$$A_{11} = -1, \quad A_{12} = -2, \quad A_{21} = -1, \quad A_{22} = 4.$$

Маємо $A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$

Тоді $X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3+1 & 1+0 \\ 6-4 & 2-0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$

3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3. \end{cases} \tag{1.9}$$

називається неоднорідною, якщо принаймні одна із правих частин рівнянь h_i, $i = 1, 2, 3,$ не дорівнює нулю. Якщо всі $h_1 = h_2 = h_3 = 0$, то така система називається однорідною. Коефіцієнти системи a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$ - числа, x_1, x_2, x_3 - невідомі.

Кількість рівнянь визначає порядок системи. Система (1.9) – система третього порядку.

Визначник, складений із коефіцієнтів при невідомих, називається головним визначником системи (1.9):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{1.10}$$

3.1 Розв’язання неоднорідної системи лінійних рівнянь, якщо $\Delta \neq 0$.

Якщо $\Delta \neq 0$, то існує єдиний розв’язок x_1, x_2, x_3 системи (1.10), який можна знайти

- за формулами Крамера;

- матричним методом.

3.1.1 Формули Крамера.

Формули Крамера мають вигляд:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}. \qquad (1.11)$$

де визначники $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ знаходяться із головного визначника системи заміною відповідно першого, другого і третього стовпців стовпцем із вільних членів. А саме,

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 & a_{13} \\ a_{21} & h_2 & a_{23} \\ a_{31} & h_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & h_2 \\ a_{31} & a_{32} & h_3 \end{vmatrix}. \qquad (1.12)$$

3.1.2 Матричний метод

Запишемо систему (1.9) у матричному вигляді

$$AX = H, \qquad (1.13)$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - матриця, складена, із коефіцієнтів при невідомих x_1, x_2, x_3; матриця $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - стовпцева матриця, складена із невідомих, матриця $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ - стовпцева матриця, складена із правих частин рівняння системи (1.9) – вільних членів.

Розв’язок X матричного рівняння (1.10) має вигляд

$$X = A^{-1}H. \qquad (1.14)$$

Це і є розв'язок системи (1.9). Матриця A^{-1} обернена до матриці A.

Схема розв'язку системи (1.9) матричним методом

1. Знаходимо $\det A$. Якщо $\det A \neq 0$, то

2. Знаходимо матрицю A^{-1}.

3. Знаходимо добуток матриць $A^{-1}H$ і тим самим розв'язок системи.

Приклад № 9. Знайти розв'язок заданої системи матричним методом.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв'язання. Записуємо систему у матричному вигляді:

$$AX = H,$$

де $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$

Згідно з формулою (1.14)

$$X = A^{-1}H.$$

Використаємо схему знаходження розв'язку системи (1.9) матричним методом.

1. Знаходимо

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 12 + 1 + 9 + 4 - 4 = 34 \neq 0.$$

2. Знаходимо матрицю A^{-1} за формулою (1.9). Маємо

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=6+2=8,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-(2-6)=4,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-1-9=-10,\ A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-(4-1)=-3,$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4+3=7,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-(-2-6)=8,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4+3=7,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(4+1)=-5,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-2=4.$$

Тоді

$$A^{-1}=\frac{1}{34}\begin{pmatrix}8 & -3 & 7\\ 4 & 7 & -5\\ -10 & 8 & 4\end{pmatrix}.$$

Перевіримо, що $A^{-1}A=E$:

$$A^{-1}=\frac{1}{34}\begin{pmatrix}8 & -3 & 7\\ 4 & 7 & -5\\ -10 & 8 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{34}\begin{pmatrix}16-3+21 & 16-9-7 & -8-6+14\\ 8+7-15 & 8+21+5 & -4+14-10\\ -20+8+12 & -20+24-4 & 10+16+8\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{34}\begin{pmatrix}34 & 0 & 0\\ 0 & 34 & 0\\ 0 & 0 & 34\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

3. Знаходимо $A^{-1}H=X$. Маємо

$$A^{-1}H=\frac{1}{34}\begin{pmatrix}8 & -3 & 7\\ 4 & 7 & -5\\ -10 & 8 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 9\\ -1\end{pmatrix}=\frac{1}{34}\begin{pmatrix}0-27-7\\ 0+63+5\\ 0+72-4\end{pmatrix}=\frac{1}{34}\begin{pmatrix}-34\\ 68\\ 68\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}, \text{ тобто } x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3=2.$$

3.3 Розв'язання однорідної системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0.\end{cases}\qquad(1.17)$$

Якщо $\underline{\Delta\neq 0}$, то система (1.17) має єдиний розв'язок $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0.$

Якщо $\underline{\Delta=0}$, то система (1.17) має безліч розв'язків.

