МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ЦЕНТР «МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ»

УКРАЇНСЬКИЙ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ЛІЦЕЙ
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

К. В. Лукаш
О. А. Печериця
О. Д. Приходько

ВЕКТОРИ ТА КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ

Навчально-методичний посібник

Київ
2017

*Рекомендовано науково-методичною радою
Національного центру «Мала академія наук України»
(протокол № 4 від 29.11.2016)*

Лукаш К. В.
Вектори та координати на площині : навч. -метод. посіб. / К. В. Лукаш, О. А. Печериця, О. Д. Приходько; за ред. О. В. Лісового. — К., 2017. — 28 с.

Збірник підготовлений відповідно до навчальної програми Всеукраїнської наукової фізико-математичної школи.

Видання містить:

- контрольні завдання;
- методичні рекомендації та розв’язання різних типів задач із математики;
- приклади авторських задач дослідницького характеру.

Збірник адресований учасникам Всеукраїнської наукової фізико-математичної школи, а також іншим учням для підготовки до контрольних робіт із математики у Всеукраїнському конкурсі-захисті науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України.

Шановні учні!

Мала академія наук України (МАН України), яка на сучасному етапі забезпечує процеси розвитку інтелектуальних здібностей учнів і сприяє формуванню освіченої творчої особистості, компетентної в соціально-цивілізаційному аспекті, створила освітній проект «Наукові школи МАН». Завдяки залученню до навчально-виховного процесу обдарованої молоді, а також досвідчених висококваліфікованих педагогів – викладачів вищих навчальних закладів та провідних ліцеїв, у наукових школах створено особливе освітнє середовище, в якому цінуються інтелектуальний потенціал, ерудованість, прагнення до самовдосконалення, взаємодопомога, співпраця. На заняттях учні 8–11-х класів загальноосвітніх навчальних закладів України – слухачі наукових шкіл – ознайомлюються з проблематикою науки, поглиблюють базові знання, опановують принципи, методи дослідницької діяльності, набувають навичок самостійної наукової роботи. Система організації навчання у школах поєднує колективні та індивідуальні заняття і припускає розв’язання наукової проблеми, яка передбачає, з одного боку, використання різноманітних методів, засобів навчання, а з іншого – інтегрування знань, умінь із різних галузей науки, техніки, технологій.

Навчально-виховний процес наукових шкіл містить такі складові: основи дослідницької роботи, профільний навчальний курс – теоретичний огляд та практикуми, індивідуальна дослідницька діяльність – здійснюється з використанням елементів дистанційного навчання і зазвичай передбачає три очні сесії – настановну (осінню), експериментальну (зимову) і підсумкову (весняну). Всі навчальні програми наукових шкіл ґрунтуються на проблемному та дослідницькому підходах і розділені на уроки з можливістю вільного перегляду незалежно від вибраного напряму.

Під час сесійних зборів проводяться лекційні та практичні заняття, навчально-тематичні екскурсії, особливе значення надається лабораторним і практичним роботам, у процесі яких учні набувають навичок роботи із сучасним цифровим навчальним і науковим обладнанням, оволодівають методикою виконання експерименту та закріплюють теоретичні знання.

У міжсесійний період виконуються проміжні контрольні роботи, слухачі беруть участь у вебінарах, форумах, отримують індивідуальні онлайн-консультації викладачів наукових шкіл щодо вибору теми науково-дослідницької роботи й інших питань, що виникають на різних етапах наукового пошуку.

Для підтримки процесу навчання і забезпечення його ефективності важливим є розроблення електронних навчальних комплексів та створення навчально-методичних посібників. Викладачі наукових шкіл розробляють й оновлюють теоретичні матеріали, збірники контрольних завдань, деталізують плани практичних та семінарських занять. Зокрема, колективом педагогів Українського фізико-математичного ліцею Київського національного університету імені Тараса Шевченка, які забезпечують методичний супровід навчально-виховного процесу наукових шкіл фізико-математичного профілю, розроблено навчальні посібники і методичні вказівки, необхідні для якісного забезпечення навчального процесу цього напряму.

Пещеріна Тетяна Вікторівна,
заступник директора НЦ «Мала академія наук України»

ВСТУП

Як відомо, у фізиці величини поділяються на скалярні та векторні. Скалярні величини (скаляри) характеризуються лише числовим значенням, наприклад маса тіла або температура. Векторні величини (вектори), крім чисельного значення, характеризуються ще й напрямком. Фізичними прикладами таких величин можуть бути переміщення матеріальної точки, швидкість, прискорення, а також сила, що на неї діє. У цьому посібнику розглянуто основні геометричні властивості векторних величин на площині. Більшість тверджень цього посібника є у підручниках, тому тут вони наводяться без доведення, а більше уваги приділено розв'язанню задач.

В основній частині цього посібника ми познайомимося з поняттями вектора (зв'язаного та вільного), базиса прямої та площини, системи координат, прямокутної декартової системи координат, координат вектора та точки. Вивчимо, як можуть бути розташовані вектори на площині, що таке сума векторів, добуток вектора на скаляр, скалярний добуток векторів та якими властивостями вони володіють, а також формули для роботи з векторами у координатній формі. Важливо ретельно опрацьовувати та вчити кожен розділ. Не переходьте до наступного розділу, якщо щось залишається незрозумілим чи невивченим у попередньому. Бо незрозумілі питання накопичуватимуться, і ви з часом остаточно загубитесь у матеріалі.

Ми не розглядатимемо великої кількості простих розрахункових задач – вони є в будь-якому підручнику з геометрії за 9-й клас (академічний, профільний чи поглиблений рівень), тому ви можете попрацювати з ними самостійно. Також після основної частини, яка містить теорію та приклади, вам пропонуються «Запитання для самоконтролю» – це нескладні обчислювальні задачі та запитання на розуміння теорії посібника. Вони не перевіряються нами, але відіграють для вас украй важливу роль в опрацюванні теми.

У розділі «Контрольні задачі» є складніші вправи, розв'язання яких (як і робота з іншим посібником та аналогічними темами у старших класах) вимагає досконалого володіння термінологією та вміння швидко і без перешкод застосовувати наведені формули. Для цього треба розв'язати велику кількість простих розрахункових задач (як у розділі «Запитання для самоконтролю» та відповідній темі вашого підручника з геометрії). Лише після цього можна досягти потрібного автоматизму та уникнути великої кількості технічних помилок у розрахунках!

Якщо і після цього у вас виникають проблеми із розв'язанням вправ розділу «Контрольні задачі» (наприклад, у задачах на доведення чи на векторно-координатний метод може бути не одразу зрозуміло, з чого почати), радимо вам повернутись до прикладів 1–17 основної частини. У посібнику вам пропонується самостійно розв'язати задачі, аналогічні наведеним прикладам. На них же звертайте увагу і тоді, коли записуєте розв'язання задачі (правильне оформлення розв'язань відіграє важливу роль).

Бажаємо успіхів!

1. Основні поняття

Під *скалярною величиною (скаляром)* в геометрії розуміють дійсне число. *Геометричним вектором (вектором)* називається напрямлений відрізок прямої. Напрям вектора визначається впорядкованою парою точок – *початком* і *кінцем* вектора. Якщо A – початок вектора, B – його кінець, то вектор позначатимемо $\overrightarrow{AB}$. Можливі також інші позначення: $\overline{AB}$, $\vec{a}$, $\bar{a}$, $\boldsymbol{a}$ *(рис. 1.1)*[1].

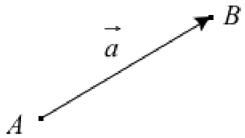

Рис. 1.1

Початок вектора називають *точкою його відкладання*, тобто якщо точка A є початком вектора $\vec{a}$, то говоримо, що *вектор* $\vec{a}$ *відкладено від точки* A.

Довжиною (модулем) вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ називається довжина відрізка AB. Можливі позначення: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$, AB, a.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одиничним вектором* або *ортом*. Вектор, початок і кінець якого співпадають, тобто вектор $\overrightarrow{AA}$, називається *нульовим* і позначається $\vec{0}$ або $\mathbf{0}$. Довжина нульового вектора дорівнює нулю, напрям нульового вектора невизначений.

Відзначимо також, що модуль вектора – величина невід'ємна для всіх векторів, причому модуль дорівнює нулю лише у випадку нуль-вектора.

Розглянемо далі два ненульові вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній або на паралельних прямих (позначається $\vec{a} \parallel \vec{b}$, для неколінеарних векторів використовується позначення $\vec{a} \nparallel \vec{b}$). Колінеарні вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ та $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$, що лежать на одній прямій, називаються *однаково напрямленими (співнапрямленими)*, якщо півпряма AB містить півпряму CD (або навпаки, півпряма CD містить півпряму AB) *(рис. 1.2)*, і *протилежно напрямленими* в іншому випадку *(рис. 1.3)*. Колінеарні вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ та $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$, що лежать на паралельних прямих, називаються *однаково напрямленими (співнапрямленими)*, якщо точки B і D лежать в одній півплощині відносно прямої AC *(рис. 1.4)*, і *протилежно напрямленими* в іншому випадку *(рис. 1.5)*.

Для однаково напрямлених векторів використовують позначення $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, а для протилежно напрямлених $-\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називаються *рівними (еквівалентними)*[2], якщо вони:

---

[1]У цьому посібнику ми використовуємо позначення $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$, оскільки решта позначень, хоч і вживається у деяких джерелах для опису векторів, проте часто також позначає інші математичні величини (наприклад, середнє значення або число, записане порозрядно, тощо), що може заплутати читача.

[2]У різних джерелах можна зустріти й інші означення рівності векторів. Так учням, знайомим із поняттям *перетворення* фігур, пропонується називати вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ *рівними,* якщо існує *паралельне перенесення*, яке переводить один вектор в інший. Це означення вимагає розуміння низки понять, які в цьому посібнику ми не наводимо. Безумовно цікавим є також означення рівності векторів, що базується на властивості діагоналей паралелограма: вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{A_1B_1}$ називаються *рівними*, якщо середини відрізків AB_1 і A_1B співпадають. Зазначимо, що всі наведені означення є рівносильними, хоч і використовують різні підходи до вивчення теми «Вектори».

