I Елементи лінійної алгебри

1 Визначники

1.1 Обчислення визначників за означенням

Визначник другого порядку обчислюється за правилом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.1}$$

Визначник третього порядку обчислюється за правилом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{32}a_{21}a_{13} - \tag{1.2}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Приклад № 1. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix};$$

Розв'язання.

Згідно з формулою (1.2) маємо:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 4 + (-1)\cdot 2\cdot(-3) + 1\cdot 1\cdot 0 - 0\cdot 3\cdot(-3) -$$

$$-1\cdot 2\cdot 2 - (-1)\cdot 1\cdot 4 = 24 + 6 - 4 + 4 = 30;$$

1.2 Властивості визначників

1. При заміні місцями рядків і стовпців (при транспонуванні) визначник не змінюється – рівноправність рядків і стовпців.

2. Якщо у визначнику Δ поміняти місцями два рядки (два стовпця), то визначник змінює знак: маємо -Δ.

3. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулеві: Δ=0.

4. Якщо у визначнику є два однакові рядки (стовпці), то визначник дорівнює нулю: $\Delta=0$.

5. Спільний множник будь-якого рядка (стовпця) можна виносити за знак визначника.

6. Якщо два рядки (стовпці) визначника містять відповідні пропорційні елементи, то визначник дорівнює нулю.

7. Якщо всі елементи рядка (стовпця) є сумами двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у першому з яких у відповідному рядку (стовпці) розташовані перші доданки, у другому – другі, а інші рядки (стовпці) в обох визначниках такі, як у вихідному визначнику.

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те ж саме число, а інші рядки (стовпці) залишити без зміни.

Означення. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається визначник, який отримуємо із заданого визначника викреслюванням i-го рядка і j-го стовпця.

Означення. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника називається мінор цього елемента, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \qquad (1.3)$$

Знаки алгебраїчних доповнень елементів визначника третього порядку схематично зображаються так:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Наведемо ще дві властивості визначників, пов'язані з поняттям алгебраїчного доповнення.

9. Визначник дорівнює сумі елемента визначника добутків всіх елементів деякого рядка (стовпця) на їх відповідні алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13};\ \Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31};$$
$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23};\ \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32};\ (1.5)$$
$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33};\ \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

10. Сума добутків елементів деякого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Приклад № 2. Обчислити визначник, розкладаючи його за елементами першого рядка;

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix};$$

Розв'язання. Використовуємо першу із формул (1.5). Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot A_{11} + (-3)\cdot A_{12} + (-2)\cdot A_{13} =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{Враховуємо формулу} \\ (1.3) \end{vmatrix} = 2\cdot \mathrm{M}_{11} - (-3)\cdot M_{12} + (-2)\cdot M_{13} =$$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-6-2) + 3(-12+1) -$$
$$-2(8+2) = -16 - 33 - 20 = -69.$$

Означення. Визначником четвертого порядку називається величина, що представлена таблицею

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

і обчислюється за правилом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{4} a_{ij} A_{ij} \ (j = 1,2,3,4) \text{ або } \sum_{j=1}^{4} a_{ij} A_{ij} \ (i = 1,2,3,4).$$

Аналогічно можна обчислювати визначник матриці будь-якого порядку n:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \ (j = \overline{1, n}) \text{ або } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \ (i = \overline{1, n}). \quad (1.6)$$

Зауваження. Обчислення визначника четвертого порядку зводиться до обчислення чотирьох визначників третього порядку. Тому доцільно спочатку використати властивість 8 і зробити в деякому рядку чи стовпці три нулі, а потім розкладати за елементами цього рядка (чи стовпця).

Приклад № 3. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix},$$

Розв'язання.

$$\begin{array}{c}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ \\ \end{array} = \left| \begin{array}{l} \text{Використовуємо властивість 8: додаємо до} \\ \text{елементів четвертого рядка відповідні елементи} \\ \text{першого рядка, помножені на (-1). Інші} \\ \text{рядки залишаємо без зміни} \end{array} \right| =$$

$$= \begin{array}{c}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & & & 3 \end{array}\end{array} = \left| \begin{array}{l} \text{Домножаємо елементи четвертого стовпця на 3 і} \\ \text{додаємо до відповідних елементів третього} \\ \text{стовпця. Інші стовпці залишаємо без зміни} \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{Розкладаємо} \\ \text{визначник за} \\ \text{елементами} \\ \text{четвертого рядка} \end{array} \right| = 0 \cdot A_{41} + 0 \cdot A_{42} + 0 \cdot A_{43} + (-1) \cdot A_{44} =$$

$$= (-1)(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{l} \text{Розкладаємо} \\ \text{визначник} \\ \text{за елементами} \\ \text{першого рядка} \end{array} \right| = -(2 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 8 \cdot A_{13}) =$$

$$= -(2 \cdot M_{11} - M_{12} + 8 \cdot M_{13}) = -2 \cdot M_{11} + M_{12} - 8 \cdot M_{13} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} -$$

$$- 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -2(10 - 15) + (5 + 5) - 8(3 + 2) = 10 + 10 - 40 = -20.$$

Зауваження. Для того, щоб отримати нуль у рядку, потрібно використовувати властивість 8 для стовпців. І навпаки, щоб отримати нуль у стовпці, потрібно використовувати властивість 8 для рядків.

2 Матриці

2.1 Означення. Матрицею називається таблиця, що складається із елементів a_{ij}, розташованих у m рядках і n стовпцях. Якщо a_{ij} - числа, то матриця називається числовою.

Вимірність матриці позначається $m \times n$. Матриці позначають великими літерами *A, B* тощо. Наприклад,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ - матриця вимірності 2×3, оскільки є два рядки і три стовпці.

Якщо $m = n$, то матриця називається квадратною і замість вимірності матриці кажуть порядок матриці, наприклад, квадратна матриця *n*-го порядку має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Для квадратної матриці можна обчислити визначник $\Delta = \det A$.

Якщо $\det A \neq 0$, то матриця називається невиродженою, якщо $\det A = 0$, то *A* – вироджена матриця.

Зауваження. Позначення квадратної матриці і її визначника – різні. Матрицю записують за допомогою круглих дужок, скорочено: $A = (a_{ij}),\ i, j = 1,2,...,n$. Визначник матриці *A* записують за допомогою прямих дужок, скорочено: $\det A = |a_{ij}|,\ i, j = 1,2,...,n$.

Квадратна матриця називається діагональною, якщо усі елементи матриці, крім елементів, що стоять на головній діагоналі, є нулі:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Діагональна матриця називається одиничною, якщо всі елементи, що стоять на головній діагоналі $d_{kk} = 1,\ k = \overline{1,n}$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця називається нульовою, якщо усі її елементи – нулі: $a_{ij} = 0,\ i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n$.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця *A* називається стовпцевою, якщо її вимірність $m \times 1$. Матриця *B* називається рядковою, якщо її вимірність $1 \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \qquad B = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}).$$

Матриця *A* дорівнює матриці *B*, тобто *A*=*B*, якщо вимірності матриць однакові і кожен елемент матриці *A* дорівнює відповідному елементу матриці *B*, тобто $a_{ij} = b_{ij}$ для всіх *i* та *j*.

2.2 Дії над матрицями

2.2.1 Додавання матриць.

Сумою C матриць A та B однакової вимірності називається матриця, кожен елемент якої є сумою відповідних елементів матриць A та B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1,2,...,n; \quad j = 1,2,...,m.$$

Приклад № 4. Знайти суму матриць

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \text{ та } B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Вимірності матриць A та B: $m \times n = 3 \times 2$ - однакові. Тому можна знайти їх суму. Маємо

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 3+4 \\ 1+2 & 2-3 \\ 5-4 & 7+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Множення матриці на число.

При множення матриці на число λ потрібно кожен елемент матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

помножити на це число:

$$\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Приклад № 5. Знайти –3А, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -2 & -1\\ 3 & -2 & 1 & -4\end{pmatrix}$.

Розв'язання. У цьому прикладі λ=-3. Маємо:

$$-3A=-3\begin{pmatrix}2 & 4 & -2 & -1\\ 3 & -2 & 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -12 & 6 & 3\\ -9 & 6 & -3 & 12\end{pmatrix}.$$

Наслідок. За знак матриці *А* можна виносити число тільки тоді, коли це число є множником <u>кожного</u> елемента матриці *А*.

Наприклад,

$$\begin{pmatrix}8 & 4 & 2\\ -2 & 4 & 8\end{pmatrix}=\left|\begin{matrix}\text{Число 2 є множником}\\ \text{усіх елементів матриці}\end{matrix}\right|=2\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

2.2.3 Множення двох матриць

Матрицю *А* можна помножити на матрицю *В*, якщо кількість стовпців матриці *А* дорівнює кількості рядків матриці *В*, тобто якщо вимірність матриці *А* $m\times k$, а матриці *В* - $k\times n$, тоді вимірність матриці *С* така:

$$(a_{ij})_{m\times \underline{k}}\cdot(b_{ij})_{\underline{k}\times n}=(c_{ij})_{m\times n}.$$

Елемент c_{ij} матриці $C=A\cdot B$ дорівнює сумі добутків елементів *i*-го рядка матриці *А* на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці *В*:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}. \qquad (1.7)$$

Приклад № 6. Знайти добуток матриць

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Вимірність матриці *A*: 2×3; вимірність матриці *B*: 3×4. Тоді 2×4 - вимірність матриці $C=A\cdot B$. Отже, матриці *A* та *B* можна перемножити. Дістаємо:

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}=\left|\begin{matrix}\text{Використовуємо} \\ \text{формули (1.7)}\end{matrix}\right|=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 4+3\cdot(-1)+1\cdot 0 & 2\cdot 0+3\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot(-1)+3\cdot 0+1\cdot(-1) & 2\cdot 2+3\cdot 1+1\cdot(-2) \\ -2\cdot 4+2\cdot(-1)+(-1)\cdot 0 & -2\cdot 0+2\cdot 2+(-1)\cdot 1 & -2\cdot(-1)+2\cdot 0+(-1)\cdot(-1) & -2\cdot 2+2\cdot 1+(-1)\cdot(-2) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 8-3 & 6+1 & -2-1 & 4+3-2 \\ -8-2 & 4-1 & 2+1 & -4+2+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & 5 \\ -10 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауваження. **1.** Квадратні матриці одного порядку можна завжди перемножати.

2. Добуток матриць *A* та *B* залежить від того, яка матриця є першим множником, тобто у загальному випадку

$$A\cdot B\neq B\cdot A.$$

2.2.4 Обернена матриця

Оберненою матрицею до квадратної матриці *A* називається матриця A^{-1}, що задовольняє умову

$$A^{-1}A=AA^{-1}=E.$$

При цьому $\det A\neq 0$.

Обернена матриця A^{-1} до матриці A $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ третього порядку обчислюється за формулою

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{31} \\ A_{21} & A_{22} & A_{32} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad (1.8)$$

де $A_{ij}\ (i,\ j=1,2,3)$ - алгебраїчні доповнення відповідних елементів a_{ij} визначника матриці A:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Приклад № 7. Знайти матрицю, обернену до матриці *A*, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Застосовуємо формулу (1.8). Знайдемо визначник матриці *A*. Маємо

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0-2-3-0-12-1=-18\neq 0.$$

Обернена матриця існує. Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів визначника матриці *A*. Дістаємо

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0&2\\3&1\end{vmatrix}=-6; \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&2\\-1&1\end{vmatrix}=-(1-(-2))=-3;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1&0\\-1&3\end{vmatrix}=3; \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}1&-1\\3&1\end{vmatrix}=-(1+3)=-4;$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}2&-1\\-1&1\end{vmatrix}=2-1=1 \quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2&1\\-1&3\end{vmatrix}=-(6+1)=-7;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1&-1\\0&2\end{vmatrix}=2; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}=-(4+1)=-5$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}=-1.$$

Тоді

$$A^{-1}=-\frac{1}{18}\begin{pmatrix}-6&-4&2\\-3&1&-5\\3&-7&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{6}{18}&\frac{4}{18}&-\frac{2}{18}\\\frac{3}{18}&-\frac{1}{18}&\frac{5}{18}\\-\frac{3}{18}&\frac{7}{18}&\frac{1}{18}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{18}&\frac{5}{18}\\-\frac{1}{6}&\frac{7}{18}&\frac{1}{18}\end{pmatrix}.$$

Приклад № 8. Знайти матрицю *X*, якщо *AX*=*B* і $A=\begin{pmatrix}4&1\\2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}$.

. Помножимо обидві частини рівняння *AX*=*B* на матрицю A^{-1}. Тоді A^{-1} *AX*= $A^{-1}B$ або $X=A^{-1}B$, оскільки A^{-1} *A*=*E* і *EX*=*E*. Знаходимо A^{-1}. Маємо $\det A=\begin{vmatrix}4&1\\2&-1\end{vmatrix}=-4-2=-6.$

Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів визначника матриці *A*. Дістаємо

$$A_{11} = -1, \quad A_{12} = -2, \quad A_{21} = -1, \quad A_{22} = 4.$$

Маємо $A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$

Тоді $X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3+1 & 1+0 \\ 6-4 & 2-0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$

3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3. \end{cases} \tag{1.9}$$

називається неоднорідною, якщо принаймні одна із правих частин рівнянь h_i, $i = 1, 2, 3,$ не дорівнює нулю. Якщо всі $h_1 = h_2 = h_3 = 0$, то така система називається однорідною. Коефіцієнти системи a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$ - числа, x_1, x_2, x_3 - невідомі.

Кількість рівнянь визначає порядок системи. Система (1.9) – система третього порядку.

Визначник, складений із коефіцієнтів при невідомих, називається головним визначником системи (1.9):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{1.10}$$

3.1 Розв’язання неоднорідної системи лінійних рівнянь, якщо $\Delta \neq 0$.

Якщо $\Delta \neq 0$, то існує єдиний розв’язок x_1, x_2, x_3 системи (1.10), який можна знайти

- за формулами Крамера;

- матричним методом.

3.1.1 Формули Крамера.

Формули Крамера мають вигляд:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}. \qquad (1.11)$$

де визначники Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3} знаходяться із головного визначника системи заміною відповідно першого, другого і третього стовпців стовпцем із вільних членів. А саме,

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 & a_{13} \\ a_{21} & h_2 & a_{23} \\ a_{31} & h_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & h_2 \\ a_{31} & a_{32} & h_3 \end{vmatrix}. \qquad (1.12)$$

3.1.2 Матричний метод

Запишемо систему (1.9) у матричному вигляді

$$AX = H, \qquad (1.13)$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - матриця, складена, із коефіцієнтів при невідомих x_1, x_2, x_3; матриця $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - стовпцева матриця, складена із невідомих, матриця $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ - стовпцева матриця, складена із правих частин рівняння системи (1.9) – вільних членів.

Розв’язок X матричного рівняння (1.10) має вигляд

$$X = A^{-1}H. \qquad (1.14)$$

Це і є розв'язок системи (1.9). Матриця A^{-1} обернена до матриці A.

Схема розв'язку системи* (*1.9*) *матричним методом

1. Знаходимо $\det A$. Якщо $\det A \neq 0$, то

2. Знаходимо матрицю A^{-1}.

3. Знаходимо добуток матриць $A^{-1}H$ і тим самим розв'язок системи.

Приклад № 9. Знайти розв'язок заданої системи матричним методом.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв'язання. Записуємо систему у матричному вигляді:

$$AX = H,$$

де $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Згідно з формулою (1.14)

$$X = A^{-1}H.$$

Використаємо схему знаходження розв'язку системи (1.9) матричним методом.

1. Знаходимо

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 12 + 1 + 9 + 4 - 4 = 34 \neq 0.$$

2. Знаходимо матрицю A^{-1} за формулою (1.9). Маємо

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=6+2=8,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-(2-6)=4,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-1-9=-10,\ A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-(4-1)=-3,$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4+3=7,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-(-2-6)=8,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4+3=7,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(4+1)=-5,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-2=4.$$

Тоді

$$A^{-1}=\frac{1}{34}\begin{pmatrix}8 & -3 & 7\\ 4 & 7 & -5\\ -10 & 8 & 4\end{pmatrix}.$$

Перевіримо, що $A^{-1}A=E$:

$$A^{-1}=\frac{1}{34}\begin{pmatrix}8 & -3 & 7\\ 4 & 7 & -5\\ -10 & 8 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{34}\begin{pmatrix}16-3+21 & 16-9-7 & -8-6+14\\ 8+7-15 & 8+21+5 & -4+14-10\\ -20+8+12 & -20+24-4 & 10+16+8\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{34}\begin{pmatrix}34 & 0 & 0\\ 0 & 34 & 0\\ 0 & 0 & 34\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

3. Знаходимо $A^{-1}H=X$. Маємо

$$A^{-1}H=\frac{1}{34}\begin{pmatrix}8 & -3 & 7\\ 4 & 7 & -5\\ -10 & 8 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 9\\ -1\end{pmatrix}=\frac{1}{34}\begin{pmatrix}0-27-7\\ 0+63+5\\ 0+72-4\end{pmatrix}=\frac{1}{34}\begin{pmatrix}-34\\ 68\\ 68\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix},\ \text{тобто}\ x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3=2.$$

3.3 Розв'язання однорідної системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0.\end{cases}\qquad(1.17)$$

Якщо $\underline{\Delta\neq 0}$, то система (1.17) має єдиний розв'язок $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0.$

Якщо $\underline{\Delta=0}$, то система (1.17) має безліч розв'язків.