Наприклад, розв'язками системи (1.17) при $\Delta=0$ є

$$x_1=\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}t=A_{31}t,\ x_2=-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{21}&a_{23}\end{vmatrix}t=A_{32}t,\ x_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}t=A_{33}t$$

при умові, що $\Delta_1=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0.$

Розв'язок системи (1.17) позначають ще так:

$$x_1^{30}=A_{31}t,\quad x_2^{30}=A_{32}t,\quad x_3^{30}=A_{33}t,\qquad(1.18)$$

де t – параметр (будь-яке дійсне число).

Запис $x_1^{30},\ x_2^{30}, x_3^{30}$ означає загальний розв'язок однорідної системи (1.17).

Приклад № 10. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0,\\x_1-2x_2+2x_3=0,\\3x_1+x_2+x_3=0.\end{cases}$$

Розв'язання. Обчислюємо визначник заданої системи. Маємо

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\text{Додамо елементи першого}\\ \text{рядка до відповідних еле-}\\ \text{ментів другого рядка}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

(за властивістю 4 визначників).

Отже, система має безліч розв'язків.

Розглянемо систему

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0,\\ x_1-2x_2+2x_3=0.\end{cases}$$

Для цієї системи враховуючи, що $\Delta_1=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}\neq 0$, маємо

$$x_1=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 2\end{vmatrix}t=4t,$$

$$x_2=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}t=-5t,$$

$$x_3=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}t=-7t.$$

Це і є розв'язок системи рівнянь.

Отже $x_1=4t,\ x_2=-5t,\ x_3=-7t.$

3.4 Розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь у випадку, коли $\Delta=0$.

Нехай визначник системи (1.9) $\Delta=0$.

При цьому можливі два випадки:

- система (1.9) має безліч розв'язків;
- система (1.9) не має жодного розв'язку.

Для знаходження розв'язку системи (1.9) застосовуємо наступну схему.

Схема розв'язку системи (1.9), коли $\Delta = 0$

1. Знаходимо головний визначник системи.

2. Якщо $\Delta = 0$, то розв'язуємо систему двох рівнянь з трьома невідомими, наприклад, систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2, \end{cases} \tag{1.19}$$

при умові, що $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$

Вибираємо одне невідоме, наприклад, x_3 (1.19), два інших невідомих x_1, x_2 - знаходимо, розв'язавши систему (1.19).

3. Одержаний розв'язок підставляємо у третє рівняння системи (1.9):

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3.$$

4. Якщо одержаний розв'язок не задовольняє це рівняння, то система лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь (1.9) розв'язків не має.

5. Якщо одержаний розв'язок задовольняє третє рівняння системи (1.9), то це означає, що ми змогли підібрати частинний розв'язок системи (1.9), а саме $x_1^{чн}$, $x_2^{чн}$, $x_3^{чн}$, тобто система (1.9) має безліч розв'язків, які знаходяться за формулами

$$x_1^{зн} = x_1^{чн} + x_1^{зо}, \quad x_2^{зн} = x_2^{чн} + x_2^{зо}, \quad x_3^{зн} = x_3^{чн} + x_3^{зо},$$

де $x_1^{зо}$, $x_2^{зо}$, $x_3^{зо}$ - загальний розв'язок (1.18) відповідної однорідної системи (1.17). В даному випадку дістаємо

$$x_1^{зн} = x_1^{чн} + A_{31}t, \quad x_2^{зн} = x_2^{чн} + A_{32}t, \quad x_3^{зн} = x_3^{чн} + A_{33}t \tag{1.20}$$

(t - параметр).