ESERCITAZIONE 2– DOCENTE: MAURO PICCIONI, TUTOR: HLAFO ALFIE MIMUN

March 20, 2020

I seguenti esercizi sono stati presi dalla pagina web di Joe Blitzstein.

1. ESERCIZI

Ex. 1: Consideriamo la versione con 7 porte del problema di Monty Hall. Ci sono 7 porte chiuse. Dietro una porta c'è una macchina (che desideriamo) e dietro le altre 6 è presente una capra (che non desideriamo). Inizialmente ogni porta ha stessa probabilità delle altre di nascondere la macchina. Scegli una porta, che chiamiamo porta C. Monty Hall apre 3 porte che nascondono una capra e che non coincidono con la porta C (stiamo assumendo che Monty Hall conosca cos'è nascosto dietro ogni porta e che le 3 porte aperte siano state scelte da Monty Hall uniformemente a caso tra le porte che nascondono le capre e che non siano la porta C). Dunque Monty Hall ti offre la possibilità di cambiare la porta che tu hai scelto con una delle porte restanti (che sono 3).

(a) Risulta conveniente effettuare lo scambio, ovvero la probabilità di successo se si effettua lo scambio è maggiore della probabilità di successo se non si effettua lo scambio?

(b) Si generalizzi al caso in cui ci sono $n \geq 3$ porte e Monty Hall ne apre m, con $1 \leq m \leq n-2$.

Ex. 2: Calvin e Hobbes fanno un gioco composto da una serie di mini-giochi. Calvin ha probabilità p di vincere ogni gioco (indipendentemente). Il primo giocatore che vince due mini-giochi in più dell'altro giocatore, vince il gioco. Si calcoli la probabilità che Calvin vinca il gioco (in termini di p), nei seguenti due modi:

(a) utilizzando il condizionamento con un'opportuna partizione dello spazio dei campioni e la formula delle probabilità totali;

(b) interpretando il problema come un problema di rovina del giocatore.

Ex. 3: Due giocatori A, B giocano a trivia (un gioco di in cui si fanno a turno domande ad ogni partecipante ed ogni giocatore può rispondere in maniera esatta o errata alle domande a lui poste). Il giocatore A comincia per primo. Ogni volta che il giocatore A deve rispondere, ha probabilità $p_1 \in (0, 1]$ di rispondere bene. Ogni volta che il giocatore B deve rispondere, ha probabilità $p_2 \in (0, 1]$ di rispondere bene.

(a) Se il giocatore A risponde a m domande, si calcoli la PMF della variabile aleatoria che conta il numero di domande esatte risposte da A;

(b) Se il giocatore A risponde a m domande ed il giocatore B risponde a n domande, qual è la PMF della variabile aleatoria che conta il numero totale di risposte esatte date da A e B.

Assumendo successivamente che $p_1 = p_2 = p$, si descriva la PMF della variabile aleatoria che conta il numero totale di risposte esatte date da A e B. Si ricordi l'identità di Vandermonde

$$\sum_{s=0}^{k} \binom{m}{s}\binom{n}{k-s} = \binom{n+m}{k}, \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, n+m\,.$$

(c) Si supponga che il primo giocatore che risponde in modo corretto vinca il gioco (assumendo che non ci sia un numero massimo di domande che può essere chiesto). Si trovi la probabilità che il giocatore A vinca il gioco.

Ex. 4: Un messaggio viene mandato tramite un canale rumoroso (dunque il messaggio è disturbato). Il messaggio è una sequenza di n bits $x_1, \dots, x_n$, dove $x_i \in \{0, 1\}$ per $i = 1, \dots, n$. Poiché il canale è rumoroso, ogni bit può essere corrotto (un bit pari a 0 diventa 1, e viceversa). Assumiamo che la probabilità che ogni singolo bit può essere sbagliato indipendentemente dagli altri e sia $p \in (0, 0.5)$ la probabilità che un singolo bit sia sbagliato. Sia $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ il messaggio ricevuto (dunque $Y_i = x_i$ se non c'è errore, $Y_i = 1 - x_i$ se c'è un errore).

