1. Векторні та скалярні величини. Операції з векторами: множення на число, додавання та віднімання.

Векторні та скалярні величини:

Скаляр (від слова scale – шкала) величини, які можуть бути охарактеризовані одним числом – відміткою на шкалі приладу. Математична модель показу шкали – число, що належить множині дійсних чисел. Прикладами є: час (прилад – годинник), довжина (прилад – лінійка), температура (прилад – термометр), тощо.

Приклад запитання, в якому використовуються скалярні величини: температура тіла була 20°С. Після нагрівання температура збільшилася на 10°. Якою стала температура тіла?

Відповідь: 20+10=30(°С).

Основні операції зі скалярними величинами добре відомі з курсу математики, це **додавання** (віднімання) та **множення**.

Вектор. Для повного задання деяких фізичних величин недостатньо одного значення. Так, наприклад, швидкість і сила характеризуються не тільки значенням, але й напрямком. Для задання таких величин необхідно введення декількох скалярних величин одночасно. Частіше за все **вектор** представляють за допомогою **стрілки**. Для задання вектора на площині необхідні два числа, наприклад проекції стрілки на дві координатні осі.

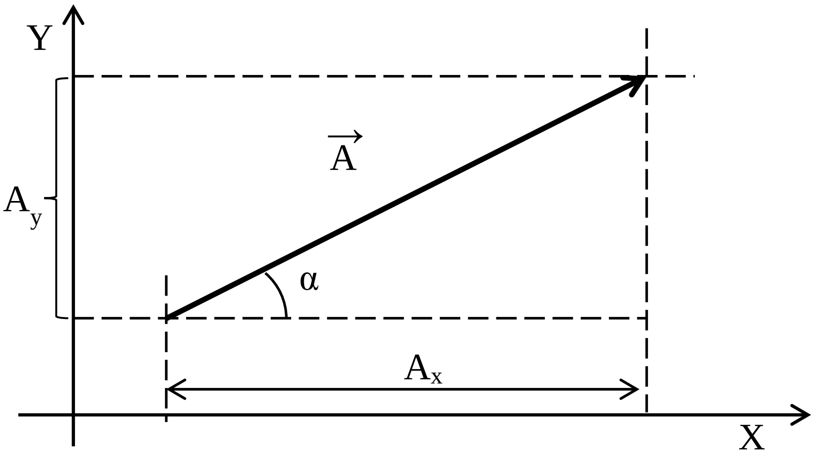


Рис.1. Вектор на площині. Представлення вектора у вигляді стрілки.

Проекції вектора $\vec{A}$: A_x та A_y.

У більш загальному випадку вектор задається трьома числами – **проекціями** на три просторові осі: X, Y, Z, а саме $\vec{A}\equiv\{A_x, A_y, A_z\}$.

Звичайно, внаслідок теореми Піфагора, довжину вектора можна визначити так:

$$|\vec{A}|=A_x^2+A_y^2+A_z^2 \equiv A,$$

а проекції вектора на осі, за допомогою синусів та косинусів (див. Рис.1.):

$$A_x= A\cdot\cos\alpha;\ \ A_y= A\cdot\sin\alpha;$$

Для роботи з векторами існують подібні, але дещо відмінні від скалярних операції – додавання та множення.

Так вектори можна **множити** на число:

Маємо вектор $\vec{A}=\{A_x, A_y, A_z\}$ нехай $\vec{B}=\alpha\vec{A}$, тоді $\vec{B}=\{\alpha B_x, \alpha B_y, \alpha B_z\}$, тобто вектор $\vec{B}$ в α разів довший ніж $\vec{A}$ і є добутком вектра $\vec{A}$ на число.

Вектори можна **додавати**:

Маємо вектори $\vec{A}=\{A_x, A_y, A_z\}$ та $\vec{B}=\{B_x, B_y, B_z\}$ нехай $\vec{C}=\vec{A}\pm\vec{B}$, тоді $\vec{C}\equiv\{A_x \pm B_x, A_y \pm B_y, A_z \pm B_z\}$, тобто відповідні проекції додаються. Зрозуміло (див. Рис.2.), що графічно можна додати вектори за правилом трикутника

