Prova scritta di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica e Automatica

9 luglio 2020

Istruzioni

- Usate i fogli bianchi allegati per calcoli, ragionamenti e quanto altro reputiate necessario fare per rispondere alle 10 domande seguenti.
- Per ciascuna delle 10 domande indicare in corrispondenza di ciascuna delle affermazioni *a)*, *b)*, *c)* e *d)* se essa è VERA o FALSA, apponendo un segno sul rettangolo VERO o sul rettangolo FALSO sul *foglio risposte*.
- Ricordatevi di scrivere su tale *foglio risposte* tutte le informazioni richieste ed in particolare il vostro nome e cognome (i fogli senza nome e cognome saranno cestinati e dovrete ripetere l'esame in un'altra sessione).
- Avete un'ora esatta di tempo per svolgere gli esercizi. Al termine del tempo dovete consegnare il solo *foglio risposte* (potete tenere il testo delle domande e i fogli bianchi).
- Ricordatevi di segnare esattamente sui fogli che rimarranno a voi le risposte che avete dato in modo da potervi autovalutare una volta che vi verrà fornita la soluzione.
- Scaduta l'ora rimanete seduti. Passeremo a raccogliere i *fogli risposte*. Chi non consegna immediatamente il foglio al nostro passaggio non avrà altra possibilità di consegna e dovrà ripetere l'esame in un altro appello.
- ATTENZIONE. Durante la prova di esame:
  - Non è possibile parlare, per nessuna ragione, con i vostri colleghi.
  - Non è possibile allontanarsi dall'aula.
  - Non si possono usare telefoni cellulari
  - Non si possono usare calcolatrici, palmari o simili
  - Non è possibile usare dispense, libri o appunti.

  Chi contravviene anche a una sola di queste regole dovrà ripetere la prova di esame in altro appello.

Valutazione

- Per ogni affermazione VERO/FALSO correttamente individuata viene assegnato **1 punto**
- Per ogni affermazione VERO/FALSO non risposta vengono assegnati **0 punti**
- Per ogni affermazione VERO/FALSO NON correttamente individuata viene assegnato un punteggio negativo pari a **-0.25 punti**

Supera la prova chi totalizza un punteggio pari ad almeno 28 punti

1. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false.

   (a) Un semispazio chiuso non è un insieme convesso.

   (b) L'intersezione di un numero finito di insiemi convessi è un insieme convesso.

   (c) L'intersezione di un numero finito o infinito di poliedri è un poliedro.

   (d) Un poliedro è l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni e disequazioni lineari.

2. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false.

   (a) Un problema di Programmazione Lineare può ammettere soluzione ottima in un punto che non è vertice del poliedro che descrive l'insieme ammissibile.

   (b) Un problema di Programmazione Lineare non può avere un numero finito (maggiore o uguale a due) di soluzioni ottime distinte.

   (c) Se l'insieme ammissibile di un problema di PL è un politopo Q non vuoto, allora il problema ammette soluzione ottima su un vertice di Q.

   (d) Se il poliedro P che definisce la regione ammissibile di un problema di PL è un politopo non vuoto, e se y è un punto di P che non è vertice, allora è sempre possibile determinare un punto $z \in P$ tale che il numero dei vincoli attivi in z linearmente indipendenti sia aumentato di almeno uno rispetto al numero dei vincoli attivi in y linearmente indipendenti.

3. Sia dato un poliedro P in forma standard, ovvero definito da $P = \{Ax = b,\, x \geq 0\}$ e dove il numero delle equazioni è m e il numero delle variabili è n. Si supponga che il rango della matrice A sia m. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false.

   (a) Se P è non vuoto esiste sicuramente almeno una base ammissibile

   (b) Il numero di basi ammissibili è esattamente uguale al numero dei vertici

   (c) Il numero delle soluzioni di base ammissibile è esattamente uguale al numero di vertici

   (d) Il numero di basi ammissibili può essere infinito

4. Sia dato il seguente poliedro

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + \tau x_3 &= 3 \\ x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_3 &= 1 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

   (a) il punto $(1,\ 1,\ 0,\ 1)^T$ è un vertice per ogni valore di $\tau \in \mathbb{R}$

   (b) esistono valori di τ per i quali il punto $(1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$ è una SBA

   (c) per $\tau = 6$ il punto $(0,\ 0,\ 1/2,\ 2)^T$ è una SBA.

   (d) il poliedro è vuoto per ogni valore di τ.