Наприклад, розв'язками системи (1.17) при $\Delta=0$ є
$$x_1=\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}t=A_{31}t,\ x_2=-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{21}&a_{23}\end{vmatrix}t=A_{32}t,\ x_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}t=A_{33}t$$
при умові, що $\Delta_1=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0.$

Розв'язок системи (1.17) позначають ще так:

$$x_1^{30}=A_{31}t,\quad x_2^{30}=A_{32}t,\quad x_3^{30}=A_{33}t,\qquad(1.18)$$

де t – параметр (будь-яке дійсне число).

Запис $x_1^{30},\ x_2^{30}, x_3^{30}$ означає загальний розв'язок однорідної системи (1.17).

Приклад № 10. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0,\\x_1-2x_2+2x_3=0,\\3x_1+x_2+x_3=0.\end{cases}$$

Розв'язання. Обчислюємо визначник заданої системи. Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Додамо елементи першого} \\ \text{рядка до відповідних еле -} \\ \text{ментів другого рядка} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(за властивістю 4 визначників).

Отже, система має безліч розв'язків.

Розглянемо систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Для цієї системи враховуючи, що $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, маємо

$$x_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} t = 4t,$$

$$x_2 = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} t = -5t,$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} t = -7t.$$

Це і є розв'язок системи рівнянь.

Отже $x_1 = 4t,\ x_2 = -5t,\ x_3 = -7t.$

3.4 Розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь у випадку, коли $\Delta = 0$.

Нехай визначник системи (1.9) $\Delta = 0$.

При цьому можливі два випадки:

- система (1.9) має безліч розв'язків;
- система (1.9) не має жодного розв'язку.

Для знаходження розв'язку системи (1.9) застосовуємо наступну схему.

Схема розв'язку системи (1.9), коли $\Delta = 0$

1. Знаходимо головний визначник системи.

2. Якщо $\Delta = 0$, то розв'язуємо систему двох рівнянь з трьома невідомими, наприклад, систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2, \end{cases} \qquad (1.19)$$

при умові, що $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$

Вибираємо одне невідоме, наприклад, x_3 (1.19), два інших невідомих x_1, x_2 - знаходимо, розв'язавши систему (1.19).

3. Одержаний розв'язок підставляємо у третє рівняння системи (1.9):

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3.$$

4. Якщо одержаний розв'язок не задовольняє це рівняння, то система лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь (1.9) розв'язків не має.

5. Якщо одержаний розв'язок задовольняє третє рівняння системи (1.9), то це означає, що ми змогли підібрати частинний розв'язок системи (1.9), а саме $x_1^{чн}$, $x_2^{чн}$, $x_3^{чн}$, тобто система (1.9) має безліч розв'язків, які знаходяться за формулами

$$x_1^{зн} = x_1^{чн} + x_1^{зо}, \quad x_2^{зн} = x_2^{чн} + x_2^{зо}, \quad x_3^{зн} = x_3^{чн} + x_3^{зо},$$

де $x_1^{зо}$, $x_2^{зо}$, $x_3^{зо}$ - загальний розв'язок (1.18) відповідної однорідної системи (1.17). В даному випадку дістаємо

$$x_1^{зн} = x_1^{чн} + A_{31}t, \quad x_2^{зн} = x_2^{чн} + A_{32}t, \quad x_3^{зн} = x_3^{чн} + A_{33}t \qquad (1.20)$$

(t - параметр).

II Векторна алгебра

1 Основні означення

Під вектором розуміємо величину, яка характеризується довжиною (модулем) і напрямом (рис.1).

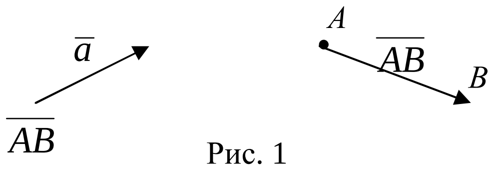


Рис. 1

Розглядатимемо дво- і тривимірні вектори. Усі положення, наведені для таких векторів, мають місце і для n-вимірних векторів ($n \in N$).

Тривимірний вектор можна задати так:

1) $$\overline{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\},$$

a_x, a_y, a_z - координати вектора - проекції на координатні осі;

2) $$\overline{a} = \overline{AB} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\},$$

(2.1)

точка A – початок вектора $\overline{a}$, B – кінець, $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$;

3) $$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\ -$$

розклад вектора $\vec{a}$ за координатними ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$;

4) $$\vec{a} = |\overline{a}| \cdot \overline{a}^0 = |\overline{a}|\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$$

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,, \qquad (2.2)$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|}, \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}.$$

Два вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ рівні між собою, якщо

$$a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z. \qquad (2.3)$$

Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), якщо

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$$

(λ - число).

Ділення відрізка AB у заданому співвідношенні $\lambda = \dfrac{AB}{CB}$, де $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $B(x_2;\, y_2;\, z_2)$, $C(x_3;\, y_3;\, z_3)$ і C - точка ділення.

Координати точки ділення

$$x_c = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y_c = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \qquad z_c = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (2.4)$$

Якщо відрізок AB ділиться точкою C навпіл, то

$$x_c = \frac{x_1 + \lambda x_2}{2}; \qquad y_c = \frac{y_1 + \lambda y_2}{2}; \qquad z_c = \frac{z_1 + \lambda z_2}{2}.. \qquad (2.5)$$

2 Лінійні операції над векторами

1 Сума двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$

Сума двох векторів знаходиться за правилом трикутника (рис.2а) або правилом паралелограма (рис. 2б).

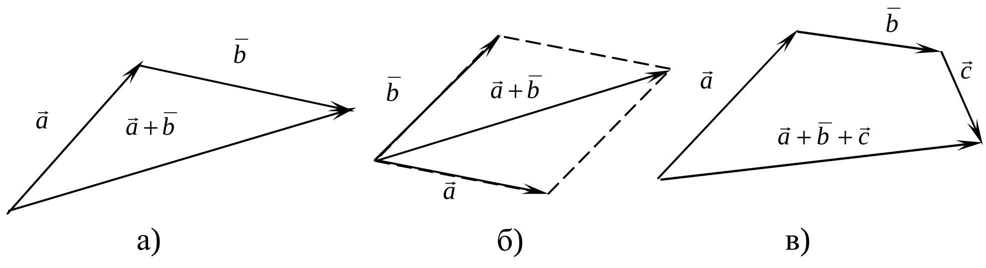


Рис. 2

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задано координатами $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}.$$

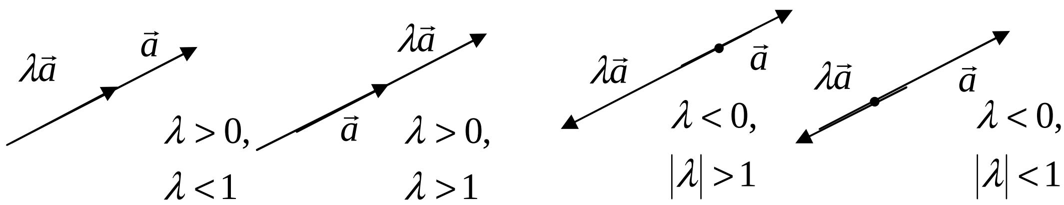
Сума кількох векторів знаходиться за правилом многокутника (рис. 3 в)).

Якщо вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ ...,\vec{m}$ задано координатами, то їх сума дорівнює

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{a}+\vec{b}+\ldots+\vec{m} = \\ &= \{a_x+b_x+\ldots+m_x, a_y+b_y+\ldots+m_y,\ a_z+b_z+\ldots+m_z\}.\end{aligned} \quad (2.6)$$

2 Множення вектора $\vec{a}$ на число λ

Множення вектора $\overline{a}$ на число λ пояснено на рис.3.



а) б) в) г)

Рис. 3

Якщо вектор $\vec{a}$ задано координатами, то вектор $\lambda\vec{a}$ дорівнює

$$\lambda\vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}. \quad (2.7)$$

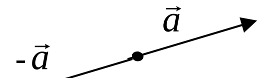


Рис. 4

Якщо $\lambda = -1$, то вектор $-\vec{a}$ є протилежно напрямлений по відношенню до $\vec{a}$ (рис. 4)

і $-\vec{a} = \{-a_x, -a_y, -a_z\}.$

3 Різниця векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ (рис. 5).

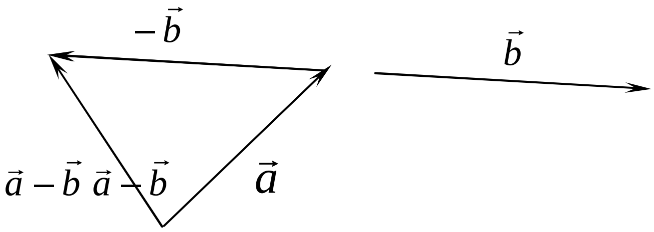


Рис. 5

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ мають спільний початок, то $\vec{a}+\vec{b}$ та $\vec{a}-\vec{b}$ - це вектори, які співпадають з діагоналями паралелограма, побудованого на цих векторах (рис.6).

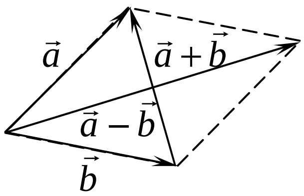


Рис. 6.

Якщо $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$, то

$$\vec{a}-\vec{b}=\{a_x-b_x;a_y-b_y;a_z-b_z\}.$$

Лінійна комбінація векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c},...\vec{m}$ дорівнює

$$\vec{u}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}+...+\lambda_m\vec{m}$$

($\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,...,\lambda_m$ - числа).

Якщо $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, то $\vec{a}$ та $\vec{b}$ - колінеарні ($\vec{a}\|\vec{b}$) і умова колінеарності векторів має вигляд

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=\lambda. \qquad (2.8)$$

Якщо $\vec{c}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - компланарні, тобто, лежать в одній або паралельних площинах.

Ортом вектора $\vec{a}$ називається вектор $\vec{a}^0$, модуль якого дорівнює одиниці $\left(\left|\vec{a}^0\right|=1\right)$, а напрям співпадає із напрямом вектора $\vec{a}$, тобто

$$\vec{a}^0=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\},$$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\overline{a}|};\cos\beta=\frac{a_y}{|\overline{a}|};\cos\gamma=\frac{a_z}{|\overline{a}|}\ - \qquad (2.9)$$

- напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ (*α*, *β*, γ – кути вектора $\vec{a}$ з додатними напрямами відповідно осей координат *Ox*, *Oy*, *Oz*) і

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \qquad (2.10)$$

Тоді

$$\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}^0, \qquad (2.11)$$

де

$$\vec{a}^0=\left\{\frac{a_x}{|\overline{a}|};\frac{a_y}{|\overline{a}|};\frac{a_z}{|\overline{a}|}\right\}. \qquad (2.12)$$

3 Добутки векторів

3.1 Скалярний добуток двох векторів

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ - це число, яке дорівнює

$$\overrightarrow{ab}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}), \qquad (2.13)$$

де $|\vec{a}|$, $\left|\vec{b}\right|$ - модулі векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Якщо вектори задано координатами, а саме: $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, то їх скалярний добуток дорівнює

$$\overrightarrow{ab}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (2.14)$$

Властивості скалярного добутку векторів

1 Скалярний добуток не залежить від порядку множення векторів:

$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ba}. \qquad (2.15)$$

2 Має місце розподільний закон:

$$\left(\overrightarrow{a+b}\right)\cdot \vec{c} = \overrightarrow{a\cdot c} + \overrightarrow{b\cdot c}. \qquad (2.16)$$

3 Має місце сполучний закон відносно скаляра λ:

$$\lambda\left(\overrightarrow{ab}\right) = \lambda\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\lambda\vec{b}. \qquad (2.17)$$

Використовуючи властивості 1 – 3 скалярного добутку, вектори можна множити як многочлени

4 Косинус кута $\varphi = \left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)$ дорівнює

$$\cos\varphi = \frac{\overline{ab}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} \Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (2.18)$$

5 Умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ ($\cos\varphi = 0$):

$$\vec{a}\perp\vec{b} : \vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

6 Проекція одного вектора на інший:

$$\text{ïð}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\overline{ab}}{|\bar{b}|}, \quad \text{ïð}_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\overline{ab}}{|\bar{a}|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{ïð}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}, \text{ïð}_{\bar{a}}|\bar{b}| = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \qquad (2.19)$$

7 Модуль вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (2.20)$$

8 Робота *A* сили $\vec{F}$ при переміщенні точки її прикладання із початку M_1 вектора $\vec{S} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ в його кінець M_2:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} \quad \Rightarrow \quad A = F_x S_x + F_y S_y + F_z S_z. \qquad (2.21)$$

Із властивості скалярного добутку маємо наступні співвідношення для координатних ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{i}^{\,2} = 1, \qquad \vec{j}^{\,2} = 1, \qquad \vec{k}^{\,2} = 1,$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0, \ \ \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0, \ \ \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0.$$

Приклад № 1. Перевірити, чи є точки *A* (2; -3), *B* (4; 2), *C* (4; -10) *D* (8; 0) вершинами трапеції *ABCD*.

Розв'язання. Якщо *ABCD* – трапеція, то протилежні її сторони паралельні. Тому перевіримо колінеарність векторів $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, та $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$. Маємо

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \{4-2; 2-(-3)\} = \{2; 5\}, \ \vec{b} = \overrightarrow{CD} = \{8-4; \ 0+10\} = \{4; \ 10\}.$$

Перевіряємо виконання умови колінеарності (2.8), тобто, чи виконується рівність $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y}$. Дістаємо

$$\frac{2}{4} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = \lambda.$$

Отже, вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні, тобто сторони *AB* та *CD* паралельні і *ABCD* – трапеція.

Приклад № 2. У точці *A* прикладено сили $\vec{F}_1 = \overrightarrow{AB}, \vec{F}_2 = \overrightarrow{AC}, \vec{F}_3 = \overrightarrow{AD}.$ Знайти рівнодійну цих сил і її довжину, якщо *A* (2; -1; 0), *B* (3; -2; 1), *C* (5; -2; 1), *D* (-4; 2; 3).

Розв'язання. Рівнодійна $\vec{R}$ – це сума сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Знаходимо координати сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$. Дістаємо

$$\vec{F}_1 = \overrightarrow{AB} = \{3-2; -2-(-1); 1-0\} = \{1; -1; 1\},$$
$$\vec{F}_2 = \overrightarrow{AC} = \{5-2; -2-(-1); 1-0\} = \{3; -1; 1\},$$
$$\vec{F}_3 = \overrightarrow{AD} = \{-4-2;\ 2-(-1); 3-0\} = \{-6; 3; 3\}.$$

Тоді $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \{1+3-6; -1-1+3; 1+1+3\} = \{-2; 1; 5\}.$

Використовуємо формулу (2.2) для знаходження довжини рівнодійної. Маємо

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2 + (R_z)^2}, \quad \left|\vec{R}\right| = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}.$$

Приклад № 3. Знайти орт вектора $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

Розв'язання. Орт вектора знаходимо за формулою (2.12). Спочатку обчислюємо за формулою (2.2) модуль вектора. Дістаємо $|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$.

Отже, $\vec{a}^{\,0} = \left\{-\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right\}.$

3.2 Векторний добуток двох векторів

Векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ - це вектор, що задовольняє умови:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$ (вектор $\vec{c}$ перпендикулярний площині, де лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 7));

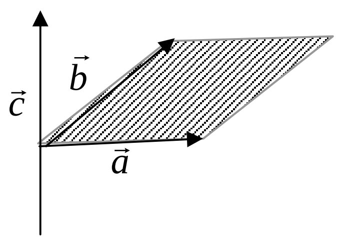


Рис. 7

2) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку;

3) модуль векторного добутку дорівнює

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right). \qquad (2.22)$$

Якщо $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$, то векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$ дорівнює

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Властивості векторного добутку двох векторів

1 Модуль векторного добутку двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

$$S_{\square}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \qquad (2.23)$$

Наслідок. Площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, дорівнює

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \qquad (2.24)$$

2 Векторний добуток залежить від порядку, в якому перемножуються вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, тобто

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}. \qquad (2.25)$$

3 Має місце розподільний закон відносно суми векторів:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}. \qquad (2.26)$$

4 Має місце сполучний закон відносно скаляра λ:

$$\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\lambda\vec{b} \qquad (2.27)$$

Властивості 2, 3, 4 дозволяють перемножити вектори як многочлен на многочлен.

