Soluzioni al quiz del 17/7.

0. Ogni partita ha 3 risultati, le partite sono 8: le 8-ple con componenti scelte tra i 3 risultati sono $3^8 = 81^2 = 6561$.

1. Se Andrea ha probabilità $\frac{1}{2}$ di vincere l'incontro, allora lo stesso vale per Bruno che deve aggiudicarsi due partite per farlo e quindi ha probabilità $(1-p)^2$ di vincere l'incontro. Uguagliando a $1/2$ si ottiene che $p = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Si vede immediatamente che $\frac{7}{10} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{3}{4}$ e quindi $\frac{1}{4} < p < \frac{3}{10}$.

2. Gli studenti che seguono le esercitazioni o consultano il libro di testo (connettivo or) sono $20+30-5 = 45$. Se a loro aggiungiamo i 10 che non fanno né l'una né l'altra cosa si ottiene $45 + 10 = 55$.

3. Il numero di triangoli (terne completamente connesse) nel grafo aleatorio si può esprimere come somma delle variabili indicatrici di ciascun triangolo nel grafo. Ovviamente tutte queste variabili indicatrici hanno la stessa media $\frac{1}{8}$, che è la probabilità di presenza di 3 spigoli nel grafo. Ce ne sono $\binom{16}{3} = \frac{16\cdot 15\cdot 14}{3!} = 16 \cdot 35$ e quindi la media richiesta è $\frac{16\cdot 35}{8} = 70$.

4. Se il processo di Poisson ha in media λ eventi in un intervallo di tempo di lunghezza unitaria, dobbiamo considerare gli eventi in un intervalli di tempo lungo $\frac{2}{\lambda}$. Questi seguono quindi una distribuzione di Poisson con media $\lambda\frac{2}{\lambda} = 2$. La probabilità che si verifichi al più un evento è quindi $e^{-2\lambda} + 2e^{-\lambda} = 3e^{-\lambda}$. La probabilità che non ci sia nessun evento, sapendo che se ne è verificato al più uno, è infine $\frac{e^{-\lambda}}{3e^{-\lambda}} = \frac{1}{3}$.

5. La varianza di $aX + (1-a)Y$ quando X e Y sono indipendenti e identicamente distribuite è proporzionale a $a^2 + (1-a)^2 = 1 - 2a(1-a)$ e quindi è minima quando $a(1-a)$ è massima, cioè per $a = 1/2$.

6. La media della variabile (per simmetria della funzione di densità) è 1, quindi la varianza è

$$\int_0^2 (x-1)^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 y^2(1-|y|)dy = 2\int_0^1 (y^2 - y^3)dy = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \qquad (1)$$

dato che la densità $f(x) = 1 - \frac{|x-1|}{2}$ per $x \in (0,2)$, il che suggerisce il cambiamento di variabile $y = 1 - x$ nel primo integrale, e l'utilizzazione della parità della funzione integranda per ridursi ad un integrale su $(0,1)$.

7. Se X e Y sono indipendenti (non necessario) e con la stessa varianza finita allora

$$cov(X+Y, X-Y) = cov(X,X) - cov(X,Y) + cov(X,Y) - cov(Y,Y) = var(X) - var(Y) = 0. \qquad (2)$$

D'altra parte nel caso in cui X e Y prendano solo valori non negativi si ha

$$P(X+Y=0, X-Y=0) = P(X=0, Y=0) \qquad (3)$$
$$P(X+Y=0)P(X-Y=0) = P(X=0,Y=0)P(X=Y) \qquad (4)$$

quindi se $0 < P(X=0, Y=0) < 1$ e $P(X=Y) < 1$ (garantito se $0 < P(X=0) < 1$ nel caso X e Y i.i.d.), allora $X+Y$ e $X-Y$ non sono indipendenti (per un esempio concreto, si prenda il caso X e Y i.i.d. geometriche di parametro $p = 1/2$).

8. La variabile aleatoria T_{30} che conta i lancio in cui avviene per la trentesima volta il risultato 3 ha distribuzione binomiale negativa con parametri 30 e $\frac{1}{6}$ quindi media $180 = \frac{30}{1/6}$ e varianza $900 = 180 \cdot 5$. Applicando l'approssimazione normale la distribuzione della variabile $(T_{30} - 180)/30$ si approssima con la normale standard e quindi $P(T_{30} > 210)$ è all'incirca $\Phi(1) \cong 1 - 0.84 = 0.16$.

9. Il p-value di 13.5 nel caso bilaterale è la probabilità che una variabile con distribuzione t di Student con 15 gradi di libertà superi in modulo il valore osservato

$$\frac{4|13.5 - 14.625|}{3} = \frac{3}{2} \tag{5}$$

Avendo solo le tavole della distribuzione normale, possiamo almeno dire che questa probabilità supera il valore $2(1 - \Phi(1.5)) = 2(1 - 0.8531) \simeq 0.3$ e quindi è superiore a 0.1.