1) колінеарні;
2) однаково напрямлені;
3) рівні за модулем.

Рівність векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ позначається $\vec{a} = \vec{b}$.

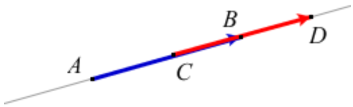

Рис. 1.2

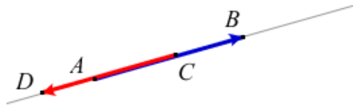

Рис. 1.3

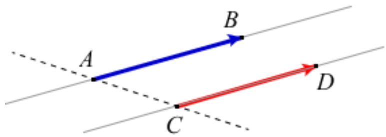

Рис. 1.4

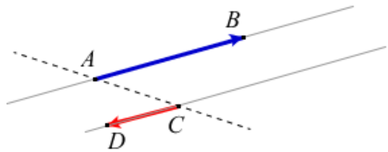

Рис. 1.5

Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору і не вважають однаково чи протилежно напрямленим із будь-яким іншим вектором. Усі нульові вектори вважаються рівними між собою.

З означення рівності двох векторів випливає таке твердження: *для будь-яких вектора $\vec{a}$ та точки P існує, і до того ж єдиний, вектор $\overrightarrow{PQ}$ з початком в точці P, рівний вектору $\vec{a}$*. Іншими словами, точка відкладання цього вектора може бути обрана довільним чином (ми не розрізняємо два рівні вектори, що мають різні точки відкладення і утворюються один з одного паралельним перенесенням). Сукупність усіх рівних між собою векторів називається *вільним вектором*[3]. Далі в геометрії ми розглядаємо саме вільні вектори (якщо не вказано іншого), тобто вектори визначені з точністю до точки відкладання. Вони характеризуються лише своїм модулем і напрямом, а за початок такого вектора може бути обрана будь-яка точка площини.

Зауваження. У фізиці, крім вільних векторів, розглядають також ковзаючі та зв'язані вектори. *Ковзаючими* називають такі вектори, які вважаються еквівалентними, якщо вони не лише рівні, але і лежать на одній прямій. Прикладом ковзаючого вектора може бути сила, прикладена до абсолютно твердого тіла (відомо, що дві рівні і розташовані на одній прямій сили спричиняють на абсолютно тверде тіло однакову механічну дію). *Зв'язаними* називають вектори, які вважають

[3] Відношення рівності векторів володіє такими важливими властивостями, як:
– *рефлексивність*: для довільного вектора $\vec{a}$ справедлива рівність $\vec{a} = \vec{a}$;
– *симетричність*: якщо $\vec{a} = \vec{b}$, то і $\vec{b} = \vec{a}$;

– *транзитивність*: якщо $\vec{a} = \vec{b}$ і $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$.

Це дозволяє стверджувати, що відношення рівності векторів є відношенням еквівалентності на множині всіх векторів (із поняттям «відношення еквівалентності» ви познайомитеся під час вивчення алгебри пізніше), а отже, і називати класи рівних (еквівалентних) векторів *вільним вектором*.

еквівалентними, якщо вони не лише рівні, але й мають спільний початок. Прикладом зв'язаного вектора може бути сила, прикладена до деякої точки нетвердого (наприклад, пружного) тіла. Поняття зв'язаного вектора фактично співпадає з поняттям напрямленого відрізка.

Наведемо у цьому розділі також означення кута між двома ненульовими векторами: *кутом* $\angle(\vec{a},\ \vec{b}) = \alpha$ *між векторами* $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається той із кутів між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, відкладеними від однієї точки, який не перевищує 180° *(рис. 1.6)*, тобто кут між променями, на яких ці вектори лежать (інколи кут між векторами також позначають $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$).

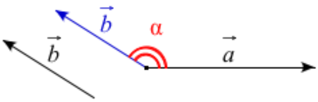

Рис. 1.6

Зокрема, кут між однаково напрямленими векторами дорівнює 0°, кут між протилежно напрямленими векторами – 180°. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ *перпендикулярні (ортогональні)* (позначається $\vec{a} \perp \vec{b}$), якщо кут між ними 90°.

2. Лінійні операції з векторами. Умова колінеарності. Формула поділу відрізка в заданому відношенні

До лінійних операцій із векторами відносять операції додавання двох векторів та множення вектора на скаляр.

Нагадаємо, що вектори є вільними, тобто можуть бути відкладені від будь-якої точки площини.

Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається вектор, початком якого є початок вектора $\vec{a}$, а кінцем – кінець вектора $\vec{b}$, за умови, що вектор $\vec{b}$ відкладено від кінця вектора $\vec{a}$ (ПРАВИЛО ТРИКУТНИКА) *(рис. 2.1)*. Якщо $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, то правило трикутника можна записати й у такій формі: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ *(рис. 2.2)*.

Остання рівність є справедливою для довільних трьох точок A, B, C площини і, що важливо під час розв'язування задач, може бути легко виписана і без рисунка.

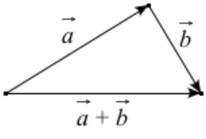

Рис. 2.1

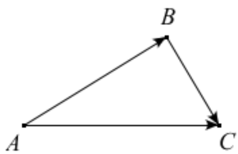

Рис. 2.2

Із правила трикутника та відомої нерівності, яка пов'язує сторони трикутника, випливає нерівність, що пов'язує довжину суми векторів із сумою довжин векторів-доданків: $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$, для всіх $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (*нерівність трикутника*). Зауважимо, що рівність в останній нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ однаково напрямлені (або якщо один із них є нуль-вектором).

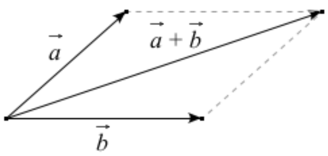

Рис. 2.3

Якщо $\vec{a}$ та $\vec{b}$ – відкладені від однієї точки неколінеарні вектори, то *сумою* $\vec{a}+\vec{b}$ цих векторів є вектор, початком якого є спільний початок векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, а кінцем – протилежна вершина паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ як на сторонах (ПРАВИЛО ПАРАЛЕЛОГРАМА[4]) *(рис. 2.3)*.

Правила додавання трикутника і паралелограма є еквівалентними, тобто результат додавання двох довільних векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ не залежить від вибору правила. Ми обираємо той спосіб, який є зручнішим у конкретній задачі.

Вектор $\vec{b}$ називається *протилежним* до вектора $\vec{a}$, якщо він колінеарний, протилежно напрямлений та рівний за модулем вектору $\vec{a}$, тобто якщо $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$. Протилежний до $\vec{a}$ вектор позначають $-\vec{a}$, протилежним до вектора $\overrightarrow{AB}$ є вектор $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$. *Різницею* $\vec{a}-\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, називається вектор $\vec{a}+(-\vec{b})$ (тобто, для того щоб відняти від деякого вектора вектор $\vec{b}$, досить додати до нього вектор, протилежний до $\vec{b}$). Якщо $\vec{a}$ та $\vec{b}$ мають спільний початок, то *різницею* $\vec{a}-\vec{b}$ цих векторів є вектор, початком якого є кінець вектора $\vec{b}$, а кінцем – кінець вектора $\vec{a}$ *(рис. 2.4)*.

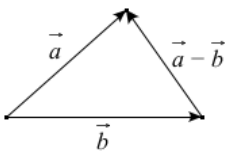

Рис. 2.4

Зауважимо також, що за цим правилом для довільних трьох точок A, B, C площини справедлива рівність:

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}.$$

Операція додавання векторів має такі властивості:

– *комутативність (переставна властивість)*: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ для довільних векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ *(рис. 2.5)*;

– *асоціативність (сполучна властивість)*: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *(рис. 2.6)*;

– *існування нейтрального елемента*: існує єдиний такий вектор $\vec{0}$, що для будь-якого вектора $\vec{a}$ виконується рівність $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

– *існування протилежного елемента*: для будь-якого вектора $\vec{a}$ існує єдиний такий вектор $-\vec{a}$, що виконується рівність $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

[4]Використовуючи властивість діагоналей паралелограма, суму векторів можна означити і так: вектор $\overrightarrow{OC}$ називається *сумою* векторів $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, якщо середини відрізків AB і OC співпадають. Відзначимо, що цей аналог правила паралелограма справедливий завжди, навіть коли доданки є колінеарними векторами.

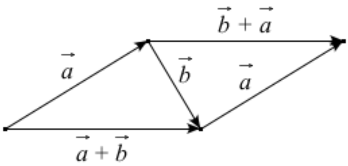

Рис. 2.5

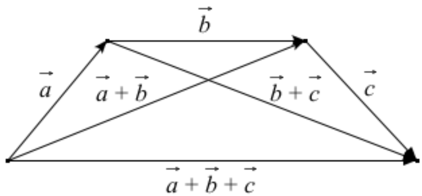

Рис. 2.6

Отже, під час додавання і віднімання векторів зберігаються всі властивості цих операцій, відомі з арифметики чисел. Зокрема, доданки з однієї частини векторної рівності можна переносити в іншу, змінюючи знак на протилежний.

Властивості додавання дозволяють нам розповсюдити правило додавання на суму довільного скінченого числа векторів. При цьому немає потреби проводити додавання послідовно, фіксуючи кожен проміжний результат. Справедлива така теорема.

