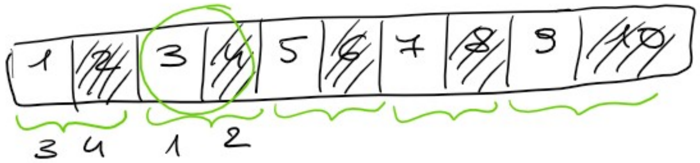
09 Altro Questionario

mercoledì 21 aprile 2021 14:00

1)



$$\frac{10!}{5!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240 \quad \text{c}$$

2)

$$4 \cdot \binom{8}{2} \cdot 8^3 = 4 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 8^3 = 57344 \quad \text{c}$$

scelgo il seme che compare 2 volte

3) 1 1 2 3 4 ✓

1 1 1 1 2 ✓

1 1 3 1 9 ✗

- codici di 5 cifre: 10^5
- codici con ESATTAMENTE 3 cifre uguali:

$$\binom{5}{3} \cdot 10 \cdot 9^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 10 \cdot 9 = 10^2 \cdot 9^2$$

scelgo dove sono le cifre ripetute 3 volte

scelgo la cifra

$$\Rightarrow 10^5 - 10^2 \cdot 9^2 = 10^2 (1000 - 81) = 91900 \quad \text{a}$$

4) $\mathbb{P}(T|F) = 20 \cdot \mathbb{P}(T|F^c)$

ha tumore

fuma

$$\mathbb{P}(F) = \frac{2}{10}$$

$$\mathbb{P}(F|T) = \frac{\mathbb{P}(T|F)\,\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(T)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(T|F)\,\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(T|F)\,\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(T|F^c)\,\mathbb{P}(F^c)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(T|F)\,\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(T|F)\,\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(T|F^c)\,\mathbb{P}(F^c)} =$$

$x := \mathbb{P}(T|F^c)$

$$= \frac{20x \cdot \frac{2}{10}}{20 \cdot x \cdot \frac{2}{10} + x \cdot \frac{8}{10}} = \frac{20\frac{2}{10}}{\frac{20 \cdot 2}{10} + \frac{8}{10}} =$$

$$= \frac{5}{6} \quad a$$

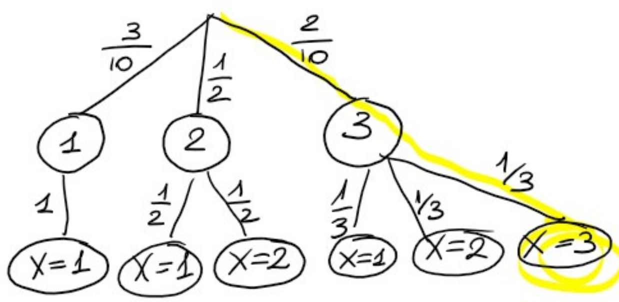
5) $D_i :=$ il figlio i è malato
$M :=$ la madre ha la disfunzione
$\mathbb{P}(D_i|M) = \frac{1}{2}$ $\quad \mathbb{P}(D_i|M^c) = 0$ $\quad \left(\begin{array}{l} \mathbb{P}(D_i^c|M) = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(D_i^c|M^c) = 1 \end{array} \right)$
$\mathbb{P}(M) = \frac{1}{3}$
$\mathbb{P}(D_1^c, D_2^c|M) = \mathbb{P}(D_1^c|M) \cdot \mathbb{P}(D_2^c|M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
$\rightarrow \mathbb{P}(D_1^c, D_2^c|M^c) = 1 \cdot 1 = 1$

$$\mathbb{P}(M^c|D_1^c, D_2^c) = \frac{\mathbb{P}(D_1^c, D_2^c|M^c)\,\mathbb{P}(M^c)}{\mathbb{P}(D_1^c, D_2^c|M^c)\,\mathbb{P}(M^c) + \mathbb{P}(D_1^c, D_2^c|M)\,\mathbb{P}(M)} =$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{2}{3}}{1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{8}{9} \quad d$$

6) $X :=$ # carte estratte
$X \in \{2, \dots, 5\}$
$\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{4} = \frac{8}{32}$ $\quad$ III = a I o II | ...
$\mathbb{P}(X=3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = \frac{12}{32}$ $\quad \Rightarrow$ valore più probabile è 3 $\quad$ b
II $\neq$ I
$\mathbb{P}(X=4) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{32}$
$\mathbb{P}(X=5) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$

7) X = rango del figlio estratto



$$\mathbb{P}(X=3) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{30}$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{19}{60}$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{3}{10} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{37}{60}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{3} i \cdot \mathbb{P}(X=i) = 1 \cdot \frac{37}{60} + 2 \cdot \frac{19}{60} + 3 \cdot \frac{2}{30} = \frac{29}{20}$$

