# ESERCITAZIONE 7– DOCENTE: MAURO PICCIONI, TUTOR: HLAFO ALFIE MIMUN

April 18, 2020

## 1. ESERCIZI

**Ex. 1:** Un gruppo di $n \geq 2$ persone decide di giocare a sasso-forbice-carta. Come sicuramente sapete in questo gioco la carta distrugge il sasso, il sasso distrugge la forbice e la forbice distrugge la carta. Generalmente si gioca tra due persone ma si può formulare la seguente estensione ad $n$ giocatori: possono succedere le seguenti 3 cose

- gli $n$ giocatori possono essere divisi in 2 gruppi dove il primo gruppo sceglie $a$ ed il secondo $b$, con $a, b \in \{$sasso, carta, forbice$\}$ dove $a$ che distrugge $b$. In tale caso coloro che scelgono $a$ vincono ed il gioco finisce;
- tutti gli $n$ giocatori scelgono lo stesso oggetto $a \in \{$sasso, carta, forbice$\}$. In tale caso il gioco resta indeciso e bisogna rilanciare;
- gli $n$ giocatori possono essere divisi in 3 gruppi, ognuno dei quali ha scelto un oggetto diverso dagli altri due gruppi. In tale caso il gioco resta indeciso e bisogna rilanciare.

Si assuma che ognuno dei 3 giocatori scelga tra sasso, forbice, carta con uguale probabilità ed indipendentemente dagli altri. Si denoti con $X, Y, Z$ il numero di giocatori che sceglie sasso, forbice, carta, rispettivamente.

**(1a)** Si trovi la PMF congiunta di $X, Y, Z,$.
**(1b)** Si trovi la probabilità che il gioco sia decisivo;
**(1c)** Si trovi la probabilità che il gioco sia decisivo per $n = 5$ e calcolare la probabilità che il gioco sia decisivo per $n \to +\infty$.

**Ex. 2:** Un pollo depone $n$ uova. Ogni uovo si schiude indipendentemente dagli altri con probabilità $p$. Per ogni pulcino che nasce, la probabilità di sopravvivenza è $s$ indipendentemente dagli altri pulcini. Siano $N \sim \text{Bin}(n, p)$ il numero di uova che si schiude, $X$ il numero di pulcini che sopravvive ed $Y$ il numero di pulcini che non sopravvive. (dunque $X+Y = N$). Si trovi la PMF marginale di $X$ e la PMF congiunta di $X$ e $Y$. Cosa possiamo dedurre sull'indipendenza di $X, Y$?

**Ex. 3:** Due dadi (a sei facce) sono lanciati. Un dado è verde e l'altro arancione ed hanno esiti $X, Y$ rispettivamente. Si calcoli la covarianza tra $X + Y$ ed $X - Y$. Cosa si può dire sull'indipendenza tra $X + Y$ e $X - Y$?

**Ex. 4:** Un pollo cova $N$ uova, dove $N \sim \text{Pois}(\lambda)$. Ogni uovo si schiude indipendentemente dagli altri con probabilità $p$. Si denoti con $X$ il numero di uova che si schiude. Dunque $X \mid N \sim \text{Bin}(N, p)$, ovvero, condizionatamente all'evento $N = h$, si ha $X \sim \text{Bin}(h, p)$. Si studi la PMF di $X$ e di $Y := N - X$. Successivamente si dimostri che $X$ ed $Y$ sono indipendenti e si calcoli la correlazione tra $X$ ed $N$ (si determini un risultato che dipende solo $p$).

**Ex. 5:** Siano $V, W, Z$ variabili aleatorie i.i.d. ognuna con distribuzione $\text{Pois}(\lambda)$. Definiamo $X = V + W$ ed $Y = V + Z$.

