05 Esercizi quarta settimana

ESERCIZIO 4

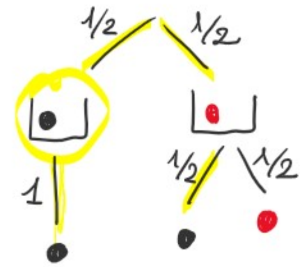
Un'urna contiene una sola pallina, ma non sappiamo se è rossa oppure nera. Nel dubbio assegniamo ai due colori la stessa probabilità "a priori". Inseriamo quindi una pallina nera nell'urna ed estraiamo una pallina.

A) Se la pallina estratta è nera, con che probabilità la pallina che si trovava nell'urna prima di inserire la pallina nera è anch'essa nera?

B) Se la pallina estratta è nera e viene reimmessa nell'urna, con che probabilità una seconda estrazione darà di nuovo pallina nera?

N = la pallina che si trovava inizialmente nell'urna era nera

E_n = ho estratto pallina nera



urna iniziale

A) $\mathbb{P}(N \mid E_n) =$

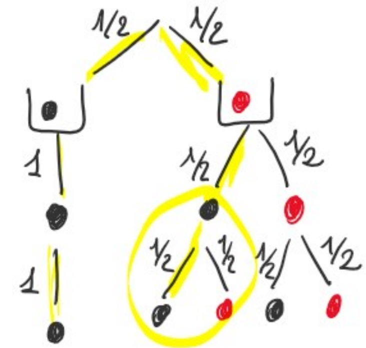
$$= \frac{\frac{1}{2}}{1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

estratta

$$\mathbb{P}(N \mid E_n) = \frac{\mathbb{P}(E_n \mid N)\,\mathbb{P}(N)}{\mathbb{P}(E_n)} = \frac{1\cdot\frac{1}{2}}{\mathbb{P}(E_n \mid N)\mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(E_n \mid R)\,\mathbb{P}(R)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

B)



I estrazione

II estrazione

C = estraggo nera alla II estrazione

$$\mathbb{P}(C \mid E_n) = \frac{\mathbb{P}(C \cap E_n)}{\mathbb{P}(E_n)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{5}{6}$$

$$\mathbb{P}(C|E_n) = \mathbb{P}(C|\cancel{E_n}, N)\cdot \mathbb{P}(N|E_n) + $$
$$+\ \mathbb{P}(C|\cancel{E_n}, R)\cdot\mathbb{P}(R|E_n) = $$
$$= 1\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{6}$$

ESERCIZIO 5

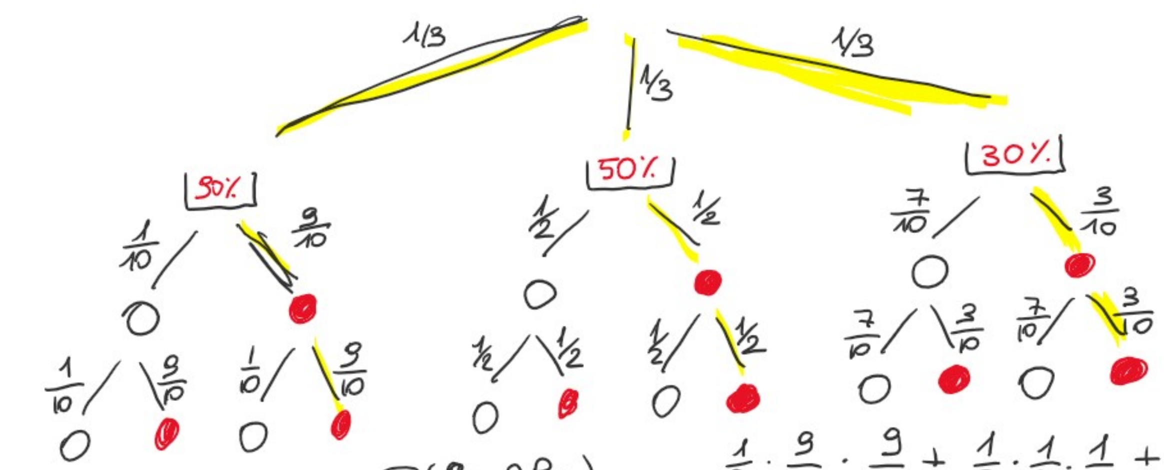
Ci sono 3 urne, che contengono palline rosse rispettivamente nelle proporzioni del 90, del 50 e del 30 per cento. Viene scelta un'urna a caso e da questa vengono estratte successivamente delle palline, ogni volta reimmettendo nell'urna la pallina estratta.

A) Se la prima pallina estratta è rossa, con che probabilità lo sarà anche la seconda?

B) Se le prime due palline estratte sono rosse, con che probabilità le palline sono state estratte da ciascuna delle tre urne?

A) R_1 = la prima estratta è rossa
R_2 = la seconda estratta è rossa

$\mathbb{P}(R_2|R_1) = ?$



$$\mathbb{P}(R_2|R_1) = \frac{\mathbb{P}(R_1\cap R_2)}{\mathbb{P}(R_1)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}} =$$

$$= \frac{115}{170} = \frac{23}{34}$$

$$\text{B)}\quad \mathbb{P}(\text{urna } 1 \mid R_1\cap R_2) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}}{\underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}\right)}_{=d}} = \frac{81}{115}$$

$$\mathbb{P}(\text{urna } 2 \mid R_1 \cap R_2) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{d} = \frac{5}{23}$$

$$\mathbb{P}(\text{urna } 3 \mid R_1 \cap R_2) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10}}{d} = \frac{9}{115}$$

$$= 1 - \mathbb{P}(\text{urna } 1 \mid R_1 \cap R_2) - \mathbb{P}(\text{urna } 2 \mid R_1 \cap R_2)$$

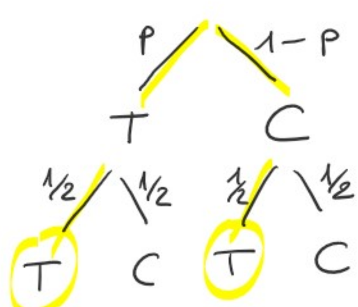
ESERCIZIO 6

Si consideri il lancio successivo di due monete, di cui la prima che ha una probabilità p di testa, non necessariamente uguale a ½, e la seconda bilanciata.

A) Sapendo che almeno uno dei due lanci è testa, con che probabilità la prima moneta è testa?

B) Sapendo che almeno uno dei due lanci è testa, con che probabilità la moneta bilanciata è testa?

A)



lancio I moneta (p)

lancio II moneta (bilanciata)

E = almeno uno dei due lanci è testa

T1 = la prima moneta è testa

$$\mathbb{P}(T_1 \mid E) = \frac{p}{\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p + (1-p)\cdot\frac{1}{2}} = \frac{p}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p} = 2\,\frac{p}{1+p}$$

B)

$$\mathbb{P}(T_2 \mid E) = \frac{p \cdot \frac{1}{2} + (1-p)\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}(\cancel{p} + 1 - \cancel{p})}{\cancel{\frac{1}{2}}(1+p)} = \frac{1}{1+p}$$

$$\mathbb{P}(T_2 \mid E) = \frac{\qquad}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p} = \frac{\qquad}{\cancel{\frac{1}{2}}(1+p)} = \frac{\qquad}{1+p}$$