5. Sia data una soluzione di base ammissibile $x = (2, \ \ 1, \ \ 0, \ \ 0, \ \ 3)^T$ alla quale corrisponde un valore della funzione obiettivo pari a 15 e dove le variabili fuori base sono la x_3 e la x_4. Supponiamo che risulti $\gamma = (2, \ 3)^T$. Se $y = (0, \ \ 2, \ \ 0, \ \ 1, \ \ 5)^T$ è un punto ammissibile, dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette

   (a) La funzione obiettivo nel nuovo punto y vale 12.

   (b) La funzione obiettivo nel nuovo punto y rimane pari a 15.

   (c) Non sono fornite tutte le informazioni necessarie per determinare il valore della funzione obiettivo nel nuovo punto y.

   (d) Se il problema di PL è in forma di minimizzazione, allora x è l'unica soluzione ottima del problema.

6. Sia dato un problema di PL in forma standard, e sia B una base ammissibile e N la matrice delle colonne fuori base.

   (a) Se per qualche indice $h \in \{1, \dots, n-m\}$ tale che $\gamma_h < 0$ risulta $\pi_h = (B^{-1}N)_h \le 0$, allora il criterio di illimitatezza è soddisfatto.

   (b) Se la SBA corrente è degenere, allora nel criterio del rapporto minimo si avrà $\bar{\rho} = 0$ e quindi la succssiva SBA sarà anch'essa degenere.

   (c) Se esiste un indice $h \in \{1, \dots, n-m\}$ tale che $\gamma_h = 0$, allora il criterio di ottimalità non può essere sicuramente soddisfatto.

   (d) Se la SBA corrente è non degenere, allora anche la successiva SBA sarà non degenere.

7. Dato il poliedro definito dal sistema

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 &\ge 4 \\
x_1 + \beta x_3 + x_4 &\ge 2 \\
2x_2 + x_4 &\ge 3 \\
x &\ge 0
\end{aligned}
$$

   (a) Esistono valori di β per cui il punto $(0, \ 1, \ 1, \ 1)^T$ è un vertice del poliedro.

   (b) L'origine è un vertice del poliedro.

   (c) Il punto $(1, \ 1, \ 0, \ 1)^T$ è un vertice del poliedro per ogni valore di $\beta \in \mathbb{R}$.

   (d) Il punto $(2, \ 1, \ 1, \ 1)^T$ è un vertice del poliedro per ogni valore di $\beta \in \mathbb{R}$.

8. In un'iterazione del metodo del simplesso risulta $x_B = (x_1, x_3, x_5)^T$, $x_N = (x_2, x_6, x_7, x_4)^T$,

$$
B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

   Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false.

   (a) La soluzione di base corrente soddisfa il criterio di ottimalità.

   (b) Le iterazioni della fase II del metodo del simplesso devono continuare facendo entrare in base la variabile x_4.

   (c) Non è soddisfatto il criterio di illimitatezza.

(d) La Soluzione di Base Ammissibile corrente è degenere.

9. In un'iterazione della Fase I del metodo del simplesso risulta

$$x_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad x_N = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 & 1 \\ -1 & -6 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false.

(a) Una possibile base ammissibile dalla quale far partire la Fase II corrisponde ad avere variabili di base $x_B = (x_3, x_4, x_5, x_6)$.

(b) Una possibile base ammissibile dalla quale far partire la Fase II corrisponde ad avere variabili di base $x_B = (x_2, x_4, x_5, x_6)$.

(c) È presente un vincolo ridondante.

(d) La SBA corrente è ottima per il problema artificiale.

10. Siano P_1 e P_2 due distinte formulazioni per il problema di PLI

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &Ax \geq b \qquad\qquad\qquad (\text{PLI}) \\ &x \geq 0, \quad \text{intero} \end{aligned}$$

(a) Vale $P_1 \cap Z^n = P_2 \cap Z^n$

(b) Siano z_1^* e z_2^* valori ottimi rispettivamente di

$$\begin{aligned} &\min c^T x \qquad\qquad &\min c^T x \\ &x \in P_1 \qquad\qquad &x \in P_2 \end{aligned}$$

Se P_1 è una formulazione migliore di P_2 allora $z_1^* \leq z_2^*$

(c) La formulazione ottima per il problema (PLI) è un poliedro che è il più piccolo insieme convesso che contiene il suo insieme ammissibile.

(d) Se P^* è la formulazione ottima per il problema (PLI), allora per determinare la soluzione del problema (PLI) è sufficiente risolvere il problema

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &x \in P^* \end{aligned}$$