

Границі

Теоретичні відомості:

ε -околом числа a називають множину чисел x , такі що $|x - a| < \varepsilon$ (коли треба ввести декілька околів беруть ε та δ)

Означення границі за Коші: кажуть, що функція $f(x)$ має границю в точці x_0 , якщо існує такий δ -оکیل точки x_0 , для x з котрого, значення $f(x)$ належать деякому ε -околу точки a . Тоді точку a називають границею функції $f(x)$. Записують $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$

Важливі границі та наближення:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (перша чудова границя)
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \approx 2.718$ (друга чудова границя)

При $x \rightarrow 0$ наближено (так звані асимптотичні наближення):

- $x \approx \sin x \approx \tan x \approx \ln(1 + x)$
- $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$
- $e^x \approx 1 + x$
- $(1 + x)^a \approx 1 + ax$

Вправи:

1. Дано 2 функції $f(x)$ та $g(x)$, у яких існують границі при $x \rightarrow x_0$, рівні a та b відповідно. Доведіть за означенням, що:
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = a + b$
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) * g(x) = a * b$
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)
2. Доведіть єдиність існування границі методом від супротивного
3. Знайдіть наступні границі:
 - $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-x-6}$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{3x+1}{3x})^{x-1}$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2+x-2}$
4. Приведіть приклади таких функцій $f(x)$, для яких виконується:
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, де b – довільна константа
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, де a – довільна константа
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ не існує
- 5*. Знайдіть такі границі (n та m - натуральні):
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1}$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n})$