2. Due giocatori scoprono 10 carte di cui 5 rosse e 5 nere. Inizia il turno Andrea, segue Bruno e via di seguito per 5 volte. Sia N il numero delle volte che Bruno scopre una carta di colore diverso da quella scoperta da Andrea immediatamente prima.

a) Determinare la media di N.

b) Determinare la probabilità che $N = 5$.

Risoluzione.

a) Si può scrivere la variabile N come somma delle variabili aleatorie I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5. Dato che il modello uniforme nelle permutazioni di 10 elementi rimane inalterato se si permutano gli estratti in un modo qualunque I_j ha la stessa distribuzione di I_1 per $j=2,\dots,5$. Quindi $E(N)=E(I_1+I_2+I_3+I_4+I_5) = 5P(I_1=1)$ e $P(I_1=1)=\frac{5}{9}$ (qualunque sia la carta scoperta da Andrea, questa è la probabilità che quella di Bruno sia di colore diverso

b) Fissate le posizioni delle 5 carte rosse (e quindi delle 5 carte nere) la probabilità di scoprire le 10 carte con i colori nelle posizioni scelte è $\frac{5!\,5!}{10!} = \frac{1}{\binom{10}{5}}$.

Dato che ci sono $2^5=32$ modi di scegliere per ognuna delle 5 coppie di estrazioni effettuate da Andrea e Bruno se la prima carta estratta è rossa o nera per realizzare l'evento $\{N=5\}$ si ha che

$$P(N=5) = \frac{32}{\binom{10}{5}} = \frac{8}{63}$$