Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Prova di esame di

Ricerca Operativa (6 cfu)

Cognome: Nome: matricola:

Quesito Teoria	**Esercizio 1**	**Esercizio 2**	**Punteggio Totale**

Parte 1 – *Quesiti teorici*

1) (Punti 10)
Enunciare e dimostrare la caratterizzazione algebrica dei vertici del poliedro che descrive l'insieme ammissibile di un problema di Programmazione Lineare in *forma standard*.

Parte 2 – *Esercizi*

1) (Punti 10)
Un'industria produce due coloranti chimici (C1, C2) e dispone di 5 diversi impianti di produzione (I1,I2, I3,I4, I5). Ciascuno degli impianti è in grado di fornire i due coloranti già pronti per la vendita. La tabella che segue riporta, per ogni impianto, il costo di produzione di un litro di ciascuno dei coloranti (in Euro al litro) in ciascuno degli impianti, la capacità massima produttiva giornaliera (in litri) di ciascun impianto e la quantità minima di ciascun colorante (in litri) che deve essere immessa sul mercato giornalmente.

	I1	I2	I3	I4	I5	quantità minima
C1	10	15	12	14	11	1200
C2	11	18	15	13	10	1000
capacità max	500	750	550	580	510	

Ogni giorno l'industria deve decidere quali impianti attivare per soddisfare le richieste giornaliere del mercato. Il costo di attivazione (che si deve pagare solo se un impianto è utilizzato) è pari a 600 Euro per gli impianti I1, I3 e I5 e di 750 Euro per gli impianti I2 e I4. Costruire un modello lineare che permetta di decidere quali impianti attivare e le quantità di ciascuno dei coloranti che devono essere prodotte dagli impianti attivati in modo da minimizzare il costo complessivo.

2) (Punti 12)
Usando il metodo del simplesso risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\begin{aligned}
&\min \quad 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\
&-x_1 - 2x_3 + x_4 = -7 \\
&2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 12 \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.
\end{aligned}$$

1) (Punti 10)

Un'industria produce due coloranti chimici (C1, C2) e dispone di 5 diversi impianti di produzione (I1,I2, I3,I4, I5). Ciascuno degli impianti è in grado di fornire i due coloranti già pronti per la vendita. La tabella che segue riporta, per ogni impianto, il costo di produzione di un litro di ciascuno dei coloranti (in Euro al litro) in ciascuno degli impianti, la capacità massima produttiva giornaliera (in litri) di ciascun impianto e la quantità minima di ciascun colorante (in litri) che deve essere immessa sul mercato giornalmente.

	I1	I2	I3	I4	I5	quantità minima
C1	10	15	12	14	11	1200
C2	11	18	15	13	10	1000
capacità max	500	750	550	580	510	

Ogni giorno l'industria deve decidere quali impianti attivare per soddisfare le richieste giornaliere del mercato. Il costo di attivazione (che si deve pagare solo se un impianto è utilizzato) è pari a 600 Euro per gli impianti I1, I3 e I5 e di 750 Euro per gli impianti I2 e I4. Costruire un modello lineare che permetta di decidere quali impianti attivare e le quantità di ciascuno dei coloranti che devono essere prodotte dagli impianti attivati in modo da minimizzare il costo complessivo.

x_{ij} = colorante i prodotto in impianto j, $i = 1,2$ $j = 1,\dots,5$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se } I_i \text{ viene attivato} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad i = 1,\dots,5$$

funzione obiettivo:

$$\min \Big[600\delta_1 + 750\delta_2 + 600\delta_3 + 750\delta_4 + 600\delta_5 +$$
$$10x_{11} + 15x_{12} + 12x_{13} + 14x_{14} + 15x_{15} +$$
$$11x_{21} + 18x_{22} + 15x_{23} + 13x_{24} + 10x_{25} \Big]$$

vincoli:

$$x_{11} + x_{21} \le 500\,\delta_1$$

$$x_{12} + x_{22} \le 750\,\delta_2$$

$$x_{13} + x_{23} \le 550\,\delta_3$$

$$x_{14} + x_{24} \le 580\,\delta_4$$

$$x_{15} + x_{25} \le 510\,\delta_5$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \ge 1200$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \ge 1000$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad j = 1,\dots,5 \quad i = 1,2$$

$$\delta_i \in \{0,1\}$$

2) (Punti 12)
Usando il metodo del simplesso risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare

$$\min \quad 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4$$
$$-x_1 - 2x_3 + x_4 = -7$$
$$2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 12$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

$$\min \quad 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 12 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Fase I

$$\min \quad \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 + \alpha_1 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 + \alpha_2 = 12 \\ x_i \geq 0 \quad \alpha_i \geq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \end{array} \qquad c_N^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \end{array}$$

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h = 1 \qquad \pi_h = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \bar{\rho} = \min\{7, 6\} = 6 \longrightarrow k = 2 \quad \text{Esce } \alpha_2 \text{ entra } x_1$$

$$\begin{array}{l} \\ \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 5 & 1 & 12 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{c|cccc|c} 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & -3/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & 5/2 & 1/2 & 6 \end{array}\right]$$

$$c_B^T = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \alpha_1 \quad x_1\end{array} \qquad c_N^T = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \alpha_2 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\end{array}$$

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$h = 2$ $\quad \pi_h = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\quad \bar{\rho} = \min\{\frac{1}{2}, \cdot\}$ $\quad k = 1$ esce α_1 entra x_2

$$\rightarrow \left[\begin{array}{c|cccc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 6 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{c|cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right]$$

$$c_B^T = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ x_2 \quad x_1\end{array} \qquad c_N^T = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad x_3 \quad x_4\end{array}$$

$\gamma^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ La SBA attuale e' ottima.

$$\min\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Fase II

$$c_B^T = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \\ x_2 \quad x_1\end{array} \qquad c_N^T = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} -2 & 5 \end{bmatrix} \\ x_3 \quad x_4\end{array}$$

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} -2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$h = 1$ $\quad \pi_h = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad \bar{\rho} = \min\{\cdot, \frac{7}{2}\}$ $\quad k = 2$ Esce x_1 entra x_3.

$$\left[\begin{array}{c|cc|c} -1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right] \rightarrow \rightsquigarrow \left[\begin{array}{c|cc|c} 0 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{11}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right]$$

$$c_B^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_2 & x_3 \end{matrix} \end{array} \qquad c_N^T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_4 \end{matrix} \end{array}$$

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 & 6 \end{bmatrix}$$

La SBA attuale è ottima: $\bar{X} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 11/2 & 7/2 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \end{array}$