2 Матриці

2.1 Означення. Матрицею називається таблиця, що складається із елементів a_{ij}, розташованих у m рядках і n стовпцях. Якщо a_{ij} - числа, то матриця називається числовою.

Вимірність матриці позначається $m \times n$. Матриці позначають великими літерами *A, B* тощо. Наприклад,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ - матриця вимірності 2×3, оскільки є два рядки і три стовпці.

Якщо $m = n$, то матриця називається квадратною і замість вимірності матриці кажуть порядок матриці, наприклад, квадратна матриця *n*-го порядку має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Для квадратної матриці можна обчислити визначник $\Delta = \det A$.

Якщо $\det A \neq 0$, то матриця називається невиродженою, якщо $\det A = 0$, то A – вироджена матриця.

Зауваження. Позначення квадратної матриці і її визначника – різні. Матрицю записують за допомогою круглих дужок, скорочено: $A = (a_{ij}),\ i, j = 1,2,...,n$. Визначник матриці A записують за допомогою прямих дужок, скорочено: $\det A = \left| a_{ij} \right|,\ i, j = 1,2,...,n$.

Квадратна матриця називається діагональною, якщо усі елементи матриці, крім елементів, що стоять на головній діагоналі, є нулі:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Діагональна матриця називається одиничною, якщо всі елементи, що стоять на головній діагоналі $d_{kk} = 1,\ k = \overline{1, n}$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця називається нульовою, якщо усі її елементи – нулі: $a_{ij} = 0,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця *A* називається стовпцевою, якщо її вимірність $m \times 1$. Матриця *B* називається рядковою, якщо її вимірність $1 \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \qquad B = (a_{11} \quad a_{12} \quad \ldots \quad a_{1n}).$$

Матриця *A* дорівнює матриці *B*, тобто *A*=*B*, якщо вимірності матриць однакові і кожен елемент матриці *A* дорівнює відповідному елементу матриці *B*, тобто $a_{ij} = b_{ij}$ для всіх *i* та *j*.

2.2 Дії над матрицями

2.2.1 Додавання матриць.

Сумою C матриць A та B однакової вимірності називається матриця, кожен елемент якої є сумою відповідних елементів матриць A та B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1,2,\ldots,n; \quad j = 1,2,\ldots,m.$$

Приклад № 4. Знайти суму матриць

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Вимірності матриць A та B: $m \times n = 3 \times 2$ - однакові. Тому можна знайти їх суму. Маємо

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 3+4 \\ 1+2 & 2-3 \\ 5-4 & 7+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Множення матриці на число.

При множення матриці на число λ потрібно кожен елемент матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

помножити на це число:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Приклад № 5. Знайти –3А, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. У цьому прикладі λ=-3. Маємо:

$$-3A = -3\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -12 & 6 & 3 \\ -9 & 6 & -3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Наслідок. За знак матриці *А* можна виносити число тільки тоді, коли це число є множником <u>кожного</u> елемента матриці *А*.

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \left| \begin{matrix} \text{Число 2 є множником} \\ \text{усіх елементів матриці} \end{matrix} \right| = 2\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.2.3 Множення двох матриць

Матрицю *А* можна помножити на матрицю *В*, якщо кількість стовпців матриці *А* дорівнює кількості рядків матриці *В*, тобто якщо вимірність матриці *А* $m \times k$, а матриці *В* - $k \times n$, тоді вимірність матриці *С* така:

$$(a_{ij})_{m \times \underline{k}} \cdot (b_{ij})_{\underline{k} \times n} = (c_{ij})_{m \times n}.$$

Елемент c_{ij} матриці $C = A \cdot B$ дорівнює сумі добутків елементів *i*-го рядка матриці *А* на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці *В*:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}. \quad (1.7)$$

Приклад № 6. Знайти добуток матриць

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Вимірність матриці A: 2×3; вимірність матриці B: 3×4. Тоді 2×4 - вимірність матриці $C=A\cdot B$. Отже, матриці A та B можна перемножити. Дістаємо:

