Ортом вектора $\vec{a}$ називається вектор $\vec{a}^0$, модуль якого дорівнює одиниці $\left(\left|\vec{a}^0\right| = 1\right)$, а напрям співпадає із напрямом вектора $\vec{a}$, тобто

$$\vec{a}^0 = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\},$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|}; \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|}; \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|} \text{ -} \tag{2.9}$$

- напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ (α, β, γ – кути вектора $\vec{a}$ з додатними напрямами відповідно осей координат *Ox*, *Oy*, *Oz*) і

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{2.10}$$

Тоді

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0, \tag{2.11}$$

де

$$\vec{a}^0 = \left\{\frac{a_x}{|\overline{a}|}; \frac{a_y}{|\overline{a}|}; \frac{a_z}{|\overline{a}|}\right\}. \tag{2.12}$$

3 Добутки векторів

3.1 Скалярний добуток двох векторів

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ - це число, яке дорівнює

$$\overrightarrow{ab} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}), \tag{2.13}$$

де $|\vec{a}|$, $\left|\vec{b}\right|$ - модулі векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Якщо вектори задано координатами, а саме: $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то їх скалярний добуток дорівнює

$$\overrightarrow{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{2.14}$$

Властивості скалярного добутку векторів

1 Скалярний добуток не залежить від порядку множення векторів:

$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ba}. \qquad (2.15)$$

2 Має місце розподільний закон:

$$\left(\overrightarrow{a+b}\right)\cdot \vec{c} = \overrightarrow{a\cdot c} + \overrightarrow{b\cdot c}. \qquad (2.16)$$

3 Має місце сполучний закон відносно скаляра λ:

$$\lambda\left(\overrightarrow{ab}\right) = \lambda\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\lambda\vec{b}. \qquad (2.17)$$

Використовуючи властивості 1 – 3 скалярного добутку, вектори можна множити як многочлени

4 Косинус кута $\varphi = \left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)$ дорівнює

$$\cos\varphi = \frac{\overline{ab}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} \Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (2.18)$$

5 Умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ ($\cos\varphi = 0$):

$$\vec{a}\perp\vec{b} : \vec{a}\vec{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

6 Проекція одного вектора на інший:

$$\text{ïð}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\overline{ab}}{|\bar{b}|}, \quad \text{ïð}_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\overline{ab}}{|\bar{a}|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{ïð}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}, \text{ïð}_{\bar{a}}|\bar{b}| = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \qquad (2.19)$$

7 Модуль вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (2.20)$$

8 Робота *A* сили $\vec{F}$ при переміщенні точки її прикладання із початку M_1 вектора $\vec{S} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ в його кінець M_2:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} \quad \Rightarrow \quad A = F_x S_x + F_y S_y + F_z S_z . \qquad (2.21)$$

Із властивості скалярного добутку маємо наступні співвідношення для координатних ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{i}^{\,2} = 1, \qquad \vec{j}^{\,2} = 1, \qquad \vec{k}^{\,2} = 1,$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0, \;\; \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0, \;\; \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0.$$

Приклад № 1. Перевірити, чи є точки *A* (2; -3), *B* (4; 2), *C* (4; -10) *D* (8; 0) вершинами трапеції *ABCD*.

Розв'язання. Якщо *ABCD* – трапеція, то протилежні її сторони паралельні. Тому перевіримо колінеарність векторів $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, та $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$. Маємо

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \{4 - 2; 2 - (-3)\} = \{2; 5\}, \;\; \vec{b} = \overrightarrow{CD} = \{8 - 4;\; 0 + 10\} = \{4;\; 10\}.$$

Перевіряємо виконання умови колінеарності (2.8), тобто, чи виконується рівність $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y}$. Дістаємо

$$\frac{2}{4} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = \lambda .$$

Отже, вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні, тобто сторони *AB* та *CD* паралельні і *ABCD* – трапеція.

Приклад № 2. У точці *A* прикладено сили $\vec{F}_1 = \overrightarrow{AB}, \vec{F}_2 = \overrightarrow{AC}, \vec{F}_3 = \overrightarrow{AD}.$ Знайти рівнодійну цих сил і її довжину, якщо *A* (2; -1; 0), *B* (3; -2; 1), *C* (5; -2; 1), *D* (-4; 2; 3).

