giovedì 24 giugno 2021 16:03

Piccioni21

Piccioni - Calcolo delle Probabilità e Statistica - 22/06/2021

1. Si consideri una PMF proporzionale a $2^n(\ln 2)^n/n!$ per n intero non negativo. Qual è la massa che assegna a 0?

A. $1/e^2$
B. $1/4$
C. $\ln 2$
D. $1/2$

Poiché viene detto che è PROPORZIONALE deve essere interpretato come

$$k \cdot \frac{2^n(\ln(2))^n}{n!} \quad \text{con } k \text{ una costante}$$

Quindi dobbiamo trovare k e la trovo imponendo la validità della PMF, che per essere valida deve sommare ad 1, quindi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} k \cdot \frac{2^n(\ln 2)^n}{n!} = k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(\ln 2)^n}{n!} = k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 \cdot \ln(2))^n}{n!} = 1$$

A questo punto si sarebbe dovuto notare che la serie di Taylor di e^x è:

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

dove se pongo $x = 2\ln(2)$ ottengo proprio quanto scritto sopra

Quindi ho ottenuto

$$k \cdot e^{2\ln(2)} = k \cdot e^{\ln(2^2)} = k \cdot e^{\ln(4)} = k \cdot 4 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$k = \frac{1}{4}$$

E quindi ho:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2^n(\ln(2))^n}{n!}$$

Che in $n=0$ vale proprio $1/4$

2. Se $X=1/(1-U)^2$, con U uniforme in (0,1), quale tra queste è la funzione di DENSITA' di X, per $x>1$?

A. $2/(x-1)^3$
B. $1-1/\sqrt{x}$
C. $1/[2(\sqrt{x})^3]$
D. $1/x^2$

Devo fare il cambiamento di variabile, quindi:

$$f_y = f_x \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

$$x = \frac{1}{(1-u)^2} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{1-u}$$

$$1-u = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow u = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

E quindi a questo punto derivo la parte destra dell'equazione rispetto ad x

$$1 - x^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{derivando}} \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \quad \text{(risposta c)}$$

5. Una moneta bilanciata è lanciata fino a che esce la terza testa o la ~~testa~~ terza croce, la prima delle due. Sapendo che questa condizione si è verificata PRIMA del quinto lancio, con che probabilità i primi tre lanci hanno dao un identico risultato?

A. 2/5
B. 2/7
C. 3/8
D. 3/5

$$P\left(\begin{smallmatrix}\text{si verifica nei}\\ \text{primi 3 lanci}\end{smallmatrix} \,\middle|\, \begin{smallmatrix}\text{si verifica}\\ \text{nei primi 5}\end{smallmatrix}\right) = \frac{P\left(\begin{smallmatrix}\text{si verifica nei}\\ \text{primi 5}\end{smallmatrix} \,\middle|\, \begin{smallmatrix}\text{si verifica}\\ \text{nei primi 3}\end{smallmatrix}\right) \cdot P\left(\begin{smallmatrix}\text{si verifica}\\ \text{nei primi 3}\end{smallmatrix}\right)}{P\left(\begin{smallmatrix}\text{si verif. nei}\\ \text{primi 5}\end{smallmatrix}\right)} =$$

$$= \frac{1 \cdot P\left(\begin{smallmatrix}\text{si verif. nei}\\ \text{primi 3}\end{smallmatrix}\right)}{P\left(\begin{smallmatrix}\text{si verifica nei}\\ \text{primi 5}\end{smallmatrix}\right)}$$

$$P\left(\begin{smallmatrix}\text{verif.}\\ \text{nei primi}\\ 3\end{smallmatrix}\right) \to P(3\text{ teste}) + P(3\text{ croci}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{2}{8}$$

$$P\left(\begin{smallmatrix}\text{verif.}\\ \text{nei primi}\\ 5\end{smallmatrix}\right) = P(3\text{ teste in 5 lanci}) + P(3\text{ croci in 3 lanci}) =$$

$$= \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= \cancel{2} \cdot \frac{5!}{3!\,\cancel{2!}}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5 \cdot \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{2} \cdot 2^3} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{\frac{2}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{2}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{8}}{5} = \frac{2}{5}$$

7. Se X e Y sono variabili aleatorie nello spazio L^2 tali che var(X)>var(X+Y)>var(X-Y) cosa possiamo dedurre da TUTTE queste disuguaglianze?

A. cov(X,Y)<-var(Y)/2
B. cov(X,Y)>0
C. cov(X,Y)<0
D. E' impossibile che valgano tutte queste disuguaglianze

$$Var(X) > Var(X+Y) > Var(X-Y)$$

$$Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

$$Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,-Y) =$$

$$= Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$$

Considerando i 2 elementi finali mi accorgo che se:

$$Cov(X,Y) < 0$$

Avverrebbe un cambiamento di segno e avrei che

$$Var(X) > Var(X) + Var(Y) - Cov(X,Y) < Var(X) + Var(Y) + Cov(X,Y)$$

Che però dato che la varianza è sempre ≥ 0, sto dicendo che sottraendo ad una quantità positiva $Var(X) + Var(Y)$ una quantità $Cov(X,Y)$ otterrei un numero che è inferiore agli stessi elementi però sommati.
Che sarebbe impossibile!

A questo punto però vedo che anche se è maggiore di 0 non va bene, poiché i primi 2 termini non vanno bene, poiché anche avendo $Var(Y) = 0$ avrei

$$Var(X) > Var(X) + Cov(X,Y) \quad \text{dove } Cov(X,Y) > 0$$

Ma anche questo è impossibile

D. E impossibile che valgano tutte ...

8. **Il coefficiente di variazione campionario V è il rapporto tra la media campionaria e la radice quadrata della varianza campionaria (corretta), calcolato su di un campione di numerosità n. Per il test dell'ipotesi che la media di una distribuzione normale è nulla, con la varianza ignota, se:**
i) V=1,5 e n=9;
ii) V=0,75 e n=25, quale di queste conclusioni è corretta?

A. Le tavole non permettono di fare nessuna delle altre tre affermazioni.
B. L'evidenza contro l'ipotesi è identica in i) e in ii).
C. L'evidenza contro l'ipotesi è maggiore in ii) che in i).
D. L'evidenza contro l'ipotesi è maggiore in i) che in ii).

Quello che viene detto in parole molto complesse è in realtà molto semplice, ovvero

$$V = \frac{\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}$$ viene anche detto che la media della distribuzione è nulla

Stiamo lavorando con distribuzione t-student dove per accettare Ho, deve valere:

$$\left| \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right| < t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \longrightarrow \text{poiché } \mu = 0 \quad \left| \frac{\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}} \right| < t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$$

Nel primo caso per accettare Ho dovrei avere:

$$|1,5| < t_{\frac{\alpha}{2}, 8}$$

Nel secondo per accettare Ho:

$$|0,75| < t_{\frac{\alpha}{2}, 24}$$

Consultando le tavole

***t*-Distribution**

Degrees of freedom ν	α 0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Devo considerare che devo verificare che 1,5 sia più piccolo dei valori. Vedo che il primo valore nella tabella è più grande di 3,5 e ci fa rigettare Ho.

Anche qui devo confrontare i valori, ma con 0,75, ma questa volta vedo che il primo α permette di accettare Ho.

Ma il quesito chiede di verificare l'evidenza contraria all'ipotesi, nel primo si ottengono dei valori fuori intervallo o comunque intervalli molto più stretti.

È quindi il primo ad avere un evidenza contraria maggiore (risp. d)