

Основи інтегрування

Теоретичні відомості:

Первісною функції $f(x)$ називають функцію $F(x)$, яка є розв'язком диференційного рівняння $F'(x) = f(x)$. Пишуть $F(x) = \int f(x) dx$. $F(x)$ - інтеграл функції $f(x)$, за змінною x . З означення бачимо, що інтеграл є оберненою операцією до похідної.

Інтегрування подібне до суми Σ , але з нескінченною кількістю доданків типу $f(x) dx$.

Важливі властивості:

- $\int (f(x) + g(x))dx = F(x) + G(x)$
- $\int kf(x)dx = kF(x)$
- $\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b)$
- $\int f(x)d(g(x)) = f(x) * g(x) - \int g(x)d(f(x))$

Задачі:

1. Знайти довжину пружини масою 500 г, коефіцієнтом жорсткості 320 Н/м та довжиною у нерозтягнутому стані 10 см, якщо її поставити вертикально.
2. Вам напевно добре відома формула площі круга $S = \pi r^2$. Спробуйте довести її, відштовхуючись від того факту, що довжина окружності $l = 2\pi r$. А як із площі круга S отримати довжину окружності l ?
3. Спробуйте обчислити об'єм та площу поверхні сфери.
4. Для функції $f(x)$ знайдіть її первісну, яка пройде через точку:
 - $\frac{1}{x^2}, F(1/5) = -10$
 - $\sqrt{x}, F(2) = 0$
 - $2^x, F(1) = 2$
5. Краплина води маси m у формі шару починає падати в полі тяжіння Землі і поступово випаровується із швидкістю $\frac{dm}{dt} = -S\mu$, де S – площа поверхні, а μ – деяка додатня константа. Знайдіть час повного випаровування краплини і роботу поля тяжіння при цьому. Сили опору повітря поступилися перед красою цієї задачі і можуть не враховуватись.

6*. Маленька кулька маси m починає скочуватись з поверхні гладкого циліндра радіусом R . Знайдіть точку відриву та швидкість кульки при цьому.