**(5a)** si calcoli $\text{Cov}(X, Y)$;

**(5b)** si provi che condizionatamente a $V$, le variabili $X, Y$ sono indipendenti;

**(5c)** si trovi la PMF congiunta di $X, Y$.

## 2. SOLUZIONI

**Ex. 1:(1a)** Sappiamo che $X + Y + Z = n$. Se guardiamo ad $X$ (ovvero il numero di persone che scelgono sasso), notiamo che ognuno degli $n$ giocatori ha probabilità $1/3$ di scegliere sasso (indipendentemente dagli altri giocatori). Dunque $X \sim \text{Bin}(n, 1/3)$. Supponiamo di conoscere che $X = a$ per qualche $a \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e studiamo $Y$ (ovvero il numero di persone che scelgono forbice). Come prima ognuno dei rimanenti $n - a$ giocatori ha probabilità $1/12$ di scegliere forbice (indipendentemente dagli altri giocatori). Dunque, condizionatamente all'evento $\{X = a\}$ per qualche $a \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $Y \sim \text{Bin}(n - a, 1/2)$. Supponiamo ora che, oltre a conoscere che $X = a$ per qualche $a \in \{0, 1, \ldots, n\}$, si sa anche che $Y = b$ per qualche $b \in \{0, 1, \ldots, n - a\}$. A questo punto sappiamo che ognuno dei rimanenti $n - (a + b) := c$ giocatori sceglie carta con probabilità 1. Ciò ci suggerisce la seguente formula: fissati $a, b, c \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tali che $a + b + c = n$, si ha (per la regola della catena)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = a, Y = b, Z = c) &= \mathbb{P}(Z = c \,|\, X = a, Y = b) \cdot \mathbb{P}(Y = b \,|\, X = a) \cdot \mathbb{P}(X = a) = \\
&= 1 \cdot \binom{n-a}{b} \left(\frac{1}{2}\right)^b \left(\frac{1}{2}\right)^{n-a-b} \cdot \binom{n}{a} \left(\frac{1}{3}\right)^a \left(\frac{2}{3}\right)^{n-a} = \\
&= 1 \cdot \frac{(n-a)!}{b! \cdot (n-a-b)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-a} \cdot \frac{n!}{a! \cdot (n-a)!} \left(\frac{1}{3}\right)^a \left(\frac{2}{3}\right)^{n-a} = \\
&= 1 \cdot \frac{(n-a)!}{b! \cdot c!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-a} \cdot \frac{n!}{a! \cdot (n-a)!} \left(\frac{1}{3}\right)^a \left(\frac{2}{3}\right)^{n-a} = \\
&= \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{(a+b+c)!}{a! \cdot b! \cdot c!} \left(\frac{1}{3}\right)^{a+b+c}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Dunque la PMF congiunta di $X, Y, Z$ è $Multinomiale\left(n, \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right)$

**(1b)** Se il gioco finisce vuol dire che c'è stato un solo oggetto che non è stato scelto da nessuno. Dunque se $E$ è l'evento che il gioco finisce, applicando

(1) si ha

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(E) = &\sum_{h=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = h, Y = n-h, Z = 0) + \sum_{h=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = h, Y = 0, Z = n-h) + \\
&+ \sum_{h=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = 0, Y = h, Z = n-h) = \\
&= 3 \cdot \sum_{h=1}^{n-1} \frac{n!}{h! \cdot n-h! \cdot 0!} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{h=1}^{n-1} \binom{n}{h} = \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left[\sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} - \binom{n}{n} - \binom{n}{0}\right] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot [2^n - 1 - 1] = \\
&= \frac{2^n - 2}{3^{n-1}} = \frac{2(2^{n-1} - 1)}{3^{n-1}} ,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

dove abbiamo usato l'identità $\sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} = 2^n$.

**(1c)** Dunque se $n = 5$, applicando la formula (2) si ha che il gioco è decisivo con probabilità pari a $\frac{30}{81} \approx 0.37$.
Se invece abbiamo $n$ giocatori con $n \to +\infty$, la probabilità che il gioco sia decisivo è data dal limite del risultato in (2), ovvero

$$
\lim_{n \to +\infty} \frac{2(2^{n-1} - 1)}{3^{n-1}} = 2 \cdot \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-1}}\right] = 0 .
$$

**Ex. 2:** Come visto nell'esercizio 1 dell'esercitazione 5 proposta due settimane fa, la variabile aleatoria $X$ ha legge $\mathrm{Bin}(n, sp)$ in quanto abbiamo $n$ uova e (indipendentemente dalle altre uova) per ogni uovo la probabilità che nasca un pulcino che poi sopravvive è data dal prodotto tra la probabilità di nascita $p$ e quella di sopravvivenza $s$, ovvero $sp$. Dunque $X$ conta i successi (ovvero i pulcini nati e poi sopravvisuti) su $n$ prove (ovvero le $n$ uova) ed ogni prova ha probabiltà di successo $s \cdot p$, da cui $X \sim \mathrm{Bin}(n, sp)$. Analogamente $Y \sim \mathrm{Bin}(n, (1-s)p)$, in quanto $Y$ denota il numero di pulcini nati che poi non sopravvivono. Notiamo che già a priori si può dire che $X, Y$ non sono indipendenti in quanto se $X = n$, si ha per forza che $Y = 0$. Calcoliamo ora la PMF congiunta di $X, Y$.

