

## CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INFORMATICA E AUTOMATICA

Prova di esame di *Ricerca Operativa*

**Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU devono risolvere gli esercizi 1) e 2). Tempo a disposizione 60 minuti.**

**Gli studenti che devono sostenere l'esame da 9 CFU devono risolvere gli esercizi 1), 2) e 3). Tempo a disposizione 90 minuti.**

**Esercizio 1**

Un'azienda produce latte e dispone di 5 impianti di confezionamento (IC1, IC2, IC3, IC4, IC5) distribuiti sul territorio regionale ai quali trasporta il latte per la vendita. Questi impianti sono in grado di ricevere grossi quantitativi di latte che vengono distribuiti in confezioni pronte per la vendita. La tabella che segue riporta per ciascuno dei possibili impianti la capacità massima di confezionamento giornaliera (espressa in litri al giorno), il costo del trasporto di un litro di latte dall'azienda all'impianto (in centesimi di Euro), il numero degli addetti necessari per fare funzionare l'impianto e il costo unitario di confezionamento (in centesimi di Euro al litro).

	capacità max	costo trasporto	numero addetti	costo confezionam.
IC1	1500	35	15	15
IC2	1300	28	20	20
IC3	1250	25	18	19
IC4	1650	42	23	24
IC5	1150	27	17	18

In totale si dispone di 60 operai addetti e quindi non tutti gli impianti di confezionamento possono essere attivati giornalmente. Quindi, giornalmente gli addetti dovranno essere ripartiti negli impianti attivati e quelli restanti dopo l'assegnazione tenuti a riposo. Ciascuno degli addetti assegnato ad un impianto viene retribuito con una paga di 70 Euro al giorno. Costruire un modello lineare che permetta di realizzare una pianificazione giornaliera dei trasporti e delle assegnazioni degli addetti che minimizzi il costo complessivo tenendo conto che giornalmente deve essere confezionata una quantità complessiva di almeno 3000 litri di latte e che il latte dovrà essere trasportato solamente agli impianti effettivamente attivati. (Gli impianti non dispongono di depositi e quindi tutto il latte trasportato deve essere confezionato).

**Esercizio 2**

Utilizzando il metodo del simplesso in due fasi, risolvere il seguente problema di PL

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 10 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

**Esercizio 3**

Risolvere con il metodo Branch& Bound il seguente problema di PLI

$$\begin{aligned} \max \quad & 40x_1 + 35x_2 - 30x_3 + 24x_4 + 18x_5 + 30x_6 \\ & 10x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 12x_4 + 9x_5 + 5x_6 \leq 11 \\ & x_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

### Esercizio 1

Un'azienda produce latte e dispone di 5 impianti di confezionamento (IC1, IC2, IC3, IC4, IC5) distribuiti sul territorio regionale ai quali trasporta il latte per la vendita. Questi impianti sono in grado di ricevere grossi quantitativi di latte che vengono distribuiti in confezioni pronte per la vendita. La tabella che segue riporta per ciascuno dei possibili impianti la capacità massima di confezionamento giornaliera (espressa in litri al giorno), il costo del trasporto di un litro di latte dall'azienda all'impianto (in centesimi di Euro), il numero degli addetti necessari per fare funzionare l'impianto e il costo unitario di confezionamento (in centesimi di Euro al litro).

	capacità max	costo trasporto	numero addetti	costo confezionam.
IC1	1500	35	15	15
IC2	1300	28	20	20
IC3	1250	25	18	19
IC4	1650	42	23	24
IC5	1150	27	17	18

In totale si dispone di 60 operai addetti e quindi non tutti gli impianti di confezionamento possono essere attivati giornalmente. Quindi, giornalmente gli addetti dovranno essere ripartiti negli impianti attivati e quelli restanti dopo l'assegnazione tenuti a riposo. Ciascuno degli addetti assegnato ad un impianto viene retribuito con una paga di 70 Euro al giorno. Costruire un modello lineare che permetta di realizzare una pianificazione giornaliera dei trasporti e delle assegnazioni degli addetti che minimizzi il costo complessivo tenendo conto che giornalmente deve essere confezionata una quantità complessiva di almeno 3000 litri di latte e che il latte dovrà essere trasportato solamente agli impianti effettivamente attivati. (Gli impianti non dispongono di depositi e quindi tutto il latte trasportato deve essere confezionato).

$x_i \equiv$  quantità latte confezionato in ICi,  $i=1, \dots, 5$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{e' attivo l'impianto } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 5$$

$$\min \left[ 35\delta_1 + 28\delta_2 + 25\delta_3 + 42\delta_4 + 27\delta_5 + 15x_1 + 20x_2 + 19x_3 + 24x_4 + 18x_5 + 70(15\delta_1 + 20\delta_2 + 18\delta_3 + 23\delta_4 + 17\delta_5) \right]$$

vincoli:

$$\begin{array}{l|l} x_1 \leq 1500 \delta_1 & 15\delta_1 + 20\delta_2 + 18\delta_3 + 23\delta_4 + 17\delta_5 \leq 60 \\ x_2 \leq 1300 \delta_2 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 3000 \\ x_3 \leq 1250 \delta_3 & x_i \geq 0 \\ x_4 \leq 1650 \delta_4 & \delta_i \in \{0, 1\} \\ x_5 \leq 1150 \delta_5 & \end{array}$$

## Esercizio 2

Utilizzando il metodo del simplesso in due fasi, risolvere il seguente problema di PL

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 10 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

$$\min -2x_1 - x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 5 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_6 = 10 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} \quad B^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C_B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} \quad C_N^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^T = [-2 \quad -1 \quad -1]$$

$$h = 1 \quad \bar{u}_h = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{p} = \min\{6, \frac{5}{2}, 10\} = \frac{5}{2} \quad k=2 \quad \text{Ence } x_5 \text{ entra } x_1$$

$$\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 10 \end{array} \right] \rightsquigarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1/2 & 5/2 & 1/2 & 1 & 7/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1 & 5/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 & 3/2 & 0 & 15/2 \end{array} \right]$$

$$C_B^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ x_4 & x_1 & x_6 \end{bmatrix} \quad C_N^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ x_5 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^T = [0 \quad -1 \quad -1] - [-1 \quad 1 \quad -1] = [1 \quad -2 \quad 0]$$

$$h = 2 \quad \bar{u}_h = \begin{bmatrix} 7/2 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} \quad \bar{p} = \min\{1, \cdot, 5\} = 1 \quad k=1 \quad \text{Ence } x_4 \text{ entra } x_2$$

$$\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 7/2 & -1/2 & 1 & 1/2 & 7/2 & \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 5/2 & \\ 3/2 & -1/2 & 0 & 7/2 & 15/2 & \end{array} \right] \rightsquigarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 7 & -1 & 2 & 1 & 7 & \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 6 & \\ -9 & 1 & -3 & 2 & -3 & \end{array} \right]$$

$$-\frac{21}{2} \quad \frac{3}{2} \quad -3 \quad -\frac{3}{2} \quad -\frac{21}{2}$$

$$C_B^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ x_2 & x_1 & x_6 \end{bmatrix} \quad C_N^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ x_5 & x_4 & x_3 \end{bmatrix}$$

$$y^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$