Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica e Automatica

Corso di RICERCA OPERATIVA

PROVA di AUTOVALUTAZIONE N.3

1. Si consideri il seguente problema di programmazione matematica:

$$\begin{aligned} &\max -3x_1 + 2x_2 - 2.1x_3 \\ &\quad -x_1 \geq 0 \\ &\quad -x_2 + x_3 = x_4 \\ &\quad x_3^2 - x_1^2 \leq x_1 \\ &\quad x_2 \ \text{ intera} \end{aligned} \tag{1}$$

   (a) dire a quale tipo di programmazione matematica si riferisce il problema (1): PL, PLI, PNL, PLM, etc. ... ;

   (b) dopo aver tolto il vincolo "x_2 intera", porre (1) se possibile (dire se è sempre possibile) nella forma
$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\quad g_i(x) \geq 0, \qquad i = 1, \dots, m; \end{aligned}$$

   (c) cambia la natura del problema e/o le sue eventuali soluzioni modificando l'ordine con cui compaiono i vincoli ?

   (d) dopo aver tolto il vincolo "x_2 intera", porre (1) se possibile (dire se è sempre possibile) nella forma
$$\begin{aligned} &\max f(x) \\ &\quad g_i(x) \leq 0, \qquad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

2. Una raffineria distilla delle quantità di petrolio provenienti dal Venezuela e dall'Arabia Saudita. La raffineria produce i seguenti tre prodotti: benzina per auto, carburante per aerei e lubrificanti. I due petroli hanno composizioni diverse e danno differenti prodotti:

   per ciascun barile di petrolio dal Venezuela si ottengono 0,4 barili di benzina, 0,2 barili di carburante, 0,3 barili di lubrificante e 0,1 barili di scarti;

   per ciascun barile di petrolio dall'Arabia Sauduta si ottengono 0,3 barili di benzina, 0,4 barili di carburante, 0,2 barili di lubrificante e 0,1 barili di scarti;

   La disponibilità giornaliera di petrolio è di 6000 barili dal Venezuela e di 9000 barili dall'Arabia Saudita. Il costo di un barile dal Venezuela è di 20 $ e quello di un barile dall'Arabia Saudita è di 15 $. Definire un modello lineare che permetta di minimizzare i costi di acquisto e di soddisfare le richieste giornaliere di 2000 barili di benzina, 1500 barili di carburante e 500 barili di lubrificante.

3. Un'industria ha ricevuto un ordine di 10000 tonnellate di un tipo di fertilizzante. Tale fertilizzante deve avere una composizione di almeno il 4% di azoto, il 15% di fosforo e il 18 % di potassio. L'industria ottiene il prodotto finito usando quattro tipi di costituenti base C1, C2, C3 e C4. La tabella che segue riporta i contenuti percentuali di azoto, fosforo e potassio di ciascuno dei costituenti base insieme al costo espresso in dollari la tonnellata.

	Azoto	Fosforo	Potassio	costo
C1	54%	10%	3%	120
C2	10%	45%	13%	135
C3	20%	5%	38%	140
C4	15%	20%	17%	180

L'industria ha già nei nei suoi magazzini 200 tonnellate di componente C2 acquistato in precedenza e che quindi può essere usato senza considerare il suo costo. Inoltre c'è la possibilità di acquistare da un'altra industria il fertilizzante già pronto per la vendita a $ 185 la tonnellata. Costruire un modello lineare per pianificare la produzione dell'industria in modo da soddisfare esattamente l'ordine richiesto minimizzando il costo globale.

4. Risolvere graficamente i seguenti problemi di Programmazione Lineare:

(a)
$$\begin{cases} \max 2x_1 + 2x_2 \\ x_1 - 2x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 22 \\ x_1 + 4x_2 \leq 32 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} \min 4x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \geq 3 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Si consideri il seguente problema di programmazione matematica:

$$\begin{aligned} \max\ & -3x_1 + 2x_2 - 2.1x_3 \\ & -x_1 \geq 0 \\ & -x_2 + x_3 = x_4 \\ & x_3^2 - x_1^2 \leq x_1 \\ & x_2 \ \text{ intera} \end{aligned} \tag{1}$$

(a) dire a quale tipo di programmazione matematica si riferisce il problema (1): PL, PLI, PNL, PLM, etc. ... ;

(b) dopo aver tolto il vincolo "x_2 intera", porre (1) se possibile (dire se è sempre possibile) nella forma

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) \\ & g_i(x) \geq 0, \qquad i = 1, \dots, m; \end{aligned}$$

(c) cambia la natura del problema e/o le sue eventuali soluzioni modificando l'ordine con cui compaiono i vincoli ?