5 Умова колінеарності двох векторів:

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0.$$

Зокрема, $\vec{a}\times\vec{a}=0.$ (2.28)

6 Для координатних ортів $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ маємо:

$$\begin{aligned} &\vec{i}\times\vec{i}=0, && \vec{j}\times\vec{j}=0, && \vec{k}\times\vec{k}=0,\\ &\vec{i}\times\vec{j}=k, && \vec{j}\times\vec{i}=-k, && \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\\ &\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}, && \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}, && \vec{i}\times\vec{k}=-j. \end{aligned} \tag{2.29}$$

7 Момент сили $\vec{F}$, прикладеної в точці A, відносно точки O дорівнює векторному добутку вектора $\overrightarrow{OA}$ на вектор $\vec{F}$:

$$\overrightarrow{M_0(F)}=\overrightarrow{OA}\times\vec{F}$$

або

$$\overrightarrow{M_0(F)}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ S_x & S_y & S_z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}, \tag{2.30}$$

де $\vec{S}=\overrightarrow{OA}=\{S_x;\ S_y;\ S_z\},\ \vec{F}=\{F_x;\ F_y;\ F_z\}.$

Приклад № 4. Знайти $\left|(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})\right|$, якщо $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, \vec{a},\wedge\vec{b}=\dfrac{\pi}{6}.$

Розв'язання. Знаходимо векторний добуток $(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})$, використовуючи властивості векторного добутку двох векторів. Маємо

$$\begin{aligned}&(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})=3\vec{a}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{a}\times 2\vec{b}-\vec{b}\times 2\vec{b}=\\ &=\left|\begin{matrix}\text{Використовуємо, що } \vec{a}\times\vec{a}=0, \vec{b}\times\vec{b}=0, -\vec{b}\times\vec{a}=\\ =\vec{a}\times\vec{b} \text{ і формулу (2.28)}\end{matrix}\right|=\\ &=\vec{a}\times\vec{b}+6\vec{a}\times\vec{b}=7\vec{a}\times\vec{b}.\end{aligned}$$

Знаходимо модуль цього векторного добутку, використовуючи формулу (2.22). Дістаємо

$$\left|(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})\right| = \left|7\vec{a}\times\vec{b}\right| = 7\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = 7\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin(\vec{a}\wedge\vec{b}) =$$

$$= 7\cdot 1\cdot 2\cdot \sin\frac{\pi}{6} = 7.$$

3.3 Мішаний добуток трьох векторів

Мішаний добуток векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - це число, що обчислюється за правилом

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \Leftrightarrow \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (2.32)$$

Властивості мішаного добутку трьох векторів

1 Мішаний добуток трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ не залежить від того, які вектори перемножаться векторно. Не можна лише змінювати порядок векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$$\begin{aligned}&\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) = \\ &= -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c} = -\vec{a}\left(\vec{c}\times\vec{b}\right) = -\vec{b}\left(\vec{a}\times\vec{c}\right).\end{aligned} \qquad (2.33)$$

2 Модуль мішаного добутку трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах як на сторонах (рис. 8).

$$V = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \qquad (2.34)$$

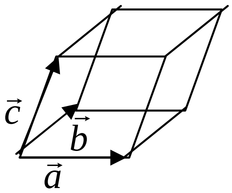


Рис. 8

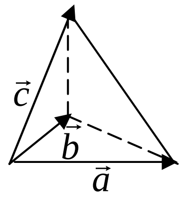


Рис. 96

3 Об’єм трикутної піраміди (Рис. 9) – тетраедра – дорівнює

$$V_{тетр} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \qquad (2.35)$$

Умова компланарності трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.36)$$

Приклад № 5. Перевірити, чи лежать точки *A* (2; 1; -1), *B* (3; 0; 1), C (2; -1; 2), D (4; 1; 3) в одній площині.

Розв’язання. Запишемо координати трьох векторів, що виходять із однієї точки, наприклад, *A*: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$. Задані точки лежать в одній площині, якщо ці вектори компланарні.

Знаходимо вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$. Маємо

$$\overrightarrow{AB} = \{1; -1; 2\},\ \overrightarrow{AC} = \{0; -2; 3\},\ \overrightarrow{AD} = \{2; 0; 4\}.$$

Перевіряємо, чи дорівнює нулю їх мішаний добуток. Дістаємо

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 6 + 8 = -6 \neq 0.$$

Отже, задані точки не лежать в одній площині.

Приклад № 6. Знайти об'єм тетраедра і довжину висоти, опущеної із вершини A, якщо A (2; 3; -1), B (3; 0; 2), C (2; -2; 1), D (1; -3; 0).

Розв'язання. Зробимо ескіз тетраедра (рис. 10).

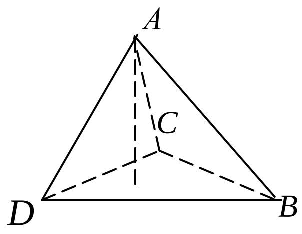


Рис. 10

Об'єм тетраедра обчислюється за формулою (2.34), а саме:

$$V = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|,$$

де $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - вектори, що співпадають з відповідними ребрами тетраедра.

Нехай $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DB}$. Об'єм тетраедра обчислюється за формулою

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$$

Звідки $h = \dfrac{V}{\frac{1}{3} S_{осн}}$, $h = \dfrac{\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}$.

(2.36)

$S_{осн}$ - це площа трикутника BCD і $S_{осн} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DB}\right|$. Тоді

$$h = \frac{\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DC}\right) \cdot \overrightarrow{DA}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DB}\right|} = \frac{\left(\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DC}\right) \cdot \overrightarrow{DA}}{\left|\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DB}\right|}.$$

Знаходимо вектори:

$$\overrightarrow{DA} = \{1; 6; -1\},\ \overrightarrow{DB} = \{2; 3;\ 2\},\ \overrightarrow{DC} = \{1;\ 1;\ 1\}.$$

Знаходимо

$$\left(\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB}\right)\cdot\overrightarrow{DC}=\begin{vmatrix}1 & 6 & -1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=3+12-2+3-2-12=2.$$

$$V_{\grave{o}\mathring{a}\grave{o}\eth}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB}\right)\cdot\overrightarrow{DC}\right|=\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{1}{3}.$$

Знаходимо

$$\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-\vec{i}+\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DB}\right|=\sqrt{(-1)^2+0+1^2}=\sqrt{2}.$$

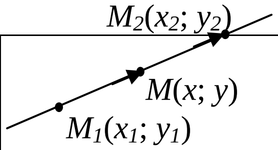
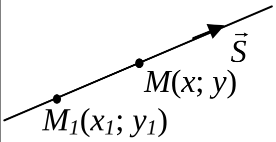
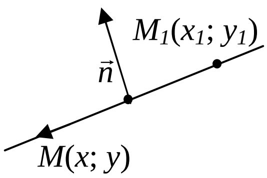
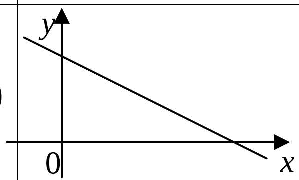
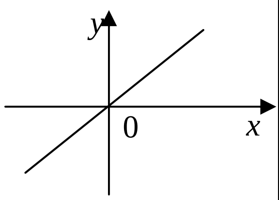
Знаходимо h за формулою (2.37). Маємо

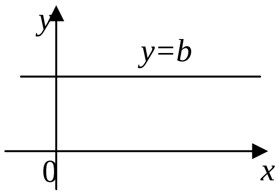
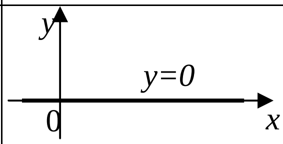
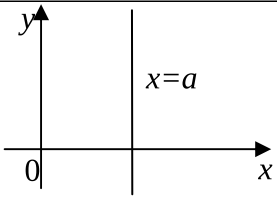
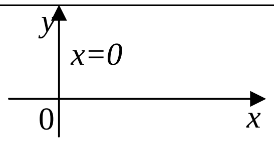
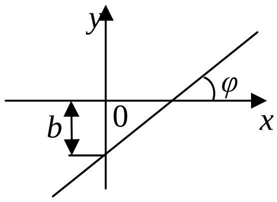
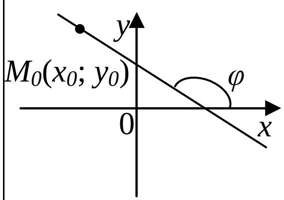
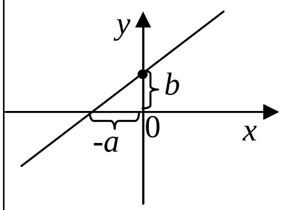
$$h=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

III Аналітична геометрія

1 Пряма на площині

Різні вигляди рівнянь прямої

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$, (3.1) $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$		Рівняння прямої, що проходить через 2 задані точки $M_1(x_1;\, y_1)$, $M_2(x_2;\, y_2)$
$\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}$ (3.2) $\vec{S}=\{l;m\}$		Канонічне рівняння прямої (рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_1(x_1;\, y_1)$ і має заданий напрямний вектор $\vec{S}=\{l;\, m\}$)
$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$ $\vec{n}=\{A;\, B\}$ (3.3)		Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_1(x_1;\, y_1)$ і має заданий нормальний вектор $n=\{A;B\}$
$\vec{n}=\{m;-l\}$ (3.4)		Зв'язок між напрямним вектором $\vec{S}=\{l;m\}$ і нормальним вектором $\vec{n}$ прямої
$Ax+By+C=0$ $ABC\neq 0$ (3.5)		Загальне рівняння прямої
$y=-\dfrac{A}{B}x$, $AB\neq 0, C=0$ $(y=kx)$		Рівняння прямої, що проходить через початок координат $O\,(0;\, 0)$

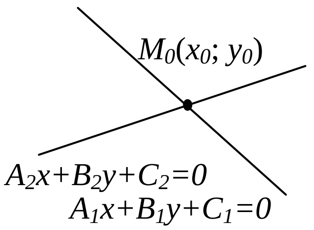
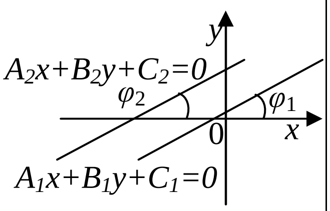
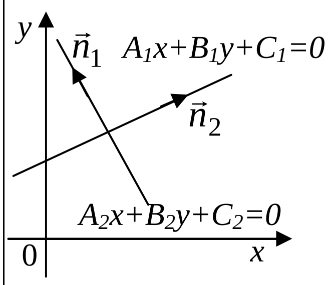
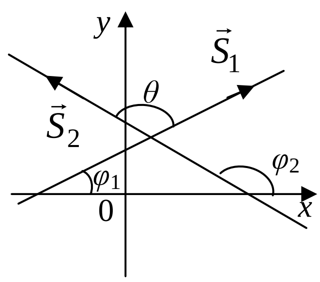
$y=-\dfrac{C}{B},$ $BC\neq 0, A=0$ (3.5а) $(y=b)$		Рівняння прямої, паралельної осі Ox
$y=0$ (3.5б)		Рівняння осі Ox
$x=-\dfrac{C}{A},$ $AC\neq 0, B=0$ $(x=a)$		Рівняння прямої, паралельної осі Oy
$x=0$		Рівняння осі Oy
$y=kx+b,$ (3.6) $k=tg\varphi$ $k=-\dfrac{A}{B},$ (3.7) $k=\dfrac{m}{l}$		Рівняння прямої, що має заданий кутовий коефіцієнт k ($k=\mathrm{tg}\varphi$) і відтинає на осі Oy відрізок величини b
$y-y_0=k(x-x_0)$ (3.8)		Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт k ($k=\mathrm{tg}\varphi$)
$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ (3.9)		Рівняння прямої у відрізках на осях (a – величина відрізка, який відтинає пряма на осі Ox, b – величина відрізка, який відтинає пряма на осі Oy)

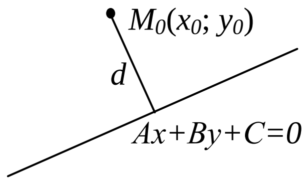
Взаємне розташування двох прямих:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,\ \ A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

$$y = k_1x + b_1,\ \ y = k_2x + b_2 \qquad (k_1 = tg\varphi_1,\ k_2 = tg\varphi_2)$$

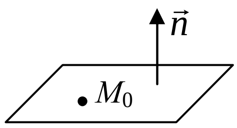
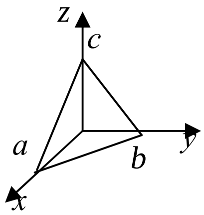
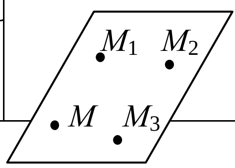
$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1},\quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2},\quad (\vec{S}_1 = \{l_1; m_1\},\quad \vec{S}_2 = \{l_2; m_2\})$$

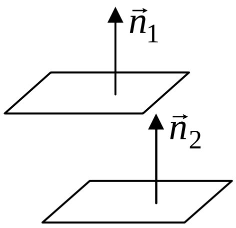
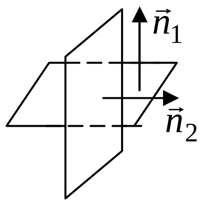
<table>
<tr>
<td>Точка перетину
$M_0\ (x_0;\ y_0)$</td>
<td>
</td>
<td>$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$
$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow (x_0; y_0)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Прямі паралельні</td>
<td>
</td>
<td>$\Delta = 0 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \lambda$ (3.10)
$k_1 = k_2 \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$
$\vec{n}_2 = \lambda\vec{n}_1\ \ (\lambda \neq 0)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Прямі
перпендикулярні</td>
<td>
</td>
<td>$\vec{n}_1\,\vec{n}_2 = 0$,
$A_1A_2 = -B_1B_2$, (3.11а)
$l_1l_2 + m_1m_2 = 0$,
$k_2 = -\frac{1}{k_1}$ (3.11б)</td>
</tr>
<tr>
<td>Кут θ між
прямими</td>
<td>
</td>
<td>$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$ (3.12а)
$\cos\theta_1 = \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{\lvert\vec{S}_1\rvert \cdot \lvert\vec{S}_2\rvert}$ (3.12б)
$\cos\theta_2 = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\lvert\vec{n}_1\rvert \cdot \lvert\vec{n}_2\rvert}$ (3.12в)
$\theta_1 + \theta_2 = \pi$</td>
</tr>
</table>

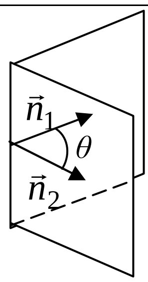
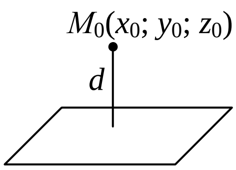
Віддаль від точки M_0 $(x_0; y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$		$d = \dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ (3.13)

2 Площина у просторі

Деякі відомості про пряму у просторі

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+$ $+C(z-z_0)=0,$ $\vec{n}=\{A;B;C\},$ $M_0(x_0;y_0;z_0)$ (3.15)		Рівняння площини, що проходить через задану точку M_0 і має заданий нормальний вектор $\vec{n}$
$Ax+By+Cz+D=0,$ $\vec{n}=\{A;B;C\},\ ABC \neq 0$		Загальне рівняння площини
$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$		Рівняння площини у відрізках на координатних осях (*a*, *b*, *c* – величини відрізків, які площина відтинає відповідно на осях *Ox*, *Oy*, *Oz*)
$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$		Рівняння площини, що проходить через 3 задані точки M_1, M_2, M_3

$M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$ (3.16)		
$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, $\vec{n}_1=\{A_1;B_1;C_1\}$, (3.17) $\vec{n}_2=\{A_2;B_2;C_2\}$.		Умова паралельності площин $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ $(\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2)$
$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$, $\vec{n}_1=\{A_1;B_1;C_1\}$, $\vec{n}_2=\{A_2;B_2;C_2\}$.		Умова перпендикулярності площин $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $(\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2,\ \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0)$

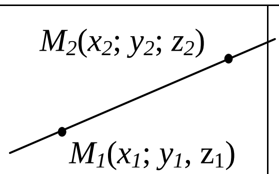
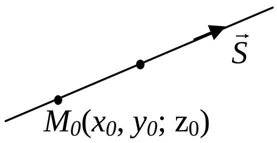
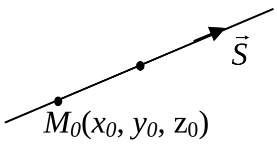
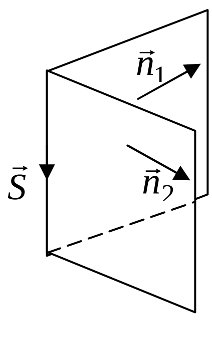
$\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$ (3.18)		Кут між площинами $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $\theta=\{\vec{n}_1,\hat{}\,\vec{n}_2\}$
$d=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (3.19)		Віддаль від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$

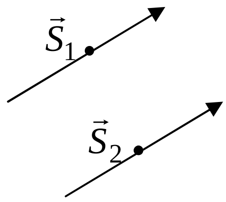
Приклад № 1. Записати рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2;\,-1;\,-3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.

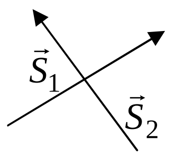
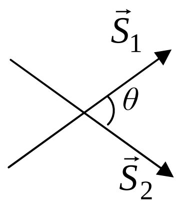
Розв'язання. Заданий вектор $\vec{n}$ буде нормальним вектором шуканої площини $\vec{n}=\{2;-1;\,2\}$. Використовуємо формулу (3.15). Маємо $2(x-2)-(y+1)+2(z+3)=0$, $2x-y+2z+1=0$ - шукане рівняння площини.

