ESERCITAZIONE 1– DOCENTE: MAURO PICCIONI, TUTOR: HLAFO ALFIE MIMUN

March 4, 2020

I seguenti esercizi sono stati presi dalla pagina web di Joe Blitzstein.

1. ESERCIZI

Ex. 1: Una famiglia ha 6 bambini, di cui 3 maschi e 3 femmine. Supponendo che ogni ordine di nascita sia ugualmente probabile, calcolare la probabilità che i 3 figli più grandi siano 3 femmine.

Ex. 2: Contare il numero di modi in cui si possono dividere 12 persone in 3 gruppi di cui

- un gruppo è fatto da 2 persone;
- gli altri due gruppi sono fatti di 5 persone ciascuno.

Attenzione: se $A_1, A_2, \dots, A_{12}$ sono le persone, la divisione in gruppi

$$A_1, A_2 \qquad A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 \qquad A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}$$

è equivalente alla divisione in gruppi

$$A_1, A_2 \qquad A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12} \qquad A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\,,$$

ovvero non distinguiamo i gruppi di stessa cardinalità.

Ex. 3: Quanti modi ci sono di dividere 12 persone in 3 gruppi ognuno dei quali formato da 4 persone?

Attenzione: se $A_1, A_2, \dots, A_{12}$ sono le persone, la divisione in gruppi

$$A_1, A_2, A_3, A_4 \qquad A_5, A_6, A_7, A_8 \qquad A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}$$

è equivalente alla divisione in gruppi

$$A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12} \qquad A_1, A_2, A_3, A_4 \qquad A_5, A_6, A_7, A_8\,,$$

ovvero non distinguiamo i gruppi di stessa cardinalità.

Ex. 4: Un college ha 10 slots (non sovrapposti) per i suoi corsi. Ogni corso viene assegnato ad uno slot in maniera casuale indipendentemente dagli altri corsi. Uno studente sceglie 3 corsi a caso a cui iscriversi. Qual è la probabilità che ci siano conflitti tra i corsi scelti dallo studente (a causa di eventuali sovrapposizione dell'orario)?

Ex. 5: In una città con 6 distretti avvengono 6 rapine in una settimana particolare. Assumendo che ogni rapina sia avvenuta in un distretto scelto in maniera casuale indipendentemente dalle altre rapine, calcolare la probabilità che in qualche distretto avvenga più di una rapina.

2. **SOLUZIONI**

Ex. 1: Denotiamo con F_1, F_2, F_3 le tre figlie femmine ed M_1, M_2, M_3 i tre figli maschi. I possibili ordinamenti di questi 6 figli sono $6! = 720$.

Costruiamo i casi favorevoli: immaginiamo di raccogliere i nomi dei figli in un vettore in cui il figlio nella coordinata i-esima è più grande del figlio nella coordinata $(i+1)$-esima. Vogliamo che le prime tre coordinate di questo vettore siano occupate dalle tre figlie femmine: ci sono 3! modi di scrivere i nomi delle tre figlie femmine nelle prime tre coordinate. Vogliamo che le ultime tre coordinate di questo vettore siano occupate dai tre figli maschi: ci sono 3! modi di scrivere i nomi dei tre figli maschi nelle ultime tre coordinate.

Dunque i casi favorevoli sono $3! \cdot 3!$ e di conseguenza la probabilità cercata è data da

$$\frac{3! \cdot 3!}{6!} = \frac{1}{20}\,.$$

Ex. 2: Abbiamo $\binom{12}{2}$ modi di formare il gruppo di 2 persone da un totale di 12 persone. Tolte queste due persone, dobbiamo formare 2 gruppi da 5 persone da un totale di 10 persone. Chiamiamo A e B questi due gruppi di 5 persone. Appena fissiamo il primo gruppo di 5 persone, l'altro è automaticamente fissato. Il numero di modi di fissare tali due gruppi è dunque dato da $\binom{10}{5}$. Dunque sembrerebbe che la soluzione sia $\binom{12}{2} \cdot \binom{10}{5}$. In realtà tale numero va diviso per $2! = 2$. Infatti, per esempio, se gli individui sono $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$, la divisione in gruppi

$$A_1, A_2 \qquad A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 \qquad A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}$$

