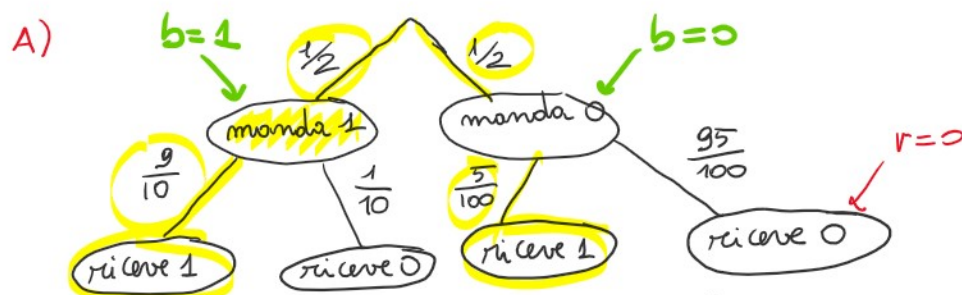


ESERCIZIO 5

Alice manda un bit a Bob in modo completamente casuale, ma Bob riceve il bit sbagliato il 5% delle volte se il bit spedito è 0, mentre il 10% delle volte se il bit spedito è 1.

A) Se Bob riceve il bit 1, con che probabilità questo è il bit spedito da Alice?

B) Se il bit viene mandato 3 volte (si intende lo STESSO bit) INDIPENDENTEMENTE, se Bob riceve 110 con che probabilità era stato mandato 1 da Alice?



b = bit spedito da Alice

r = bit ricevuto da Bob

$$\mathbb{P}(b=1 | r=1) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100}} = \frac{90}{95} = \frac{18}{19} \approx 0.947$$

B) $\mathbb{P}(b=1 | r_1=1, r_2=1, r_3=0) =$

$$\frac{\mathbb{P}(r_1=1, r_2=1, r_3=0 | b=1) \mathbb{P}(b=1)}{\mathbb{P}(r_1=1, r_2=1, r_3=0)} = \star$$

$$\mathbb{P}(r_1=1, r_2=1, r_3=0 | b=1) = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{81}{1000}$$

$$\mathbb{P}(r_i=1 | b=1) = \frac{9}{10}$$

$$\mathbb{P}(r_i=0 | b=1) = \frac{1}{10}$$

$$\mathbb{P}(r_1=1, r_2=1, r_3=0) =$$

$$= \mathbb{P}(// | b=1) \mathbb{P}(b=1) + \mathbb{P}(// | b=0) \mathbb{P}(b=0) =$$

$$= \frac{81}{1000} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{100} \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{95}{100} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{81}{1000} + \frac{5 \cdot 5 \cdot 95}{(100)^3} \right)$$

$$\star = \frac{\frac{81}{1000} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \left(\frac{81}{1000} + \frac{5 \cdot 5 \cdot 95}{(100)^3} \right)} \approx 0.9715 \approx 97\%$$

ESERCIZIO 6

Un crimine è stato certamente commesso da Andrea o da Bruno. Inizialmente non c'erano motivi per "preferire" l'uno all'altro. Ma, mentre il gruppo sanguigno di Bruno non è stato rilevato (inventatevi voi il motivo, la mia fantasia ha dei limiti), il gruppo sanguigno di Andrea è lo stesso che il colpevole ha lasciato sulla scena del delitto, ed è un gruppo sanguigno presente nel 10 per cento della popolazione.

A) Saputa questa informazione, calcolare la probabilità che Andrea sia il colpevole.

B) Saputa questa informazione, con che probabilità Bruno ha lo stesso gruppo sanguigno del colpevole?

