ES 1

7 persone $p_1, p_2, \dots, p_7$

E = i loro compleanni coprono tutte le stagioni

Supponiamo che tutte le stagioni abbiano la stessa probabilità:

1	2	3	4
I	P	E	A

$$\mathbb{P}(p_k \text{ sia nata nella stagione } i) = \frac{1}{4}$$

Sugg: utilizziamo principio inclusione/esclusione

E^c = i compleanni non coprono tutte le stagioni

$\begin{cases} A_i := \text{non ci sono compleanni nella stagione } i \\ i = 1, \dots, 4 \end{cases}$

$$E^c = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

$$\mathbb{P}(E^c) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(A_i) - \underbrace{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}}_{\sum_{i<j}} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \underbrace{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)}_{=\,0}$$

$\mathbb{P}(A_i)$

\# casi possibili = \# modi di scegliere le stagioni dei compleanni

↓

es: (I, I, I, P, P, E, I)

(A, A, E, A, P, P, I)

⇒ DISPOSIZIONI con RIPETIZIONE

⇒ $n = 4, k = 7$ $\quad 4^7$

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{3^7}{4^7}$$

\# casi favorevoli = \# modi di scegliere le stagioni dei compleanni in modo che non ci sia mai la stagione i

es: $i = 1$ (Inverno) ⇒ (E, E, P, A, A, P, ...)

... in modo che non
ci sia mai la stagione i

es: $i=1$ (Inverno) $\Rightarrow$ (E, E, P, A, A, P, P)

$\Rightarrow$ DISPOSIZIONI con RIPETIZIONE $n=3, k=7$ 3^7

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$

casi favorevoli $n=2, k=7$ 2^7 $\Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{2^7}{4^7} = \left(\frac{2}{4}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^7$

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

casi favorevoli $n=1, k=7$ $\Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4^7} = \left(\frac{1}{4}\right)^7$

$$\mathbb{P}(A_1) = \left(\frac{3}{4}\right)^7$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left(\frac{1}{4}\right)^7$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(E^c) = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7 - \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \overset{4}{\overset{\shortparallel}{\binom{4}{3}}}\left(\frac{1}{4}\right)^7 = \frac{3^7+1}{4^6} - \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{1}{2^7} =$$

$$= \frac{3^7+1}{4^6} - \frac{3}{2^6}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(E^c) \simeq \boxed{0.513}$$

ES 2

6 corsi / g
5 giorni } $\rightarrow 6 \times 5 = 30$ corsi

Alice ne sceglie 7

L	M	M	G	V
6	6	6	6	6

E = Alice deve andare a scuola tutti i giorni.

E = Alice deve andare a scuola tutti i giorni.

① "metodo diretto" $\mathbb{P}(E) = \dfrac{\#\text{ casi favorevoli}}{\#\text{ casi possibili}}$

$\#$ casi possibili: $\binom{30}{7}$

$\#$ casi favorevoli

$$\left.\begin{matrix} \frac{3}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} \\ & & \dots & & \end{matrix}\right\} \text{ 5 possibilità} \rightarrow \binom{6}{3}\binom{6}{1}^4 = \binom{6}{3}6^4$$

ciascuna possibilità permette: $\binom{6}{3}\binom{6}{1}^4 = \binom{6}{3}6^4$ scelte di lezioni

$$\left.\begin{matrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ & & \dots & & \end{matrix}\right\} \binom{5}{2} = 10 \text{ possibilità} \rightarrow \binom{6}{2}^2\cdot 6^3$$

$\#$ casi favorevoli $= 5\cdot\binom{6}{3}6^4 + 10\cdot\binom{6}{2}^2\cdot 6^3$

$$\mathbb{P}(E) = \frac{5\binom{6}{3}6^4 + 10\binom{6}{2}^2 6^3}{\binom{30}{7}} =$$

$$= \frac{5\,\frac{\cancel{6}\cdot5\cdot4}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}\cdot 6^4 + 10\left(\frac{\cancel{6}^{\,3}\cdot5}{\cancel{2}}\right)^2\cdot 6^3}{\frac{30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26\cdot25\cdot24}{7!}} =$$

$$= \frac{\cancel{5}\cdot6^3\cdot\cancel{2}\cdot(5\cdot2\cdot6+3^2\cdot5^2)\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot3\cdot\cancel{2}}{30\cdot29\cdot\cancel{28}\cdot27\cdot26\cdot\cancel{25}\cdot\cancel{24}} =$$

$$= \frac{\cancel{2^3}^{\,2}\cdot3^3\cdot\cancel{5}\quad 2^3\quad 4+3\cdot5)}{\cancel{3}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{2}\cdot29\cdot\quad\cdot\cancel{2}\cdot13} = \frac{2\cdot3\cdot(19)}{29\cdot13} = \frac{114}{377} \simeq 0{,}302$$

② utilizziamo il princip di inclusione/esclusione

$$\mathbb{P}(A_1\cup\dots\cup A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{J\dots}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right)\cdot(-1)^{k+1}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |J|=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) \cdot (-1)^{k+1}$$

es: $n=3$:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \\ - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \\ + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$\mathbb{P}(E)$ $\rightsquigarrow$ consideriamo $E^c =$ Alice non deve andare a scuola tutti i giorni

$A_i =$ "Alice non ha lezione il giorno i" $\quad i = 1, \ldots, 5$

$E^c = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_5$

$$\mathbb{P}(E^c) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=i+1}^{5} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=i+1}^{5} \sum_{k=j+1}^{5} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) =$$

oss: non scrivo i termini del tipo $\mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_w)$ né $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_5)$

↳ Alice ha lez. solo un giorno

$$= 5 \cdot \mathbb{P}(A_1) - \binom{5}{2} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \binom{5}{3} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{\binom{24}{7}}{\binom{30}{7}}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{\binom{18}{7}}{\binom{30}{7}}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{\binom{12}{7}}{\binom{30}{7}}$$

$$\mathbb{P}(E^c) = 5\,\frac{\binom{24}{7}}{\binom{30}{7}} - \binom{5}{2}\frac{\binom{18}{7}}{\binom{30}{7}} + \binom{5}{3}\frac{\binom{12}{7}}{\binom{30}{7}}$$

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(E^c) = \frac{114}{377}$$

ESERCIZIO 3

Consideriamo quattro dadi A, B, C e D che hanno rispettivamente sulle facce:

A 4,4,4,4,0,0

B 3,3,3,3,3,3

C 6,6,2,2,2,2

D 5,5,5,1,1,1,

Calcolare le probabilità

P(punteggio A > punteggio B) $= \mathbb{P}(\text{punt di } A = 4) = \frac{2}{3}$

P(punteggio B > punteggio C) $= \mathbb{P}(\text{punt di } C = 2) = \frac{2}{3}$

P(punteggio C > punteggio D) $= \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

P(punteggio D > punteggio A) $= \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

C

D

	6	6	2	2	2	2
5	×	×				
5	×	×				
5	×	×				
1	×	×	×	×	×	×
1	×	×	×	×	×	×
1	×	×	×	×	×	×