Prova di Analisi Matematica II - 20 Luglio 2020
Ing. Informatica
Prof.ssa Virginia De Cicco

ESERCIZIO 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 3 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti. (**12 pt.**)

1) Il residuo della funzione $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} + \frac{3}{z}$ in $z_0 = 0$ è

a) 0 b) 1 c) 2 ~~d)~~ 3 .

$\frac{3}{z} + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{2n}}$

2) La somma della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad |x| < 1,$$

è la funzione

~~(a)~~ $-log(1-x)$ $= -\log[1+(-x)] = -\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{(-1)^{n+1} z^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n\geq 0} (-1)^{2n+1} \frac{z^{n+1}}{n+1}$
(b) $log(1-x)$
(c) $-log(1+x)$ $= \sum_{n\geq 0} (-1)^{2n+2} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n\geq 0} (-1)^{2(n+1)} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{z^n}{n!}$
(d) $log(1+x)$.

3) La funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = \sqrt{-2 + (|z-3|^2 - 1)i}$$

è olomorfa

$\mathbb{C} \setminus \begin{cases} -2 \leq 0 \\ (x-3)^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \to x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$

(a) in $\mathbb{C}$
(b) in $\mathbb{C}^*$
(c) in $\mathbb{C}$ privato di un asse
~~(d)~~ in $\mathbb{C}$ privato di una circonferenza.

4) L'ascissa di convergenza della trasformata di Laplace del segnale

$$f(t) = t^2\, sen((-2+i)t)$$

è

$t^2 \left(\frac{e^{(-2i-1)t} - e^{(2i+1)t}}{2i} \right)$

(a) 0
~~(b)~~ 1
(c) 2
(d) -2.

ESERCIZIO 2. (10 pt.)

(i) Sia dia la definizione del logaritmo complesso specificandone l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia.

(ii) Si studi l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della funzione

$$g(z) = Log(Arg\ z),\ z \in \mathbb{C}.$$

ESERCIZIO 3. (10 pt.)

(i) Si dia la definizione di singolarità isolata per una funzione di variabile complessa.

(ii) Si classifichino le singolarità isolate.

(iii) Si classifichino le singolarità isolate della seguente funzione

$$f(z) = \frac{sen(2z)}{sen(4z)},\ z \in \mathbb{C}.$$

2) $g(z) = Log(Arg(z))$ $z \in \mathbb{C}$

$Arg(z)$ e' continua e olomorfa in $\mathbb{C}^{**}$ come il $Log\,z$ (perchè ha parte im. $= Arg(z)$). Quindi $Log(Arg(z))$ e' continua e olomorfa in $\mathbb{C}^{**}$

3) $f(z) = \dfrac{sen(2z)}{sen(4z)} = \dfrac{\cancel{sen(2z)}}{2\,\cancel{sen(2z)}\cos(2z)} = \dfrac{1}{2\cos(2z)}$

$\cos 2z = 0 \Rightarrow 2z = \frac{\pi}{2} + k\pi \to z = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

$\lim_{z \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 2z}{sen 4z} = \dfrac{\sin 2z}{2\sin(2z)\cos(2z)} = \dfrac{1}{2\cos(2z)} \to +\infty \Rightarrow$ polo.