$A = \text{"Andrea è il colpevole"}$

$B = \text{"Bruno è il colpevole"}$

$G_A = \text{"Il gruppo sanguigno di A è quello del colpevole"}$

$G_B = \text{"Il gruppo sanguigno di B è quello del colpevole"}$

$$A) \mathbb{P}(A | G_A) = \frac{\mathbb{P}(G_A | A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(G_A | A) \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(G_A | B) \mathbb{P}(B)} =$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{10}} = \frac{10}{11}$$

$$B) \mathbb{P}(G_B | G_A) = \mathbb{P}(G_B | G_A, A) \mathbb{P}(A | G_A) + \mathbb{P}(G_B | G_A, B) \mathbb{P}(B | G_A) =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{11} + 1 \cdot \frac{1}{11} = \frac{2}{11}$$

$$1 - \mathbb{P}(A | G_A)$$

$$1 - \frac{10}{11} = \frac{1}{11}$$

ESERCIZIO 7

Sappiamo che un nostro conoscente ha 2 figli*, ma non ne conosciamo il sesso. Assumendo che il sesso di un* figli* sia indipendente dal sesso dell'altr* e che M e F abbiano la stessa probabilità, rispondere alle seguenti domande.

A) Sapendo che almeno un* de* due figli* è F, con che probabilità * due sono FF?

B) Se invece scegliamo a caso uno dei due figli* ed è F, con che probabilità anche l'altr* è F?

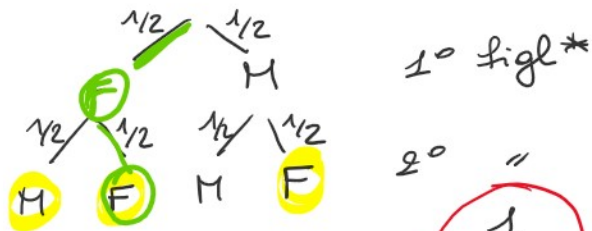
A)



1° figli*

F M

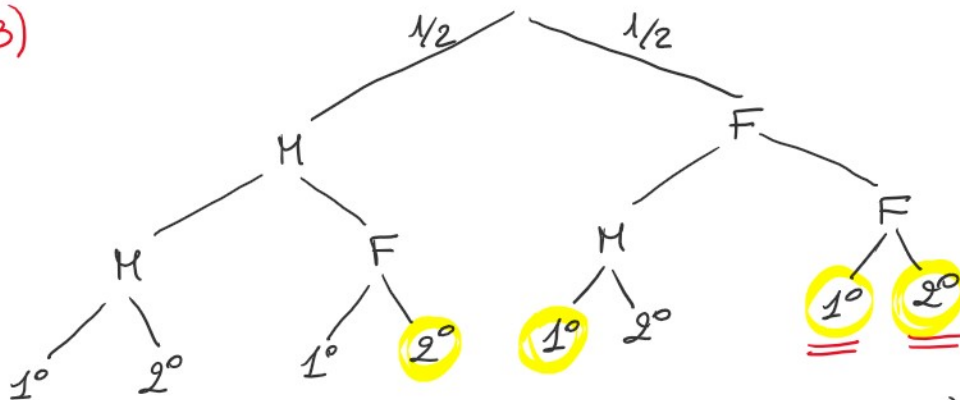
A)



	F	M
F	FF	FM
M	MF	MM

$$\mathbb{P}(FF | \text{almeno una } F) = \frac{1}{3}$$

B)



$$\mathbb{P}(FF | \text{ho scelto a caso un figl* e era } F) = \frac{2}{4}$$

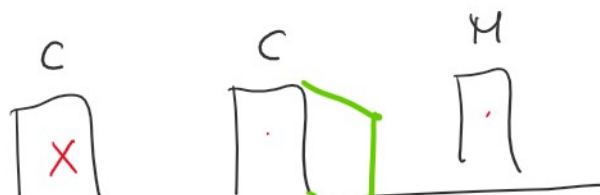
$$= \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

ESERCIZIO 8 (Il paradosso di Monty Hall).