3 Пряма у просторі

Деякі відомості про пряму у просторі

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ (3.20)		Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2;\,y_2,\,z_2)$
$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p}$ $\vec{S}=\{l;\,m;\,p\}$ (3.21)		Канонічне рівняння прямої, $\vec{S}=\{l,m,p\}$- напрямний вектор, $M_0(x_0,\,y_0,\,z_0)$ – точка прямої
$x=lt+x_0$, $y=mt+y_0$, $z=pt+z_0$ $\vec{S}=\{l;\,m;\,p\}$ (3.22)		Параметричне рівняння прямої, t - параметр, $M_0(x_0,\,y_0,\,z_0)$ – точка прямої
$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ $\vec{S}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}$ (3.23)		Загальне рівняння прямої – лінія перетину двох непаралельних площин, $\vec{S}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$ - напрямний вектор прямої

$\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$ (3.24)		Умова паралельності двох прямих $\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ і $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, $\vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2$

$l_1 l_2 + m_1 m_2 + p_1 p_2 = 0$ (3.25)		Умова перпендикулярності двох прямих $\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ і $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, $\vec{S}_1 \perp \vec{S}_2$.
$\cos\theta=\dfrac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + p_1 p_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+p_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+p_2^2}}$ (3.26)		Кут θ між двома прямими, що перетинаються: $\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ і $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, $\theta=(\vec{S}_{1,}\,\hat{}\,\vec{S}_2)$.

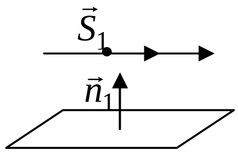
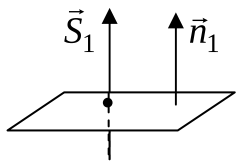
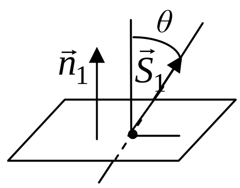
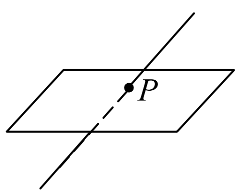
Приклад № 2. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(3; -1; -2)$ паралельно вектору $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$.

Розв'язання. За напрямний вектор $\vec{S}$ вибираємо вектор $\vec{a}$: $\vec{S}=\{2;-3;1\}$. Використовуємо канонічні рівняння прямої (3.21). Маємо $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z+2}{1}$.

4 Взаємне розташування прямої та площини у просторі

Пряма $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p}$, площина $Ax+By+Cz+D=0$

Деякі відомості про взаємне розташування прямої та площини у просторі

$Al+Bm+Cp=0$, $\vec{S}=\{l;m;p\}$, $\vec{n}=\{A;B;C\}$, $\vec{n}\cdot\vec{S}=0$.		Умова паралельності прямої $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p}$ і площини $Ax+By+Cz+D=0$
$\dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{p}$, $\vec{n}\parallel\vec{S}$		Умова перпендикулярно-сті прямої і площини
$\sin\theta=\dfrac{Al+Bm+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+p^2}}$, $\sin\theta=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{S}}{\lvert\vec{n}\rvert\cdot\lvert\vec{S}\rvert}$.		Кут θ між прямою і площиною
$\begin{cases}Ax+By+Cz+D=0,\\ x=lt+x_0,\\ y=mt+y_0,\\ z=pt+z_0\end{cases}$ $t=-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cp}$ $(Al+Bm+Cp\neq 0)$ (3.27)		Точка P перетину прямої $\begin{cases}x=lt+x_0,\\ y=mt+y_0,\\ z=pt+z_0\end{cases}$ і площини $Ax+By+Cz+D=0$ - розв’язок системи (3.34)

Приклад № 3. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{3}$ і площини $2x+3y-2z=0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння заданої прямої у параметричному вигляді: $x=-2t+2,\ y=t-3,\ z=3t+1$. Розв'язуємо систему

$$\begin{cases} 2x+3y-2z=0, \\ x=-2t+2, \\ y=t-3, \\ z=3t+1. \end{cases}$$

Маємо

$$2(-2t+2)+3(t-3)-2(3t+1)=0 \Rightarrow -4t+4+3t-9-6t-2=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -7t-7=0 \Rightarrow t=-1.$$

Тоді $x=-2\cdot(-1)+2=4,\ y=-1-3=-4,\ \ z=3\cdot(-1)+1=-2$.

Отже, *P* (4; -4; -2) – шукана точка.

Приклад № 4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0(3; -1; -2) перпендикулярно до заданої прямої $\frac{x+1}{5}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-1}{2}$.

Розв'язання. Якщо пряма перпендикулярна до площини, то напрямний вектор $\vec{S}$ прямої і нормальний вектор $\vec{n}$ площини колінеарні: $\vec{S}\,\|\,\vec{n}$. За умовою задачі $\vec{S}=\{5;-3;\ 2\}$. Тоді $\vec{n}=\lambda\vec{S}$ і при $\lambda=1$ дістаємо $\vec{n}=\{5;-3;\ 2\}$. Використовуємо рівняння площини (3.15), а саме: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, де $\vec{n}=\{A;B;\ C\}=\{5;-3;\ 2\}$.

Дістаємо $5(x-3)-3(y+1)+2(z+2)=0$ або $5x-3y+2z-14=0$ - шукане рівняння площини.

Приклад № 5. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-1}{2} \quad \text{та} \quad x=2t-2, y=-3t+1, z=-2t+4.$$

Розв'язання. Перша пряма проходить через точку $M_1(4; -1; 1)$, друга через точку $M_2(-2; 1; 4)$. Напрямний вектор цих прямих $\vec{S}=\{2;-3;-2\}$.

Зробимо таку побудову (рис. 1). З'єднаємо точки M_1 і M_2. Дістаємо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\{-6; 2; 3\}$. Виберемо на шуканій площині Q біжучу точку $M(x, y, z)$ і запишемо вектор $\overrightarrow{M_1M}=\{x-4; y+1; z-1\}$.

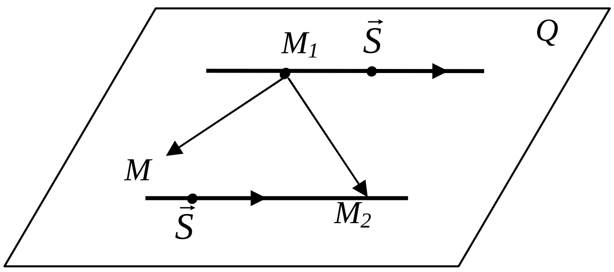


рис. 1

Три вектори $\vec{S}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M}$ лежать в одній площині, отже, вони компланарні.

Умовою компланарності трьох векторів є умова $(\overrightarrow{M_1M}\times\overrightarrow{M_1M_2})\cdot\vec{S}=0$ (див. гл. II, формула (2.36)). Тоді маємо

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+1 & z-1 \\ -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Це є рівняння площини у вигляді (3.16). Розкладаємо визначник за елементами першого рядка. Дістаємо:

$13(x-4)+18(y+1)+14(z-1)=0 \quad \Rightarrow$ $13x-52+18y+18+14z-14=0 \;\Rightarrow\; 13x+18y+14z-48=0$ - шукане рівняння площини.

Приклад № 6. Знайти точку перетину прямих

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{-2}, \qquad \frac{x-1}{4}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+3}{5}.$$

Розв'язання. Для того, щоб знайти точку перетину прямих, потрібно, щоб ці прямі лежали в одній площині. Напрямні вектори заданих прямих $\vec{S}_1=\{2;-3;-2\}$, $\vec{S}_2=\{4;-2;5\}$. Розглянемо ще вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, де M_1(-1; 0; -1) – точка, що належить першій прямій, M_2(1; -3; -3) – точка, що належить другій заданій прямій. Тоді $\overrightarrow{M_1M_2}=\{2;-3;-2\}$. Використаємо умову компланарності векторів, а саме: $(\vec{S}_1\times\vec{S}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=0$ (формула (2.36) гл. II). Маємо перевірити, чи дорівнює нулю визначник, складений із координат векторів $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$. Обчислюємо визначник. Дістаємо

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}=0$$

тому, що два рядки рівні (ввластивіть 4 визначників, гл. I).

Отже, задані прямі перетинаються.

Координати точки перетину повинні задовольняти рівняння обох прямих. Перепишемо ці рівняння у параметричному вигляді. Дістаємо

$x=2t_1-1,\ y=-3t_1,\ z=-2t_1-1$ та $x=4t_2+1, y=-2t_2-3,\ z=5t_2-3$

.

Тоді:

$$\begin{cases} 2t_1 - 1 = 4t_2 + 1, \\ -3t_1 = -2t_2 - 3, \\ -2t_1 - 1 = 5t_2 - 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t_1 - 4t_2 = 2, \\ -3t_1 + 2t_2 = -3, \\ -2t_1 - 5t_2 = -2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 - 2t_2 = 1, \\ 3t_1 - 2t_2 = 3, \\ 2t_1 + 5t_2 = 2. \end{cases} \quad (3.28)$$

Дістали систему трьох рівнянь з двома невідомими. Вибираємо два рівняння і знаходимо розв'язок системи цих рівнянь. Нехай це – перші два рівняння системи (3.28), тобто

$$\begin{cases} t_1 - 2t_2 = 1, \\ 3t_1 - 2t_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2t_1 = -2, \\ 2t_2 = t_1 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1, \\ t_2 = 0. \end{cases}$$

Перевіряємо, чи задовольняють значення $t_1 = 1$ і $t_2 = 0$ третє рівняння системи (3.28), маємо $2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 2$, тобто ці значення t_1 і t_2 задовольняють і третє рівняння системи, отже, є розв'язком системи (3.28).

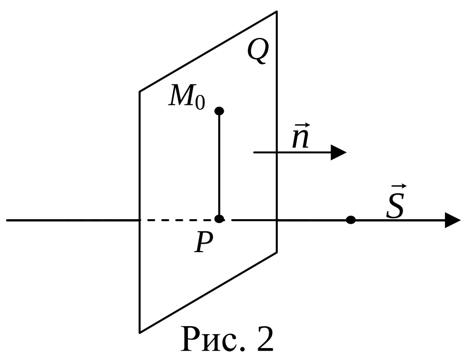
Підставляємо $t_1 = 1$ у параметричне рівняння першої заданої прямої або $t_2 = 0$ у параметричне рівняння другої заданої прямої. Маємо

$$x = 2 \cdot 1 - 1 = 1, \quad y = -3 \cdot 1 = -3, \quad z = -2 \cdot 1 - 1 = -3.$$

Отже, P (1; -3; -3) – точка перетину заданих прямих.

Приклад № 7. Знайти проекцію точки M_0(2; 2; -2) на пряму $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$.

Розв'язання. Проекція P точки M_0 на пряму (рис. 2)– це основа перпендикуляра, опущеного із точки M_0 на пряму. Або це точка перетину прямої і площини Q, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до заданої прямої. Задана пряма має



=

Рис. 2

напрямний вектор $\vec{S} = \{2;\, 1;\, -2\}$. Нормальний вектор $\vec{n}$ площини, яка перпендикулярна до заданої прямої, колінеарний вектору $\vec{S}$: $\vec{n} \parallel \vec{S}$: $\vec{n} = \lambda\vec{S}$, або $\vec{n} = \vec{S}$ при $\lambda = 1$. Тобто, $\vec{n} = \{2;\, 1;\, -2\}$. Точка $M_0(2;\ 2;\ -2)$ лежить у цій площині. Рівняння цієї площини (згідно з формулою (3.15)) набуває вигляду

$$2(x-2)+1(y-2)-2(z+2)=0 \text{ або } 2x+y\text{-}2z\text{-}10=0.$$

Знайдемо точку перетину заданої прямої (запишемо її рівняння у параметричному вигляді, а саме: $x = 2t+1,\ y = t-3,\ z = 2t-1$) і площини $2x+y-2z-10=0$ (див. приклад № 153). Можна також використати формулу (3.27) для знаходження параметра t, а саме:

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cp}.$$

У нашому випадку $A = 2, B = 1, C = -2, D = -10, l = 2, m = 1,$ $p = -2,\ x_0 = 1,\ y_0 = -3,\ z_0 = -1$. Тоді

$$t = -\frac{2\cdot 1 + 1\cdot(-3) - 2\cdot(-1) - 10}{2\cdot 2 + 1\cdot 1 - 2\cdot(-2)} = -\frac{-9}{9} = 1.$$

Підставляємо значення t у параметричні рівняння прямої і дістаємо $x = 2\cdot 1 + 1 = 3,\ y = 1 - 3 = -2,\ z = -2\cdot 1 - 1 = -3.$ Маємо координати точки перетину прямої і площини, що проходить через задану точку, перпендикулярно до заданої прямої, тобто $P(3;\ \text{-}2;\ \text{-}3)$ – проекція заданої точки M_0 на задану пряму.

Приклад № 8. Знайти точку Q симетричну точці $M_0(1;\ \text{-}1;\ \text{-}3)$ відносно площини $3x - 4y + 2z + 28 = 0$.

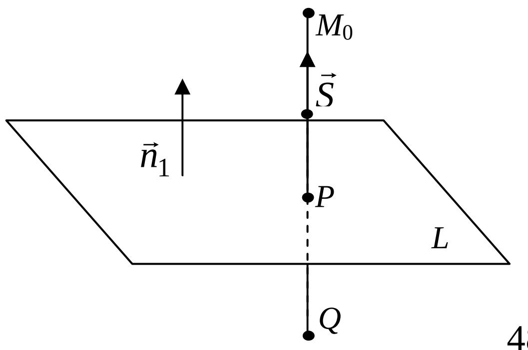


Рис. 3

Розв'язання. Нехай P – проекція точки M_0 на задану площину L (рис. 3). Тоді координати точки Q знаходимо із співвідношень

$$\frac{x_{M_0}+x_Q}{2}=x_P, \qquad \frac{y_{M_0}+y_Q}{2}=y_P, \qquad \frac{z_{M_0}+z_Q}{2}=z_P.$$

Тобто $x_Q=2x_P-x_{M_0}$, $\quad y_Q=2y_P-y_{M_0}$, $\quad z_Q=2z_P-z_{M_0}$.

Знайдемо координати точки P як точки перетину прямої M_0Q і заданої площини. Запишемо рівняння прямої M_0Q. Напрямний вектор $\vec{S}$ цієї прямої колінеарний нормальному вектору $\vec{n}$ заданої площини і $\vec{S}=\vec{n}=\{3;-4;\ 2\}$. За формулою (3.22), а саме:

$$x=lt+x_0,\ y=mt+y_0,\ z=pt+z_0$$

маємо параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1;\ -1;\ -3)$ перпендикулярно до заданої площини, а саме:

$$x=3t+1,\ y=-4t-1,\ z=2t-3.$$

За формулою (3.27), а саме:

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cp}$$

знаходимо t. Дістаємо

$$t=-\frac{3\cdot 1-4\cdot(-1)+2\cdot(-3)+28}{3\cdot 3-4\cdot(-4)+2\cdot 2}=-1.$$

Знаходимо координати точки P. Маємо

$$x=3\cdot(-1)+1=-2, y=-4\cdot(-1)-1=3, z=2\cdot(-1)-3=-5,\ P(-2;\ 3;\ -5)$$

.

Отже,

$$x_Q=2\cdot(-2)-1=-5, y_Q=2\cdot 3-(-1)=7, z_Q=2\cdot(-5)-(-3)=-7$$

і $Q(-5;\ 7;\ -7)$ – точка, симетрична точці $M_0(1;\ -1;\ -3)$ відносно заданої площини.

Приклад № 9. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1; 0; -1)$ і пряму $x = 2t - 1,\ y = -t + 2,\ z = -2t + 3$.

Розв'язання. За умовою задачі напрямний вектор заданої прямої $\vec{S} = \{2; -1; -2\}$ лежить у шуканій площині Q (рис. 4).

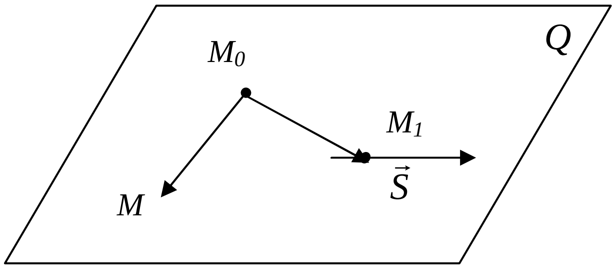


Рис. 4

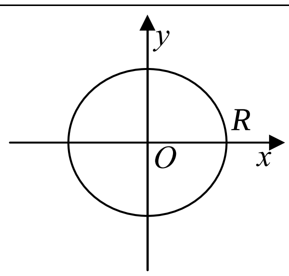
На заданій прямій лежить точка $M_1(-1; 2; 3)$. Визначаємо вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = \{-2; 2; 4\}$.