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}=\left|\begin{matrix}\text{Використовуємо} \\ \text{формули (1.7)}\end{matrix}\right|=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot4+3\cdot(-1)+1\cdot0 & 2\cdot0+3\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot(-1)+3\cdot0+1\cdot(-1) & 2\cdot2+3\cdot1+1\cdot(-2) \\ -2\cdot4+2\cdot(-1)+(-1)\cdot0 & -2\cdot0+2\cdot2+(-1)\cdot1 & -2\cdot(-1)+2\cdot0+(-1)\cdot(-1) & -2\cdot2+2\cdot1+(-1)\cdot(-2) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 8-3 & 6+1 & -2-1 & 4+3-2 \\ -8-2 & 4-1 & 2+1 & -4+2+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & 5 \\ -10 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауваження. **1.** Квадратні матриці одного порядку можна завжди перемножати.

2. Добуток матриць A та B залежить від того, яка матриця є першим множником, тобто у загальному випадку

$$A\cdot B\neq B\cdot A.$$

2.2.4 Обернена матриця

Оберненою матрицею до квадратної матриці A називається матриця A^{-1}, що задовольняє умову

$$A^{-1}A=AA^{-1}=E.$$

При цьому $\det A\neq0$.

Обернена матриця A^{-1} до матриці A $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

третього порядку обчислюється за формулою

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{31} \\ A_{21} & A_{22} & A_{32} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad (1.8)$$

де $A_{ij}\,(i,\ j=1,2,3)$ - алгебраїчні доповнення відповідних елементів a_{ij} визначника матриці A:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Приклад № 7. Знайти матрицю, обернену до матриці A, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Застосовуємо формулу (1.8). Знайдемо визначник матриці A. Маємо

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0-2-3-0-12-1=-18\neq 0.$$

Обернена матриця існує. Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів визначника матриці A. Дістаємо

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-6; \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-(1-(-2))=-3;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{vmatrix}=3; \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-(1+3)=-4;$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2-1=1 \quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-(6+1)=-7;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(4+1)=-5$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1.$$

Тоді

$$A^{-1}=-\frac{1}{18}\begin{pmatrix}-6 & -4 & 2\\ -3 & 1 & -5\\ 3 & -7 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{6}{18} & \frac{4}{18} & -\frac{2}{18}\\ \frac{3}{18} & -\frac{1}{18} & \frac{5}{18}\\ -\frac{3}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{18} & \frac{5}{18}\\ -\frac{1}{6} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18}\end{pmatrix}.$$

Приклад № 8. Знайти матрицю X, якщо $AX=B$ і $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

. Помножимо обидві частини рівняння $AX=B$ на матрицю A^{-1}. Тоді $A^{-1}\ AX=\ A^{-1}B$ або $X=A^{-1}B$, оскільки $A^{-1}\ A=E$ і $EX=E$. Знаходимо A^{-1}. Маємо $\det A=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-4-2=-6.$

Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів визначника матриці A. Дістаємо

$$A_{11} = -1, \quad A_{12} = -2, \quad A_{21} = -1, \quad A_{22} = 4.$$

Маємо $A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Тоді $X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3+1 & 1+0 \\ 6-4 & 2-0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3. \end{cases} \tag{1.9}$$

називається неоднорідною, якщо принаймні одна із правих частин рівнянь h_i, $i = 1, 2, 3,$ не дорівнює нулю. Якщо всі $h_1 = h_2 = h_3 = 0$, то така система називається однорідною. Коефіцієнти системи a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$ - числа, x_1, x_2, x_3 - невідомі.

Кількість рівнянь визначає порядок системи. Система (1.9) – система третього порядку.

Визначник, складений із коефіцієнтів при невідомих, називається головним визначником системи (1.9):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{1.10}$$

3.1 Розв'язання неоднорідної системи лінійних рівнянь, якщо $\Delta \neq 0$.

Якщо $\Delta \neq 0$, то існує єдиний розв'язок x_1, x_2, x_3 системи (1.10), який можна знайти

- за формулами Крамера;