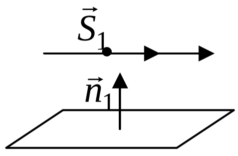
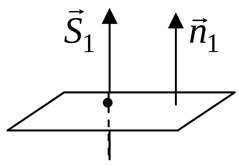
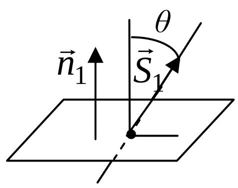
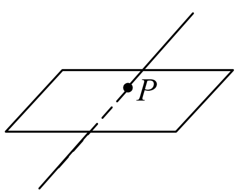
4 Взаємне розташування прямої та площини у просторі

Пряма $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p}$, площина $Ax+By+Cz+D=0$

Деякі відомості про взаємне розташування прямої та площини у просторі

$Al+Bm+Cp=0,$ $\vec{S}=\{l;m;p\},$ $\vec{n}=\{A;B;C\},$ $\vec{n}\cdot\vec{S}=0.$		Умова паралельності прямої $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p}$ і площини $Ax+By+Cz+D=0$
$\dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{p},$ $\vec{n}\parallel\vec{S}$		Умова перпендикулярно-сті прямої і площини
$\sin\theta=\dfrac{Al+Bm+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+p^2}},$ $\sin\theta=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{S}}{\lvert\vec{n}\rvert\cdot\lvert\vec{S}\rvert}.$		Кут θ між прямою і площиною
$\begin{cases}Ax+By+Cz+D=0,\\ x=lt+x_0,\\ y=mt+y_0,\\ z=pt+z_0\end{cases}$ $t=-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cp}$ $(Al+Bm+Cp\neq 0)$ (3.27)		Точка P перетину прямої $\begin{cases}x=lt+x_0,\\ y=mt+y_0,\\ z=pt+z_0\end{cases}$ і площини $Ax+By+Cz+D=0$ - розв’язок системи (3.34)

Приклад № 3. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{3}$ і площини $2x+3y-2z=0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння заданої прямої у параметричному вигляді: $x=-2t+2,\ y=t-3,\ z=3t+1$. Розв'язуємо систему

$$\begin{cases} 2x+3y-2z=0, \\ x=-2t+2, \\ y=t-3, \\ z=3t+1. \end{cases}$$

Маємо

$$2(-2t+2)+3(t-3)-2(3t+1)=0 \Rightarrow -4t+4+3t-9-6t-2=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -7t-7=0 \Rightarrow t=-1.$$

Тоді $x=-2\cdot(-1)+2=4,\ y=-1-3=-4,\ \ z=3\cdot(-1)+1=-2$.

Отже, P (4; -4; -2) – шукана точка.

Приклад № 4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0(3; -1; -2) перпендикулярно до заданої прямої $\frac{x+1}{5}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-1}{2}$.

Розв'язання. Якщо пряма перпендикулярна до площини, то напрямний вектор $\vec{S}$ прямої і нормальний вектор $\vec{n}$ площини колінеарні: $\vec{S}\parallel\vec{n}$. За умовою задачі $\vec{S}=\{5;-3;\ 2\}$. Тоді $\vec{n}=\lambda\vec{S}$ і при $\lambda=1$ дістаємо $\vec{n}=\{5;-3;\ 2\}$. Використовуємо рівняння площини (3.15), а саме: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, де $\vec{n}=\{A;B;\ C\}=\{5;-3;\ 2\}$.

Дістаємо $5(x-3)-3(y+1)+2(z+2)=0$ або $5x-3y+2z-14=0$ - шукане рівняння площини.

Приклад № 5. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-1}{2} \quad \text{та} \quad x=2t-2, y=-3t+1, z=-2t+4.$$

Розв'язання. Перша пряма проходить через точку $M_1(4; -1; 1)$, друга через точку $M_2(-2; 1; 4)$. Напрямний вектор цих прямих $\vec{S}=\{2;-3;-2\}$.