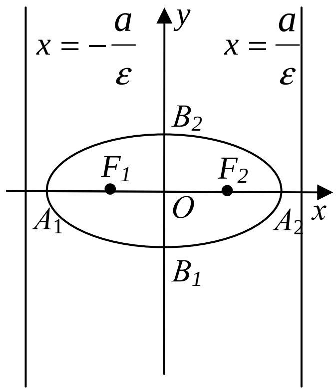
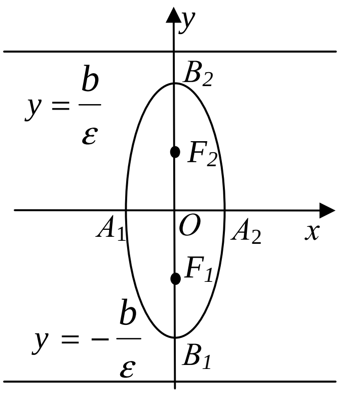
Вибираємо у шуканій площині біжучу точку $M(x; y; z)$ і визначаємо вектор $\overrightarrow{M_0M}$. Маємо $\overrightarrow{M_0M} = \{x-1; y; z+1\}$. Три вектори $\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M_1}, \vec{S}$ лежать в одній площині, тобто вони компланарні. За умовою компланарності трьох векторів маємо

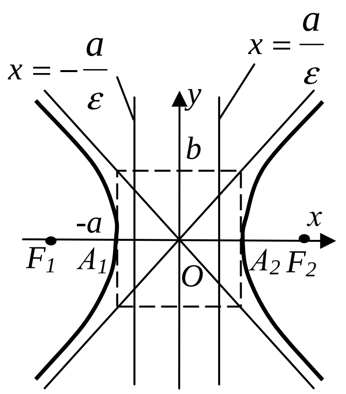
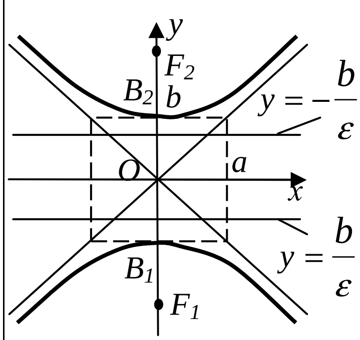
$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{або} \qquad 0\cdot(x-1) - 4y + 2\cdot(z+1) = 0.$$

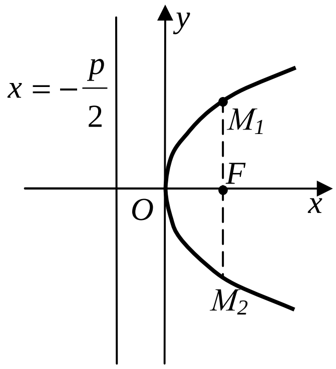
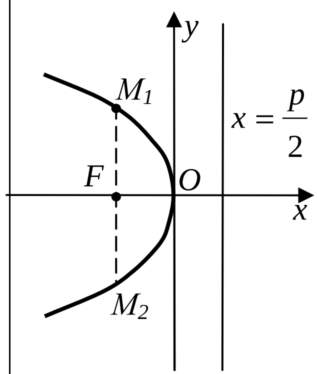
Звідки $2y - z - 1 = 0$ - шукане рівняння площини.

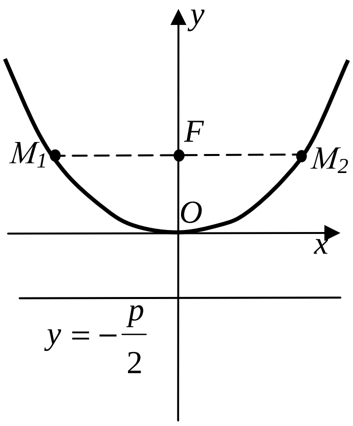
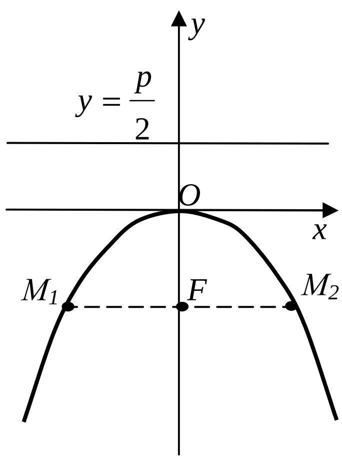
5 Криві другого порядку

Коло	$x^2 + y^2 = R^2$		Центр кола $O(0; 0)$, R – радіус кола

Еліпс	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$a>b$ 	Центр еліпса - $O(0;\ 0)$; $A_1(-a;\ 0)$, $A_2(a;\ 0)$, $B_1(0;\ -b)$, $B_2(0;\ b)$ – вершини еліпса, $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$ – фокуси; $2a$ – велика вісь, $2b$ – мала вісь, $a>b$, $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$, $0<\varepsilon<1$ - ексцентриситет; $a^2=b^2+c^2$, $a>c$; $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ - рівняння директрис.
		$b>a$ 	Центр еліпса - $O(0;\ 0)$; $b>a$; $2a$ – мала вісь; $F_1(0;\ -c)$, $F_2(0;\ c)$ – фокуси; $b^2=a^2+c^2$, $b>c$, $\varepsilon=\dfrac{c}{b}$, $0<\varepsilon<1$ - ексцентриситет; $y=\pm\dfrac{b}{\varepsilon}$ - рівняння директрис.

Гіпер-бола	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$		Центр гіперболи - $O(0; 0)$; $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ – фокуси; $2a$ – дійсна вісь, $2b$ – уявна вісь, $c^2=a^2+b^2$, $c>a$;, $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $\varepsilon>1$ - ексцентриситет; $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ - рівняння директрис. $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ – вершини, $y=\pm\frac{b}{a}x$ - рівняння асимптот.
	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$		Спряжена гіпербола. $O(0; 0)$ – центр; $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$ – фокуси; $2a$ – уявна вісь, $2b$ – дійсна вісь, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ – вершини, $c^2=a^2+b^2$, $c>b$; $\varepsilon=\frac{c}{b}$, $\varepsilon>1$ - ексцентриситет; $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$ - рівняння директрис; $y=\pm\frac{b}{a}x$ - рівняння асимптот.

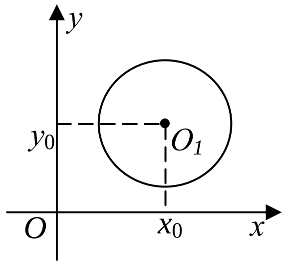
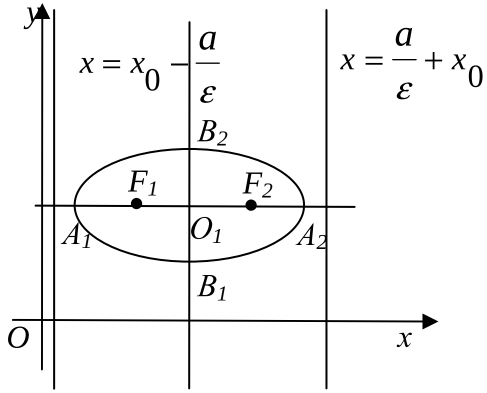
Пара бола	$y^2 = 2px,$ $p > 0$		Вершина параболи - $O(0;\ 0)$; $p>0$ – параметр; $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ - фокус; $x = -\frac{p}{2}$ - рівняння директриси; $M_1\left(\frac{p}{2};p\right), M_2\left(\frac{p}{2};-p\right)$ - точки перетину фокальної хорди з параболою. Гілки параболи – вздовж додатного напряму осі Ox
	$y^2 = -2px,$ $p > 0$		Вершина параболи - $O(0;\ 0)$; $p>0$ – параметр; $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$ - фокус; $x = \frac{p}{2}$ - рівняння директриси; $M_1\left(-\frac{p}{2};p\right), M_2\left(-\frac{p}{2};-p\right)$ - точки перетину фокальної хорди з параболою. Гілки параболи – вздовж від'ємного напряму осі Ox

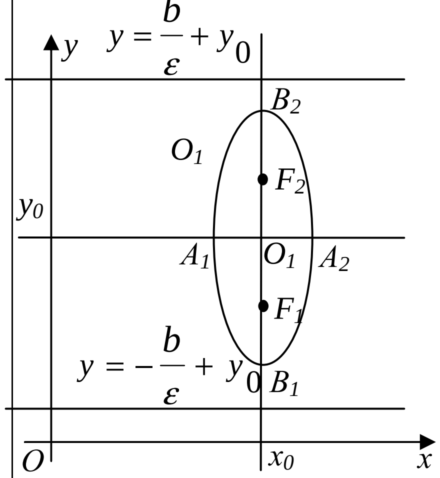
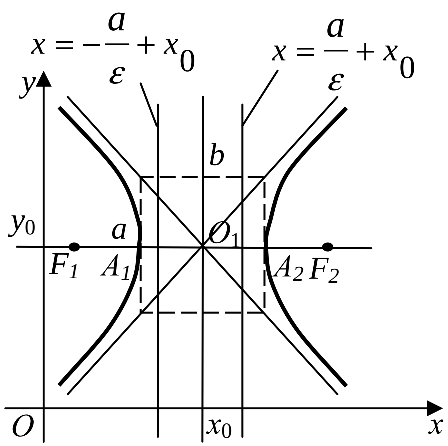
	$x^2 = 2py$, $p > 0$		Вершина параболи - $O(0;\ 0)$; $p>0$ – параметр; $F\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$ - фокус; $y = -\frac{p}{2}$ - рівняння директриси; $M_1\left(-p; \frac{p}{2}\right), M_2\left(p; \frac{p}{2}\right)$ - точки перетину фокальної хорди з параболою. Гілки параболи – вздовж додатного напряму осі Oy
	$x^2 = -2py$, $p > 0$		Вершина параболи - $O(0;\ 0)$; $p>0$ – параметр; $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$ - фокус; $y = \frac{p}{2}$ - рівняння директриси; $M_1\left(-p; -\frac{p}{2}\right), M_2\left(p; -\frac{p}{2}\right)$ - точки перетину фокальної хорди з параболою. Гілки параболи – вздовж від'ємного напряму осі Oy

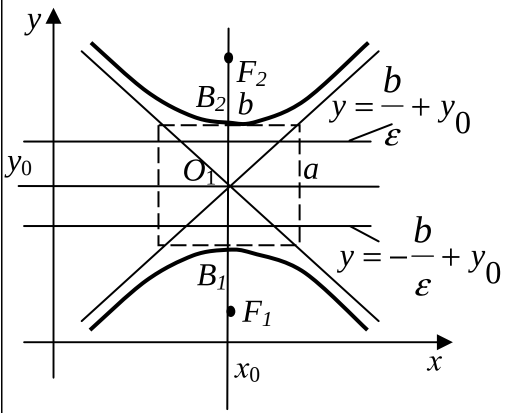
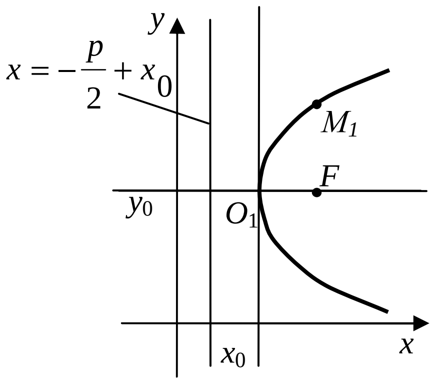
Загальне рівняння кривих другого порядку:

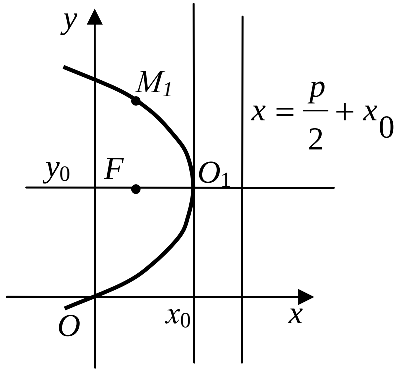
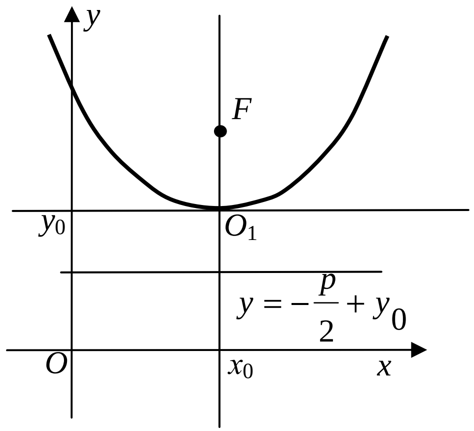
$$Ax^2 + Cy^2 + 2Ex + 2Ey + F = 0$$

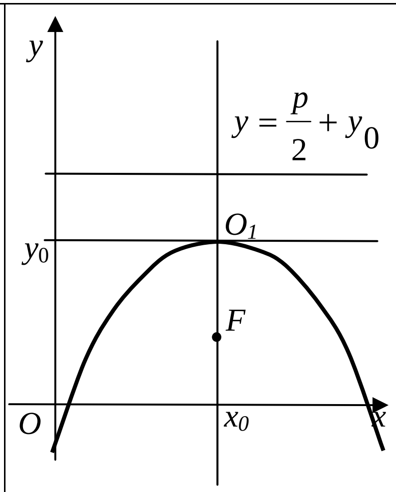
Після виділення повних квадратів дістаємо рівняння зсунутих кривих.

Коло AC>0 (A=C)	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$		Центр кола $O_1(x_0; y_0)$, R – радіус кола
Еліпс AC>0	$\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	$a>b$ 	Центр еліпса - $O_1(x_0;y_0)$, $A_1(-a+x_0;y_0)$, $A_2(a+x_0;y_0)$, $B_1(x_0; -b+ y_0)$, $B_2(x_0; b+ y_0)$ – вершини еліпса, $F_1(-c+x_0; b_0)$, $(c+x_0; b_0)$ – фокуси; $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $0 < \varepsilon < 1$ - ексцентриситет; $a^2 = b^2 + c^2$, $a > c$; $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} + x_0$ - рівняння директрис.

		$b>a$ 	Центр еліпса - $O_1(x_0;\ y_0)$, $A_1(-a+x_0;y_0)$, $A_2(a+x_0;y_0)$, $B_1(x_0;\ -b+y_0)$, $B_2(x_0;\ b+y_0)$ – вершини еліпса, $F_1(x_0;\ -c+y_0)$, $F_2(x_0;\ c+y_0)$ – фокуси; $\varepsilon=\frac{c}{b}$, $0<\varepsilon<1$ - ексцентриситет; $b^2=a^2+c^2$, $b>c$; $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}+y_0$ - рівняння директрис.
Гіпер-бола $AC<0$	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$		Гіпербола з центром в точці $O_1(x_0;\ y_0)$; $F_1(-c+x_0;\ y_0)$, $F_2(c+x_0;\ y_0)$ – фокуси; $A_1(-a+x_0;y_0)$, $A_2(a+x_0;y_0)$ – вершини, $c^2=a^2+b^2$, $c>a$; $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $\varepsilon>1$ - ексцентриситет; $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}+x_0$ - рівняння директрис, $y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)$ - рівняння асимптот.

	$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1$		Центр гіперболи $O_1(x_0;\ y_0)$; $F_1(x_0; -c+\ y_0)$, $F_2(x_0;\ c+y_0)$ – фокуси; $B_1(x_0;\ -b+y_0)$, $B_2(x_0; b+y_0)$ – вершини; $\varepsilon=\frac{c}{b}$, $\varepsilon>1$ - ексцентриситет; $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}+y_0$ - рівняння директрис, $y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)$ - рівняння асимптот.
Пара-бола AC=0, $\begin{pmatrix}A=0,\\ C\neq 0\end{pmatrix}$	$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$, $p>0$		Вершина параболи – $O_1(x_0; y_0)$; $F\left(\frac{p}{2}+x_0; y_0\right)$ - фокус; $x=-\frac{p}{2}+x_0$ - рівняння директриси; вісь симетрії – пряма $y=y_0$.

	$(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)$, $p>0$		Вершина параболи – $O_1(x_0;\, y_0)$; $p>0$ – параметр; $F\left(-\frac{p}{2}+x_0;\,y_0\right)$ - фокус; $x=\frac{p}{2}+x_0$ - рівняння директриси; вісь симетрії – пряма $y=y_0$.
$A\neq 0$, $C=0$	$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$, $p>0$		Вершина параболи - $O_1(x_0;\, y_0)$; $F\left(x_0;\frac{p}{2}+y_0\right)$ - фокус; $y=-\frac{p}{2}+y_0$ - рівняння директриси; вісь симетрії – пряма $x=x_0$.

	$(x-x_0)^2=-2p(y-y_0)$, $p>0$		Вершина параболи - $O_1(x_0; y_0)$; $F\left(x_0;-\frac{p}{2}+y_0\right)$ - фокус; $y=\frac{p}{2}+y_0$ - рівняння директриси; вісь симетрії – пряма $x=x_0$.і

Приклад № 10. Дано точки $A(6;\ 4)$, $B(0;\ -4)$. Записати рівняння кола, діаметром якого є відрізок AB.

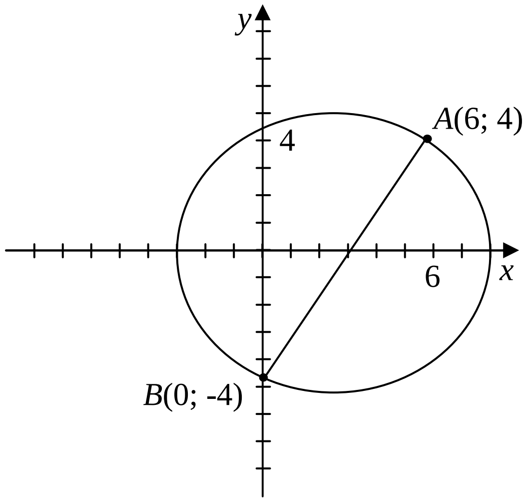


Рис. 5

Розв'язання. Рівняння кола має вигляд $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ (рис. 5). Знаходимо діаметр кола. Маємо

$$|AB|=\sqrt{(6-0)^2+(4+4)^2}=10. \text{ Тоді } R=\frac{|AB|}{2}=5.$$

Центр кола знаходиться в точці $O_1(x_0;\ y_0)$ – посередині відрізка AB. Тому

$$x_{O_1}=\frac{x_A+x_B}{2}\Rightarrow x_{O_1}=\frac{6+0}{2}=3;$$

$$y_{O_1}=\frac{y_A+y_B}{2}\Rightarrow y_{O_1}=\frac{4-4}{2}=0.$$

Отже, $O_1(3;\ 0)$ і рівняння шуканого кола має вигляд $(x-3)^2+y^2=25$.

