Prova di Analisi Matematica II - 05 Novembre 2018
Ing. Informatica
Prof.ssa Virginia De Cicco

1)	2)	3)	4)	5)	VOTO:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Cognome	Nome

Dichiaro di aver sostenuto con profitto l'esame di Analisi Matematica 1

FIRMA: ....

ESERCIZIO 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti. (**10 pt.**)

1) (I) La parte reale di $f(z) = e^z$, con $z = x + iy$, è

(a) e^x

(b) $e^x seny$

(c) $e^x cosy$

(d) nessuna delle precedenti.

(II) La funzione $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^4}$ è tale che $-\frac{1-\cos z}{z^4} = -\frac{1-\cos z}{z^2} \cdot \frac{1}{z^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2}$

i. ha un polo triplo in $z = 0$;
ii. ha un polo semplice in $z = 0$;
iii. ha una singolarità eliminabile;
iv. ha un polo doppio in $z = 0$.

(III) L'antitrasformata di Laplace di $F(z) = \frac{z}{z^2-3}$ è

i. $f(t) = cosh(\sqrt{3}t)$;
ii. $f(t) = cosh(3t)$;
iii. $f(t) = senh(\sqrt{3}t)$;
iv. $f(t) = senh(3t)$.

$\frac{z}{z^2-3} = \cosh(\sqrt{3}t)$

(IV) Data la funzione $F(z) = |Log(z)|$, $z \in \mathbb{C}$, il suo insieme di definizione è :

i. $\mathbb{C}$
ii. $\mathbb{C}^*$
iii. $\mathbb{C}^{**}$
iv. $\emptyset$.

$Log(z) = log|z| + i\,Arg(z) = log\,\rho + i\theta$

(V) Data la funzione 2π-periodica definita in $[-\pi, \pi[$ da

$$f(x) = x|x|$$ dispari

il coefficiente a_0 del suo sviluppo di Fourier è

i. 0
ii. $\frac{\pi}{2}$
iii. $\frac{\pi}{4}$
iv. π .

ESERCIZIO 2.

(i) Si dia la definizione di integrale curvilineo di una funzione $f(x, y)$ su una curva $\gamma(t) \subset \mathbb{R}^2$ con $t \in [a, b]$.

(ii) Si disegni la seguente curva:

$$\gamma(t) = (t^2, t^4), \quad t \in [0, 1]$$

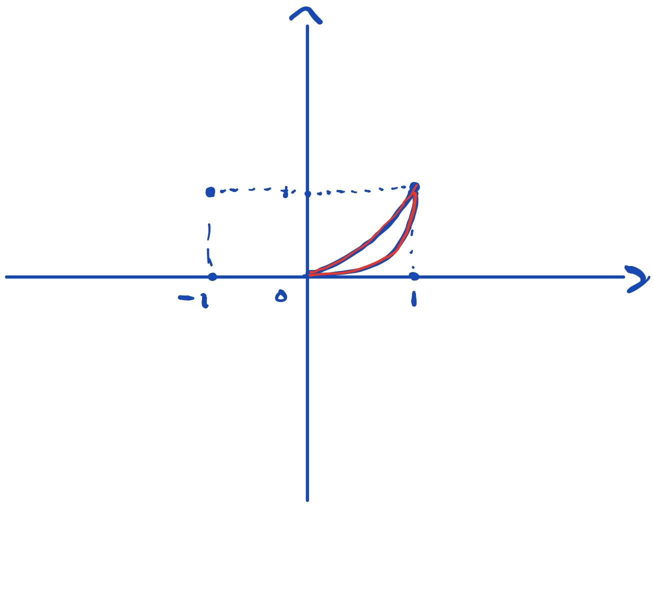
e si calcoli:

$$\int_\gamma \sqrt{x(1 + 4y)}\ ds.$$

1) Dati $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso, $f: A \to \mathbb{C}$ una funzione continua e $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva regolare (o regolare a tratti) la cui traccia $\gamma([a,b]) \subseteq A$, si definisce l'integrale di f lungo γ:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

2) $\int_\gamma \sqrt{x(1+4y)}\,ds = 0$



ESERCIZIO 3.

(i) Si determini l'insieme

$$A = \{z : cos\, z = 0\}.$$

(ii) Si dia la dimostrazione di tale fatto.

(iii) Si cerchi l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della seguente funzione

$$f(z) = \frac{1}{cos(iz)}.$$

(iv) Si disegni tale insieme.

1) $\cos z = 0$ $\quad z = x + iy$, $\cos(x+iy) = 0 \Rightarrow x + iy = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ y = 0 \end{cases}$$

3) $f(z) = \dfrac{1}{\cos(iz)}$ definita per $iz \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\quad ix - y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq -\frac{\pi}{2} - k\pi \end{cases}$$

ESERCIZIO 4.

(i) Si dia la definizione di convergenza puntuale ed uniforme per una successione di funzioni.

(ii) Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{n^x}, \qquad x \in [1, +\infty).$$

1) Data una successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite in I e data $f : A \subseteq I \to \mathbb{R}$ si dice che $f_n \to f$ puntualmente se

$$\forall x \in A \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

ovvero $\forall x \in A \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N} : \forall n > \nu_{x,\varepsilon} \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Data una successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite in I e data $f : A \subseteq I \to \mathbb{R}$ si dice che $f_n \to f$ uniformemente in A se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > \nu_\varepsilon \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A.$$

2) $f_n(x) = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{n^x} \quad x \in [1, +\infty)$

Per $x = 1$ $\quad f_n(1) = 1 + \frac{1}{n} \to 1$ per $n \to +\infty$

Per $x \in (1, +\infty)$ $\quad f_n(x) = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{n^x} \to 0$ per $n \to +\infty$

In $[A, +\infty)$ con $A > 1$

$$\sup_{[A,+\infty)} \left| \frac{1}{x^n} + \frac{1}{n^x} \right| = \frac{1}{A^n} + \frac{1}{n^A} \to 0 \text{ per } n \to +\infty$$

ESERCIZIO 5.

(i) Sia dia la definizione di serie di Taylor centrata in x_0.

(ii) Si scriva lo sviluppo in serie di Taylor centrata in $x_0 = 0$ della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{2x}{5+2x},$$

precisandone l'insieme di convergenza.

1) Data $f(x)$ una funzione C^∞ in (a,b), si può considerare

$$\sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

che prende il nome di serie di Taylor di f ed i coefficienti

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

sono detti coefficienti di Taylor.

2) $$f(x) = \frac{2x}{5+2x} = 2x \cdot \frac{1}{5(1+\frac{2}{5}x)} = \frac{2}{5}x \cdot \frac{1}{(1-(-\frac{2}{5}x))} = \frac{2}{5}x \sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{2}{5}\right)^n x^n$$

$$= \sum (-1)^n \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} x^{n+1}$$

Converge per $\left|-\frac{2}{5}x\right| < 1 \rightarrow |x| < -\frac{5}{2}$