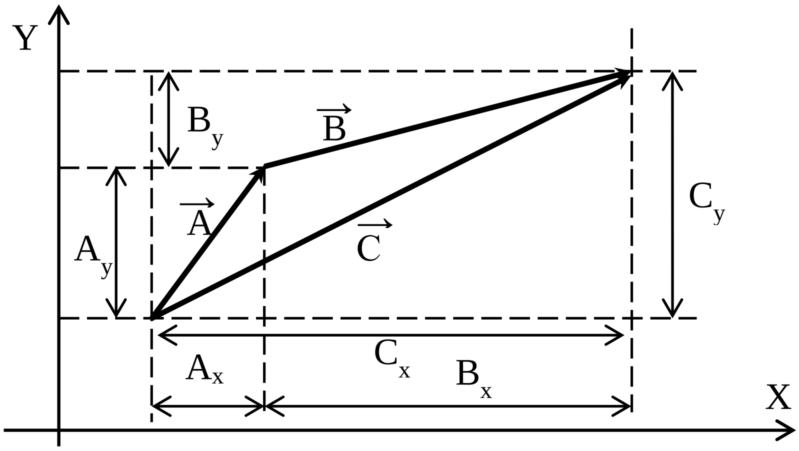


Рис.2. Додавання векторів – правило трикутника, та додавання проекцій.

або паралелограму (див. Рис.3.).

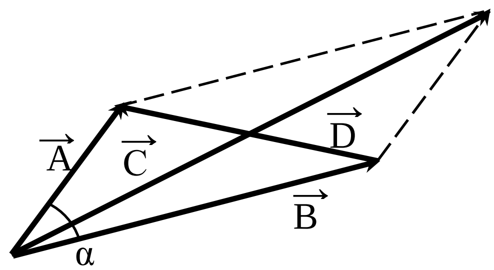


Рис.3. Додавання та віднімання векторів – правило паралелограму:

$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B};\quad \vec{D}=\vec{A}-\vec{B}.$$

Модулі векторів суми або різниці двох векторів співвідносяться так:

$$C^2=\vec{C}^2=(\vec{A}+\vec{B})^2=A^2+B^2+2\cdot A\cdot B\cdot\cos\alpha$$

$$D^2=\vec{D}^2=(\vec{A}-\vec{B})^2=A^2+B^2-2\cdot A\cdot B\cdot\cos\alpha$$

що відповідає теоремі косинусів. У частинних випадках:

$\vec{A}\uparrow\uparrow\vec{B}$: C=A+B одно напрямлені вектори (α=0 cosα = 1);

$\vec{A}\uparrow\downarrow\vec{B}$: C=A–B протилежно напрямлені вектори (α=180 cosα = –1);

$\vec{A}\perp\vec{B}$: $C^2=A^2+B^2$ ортогональні вектори – теорема Піфагора (α=90 cosα = 0).

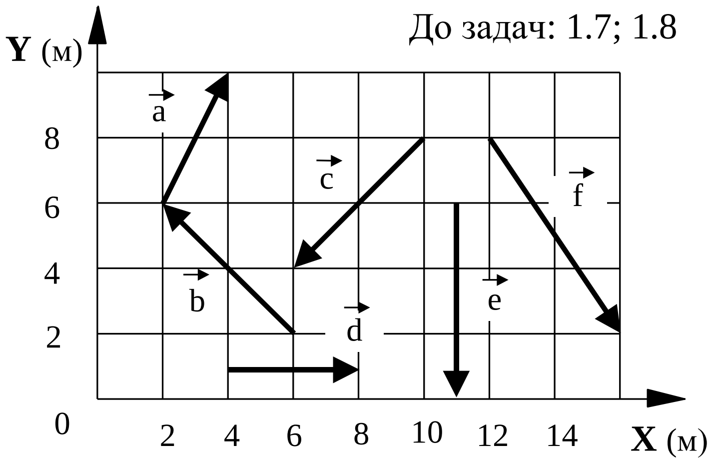
Завдання для закріплення теоретичного матеріалу:

1.1. Визначити напрямок та величину суми двох векторів модулі яких дорівнюють 3 і 4 відповідно, у наступних випадках:
а) вектори спрямовані в одному напрямку;
б) вектори спрямовані у протилежних напрямках;
в) вектори перпендикулярні один одному;
г) вектор суми є перпендикулярним до першого вектора.

1.2. Обрати та за допомогою рисунку та додати два вектори однакової довжини a так, щоб вектор їх суми за довжиною дорівнював:
а) нулю;
б) був вдвічі більший a;
в) мав таку ж саму довжину a;
г) мав довжину в $\sqrt{2}$ разів більшу a.

1.3. Графічно побудувати три сили однакового значення F, щоб рівнодійна дорівнювала:
а) нулю;
б) $\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot F$;
в) $\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot F$;
г) $\sqrt{3}\cdot F$.