Per aiutare il correttore, l'n-esimo bit è riservato per un controllo di parità, nel senso che il messaggio reale sarà formato dai caratteri $x_1, \dots, x_{n-1}$ ed il bit x_n sarà aggiunto (da chi invia il messaggio) per fare un controllo di parità nel seguente modo: definiamo

$$x_n := \begin{cases} 0, & \text{se } x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \text{ è pari,} \\ 1, & \text{se } x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Quando il messaggio viene ricevuto, il ricevente controlla se Y_n ha la stessa parità di $Y_1 + \ldots + Y_{n-1}$. Se la parità è sbagliata, il ricevente sa che c'è almeno un errore, altrimenti il ricevente assume che non vi siano errori.

(a) Per n e p generali, si scriva un'espressione (come somma) della probabilità che il messaggio ricevuto contenga errori che non sono stati rilevati dal controllo.

(b) Si dia un'espressione semplificata (cioè che non coinvolga la somma di un gran numero di termini) per la probabilità che il messaggio ricevuto contenga errori che non sono stati rilevati dal controllo.

Suggerimento: Si ricordi che durante la lezione del 19 marzo è stato mostrato che

$$\sum_{k \text{ pari},\, k \geq 0} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1 + (1-2p)^n}{2}\,.$$

2. SOLUZIONI

Ex. 1: **(a)** Supponiamo di etichettare le porte con i numeri $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ in modo tale che la porta da noi scelta sia la porta numero 1. Definiamo per $j = 1, 2, 3, \dots, 7$ l'evento

$$C_j := \{\text{la macchina è dietro la porta numero } j\}\,.$$

Osserviamo che

$$\mathbb{P}(C_j) = \frac{1}{7} \qquad \forall\, j = 1, \ldots, 7\,.$$

Supponiamo di non cambiare la porta scelta. Definiamo l'evento

$$S := \{\text{vinciamo la macchina senza cambiare porta}\}\,.$$

Si ha

$$\mathbb{P}(S) = \sum_{j=1}^{7} \mathbb{P}(S \,|\, C_j) \cdot \mathbb{P}(C_j) = \mathbb{P}(S \,|\, C_1) \cdot \mathbb{P}(C_1) + \sum_{j=2}^{7} \mathbb{P}(S \,|\, C_j) \cdot \mathbb{P}(C_j) =$$

$$= 1 \cdot \mathbb{P}(C_1) + 0 = \mathbb{P}(C_1) = \frac{1}{7}\,.$$

Supponiamo adesso di aver cambiato porta. Definiamo l'evento

$$W := \{\text{vinciamo la macchina cambiando porta}\}\,.$$

Avendo scelto inizialmente la porta numero 1, si ha $\mathbb{P}(W \,|\, C_1) = 0$. Dunque

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W) &= \mathbb{P}(W \,|\, C_1) \cdot \mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}(W \,|\, C_1^c) \cdot \mathbb{P}(C_1^c) = \\ &= 0 \cdot \frac{1}{7} + \mathbb{P}(W \,|\, C_1^c) \cdot \frac{6}{7}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(W \,|\, C_1^c)$. Stiamo condizionando all'evento C_1^c e dunque assumiamo che la macchina non si trovi dietro la prima porta da noi inizialmente scelta. Monty Hall ha aperto 3 porte che nascondevano capre. Dunque ci rimangono tre possibili porte che possono nascondere il premio ed una sola delle tre porte lo nasconderà effettivamente. Dunque

$$\mathbb{P}(W \,|\, C_1^c) = \frac{1}{3}\,.$$

Quindi si ha da (2)

$$\mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(W \,|\, C_1^c) \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{2}{7}\,.$$

Poiché

$$\mathbb{P}(S) = \frac{1}{7} < \frac{2}{7} = \mathbb{P}(W)\,,$$

conviene effettuare lo scambio.

