

День 2

1. Арифметична прогресія.

№ 1. Знайдіть a_n .

а) $a_1 = 5, d = 8, n = 9$.

б) $a_{n-5} = 4, d = -3$.

в) $a_2 = 45, a_4 = 40, n = 7$.

г) $a_{n-1} = 22, a_{n+1} = 44$.

№ 2. Знайдіть S_n .

а) $a_1 = 5, a_7 = 23, n = 7$.

б) $a_1 = 3, d = 0.2, n = 10$.

в) суму натуральних чисел від 1 до n .

2. Геометрична прогресія.

№ 3. Знайдіть b_n .

а) $b_1 = 256, q = 0.5, n = 6$.

б) $b_{n+3} = 81, q = 9$.

в) $b_1 = 2, b_3 = 8, q < 0, n = 6$.

г) $b_{n-2} = \frac{1}{5}, b_{n+2} = 125, q > 0$.

№ 4. Знайдіть S_n .

а) $b_1 = 4, q = 0.5, n = 4$.

б) $b_1 = 3, b_4 = 243, n = 10$.

в) суму степенів двійки від 1 до 2^n .

г) $b_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}, n = \infty$.

д) $b_1 = 45, q = -0.2, n = \infty$.

3. Границя числової послідовності.

№ 5. Доведіть за означенням твердження.

❖ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} = 1$.

❖ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

❖ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

❖ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, b_n \neq 0$.

№ 6. Знайдіть границі.

а) $\{x_n\} = \frac{1}{n}$.

б) $\{x_n\} = n$.

в) $\{x_n\} = \frac{n}{n+1}$.

г) $\{x_n\} = \sin n$.

д) $\{x_n\} = \frac{2n^2 + 5n + 7}{7n^2 + 45n}$.

4. Границя функції.

№ 7. Обґрунтуйте твердження.

- ❖ $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g) = \lim_{x \rightarrow x_0} f \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g.$
- ❖ $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g) = \lim_{x \rightarrow x_0} f \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g.$
- ❖ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f}{\lim_{x \rightarrow x_0} g}, g(x_0) \neq 0.$

№ 8. Обчисліть границю функції.

а) $f(x) = x^2, x_0 = 3.$

б) $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 0.$

в) $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = +\infty.$

г) $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, x_0 = 1$

д) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, x_0 = 1.$

№ 9. Доведіть твердження.

❖ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

5. Похідна функції.

№ 10. Знайдіть похідну функції за означенням.

а) $f(x) = \operatorname{const}.$

б) $f(x) = x.$

в) $f(x) = x^2.$

г) $f(x) = x^n.$

№ 11. Доведіть за означенням твердження.

- ❖ $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x).$
- ❖ $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x).$
- ❖ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}.$
- ❖ $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$

№ 12. Знайдіть похідну функції.

а) $f(x) = \sin(x^2).$

б) $f(x) = \sin^2(x).$

в) $f(x) = \frac{\sin x}{x}.$

г) $f(x) = \cos(x) \cdot \sqrt{x} + \frac{2x^5 + 3}{x \sin x}$

6. Екстремуми функції.

№ 13. Дослідіть функцію на локальні екстремуми.

а) $y = x^2$.

б) $y = x^3$.

в) $y = \frac{1}{x}$.

7. Фізичний і геометричний зміст похідної.

№ 14. Користуючись геометричним змістом похідної знайдіть тангенс нахилу дотичної функції $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ у точці $x_0 = 0.5$.

Домашнє завдання 2

№ 1. Михайло та Валера хочуть потрапити в табір «МудраМакітра». Для цього їм доведеться подолати 65 км. Першого дня вони йшли разом і пройшли 4 км за день. Увечері хлопці посварились: Михайло вважав, що кожного наступного дня треба проходити на 8 км більше: ніж попереднього, а Валера наполягав, що треба проходити в 1.5 рази більшу відстань. Хлопці розділились і вирішили йти кожен за своєю стратегією. Хто перший дістанеться табору? Скільки днів переможцю доведеться чекати суперника? (2 бали).

№ 2. Скільки пройде кожен з хлопців задачі № 1 четвертого дня? (1 бал).

№ 3. Обчисліть (1 бал).

а) суму парних або непарних чисел від 1 до n (в залежності від парності n).

б) суму ряду $\frac{1}{3^n}$ та суму перших n членів цього ряду.

№ 4. Знайдіть границю послідовності (2 бали).

а) $\{x_n\} = 3$.

б) $\{x_n\} = \frac{n+1}{n}$.

в) $\{x_n\} = \frac{n^2+1}{n}$.

г) $\{x_n\} = \frac{n+1}{n^2}$.

№ 5. Знайдіть границю функції (1 бал).

а) $f(x) = 3, x_0 = 1$.

б) $f(x) = \frac{1}{x-2}, x_0 = 2$.

в) $f(x) = \frac{1}{x-2}, x_0 = 3$.

№ 6. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$ (1 бал).

№ 7. Обчисліть похідну функції $f(x) = \tan x$ (1 бал).

№ 8. Чи має функція $y = \cos x$ екстремуми? Відповідь обґрунтуйте (1 бал).