Розв'язання. Рівнодійна $\vec{R}$ – це сума сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 .$$

Знаходимо координати сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$. Дістаємо

$$\vec{F}_1 = \overrightarrow{AB} = \{3-2; -2-(-1); 1-0\} = \{1; -1; 1\},$$
$$\vec{F}_2 = \overrightarrow{AC} = \{5-2; -2-(-1); 1-0\} = \{3; -1; 1\},$$
$$\vec{F}_3 = \overrightarrow{AD} = \{-4-2;\ 2-(-1); 3-0\} = \{-6; 3; 3\}.$$

Тоді $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \{1+3-6; -1-1+3; 1+1+3\} = \{-2; 1; 5\}$.

Використовуємо формулу (2.2) для знаходження довжини рівнодійної. Маємо

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{(R_x)^2 + \left(R_y\right)^2 + (R_z)^2}, \quad \left|\vec{R}\right| = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}.$$

Приклад № 3. Знайти орт вектора $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

Розв'язання. Орт вектора знаходимо за формулою (2.12). Спочатку обчислюємо за формулою (2.2) модуль вектора. Дістаємо $|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$.

Отже, $\vec{a}^{\,0} = \left\{-\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right\}$.

3.2 Векторний добуток двох векторів

Векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ - це вектор, що задовольняє умови:

1) $\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$ (вектор $\vec{c}$ перпендикулярний площині, де лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 7));

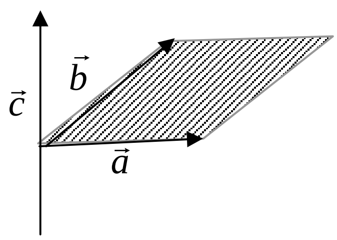

Рис. 7

2) вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ утворюють праву трійку;

3) модуль векторного добутку дорівнює

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right). \qquad (2.22)$$

Якщо $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$, то векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$ дорівнює

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Властивості векторного добутку двох векторів

1 Модуль векторного добутку двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

$$S_{\square}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \qquad (2.23)$$

Наслідок. Площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, дорівнює

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \qquad (2.24)$$

2 Векторний добуток залежить від порядку, в якому перемножуються вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, тобто

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}. \qquad (2.25)$$

3 Має місце розподільний закон відносно суми векторів:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}. \qquad (2.26)$$

4 Має місце сполучний закон відносно скаляра λ:

$$\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\lambda\vec{b} \qquad (2.27)$$

Властивості 2, 3, 4 дозволяють перемножити вектори як многочлен на многочлен.

5 Умова колінеарності двох векторів:

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0.$$

Зокрема, $\vec{a}\times\vec{a}=0.$ (2.28)

6 Для координатних ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ маємо:

$$\begin{aligned}
&\vec{i}\times\vec{i}=0, && \vec{j}\times\vec{j}=0, && \vec{k}\times\vec{k}=0,\\
&\vec{i}\times\vec{j}=k, && \vec{j}\times\vec{i}=-k, && \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\\
&\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}, && \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}, && \vec{i}\times\vec{k}=-j.
\end{aligned} \quad (2.29)$$

7 Момент сили $\vec{F}$, прикладеної в точці *A*, відносно точки *O* дорівнює векторному добутку вектора $\overrightarrow{OA}$ на вектор $\vec{F}$:

$$\overrightarrow{M_0(F)}=\overrightarrow{OA}\times\vec{F}$$

або

$$\overrightarrow{M_0(F)}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ S_x & S_y & S_z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}, \quad (2.30)$$

де $\vec{S}=\overrightarrow{OA}=\{S_x;\, S_y;\, S_z\}$, $\vec{F}=\{F_x;\, F_y;\, F_z\}$.

Приклад № 4. Знайти $\left|(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})\right|$, якщо $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, \vec{a},\wedge\vec{b}=\dfrac{\pi}{6}.$

Розв'язання. Знаходимо векторний добуток $(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})$, використовуючи властивості векторного добутку двох векторів. Маємо

$$\begin{aligned}
&(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})=3\vec{a}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{a}\times2\vec{b}-\vec{b}\times2\vec{b}=\\
&=\left|\begin{matrix}\text{Використовуємо, що } \vec{a}\times\vec{a}=0, \vec{b}\times\vec{b}=0, -\vec{b}\times\vec{a}=\\ =\vec{a}\times\vec{b} \text{ і формулу (2.28)}\end{matrix}\right|=\\
&=\vec{a}\times\vec{b}+6\vec{a}\times\vec{b}=7\vec{a}\times\vec{b}.
\end{aligned}$$