Зробимо таку побудову (рис. 1). З'єднаємо точки M_1 і M_2. Дістаємо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\{-6;\ 2;\ 3\}$. Виберемо на шуканій площині Q біжучу точку $M(x, y, z)$ і запишемо вектор $\overrightarrow{M_1M}=\{x-4; y+1; z-1\}$.

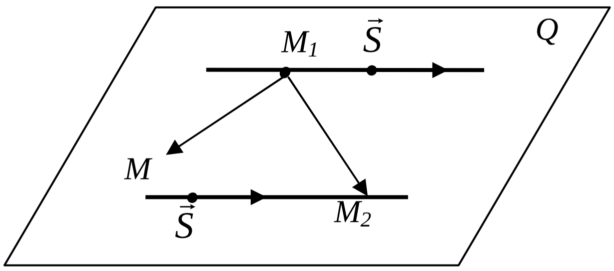


рис. 1

Три вектори $\vec{S}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M}$ лежать в одній площині, отже, вони компланарні.

Умовою компланарності трьох векторів є умова $(\overrightarrow{M_1M}\times\overrightarrow{M_1M_2})\cdot\vec{S}=0$ (див. гл. II, формула (2.36)). Тоді маємо

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+1 & z-1 \\ -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Це є рівняння площини у вигляді (3.16). Розкладаємо визначник за елементами першого рядка. Дістаємо:

$13(x-4)+18(y+1)+14(z-1)=0 \quad \Rightarrow$ $13x-52+18y+18+14z-14=0 \;\Rightarrow\; 13x+18y+14z-48=0$ - шукане рівняння площини.

Приклад № 6. Знайти точку перетину прямих

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{-2}, \qquad \frac{x-1}{4}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+3}{5}.$$

Розв'язання. Для того, щоб знайти точку перетину прямих, потрібно, щоб ці прямі лежали в одній площині. Напрямні вектори заданих прямих $\vec{S}_1=\{2;-3;-2\}$, $\vec{S}_2=\{4;-2;5\}$. Розглянемо ще вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, де M_1(-1; 0; -1) – точка, що належить першій прямій, M_2(1; -3; -3) – точка, що належить другій заданій прямій. Тоді $\overrightarrow{M_1M_2}=\{2;-3;-2\}$. Використаємо умову компланарності векторів, а саме: $(\vec{S}_1\times\vec{S}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=0$ (формула (2.36) гл. II). Маємо перевірити, чи дорівнює нулю визначник, складений із координат векторів $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$. Обчислюємо визначник. Дістаємо

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}=0$$

тому, що два рядки рівні (вв ластивість 4 визначників, гл. I).

Отже, задані прямі перетинаються.

Координати точки перетину повинні задовольняти рівняння обох прямих. Перепишемо ці рівняння у параметричному вигляді. Дістаємо

$x=2t_1-1,\ y=-3t_1,\ z=-2t_1-1$ та $x=4t_2+1, y=-2t_2-3,\ z=5t_2-3$

.

Тоді:

$$\begin{cases} 2t_1 - 1 = 4t_2 + 1, \\ -3t_1 = -2t_2 - 3, \\ -2t_1 - 1 = 5t_2 - 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t_1 - 4t_2 = 2, \\ -3t_1 + 2t_2 = -3, \\ -2t_1 - 5t_2 = -2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 - 2t_2 = 1, \\ 3t_1 - 2t_2 = 3, \\ 2t_1 + 5t_2 = 2. \end{cases} \quad (3.28)$$

Дістали систему трьох рівнянь з двома невідомими. Вибираємо два рівняння і знаходимо розв’язок системи цих рівнянь. Нехай це – перші два рівняння системи (3.28), тобто

$$\begin{cases} t_1 - 2t_2 = 1, \\ 3t_1 - 2t_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2t_1 = -2, \\ 2t_2 = t_1 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1, \\ t_2 = 0. \end{cases}$$

Перевіряємо, чи задовольняють значення $t_1 = 1$ і $t_2 = 0$ третє рівняння системи (3.28), маємо $2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 2$, тобто ці значення t_1 і t_2 задовольняють і третє рівняння системи, отже, є розв’язком системи (3.28).