Теорема 1 *(Ланцюгове правило, або правило многокутника)*. Якщо відкласти вектор $\overrightarrow{a_2}$ від кінця вектора $\overrightarrow{a_1}$, вектор $\overrightarrow{a_3}$ від кінця вектора $\overrightarrow{a_2}$, ..., вектор $\overrightarrow{a_n}$ від кінця вектора $\overrightarrow{a_{n-1}}$, то *сума* $\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\cdots+\overrightarrow{a_n}$ є вектором, початок якого є початком вектора $\overrightarrow{a_1}$, а кінець – кінцем вектора $\overrightarrow{a_n}$ *(рис. 2.7)*. Тобто для довільних точок $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ площини справедлива рівність:

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}.$$

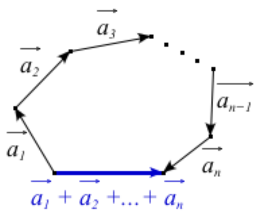

Рис. 2.7

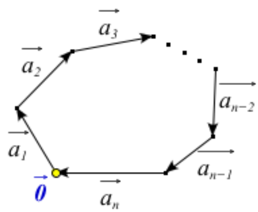

Рис. 2.8

<u>Наслідок.</u> Якщо вектори-доданки утворюють замкнену ламану, то їх сума дорівнює нуль-вектору *(рис. 2.8)*.

ПРИКЛАД 1. Указати взаємне розміщення ненульових векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, для яких $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$.

Спочатку з'ясуємо, що мається на увазі під «взаємним розміщенням двох ненульових векторів». Вектори можуть бути колінеарними (однаково чи протилежно напрямленими) або неколінеарними (утворюють гострий, тупий чи прямий кут). Крім того, довжини векторів можуть бути пов'язані певною нерівністю (або ж рівністю).

Дослідимо тепер нашу пару векторів. Оскільки довжина вектора – величина, очевидно, невід'ємна, то і $|\vec{a}|-|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|\geq 0$. Тобто $|\vec{a}|\geq|\vec{b}|$.

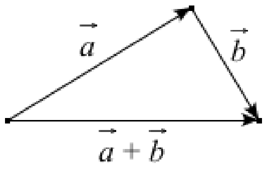

Рис. 2.9

Припустимо, що вектори неколінеарні *(рис. 2.9)*. Тоді, оскільки будь-яка сторона трикутника є меншою за суму двох інших його сторін, справедлива нерівність: $|\vec{a}| < |\vec{b}| + |\vec{a}+\vec{b}|$.

Звідси, $|\vec{a}+\vec{b}| > |\vec{a}| - |\vec{b}|$, що суперечить умові. Отже, вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ – колінеарні.

Розглянемо далі два випадки: 1) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ та 2) $|\vec{a}| > |\vec{b}|$.

У першому випадку, за умовою, $|\vec{a}+\vec{b}| = 0$, а отже, $\vec{a}+\vec{b} = \vec{0}$. Звідси, $\vec{a} = -\vec{b}$, тобто вектори протилежні (тому і протилежно напрямлені).

У другому випадку, якщо припустити, що колінеарні вектори є однаково напрямленими, то в нерівності трикутника досягається рівність. Тому за умовою $|\vec{a}| - |\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Звідси одержуємо, що $|\vec{b}| = 0$, що суперечить умові $\vec{b} \neq \vec{0}$. Отже, і у другому випадку вектори протилежно напрямлені.

Відповідь: $|\vec{a}| \geq |\vec{b}|,\ \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Зауваження. Окрім згаданої вище нерівності трикутника, справедлива також нерівність $\big||\vec{a}| - |\vec{b}|\big| \leq |\vec{a}+\vec{b}|$ для всіх $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Добутком $\lambda\vec{a}$ (або $\vec{a}\lambda$) *вектора* $\vec{a} \neq \vec{0}$ *на скаляр* $\lambda \neq 0$ називається такий вектор $\vec{b}$, що:

1) вектори $\vec{b}$ та $\vec{a}$ – колінеарні;
2) довжини векторів $\vec{b}$ та $\vec{a}$ пов'язані співвідношенням: $|\vec{b}| = |\lambda||\vec{a}|$;
3) $\vec{b}$ – однаково напрямлений з $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, та протилежно напрямлений з $\vec{a}$, якщо $\lambda < 0$.

Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $\lambda = 0$, то $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

Геометричний зміст[5] операції множення вектора $\vec{a}$ на скаляр λ полягає в такому:

– якщо $\lambda > 1$, то відбувається *розтяг* вектора $\vec{a}$ в λ раз;
– якщо $\lambda = 1$, то вектор $\vec{a}$ не змінюється;
– якщо $0 < \lambda < 1$, то відбувається *стиск* вектора $\vec{a}$ в $1/_{\lambda}$ раз;

– якщо $\lambda < 0$, то, крім розтягу (якщо $|\lambda| > 1$) або стиску (якщо $|\lambda| < 1$), відбувається ще зміна напрямку вектора на протилежний; зокрема якщо $\lambda = -1$, то вектор $\vec{a}$ змінюється на протилежний вектор $-\vec{a}$.

[5]Якщо розглядати зв'язані вектори (напрямлені відрізки), то учні, знайомі з поняттям *перетворення* фігур, можуть помітити в цих властивостях зв'язок із поняттям *гомотетії (центрально-подібного перетворення)* з коефіцієнтом λ, зокрема, з *тотожним перетворенням* за $\lambda = 1$ або *симетрією відносно точки (центральною симетрією)* за $\lambda = -1$.

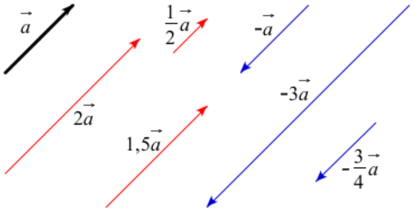

Рис. 2.10

Приклади множення вектора на скаляр наведено на *рис. 2.10*.

Операція множення вектора на скаляр має такі властивості:

– *асоціативність (сполучна властивість)*: $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ для довільних скалярів $\lambda,\ \mu$ та для довільного вектора $\vec{a}$;

– *дистрибутивний закон (розподільна властивість) відносно числового множника*: $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ для довільних скалярів $\lambda,\ \mu$ та для довільного вектора $\vec{a}$;

– *дистрибутивний закон (розподільна властивість) відносно векторного множника*: $\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ для довільного скаляра λ та для довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}$ *(рис. 2.11)*;

– *існування нейтрального елемента*: існує єдиний такий скаляр 1, що для будь-якого вектора $\vec{a}$ виконується рівність: $1\vec{a} = \vec{a}$.

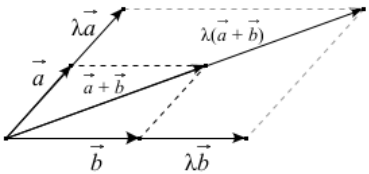

Рис. 2.11

Справедлива теорема.

Теорема 2 *(Умова колінеарності)*. Вектор $\vec{b}$ колінеарний ненульовому вектору $\vec{a}$ тоді і тільки тоді, коли існує таке дійсне число λ, що $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Зауваження:

– ця рівність буде справедлива і у випадку $\vec{b} = \vec{0}$ (тоді $\lambda = 0$);

– якщо $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $\lambda > 0$; якщо $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $\lambda < 0$;

ПРИКЛАД 2. Нехай O – точка перетину медіан AA_1, BB_1 та CC_1 трикутника ΔABC. Довести, що $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

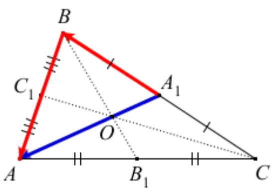

Рис. 2.12

Уведемо, наприклад, такі позначення: $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$, і виразимо через ці вектори вектор $\overrightarrow{OA}$ *(рис. 2.12)*.

За означенням медіани трикутника точка A_1 є серединою відрізка CB, тобто вектор $\overrightarrow{A_1B}$ є однаково напрямленим із вектором $\overrightarrow{CB}$ та вдвічі коротшим за нього.

Використавши умову колінеарності та означення добутку вектора на скаляр, одержимо, що $\overrightarrow{A_1B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\vec{a}$. Тоді, за правилом трикутника, $\overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BA} =$ $= \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

За властивістю медіан трикутника точка O ділить медіану A_1A у відношенні два до одного, рахуючи від вершини A, тобто вектор $\overrightarrow{OA}$ є однаково напрямленим із вектором $\overrightarrow{A_1A}$ та складає $\frac{2}{3}$ від нього за довжиною. Отже, $\overrightarrow{OA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A_1A} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

Крім того, за правилом трикутника $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \vec{a} + \vec{b}$. Далі аналогічно виражаємо вектори $\overrightarrow{OB}$ та $\overrightarrow{OC}$:

$$\overrightarrow{B_1A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right), \overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) - \vec{b} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right),$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{B_1B} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b},$$

та

$$\overrightarrow{C_1A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{C_1C} = \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{b} - \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{C_1C} = \frac{2}{3}\left(-\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}.$$

Отже, дійсно справджуються рівності $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)\vec{a} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)\vec{b} = 0\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b} = \vec{0}$, що і треба було довести.

Зауважимо, що можна було виразити вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ та $\overrightarrow{OC}$ і через інші вектори трикутника. Лінійні вирази цих векторів були б іншими, але в сумі ми все одно одержали би нуль-вектор. ■

Теорема 3 *(Умова належності трьох точок одній прямій).* Нехай A, B та M – три точки площини, причому $A \neq B$, а O – довільна четверта точка. Точка M лежить на прямій AB тоді і тільки тоді, коли існує така стала λ, що виконується рівність: $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB}$ *(рис. 2.13)*.

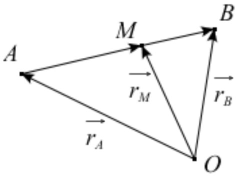

Рис. 2.13

Доведення. Перепишемо останню рівність у еквівалентній формі $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \lambda\overrightarrow{OB}$ та перенесемо вектор $\overrightarrow{OB}$ у ліву частину: $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \lambda\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right)$. За правилом віднімання остання рівність рівносильна такій: $\overrightarrow{BM} = \lambda\overrightarrow{BA}$.