Notiamo che $N \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ e che, se condizioniamo all'evento $N = h$ per $h \in \{0, 1, \ldots, n\}$, la variabile $X$ indica quanti pulcini sopravvivono su $h$ pulcini nati ed $Y$ è automaticamente data da $h - X$. Poichè ogni pulcino ha probabilità $s$ di sopravvivere indipendentemente dagli altri pulcini, si ha che, condizionatamente all'evento $N = h$, $X \sim \mathrm{Bin}(h, s)$. Dunque per $k, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ con $k + j \leq n$ si ha (adottiamo la convenzione $\binom{h}{k} = 0$ se si ha $k > h$)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k, Y = j) &= \mathbb{P}(X = k, Y = j, N = k + j) = \\
&= \mathbb{P}(X = k, Y = j \,|\, N = k + j) \cdot \mathbb{P}(N = k + j) = \\
&= \mathbb{P}(X = k \,|\, N = k + j)\mathbb{P}(N = k + j) = \\
&= \binom{k+j}{k} s^k (1-s)^j \cdot \binom{n}{k+j} p^{k+j}(1-p)^{n-k-j} = \\
&= \frac{n! \cdot (k+j)!}{k! \cdot j! \cdot (k+j)! \cdot (n-k-j)!} s^k (1-s)^j p^{k+j} (1-p)^{n-k-j} = \\
&= \frac{n!}{k! \cdot j! \cdot (n-k-j)!} (ps)^k ((1-s)p)^j (1-p)^{n-k-j}
\end{aligned} \tag{3}$$

Notiamo che, se denotiamo con $Z$ il numero di uova che non si schiudono, si ha che $X + Y + Z = n$ e

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k, Y = j, Z = n - k - j) &= \mathbb{P}(X = k, Y = j) = \\
&= \frac{n!}{k! \cdot j! \cdot (n-k-j)!} (ps)^k ((1-s)p)^j (1-p)^{n-k-j} .
\end{aligned}$$

Dunque la PMF congiunta di $X, Y, Z$ è $Multinomiale(n, (ps, p(1-s), 1-p))$, dove $ps$ è la probabilità di nascere e sopravvivere, $p(1-s)$ è la probabilità di nascere e non sopravvivere, $1 - p$ è la probabilità di non sopravvivere.

**Ex. 3:** Notiamo che $X$ e $Y$ hanno stessa distribuzione e dunque

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] , \qquad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) .$$

Dalle proprietà della covarianza si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X + Y, X - Y) &= \mathrm{Cov}(X + Y, X) - \mathrm{Cov}(X + Y, Y) = \\
&= \mathrm{Cov}(X, X) + \mathrm{Cov}(Y, X) - \mathrm{Cov}(X, Y) - \mathrm{Cov}(Y, Y) = \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Cov}(X, Y) - \mathrm{Cov}(X, Y) - \mathrm{Var}(Y) = \\
&= \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y) = 0 .
\end{aligned}$$

Dunque $X + Y$ ed $X - Y$ sono scorrelate. Questo però non ci deve trarre in inganno portandoci a pensare che $X + Y$ ed $X - Y$ siano indipendenti. Infatti se $X + Y = 12$, vuol dire che entrambi i dadi hanno dato 6 e dunque $X - Y$ deve essere 0. Ciò ci dice che $X + Y$ e $X - Y$ non sono indipendenti.

**Ex. 4:** Poiché quando si condiziona all'evento $N = k$ si ha che $X \sim \mathrm{Bin}(h, p)$, si ha per $j \geq 0$ (assumiamo che $\binom{k}{j} = 0$ se $j > k$)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = j) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = j \mid N = k)\mathbb{P}(N = k) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \\
&= \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{1}{j!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^j e^{-\lambda} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{(k-j)!} [(1-p)\lambda]^k = \\
&\underset{i=k-j}{=} \frac{1}{j!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^j e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} [(1-p)\lambda]^{i+j} = \\
&= \frac{1}{j!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^j [(1-p)\lambda]^j e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} [(1-p)\lambda]^i = \\
&= \frac{1}{j!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^j [(1-p)\lambda]^j e^{-\lambda} e^{(1-p)\lambda} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^j}{j!} .
\end{aligned}$$

Dunque $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda p)$. Similmente si prova che $Y := N - X$ ha distribuzione $\mathrm{Pois}(\lambda(1-p))$.

Mostriamo che $X$ e $Y$ sono indipendenti. Poiché $X \mid N \sim \mathrm{Bin}(N, p)$ ed $Y$ è univocamente determinata quando si condiziona al valore di $N$ e si fissa il valore di $X$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = i, Y = j) &= \mathbb{P}(X = i, Y = j \mid N = i + j)\mathbb{P}(N = i + j) = \\
&= \mathbb{P}(X = i \mid N = i + j)\mathbb{P}(N = i + j) = \\
&= \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} = \\
&= \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j e^{-\lambda p - \lambda(1-p)} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} = \\
&= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda(1-p)} \frac{((1-p)\lambda)^j}{j!} = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j) ,
\end{aligned}$$

essendo $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda p)$ e $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda(1-p))$.