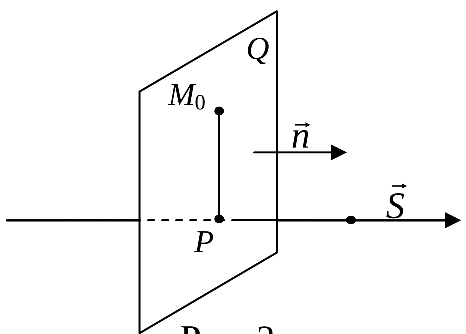
Підставляємо $t_1 = 1$ у параметричне рівняння першої заданої прямої або $t_2 = 0$ у параметричне рівняння другої заданої прямої. Маємо

$$x = 2 \cdot 1 - 1 = 1, \quad y = -3 \cdot 1 = -3, \quad z = -2 \cdot 1 - 1 = -3.$$

Отже, P (1; -3; -3) – точка перетину заданих прямих.

Приклад № 7. Знайти проекцію точки M_0(2; 2; -2) на пряму $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$.

Розв’язання. Проекція P точки M_0 на пряму (рис. 2)– це основа перпендикуляра, опущеного із точки M_0 на пряму. Або це точка перетину прямої і площини Q, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до заданої прямої. Задана пряма має



=

Рис. 2

напрямний вектор $\vec{S}=\{2;1;-2\}$. Нормальний вектор $\vec{n}$ площини, яка перпендикулярна до заданої прямої, колінеарний вектору $\vec{S}$: $\vec{n}\parallel\vec{S}$: $\vec{n}=\lambda\vec{S}$, або $\vec{n}=\vec{S}$ при $\lambda=1$. Тобто, $\vec{n}=\{2;1;-2\}$. Точка $M_0(2;\ 2;\ -2)$ лежить у цій площині. Рівняння цієї площини (згідно з формулою (3.15)) набуває вигляду

$$2(x-2)+1(y-2)-2(z+2)=0 \text{ або } 2x+y\text{-}2z\text{-}10=0.$$

Знайдемо точку перетину заданої прямої (запишемо її рівняння у параметричному вигляді, а саме: $x=2t+1,\ y=t-3,\ z=2t-1$) і площини $2x+y-2z-10=0$ (див. приклад № 153). Можна також використати формулу (3.27) для знаходження параметра t, а саме:

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cp}.$$

У нашому випадку $A=2, B=1, C=-2, D=-10, l=2, m=1,$ $p=-2,\ x_0=1,\ y_0=-3,\ z_0=-1$. Тоді

$$t=-\frac{2\cdot1+1\cdot(-3)-2\cdot(-1)-10}{2\cdot2+1\cdot1-2\cdot(-2)}=-\frac{-9}{9}=1.$$

Підставляємо значення t у параметричні рівняння прямої і дістаємо $x=2\cdot1+1=3,\ y=1-3=-2,\ z=-2\cdot1-1=-3.$ Маємо координати точки перетину прямої і площини, що проходить через задану точку, перпендикулярно до заданої прямої, тобто $P(3;\ -2;\ -3)$ – проекція заданої точки M_0 на задану пряму.

Приклад № 8. Знайти точку Q симетричну точці $M_0(1;\ -1;\ -3)$ відносно площини $3x-4y+2z+28=0$.

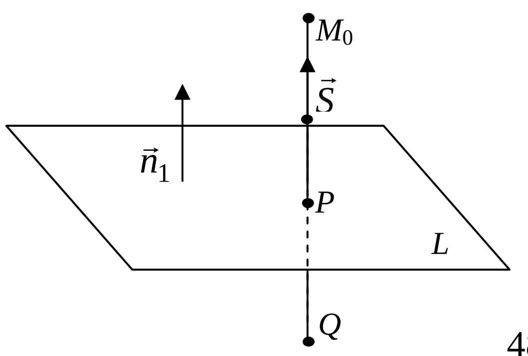


Рис. 3

Розв'язання. Нехай P – проекція точки M_0 на задану площину L (рис. 3). Тоді координати точки Q знаходимо із співвідношень

$$\frac{x_{M_0}+x_Q}{2}=x_P, \qquad \frac{y_{M_0}+y_Q}{2}=y_P, \qquad \frac{z_{M_0}+z_Q}{2}=z_P.$$

Тобто $x_Q=2x_P-x_{M_0}$, $\quad y_Q=2y_P-y_{M_0}$, $\quad z_Q=2z_P-z_{M_0}$.