Звідси, внаслідок умови колінеарності, одержимо, що вектори $\overrightarrow{BM}$ та $\overrightarrow{BA}$ паралельні одній прямій (або лежать на одній прямій). Оскільки ці вектори мають спільний початок, то вони лежать на одній прямій. Отже, точки A, B та M лежать на одній прямій. ■

Теорема 4 *(Формула поділу відрізка в заданому відношенні)*. Нехай A, B та M – три точки, що лежать на одній прямій, причому $A \neq B$, а O – довільна четверта точка площини. Точка M ділить відрізок AB у відношенні n до m[6] (тобто $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB} = n : m$[7]) тоді і тільки тоді, коли виконується рівність: $\overrightarrow{OM} = \frac{m}{n+m}\overrightarrow{OA} + \frac{n}{n+m}\overrightarrow{OB}$.

Доведення. Перепишемо останню рівність у еквівалентній формі:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - \frac{n}{n+m}\overrightarrow{OA} + \frac{n}{n+m}\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \frac{n}{n+m}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right).$$

Остання рівність за правилом віднімання рівносильна такій: $\overrightarrow{AM} = \frac{n}{n+m}\overrightarrow{AB}$, отже, точка M ділить відрізок AB у відношенні $n : m$. ■

Наслідок. Точка M є серединою відрізка AB тоді і тільки тоді, коли:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).$$

Зауваження:

– якщо у теоремі 4 одне з чисел n або m дорівнює нулю, то точка M співпадає з точкою A або B відповідно;

– якщо одне з чисел n або m від'ємне, то відбувається *поділ відрізка AB точкою M ззовні*, тобто точка M міститься не на самому відрізку, а на його продовженні за точки A або B.

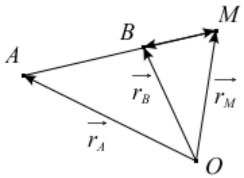

Рис. 2.14

Дійсно, у випадку *внутрішнього поділу* (*рис. 2.13*) вектори $\overrightarrow{AM}$ та $\overrightarrow{MB}$ однаково напрямлені, тому в рівності $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$ стала $\lambda = \frac{n}{m}$ додатня; у випадку *зовнішнього поділу* (*рис. 2.14*) – вектори протилежно напрямлені, стала λ від'ємна (див. зауваження до теореми 2). Зауважимо також, що замість зовнішнього поділу відрізка AB точкою M, можна розглянути внутрішній поділ відрізка AM точкою B (якщо M розташована на продовженні AB за точку B) або внутрішній поділ відрізка BM точкою A (якщо M розташована на продовженні AB за точку A), і навпаки. Наприклад, твердження «точка M перетину медіан трикутника ΔABC ділить медіану AA_1 у відношенні $AM : MA_1 = 2 : 1$» еквівалентне твердженням «точка A ділить відрізок A_1M у відношенні $A_1A : AM = -3 : 2$» та «точка A_1 ділить відрізок AM у відношенні $AA_1 : A_1M = -3 : 1$».

ПРИКЛАД 3. Довести, що медіани довільного трикутника ΔABC перетинаються в одній точці і діляться нею у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершини (*основна властивість медіан трикутника*).

Позначимо медіани трикутника AA_1, BB_1 та CC_1 і оберемо на площині ще одну довільну точку O. Також позначимо через M_1, M_2 та M_3 точки, що ділять у відношенні 2 : 1 медіани AA_1, BB_1та CC_1 відповідно. Доведемо, що точки M_1, M_2 та M_3 співпадають.

---

[6] n та m – дійсні числа, хоча б одне з яких відмінне від нуля.

[7] Рівність $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB} = n : m$ треба розуміти, як рівність векторів $m\overrightarrow{AM} = n\overrightarrow{MB}$ або $\overrightarrow{AM} = \frac{n}{m}\overrightarrow{MB}$. Наголошуємо, що відношення $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB}$ має зміст саме умови колінеарності. Тут не йдеться про «частку векторів», оскільки операція ділення для векторів невизначена.

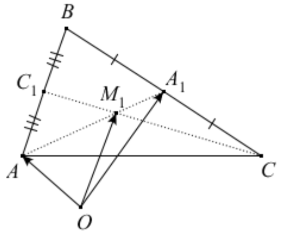

Рис. 2.15

За означенням медіани та наслідком теореми 4: $\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

Тоді за теоремою 4 та правилом трикутника одержуємо для точки M_1 *(рис. 2.15)*:

$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) =$
$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

Аналогічно $\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ та $\overrightarrow{OM_3} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

Отже, M_1, M_2 та M_3 – це одна і та сама точка, що належить усім трьом медіанам і ділить кожну з них у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершини. ■

Зауваження. В останньому прикладі ми довели також, що для довільного трикутника ΔABC точки M перетину його медіан (*центру ваги трикутника*) та для довільної точки O площини справедлива рівність $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

3. Декартові координати

Підкреслимо, що досі ми завжди говорили про вектори, не вживаючи термін «координати вектора». Хоча в багатьох задачах переходити до координатної форми вектора немає потреби, все ж часто корисним буває зафіксувати на площині деяку систему координат і працювати вже у ній. Отже, розглянемо, що ж таке система координат, координати вектора та точки.

Базисом прямої називатимемо довільний фіксований ненульовий вектор $\overrightarrow{e_1}$ цієї прямої (позначається $\langle\overrightarrow{e_1}\rangle$). Тоді умова колінеарності двох векторів (теорема 2) дозволяє стверджувати таке.

Теорема 5 *(Про базис прямої)*. Нехай $\langle\overrightarrow{e_1}\rangle$ – базис прямої. Тоді для довільного вектора $\vec{b}$ цієї прямої існує єдине таке дійсне число λ, що $\vec{b} = \lambda\overrightarrow{e_1}$.

Таке число λ називають *координатою вектора* $\vec{b}$ *в базисі* $\langle\overrightarrow{e_1}\rangle$.

Базисом площини називатимемо довільну фіксовану впорядковану пару неколінеарних[8] векторів цієї площини $\overrightarrow{e_1}$ та $\overrightarrow{e_2}$ (позначається $\langle\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\rangle$).

Теорема 6 *(Про базис площини)*. Нехай $\langle\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\rangle$ – базис площини. Тоді для довільного вектора $\vec{b}$ цієї площини існують єдині такі дійсні числа α, β, що вектор $\vec{b}$ дорівнює *лінійній комбінації векторів* $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ *з коефіцієнтами* α, β, тобто $\vec{b} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2}$.

Такі числа α, β називають *координатами вектора* $\vec{b}$ *в базисі* $\langle\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\rangle$. Позначається $\vec{b} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2}$, або $\vec{b} = (\alpha, \beta)$ в базисі $\langle\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\rangle$, або просто $\vec{b} = (\alpha, \beta)$[9],

[8]Оскільки нуль-вектор є колінеарним будь-якому вектору, то умова неколінеарності векторів $\overrightarrow{e_1}$ та $\overrightarrow{e_2}$ автоматично означає, що обидва ці вектори також ненульові.

[9]Не забувайте, що порядок векторів базису фіксований. Тому і порядок координат теж фіксований: $\vec{a} = (\alpha, \beta) \neq \vec{b} = (\beta, \alpha)$, крім випадку, коли $\alpha = \beta$.

якщо зрозуміло, про який базис йдеться. Вираз $\vec{b} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2}$ називається *розкладом вектора* $\vec{b}$ *за векторами* $\overrightarrow{e_1}$ та $\overrightarrow{e_2}$ або *розкладом вектора* $\vec{b}$ *за базисом* $\langle\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\rangle$.

Для розкладу вектора за векторами базису використовують уже відомі нам правила додавання (трикутника, паралелограма, многокутника) та множення вектора на скаляр.

Зауважимо, що в задачах ми вже використовували розклад за векторами базису векторів трикутника, прийнявши за базис дві сторони трикутника, ми виражали третю сторону та медіани через них (приклади 2, 3). Розглянемо ще кілька прикладів.

ПРИКЛАД 4. Дано правильний шестикутник $ABCDEF$, O – центр шестикутника. Знайти за базисом $\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\rangle$ координати векторів $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{FD}, \overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF}$.

Позначимо вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$.

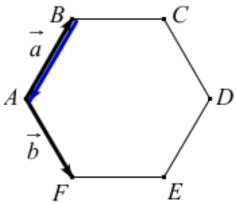

Рис. 3.1

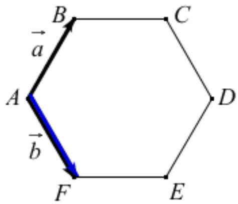

Рис. 3.2

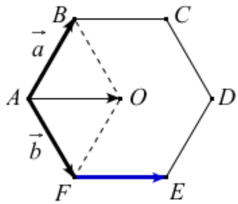

Рис. 3.3

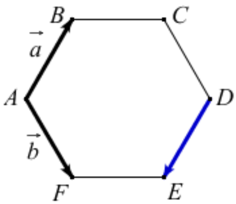

Рис. 3.4

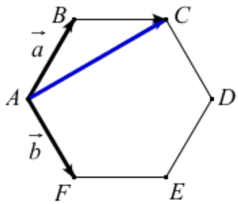

Рис. 3.5

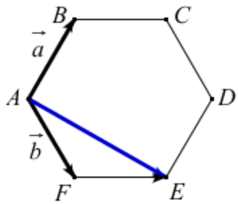

Рис. 3.6

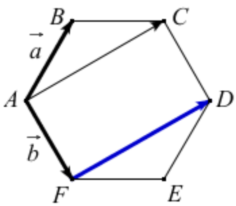

Рис. 3.7

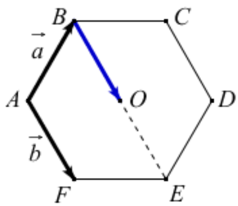

Рис. 3.8

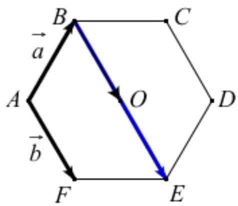

Рис. 3.9

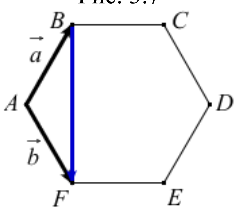

Рис. 3.10

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = (-1{,}0)$ у базисі $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$ *(рис. 3.1).*

$\overrightarrow{AF} = 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = (0{,}1)$ в базисі $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$ *(рис. 3.2).*

$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = 1 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = (1{,}1)$ в базисі $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$ *(рис. 3.3).*

$\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{AB} = -1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = (-1{,}0)$ в базисі $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ *(рис. 3.4)*.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} = 1 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = 2 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = (2{,}1)$ в базисі $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ *(рис. 3.5)*.

