Prova di Analisi Matematica II - 19 Febbraio 2018 - Fila A
Ing. Informatica
Prof.ssa Virginia De Cicco
Dott. Alessandro Ciallella

1)	2)	3)	4)	5)	VOTO:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Cognome	Nome

Dichiaro di aver sostenuto con profitto l'esame di Analisi Matematica 1

FIRMA: ....
(la dichiarazione precedente non è necessaria per gli studenti di Ing. Clinica immatricolati in anni precedenti all'A.A. 2015/2016)

ESERCIZIO 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti. (**10 pt.**)

1) (I) Il coefficiente b_1 dello sviluppo in serie di Fourier della funzione

$$f(x) = |\sin x|$$

vale

(a) 1
(b) 0
(c) π
(d) $\frac{1}{\pi}$.

(II) Sia $z = \frac{2}{3-i}$. Allora

$\frac{2}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{6+2i}{10} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$

(a) Im $z = -2$

(b) Im $z = 1$

(c) Im $z = \frac{1}{5}$

(d) Im $z = -\frac{1}{2}$.

(III) Una delle seguenti funzioni ha residuo 1 in $z_0 = 0$. Quale funzione?

(a) $f(z) = \frac{1}{z^2}$

(b) $f(z) = \frac{1}{z}$ $\lim_{z \to 0} z \frac{1}{z} = 1$

(c) $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$

(d) $f(z) = \frac{1}{z-1}$.

(IV) La funzione

$$f(z) = 1 - \mathrm{Log}(z \cdot \bar{z})$$

è olomorfa

$= 1 - \mathrm{Log}|z| = 1 - \log|z| - i\overset{0}{\arg}(|z|) =$

$= 1 - \log|z|$ $z = x + iy$, $|z| = x^2 + y^2$

$\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{Re}(|z|) \le 0, \mathrm{Im}(z) = 0\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

(a) in $\mathbb{C}^{**}$

(b) in $\mathbb{C}^{*}$

(c) in $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{Im}\ z = 0\}$

(d) per nessun valore di z.

(V) Solo una delle seguenti definizioni è esatta

(a) $cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2i}$

(b) $cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

(c) $cos z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

(d) $cos z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$.

ESERCIZIO 2.

(i) Si enunci il teorema integrale di Cauchy per un funzione di variabile complessa.

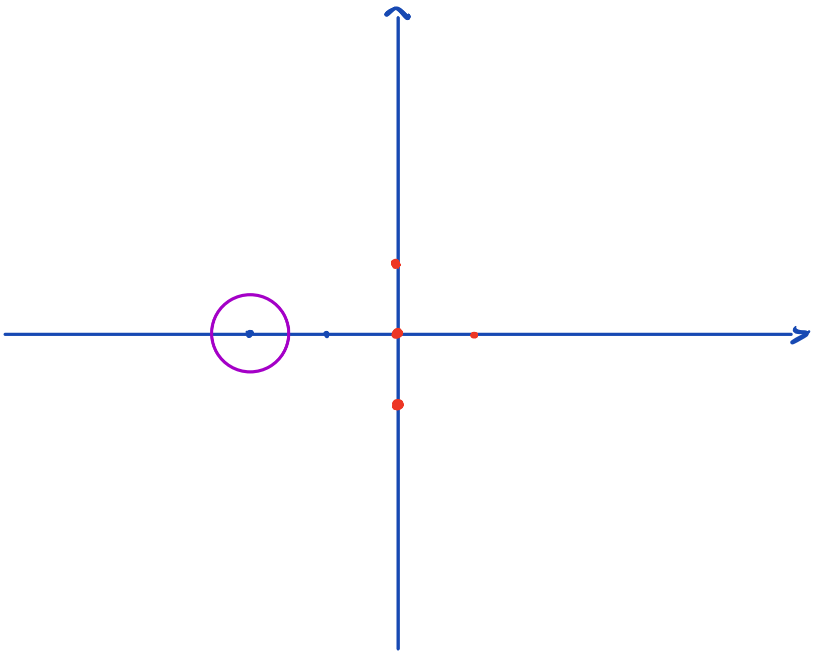
(ii) Si determini una *qualunque curva chiusa* $\gamma \subset \mathbb{C}$ tale che

$$\int_\gamma \frac{(\sinh z)^2}{z(z-1)(z^2+1)\sin z}dz = 0$$

e la si disegni sul piano complesso.