(b) Supponiamo di etichettare le porte con i numeri $1, 2, \ldots, n$ in modo tale che la porta da noi scelta sia la porta numero 1. Definiamo per $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ l'evento

$$C_j := \{\text{la macchina è dietro la porta numero } j\}\,.$$

Osserviamo che

$$\mathbb{P}(C_j) = \frac{1}{n} \qquad \forall\, j = 1, \ldots, n\,.$$

Supponiamo di non cambiare la porta scelta. Definiamo l'evento

$$S := \{\text{vinciamo la macchina senza cambiare porta}\}\,.$$

Si ha

$$\mathbb{P}(S) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(S \mid C_j) \cdot \mathbb{P}(C_j) = \mathbb{P}(S \mid C_1) \cdot \mathbb{P}(C_1) + \sum_{j=2}^{n} \mathbb{P}(S \mid C_j) \cdot \mathbb{P}(C_j) =$$

$$= 1 \cdot \mathbb{P}(C_1) + 0 = \mathbb{P}(C_1) = \frac{1}{n}\,.$$

Supponiamo adesso di aver cambiato porta. Definiamo l'evento

$$W := \{\text{vinciamo la macchina cambiando porta}\}\,.$$

Avendo scelto inizialmente la porta numero 1, si ha $\mathbb{P}(W \mid C_1) = 0$. Dunque

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W) &= \mathbb{P}(W \mid C_1) \cdot \mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}(W \mid C_1^c) \cdot \mathbb{P}(C_1^c) = \\ &= 0 \cdot \frac{1}{n} + \mathbb{P}(W \mid C_1^c) \cdot \frac{n-1}{n}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(W \mid C_1^c)$. Stiamo condizionando all'evento C_1^c e dunque assumiamo che la macchina non si trovi dietro la prima porta da noi inizialmente scelta. Monty Hall ha aperto m porte che nascondevano capre. Dunque ci rimangono $n - m - 1$ possibili porte che possono nascondere il premio ed una sola delle $n - m - 1$ porte lo nasconderà effettivamente. Dunque

$$\mathbb{P}(W \mid C_1^c) = \frac{1}{n-m-1}\,.$$

Quindi si ha da (2)

$$\mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(W \mid C_1^c) \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n-m-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n(n-m-1)}\,.$$

Poiché

$$\mathbb{P}(S) = \frac{1}{n} < \frac{n-1}{n(n-m-1)} = \mathbb{P}(W)\,,$$

conviene effettuare lo scambio.

Ex. 2: **(a)** Definiamo l'evento

$$C := \{\text{Calvin vince il gioco}\}\,.$$

Consideriamo i primi due mini-giochi e denotiamo con X quanti di questi due mini-giochi sono vinti da Calvin. Dunque $X \sim \mathrm{Bin}(2, p)$. Si noti che

- se $X = 0$, significa che Hobbes ha vinto i primi due mini-giochi e dunque ha un vantaggio di due su Calvin. Ciò implica che Hobbes ha vinto il gioco e dunque $\mathbb{P}(C \mid X = 0) = 0$;
- se $X = 1$, significa che sia Hobbes che Calvin hanno vinto uno dei primi due mini-giochi. Dunque quando inizieranno il terzo mini-gioco si troveranno alla stessa situazione in cui si trovavano all'inizio del primo mini-gioco (in quanto nessuno dei due ha un vantaggio sull'altro). Di conseguenza $\mathbb{P}(C \mid X = 1) = \mathbb{P}(C)$;
- se $X = 2$, significa che Calvin ha vinto i primi due mini-giochi e dunque ha un vantaggio di due su Hobbes. Ciò implica che Calvin ha vinto il gioco e dunque $\mathbb{P}(C \mid X = 2) = 1$.