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} = 1 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = 1 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} = (1{,}2)$ в базисі $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ *(рис. 3.6)*.

$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AC} = (2{,}1)$ в базисі $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ *(рис. 3.7)*.

$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AF} = 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = (0{,}1)$ в базисі $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ *(рис. 3.8)*.

$\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BO} = 2\overrightarrow{AF} = 0 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} = (0{,}2)$ в базисі $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ *(рис. 3.9)*.

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} = -1 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = (-1{,}1)$ в базисі $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ *(рис. 3.10)*.■

ПРИКЛАД 5. У паралелограмі $ABCD$ точка K є серединою сторони BC, точка M – серединою сторони CD. Знайти за базисом $\langle \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AM} \rangle$ координати векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ *(рис. 3.11)*.

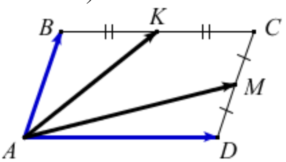

Рис. 3.11

Нехай $\overrightarrow{AK} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{b}$ – базисні вектори. Позначимо $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ та виразимо їх через базис. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ за правилом трикутника пов'язані співвідношеннями $\begin{cases} \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d} = \vec{a}, \\ \vec{d} + \frac{1}{2}\vec{c} = \vec{b}. \end{cases}$

Оскільки властивості лінійних операцій дозволяють працювати з векторами як зі звичайними числовими величинами, розв'яжемо цю систему рівнянь із двома невідомими $\vec{c}$, $\vec{d}$ методом перетворень. Помножимо перше рівняння на два та віднімимо від нього друге, і навпаки, помножимо друге на два та віднімимо перше. Одержимо систему, еквівалентну заданій:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}, \\ \frac{3}{2}\vec{d} = 2\vec{b} - \vec{a}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{c} = \frac{4}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}, \\ \vec{d} = \frac{4}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}. \end{cases}$$

Відповідь: $\vec{c} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\vec{d} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ в базисі $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

Декартовою системою координат (далі – ДСК) *на прямій* називається пара $(O, \overrightarrow{e_1})$, де O – деяка фіксована точка цієї прямої – *початок координат*, а $\overrightarrow{e_1}$ – базисний вектор, відкладений від цієї точки *(рис. 3.12)*. Пряма з обраною на ній ДСК називається *координатною віссю*.

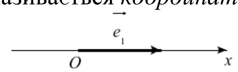

Рис. 3.12

Декартовою системою координат на площині називається трійка $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, де O – деяка фіксована точка цієї площини – *початок координат*, а $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ – базисні вектори, відкладені від цієї точки.

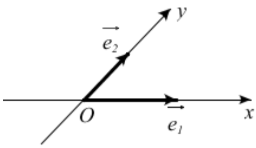

Рис. 3.13

Базисні вектори визначають дві *координатні осі – вісь абсцис та вісь ординат* відповідно (позначають, зазвичай, Ox та Oy) *(рис. 3.13)*. Площина з обраною на ній ДСК називається координатною площиною.

Нехай на площині задано ДСК $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Декартовими координатами вектора $\vec{a}$ або *координатами вектора* $\vec{a}$ *в ДСК* $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ називаються координати цього вектора в базисі $\langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle$, тобто коефіцієнти x, y із лінійного розкладу $\vec{a} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$ (позначають також $\vec{a} = (x, y)$).

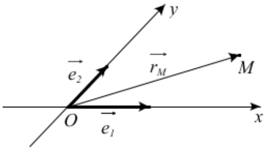

Рис. 3.14

Довільна точка M площини однозначно визначається вектором $\overrightarrow{OM}$, відкладеним від початку координат *(рис. 3.14)*, який називають *радіус-вектором* точки M (позначають $\overrightarrow{r_M}$). Декартові координати вектора $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r_M} = (x, y)$ називають *декартовими координатами точки* M (позначають $M(\overrightarrow{r_M})$ або $M(x, y)$).

Декартові координати вектора і точки на прямій визначаються аналогічно.

Зауваження. Формула поділу відрізка AB точкою M у заданому відношенні $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB} = n : m$ може бути записана і в термінах радіус-векторів точок A, B, C (якщо обрати в твердженні теореми 4 точку O так, щоб вона співпадала з початком координат): $\overrightarrow{r_M} = \dfrac{m\overrightarrow{r_A} + n\overrightarrow{r_B}}{n + m}$ *(рис. 2.13, 2.14)*. Далі це співвідношення буде легко записати в координатній формі.

ДСК називається *афінною*, якщо на модулі базисних векторів та кут між ними не накладено жодних умов; *косокутною*, якщо базисні вектори – орти; *прямокутною* (далі – ПДСК), якщо базисні вектори – орти, кут між якими прямий. В останньому випадку базис називають *ортонормованим*, а базисні вектори позначають $\vec{\imath}$ та $\vec{\jmath}$. Ще раз зазначимо, що вектори $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ такі, що $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$ та $|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = 1$.

4. Координатні формули

Нехай Oxy – ПДСК на площині. Наведемо далі координатні форми співвідношень, сформульованих у розділах 1 і 2. Відзначимо, що координатні формули (безумовно, корисні в розв'язанні задач) все ж є лише частковим випадком застосування теорії у конкретній системі координат, тому не варто плутати їх з означеннями, правилами, формулами та теоремами загальної теорії векторів (попри запропонований у багатьох підручниках підхід).

Нехай далі довільні вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані своїми координатами: $\vec{a} = (x_1, y_1) = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}, \vec{b} = (x_2, y_2) = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}$. Зокрема, *нуль-вектор* має координати $\vec{0} = (0, 0)$, а базисні вектори – координати $\vec{\imath} = (1, 0), \vec{\jmath} = (0, 1)$.

Модуль вектора $\vec{a}$ дорівнює[10]: $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

[10]Ця рівність є наслідком теореми Піфагора, застосованої до трикутника OAA_1, де O – початок координат, A – кінець вектора $\overrightarrow{OA}$, A_1 – ортогональна проекція точки A, наприклад, на вісь Ox. Тоді $OA = |\vec{a}|$, $OA_1 = x_1$, $AA_1 = y_1$ і $OA^2 = {OA_1}^2 + {AA_1}^2$.

Умова рівності векторів: вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх відповідні координати, тобто $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$.

Умова колінеарності векторів: вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні, тобто $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 : x_2 = y_1 : y_2$.

Сума векторів обчислюється за формулою: $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. *Різниця* – за формулою: $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$. *Добуток вектора* $\vec{a}$ *на скаляр* λ: $\overrightarrow{\lambda a} = (\lambda x_1,\ \lambda y_1)$. Тобто *лінійні операції з векторами здійснюються покоординатно*.

Нехай $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ – дві точки площини. Тоді за правилом трикутника $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{r_{M_2}} - \overrightarrow{r_{M_1}}$. Тобто за правилом віднімання *координати вектора* обчислюються за формулою $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Отже, щоб знайти координати вектора за координатами його початку та кінця, треба *від координат кінця вектора відняти координати початку*. Далі можемо працювати з $\overrightarrow{M_1M_2}$ як зі звичайним вектором, зокрема, *довжина відрізка* M_1M_2 дорівнює $M_1M_2 = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Оскільки лінійні операції з векторами здійснюються покоординатно, то справедлива також *координатна форма формули поділу відрізка* AB точкою M у відношенні $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB} = n : m$. Точка M має координати: $x_M = \dfrac{mx_1 + nx_2}{n + m}$, $y_M = \dfrac{my_1 + ny_2}{n + m}$. Зокрема, *координати середини відрізка* AB : $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

ПРИКЛАД 6. Знайти розклад вектора $\vec{c} = (5, 6)$ за векторами $\vec{a} = (2, 1)$ та $\vec{b} = (-1, 3)$ (тут можна вважати координати векторів заданими у деякому базисі $\langle\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\rangle$, можливо і в ортонормованому базисі $\langle\vec{\imath}, \vec{\jmath}\rangle$).

За теоремою 6 має виконуватися рівність $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ або в координатній формі $(5, 6) = \alpha(2, 1) + \beta(-1, 3)$. Знайшовши коефіцієнти α, β, ми знайдемо координати вектора $\vec{c}$ у новому базисі. Оскільки операції додавання векторів і множення вектора на скаляр відбуваються покоординатно, то останню векторну рівність можна записати у вигляді системи двох лінійних рівнянь із двома невідомими $\begin{cases} 5 = 2\alpha - \beta, \\ 6 = \alpha + 3\beta, \end{cases}$ розв'язавши яку, наприклад, методом підстановки, одержимо, що $\begin{cases} \alpha = 3, \\ \beta = 1. \end{cases}$ Тобто $\vec{c} = 3\vec{a} + \vec{b}$ або $\vec{c} = (3, 1)$ в базисі $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$. Таким чином, відбувся перехід від базису $\langle\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\rangle$ до базису $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$ *(зміна базису)*.

Відповідь: $\vec{c} = (3, 1)$ в базисі $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$.

ПРИКЛАД 7. Дано три послідовні вершини трапеції: $A(-1,\ -2)$, $B(1, 3)$, $C(9, 9)$. Знайти четверту вершину D цієї трапеції, точку M перетину її діагоналей та точку S перетину прямих, що містять бічні сторони, якщо довжина її основи AD дорівнює 15.