1.4. Знайти проекції векторів на координатні осі та визначити довжину векторів. (див. рис.)



1.5. Знайти напрямок та величину наступних векторних виразів. Зобразити вказані вектори графічно (див. рис. попередньої задачі):
а) $\vec{c}+\vec{d},\ \ \vec{c}+\vec{b},\ \ \vec{d}+\vec{f},\ \ \vec{c}+\vec{a},\ \ \vec{d}+\vec{b},\ \ \vec{c}+\vec{f}$;
б) $\vec{a}-\vec{b},\ \ \vec{c}-\vec{b},\ \ \vec{e}-\vec{f},\ \ \vec{a}-\vec{c},\ \ \vec{c}-\vec{b},\ \ \vec{d}-\vec{f}$;
в) $2\cdot\vec{d},\ \ \dfrac{\vec{b}}{2},\ \ \dfrac{\vec{e}}{3},\ \ \vec{d}+\vec{e}-\vec{f},\ \ 2\cdot\left(\vec{b}+\vec{f}\right),\ \ -\vec{c}$.

2. Координати точок та векторів

Широко використовується задання положення точки, як ***радіус-вектора*** $\vec{r}$. За визначенням: $\vec{r}\equiv\{x, y, z\}$, тобто цей вектор з'єднує початок координат та точку, яка розглядається (М). Таким чином проекції радіус вектора співпадають з **координатами точки**: *M= {x, y, z}* $\vec{r}$ = *{x, y, z}*

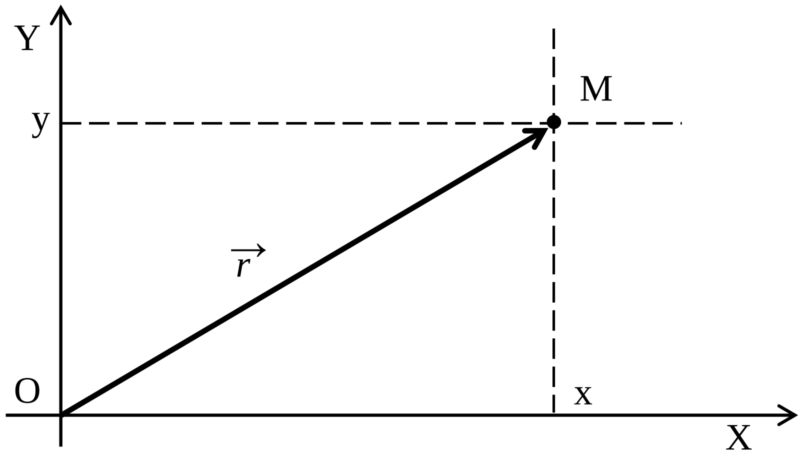


Рис.1. Радіус-вектор $\vec{r}$ *на площині та його проекції.*

Довільний вектор задається координатами двох точок – початку (т.О для радіус-вектора) та кінця – т.М. Але при виконанні більшості операцій з векторами, з якими працюють фізики, вектори вважаються вільними, тобто початок вектора може бути обраний довільним, а перенесення вектора відбувається **паралельно самому собі** – без зміни довжини та напрямку. В такому разі проекції векторів на координатні осі можна вважати координатами векторів. Вільні вектори, що мають однакову довжину та напрямок вважаються рівними, зрозуміло, що вони мають однакові компоненти – проекції.

3. Скалярний та векторний добуток векторів

Якщо одна векторна величина пропорційна іншій, то для її знаходження використовується множення вектора на число. Але деякі векторні величини можуть бути пропорційними двом векторним величинам. Тоді, якщо ця величина скаляр – використовується **скалярний**, а якщо вектор – **векторний добутки** векторів.

За визначенням:

Скалярним добутком двох векторів $\vec{A}$ і $\vec{B}$ називається число C таке, що:

$$C = (\vec{A},\vec{B}) = A \cdot B \cdot \cos\alpha$$

З використанням координат, маємо:

$$C = (\vec{A},\vec{B}) = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z\,.$$

Векторним добутком двох векторів $\vec{A}$ і $\vec{B}$ називається вектор $\vec{D}$ такий, що:

$$\vec{D} = [\vec{A},\vec{B}];\ D = A \cdot B \cdot \sin\alpha$$

За напрямком вектор $\vec{D}$ є перпендикулярним кожному з векторів $\vec{A}$ і $\vec{B}$ та напрямлений так, щоб утворювати праву трійку $\vec{A},\vec{B},\vec{D}$ (див. Рис.4.).