6 Полярна система координат

Полярна система координат визначається деякою точкою O – полюсом, променем, що починається в точці O – полярною віссю, і масштабною одиницею на полярній осі.

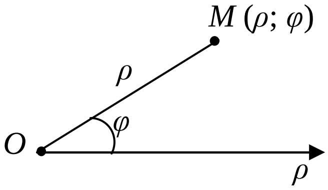


Рис. 6

Точка M на площині визначається координатами ρ та φ, де ρ – відстань від точки M до полюса O, φ – кут, що утворює промінь OM з полярною віссю.

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \; 0 \le \rho \le +\infty .$$

Точці M відповідають і координати $(\rho; \varphi + 2\pi n)$, $n \in Z$.

Зауваження. Якщо розглядати ρ та φ, які змінюються в межах $-\infty < \varphi < \infty; -\infty < \rho < +\infty$, то одні і ті самі точки площини мають різні координати. Полярна система у цьому випадку називається узагальненою.

Наприклад, координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 можна записати так (рис. 7).

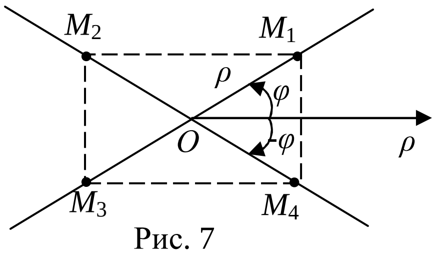


Рис. 7

$M_1(\rho, \varphi)$,

$M_2(\rho, \pi - \varphi)$ або $M_2(-\rho, -\varphi)$;

$M_3(\rho, \pi + \varphi)$ або $M_3(-\rho, \varphi)$;

$M_4(\rho, -\varphi)$ або $M_4(-\rho, \pi - \varphi)$.

Між полярними і декартовими координатами точки існує зв'язок, а саме (рис. 7):

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \tag{3.29}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.30}$$

$$\varphi = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, \text{ якщо } x > 0, \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, \text{ якщо } x < 0, \; y \ge 0, \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, \text{ якщо } x < 0, \; y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ якщо } x = 0, \; y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{ якщо } x = 0, \; y < 0. \end{cases} \tag{3.31}$$

Криві другого порядку в полярній системі координат визначаються рівнянням

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \qquad (3.32)$$

якщо фокус кривої співпадає з полюсом, а напрям полярної осі співпадає з напрямом осі Ox (рис. 8).

Це рівняння визначає:

- параболу при $\varepsilon = 1$,
- еліпс при $0 < \varepsilon < 1$,
- гіперболу при $\varepsilon > 1$.

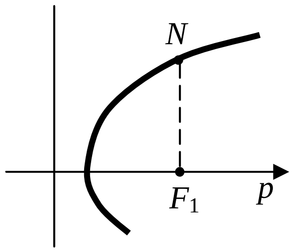


Рис. 8

У рівнянні (6.4) $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ - ексцентриситет кривої, p – параметр параболи (для еліпса і гіперболи p – половина довжини фокальної хорди, $p = \dfrac{b^2}{a}$).

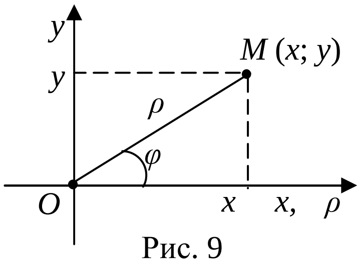


Рис. 9

Криві в полярній системі координат описуються рівняннями

$$\rho = \rho(\varphi).$$

Якщо функція $\rho(\varphi)$ парна, то її графік розташований симетрично відносно полярної осі.

Якщо функція $\rho(\varphi)$ непарна, то її графік симетричний відносно променя $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Якщо функція має період T, то будуємо графік для $0 \le \varphi \le T$, а потім повторюємо його ще $n = \dfrac{2\pi}{T}$ разів.

Схема побудови кривої, заданої рівнянням в полярній системі координат

1. Знайти область визначення заданої функції $\rho(\varphi)$.

2. Дослідити функцію на парність $[\rho(-\varphi) = \rho(\varphi)]$ та непарність $[\rho(-\varphi) = -\rho(\varphi)]$.

3. Дослідити функцію на періодичність, а саме: $\rho(\varphi + T) = \rho(\varphi)$.

4. Знайти нулі функції із умови $\rho(\varphi)=0$.

5. Скласти таблицю залежності ρ від φ.

6. Враховуючи 1-5, побудувати криву $\rho(\varphi)$.

Приклад № 11. Побудувати криву $\rho=2(1+\cos\varphi)$.

Розв'язання.

1. Знаходимо область визначення заданої функції. Маємо $-\infty\le\varphi\le+\infty$. Область значень $\rho(\varphi):0\le\rho\le 4$.

2. Досліджуємо задану функцію на парність, непарність. Маємо

$$\rho(-\varphi)=2[1+\cos(-\varphi)]=2(1+\cos\varphi)=\rho(\varphi).$$

Отже, задана функція парна і її графік симетричний відносно полярної осі. Тому розглядаємо її на $[0;\pi]$.

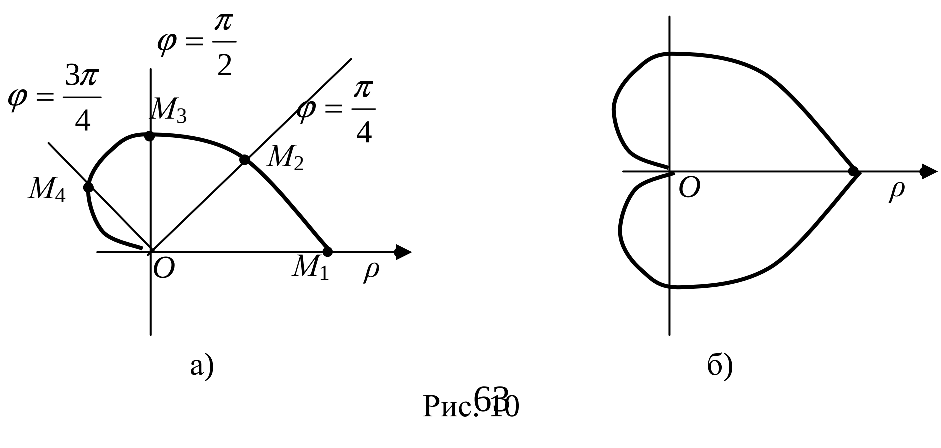
3. Функція періодична, $T=2\pi$.

4. Знаходимо нулі функції із умови $\rho=0$. Маємо $2(1+\cos\varphi)=0\ \Rightarrow\ \cos\varphi=-1,\ \varphi=\pi$ (на відрізку $[0;\pi]$).

5. Складаємо таблицю

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
ρ	4	≈3,4	2	≈0,6	0

Будуємо точки $M_1(4;\ 0)$, $M_2\left(3{,}4;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $M_3\left(2;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $M_4\left(0{,}6;\ \frac{3\pi}{4}\right)$, $O(0;\ \pi)$ і з'єднуємо їх плавною кривою (рис. 10а)).



а) б)

Рис. 10

Відображаємо одержану криву відносно полярної осі. Дістаємо графік заданої функції (рис. 10б)).

Криві $\rho = a\cos n\varphi$ та $\rho = a\sin n\varphi$ $(n \geq 1)$ називають n-пелюстковими трояндами. При $n = 2k$ - пелюсток $4k$, при $n = 2k+1$ - пелюсток $2k+1$.

Завдання контрольних робіт № 1 і № 2

Контрольна робота № 1

1. Знайти всі комплексні корені рівняння.
2. Обчислити визначник четвертого порядку.
3. Знайти ранг матриці.
4. Розв'язати матричне рівняння.
5. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса, за правилом Крамера та матричним методом.
6. Розкласти вектор a за базисом e_1, e_2, e_3.
7. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею A.
8. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду. Зобразити стару і нову системи координат та накреслити криву.

Контрольна робота № 2

1. Розв'язати задачу по темі «Векторна алгебра».
2. Розв'язати задачу по темі «Аналітична геометрія на площині».
3. Розв'язати задачу по темі «Аналітична геометрія у просторі».
4. Дано координати вершин чотиригранника (*ABCD*).
   Засобами векторної алгебри знайти:
   а) довжину ребра *AB*,
   б) рівняння прямої *AB*,
   в) рівняння площини *ABC*,
   г) кут нахилу ребра *AD* до площини *ABC*,
   д) площу грані *ABC*,
   е) об'єм тетраедра *ABCD*,
   ж) рівняння висоти *DE*, опущеної з вершини *D* на площину *ABC*,
   з) довжину висоти *DE*.
5. Розв'язати задачу по темі «Криві другого порядку».
6. Побудувати криву, задану рівнянням у полярних координатах.

ВАРІАНТ № 1

Контрольна робота № 1

1. $z^3 + \sqrt{3} + i = 0$.

2. $\begin{vmatrix} -3 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

4. $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

6. $a = \{-6{,}12{,}-5\}$,
$e_1 = \{3{,}-1{,}5\}, e_2 = \{2{,}0{,}-1\}$,
$e_1 = \{-1{,}5{,}3\}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

8. $7x^2 + 5y^2 - 2\sqrt{3}xy + 2\sqrt{3}x -$
$-10y = 3.$

Контрольна робота № 2

1. Обчислити проекцію вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}$ на вісь вектора $\vec{b} = (\vec{i} - 2\vec{k}) \times (\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k})$.

2. Задано дві вершини $A(2, -2)$, $B(3, -1)$ і точка $P(1, 0)$ перетину медіан трикутника ABC. Скласти рівняння висоти трикутника, проведеної через третю вершину C.

3. Визначити відстань між мимобіжними прямими

$$\frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = 9 + 6t, \\ y = -2t, \\ z = 2 - t. \end{cases}$$

4. $A(0, -4, 6)$, $B(8, -1, 0)$, $C(-4, -3, -9)$, $D(1, -4, 1)$.

5. Дано еліпс $x^2 + 2y^2 = 4$. Написати рівняння софокусної рівнобічної гіперболи. Зробити рисунок.

6. $r = 2(1 + \cos\varphi)$.

ВАРІАНТ № 2

Контрольна робота № 1

1. $z-1+i\sqrt{3}=0$.

2. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 4x_1-2x_2-x_3=4, \\ -x_1+3x_2-x_3=-6, \\ x_1-2x_2+2x_3=7. \end{cases}$

6. $a=\{0,2,6\}$,
$e_1=\{1,5,1\}, e_2=\{2,-2,5\}$,
$e_1=\{-3,-1,0\}$.

7. $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

8. $x^2-6xy+y^2-4x-4y+12=0$.

Контрольна робота № 2

1. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$ і $3\vec{a}+2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ і $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\pi}{4}$.

2. Задано дві протилежні вершини квадрата: $A(2, 1)$ і $C(4, 5)$. Знайти дві інші його вершини.

3. Знайти точку, симетричну точці $A(-1,-2, 5)$ відносно прямої $\frac{x-1}{3}=\frac{y-8}{2}=\frac{z}{0}$.

4. $A(-2, 8, -4)$, $B(6, 2,-1)$, $C(-6,-7, -3)$, $D(-1, 3,-4)$.

5. Із фокуса параболи $y^2=8x$, як із центра, описане коло, яке проходить через найближчу до центра вершину гіперболи $x^2-2y^2=16$. Написати рівняння цього кола. Зробити рисунок.

6. $r=3(1-\sin\varphi)$.

ВАРІАНТ № 3

Контрольна робота № 1

1. $z^3-\sqrt{3}-i=0$.

2. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & -1 & -5 \\ 1 & -3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 10 & 2 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=-6, \\ -x_1 \qquad +5x_3=12, \\ 5x_1-x_2+3x_3=-5. \end{cases}$

6. $a=\{11,-1,2\}$,
$e_1=\{-1,3,4\}$, $e_2=\{4,1,-2\}$,
$e_3=\{2,-3,1\}$.

7. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $2x^2+2y^2+4xy+8x+$
$+4y+\frac{1}{2}=0.$

Контрольна робота № 2

1. Нехай $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+\alpha\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}$. При якому значенні α
$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{5}{12}$?

2. Визначити площу паралелограма, якщо відомі рівняння його сторін: $y=2x+1$, $y=2x-5$, $y=x-2$ і $y=x+2$.

3. Через точку $A(-1,7,5)$ і точку B перетину прямої $\frac{x-7}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{1}$ і площини $3x-y+2z+3=0$ провести пряму.

4. $A(0, -2, -6)$, $B(3, 6, 0)$, $C(1,-6, -9)$, $D(0,-1, 1)$.

5. Дана гіпербола $x^2-y^2=8$. Знайти софокусний еліпс, який проходить через точку $A(5, 0)$. Зробити рисунок.

6. $r=4(\cos\varphi-1)$.

ВАРІАНТ № 4

Контрольна робота № 1

1. $z^3 + 1 - i\sqrt{3} = 0$.

2. $\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 & 5 \\ -3 & -5 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \\ 7 & 11 & -2 & -7 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 = 2, \\ 5x_1 \qquad\quad + x_3 = 6. \end{cases}$

6. $a = \{8, -3, 8\}$,
$e_1 = \{5, -2, 1\}$, $e_2 = \{-3, 2, -3\}$,
$e_3 = \{0, 1, 4\}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

8. $2x^2 + 4x + 2y^2 + 2xy + 2y = 1$.

Контрольна робота № 2

1. Знайти одиничний вектор напрямку, перпендикулярного до векторів $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ і $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$.

2. З точки $M(5,4)$ виходить промінь світла під кутом $\varphi = \operatorname{arctg} 2$ до осі OX і відбивається від неї. Написати рівняння падаючого та відбитого променів.

3. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(2, 3, 1)$ на пряму $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$.

4. $A(-2, -6, -2)$, $B(1, 0, 6)$, $C(-1, -9, -6)$, $D(-2, 1, -1)$.

5. Відстань між вершинами гіперболи дорівнює 2, між фокусами – $2\sqrt{2}$. Знайти площу трикутника, утвореного асимптотами цієї гіперболи і директрисою параболи $y^2 = 4x$. Зробити рисунок.

6. $r = 3(1 + \sin\varphi)$.

ВАРІАНТ № 5

Контрольна робота № 1

1. $z^3 + 1 + i\sqrt{3} = 0$.

2. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $X\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

6. $a = \{9, -3, 16\}$,
$e_1 = \{2, -1, 4\}, e_2 = \{3, 5, 4\}$,
$e_3 = \{-1, 3, -2\}$.

7. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8. $x^2 + y^2 - 8xy - 20x +$
$+ 20y + 1 = 0.$

Контрольна робота № 2

1. З’ясувати, чи є тупий кут серед внутрішніх кутів трикутника з вершинами *A*(3, 3, 3), *B*(–4, 5, –1), *C*(2,–3, 5).

2. Дві суміжні вершини квадрата *ABCD* знаходяться у точках *A*(–5, 4) і *D*(–3,2), а його діагональ *AC* паралельна осі *OX*. Визначити координати двох інших його вершин.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві точки $M_1(1,-1,-2)$ і $M_2(3,1,1)$ перпендикулярно до площини $x - 2y - 3z - 6 = 0$.

4. *A*(–3, –2, –4), *B*(3, 6, –1), *C*(–6,–6, –3), *D*(4, –1, –4).

5. Основами трапеції є велика вісь еліпса $x^2 + 4y^2 = 4$ і фокальна хорда параболи $x^2 = 6y$. Знайти площу цієї трапеції. Зробити рисунок.

6. $r = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$.

ВАРІАНТ № 6

Контрольна робота № 1

1. $z^3 - \sqrt{3} + i = 0$.

2. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -8, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = -7. \end{cases}$

6. $a = \{4, 12, 15\}$,

$e_1 = \{3, 0, 2\}$, $e_2 = \{-1, 5, 2\}$,

$e_3 = \{2, 3, -3\}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 6 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

8. $7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}xy - 28x +$

$+12\sqrt{3}y + 12 = 0.$

Контрольна робота № 2

1. Дано два вектори $\vec{a} = \{3, -1, 5\}$ і $\vec{b} = \{1, 2, -3\}$. Знайти вектор $\vec{x}$ за умови, що він перпендикулярний до осі *OZ* і задовольняє умови: $(\vec{x}, \vec{a}) = 9$, $(\vec{x}, \vec{b}) = -4$.

2. Дано рівняння сторін трикутника $3x - 2y + 6 = 0$ і $x + y - 3 = 0$, висоти якого перетинаються в початку координат. Знайти рівняння третьої сторони.

3. Знайти проекцію точки $P(5,2,-1)$ на площину $2x - y + 3z + 23 = 0$.

4. $A(-6, -4, -2)$, $B(0, -1, 6)$, $C(-9, -3, -6)$, $D(1, -4, -1)$.

5. На якій відстані від директриси параболи $x^2 = 8y$ знаходяться фокуси еліпса, півосі якого рівні 5 і 3? Зробити рисунок, якщо більша вісь еліпса лежить на осі *OX*.

6. $r = 3\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \varphi\right)$.

ВАРІАНТ № 7

Контрольна робота № 1

1. $z^3 - 1 - i\sqrt{3} = 0$.