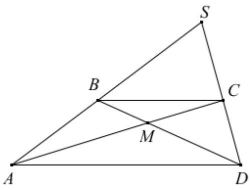

Рис. 4. 1

1. Знайдемо координати точки $D(x, y)$. $\overrightarrow{BC} = (9-1, 9-3) = (8, 6)$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{8^2+6^2} = 10$, $\overrightarrow{AD} = (x+1,\ y+2)$, а за умовою $|\overrightarrow{AD}| = 15$. AD і BC – основи трапеції, довжини яких відносяться як $15 : 10$, тобто як $3 : 2$. Тому $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ і за умовою колінеарності $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\ \overrightarrow{BC}$. Тобто $(x+1,\ y+2) = \frac{3}{2}(8, 6)$, або по кожній координаті окремо

$$\begin{cases} x+1 = \dfrac{3}{2}\cdot 8, \\ y+2 = \dfrac{3}{2}\cdot 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 11, \\ y = 7. \end{cases}$$

Отже, $D(11,7)$.

2. Трикутники ΔAMD та ΔCMB подібні (за трьома кутами), тому $\frac{AM}{MC} = \frac{AD}{BC}$, тобто $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MC} = 3 : 2$. Звідси за формулою поділу відрізка AC точкою M в заданому відношенні радіус-вектор точки M дорівнює:

$$\overrightarrow{r_M} = \frac{2\overrightarrow{r_A} + 3\overrightarrow{r_C}}{5} = \frac{2(-1,-2) + 3(9,9)}{5} = \left(\frac{-2+27}{5}, \frac{-4+27}{5}\right) = \left(5, \frac{23}{5}\right).$$

Тобто координати точки $M\left(5, \frac{23}{5}\right)$.

3. Розглянемо два способи пошуку точки S (із використанням зовнішнього поділу та внутрішнього).

I спосіб.

Трикутники ΔASD та ΔBSC подібні (за двома кутами та стороною між ними), тому $\frac{AS}{SB} = \frac{AD}{BC}$. Але точка S лежить ззовні відрізка AB, тому, згідно з зауваженням до теореми 4, $\overrightarrow{AS} : \overrightarrow{SB} = -3 : 2$. Звідси за формулою поділу відрізка AB точкою S у заданому відношенні радіус-вектор точки S дорівнює $\overrightarrow{r_S} = \frac{2\overrightarrow{r_A} - 3\overrightarrow{r_B}}{-1} = \frac{2(-1,-2) - 3(1,3)}{-1} = \left(\frac{-2-3}{-1}, \frac{-4-9}{-1}\right) = (5, 13)$. Тобто координати точки $S\ (5, 13)$.

II спосіб.

Нехай координати точки $S(x, y)$. Тоді з подібності трикутників ΔASD та ΔBSC випливає, що оскільки $\frac{AS}{SB} = \frac{3}{2}$, то $\frac{AB}{BS} = \frac{1}{2}$. Звідси за формулою поділу відрізка AS точкою B у заданому відношенні радіус-вектор точки B дорівнює $\overrightarrow{r_B} = \frac{2\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_S}}{3}$. Далі можемо або розв'язати лінійне рівняння відносно невідомого вектора $\overrightarrow{r_S}$ та обчислити його координати, або замість цього розв'язати систему лінійних рівнянь із двома невідомими x, y:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{2\cdot(-1) + x}{3}, \\ 3 = \dfrac{2\cdot(-2) + y}{3}, \end{cases} \text{тобто} \begin{cases} x = 5, \\ y = 13. \end{cases}$$

Отже, $S(5, 13)$.

Відповідь: $D(11,7)$, $M\left(5,\ \frac{23}{5}\right)$, $S\ (5, 13)$.

5*. Проекції векторів[11]

Нехай Oxy – ПДСК на площині; вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x, y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. Позначимо через A' та B' основи перпендикулярів, опущених із точок A та B на вісь Ox (точки A' та B' називають *ортогональними проекціями точок* A та B на вісь Ox). *Вектор-проекцією* (*ортогональною вектор-проекцією*) *вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на вісь* Ox називають вектор $\overrightarrow{A'B'}$. *Проекцією* (*ортогональною проекцією*) *вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на вісь* Ox називають число, визначене за правилом: $\text{пр}_{Ox}\vec{a} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \overrightarrow{A'B'} = \vec{0}, \\ \left|\overrightarrow{A'B'}\right|, \text{ якщо } \overrightarrow{A'B'} \uparrow\uparrow \vec{\imath}, \\ -\left|\overrightarrow{A'B'}\right|, \text{ якщо } \overrightarrow{A'B'} \uparrow\downarrow \vec{\imath}, \end{cases}$

де $\overrightarrow{A'B'}$ – вектор-проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь Ox.

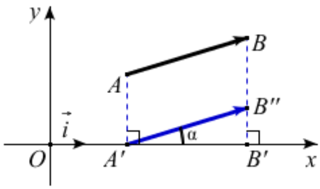

Рис. 5.1

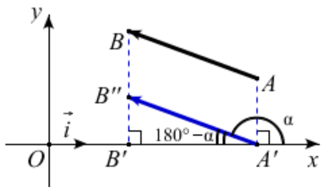

Рис. 5.2

Із метричних співвідношень у прямокутному трикутнику *(рис. 5.1, 5.2)* випливають такі твердження.

Твердження 1. Проекція вектора на вісь дорівнює добутку довжини цього вектора на косинус кута нахилу вектора до осі, тобто $\text{пр}_{Ox}\vec{a} = |\vec{a}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{\imath})$.

Аналогічно визначається та має ті ж властивості і проекція вектора $\vec{a}$ на вісь Oy (напрямок якої задає вектор $\vec{\jmath}$) або будь-яку іншу вісь, задану деяким вектором $\vec{b}$ (позначається $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$).

Твердження 2. Прямокутні декартові координати вектора $\vec{a} = (x, y)$ дорівнюють проекціям цього вектора на координатні осі, тобто $x = \text{пр}_{Ox}\vec{a}$, $y = \text{пр}_{Oy}\vec{a}$ або $x = |\vec{a}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{\imath})$, $y = |\vec{a}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{\jmath})$.

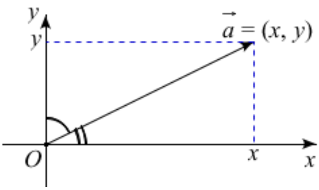

Рис. 5.3

В останніх двох рівностях косинуси кутів між вектором та координатними осями називаються *напрямними косинусами вектора (рис. 5.3)*.

Вони задовольняють рівність $\cos^2\angle(\vec{a}, \vec{\imath}) + \cos^2\angle(\vec{a}, \vec{\jmath}) = 1$.

Кожен вектор однозначно задається своєю довжиною та напрямними косинусами.

[11]У цьому додатковому розділі ми у стислій формі знайомимо читача з поняттям ортогональної проекції, яке дає можливість зрозуміти, що таке координати вектора з геометричних міркувань; може бути використане також для розв'язання багатьох геометричних та тригонометричних задач. Існує також більш широке поняття проекції паралельної деякому заданому напрямку, яке в цьому посібнику ми не розглядаємо.

Проекція вектора також має *лінійні властивості*:

– для будь-яких векторів $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$: $\text{пр}_{\vec{b}}(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}) = \text{пр}_{\vec{b}}\overrightarrow{a_1} + \text{пр}_{\vec{b}}\overrightarrow{a_2}$;

– для будь-яких вектора $\vec{a}$ та скаляра λ: $\text{пр}_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}) = \lambda\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

ПРИКЛАД 8. Довести, що в довільному трикутнику ΔABC зі сторонами a, b, c виконується рівність: $a = b\cdot\cos C + c\cdot\cos B$ (*формула проекцій; рис. 5.4*).

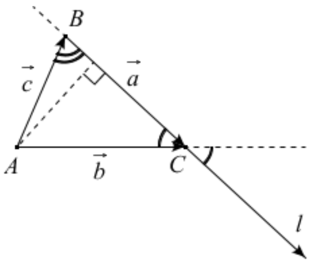

Рис. 5.4

Нехай $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BA}$, та l – вісь, що має напрямок вектора $\vec{a}$ *(рис. 5.4)*. Тоді $\angle C = \angle(\vec{b}, l) = \angle(\vec{b}, \vec{a})$, $\angle B = \angle(\vec{c}, l) =$ $= \angle(\vec{c}, \vec{a})$, $\angle A = \angle(\vec{a}, l) = \angle(\vec{a}, \vec{a}) = 0^\circ$.

Далі за твердженням 1 $\text{пр}_l\vec{a} = \vec{a}$, $\text{пр}_l\vec{b} = |\vec{b}|\cos\angle(\vec{b}, l) = b\cdot\cos C$, $\text{пр}_l\vec{c} =$ $= |\vec{c}|\cos\angle(\vec{c}, l) = c\cdot\cos B$. Тоді ця формула є наслідком лінійності проекції та рівності $\vec{a} = \vec{c} + \vec{b}$.

6. Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число $(\vec{a}, \vec{b})$, що дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними, тобто $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Якщо хоч один із векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює нулю, то їх скалярний добуток вважають таким, що дорівнює нулю. Можливі позначення: $(\vec{a}, \vec{b})$, $(\vec{a}\vec{b})$, $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$. З означення випливає, що якщо кут $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ гострий, то скалярний добуток $(\vec{a}, \vec{b})$ – величина додатна, якщо ж кут $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ тупий, то – від’ємна.

Крім того, скалярний добуток векторів має такі властивості[12]:

– *комутативність (переставна властивість)*: $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ для довільних векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

– *дистрибутивні закони (розподільна властивість)*: $(\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) +$ $+(\vec{b}, \vec{c})$ та $(\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$ для довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;

– *асоціативність (сполучна властивість) відносно скалярного множника*: $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b})$ для довільного скаляра λ та для довільних векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Перераховані властивості дозволяють скалярно перемножати векторні многочлени почленно, як звичайні многочлени кількох змінних. Наприклад, $(2\vec{a}+\vec{b}, 3\vec{b}-\vec{a}+2\vec{c}) = 6(\vec{a}, \vec{b}) - 2(\vec{a}, \vec{a}) + 4(\vec{a}, \vec{c}) + 3(\vec{b}, \vec{b}) - (\vec{b}, \vec{a}) + 2(\vec{b}, \vec{c}) =$ $= 5(\vec{a}, \vec{b}) + 4(\vec{a}, \vec{c}) + 2(\vec{b}, \vec{c}) - 2\vec{a}^2 + 3\vec{b}^2$ або $(\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{a}) - (\vec{a}, \vec{b}) +$ $+(\vec{b}, \vec{a}) - (\vec{b}, \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$. Тут використано позначення скалярного квадрату.