Dunque si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(C \mid X=0)\cdot\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(C \mid X=1)\cdot\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(C \mid X=2)\cdot\mathbb{P}(X=2) = \\ &= 0\cdot(1-p)^2+\mathbb{P}(C)\cdot 2p(1-p)+1\cdot +1\cdot p^2 = 2p(1-p)\cdot\mathbb{P}(C)+p^2\,,\end{aligned} \tag{3}$$

da cui

$$\mathbb{P}(C) = 2p(1-p)\cdot\mathbb{P}(C)+p^2 \Rightarrow \mathbb{P}(C) = \frac{p^2}{1-2p(1-p)}\,.$$

(b) Supponiamo che entrambi i giocatori comincino il gioco con 2 euro e che ad ogni mini-gioco vinto il giocatore perdente ceda 1 euro al giocatore vincente. Dunque il gioco finisce quando uno dei due giocatori non ha più soldi. Abbiamo dunque riformulato il problema come il problema della rovina del giocatore dove ogni giocatore parte da una somma di 2 euro. Dalla teoria studiata si ha che la probabilità che Calvin vinca è data da

$$\begin{aligned}\frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^2}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^4} &= \frac{p^2(p^2-(1-p)^2)}{p^4-(1-p)^4} = \frac{p^2(p^2-(1-p)^2)}{(p^2+(1-p)^2)(p^2-(1-p)^2)} = \\ &= \frac{p^2}{1+2p^2-2p} = \frac{p^2}{1-2p(1-p)}\,.\end{aligned}$$

Ex. 3: **(a)** Denotiamo con X la variabile aleatoria che conta il numero di domande che il giocatore A risponde in mondo corretto. Sappiamo che A risponde a m domande e ad ogni domanda ha probabilità p_1 di rispondere in modo corretto. Dunque

$$X \sim \mathrm{Bin}(m, p_1)\,.$$

(b) Denotiamo con X e con Y le variabili aleatorie che contano, rispettivamente, il numero di domande che il giocatore A ed il giocatore B rispondono in mondo corretto. Sappiamo che il giocatore A risponde a m domande e ad ogni domanda ha probabilità p_1 di rispondere in modo corretto, mentre il giocatore B risponde a n domande e ad ogni domanda ha probabilità p_2 di rispondere in modo corretto.
Definiamo la variabile $Z := X+Y$. Z conta il numero totale di risposte corrette date dai giocatori A e B.
La variabile Z assume valori $0, 1, 2, \ldots, n+m$. Notiamo che per $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n+m\}$ l'evento

$$\{Z = k\} = \cup_{s=0}^{k}\{X = s\,,\, Y = k-s\}\,.$$

Ad esempio l'evento $\{Z = 3\}$ si realizza se accade uno dei seguenti aventi

$$\{X=0\,,\,Y=3\}\,,\quad \{X=1\,,\,Y=2\}\,,$$
$$\{X=2\,,\,Y=1\}\,,\quad \{X=3\,,\,Y=0\}\,,$$

e dunque

$$\{Z = 3\} = \cup_{s=0}^{3} \{X = s\,,\, Y = 3 - s\}\,.$$

Si noti che gli eventi $\{X = s\,,\, Y = k - s\}$ e $\{X = r\,,\, Y = k - r\}$ sono disgiunti se $s \neq r$. Inoltre le variabili X, Y sono indipendenti in quanto il numero di risposte corrette date dal giocatore A è indipendente dal numero di risposte corrette date dal giocatore B. Infine $X \sim \mathrm{Bin}(m, p_1)$ ed $Y \sim \mathrm{Bin}(n, p_2)$. Dunque passando alle probabilità, si ha (assumiamo che $\binom{m}{s} = 0$ se $s > m$)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{s=0}^{k} \mathbb{P}(X = s\,,\, Y = k - s) = \\
&= \sum_{s=0}^{k} \mathbb{P}(X = s) \cdot \mathbb{P}(Y = k - s) = \\
&= \sum_{s=0}^{k} \binom{m}{s} p_1^s (1 - p_1)^{m-s} \binom{n}{k-s} p_2^{k-s} (1 - p_2)^{n-(k-s)}
\end{aligned}$$

Supponiamo ora che $p_1 = p_2 = p$. Dunque

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{s=0}^{k} \binom{m}{s} \binom{n}{k-s} p^k (1 - p)^{m+n-k} = \\
&= p^k (1 - p)^{m+n-k} \sum_{s=0}^{k} \binom{m}{s} \binom{n}{k-s} = \\
&= \binom{n+m}{k} p^k (1 - p)^{m+n-k}\,,
\end{aligned} \tag{4}$$

dove abbiamo usato l'identità di Vandermonde nell'ultima uguaglianza (presentata a lezione).