(a)

8) $X :=$ # partite giocate in 1 incontro

$X \in \{3, 4, 5\}$

$\mathbb{P}(X=3) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ $\qquad X=3 \iff Y=3$

$\mathbb{P}(X=4) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot 3 = \frac{3}{8}$ $\qquad X=4 \iff Y=2$

A B A A
B A A A
A A B A

$\mathbb{P}(X=5) = 2 \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3}{8}$ $\qquad X=5 \iff Y=1$

$Y :=$ differenze tra # partite del vincitore e dello sconfitto

$$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=5) = \frac{3}{8}$$

$$\mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}(X=4) = \frac{3}{8}$$

$$\mathbb{P}(Y=3) = \mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{E}(Y) = 1\cdot\frac{3}{8} + 2\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{4} = \frac{15}{8}$$ (b)

9) $X :=$ punteggio al momento dell'arresto
(ci fermiamo se arriviamo a 100 o superiori)

$X \in \{100, 101, \dots, 105\}$

$Y :=$ punteggio prima dell'arresto

$Y \in \{94, 95, \dots, 99\}$

$100 - j + 6 \geq 100 + i$
$\Rightarrow j \leq 6 - i$

$$\mathbb{P}(X = 100 + i) = \sum_{j=1}^{6-i} \underbrace{\mathbb{P}(X = 100 + i \mid Y = 100 - j)}\, \mathbb{P}(Y = 100 - j) =$$

$i \in \{0, \dots, 5\}$

quanto vale?
Non è sempre 1/6:

Vediamo ad esempio il caso $i = 0$:

l'ultimo punteggio prima di arrivare a 100 è stato 94

$\Downarrow$

DOPO DI SICURO devo RAGGIUNGERE 100

$\Downarrow$

l'unica possibilità è che esca 6, e in tal caso arrivo a 100

$$\mathbb{P}(X = 100 \mid Y = 94) = 1$$

$$\mathbb{P}(X = 100 \mid Y = 95) = \frac{1}{2}$$

posso fare solo 5 o 6

se $Y = 95$, poi possono uscire solo 5 ($\Rightarrow X = 100$) o 6 ($\Rightarrow X = 101$)

$$\mathbb{P}(X = 100 \mid Y = 96) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(X = 100 \mid Y = 97) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(X = 100 \mid Y = 98) = \frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}(X = 100 \mid Y = 99) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(X=100 \mid Y=99) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(X=101 \mid Y=95) = \frac{1}{2}$$

In generale:

$$\mathbb{P}(X=100+i \mid Y=100-j) = \frac{1}{6-j+1} \qquad i = 0, \dots, 6-j$$

infatti, se $Y=100-j$, al passo successivo potrei avere

$100-j+1,\ 100-j+2,\ 100-j+3,\ 100-j+4,\ 100-j+5,\ 100-j+6$

MA in realtà posso avere solo quelli tali che

$$100-j+k \geq 100 \Rightarrow k \geq j \Rightarrow k = \underbrace{j, j+1, \dots, 6}_{6-j+1 \text{ possibilità}}$$

(tutte con la stessa probabilità)

(gli altri esiti del lancio del dado non mi farebbero arrivare a 100, e questo non è possibile perché Y è definito come il punteggio ottenuto proprio prima dell'arresto)

Quindi:

la dipendenza da i è solo nel numero di termini della sommatoria

$$\mathbb{P}(X=100+i) = \sum_{j=1}^{6-i} \underbrace{\frac{1}{6-j+1} \cdot \mathbb{P}(Y=100-j)}_{\text{Termine che dipende solo da } j, \text{ non da } i}$$

per $i=0$ ho più termini (tutti >0)

$\Rightarrow$ il valore più probabile è 100 ©

per $i = 0$

$\Rightarrow$ il valore più probabile è 100 (c)

10) 1° e 2°

2° e 3°

$\vdots$ $\quad \rightsquigarrow$ 51 coppie

51° e 52°

$$N := \sum_{i=1}^{51} \mathbb{1}(C_i = C_{i+1})$$

C_i = colore della carta i-sima

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{i=1}^{51} \mathbb{E}(\mathbb{1}(C_i = C_{i+1})) = \sum_{i=1}^{51} \mathbb{P}(C_i = C_{i+1}) = 51 \cdot \frac{25}{51} = 25$$

(a)

$$\mathbb{P}(C_i = C_{i+1}) = \mathbb{P}(C_1 = C_2) = \cancel{2} \cdot \underset{\text{I rossa}}{\frac{1}{\cancel{2}}} \cdot \underset{\text{II rossa}}{\frac{25}{51}} = \frac{25}{51}$$