Приклад № 9. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1; 0; -1)$ і пряму $x = 2t - 1,\ y = -t + 2,\ z = -2t + 3$.

Розв'язання. За умовою задачі напрямний вектор заданої прямої $\vec{S} = \{2; -1; -2\}$ лежить у шуканій площині Q (рис. 4).

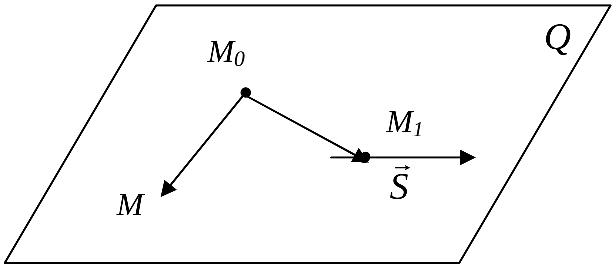


Рис. 4

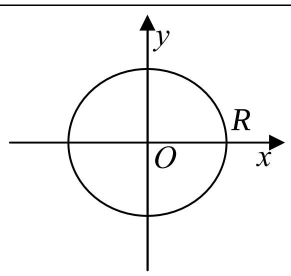
На заданій прямій лежить точка $M_1(-1; 2; 3)$. Визначаємо вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = \{-2; 2; 4\}$.

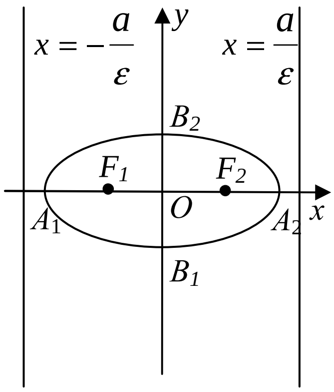
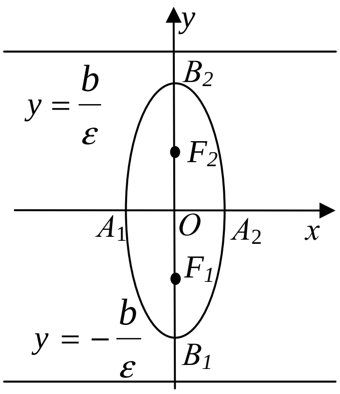
Вибираємо у шуканій площині біжучу точку $M(x; y;\ z)$ і визначаємо вектор $\overrightarrow{M_0M}$. Маємо $\overrightarrow{M_0M} = \{x-1;\ y;\ z+1\}$. Три вектори $\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M_1}, \vec{S}$ лежать в одній площині, тобто вони компланарні. За умовою компланарності трьох векторів маємо

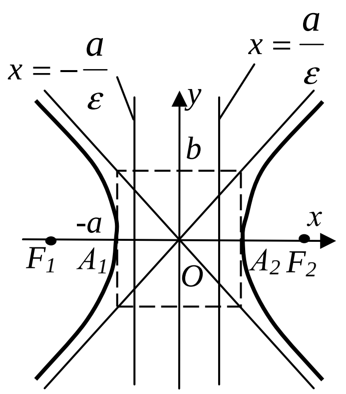
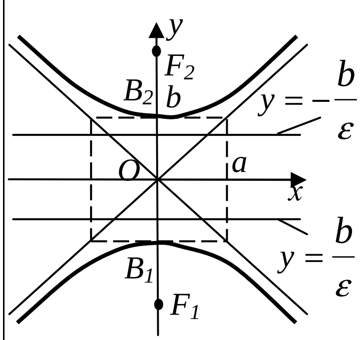
$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{або} \quad 0\cdot(x-1) - 4y + 2\cdot(z+1) = 0.$$

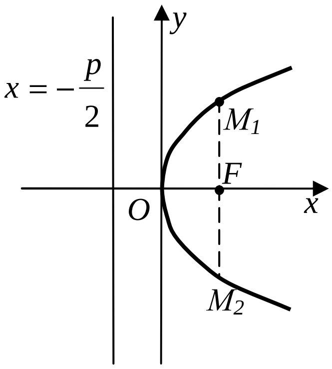
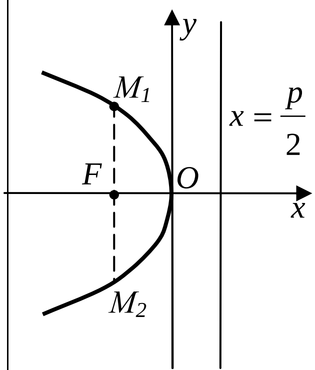
Звідки $2y - z - 1 = 0$ - шукане рівняння площини.