Знаходимо модуль цього векторного добутку, використовуючи формулу (2.22). Дістаємо

$$\left|(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})\right| = \left|7\vec{a}\times\vec{b}\right| = 7\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = 7\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin(\vec{a}\wedge\vec{b}) =$$
$$= 7\cdot 1\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{6} = 7.$$

3.3 Мішаний добуток трьох векторів

Мішаний добуток векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - це число, що обчислюється за правилом

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \Leftrightarrow \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (2.32)$$

Властивості мішаного добутку трьох векторів

1 Мішаний добуток трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ не залежить від того, які вектори перемножаться векторно. Не можна лише змінювати порядок векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$$\begin{aligned}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) = \\ = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c} = -\vec{a}\left(\vec{c}\times\vec{b}\right) = -\vec{b}\left(\vec{a}\times\vec{c}\right).\end{aligned} \qquad (2.33)$$

2 Модуль мішаного добутку трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах як на сторонах (рис. 8).

$$V = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \qquad (2.34)$$

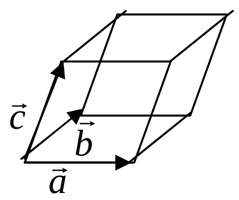

Рис. 8

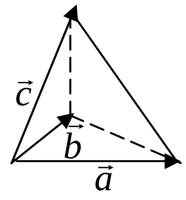

Рис. 96

3 Об’єм трикутної піраміди (Рис. 9) – тетраедра – дорівнює

$$V_{тетр} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \qquad (2.35)$$

Умова компланарності трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.36)$$

Приклад № 5. Перевірити, чи лежать точки *A* (2; 1; -1), *B* (3; 0; 1), C (2; -1; 2), D (4; 1; 3) в одній площині.

Розв’язання. Запишемо координати трьох векторів, що виходять із однієї точки, наприклад, *A*: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$. Задані точки лежать в одній площині, якщо ці вектори компланарні.

Знаходимо вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$. Маємо

$$\overrightarrow{AB} = \{1; -1; 2\},\ \overrightarrow{AC} = \{0; -2; 3\},\ \overrightarrow{AD} = \{2; 0; 4\}.$$

Перевіряємо, чи дорівнює нулю їх мішаний добуток. Дістаємо

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 6 + 8 = -6 \neq 0.$$

Отже, задані точки не лежать в одній площині.

Приклад № 6. Знайти об’єм тетраедра і довжину висоти, опущеної із вершини A, якщо A (2; 3; -1), B (3; 0; 2), C (2; -2; 1), D (1; -3; 0).

Розв’язання. Зробимо ескіз тетраедра (рис. 10).

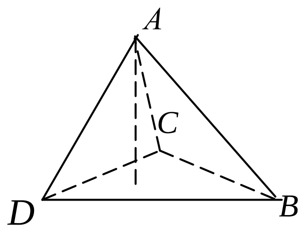

Рис. 10

Об’єм тетраедра обчислюється за формулою (2.34), а саме:

$$V = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|,$$

де $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - вектори, що співпадають з відповідними ребрами тетраедра.

Нехай $\vec{a} = \overrightarrow{DA},\ \vec{b} = \overrightarrow{DC},\ \vec{c} = \overrightarrow{DB}.$ Об’єм тетраедра обчислюється за формулою

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$$

Звідки $h = \dfrac{V}{\frac{1}{3} S_{осн}},\ \ h = \dfrac{\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}.$

(2.36)

$S_{осн}$ - це площа трикутника BCD і $S_{осн} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DB}\right|$. Тоді

$$h = \frac{\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DC}\right)\cdot\overrightarrow{DA}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DB}\right|} = \frac{\left(\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DC}\right)\cdot\overrightarrow{DA}}{\left|\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DB}\right|}.$$

Знаходимо вектори:

$$\overrightarrow{DA} = \{1; 6; -1\},\ \overrightarrow{DB} = \{2; 3;\ 2\},\ \overrightarrow{DC} = \{1;\ 1;\ 1\}.$$

Знаходимо

$$\left(\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB}\right)\cdot\overrightarrow{DC}=\begin{vmatrix}1 & 6 & -1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=3+12-2+3-2-12=2.$$

$$V_{òåòð}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB}\right)\cdot\overrightarrow{DC}\right|=\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{1}{3}.$$

Знаходимо

$$\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-\vec{i}+\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DB}\right|=\sqrt{(-1)^2+0+1^2}=\sqrt{2}.$$

Знаходимо h за формулою (2.37). Маємо

$$h=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$