Prova di Analisi Matematica II - 22 Giugno 2020
Ing. Informatica
Prof.ssa Virginia De Cicco

ESERCIZIO 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta.

1) Sola una delle seguenti identità è vera. Quale?

a) $|z^2| = z^2$ b) $|z^2| = \frac{1}{2}|z|^2$ c) $|z^{1/2}| = z^{1/2}$ d) $|z^{1/2}| = |z|^{1/2}$.

Soluzione: d)

$|(x+iy)^{1/2}| = \sqrt{x^2+y^2}$

2) Sola una delle seguenti identità è vera. Quale?

a) $Log(Im\, z) = Arg\, z$ b) $Im(Log\, z) = Arg\, z$ $Log(z) = e^{\log|z| + i\underline{Arg(z)}}$

c) $Arg(Log\, z) = Arg\, z$ d) $Log(Arg\, z) = Arg\, z$.

Soluzione: b)

3) Il coefficiente a_1 dello sviluppo di Fourier della funzione definita su $[-\pi, \pi[$ da

$$f(x) = 3cos\, x - x^3,$$

ed estesa ad $\mathbb{R}$ per periodicità, vale ↳ dispari $a_n = 0$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3.

Soluzione: d)

4) La singolarità $z_0 = 0$ della funzione $f(z) = \frac{e^z-1}{sen^2\, z}$ è

a) una singolarità eliminabile b) una singolarità essenziale

c) un polo semplice d) un polo doppio.

Soluzione: c)

$$\frac{e^z-1}{sen^2 z} = \frac{z}{sen^2 z} = \frac{z}{sin z} \cdot \frac{1}{sin z}$$

↳ polo semplice

ESERCIZIO 2. (i) Si studi la convergenza puntuale della seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{(sen\, x)^n}{arctg(x^n)}\,, \qquad x \in [1, \pi/2].$$

(ii) Tale convergenza è uniforme in $[1, \pi/2]$?

Soluzione:

$$f_n(x) = \frac{(sen\, x)^n}{arctg(x^n)} \to 0 \qquad x \in [1, \pi/2[$$

$$f_n(\pi/2) = \frac{(sen\,(\pi/2))^n}{arctg((\pi/2)^n)} \to \frac{2}{\pi}.$$

ESERCIZIO 3. (i) Si dia la formula integrale di Cauchy per una funzione olomorfa e la formula per le sue derivate successive.

(ii) Si calcolino i seguenti integrali

$$\int_\gamma \frac{cos\, z}{z - \frac{\pi}{2}}\, dz \qquad \int_\gamma \frac{cos\, z}{z - \frac{\pi}{4}}\, dz \qquad \int_\gamma \frac{cos\, z}{(z - \frac{\pi}{4})^3}\, dz$$

dove γ è una circonferenza di centro 0 e raggio 1.

Soluzione: Usando il Teorema di Cauchy, poichè la circonferenza non circuita $\frac{\pi}{2}$, si ha

$$\int_\gamma \frac{cos\, z}{z - \frac{\pi}{2}}\, dz = 0.$$

Usando la formula integrale di Cauchy, poichè la circonferenza circuita $\frac{\pi}{4}$, si ha

$$\int_\gamma \frac{cos\, z}{z - \frac{\pi}{4}}\, dz = 2\pi\, i\, cos(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\pi\, i\,.$$

Usando la formula di Cauchy per le derivate, poichè la circonferenza circuita $\frac{\pi}{4}$, si ha

$$\int_\gamma \frac{cos\, z}{(z - \frac{\pi}{4})^3}\, dz = 2\pi\, i\, \frac{1}{2}(cos)''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\, i\,.$$

ESERCIZIO 2. (i) Si studi la convergenza puntuale della seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{(sen\, x)^n}{arctg(x^n)}, \qquad x \in [1, \pi/2].$$

(ii) Tale convergenza è uniforme in $[1, \pi/2]$?

$$f_n(x) = \frac{(\sin x)^n}{\arctan(x^n)} \qquad x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$$

Il $\sin x$ vale 1 solo a $\frac{\pi}{2}$. Per $x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right)$ $\sin x < 1$

$\arctan x^n$ tende a $\frac{\pi}{2}$ $\forall x \in \left(1, \frac{\pi}{2}\right]$, per $x = 1$ rimane costante

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{2}{\pi} & \text{per } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Tale convergenza è uniforme in intervalli tipo $[1, A)$ con $1 < A < \frac{\pi}{2}$.

ESERCIZIO 3. (i) Si dia la formula integrale di Cauchy per una funzione olomorfa e la formula per le sue derivate successive.

(ii) Si calcolino i seguenti integrali

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{2}}\, dz \qquad \int_\gamma \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{4}}\, dz \qquad \int_\gamma \frac{\cos z}{(z - \frac{\pi}{4})^3}\, dz$$

dove γ è una circonferenza di centro 0 e raggio 1.

La formula integrale di Cauchy è: $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0)$

e per le derivate: $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$

1) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z-\frac{\pi}{2}}\,dz = 0$, $\frac{\pi}{2}$ e' fuori dalla circonferenza di centro 0 e raggio 1.

2) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z-\frac{\pi}{4}}\,dz = 2\pi i\, f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\pi i \cos\frac{\pi}{4} = 2\pi i\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\,\pi i$

3) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\, f^{(2)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\pi i \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$