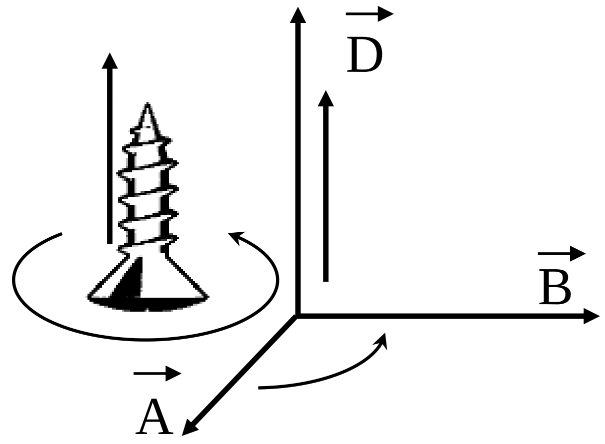


Рис.4. Визначення напрямку вектора $\vec{D}$*, який є векторним добутком векторів* $\vec{A}$ і $\vec{B}$ (правило правого гвинта або свердлика).

Визначене правило утворення **скалярного добутку** дозволяє знаходити **довжини** векторів, а також **кути** між двома векторами.

$$(\vec{A},\vec{A})=A; \quad \cos\alpha = (\vec{A},\vec{B})/(|\vec{A}||\vec{B}|).$$

Визначене правило утворення **векторного добутку** дозволяє знаходити площу паралелограму утвореного двома векторами $\vec{A}$ і $\vec{B}$.

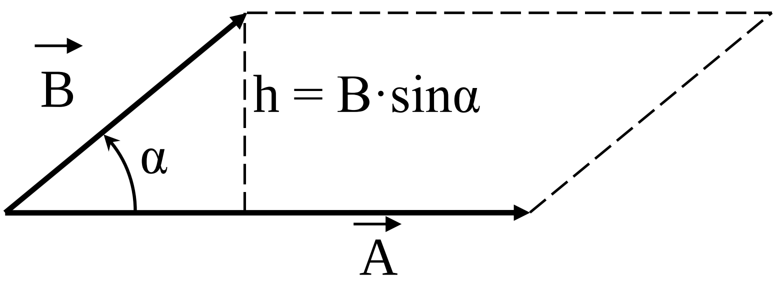


Рис.5. Визначення геометричного змісту вектора векторного добутку $\vec{D}$ *– це . площа паралелограму, який побудовано на векторах* $\vec{A}$ *і* $\vec{B}$.

4. Приклади вживання скалярного та векторного добутків в фізиці

1) Робота, як скалярний добуток сили та переміщення:

$$A = (\vec{F}, \vec{s}) = F\cdot s\cdot\cos\alpha$$

2) Потужність, як скалярний добуток сили та швидкості:

$$P = (\vec{F}, \vec{v}) = F\cdot v\cdot\cos\alpha$$

3) Потік магнітної індукції, як скалярний добуток магнітної індукції та вектора площадки:

$$\Phi = (\vec{B}, \vec{s}) = B\cdot s\cdot\cos\alpha$$

Примітка*: вектор площадки дорівнює за величиною площі обраної площадки* *та напрямлений перпендикулярно цій площадці. За величиною потік магнітної індукції характеризує кількість ліній магнітної індукції, що перетинають обрану площадку. Магнітна же індукція – відноситься до одиничної площадки.*

4) Момент сили, як векторний добуток радіус-вектора та сили:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}];\ M = F\cdot r\cdot \sin\alpha = F\cdot d$$

5) Момент імпульсу, як векторний добуток радіус-вектора та імпульсу:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}];\ L = p\cdot r\cdot \sin\alpha = p\cdot d$$

Примітка*: вектори* $\vec{M}$ *– моменту сили та* $\vec{L}$ *– моменту імпульсу визначають обертальний рух тіла, аналогічно векторам сили* $\vec{F}$ *та імпульсу* $\vec{p}$, які визначають поступальний рух тіла.

6) Сила Лоренця, як векторний добуток швидкості та магнітної індукції:

$$\vec{F} = q\cdot[\vec{v}, \vec{B}];\ F = q\cdot v\cdot B\cdot \sin\alpha$$

7) Сила Коріоліса, як векторний добуток швидкості та магнітної індукції:

$$\vec{F} = 2m\cdot[\vec{v}, \vec{\Omega}];\ F = 2\cdot m\cdot v\cdot \Omega\cdot \sin\alpha$$

Примітка*: вектор* $\vec{\Omega}$ *– вектор кутової швидкості – напрямлений вздовж осі обертання за правилом правого гвинта.*