2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ -4 & -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 4 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 8, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 8. \end{cases}$

6. $a = \{-5, -4, 4\}$,
$e_1 = \{2, -1, 3\}$, $e_2 = \{1, -3, 2\}$,
$e_3 = \{-3, 1, -1\}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

8. $x^2 + y^2 + 4xy + 4x +$
$+2y - 5 = 0.$

Контрольна робота № 2

1. Дано вершини чотирикутника $A(4, 4, -2)$, $B(2, -2, 3)$, $C(1, 2, 2)$, $D(-3, 0, 4)$. Знайти кут між його діагоналями.

2. Задано трикутник з вершинами $A(2, 3)$, $B(0, -3)$, $C(5, -2)$. Знайти центр описаного кола.

3. Знайти проекцію точки $P(2, -1, 3)$ на пряму $x = 3t$, $y = 5t - 7$, $z = 2t + 2$.

4. $A(1, -3, -5)$, $B(9, 0, 1)$, $C(-3, -2, -8)$, $D(2, -3, 2)$.

5. Написати рівняння рівнобічної гіперболи, якщо відстань між її вершинами, що лежать на осі OY, дорівнює ексцентриситету еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. Зробити рисунок.

6. $r = 4\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \varphi\right)$.

ВАРІАНТ № 8

Контрольна робота № 1

1. $z^3+\sqrt{3}-i=0$.

2. $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 & 4 \\ -3 & -3 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=9, \\ -x_1+5x_2+3x_3=-3, \\ 4x_1+4x_2-2x_3=16. \end{cases}$

6. $a=\{3,-6,2\}$,

$e_1=\{1,-2,1\}$, $e_2=\{0,3,2\}$,

$e_3=\{1,1,2\}$.

7. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

8. $2xy-x^2-y^2+2x-$

$-4y+\frac{1}{4}=0.$

Контрольна робота № 2

1. Знайти $np_{\vec{b}}\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)$, де $\vec{a}=\{2,-2,5\}$ і $\vec{b}=\{1,2,3\}$.

2. Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, знаючи рівняння гіпотенузи $y=3x+5$ і вершину прямого кута $A(4,-1)$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через пряму $x=3t+1,\quad y=2t+3,\quad z=-t-2$ паралельно прямій $\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x+2y-z-5=0 \end{cases}$.

4. $A(-1,-1,-3)$, $B(7,5,0)$, $C(-5,-4,-2)$, $D(0,6,-3)$.

5. З лівого фокуса гіперболи $2x^2-y^2=6$, як із центра, описане коло, яке проходить через найближчу до центра вершину еліпса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$. Написати рівняння цього кола. Зробити рисунок.

6. $r=3\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right)$.

ВАРІАНТ № 9

Контрольна робота № 1

1. $z^3+1+i=0$.

2. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & -1 & -2 \\ 6 & 7 & 5 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

4. $X\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=4, \\ 5x_2+3x_3=12, \\ 2x_1+2x_2-3x_3=15. \end{cases}$

6. $a=\{7,\ 1,\ 3\}$,
$e_1=\{1,-2,2\}$, $e_2=\{2,1,-1\}$,
$e_3=\{3,-1,3\}$.

7. $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $3x^2-2xy+3y^2-4x-$
$-4y=12$.

Контрольна робота № 2

1. Сила $\vec{P}=\{2,-4,5\}$ прикладена до точки $M(4,\ -2,\ 3)$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки $A(3,\ 2,-1)$.

2. Кінцями однієї діагоналі квадрата є точки $A(-1,\ 3)$ і $C(3,\ 1)$. Знайти рівняння діагоналей і сторін квадрата.

3. Знайти відстань між паралельними прямими $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-5}{2}$ і $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{2}$.

4. $A(-3,\ -1,\ -4)$, $B(0,\ 7,\ 2)$, $C(-2,-5,\ -7)$, $D(-3,0,\ 3)$.

5. Написати рівняння рівнобічної гіперболи, вершини якої знаходяться у фокусах еліпса $4x^2+y^2=4$. Зробити рисунок.

6. $r=2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\varphi\right)$.

ВАРІАНТ № 10

Контрольна робота № 1

1. $z^3 - 1 + i = 0$.

2. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ -5 & -3 & -1 & -3 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 3 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 & 4 & 6 & 1 \\ -3 & 2 & 5 & 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5, \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

6. $a = \{6, -10, 2\}$,
$e_1 = \{2, -5, 1\}$, $e_2 = \{-1, 1, 2\}$,
$e_3 = \{3, -1, -2\}$.

7. $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}$.

8. $4xy + 4x - 4y + 4 = 0$.

Контрольна робота № 2

1. Знайти внутрішній кут трикутника ABC при вершині A, якщо його вершини $A(-2, 1, 3)$, $B(1, -5, 7)$ і $C(5, -3, -4)$.

2. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $M(2,1)$ під кутом $\frac{\pi}{4}$ до прямої $x = 1 + t$, $y = -2 - \frac{2}{3}t$.

3. Знайти точку, симетричну точці $P(1, -1, 1)$ відносно площини $2x - y + z + 2 = 0$.

4. $A(-3, -3, -1)$, $B(0, 3, 7)$, $C(-2, -6, -5)$, $D(-3, 4, 0)$.

5. Написати рівняння директриси параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, а фокус збігається з правою вершиною еліпса $x^2 + 2y^2 = 18$. Зробити рисунок.

6. $r = 3\cos\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right)$.

ВАРІАНТ № 11

Контрольна робота № 1

1. $z^3-1-i=0$.

2. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 & 8 \\ 4 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 8 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & -4 & 3 & -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} x_1 + x_3 = 3, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

6. $a = \{11, -5, -14\}$,

$e_1 = \{2, 1, -3\}$, $e_2 = \{1, -2, -3\}$,

$e_3 = \{-2, 3, 1\}$.

7. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $2x^2 + 2y^2 - 4xy - 4x +$

$+8y + \frac{1}{2} = 0.$

Контрольна робота № 2

1. Знайти довжину вектора $\vec{w} = \vec{a} \times \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

2. Дано дві протилежні вершини ромба *A*(3, 4) і *C*(1,–2). Сторона *AB* нахилена до осі *OX* під кутом 45°. Знайти вершини *B* і *D*.

3. Скласти рівняння проекції прямої $\begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0 \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ на площину $2x - y + z - 1 = 0$.

4. *A*(–2, –1, –3), *B*(4, 7, 0), *C*(–5,–5, –2), *D*(5, 0, –3).

5. На якій відстані від асимптот гіперболи $x^2 - y^2 = 4$ знаходяться фокуси еліпса з півосями 2 і 3 (більша вісь лежить на осі *OY*) ? Зробити рисунок.

6. $r = 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)$.

ВАРІАНТ № 12

Контрольна робота № 1

1. $z^3+1-i=0$.

2. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 8 & 8 & 5 & -2 & 8 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=7, \\ -2x_1+x_2-x_3=1, \\ 2x_1-x_2+3x_3=3. \end{cases}$

6. $a=\{-4,2,0\}$, $e_1=\{3,-1,1\}$, $e_2=\{5,3,1\}$, $e_3=\{0,-2,1\}$.

7. $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -6 & 4 & 3 \\ -6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

8. $2x^2+5xy+2y^2-6x-$
$-3y-8=0$.

Контрольна робота № 2

1. Знайти $np_{(\vec{a}+3\vec{b})}\vec{c}$, де $\vec{c}=\{2,-1,0\}$, $\vec{a}=\{5,3,-2\}$, $\vec{b}=\{3,-1,-8\}$.

2. Промінь світла, напрямлений вздовж прямої $x-2y+5=0$, відбивається від прямої $3x-2y+7=0$. Скласти рівняння прямої, яка містить відбитий промінь.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{-2}$ перпендикулярно до площини $3x+2y-z-5=0$.

4. $A(-5,-3,-1)$, $B(1,0,7)$, $C(-8,-2,-5)$, $D(2,-3,0)$.

5. На параболі $y^2=24x$ взяли точку з фокальним радіусом-вектором, рівним 14. Визначити відстань від цієї точки до вершин гіперболи $x^2-4y^2=16$. Зробити рисунок. **6.** $r=3\cos\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)$.

ВАРІАНТ № 13

Контрольна робота № 1

1. $z^3 + \sqrt{6} + i\sqrt{2} = 0$.

2. $\begin{vmatrix} 10 & -4 & 2 & 11 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $X\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6, \\ -5x_1 + x_2 - x_3 = -10, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

6. $a = \{2, 4, 2\}$,
$e_1 = \{1, 2, -2\}$, $e_2 = \{-2, 1, -1\}$,
$e_3 = \{1, -3, -3\}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

8. $x^2 - xy + y^2 - 2x -$
$-2y - 2 = 0$.

Контрольна робота № 2

1. Вершини ΔABC – точки $A(3, 2, -3)$, $B(5, 1, -1)$, $C(1, -2, 1)$. Знайти зовнішній кут при вершині B.

2. Знайти точку M_1, симетричну точці $M_2(8, -9)$ відносно прямої, що проходить через точки $A(3, -4)$ і $B(-1, -2)$.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через лінію перетину площин $5x - 2y - z - 3 = 0$ і $x + 3y - 2z + 5 = 0$ паралельно вектору $\vec{e} = \{7, 9, 17\}$.

4. $A(-2, 0, -2)$, $B(6, 3, 4)$, $C(-6, 1, -5)$, $D(-1, 0, 5)$.

5. Дано еліпс $x^2 + 2y^2 = 8$ і парабола $y = 8x^2 + 1$. Знайти відстань від фокуса параболи до фокусів еліпса. Зробити рисунок.

6. $r = 2\cos 2\varphi$.

ВАРІАНТ № 14

Контрольна робота № 1

1. $z^3 - \sqrt{2} + i\sqrt{6} = 0$.

2. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & -10 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5, \\ -3x_1 - 3x_2 + x_3 = -14. \end{cases}$

6. $a = \{0, -1, 4\}$,
$e_1 = \{-1, 2, 1\}$, $e_2 = \{1, 3, 1\}$,
$e_3 = \{3, -2, 3\}$.

7. $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

8. $x^2 + y^2 - 4xy + 4x -$
$-2y + 1 = 0.$

Контрольна робота № 2

1. Вектор $\vec{a}$ утворює з координатними осями OX і OY відповідно $\angle\alpha = 60^{\circ}$ і $\angle\beta = 120^{\circ}$. Обчислити його координати, якщо $|\vec{a}| = 2$ і кут з віссю OZ γ – тупий.

2. Через точку перетину прямих $2x - 5y - 1 = 0$ і $x + 4y - 7 = 0$ провести пряму, що ділить відрізок між точками $A(4, -3)$ і $B(-1, 2)$ у відношенні 2:3.

3. Знайти проекцію точки $P(3, -4, -6)$ на площину, що проходить через точки $M_1(-6, 1, -5)$, $M_2(7, -2, -1)$, $M_3(10, -7, 1)$.

4. $A(0, -2, 0)$, $B(8, 4, 3)$, $C(-4, -5, 1)$, $D(1, 5, 0)$.

5. Знайти відстань від фокусів еліпса $x^2 + 4y^2 = 4$ до асимптот гіперболи $2x^2 - y^2 = 2$. Зробити рисунок.

6. $r = 3\sin 2\varphi$.

ВАРІАНТ №15

Контрольна робота № 1

1. $z^3 - \sqrt{6} - i\sqrt{2} = 0$.

2. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & -1 & 4 \\ -3 & 6 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = -4, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

6. $a = \{5, -13, 2\}$,
$e_1 = \{3, -1, 2\}$, $e_2 = \{-2, 2, -1\}$,
$e_3 = \{1, 4, 1\}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

8. $2x^2 + 2y^2 + 4xy + 8x +$
$+6y + 1 = 0.$

Контрольна робота № 2

1. Знайти координати вектора $\vec{x}$, якщо $\vec{x} \perp \vec{a}$ і $\vec{x} \perp \vec{b}$, $|\vec{x}| = 4\sqrt{33}$, де $\vec{a} = \{3,2,-2\}, \vec{b} = \{1,-1,0\}$. Кут між вектором $\vec{x}$ і віссю *OX* гострий.

2. Дано дві вершини трикутника *A*(–6, 2) і *B*(2,–2) і точка перетину його медіан *K*(1,2). Обчислити відстань від третьої вершини *C* до сторони *AB*.

3. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку *M*(3,–2, –4) паралельно площині $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ і перетинає пряму $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+4}{-2} = \dfrac{z-1}{2}$.

4. *A*(2, 2, –2), *B*(5, 10, 4), *C*(3, –2, –5), *D*(2, 3, 5).

5. Через фокуси еліпса $x^2 + 9y^2 = 36$ проведено прямі, паралельні асимптотам гіперболи, ексцентриситет якої дорівнює 2. Написати рівняння цих чотирьох прямих. Зробити рисунок.

6. $r = -4\cos 2\varphi$.

ВАРІАНТ № 16

Контрольна робота № 1

1. $z^3+\sqrt{2}-i\sqrt{6}=0$.

2. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & -4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 2 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=4, \\ -2x_1-x_2-3x_3=2. \end{cases}$

6. $a=\{1,2,4\}$,
$e_1=\{1,1,2\}$, $e_2=\{1,-2,-1\}$,
$e_3=\{1,-3,-2\}$.

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

8. $3x^2+10xy+3y^2-12x+$
$+12y+4=0.$

Контрольна робота № 2

1. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{k}-\vec{j}$ і $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

2. Обчислити координати вершин ромба, якщо відомі рівняння його сторін $2x-y+4=0$ і $2x-y+10=0$ і рівняння однієї з його діагоналей $x+y+2=0$.

3. Знайти відстань від точки $A(-1,\ 2,\ 3)$ до площини, яка проходить через точки $B(1,\ 2,\ 1)$, $C(2,\ -3,\ 4)$, $D(-4,\ 5,\ 1)$.

4. $A(6,\ -2,\ 2)$, $B(9,\ 4,\ 10)$, $C(7,\ -5,\ -2)$, $D(6{,}5,\ 3)$.

5. Знайти кути чотирикутника, вершини якого лежать у фокусах еліпса $2x^2+y^2=16$ і гіперболи $x^2-y^2=4$. Зробити рисунок.

6. $r=-3\sin 2\varphi$.

ВАРІАНТ № 17

Контрольна робота № 1

1. $z^3 + 2 + i2\sqrt{3} = 0$.

2. $\begin{vmatrix} 12 & -3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$

6. $a = \{10, 3, -5\}$,
$e_1 = \{1, 2, 1\}$, $e_2 = \{3, -2, -5\}$,
$e_3 = \{-5, -3, 2\}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 6 & -1 & -3 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

8. $4xy + 4x - 4y - 2 = 0$.

Контрольна робота № 2

1. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектори $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = 5\vec{p} - 4\vec{q}$ взаємно перпендикулярні ?

2. В трикутнику з вершинами $A(2,\ 1)$, $B(-1,-1)$ і $C(3,\ 2)$ визначити точку перетину висот (ортоцентр).

3. Скласти рівняння площини, що проходить через лінію перетину площин $3x - y + 2z + 9 = 0$, $x + z - 3 = 0$ і через точку $M(4,-2,-3)$.

4. $A(-2, -2, 0)$, $B(4, 6, 3)$, $C(-5, -6, -1)$, $D(5, -1, 0)$.

5. Знайти площу трапеції, основами якої є більша вісь еліпса $4x^2 + y^2 = 4$ і директриса параболи $x^2 = 6y$. Зробити рисунок.

6. $r = 2\cos 3\varphi$.

ВАРІАНТ № 18

Контрольна робота № 1

1. $z^3 - 2\sqrt{3} + i2 = 0$.

2. $\begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 & 2 \\ 6 & 2 & -1 & -6 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -13, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

6. $a = \{2, -3, 2\}$,
$e_1 = \{2, -1, 4\}$, $e_2 = \{-1, 3, 2\}$,
$e_3 = \{1, -2, -1\}$.

7. $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

8. $x^2 + y^2 - 2xy - 2x +$
$+4y - 7 = 0$.

Контрольна робота № 2

1. Перевірити, чи можуть вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j} - 9\vec{k}$ і $\vec{b} = -6\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$ бути ребрами куба. Знайти третє ребро.

2. З точки $M(-2, 3)$ під кутом α до осі OX напрямлений промінь світла. Відомо, що $tg\alpha = 3$. Дійшовши до осі OX, промінь від неї відбився. Скласти рівняння прямих, на яких лежать падаючий та відбитий промені.

3. Дано вершини трикутника: $A(4, 1, -2)$, $B(2, 0, 0)$, $C(-2, 3, -5)$. Через сторону AB провести площину, перпендикулярну до площини трикутника ABC.

4. $A(-2, 0, 2)$, $B(4, 3, 10)$, $C(-5, 1, -2)$, $D(5, 0, 3)$.

5. Через фокус параболи $y^2 = 4x$ проходить коло з центром у початку координат. Знайти точки перетину цього кола з асимптотами гіперболи $x^2 - y^2 = 6$. Зробити рисунок.

6. $r = 3\sin 3\varphi$.

ВАРІАНТ № 19

Контрольна робота № 1

1. $z^3 - 2 - i2\sqrt{3} = 0$.

