Prova 2 di Analisi Matematica II - 22 Gennaio 2021
Ing. Informatica
Prof.ssa Virginia De Cicco, Prof. Pietro Mercuri

ESERCIZIO 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 3 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti. (**12 pt.**)

1) La successione di funzioni $f_n(x) = sen\left((\frac{x}{2\pi})^n\right)$ converge puntualmente se

   (a) $|x| \leq 2\pi$
   (b) $|x| < 2\pi$
   (c) $0 < x < 2\pi$
   (d) $-2\pi < x \leq 2\pi$.

   Se $\left|\frac{x}{2\pi}\right| < 1$ $f_n(x) \to 0$

   Se $x = 1$ $f_n \to 0$

   Soluzione: (d)

2) Il coefficiente di Fourier b_2 della funzione

$$f(x) = x^2 + 3sen(2x)$$

   è

   a) $b_2 = 1$ b) $b_2 = 3$ c) $b_2 = 2$ d) $b_2 = 0$.

   Soluzione: b) poichè x^2 è pari e quindi non dà contributo nel calcolo di b_2.

3) Sia γ il segmento orientato da i a $2i$. La parte immaginaria di $\int_\gamma \pi^2 z e^{z\pi} dz$ è:

   (a) 0;
   (b) πi;
   (c) $2\pi i$;
   (d) $3\pi i$.

   Soluzione: (d)

4) Il residuo in $z = 0$ della funzione $f(z) = 6iz^3 e^{\frac{1}{z^2}}$ è:

   (a) i;

$$\pi^2 \int_i^{2i} z e^{z\pi} dz = \pi^2 \left[\frac{z}{\pi} e^{z\pi} - \frac{1}{\pi^2} e^{z\pi}\right]_i^{2i} = \pi z e^{z\pi} - e^{z\pi} = e^{z\pi}(\pi z - 1)\Big|_i^{2i}$$

$$e^{2i\pi}(2i\pi - 1) - e^{i\pi}(i\pi - 1) =$$

$$[\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} + i\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0}](2i\pi - 1) - [\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + i\underbrace{\sin(\pi)}_{=0}](i\pi - 1) =$$

$(2i\pi - 1) + (i\pi - 1) = 2i\pi + i\pi - 1 - 1 = 3\pi i - 2$

(b) 1;

(c) 3;

~~(d)~~ $3i$.

Soluzione: (d)

ESERCIZIO 2. (10 pt.) Si determinino e classifichino le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{(z+i)\sin^2 z}{z^6 + z^8}.$$

Soluzione: La singolarità isolata $z = 0$ è un polo di ordine 4, infatti:

$$\lim_{z\to 0} z^4 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{(z+i)\sin^2 z}{z^2(z^2+1)} = i.$$

La singolarità isolata $z = i$ è un polo di ordine 1, infatti:

$$\lim_{z\to i} (z-i) f(z) = \lim_{z\to i} \frac{\sin^2 z}{z^6} = -\sin^2 i.$$

La singolarità isolata $z = -i$ è una singolarità eliminabile, infatti:

$$\lim_{z\to -i} f(z) = \frac{\sin^2 i}{2i}.$$

ESERCIZIO 3. (10 pt.) Si calcoli l'antitrasformata di Laplace $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$ della seguente funzione

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

Soluzione: $F(s)$ ha un polo singolo in $s = 0$ ed un polo doppio in $s = -1$. Utilizzando la formula d'inversione, si ha allora che

$$f(t) = res\left(\frac{e^{st}}{s(s+1)^2}, -1\right) + res\left(\frac{e^{st}}{s(s+1)^2}, 0\right).$$

Poiché

$$res\left(\frac{e^{st}}{s(s+1)^2}, 0\right) = \lim_{s\to 0} \frac{se^{st}}{s(s+1)^2} = 1$$

ed inoltre

$$res\left(\frac{e^{st}}{s(s+1)^2}, -1\right) = \lim_{s\to -1} \frac{d}{ds}\left(\frac{e^{st}}{s(s+1)^2}(s+1)^2\right) = \lim_{s\to -1} \frac{d}{ds}\left(\frac{e^{st}}{s}\right)$$

$$= \lim_{s\to -1} \frac{te^{st}s - e^{st}}{s^2} = -te^{-t} - e^{-t},$$

segue che

$$f(t) = 1 - te^{-t} - e^{-t}.$$

ESERCIZIO 2. (**10 pt.**) Si determinino e classifichino le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{(z+i)\sin^2 z}{z^6 + z^8}.$$

$$f(z) = \frac{(z+i)\sin^2(z)}{z^6+z^8} = \frac{(z+i)\sin^2(z)}{z^6(1+z^2)} = \frac{\sin^2(z)}{z^6(z-i)}$$

$$\lim_{z\to 0} \cancel{z^4}\frac{\sin^2(z)}{\cancel{z^6}(z-i)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z-i} = i$$ Polo 4° ordine in $z=0$

$$\lim_{z\to i} \cancel{(z-i)}\frac{\sin^2(z)}{z^6\cancel{(z-i)}} = \lim_{z\to i} \frac{\sin^2(z)}{z^6} = \frac{\sin^2(i)}{-1} = -\sin^2(i)$$

polo di primo ordine $z=i$

Singolarità eliminabile in $z=-i$

ESERCIZIO 3. (**10 pt.**) Si calcoli l'antitrasformata di Laplace $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$ della seguente funzione

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

$$F(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s+1)^2} + \frac{R_3}{(s+1)}$$

$R_1 = 1$, $R_2 = \lim_{z\to -1} \frac{1}{s} = -1$ $R_3 = \lim_{z\to -1} -\frac{1}{s^2} = -1$

$$f(t) = 1 - te^{-t} - e^{-t}$$