I Елементи лінійної алгебри

1 Визначники

1.1 Обчислення визначників за означенням

Визначник другого порядку обчислюється за правилом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1.1)$$

Визначник третього порядку обчислюється за правилом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{32}a_{21}a_{13} - \qquad (1.2)$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Приклад № 1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix};$$

Розв'язання.

Згідно з формулою (1.2) маємо:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 4 + (-1)\cdot 2\cdot(-3) + 1\cdot 1\cdot 0 - 0\cdot 3\cdot(-3) -$$

$$-1\cdot 2\cdot 2 - (-1)\cdot 1\cdot 4 = 24 + 6 - 4 + 4 = 30;$$

1.2 Властивості визначників

1. При заміні місцями рядків і стовпців (при транспонуванні) визначник не змінюється – рівноправність рядків і стовпців.

2. Якщо у визначнику Δ поміняти місцями два рядки (два стовпця), то визначник змінює знак: маємо -Δ.

3. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулеві: Δ=0.

4. Якщо у визначнику є два однакові рядки (стовпці), то визначник дорівнює нулю: $\Delta = 0$.

5. Спільний множник будь-якого рядка (стовпця) можна виносити за знак визначника.

6. Якщо два рядки (стовпці) визначника містять відповідні пропорційні елементи, то визначник дорівнює нулю.

7. Якщо всі елементи рядка (стовпця) є сумами двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у першому з яких у відповідному рядку (стовпці) розташовані перші доданки, у другому – другі, а інші рядки (стовпці) в обох визначниках такі, як у вихідному визначнику.

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те ж саме число, а інші рядки (стовпці) залишити без зміни.

Означення. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається визначник, який отримуємо із заданого визначника викреслюванням i-го рядка і j-го стовпця.

Означення. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника називається мінор цього елемента, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \qquad (1.3)$$

Знаки алгебраїчних доповнень елементів визначника третього порядку схематично зображаються так:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Наведемо ще дві властивості визначників, пов'язані з поняттям алгебраїчного доповнення.

9. Визначник дорівнює сумі елемента визначника добутків всіх елементів деякого рядка (стовпця) на їх відповідні алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13};\ \Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31};$$
$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23};\ \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32};\ (1.5)$$
$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33};\ \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

10. Сума добутків елементів деякого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Приклад № 2. Обчислити визначник, розкладаючи його за елементами першого рядка;

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix};$$

Розв'язання. Використовуємо першу із формул (1.5). Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{11} + (-3) \cdot A_{12} + (-2) \cdot A_{13} =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{Враховуємо формулу} \\ (1.3) \end{vmatrix} = 2 \cdot \mathrm{M}_{11} - (-3) \cdot M_{12} + (-2) \cdot M_{13} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-6-2) + 3(-12+1) -$$

$$-2(8+2) = -16 - 33 - 20 = -69.$$

Означення. Визначником четвертого порядку називається величина, що представлена таблицею

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

і обчислюється за правилом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{4} a_{ij} A_{ij} \ (j = 1,2,3,4) \text{ або } \sum_{j=1}^{4} a_{ij} A_{ij} \ (i = 1,2,3,4).$$

Аналогічно можна обчислювати визначник матриці будь-якого порядку n:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \ (j = \overline{1,n}) \text{ або } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \ (i = \overline{1,n}). \quad (1.6)$$

Зауваження. Обчислення визначника четвертого порядку зводиться до обчислення чотирьох визначників третього порядку. Тому доцільно спочатку використати властивість 8 і зробити в деякому рядку чи стовпці три нулі, а потім розкладати за елементами цього рядка (чи стовпця).

Приклад № 3. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix},$$

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \left| \begin{array}{l} \text{Використовуємо властивість 8: додаємо до} \\ \text{елементів четвертого рядка відповідні елементи} \\ \text{першого рядка, помножені на (-1). Інші} \\ \text{рядки залишаємо без зміни} \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{Домножаємо елементи четвертого стовпця на 3 і} \\ \text{додаємо до відповідних елементів третього} \\ \text{стовпця. Інші стовпці залишаємо без зміни} \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{Розкладаємо} \\ \text{визначник за} \\ \text{елементами} \\ \text{четвертого рядка} \end{array} \right| = 0 \cdot A_{41} + 0 \cdot A_{42} + 0 \cdot A_{43} + (-1) \cdot A_{44} =$$

$$= (-1)(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{Розкладаємо} \\ \text{визначник} \\ \text{за елементами} \\ \text{першого рядка} \end{array} \right| = -(2 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 8 \cdot A_{13}) =$$

$$= -(2 \cdot M_{11} - M_{12} + 8 \cdot M_{13}) = -2 \cdot M_{11} + M_{12} - 8 \cdot M_{13} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} -$$

$$-8 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -2(10 - 15) + (5 + 5) - 8(3 + 2) = 10 + 10 - 40 = -20.$$

Зауваження. Для того, щоб отримати нуль у рядку, потрібно використовувати властивість 8 для стовпців. І навпаки, щоб отримати нуль у стовпці, потрібно використовувати властивість 8 для рядків.