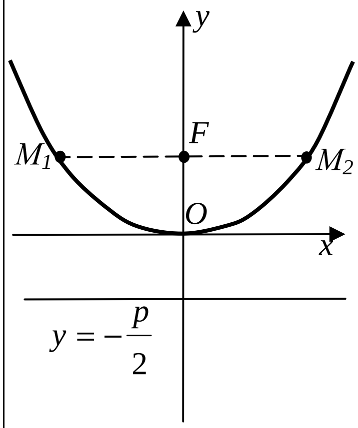
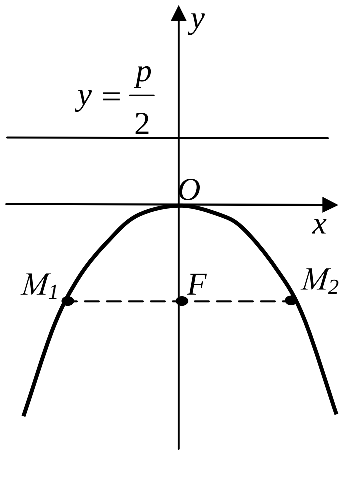
5 Криві другого порядку

Коло	$x^2 + y^2 = R^2$		Центр кола $O(0; 0)$, R – радіус кола

Еліпс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$a>b$  	Центр еліпса - $O(0; 0)$; $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ – вершини еліпса, $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ – фокуси; $2a$ – велика вісь, $2b$ – мала вісь, $a>b$, $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $0<\varepsilon<1$ - ексцентриситет; $a^2=b^2+c^2$, $a>c$; $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ - рівняння директрис.
		$b>a$  	Центр еліпса - $O(0; 0)$; $b>a$; $2a$ – мала вісь; $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$ – фокуси; $b^2=a^2+c^2$, $b>c$, $\varepsilon=\frac{c}{b}$, $0<\varepsilon<1$ - ексцентриситет; $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$ - рівняння директрис.

Гіпер-бола	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$		Центр гіперболи - $O(0; 0)$; $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ – фокуси; $2a$ – дійсна вісь, $2b$ – уявна вісь, $c^2=a^2+b^2$, $c>a$;, $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $\varepsilon>1$ - ексцентриситет; $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ - рівняння директрис. $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ – вершини, $y=\pm\frac{b}{a}x$ - рівняння асимптот.
	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$		Спряжена гіпербола. $O(0; 0)$ – центр; $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$ – фокуси; $2a$ – уявна вісь, $2b$ – дійсна вісь, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ – вершини, $c^2=a^2+b^2$, $c>b$; $\varepsilon=\frac{c}{b}$, $\varepsilon>1$ - ексцентриситет; $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$ - рівняння директрис; $y=\pm\frac{b}{a}x$ - рівняння асимптот.

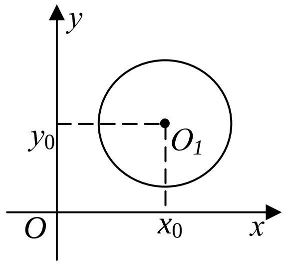
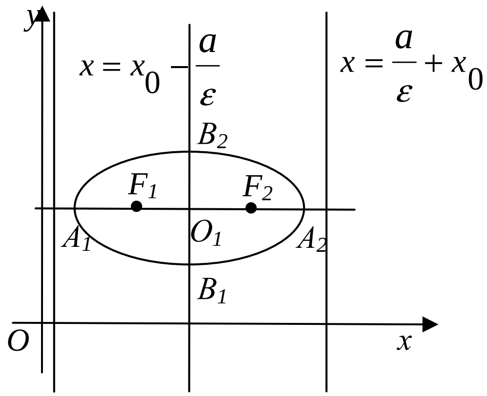
Пара бола	$y^2 = 2px$, $p > 0$		Вершина параболи - $O(0; 0)$; $p>0$ – параметр; $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ - фокус; $x = -\frac{p}{2}$ - рівняння директриси; $M_1\left(\frac{p}{2};p\right), M_2\left(\frac{p}{2};-p\right)$ - точки перетину фокальної хорди з параболою. Гілки параболи – вздовж додатного напряму осі Ox
	$y^2 = -2px$, $p > 0$		Вершина параболи - $O(0; 0)$; $p>0$ – параметр; $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$ - фокус; $x = \frac{p}{2}$ - рівняння директриси; $M_1\left(-\frac{p}{2};p\right), M_2\left(-\frac{p}{2};-p\right)$ - точки перетину фокальної хорди з параболою. Гілки параболи – вздовж від'ємного напряму осі Ox