(c) Supponiamo che il gioco finisca quando viene fatta la k-esima domanda, con $k \geq 1$. Se A vince, significa che A ha risposto correttamente alla k-esima domanda. Inoltre, essendo stato A a cominciare il gioco, significa che A risponde alle domande "dispari", ovvero alla prima domanda, terza domanda, quinta domanda, etc.. In particolare se A vince, k deve essere dispari, ovvero $k = 2h + 1$ per qualche $h \in \mathbb{N}$. Dunque se vengono poste $2h + 1$ domande, si avrà che $h + 1$ domande saranno risposte da A ed h domande saranno risposte da B. Delle $h + 1$ domande risposte da A, h risposte saranno sbagliate mentre 1 risposta (l'ultima data) sarà giusta. Le h risposte date da B invece saranno tutte sbagliate.
Dunque

$$\mathbb{P}(A \text{ vince il gioco con } 2h + 1 \text{ domande poste}) = (1 - p_2)^h \cdot (1 - p_1)^h \cdot p_1\,.$$

Ora, non sapendo quant'è il valore di h, dobbiamo considerare tutti i possibili casi:

$$\{A \text{ vince il gioco}\} = \cup_{h=0}^{\infty} \{A \text{ vince il gioco con } 2h + 1 \text{ domande poste}\}\,.$$

Essendo gli eventi

$$\{A \text{ vince il gioco con } 2h_1 + 1 \text{ domande poste}\}\,,$$

$$\{A \text{ vince il gioco con } 2h_2+1 \text{ domande poste}\}$$

disgiunti se $h_1 \neq h_2$, passando alle probabilità si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \text{ vince il gioco}) &= \sum_{h=0}^{\infty} \mathbb{P}(A \text{ vince il gioco con } 2h+1 \text{ domande poste}) = \\
&= \sum_{h=0}^{\infty} (1-p_2)^h \cdot (1-p_1)^h \cdot p_1 = \\
&= p_1 \sum_{h=0}^{\infty} (1-p_2-p_1+p_1p_2)^h = \\
&= \frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}\,,
\end{aligned} \tag{5}$$

dove abbiamo usato il fatto che se $|a|<1$ si ha

$$\sum_{h=0}^{\infty} a^h = \frac{1}{1-a}\,. \tag{6}$$

In realtà per usare (6) per la serie $\sum_{h=0}^{\infty}(1-p_1-p_2+p_1p_2)^h$, dobbiamo assicurarci che

$$\begin{aligned}
&|1-p_1-p_2+p_1p_2| = 1-p_1-p_2+p_1p_2 < 1 \Rightarrow p_1+p_2 > p_1p_2 \\
&\Rightarrow p_1(1-p_2) > -p_2\,.
\end{aligned}$$

Quest'ultima disuguaglianza è vera poiché per ipotesi $p_1, p_2 > 0$ e dunque $p_1 > 0$, $1-p_2 \geq 0$ e $-p_2 < 0$.

Si noti che il termine $p_1+p_2-p_1p_2$ che compare in (5) può essere letto tramite il principio di inclusione ed esclusione come la probabilità dell'evento $E \cup F$, dove

$$E := \{A \text{ risponde bene}\}\,, \qquad F := \{B \text{ risponde bene}\}\,.$$

e dunque

$$E \cup F := \{\text{almeno un giocatore tra } A \text{ e } B \text{ risponde bene}\}\,.$$