2) $z_0 = 0 \quad z_1 = 1 \quad z_2 = i \quad z_3 = -i \quad z_4 = k\pi$

$\gamma = -2 + \frac{1}{2}e^{it}$



ESERCIZIO 3. (i) Si enunci il Principio del prolungamento analitico.

(ii) Usando tale principio si dimostri la seguente formula:

$$sen^2\, z + cos^2\, z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Dato $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo ed $f: I \to \mathbb{R}$, se esiste una funzione analitica definita in un aperto $A \subseteq \mathbb{C}$ tale che $I \subseteq A \cap \mathbb{R}$ e la cui restrizione ad I coincide con $f(x)$, allora tale funzione è univocamente determinata ed è detta prolungamento analitico

Poiché $sin^2 x + cos^2 x - 1 = 0$, $f(z)$ è il prolungamento di $f(x)$

e quindi la funzione $f(z) = sin^2(z) + cos^2(z) - 1$ ammette un insieme di zeri che non è costituito da punti isolati (ogni x)

dunque dato che $f(z)$ è il prolungamento analitico

su

ESERCIZIO 4.

(i) Si dia la definizione di convergenza totale per una serie di funzioni.

(ii) Si determini l'insieme di convergenza puntuale e totale della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(x^2+2)^n}$$

e se ne calcoli ivi la somma.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{(x^2+2)^n}$$

$$f_n(x) = \frac{3^{n+1}}{(x^2+2)^n} = 3\left[\frac{3}{x^2+2}\right]^n$$

$f_n(x) \to 0$ per $\left|\frac{3}{x^2+2}\right| < 1 \to \left|\frac{1}{x^2+2}\right| < \frac{1}{3} \to -\frac{1}{3} < \frac{1}{x^2+2} < \frac{1}{3}$

$$\to \begin{cases} \frac{1}{x^2+2} < \frac{1}{3} \\ x^2 > -5 \end{cases} \to \begin{cases} x^2+2 > 3 \\ x^2 > -5 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 > 1 \\ x^2 > -5 \end{cases} \to x < -1,\ x > 1$$

c.p. in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Prendo $(-\infty, -A] \cup [A, +\infty)$ con $|A| > 1$

$$\sup_{[A, +\infty)} |f_n(x)| = \frac{3^{n+1}}{(A^2+2)^n} \to 0$$

ESERCIZIO 5.

(i) Sia fornisca l'espressione della trasformata di Laplace per un segnale $f(t)$ periodico di periodo T.

(ii) Si calcoli la trasformata di Laplace del seguente segnale:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-3t} & t \in (0, 2] \\ 0 & t \in (2, 4] \end{cases}$$

esteso per periodicità $\forall t > 0$.

1) $\mathcal{L}[f](s) = \dfrac{1}{1-e^{-Ts}} \displaystyle\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$

2) $F(s) = \dfrac{1}{1-e^{-4s}} \displaystyle\int_0^2 e^{-st} e^{-3t}\, dt$

$= \dfrac{1}{1-e^{-4s}} \displaystyle\int_0^2 e^{-t(s+3)}\, dt = \dfrac{1}{1-e^{-4s}} \left[-\dfrac{1}{s+3} e^{-t(s+3)} \right]_0^2 =$

$= -\dfrac{1}{(1-e^{-4s})(s+3)} \left(e^{-2(s+3)} - 1 \right) = \dfrac{1}{(1-e^{-4s})(s+3)} \left(1 - e^{-2(s+3)} \right)$