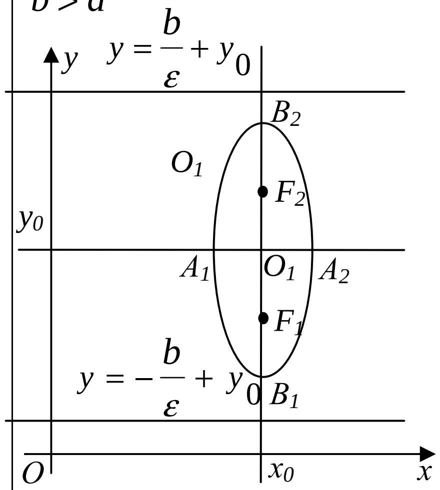
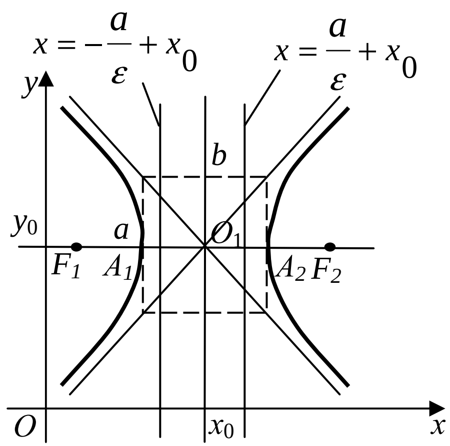
	$x^2 = 2py$, $p > 0$		Вершина параболи - $O(0;\ 0)$; $p>0$ – параметр; $F\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$ - фокус; $y = -\frac{p}{2}$ - рівняння директриси; $M_1\left(-p; \frac{p}{2}\right), M_2\left(p;\ \frac{p}{2}\right)$ - точки перетину фокальної хорди з параболою. Гілки параболи – вздовж додатного напряму осі *Oy*
	$x^2 = -2py$, $p > 0$		Вершина параболи - $O(0;\ 0)$; $p>0$ – параметр; $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$ - фокус; $y = \frac{p}{2}$ - рівняння директриси; $M_1\left(-p; -\frac{p}{2}\right), M_2\left(p; -\frac{p}{2}\right)$ - точки перетину фокальної хорди з параболою. Гілки параболи – вздовж від'ємного напряму осі *Oy*

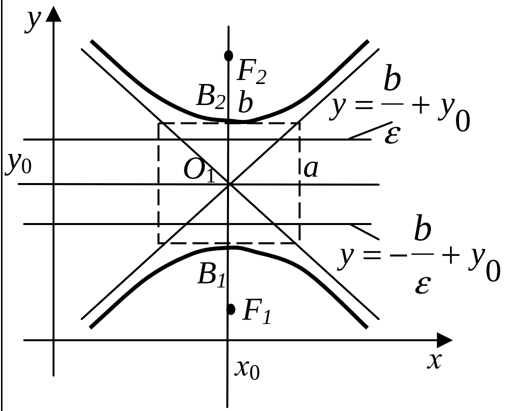
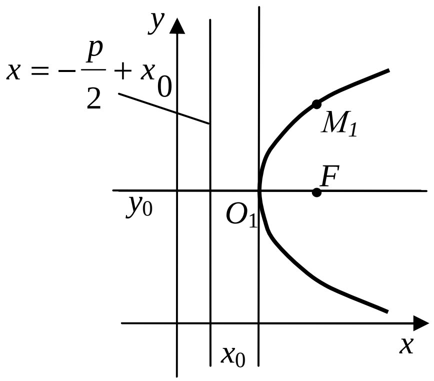
Загальне рівняння кривих другого порядку:

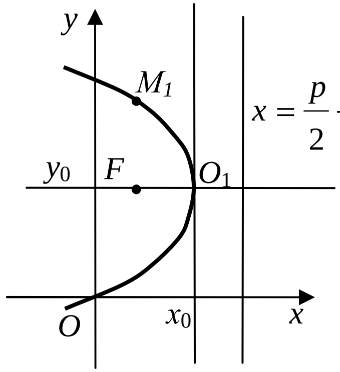
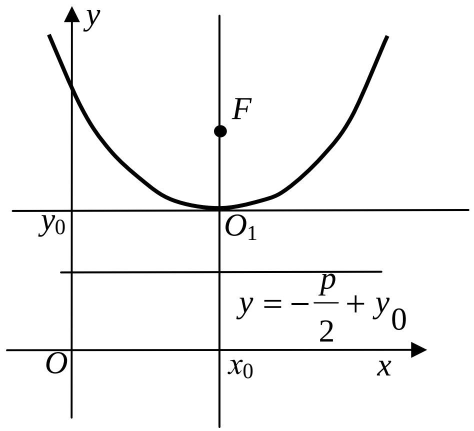
$$Ax^2 + Cy^2 + 2Ex + 2Ey + F = 0$$

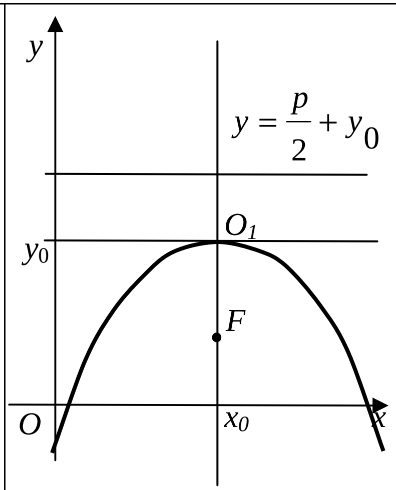
Після виділення повних квадратів дістаємо рівняння зсунутих кривих.

Коло AC>0 (A=C)	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$	 	Центр кола $O_1(x_0; y_0)$, R – радіус кола
Еліпс AC>0	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	*a>b*  	Центр еліпса - $O_1(x_0;y_0)$, $A_1(-a+x_0;y_0)$, $A_2(a+x_0;y_0)$, $B_1(x_0; -b+ y_0)$, $B_2(x_0; b+ y_0)$ – вершини еліпса, $F_1(-c+x_0; b_0)$, $(c+x_0; b_0)$ – фокуси; $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $0 < \varepsilon < 1$ - ексцентриситет; $a^2 = b^2 + c^2$, $a > c$; $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} + x_0$ - рівняння директрис.

		$b > a$ 	Центр еліпса - $O_1(x_0;\ y_0)$, $A_1(-a+x_0;y_0)$, $A_2(a+x_0;y_0)$, $B_1(x_0;\ -b+y_0)$, $B_2(x_0;\ b+y_0)$ – вершини еліпса, $F_1(x_0;\ -c+y_0)$, $F_2(x_0;\ c+\ y_0)$ – фокуси; $\varepsilon = \frac{c}{b}$, $0 < \varepsilon < 1$ - ексцентриситет; $b^2 = a^2 + c^2$, $b > c$; $y = \pm\frac{b}{\varepsilon} + y_0$ - рівняння директрис.
Гіпер-бола $AC<0$	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$		Гіпербола з центром в точці $O_1(x_0;\ y_0)$; $F_1(-c+x_0;\ y_0)$, $F_2(c+x_0;\ y_0)$ – фокуси; $A_1(-a+x_0;y_0)$, $A_2(a+x_0;y_0)$ – вершини, $c^2 = a^2 + b^2$, $c > a$; $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $\varepsilon > 1$ - ексцентриситет; $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} + x_0$ - рівняння директрис, $y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$ - рівняння асимптот.