Скалярним квадратом називають скалярний добуток вектора на себе, тобто $\vec{a}^2 = (\vec{a}, \vec{a})$. З означення скалярного добутку випливає, що скалярний квадрат

[12] Друга та третя властивості є наслідками лінійних властивостей проекції та того, що $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$.

довільного вектора $\vec{a}$ дорівнює квадрату його модуля, тобто справедлива рівність $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Теорема 7 *(Умова перпендикулярності)*. Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні. Тобто для довільних $\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0}$: $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Зауваження. На відміну від числової арифметики не можна стверджувати, що добуток векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один множник дорівнює нулю. З останнього випливає, що *векторні рівності не можна скорочувати на відмінний від нуля множник*. Дійсно, з того, що $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c})$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$), випливає, що $(\vec{a}, \vec{b} - \vec{c}) = 0$, тобто вектори $\vec{a}$ та $\vec{b} - \vec{c}$ перпендикулярні або $\vec{b} - \vec{c}$ дорівнює нулю (а не лише $\vec{b} = \vec{c}$, як із числовими рівностями).

Зауваження. Існують й інші суттєві відмінності скалярного множення векторів від звичайного числового множення. Так, оскільки добуток векторів – це число, а не вектор, тобто об’єкт іншої природи, ніж множники, то введення поняття «векторного ділення» як операції оберненої до множення, є некоректним і неможливим. Ця ж обставина заважає розглядати і скалярний добуток трьох векторів.

ПРИКЛАД 9. Перевірити, чи для всіх векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ справедливі рівності: 1) $\vec{a}^2|\vec{a}| = |\vec{a}|^3$; 2) $(\vec{a}, \vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2$.

1) Рівність $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ справедлива для довільного вектора $\vec{a}$, а отже, і рівність $\vec{a}^2|\vec{a}| = |\vec{a}|^2|\vec{a}| = |\vec{a}|^3$ теж виконується для всіх $\vec{a}$.

2) За означенням скалярного добутку та рівністю для скалярного квадрата потрібно перевірити, чи для всіх векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ справедлива рівність $|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$. Очевидно, рівність вірна, якщо хоч один вектор дорівнює нулю. Нехай далі $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$, тоді остання рівність еквівалентна рівності $cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 1$, що справджується лише для колінеарних векторів.

Відповідь: 1) для всіх; 2) не для всіх (лише для колінеарних).

ПРИКЛАД 10. Довести, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін (*властивість діагоналей паралелограма*).

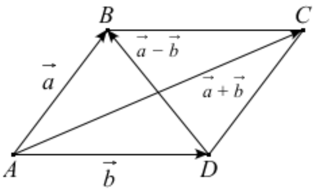

Рис. 6.1

Розглянемо паралелограм $ABCD$. Нехай $\overrightarrow{AB} = \vec{a},\ \overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Тоді $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b},\ \overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$. Таким чином, $AC^2 + DB^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{DB}^2 =$
$= (\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + \vec{b}^2 + \vec{a}^2 -$
$-2(\vec{a}, \vec{b}) + \vec{b}^2 = 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2) = 2(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2) =$
$= 2(AB^2 + AD^2)$, що і треба було довести.■

ПРИКЛАД 11. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ такі, що $|\vec{a}| = 19$, $|\vec{b}| = 13$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 22$. Знайти довжину вектора $\vec{a} + \vec{b}$.

За правилом паралелограма та властивістю діагоналей паралелограма, доведеною в попередньому прикладі, $|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\right)$. Звідси $|\vec{a}+\vec{b}|^2=2\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\right)-|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(361+169)-484=576$, тобто, оскільки модуль – величина невід'ємна, то$|\vec{a}+\vec{b}|=24$.

Відповідь: 24.

ПРИКЛАД 12. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ такі, що $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5, \angle(\vec{a},\vec{b})=60^\circ$. Знайти 1) $(2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-3\vec{b})$; 2) $|\vec{a}-2\vec{b}|$.

1) За правилами множення, означенням скалярного добутку та скалярного квадрата:

$$(2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-3\vec{b})=2\vec{a}^2-5(\vec{a},\vec{b})-3\vec{b}^2=2|\vec{a}|^2-5|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})-3|\vec{b}|^2=$$
$$=2\cdot 4-5\cdot 2\cdot 5\cdot \cos 60^\circ-3\cdot 25=8-50\cdot\frac{1}{2}-75=-92.$$

2) Знайдемо спочатку $|\vec{a}-2\vec{b}|^2$. За правилами множення, означенням скалярного добутку та скалярного квадрата виконується: $|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})^2=$ $=(\vec{a}-2\vec{b},\vec{a}-2\vec{b})=\vec{a}^2-4(\vec{a},\vec{b})+4\vec{b}^2=|\vec{a}|^2-4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})+4|\vec{b}|^2=4$. Звідси, оскільки модуль величина невід'ємна, то $|\vec{a}-2\vec{b}|=2$.

Відповідь: 1) -92; 2) 2.

ПРИКЛАД 13. У паралелограмі $ABCD$ точка K є серединою сторони BC, точка M – серединою сторони CD. Знайти AB та AD, якщо $AK=6$, $AM=3$, $\angle KAM=60^\circ$.

У прикладі 5 ми одержали, що $\overrightarrow{AB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AK}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ та $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AM}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$. Знайдемо далі шукані довжини аналогічно до пункту 2 прикладу 12.

$$|\overrightarrow{AB}|^2=\left|\frac{4}{3}\overrightarrow{AK}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}\right|^2=\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AK}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AK}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM},\frac{4}{3}\overrightarrow{AK}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}\right)=$$
$$=\frac{16}{9}\overrightarrow{AK}^2-\frac{16}{9}(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AM})+\frac{4}{9}\overrightarrow{AM}^2=\frac{16}{9}|\overrightarrow{AK}|^2-\frac{16}{9}|\overrightarrow{AK}||\overrightarrow{AM}|\cos\angle KAM+\frac{4}{9}|\overrightarrow{AM}|^2=$$

$=\frac{16}{9}\cdot 36-\frac{16}{9}\cdot 6\cdot 3\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{9}\cdot 9=64-16+4=52$. Аналогічно $|\overrightarrow{AD}|^2=16$. Звідси $\overrightarrow{AB}=2\sqrt{13}, \overrightarrow{AD}=4$.

Відповідь: $2\sqrt{13}$ і 4.

Наведемо тепер формулу для обчислення скалярного добутку через координати векторів. Нехай Oxy – ПДСК на площині, а вектори задані своїми координатами: $\vec{a}=(x_1,y_1)=x_1\vec{\imath}+y_1\vec{\jmath}$, $\vec{b}=(x_2,y_2)=x_2\vec{\imath}+y_2\vec{\jmath}$.

Теорема 8. Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ можна обчислити за формулою $(\vec{a},\vec{b})=x_1x_2+y_1y_2$.

Доведення. Оскільки для ортонормованого базису $\vec{\imath}\perp\vec{\jmath}$, то за умовою перпендикулярності та внаслідок комутативності скалярного добутку: $(\vec{\imath},\vec{\jmath})=$ $=(\vec{\jmath},\vec{\imath})=0$. Тому, за асоціативністю та дистрибутивним законом, для скалярного добутку справджуються рівності: $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = x_1x_2(\vec{i},\vec{i}) + x_1y_2(\vec{i},\vec{j}) + x_2y_1(\vec{j},\vec{i}) +$ $+y_1y_2(\vec{j},\vec{j}) = x_1x_2\vec{i}^2 + y_1y_2\vec{j}^2$. За означенням скалярного квадрата, оскільки для ортонормованого базису $|\vec{i}| = 1, |\vec{j}| = 1$, виконується $x_1x_2\vec{i}^2 + y_1y_2\vec{j}^2 = x_1x_2|\vec{i}|^2 +$ $+y_1y_2|\vec{j}|^2 = x_1x_2 + y_1y_2$.■

Наслідком цієї теореми та властивості для скалярного квадрата можна вважати відоме твердження: модуль вектора $\vec{a} = (x_1, y_1)$ обчислюється за формулою $|\vec{a}| =$ $= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Крім того, за означенням скалярного добутку справджується такий наслідок.

<u>Наслідок</u>. Косинус кута між векторами $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$ обчислюється за формулою $cos\,\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

ПРИКЛАД 14. Визначити тупий чи гострий кут утворюють між собою вектори $\vec{a} = (1,-2), \vec{b} = (-3,2)$.

Скалярний добуток цих векторів $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = -7 < 0$, а тому з означення випливає, що кут між векторами – тупий.

Наголошуємо, що в таких задачах не треба шукати ні кут між векторами (бо не вимагають в умові задачі), ні навіть косинус цього кута! Треба лише знайти скалярний добуток векторів та проаналізувати його знак.■

ПРИКЛАД 15. Дано вектори $\vec{a} = (1,2), \vec{b} = (-3,1), \vec{c} = (2,-1)$. За якого значення k вектори $\vec{a} + k\vec{b}$ та $\vec{c}$ перпендикулярні?

$\vec{a} + k\vec{b} = (1,2) + k(-3,1) = (1 - 3k, 2 + k)$. За умовою перпендикулярності $0 = \left(\vec{a} + k\vec{b}, \vec{c}\right) = 2(1 - 3k) - (2 + k) = -7k$. Отже, $k = 0$.

Відповідь: $k = 0$.

ПРИКЛАД 16. Довести, що для довільних дійсних чисел $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ справедлива нерівність $(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)^2 \leq \left({\alpha_1}^2 + {\beta_1}^2\right)\left({\alpha_2}^2 + {\beta_2}^2\right)$ (*нерівність Коші-Буняковського для чисел* $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$).

