1. Una certa azienda ha n+m impiegati, di cui n donne e m uomini. L'azienda deve decidere quali impiegati deve promuovere.
   (a) Supponiamo inizialmente che l'azienda decida di promuovere t impiegati (dove t è un qualunque numero tra 1 e n+m), scegliendoli a caso con uguali probabilità per ogni sottoinsieme di t impiegati. Scrivere la PMF della variabile aleatoria X, numero di donne promosse.
   Soluzione: La variabile X ha PMF ipergeometrica con parametri n+m, n e t.
   (b) Supponiamo ora che, invece di avere un numero fisso t di impiegati da promuovere, la compagnia decida di promuovere ciascun impiegato, indipendentemente dagli altri, con probabilità p. Scrivere la PMF della variabile aleatoria Y, numero di donne promosse, la PMF della variabile Z, numero di uomini promossi, e la PMF della variabile Y+Z, numero di impiegati promossi.
   Soluzione: La variabile Y ha PMF binomiale con parametri n e p, la variabile Z ha PMF binomiale con parametri m e p, la variabile Y+Z ha PMF binomiale con parametri n+m e p.
   (c) Con riferimento al punto (b) trovare la PMF di Y, numero di donne promosse, condizionata all'evento Y+Z=t (esattamente t impiegati sono promossi).
   Soluzione: Si tratta di una questione già affrontata nella lezione del 24 marzo: la PMF è esattamente la stessa della variabile aleatoria X del punto (a), qualunque sia la probabilità p.
2. Una signora inglese afferma di saper riconoscere dal gusto se in una tazza di tè il latte è stato aggiunto prima o dopo il tè. Uno statistico, allora, decide di compiere degli esperimenti per verificare la sua affermazione.
   (a) Alla signora vengono fatte assaggiare 6 tazze di tè, esternamente identiche, avvertendola che in 3 di esse il latte è stato versato prima del tè e nelle altre 3 è stato versato dopo il tè. La signora DEVE INDOVINARE IN QUALI TAZZE IL LATTE E' STATO VERSATO PRIMA, ma (almeno per ora) assumiamo che scelga completamente a caso. Determinare la probabilità che indovini 2 tazze su 3.
   Soluzione: IL NUMERO DELLE TAZZE CORRETTAMENTE ATTRIBUITE HA PMF IPERGEOMETRICA CON PARAMETRI 6, 3 e 3, QUINDI LA PROBABILITA' RICHIESTA E' 9/20.
   (b) Alla signora viene invece presentata una tazza di tè, scegliendo a caso se mettere prima il latte poi il tè o viceversa. Stavolta supponiamo che la signora abbia una certa competenza in materia, più specificamente che riconosca con probabilità p(1) quando il latte è stato versato per primo e riconosca con probabilità p(2) quando il latte è stato versato per ultimo. Se la signora dichiara che nella tazza che le è stata presentata il latte è stato versato per primo, con che probabilità è nel giusto?
   Soluzione: Per la formula di Bayes, dato che le probabilità di latte prima di tè e di tè prima di latte sono ½, la probabilità richiesta è p(1)/(p(1)+1-p(2)).
3. (a) Alice e Bob lanciano ciascuno una moneta, che ha una probabilità p di dare testa in ogni fissato lancio, INDIPENDENTEMENTE L'UNA DALL'ALTRO. Sia X il lancio in cui Alice ottiene la prima testa e Y il lancio in cui Bob ottiene la prima croce. Determinare la CDF e la PMF di max(X,Y). **Notazione:** q=1-p.
   Soluzione: $P(\max(X,Y)\leq i)=P(X \leq i)P(Y \leq i)=(1-q^i)(1-p^i)=1-p^i-q^i+(pq)^i$, $i=1,2,\ldots$
   $P(\max(X,Y)=i)=P(\max(X,Y)\leq i)-P(\max(X,Y)<\leq i-1)=pq[q^{i-2}+p^{i-2}-(qp)^{i-2}(1-qp)]$, $i=1,\ldots$
   SI NOTI CHE RISPETTO ALLA VERSIONE PRECEDENTE L'ULTIMO SEGNO E' – NON +.
   (b) Supponiamo ora che la prima testa e la prima croce siano calcolate sulla STESSA serie di lanci, dando luogo alle variabili aleatorie X' e Y'. Determinare la CDF e la PMF di max(X',Y').
   Soluzione: $P(\max(x',Y')\leq i)=1-P(\max(X',Y')>i)=1-P(i \text{ teste})-P(i \text{ croci})=1-p^i-q^i$, $i=2,\ldots$

Come in precedenza $P(\max(X',Y')=i)=p^{(i-1)}q+q^{(i-1)}p$, $i=2,3,\ldots$(si noti che 2 è il più piccolo valore nel supporto, è il punto più importante della soluzione).