	$\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}-\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}=1$		Центр гіперболи $O_1(x_0;\ y_0)$; $F_1(x_0; -c+\ y_0)$, $F_2(x_0;\ c+y_0)$ – фокуси; $B_1(x_0;\ -b+y_0)$, $B_2(x_0;b+y_0)$ – вершини; $\varepsilon=\frac{c}{b}$, $\varepsilon>1$ - ексцентриситет; $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}+y_0$ - рівняння директрис, $y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)$ - рівняння асимптот.
Пара-бола AC=0, $\begin{pmatrix}A=0,\\ C\neq 0\end{pmatrix}$	$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$, $p>0$		Вершина параболи – $O_1(x_0; y_0)$; $F\left(\frac{p}{2}+x_0; y_0\right)$ - фокус; $x=-\frac{p}{2}+x_0$ - рівняння директриси; вісь симетрії – пряма $y=y_0$.

	$(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)$, $p>0$		Вершина параболи – $O_1(x_0;\, y_0)$; $p>0$ – параметр; $F\left(-\frac{p}{2}+x_0;y_0\right)$ - фокус; $x=\frac{p}{2}+x_0$ - рівняння директриси; вісь симетрії – пряма $y=y_0$.
$A\neq 0$, $C=0$	$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$, $p>0$		Вершина параболи - $O_1(x_0;\, y_0)$; $F\left(x_0;\frac{p}{2}+y_0\right)$ - фокус; $y=-\frac{p}{2}+y_0$ - рівняння директриси; вісь симетрії – пряма $x=x_0$.

	$(x-x_0)^2=-2p(y-y_0)$, $p>0$		Вершина параболи - $O_1(x_0; y_0)$; $F\left(x_0;-\frac{p}{2}+y_0\right)$ - фокус; $y=\frac{p}{2}+y_0$ - рівняння директриси; вісь симетрії – пряма $x=x_0$.і

Приклад № 10. Дано точки $A(6; 4)$, $B(0; -4)$. Записати рівняння кола, діаметром якого є відрізок AB.

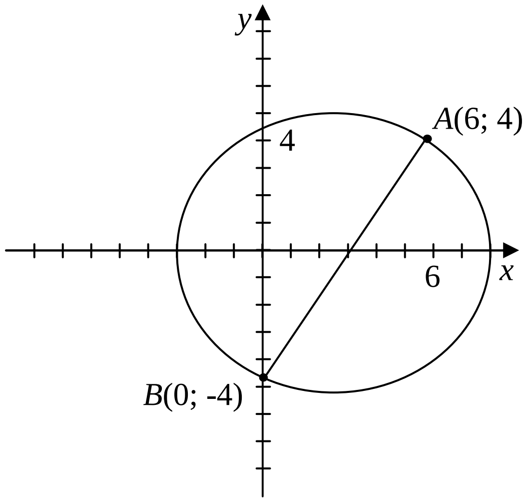


Рис. 5

Розв'язання. Рівняння кола має вигляд $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ (рис. 5). Знаходимо діаметр кола. Маємо

$$|AB| = \sqrt{(6-0)^2 + (4+4)^2} = 10.\ \text{Тоді}\ R = \frac{|AB|}{2} = 5.$$

Центр кола знаходиться в точці $O_1(x_0; y_0)$ – посередині відрізка AB. Тому

$$x_{O_1} = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_{O_1} = \frac{6+0}{2} = 3;$$

$$y_{O_1} = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_{O_1} = \frac{4-4}{2} = 0.$$

Отже, $O_1(3; 0)$ і рівняння шуканого кола має вигляд $(x-3)^2 + y^2 = 25$.

6 Полярна система координат

Полярна система координат визначається деякою точкою O – полюсом, променем, що починається в точці O – полярною віссю, і масштабною одиницею на полярній осі.

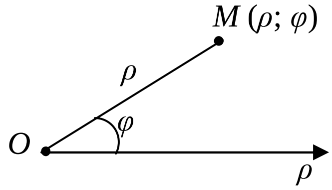


Рис. 6

Точка M на площині визначається координатами ρ та φ, де ρ – відстань від