Prova di Analisi Matematica II - 29 Aprile 2020
Ing. Informatica
Prof.ssa Virginia De Cicco

ESERCIZIO 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta.

1) La successione di funzioni $f_n(x) = e^{-nx^2}$ converge puntualmente alla funzione $f(x) = 0$

   (a) $\forall x \in \mathbb{R}$
   (b) per $x = 0$
   (c) $\forall x \geq 0$
   ~~(d)~~ $\forall x \neq 0$.

   Risposta giusta è la (d), perchè $f_n(0) = 1 \to 1$.

2) L'integrale

$$\int_\gamma \bar{z} dz = \int_0^1 it \cdot (-i)\, dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

   dove $\gamma(t) = -it$, $t \in [0,1]$ vale

   ~~(a)~~ $\frac{1}{2}$
   (b) $-\frac{i}{2}$
   (c) 1
   (d) $-2i$.

   Risposta giusta è la (a), perchè

$$\int_\gamma \bar{z} dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_0^1 \overline{\gamma(t)}\gamma'(t) dt = \int_0^1 it(-i) dt = 1/2.$$

3) Una delle seguenti identità è vera. Quale?

   ~~(a)~~ $Arg(z^2) = 2Arg\, z$ $\qquad \rho e^{i\theta} = z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$
   (b) $Arg(z^2) = Arg(2z)$
   (c) $Arg(z^2) = (Arg z)^2$ $\qquad z^2 = \rho^2 e^{i2\theta} = \rho^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))$

(d) $Arg(z^2) = Arg z$.

Risposta giusta è la (a), perchè

$$z^n = |z|^n (cos(n\theta) + isen(n\theta)) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

e quindi

$$z^2 = |z|^2 (cos(2Arg z) + isen(2Arg z)).$$

ESERCIZIO 2.

(i) Si dia la definizione di antitrasformata di Laplace.

(ii) Si determini l'antitrasformata di

$$F(s) = \frac{s(s-2)}{(s^2-4)(s+1)}.$$

Con i fratti semplici

$$F(s) = \frac{s(s-2)}{(s^2-4)(s+1)} = \frac{s}{(s+2)(s+1)} = \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1}.$$

e quindi si ha

$$f(t) = 2e^{-2t} - e^{-t}.$$

Oppure con i residui

$$f(t) = res(\frac{e^{st}s}{(s+2)(s+1)}, -2) + res(\frac{e^{st}s}{(s+2)(s+1)}, -1) = 2e^{-2t} - e^{-t}.$$

Se $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \sum_{j=1}^{n} res(e^{st}F(s), s_j)$$

$$F(s) = \frac{s(s-2)}{(s^2-4)(s+1)} = \frac{s\cancel{(s-2)}}{(s+2)\cancel{(s-2)}(s+1)} = \frac{s}{(s+2)(s+1)} = \frac{R_1}{s+2} + \frac{R_2}{s+1}$$

$$R_1 = \lim_{s \to -2} \frac{s}{s+1} = 2 \qquad R_2 = \lim_{s \to -1} \frac{s}{s+2} = -1$$

$$f(t) = 2e^{-2t} - e^{-t}$$

ESERCIZIO 3.

(i) Sia dia la definizione di serie di potenze centrata in x_0.

(ii) Sia sviluppi in serie di potenze centrata in $x_0 = 0$ la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x}{3x-2}.$$

Usando la serie geometrica, si ha

$$f(x) = \frac{x}{3x-2} = -x\frac{1}{2-3x} = -x\frac{1}{3(\frac{2}{3}-x)} = -\frac{x}{3}\frac{1}{\frac{2}{3}(1-\frac{3}{2}x)}$$

$$= -\frac{x}{2}\frac{1}{1-\frac{3}{2}x} = -\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}x^{n+1},$$

se

$$\left|\frac{3}{2}x\right| < 1$$

che equivale a

$$|x| < \frac{2}{3}.$$

1) Una serie di funzioni $\sum_{k\geq 0} a_k (x-x_0)^k$ prende il nome di serie di potenze centrata in x_0.

2) $f(x) = \frac{x}{3x-2}$ $\quad x_0 = 0$

$$\frac{x}{3x-2} = -x\frac{1}{2-3x} = -\frac{x}{2}\frac{1}{(1-\frac{3}{2}x)} = -\frac{x}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{3}{2}x\right)^n =$$

$$= -\sum \frac{3^n}{2^{n+1}} x^{n+1}$$

Converge per $\left|\frac{3}{2}x\right| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{2}{3}$