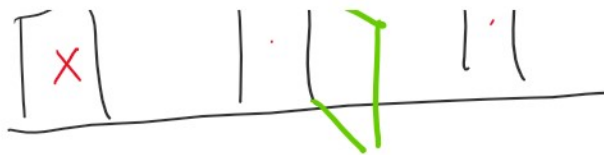
Durante un programma televisivo ad un concorrente viene proposto dal presentatore il gioco seguente: dietro tre porte chiuse identiche ci sono due capre e un'automobile, e al concorrente viene chiesto di puntare su una sola porta. Successivamente, però, il presentatore apre una delle porte e mostra che dietro c'è una capra. Chiede quindi al concorrente se vuole cambiare la sua scelta.

Voi che fareste?

→ perché il presentatore apre quella porta?



Il presentatore
SA cosa c'è dietro
le porte
⇒ apre sempre
una porta con
la capra

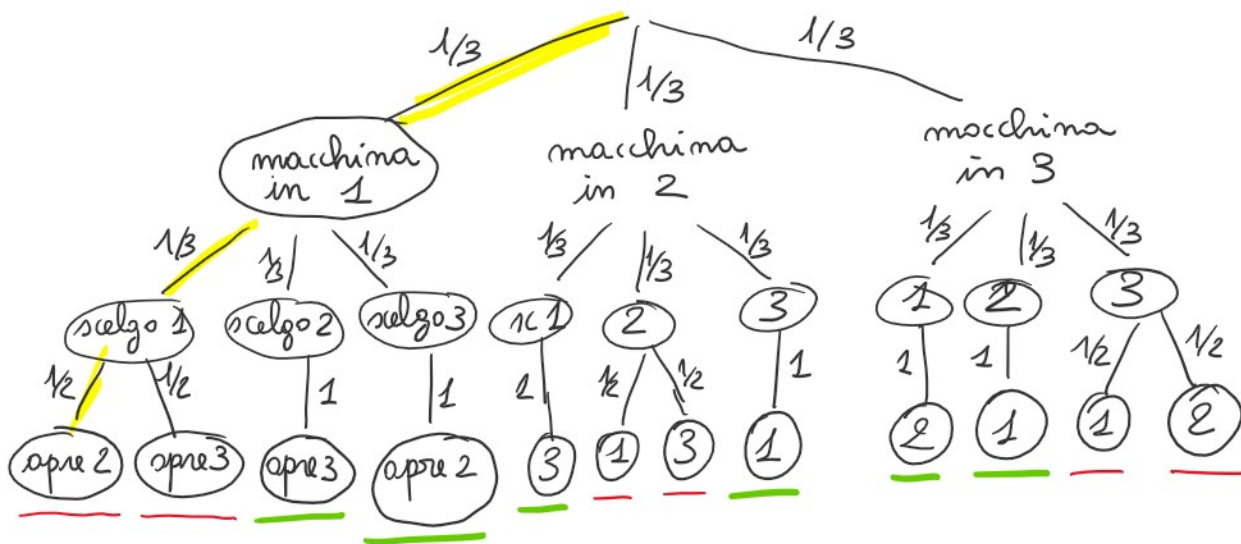
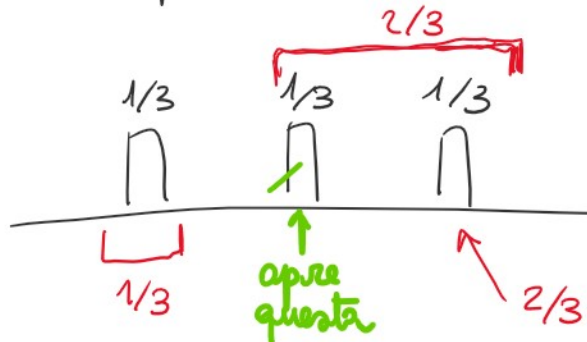


una porta con la capra

$$\mathbb{P}(\text{porta scelta contiene macchina}) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(\text{porta scelta contiene capra}) = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(\text{una delle "porte non scelte contiene la macchina"})$$



$$\mathbb{P}(\text{vinco cambiando la scelta}) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \cdot 6 = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(\text{vinco non cambiando}) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot 6 = \frac{1}{3}$$