è per noi equivalente alla divisione in gruppi

$$A_1, A_2 \qquad A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12} \qquad A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\,.$$

Poiché per ogni divisione in gruppi, il numero di divisioni in gruppi equivalenti alla divisione data è dato dal numero di permutazioni dei gruppi di stessa cardinalità (cioè in questo caso i due gruppi da 5), si ha che tale numero è 2!=2. Dunque la soluzione è data da

$$\frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{10}{5}}{2!} = 8316\,.$$

Ex. 3: Abbiamo $\binom{12}{4}$ modi di formare il primo gruppo di 4 persone da un totale di 12 persone. Tolte queste 4 persone, abbiamo $\binom{8}{4}$ modi di formare il secondo gruppo di 4 persone da un totale di 8 persone. Automaticamente il terzo gruppo è fissato appena lo sono i primi due. Dunque sembrerebbe che la soluzione sia $\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4}$. In realtà bisogna dividere il tutto per 3! in quanto per ogni divisione in gruppi si hanno 3! divisioni equivalenti ottenute dalla divisione in questione permutando l'ordine dei gruppi di stessa cardinalità (ovvero i tre gruppi da 4 persone). Dunque il risultato è dato da

$$\frac{\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4}}{3!} = 5775\,.$$

Ex. 4: Chiamiamo $A, B, C, D, E, F, G, H, I, L$ i 10 slots disponibili. Sappiamo che situazioni di conflitto potrebbero essere dovute a scelte in cui almeno due corsi sono nello stesso slot. Lo spazio campionario è formato da tutte le terne che contengono 3 slot (con possibili ripetizioni), ad esempio

$$A, B, C \qquad H, G, H \qquad F, F, F\,.$$

Poiché sono molte le configurazioni in cui almeno uno slot si ripete due volte, è più facile considerare l'evento complementare, ovvero

$$\mathcal{A} = \{\text{tutti e tre i corsi avvengono in slot differenti}\}\,.$$

Contiamo i casi possibili. Dobbiamo costruire un vettore di 3 coordinate in cui ogni coordinata la scegliamo tra i dieci simboli elencati in precedenza. Dunque abbiamo 10^3 vettori di questo tipo. e quindi il numero di casi possibili è 10^3.

Andiamo ora ad analizzare i casi favorevoli. Dobbiamo scegliere un gruppo di tre slot dai 10 slot. Inoltre per ogni gruppo che formiamo dobbiamo considerare le sue $3! = 6$ permutazioni (che sono state considerate nel conteggio dei casi possibili). Dunque abbiamo $3! \cdot \binom{10}{3}$ casi favorevoli.

Dunque

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \frac{3! \cdot \binom{10}{3}}{10^3} = \frac{720}{1000} = \frac{18}{25}\,,$$

e quindi la risposta è

$$1 - \mathbb{P}(\mathcal{A}) = \frac{7}{25}\,.$$

Ex. 5: Chiamiamo A, B, C, D, E, F i 6 distretti. Come nel caso precedente conviene analizzare l'evento complementare ovvero

$$\mathcal{A} = \{\text{ogni rapina avviene in un distretto differente}\}\,.$$

Calcoliamo i casi possibili. Dobbiamo costruire un vettore di 6 coordinate in cui ogni coordinata la scegliamo tra i 6 simboli elencati in precedenza. Dunque abbiamo 6^6 vettori di questo tipo. Dunque il numero di casi possibili è 6^6.

I casi favorevoli sono formati invece da vettori con tutte coordinate diverse, dunque da tutte le possibili permutazioni del vettore (A, B, C, D, E, F), che sono 6!.

Dunque

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \frac{6!}{6^6} = \frac{5}{324}$$

e quindi il risultato è

$$1 - \mathbb{P}(\mathcal{A}) = 1 - \frac{5}{324} = \frac{319}{324}\,.$$