Infatti

$$\mathbb{P}(E) = p_1\,, \qquad \mathbb{P}(F) = p_2\,, \qquad \mathbb{P}(E \cap F) = p_1p_2$$

e dal principio di inclusione ed esclusione

$$\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F) = p_1+p_2-p_1p_2\,.$$

Di conseguenza il termine

$$1-(p_1-p_2-p_1p_2) = 1-p_1-p_2+p_1p_2$$

che compare nella sommatoria in (5) è la probabilità di $(E \cup F)^c$, ovvero dell'evento

$$\{\text{né } A \text{ né } B \text{ rispondono bene}\}\,.$$

Ex. 4: **(a)** Fissiamo il messaggio $x_1, \ldots, x_{n-1}$, che è deterministico. Calcoliamo x_n nel seguente modo

$$x_n := \begin{cases} 0, & \text{se } \sum_{i=1}^{n-1} x_i \text{ è pari,} \\ 1, & \text{se } \sum_{i=1}^{n-1} x_i \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Notiamo che

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_n + \sum_{i=1}^{n-1} x_i = \begin{cases} 0 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i, & \text{se } \sum_{i=1}^{n-1} x_i \text{è pari,} \\ 1 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i, & \text{se } \sum_{i=1}^{n-1} x_i \text{è dispari,} \end{cases}$$

da cui si ha che $\sum_{i=1}^{n} x_i$ è sempre pari.

Definiamo adesso le variabili aleatorie indipendenti $Y_1, \ldots, Y_n$ come

$$Y_i := \begin{cases} 1 - x_i, & \text{con probabilità } p, \\ x_i, & \text{con probabilità } 1 - p, \end{cases}$$

per $i = 1, \ldots, n$.

La sequenza $Y_1, \ldots, Y_n$ è il messaggio ricevuto.

Per $i = 1, \ldots, n$ definiamo la variabile

$$Z_i = \mathbb{1}_{\{Y_i \neq x_i\}} = \begin{cases} 1, & \text{se } Y_i \neq x_i; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque

$$\mathbb{P}(Z_i = 1) = \mathbb{P}(Y_i \neq x_i) = p\,, \qquad \mathbb{P}(Z_i = 0) = \mathbb{P}(Y_i = x_i) = 1 - p\,.$$

In particolare $Z_1, \ldots, Z_n$ sono variabili aleatorie i.i.d. con

$$Z_i \sim \text{Ber}(p)\,.$$

Definiamo infine

$$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i\,.$$

Se c'è un numero dispari di errori Z sarà dispari, mentre se c'è un numero pari di errori Z sarà pari.

In particolare se c'è un numero dispari di errori (e dunque Z è dispari), allora $\sum_{i=1}^{n} x_i$ è pari e $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ è dispari e di conseguenza il controllo di parità dirà che c'è almeno un errore (che quindi viene rilevato).

Se invece c'è un numero pari di errori (e dunque Z è pari), allora $\sum_{i=1}^{n} x_i$ è pari e $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ è pari e di conseguenza il controllo di parità dirà che non c'è un errore. Se inoltre $Z > 0$ ed è pari, allora il messaggio contiene almeno un errore che non viene rilevato.

Dunque si ha l'uguaglianza tra eventi

$$\{\text{esistono errori nel messaggio che non sono rilevati}\} = \{Z > 0,\ Z \text{ è pari}\}\,.$$

Quindi per risolvere il problema è sufficiente calcolare $\mathbb{P}(Z > 0,\ Z \text{ è pari})$.

Notiamo che essendo Z somma di n variabili aleatorie Bernoulliane di parametro p, si ha

$$Z \sim \text{Bin}(n, p)\,.$$

Dunque la probabilità che ci siano errori non rivelati è data da

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z>0,\, Z \text{ è pari}) &= \sum_{k \text{ pari},\, k>0}^{n} \mathbb{P}(Z=k) = \\ &= \sum_{k \text{ pari},\, k>0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,.\end{aligned} \tag{7}$$

(b) Usando il suggerimento

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z>0,\, Z \text{ è pari}) &= \sum_{k \text{ pari},\, k>0}^{n} \mathbb{P}(Z=k) = \\ &= \sum_{k \text{ pari},\, k>0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \sum_{k \text{ pari},\, k\geq 0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - (1-p)^n = \\ &= \frac{1+(1-2p)^n}{2} - (1-p)^n\,.\end{aligned} \tag{8}$$