Notiamo che $N = X + Y$ e dunque dobbiamo calcolare la correlazione tra $X + Y$ ed $X$. Ricordiamo che il coefficiente di correlazione tra $N$ e $X$ è dato da

$$\mathrm{Corr}(X + Y, X) = \frac{\mathrm{Cov}(X + Y, X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X + Y) \cdot \mathrm{Var}(X)}} .$$

Poiché $X, Y$ sono indipendenti si ha

$$\mathrm{Cov}(X + Y, X) = \mathrm{Cov}(X, X) + \mathrm{Cov}(Y, X) = \mathrm{Var}(X) ,$$

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) .$$

Ricordiamo che, poiché $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda p)$ e $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda(1-p))$, si ha

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda p , \qquad \mathrm{Var}(Y) = \lambda(1-p) .$$

Dunque

$$\begin{aligned}\mathrm{Corr}(X+Y,X) &= \frac{\mathrm{Cov}(X+Y,X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X+Y)\cdot\mathrm{Var}(X)}} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X+Y)\cdot\mathrm{Var}(X)}} = \\ &= \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathrm{Var}(X+Y)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)}} = \\ &= \sqrt{\frac{\lambda p}{\lambda p+\lambda(1-p)}} = \sqrt{p}\,.\end{aligned}$$

**Ex. 5:(5a)** Ricordiamo che $V, W, Z$ sono indipendenti e dunque

$$\mathrm{Cov}(V,W) = \mathrm{Cov}(V,Z) = \mathrm{Cov}(W,Z) = 0\,.$$

Quindi, essendo $V \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{Cov}(V+W,V+Z) = \mathrm{Cov}(V,V+Z) + \mathrm{Cov}(W,V+Z) = \\ &= \mathrm{Cov}(V,V) + \mathrm{Cov}(V,Z) + \mathrm{Cov}(W,V) + \mathrm{Cov}(W,Z) = \\ &= \mathrm{Var}(V) + 0 + 0 + 0 = \mathrm{Var}(V) = \lambda\,.\end{aligned}$$

**(5b)** Dobbiamo mostrare che per $j, k > 0$ e $h < \min\{j, k\}$

$$\mathbb{P}(X = k, Y = j \,|\, V = h) = \mathbb{P}(X = k \,|\, V = h)\mathbb{P}(Y = j \,|\, V = h)\,.$$

Sfruttando l'indipendenza tra $W, Z$ si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k, Y = j \,|\, V = h) &= \mathbb{P}(V + W = k, V + Z = j \,|\, V = h) = \\ &= \mathbb{P}(W = k - h, Z = j - h \,|\, V = h) = \\ &= \mathbb{P}(W = k - h \,|\, V = h)\mathbb{P}(Z = j - h \,|\, V = h)\,.\end{aligned}$$

**(5c)** Dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(X = k, Y = j)$. Ricordiamo che $X = V + W$ e $Y = V + Z$ e che $V, W, Z$ sono i.i.d. con distribuzione $\mathrm{Pois}(\lambda)$. Se condizioniamo all'evento $V = h$, abbiamo che $X$ ed $Y$ sono indipendenti (vedi il punto (5b) dell'esercizio). Si noti che

$$\mathbb{P}(X = k, Y = j \,|\, V = h) = 0 \text{ se } k > h \text{ e/o } j > h\,.$$

Dunque per $j, k > 0$ si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k, Y = j) &= \sum_{h=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = j \,|\, V = h)\mathbb{P}(V = h) = \\
&\sum_{h=0}^{\min\{k,j\}} \mathbb{P}(X = k, Y = j \,|\, V = h)\mathbb{P}(V = h) = \\
&= \sum_{h=0}^{\min\{k,j\}} \mathbb{P}(X = k \,|\, V = h)\mathbb{P}(Y = j \,|\, V = h)\mathbb{P}(V = h) = \\
&= \sum_{h=0}^{\min\{k,j\}} \mathbb{P}(V + W = k \,|\, V = h)\mathbb{P}(V + Z = j \,|\, V = h)\mathbb{P}(V = h) = \\
&= \sum_{h=0}^{\min\{k,j\}} \mathbb{P}(W = k - h \,|\, V = h)\mathbb{P}(Z = j - h \,|\, V = h)\mathbb{P}(V = h) = \\
&= \sum_{h=0}^{\min\{k,j\}} \mathbb{P}(W = k - h)\mathbb{P}(Z = j - h)\mathbb{P}(V = h) = \\
&= \sum_{h=0}^{\min\{k,j\}} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-h}}{(k-h)!} \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^{j-h}}{(j-h)!} \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^{h}}{h!} = \\
&= e^{-3\lambda}\lambda^{k+j} \sum_{h=0}^{\min\{k,j\}} \frac{\lambda^{-h}}{(k-h)! \cdot (j-h)! \cdot h!}\,.
\end{aligned}$$