; x_6 \end{array}$$