Нехай числа α_1, β_1, α_2, β_2 є координатами векторів $\vec{a} = (\alpha_1, \beta_1), \vec{b} = (\alpha_2, \beta_2)$ в ортономованому базисі. Тоді, оскільки $\left|cos\,\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right| \leq 1$, то за означенням скалярного добутку $\left|\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right| \leq |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|$. Оскільки обидві частини останньої нерівності невід'ємні, можемо піднести їх до квадрату: $\left|\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right|^2 \leq |\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2$. Підставивши в останню нерівність вирази скалярного добутку та скалярного квадрату через координати, отримуємо потрібну нерівність. ■

7. Векторно-координатний метод у задачах

Вектори та координати досить часто дозволяють легко розв'язати геометричні задачі, в яких напряму не йдеться про ці об'єкти. Ми розглядали приклади 3, 8, 10 і довели *основну властивість медіан трикутника, формулу проекцій та властивість діагоналей паралелограма* відповідно, які є суто геометричними. У шкільних підручниках ви можете відшукати їх геометричні доведення і переконатися, що вони є значно більш громіздкими ніж розглянуті тут. Для розв'язання задачі прикладу 13 теж було застосовано векторний метод. Окрім того, цей метод дає можливість розв'язувати і алгебраїчні (ми довели частковий випадок *нерівності Коші-Буняковського* у прикладі 16), а пізніше і тригонометричні задачі.

Як можна було бачити, суть методу полягає в тому, що ми самі задаємо (обираємо, вводимо) деякі вектори (загальним чином або координатами), використовуючи властивості яких, досягаємо поставленої в задачі мети. Як працює цей метод найкраще можна зрозуміти на прикладах, тому розглянемо ще один.

ПРИКЛАД 17. Довести, що висоти трикутника перетинаються в одній точці.

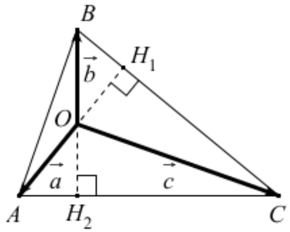

Рис. 7.1

Нехай AH_1, BH_2 – висоти трикутника ΔABC, тобто $AH_1 \perp BC$, $BH_2 \perp AC$, а O – точка їх перетину. Проведемо CO і покажемо, що $CO \perp AB$ за допомогою скалярного добутку.

Нехай $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Тоді $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$. Далі за умовою перпендикулярності: $AO \perp BC \Rightarrow \left(\vec{a}, \vec{c} - \vec{b}\right) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (\vec{a}, \vec{c}) = \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ та $BO \perp AC \Rightarrow \left(\vec{b}, \vec{c} - \vec{a}\right) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(\vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

З останніх двох рівностей випливає, що $\left(\vec{b}, \vec{c}\right) = (\vec{a}, \vec{c}) \Rightarrow \left(\vec{b} - \vec{a}, \vec{c}\right) = 0$, тобто за умовою перпендикулярності $CO \perp AB$.■

Запитання для самоконтролю

1. За відомими ненульовими, неколінеарними векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ побудуйте вектори: 1) $\vec{c}$ утричі довший і однаково напрямлений з $\vec{a}$; 2) $\vec{d}$ удвічі коротший і протилежно напрямлений з $\vec{b}$; 3) $\vec{e}$, що складає $\frac{2}{5}$ вектора $\vec{b}$ і однаково напрямлений із ним; 4) $\vec{b} - \vec{a}$; 5) $-\vec{a} - \vec{b}$; 6) $3\vec{a} + \vec{b}$; 7) $\vec{a} - 4\vec{b}$; 8)$2\vec{a} + 3\vec{b}$; 9) $3\vec{b} - 5\vec{a}$.

2. Нехай $A(1,2), B(-1,3), C(2,-2), D(-3,-1)$. Знайдіть: 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$; 4) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$; 5) $2\overrightarrow{AB}$; 6) $-3\overrightarrow{CD}$; 7) $\left|\overrightarrow{AB}\right|$; 8) $\left|\overrightarrow{CD}\right|$; 9)$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$; 10) $cos\,\angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$. Визначте чи: 11) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$; 12) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

3. Використовуючи правила скалярного множення, спростіть вирази: 1) $\left(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}\right)$; 2) $\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$; 3) $\left(3\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}, -\vec{a} + 3\vec{b}\right)$.

4. Наведіть приклад ненульових векторів площини, скалярний добуток яких дорівнює нулю.

5. Визначте тупий чи гострий кут утворюють вектори 1) $\vec{a} = (1,2), \vec{b} = (-3,2)$, 2) $\vec{a} = (7,2), \vec{b} = (0,-2)$.

6. Для довільного дійсного числа $a \neq 0$ справедлива рівність $\dfrac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, \text{якщо } a > 0, \\ -1, \text{якщо } a < 0. \end{cases}$ Що можна сказати про вираз $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$?

Контрольні задачі

1. Доведіть, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{A_1B_1}$ є рівними тоді і тільки тоді, коли середини відрізків AB_1 і A_1B співпадають.

2. Укажіть взаємне розміщення ненульових векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, для яких: 1) $(\vec{a}+\vec{b}) \perp (\vec{a}-\vec{b})$; 2) $|\vec{a}+\vec{b}| < |\vec{a}-\vec{b}|$.

3. Доведіть, що середини сторін довільного чотирикутника є вершинами паралелограма.

4. Назвемо *медіаною чотирикутника* відрізок, що сполучає одну з вершин із центром ваги трикутника, утвореного трьома іншими вершинами. Доведіть, що чотири медіани чотирикутника перетинаються в одній точці і діляться нею у відношенні $3 : 1$, рахуючи від вершини.

5. Дано паралелограм $ABCD$, точка K є серединою сторони BC, точка M ділить сторону CD у відношенні $DM : MC = 2 : 1$. Знайдіть за базисом $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \rangle$ розклад векторів $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CK}, \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{KM}$.

6. Знайдіть розклад вектора $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо 1) $\vec{a} = (-1,2)$, $\vec{b} = (4,3)$, $\vec{c} = (5,12)$; 2) $\vec{a} = (2,-3)$, $\vec{b} = (1,2)$, $\vec{c} = (9,4)$.

7. Знаючи координати середин $A_1(1,4), B_1(-1,0), C_1(3,2)$ сторін трикутника, знайдіть координати його вершин.

8. Дано три послідовні вершини трапеції $A(-2,-3), B(1,4), C(3,1)$. Знайдіть четверту вершину D цієї трапеції, точку M перетину її діагоналей та точку S перетину прямих, що містять бічні сторони, якщо довжина її основи AD у п'ять разів більша за довжину основи BC.

9. Доведіть, що точки $A(3,0), B(0,1), C(2,7), D(5,6)$ є послідовними вершинами прямокутника та знайдіть його площу.

10. Доведіть перпендикулярність векторів $(\vec{b},\vec{c})\vec{a} - (\vec{a},\vec{c})\vec{b}$ і $\vec{c}$.

11. За допомогою скалярного добутку доведіть нерівність трикутника
$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ для всіх $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

12. За допомогою скалярного добутку доведіть теорему Піфагора.

13. Доведіть, що квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними (*теорема косинусів*).

14. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ такі, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 60^\circ$. Знайдіть 1) $|2\vec{a}+\vec{b}|$, 2) $(2\vec{a}, \vec{a}-\vec{b})$.

15. Обчисліть довжини діагоналей та кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, якщо відомо, що 1) $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}, |\vec{q}| = 3, \angle(\vec{p},\vec{q}) = 45^\circ$; 2) $\vec{p} = (1,2)$, $\vec{q} = (3,-1)$.

16. Дано вектори $\vec{a} = (3, 1), \vec{b} = (1, -2), \vec{c} = (-1, 3)$. За якого значення k вектори $\vec{a} + k\vec{b}$ та $\vec{c}$: 1) однаково напрямлені; 2) перпендикулярні; 3) рівні за модулем?

17. На діагоналі AC ромба $ABCD$ взято точку K так, що $AK : KC = 1 : 2$, а на діагоналі BD – точку M так, що $BM : MD = 5 : 1$. Сторона ромба дорівнює 6 см, а $\angle ABD = 60^\circ$. Знайдіть довжину відрізка KM.

18. Медіани бічних сторін рівнобедреного трикутника перетинаються під кутом 60°. Знайдіть кут при вершині трикутника.

Використані джерела

1. Ильин В. А. Аналитическая геометрия. / В. А. Ильин, Э.Г. Позняк – М. : «Наука», главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 232 с.

2. Болтянський В. Г. Вектори в курсі геометрії середньої школи : посіб. для вчителів / В. Г. Болтянський, І. М. Яглом. – К. : Державне учбово-педагогічне виробництво «Радянська школа», 1964. – 89 с.

3. Гусятников П. Б. Векторная алгебра в примерах и задачах : уч. пособ. для вузов / П. Б. Гусятников, С. В. Резниченко. – М. : «Высшая школа», 1985. – 232 с.

4. Григорьев С. Г. Векторная алгебра и аналитическая геометрия : уч. пособ. по высшей математике / С. Г. Григорьев. – М. : Информационно-внедренческий центр «Маркетинг», 2000. – 120 с.

5. Збірник задач з аналітичної геометрії / за редакією В. В. Кириченка. – Кам'янець-Подільський: «Аксіома», 2005. – 228 с.

6. Говоров В. М. Збірник конкурсних задач з математики для абітурієнтів / В. М. Говоров, П. Т. Дибов, В. М. Мірошин, С. Ф. Смірнова. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2007. – 480 с.

Навчально-методичний посібник

ЛУКАШ Катерина Василівна
ПЕЧЕРИЦЯ Олексій Анатолійович
ПРИХОДЬКО Ольга Дмитрівна

ВЕКТОРИ ТА КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ

Формат 60х84/16. Друк цифровий.
Папір офсетний 80 г/м^2.