2. $\begin{vmatrix} 11 & 2 & -6 & 4 \\ 6 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 8 \\ 3 & 6 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$

6. $a = \{-2, 12, -6\}$,
$e_1 = \{1, 2, 1\}$, $e_2 = \{2, -1, 3\}$,
$e_3 = \{0, 3, -1\}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

8. $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 48x -$
$-48y + 144 = 0.$

Контрольна робота № 2

1. З’ясувати, чи лежать точки $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$, $D(1, -3, 0)$ в одній площині.

2. Дано дві суміжні вершини квадрата $A(2, 0)$, $B(-1, 4)$. Скласти рівняння його сторін. Знайти площу квадрата.

3. Знайти відстань між двома прямими $\dfrac{x-9}{4} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z}{1}$ і $x = -2t$, $y = 9t - 7$, $z = 2t + 2$.

4. $A(0, -3, -1)$, $B(8, 3, 1)$, $C(-4, -6, 0)$, $D(1, 4, -1)$.

5. Малу вісь еліпса видно з фокуса під прямим кутом. Знайти ексцентриситет цього еліпса ε. Написати рівняння рівнобічної гіперболи, симетричної відносно осі OX з вершиною в точці $A(\varepsilon, 0)$. Зробити рисунок.

6. $r = -4\cos 3\varphi$.

ВАРІАНТ № 20

Контрольна робота № 1

1. $z^3 + 2\sqrt{3} - i2 = 0$.

2. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

6. $a = \{1, -6, 5\}$,
$e_1 = \{2, 1, 4\}$, $e_2 = \{-1, 10, -2\}$,
$e_3 = \{2, -3, 1\}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

8. $x^2 - y^2 - 4xy - 4x -$
$-2y + 2 = 0$.

Контрольна робота №2

1. Визначити роботу сили $\vec{F} = \{3, -2, 5\}$, якщо її точка прикладання переміщується прямолінійно з точки *A*(1 ,1 ,1) в точку *B*(3, 4, 5).

2. Дано рівняння двох сторін прямокутника $3x - 2y - 5 = 0$, $2x + 3y + 7 = 0$ і одна з його вершин *A*(–2, 1). Написати рівняння інших його сторін та обчислити площу цього прямокутника.

3. Довести, що прямі $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ і $x = 3t + 7$, $y = 2t + 2$, $z = -2t + 1$ лежать в одній площині. Скласти рівняння цієї площини.

4. *A*(1, 1, –3), *B*(4, 9, 3), *C*(2, –3, –6), *D*(1, 2, 4).

5. Через правий фокус еліпса $x^2 + 2y^2 = 16$ проведена пряма, перпендикулярна до осі *OX*. Знайти точки її перетину з асимптотами гіперболи $x^2 - 2y^2 = 16$. Зробити рисунок. **6.** $r = -3\sin\varphi$.

ВАРІАНТ № 21

Контрольна робота № 1

1. $z^3 + 3 + i\sqrt{3} = 0$.

2. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & -4 & 3 & -4 \\ 7 & -7 & -3 & -5 & 8 & -11 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

6. $a = \{4, 0, -3\}$,
$e_1 = \{3, -1, 2\}$, $e_2 = \{-1, 2, 0\}$,
$e_3 = \{-8, 3, 1\}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

8. $x^2 + y^2 - 2xy - 2x +$
$+4y - 7 = 0.$

Контрольна робота № 2

1. Методами векторної алгебри довести, що чотирикутник з вершинами $A(2, -3, 5)$, $B(3, 1, -2)$, $C(0, 0, -1)$, $D(-1, -4, 4)$ – трапеція, яка має два прямі кути.

2. Дано дві точки: $A(8, -1)$, $B(-1, 8)$. Знайти відношення, в якому точка перетину прямої $x - 2y + 8 = 0$ і відрізка AB ділить цей відрізок.

3. Обчислити відстань від точки $P(1, -1, -2)$ до прямої $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-8}{2}$.

4. $A(-3, -2, -1)$, $B(3, 7, 2)$, $C(-6, -5, 0)$, $D(4, -1, -1)$.

5. Коло з центром у початку координат проходить через фокуси гіперболи $x^2 - y^2 = 28$. Знайти точки перетину цього кола з директрисою параболи $y^2 - 4\sqrt{7}x = 0$. Зробити рисунок.

6. $r = \dfrac{2}{\sin\varphi}$.

ВАРІАНТ № 22

Контрольна робота № 1

1. $z^3 - \sqrt{3} + i3 = 0.$

2. $\begin{vmatrix} -3 & -2 & -2 & 4 \\ 2 & 7 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 2 & -6 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 13 & 2 \\ 7 & -3 & 1 & 6 & 14 & -7 \end{pmatrix}.$

4. $X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 12, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -6. \end{cases}$

6. $a = \{0, -1, 3\},$
$e_1 = \{2, -1, 2\}, \quad e_2 = \{2, 5, -1\},$
$e_3 = \{-1, 3, -1\}.$

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

8. $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 12y +$
$+4x + 4 = 0.$

Контрольна робота № 2

1. В точці $A(2, 1, -1)$ прикладена сила $\vec{R}$ така, що $|\vec{R}| = 7$. Знаючи, що дві координати цієї сили $x = 2$, $y = -3$, а третя $z > 0$, знайти кінець вектора, що зображує цю силу.

2. Знайти рівняння прямої, паралельної прямій $3x - 4y + 2 = 0$ і віддаленої від неї на відстань 3 од.

3. Переконатися, що прямі $x = 6t - 1$, $y = -2t + 3$, $z = 8t - 9$ і $\dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-9}{4}$ паралельні. Знайти відстань між ними.

4. $A(-1, -1, -3)$, $B(7, 2, 3)$, $C(-5, 0, -6)$, $D(0, -1, 4)$.

5. Написати рівняння кола, яке має центр у фокусі параболи $y^2 = 4x$ і проходить через лівий фокус еліпса $x^2 + 2y^2 = 4$. Зробити рисунок.

6. $r = \dfrac{3}{\cos\varphi}.$

ВАРІАНТ № 23

Контрольна робота № 1

1. $z^3 - 3 - i\sqrt{3} = 0.$

2. $\begin{vmatrix} -4 & -8 & 5 & 3 \\ -6 & 17 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & -5 & -2 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 7 & 8 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 3 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 = -6, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

6. $a = \{5, -1, 3\},$
$e_1 = \{7, 1, -3\}, \quad e_2 = \{0, 2, -1\},$
$e_3 = \{-1, 1, 2\}.$

7. $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -6 \\ 3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

8. $2xy + 2x + 2y = 1.$

Контрольна робота № 2

1. З вершини прямокутника зі сторонами 6 і 4 см проведені прямі, які ділять протилежні сторони навпіл. Знайти кут між ними.

2. Дано рівняння однієї із сторін квадрата $x + 3y - 7 = 0$ і точка перетину його діагоналей $P(0, -1)$. Знайти рівняння трьох інших його сторін.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $x = 3t + 1, \quad y = 2t + 3, \quad z = -t - 2$ паралельно прямій $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+5}{4}.$

4. $A(1, -3, 1)$, $B(4, 3, 9)$, $C(2, -6, -3)$, $D(1, 4, 2)$.

5. Парабола проходить через точки перетину асимптот гіперболи $x^2 - y^2 = 1$ і кола $x^2 + y^2 + 6x = 0$ і симетрична відносно осі OX. Написати рівняння параболи і її директриси. Зробити рисунок.

6. $r = \dfrac{2}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \varphi\right)}.$

ВАРІАНТ № 24

Контрольна робота № 1

1. $z^3+\sqrt{3}-i3=0$.

2. $\begin{vmatrix} 4 & -8 & -2 & -10 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & -4 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & -4 & 6 & 1 \\ -4 & 9 & 2 & -7 & 10 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $X\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 3x_1-x_2-8x_3=4, \\ -x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+x_3=-3. \end{cases}$

6. $a=\{2,5,6\}$,

$e_1=\{3,2,1\}$, $e_2=\{2,3,2\}$,

$e_3=\{1,1,3\}$.

7. $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

8. $x^2+y^2+2xy-8x-$

$-4y+1=0$.

Контрольна робота № 2

1. Дано три послідовні вершини трапеції: *A*(–2, –3, 5), *B*(1, 4, 8), *C*(3, 1, –1). Знайти її четверту вершину *D* за умови, що основа *AD* у п’ять разів більша основи *BC*.

2. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку *A*(2, 6) і утворює з осями координат трикутник, який знаходиться у другій чверті і має площу 3 кв. од.

3. Знайти точку, симетричну точці *P*(4,3,10) відносно прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.

4. *A*(–3, –1, 1), *B*(3, 2, 9), *C*(–6, 0, –3), *D*(4, –1, 2).

5. Дана гіпербола $y^2-x^2=8$. Написати рівняння софокусного еліпса, що проходить через точку *A*(3, 0). Зробити рисунок.

6. $r=\dfrac{3}{\cos\left(\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

ВАРІАНТ № 25

Контрольна робота № 1

1. $z^3+3i=0$.

2. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & 7 \\ 5 & -6 & -4 & -5 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=0, \\ -x_1+5x_2+3x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+x_3=7. \end{cases}$

6. $a=\{7,-3,2\}$,
$e_1=\{-1,2,5\}$, $e_2=\{1,2,3\}$,
$e_3=\{-3,1,0\}$.

7. $A=\begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+1=0$.

Контрольна робота № 2

1. Обчислити висоту паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{k}$ і $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$.

2. Дано вершини трикутника: $A(1, -2)$, $B(5, 4)$, $C(-2, 0)$. Скласти рівняння бісектрис його внутрішнього та зовнішнього кутів при вершині A.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\begin{cases} 3x+2y+5z+6=0 \\ x+4y+3z+4=0 \end{cases}$ паралельно прямій $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+1}{-3}$.

4. $A(2, -4, -2)$, $B(10, 2, 1)$, $C(-2, -7, -1)$, $D(3, 3, -2)$.

5. Гіпербола симетрична відносно осей координат і відстані від однієї з її вершин до фокусів, розташованих на осі OY, рівні 9 і 1. Знайти точки перетину еліпса $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$ з асимптотами цієї гіперболи. Зробити рисунок.

6. $r=2+\cos\varphi$.

ВАРІАНТ № 26

Контрольна робота № 1

1. $z^3 - 3 = 0$.

2. $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $X\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 7x_1 \quad -x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

6. $a = \{6, 3, -5\}$,
$e_1 = \{4, -1, 3\}$, $e_2 = \{-1, 2, 1\}$,
$e_3 = \{2, -3, -5\}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

8. $4xy + 4x - 4y = 0$.

Контрольна робота № 2

1. Знайти вектор $\vec{a}$ такий, що $(\vec{a}, \vec{i}) = (\vec{a}, \vec{j}) = (\vec{a}, \vec{k})$ і $|\vec{a}| = 100$.

2. Дано дві вершини рівностороннього трикутника ABC: $A(2, 1)$ і $B(2, 5)$. Знайти координати третьої вершини.

3. Знайти відстань від точки $C(3, -4, -2)$ до площини, що проходить через дві прямі $\dfrac{x-5}{13} = \dfrac{y-6}{1} = \dfrac{z+3}{-4}$ і $\dfrac{x-2}{13} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+3}{-4}$.

4. $A(-2, 2, -4)$, $B(1, 10, 2)$, $C(-1, -2, -7)$, $D(-2, 3, 3)$.

5. Написати рівняння гіперболи, яка має вершини у фокусах, а фокуси – у вершинах еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Зробити рисунок.

6. $r=3+\sin\varphi$.

ВАРІАНТ № 27

Контрольна робота № 1

1. $z^3-3i=0$.

2. $\begin{vmatrix} -5 & 2 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ 9 & -4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $X\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=2, \\ 2x_1+3x_2+x_3=5, \\ x_1+2x_2+3x_3=6. \end{cases}$

6. $a=\{-1,2,0\}$,
$e_1=\{1,3,-5\}$, $e_2=\{3,1,-1\}$,
$e_3=\{-2,-1,3\}$.

7. $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $x^2+2xy+y^2-\sqrt{2}x-$
$-3\sqrt{2}y+4=0.$

Контрольна робота № 2

1. Дано вектор $\vec{c}=16\vec{i}-15\vec{j}+12\vec{k}$. Знайти координати вектора $\vec{d}$, паралельного вектору $\vec{c}$ і протилежного з ним напрямку за умови, що $|\vec{d}|=5$.

2. Визначити координати точки, симетричної точці $A(-6,\ 4)$ відносно прямої $4x-5y+3=0$.

3. Написати рівняння перпендикуляра, проведеного з точки M(4, 0,–3) до прямої $\frac{x+2}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{4}$.

4. $A(-1,\ 0,\ -2)$, $B(5,\ 8,\ 1)$, $C(-4,\ -4,\ -1)$, $D(6,\ 1,\ -2)$.

5. Написати рівняння еліпса і знайти його ексцентриситет, якщо відстань між його фокусами дорівнює відстані між кінцями великої і малої півосей, а одна з вершин знаходиться у фокусі параболи $y^2 = \sqrt{40}x$. Зробити рисунок.

6. $r = 4 - \cos\varphi$.

ВАРІАНТ № 28

Контрольна робота № 1

1. $z^3 + 3 = 0$.

2. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 10 & 9 & -4 & 8 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 9 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -3, \\ 5x_1 + 3x_2 = 2. \end{cases}$

6. $a = \{-1, -4, -2\}$,
$e_1 = \{1, 2, 4\}$, $e_2 = \{1, -1, 1\}$,
$e_3 = \{2, 2, 4\}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

8. $5x^2 + 5y^2 + 8xy - 8x -$
$-10y - 4 = 0.$

Контрольна робота № 2

1. Знайти довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$ і $\left(\vec{p},\hat{\ }\vec{q}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Дано дві вершини трикутника $A(3, -1)$ і $B(5, 7)$ і точка $H(4, -1)$ перетину його висот. Написати рівняння сторін цього трикутника.

3. Знайти точку, симетричну точці $P(1,1,1)$ відносно прямої $\dfrac{x-11}{2} = \dfrac{y-18}{5} = \dfrac{z-4}{-2}$.

4. $A(0, -2, -3)$, $B(8, 1, 3)$, $C(-4, -1, -6)$, $D(1, -2, 4)$.

5. Точка M ділить відстань між фокусами гіперболи $9x^2 - 16y^2 = 144$ у відношенні $F_1M:MF_2 = 2:3$, де F_1 – лівий фокус. Написати рівняння параболи, фокус якої знаходиться в точці M, а вершина – у початку координат. Зробити рисунок.

6. $r = 3 - \sin\varphi$.

ВАРІАНТ № 29

Контрольна робота № 1

1. $z^3 + 3 + 3i = 0$.

2. $\begin{vmatrix} 5 & -6 & -9 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -2 \\ -7 & 2 & -2 & -8 \\ 8 & 2 & 3 & 9 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 5 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $X\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 9 & 4 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -5. \end{cases}$

6. $a = \{4, -6, 7\}$,
$e_1 = \{4, -1, 1\}$, $e_2 = \{-2, 3, -2$
$e_3 = \{-1, -1, 2\}$.

7. $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

8. $2x^2 - 2y^2 - 4\sqrt{3}xy + 12\sqrt{3}x +$
$+12y - 54 = 0$.

Контрольна робота № 2

1. Знайти одиничний вектор $\vec{p}$, одночасно перпендикулярний до вектора $\vec{a} = \{3,6,8\}$ і до осі OX.

2. Через точку $A(-1, 2)$ провести пряму під кутом 135° до прямої, що відтинає на координатних осях відрізки $a = 1$ і $b = -2$.

3. Знайти проекцію точки $P(3,-4,-6)$ на площину, яка проходить через три точки $M_1(-6, 1,-5)$, $M_2(7,-2, -1)$ і $M_3(10, -7, 1)$.

4. $A(-2, -2, 0)$, $B(1, 4, 8)$, $C(-1,-5,-4)$, $D(-2, 5, 1)$.

5. Гіпербола, симетрична відносно осей координат, має ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$ і проходить через точку $A(1, \sqrt{3})$. Знайти відстань від вершин цієї гіперболи до фокуса параболи $y^2 = 2x$. Зробити рисунок.

6. $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$.

ВАРІАНТ № 30

Контрольна робота № 1

1. $z^3 - 3 + 3i = 0$.

2. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ 9 & -2 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -7 & 8 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 7 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -5x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

6. $a = \{-6, 12, -5\}$,
$e_1 = \{3, -1, 5\}$, $e_2 = \{2, 0, -1\}$,
$e_3 = \{-1, 5, 3\}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

8. $x^2 + y^2 - 4xy - 2x + 4y = 1$.

Контрольна робота № 2

1. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = \{4, -3, 2\}$ на вісь, що утворює з координатними осями рівні кути.

2. Дано дві суміжні вершини паралелограма $A(1, 5)$ і $B(-2, -1)$ і точка перетину його діагоналей $K(4,1)$. Написати рівняння сторін паралелограма.

3. Знайти відстань від точки $M(2,3,-1)$ до прямої $x = t + 1$, $y = t + 2$, $z = 4t + 13$.

4. $A(-4, -2, 0)$, $B(2, 1, 8)$, $C(-7,-1,-4)$, $D(3,-2, 1)$.

5. Парабола проходить через точки перетину асимптот гіперболи $x^2 - y^2 = 1$ і кола $x^2 + y^2 + 4y = 0$ та симетрична відносно осі OY. Написати рівняння параболи і її директриси. Зробити рисунок.

6. $r = 3\sqrt{\sin 2\varphi}$.

ДЛЯ НОТАТОК