(d) dopo aver tolto il vincolo "x_2 intera", porre (1) se possibile (dire se è sempre possibile) nella forma

$$\begin{aligned} \max\ & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0, \qquad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

a) Programmazione non lineare mista

b) È sempre possibile:

$$\begin{aligned} \min\ & 3x_1 - 2x_2 + 2.1x_3 \\ & -x_1 \geq 0 \\ & -x_2 + x_3 - x_4 \geq 0 \\ & x_2 - x_3 + x_4 \geq 0 \\ & x_1 + x_1^2 - x_3^2 \geq 0 \end{aligned}$$

c) No

d) Come sopra.

2. Una raffineria distilla delle quantità di petrolio provenienti dal Venezuela e dall'Arabia Saudita. La raffineria produce i seguenti tre prodotti: benzina per auto, carburante per aerei e lubrificanti. I due petroli hanno composizioni diverse e danno differenti prodotti:

   per ciascun barile di petrolio dal Venezuela si ottengono 0,4 barili di benzina, 0,2 barili di carburante, 0,3 barili di lubrificante e 0,1 barili di scarti;

   per ciascun barile di petrolio dall'Arabia Sauduta si ottengono 0,3 barili di benzina, 0,4 barili di carburante, 0,2 barili di lubrificante e 0,1 barili di scarti;

   La disponibilità giornaliera di petrolio è di 6000 barili dal Venezuela e di 9000 barili dall'Arabia Saudita. Il costo di un barile dal Venezuela è di 20 \$ e quello di un barile dall'Arabia Saudita è di 15 \$. Definire un modello lineare che permetta di minimizzare i costi di acquisto e di soddisfare le richieste giornaliere di 2000 barili di benzina, 1500 barili di carburante e 500 barili di lubrificante.

$X_1 \equiv$ quantità petrolio provenienti dal Venezuela

$X_2 \equiv$ // Arabia

Funzione obiettivo: $\min \left[20 X_1 + 15 X_2 \right] 10^3$

Vincoli:

$0{,}4 X_1 + 0{,}3 X_2 \geq 2$

$0{,}2 X_1 + 0{,}4 X_2 \geq 1{,}5$

$0{,}3 X_1 + 0{,}2 X_2 \geq 0{,}5$

$X_1 \leq 6$

$X_2 \leq 9$

$X_1 \geq 0 \,,\; X_2 \geq 0$

3. Un'industria ha ricevuto un ordine di 10000 tonnellate di un tipo di fertilizzante. Tale fertilizzante deve avere una composizione di almeno il 4% di azoto, il 15% di fosforo e il 18 % di potassio. L'industria ottiene il prodotto finito usando quattro tipi di costituenti base C1, C2, C3 e C4. La tabella che segue riporta i contenuti percentuali di azoto, fosforo e potassio di ciascuno dei costituenti base insieme al costo espresso in dollari la tonnellata.

	Azoto	Fosforo	Potassio	costo
C1	54%	10%	3%	120
C2	10%	45%	13%	135
C3	20%	5%	38%	140
C4	15%	20%	17%	180

L'industria ha già nei nei suoi magazzini 200 tonnellate di componente C2 acquistato in precedenza e che quindi può essere usato senza considerare il suo costo. Inoltre c'è la possibilità di acquistare da un'altra industria il fertilizzante già pronto per la vendita a $ 185 la tonnellata. Costruire un modello lineare per pianificare la produzione dell'industria in modo da soddisfare esattamente l'ordine richiesto minimizzando il costo globale.

$x_1 \equiv$ quantità C_1

$x_2 \equiv$ " C_2 $\quad x_2^u \equiv$ quantità C_2 in magazzino.

$x_3 \equiv$ " C_3

$x_4 \equiv$ " C_4

$F \equiv$ fertilizzante.

$F_e =$ fertilizzante esterno

$\min \left[120x_1 + 135x_2 + 140x_3 + 180x_4 + 185F_e\right]$

vincoli:

$0{,}54x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}15x_4 + 0{,}1x_2^u \geq 0{,}04F$

$0{,}1x_1 + 0{,}45x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}2x_4 + 0{,}45x_2^u \geq 0{,}15F$

$0{,}03x_1 + 0{,}13x_2 + 0{,}38x_3 + 0{,}17x_4 + 0{,}13x_2^u \geq 0{,}18F$

$F + F_e = 10000$

$x_2^u \leq 200$

$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_2^u$

$x_i \geq 0 \quad x_2^u \geq 0$

$F \geq 0 \quad F_e \geq 0$