Esercizi dell'8 maggio.

1. Si consideri la funzione *logistica* definita per ogni x reale:

$F(x)=1/(1+e^{-x})$

a) Si verifichi che è una CDF e si mostri che se X ha CDF F, allora X e -X sono uguali in legge.
b) Determinare g in modo che g(U) ha CDF F quando U è uniforme in (0,1).
c) Calcolare E(X).

2. Si consideri la funzione *triangolare*, definita nell'intervallo (-1,1):

$f(x)=1-|x|$

a) Si mostri che è una PDF.
b) Si determini la famiglia di *locazione* e *scala* generata da f, parametrizzandola con la media e la deviazione standard s.
c) Siano $X_1, X_2,\dots,X_{48}$ variabili aleatorie i.i.d. con densità f. Detta Y la loro somma determinare approssimativamente (approssimazione normale) la probabilità che Y superi 4 in modulo e confrontare con la maggiorazione ottenuta mediante la disuguaglianza di Chebyshev.

3. Sia X una variabile normale standard, e sia $Y=X^2$.
a) Si determini la PDF di Y (anche se la funzione elevamento al quadrato non è monotona su tutto l'asse reale ci si può restringere al semiasse reale positivo una volta determinata la PDF di |X|). La PDF si dice densità del chi quadrato (con 1 grado di libertà).
b) Calcolare E(Y).
c) Dimostrare che se $X_1, X_2, \dots, X_{2m}$ sono normali standard indipendenti, allora $X_1^2+X_2^2+\dots+X_{2m}^2$ ha distribuzione Gamma con parametri (m,1/2), detta anche densità del chi quadrato con 2m gradi di libertà (si veda la parte finale della lavagna dell'ultima lezione, che non c'è stato tempo di presentare).

4. Siano X e Y variabili aleatorie Gamma indipendenti con parametri (r,1) e (s,1).
a) Determinare una espressione generale per la CDF e quindi la PDF del quoziente Y/X tra due variabili aleatorie indipendenti POSITIVE qualsiasi ed applicare a T=Y/X (sebbene si debbano calcolare integrali doppi, sono molto semplici).
b) Determinare la PDF di $V=1/(1+T) =X/(X+Y)$.
c) Verificare che un risultato più forte si poteva direttamente ottenere considerando la funzione di densità congiunta delle variabili $V=X/(X+Y)$ e $Z=X+Y$ che permette anche di affermare anche che V e Z sono indipendenti (il fatto che X+Y è Gamma (r+s,1) è già noto) (di nuovo, per la formula del cambiamento di variabili nel piano, si veda la parte finale della lavagna dell'ultima lezione).
d) Dedurre che $E(X/X+Y) =E(X)/(E(X)+E(Y))$, una formula che in generale è falsa.