Знайдемо координати точки P як точки перетину прямої M_0Q і заданої площини. Запишемо рівняння прямої M_0Q. Напрямний вектор $\vec{S}$ цієї прямої колінеарний нормальному вектору $\vec{n}$ заданої площини і $\vec{S}=\vec{n}=\{3;\,-4;\,2\}$. За формулою (3.22), а саме:

$$x=lt+x_0,\; y=mt+y_0,\; z=pt+z_0$$

маємо параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1; -1; -3)$ перпендикулярно до заданої площини, а саме:

$$x=3t+1,\; y=-4t-1,\; z=2t-3.$$

За формулою (3.27), а саме:

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cp}$$

знаходимо t. Дістаємо

$$t=-\frac{3\cdot1-4\cdot(-1)+2\cdot(-3)+28}{3\cdot3-4\cdot(-4)+2\cdot2}=-1.$$

Знаходимо координати точки P. Маємо

$$x=3\cdot(-1)+1=-2, y=-4\cdot(-1)-1=3, z=2\cdot(-1)-3=-5,\; P(-2;\,3;\,-5)$$

.

Отже,

$$x_Q=2\cdot(-2)-1=-5, y_Q=2\cdot3-(-1)=7, z_Q=2\cdot(-5)-(-3)=-7$$

і $Q(-5; 7; -7)$ – точка, симетрична точці $M_0(1; -1; -3)$ відносно заданої площини.

Приклад № 9. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0(1; 0; -1) і пряму $x = 2t - 1,\ y = -t + 2,\ z = -2t + 3$.

Розв'язання. За умовою задачі напрямний вектор заданої прямої $\vec{S} = \{2; -1; -2\}$ лежить у шуканій площині Q (рис. 4).

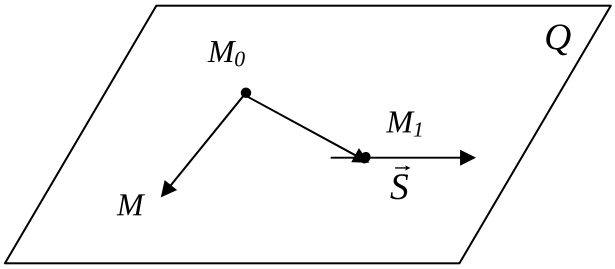


Рис. 4

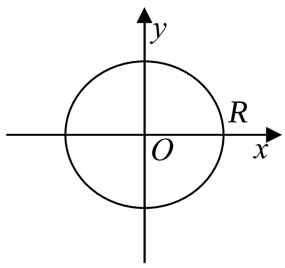
На заданій прямій лежить точка M_1(-1; 2; 3). Визначаємо вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = \{-2; 2; 4\}$.

Вибираємо у шуканій площині біжучу точку $M(x; y;\ z)$ і визначаємо вектор $\overrightarrow{M_0M}$. Маємо $\overrightarrow{M_0M} = \{x - 1;\ y;\ z + 1\}$. Три вектори $\overrightarrow{M_0M},\ \overrightarrow{M_0M_1},\ \vec{S}$ лежать в одній площині, тобто вони компланарні. За умовою компланарності трьох векторів маємо

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{або} \qquad 0 \cdot (x-1) - 4y + 2 \cdot (z+1) = 0.$$

Звідки $2y - z - 1 = 0$ - шукане рівняння площини.

5 Криві другого порядку

Коло	$x^2 + y^2 = R^2$		Центр кола O(0; 0), R – радіус кола