Prova di Analisi Matematica II - 27 Giugno 2018
Ing. Informatica
Prof.ssa Virginia De Cicco

1)	2)	3)	4)	5)	VOTO:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Cognome	Nome

Dichiaro di aver sostenuto con profitto l'esame di Analisi Matematica 1

FIRMA: ....
(la dichiarazione precedente non è necessaria per gli studenti di Ing. Clinica immatricolati in anni precedenti all'A.A. 2015/2016)

ESERCIZIO 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti. (**10 pt.**)

1) La seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x+3)^n$$

(a) può ammettere $I = [-5, -1]$ come intervallo di convergenza puntuale
(b) converge solo se a_n è infinitesima
(c) $\forall a_n$ ammette intervallo di convergenza puntuale chiuso
(d) ha come raggio di convergenza $R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

2) L'insieme di convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{|z-3|}}, \quad z \in \mathbb{C}$$

è

(a) tutto $\mathbb{C}$ $|z-3|>1$

(b) l'insieme vuoto

(c) un semipiano

~~(d)~~ il complementare di un cerchio.

3) La successione $f_n(x) = \frac{1}{x^{2n}} - n^2 x$

(a) converge in $x = 1$

(b) converge in $x = -1$

(c) converge per $x < -1$

~~(d)~~ nessuna delle altre risposte.

4) La parte immaginaria del numero complesso i^i è

(a) 1

(b) 2π

(c) π

~~(d)~~ 0.

$$i^i = e^{i\,\text{Log}(i)} = e^{i(\log|i| + i \arg i)} = e^{i(i\frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

5) La forma differenziale in $\mathbb{R}^2$ definita da

$$\omega = \left[\frac{y^3}{x^2+1} + 2y\right] dx + \left[3y^2 \arctan x + x\right] dy$$

(a) non è chiusa

(b) è esatta

(c) è definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(d) è chiusa, ma non esatta.

2) $F(s) = \frac{1}{s^2 - 1}$

ESERCIZIO 2.

(i) Si dia la formula della trasformata di Laplace di un segnale periodico.

(ii) Si calcoli la trasformata del segnale

$$f(t) = \sinh t$$

definito su $[0, 1[$, esteso per periodicità.

1) $\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt \quad \mathrm{Re}(s) > 0$

2) $F(s) = \frac{1}{1 - e^{-s}} \int_0^1 e^{-st} \sinh(t)\,dt = \frac{1}{1 - e^{-s}} \int_0^1 \frac{e^{t(1-s)} - e^{-t(s+1)}}{2}\,dt =$

$$= \frac{1}{1 - e^{-s}} \frac{1}{2} \left[\int_0^1 e^{t(1-s)}\,dt + \int_0^1 e^{-t(s+1)}\,dt \right] =$$

$$= \frac{1}{2(1 - e^{-s})} \left[\left(\frac{1}{1-s} \left(e^{1-s} - 1 \right) \right) + \left(\frac{1}{s+1} \left(-e^{-(s+1)} + 1 \right) \right) \right]$$

ESERCIZIO 3.

(~~i~~) Si dia la definizione di singolarità isolata per una funzione $f(z)$ di variabile complessa.

(ii) Si dia la classificazione delle singolarità isolate.

(iii) Si classifichino le singolarità delle seguenti funzioni:

$$f(z) = \frac{Log(z+1)}{z},$$

$$g(z) = \frac{Log\, z}{z-1},$$

$$h(z) = \frac{Log\, z}{(z-1)^2}.$$

1) Data $f: A \to \mathbb{C}$ una funzione analitica sull'aperto $A \subseteq \mathbb{C}$ un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si dice un punto singolare isolato o una singolarità isolata per f se $z_0 \notin A$ (z_0 non e' punto di chiusura per A), ma esiste un intorno forato $B_r^*(z_0) = B_r(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ tutto contenuto in A.

2) Le singolarità isolate possono essere

- eliminabili: $\lim_{z \to z_0} f(z) = l \in \mathbb{C}$
- poli: $\lim_{z \to z_0} f(z) = \pm\infty$
- essenziali: $\lim_{z \to z_0} f(z) \nexists$

3) $\frac{Log(z+1)}{z}$: $\lim_{z \to 0} \frac{Log(z+1)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{z} = 1 \Rightarrow$ eliminabile

$\frac{Log(z)}{z-1}$: $\lim_{z \to 1} \frac{Log(z)}{z-1} = \frac{z-1}{z-1} = 1 \Rightarrow$ eliminabile

$\frac{Log(z)}{(z-1)^2}$: $\lim_{z \to 1} \frac{Log(z)}{(z-1)^2} \nexists \Rightarrow$ essenziale

ESERCIZIO 4.

(i) Si enunci il Teorema integrale di Cauchy.

(ii) Si dimostri tale Teorema (usando le formule di Gauss-Green).

(iii) Si calcoli il seguente integrale

$$\int_\gamma \frac{1}{(z^2+7)^2}\,dz$$

dove γ è la circonferenza di raggio 1 centrata in 0.

1) Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso e sia $f: A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora per ogni γ circuito regolare a tratti, contenuto in A tale che γ è la frontiera di un aperto D interamente contenuto in A, si ha che:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{(z^2+7)^2}\,dz = 0$ perché D non contiene singolarità.

ESERCIZIO 5.

(i) Si dia la definizione di convergenza totale di una serie di funzioni.

(ii) Si studi la convergenza puntuale e totale della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-n(x+1)}}{n! + x^2}, \qquad \text{per } x \geq -1.$$

(iii) Si calcoli la somma della serie per $x = 0$.

1) La serie $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge totalmente in $x \in A$ se esiste una successione numerica M_n tale che:

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in A, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e la serie numerica $\sum_{n\geq 0} M_n$ risulta convergente.

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-n(x+1)}}{n! + x^2}$ per $x \geq -1$

$$f_n(x) = \frac{1}{n! + x^2} e^{-n(x+1)}$$

Per $x \geq -1$ $f_n(x) \to 0$ per $n \to +\infty$

$$\left| \frac{e^{-n(x+1)}}{n! + x^2} \right| \leq \frac{e^{-n(x+1)}}{n!} \equiv M_n \quad \sum M_n < +\infty \quad \forall x \in [-1, A]$$

con $A > -1$

Per $x = 0$: $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{-nx}}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{(e^x)^n} = e^{e^x}$