Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), якщо

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$$

(λ - число).

Ділення відрізка AB у заданому співвідношенні $\lambda = \dfrac{AB}{CB}$, де $A(x_1;\ y_1;\ z_1),\ B(x_2;\ y_2;\ z_2),\ C(x_3;\ y_3;\ z_3)$ і C - точка ділення.

Координати точки ділення

$$x_c = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y_c = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \qquad z_c = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (2.4)$$

Якщо відрізок AB ділиться точкою C навпіл, то

$$x_c = \frac{x_1 + \lambda x_2}{2}; \qquad y_c = \frac{y_1 + \lambda y_2}{2}; \qquad z_c = \frac{z_1 + \lambda z_2}{2}.. \qquad (2.5)$$

2 Лінійні операції над векторами

1 Сума двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$

Сума двох векторів знаходиться за правилом трикутника (рис.2а) або правилом паралелограма (рис. 2б).

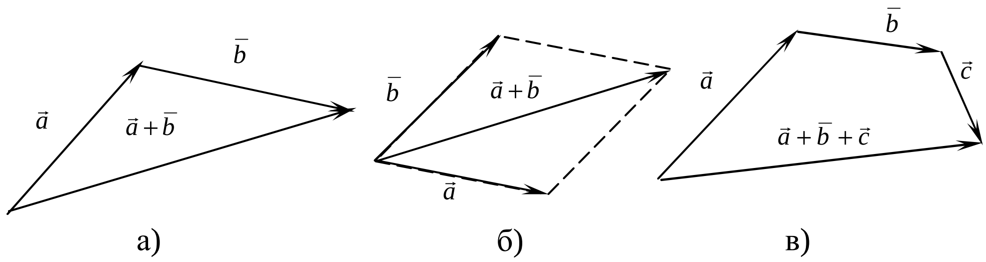


Рис. 2

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задано координатами $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}.$$

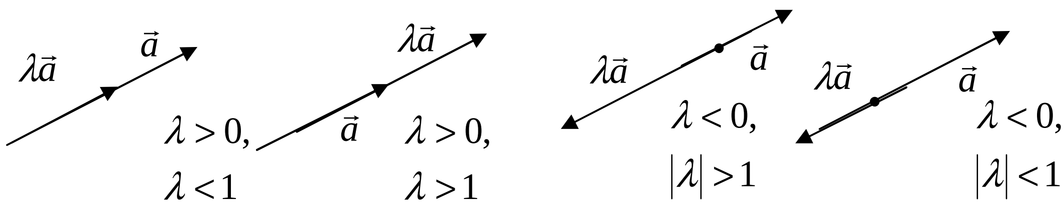
Сума кількох векторів знаходиться за правилом многокутника (рис. 3 в)).

Якщо вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ ...,\vec{m}$ задано координатами, то їх сума дорівнює

$$\begin{aligned}&\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+...+\vec{m}=\\&=\{a_x+b_x+...+m_x,a_y+b_y+...+m_y,\ a_z+b_z+...+m_z\}.\end{aligned} \qquad (2.6)$$

2 Множення вектора $\vec{a}$ на число λ

Множення вектора $\overline{a}$ на число λ пояснено на рис.3.



а) б) в) г)

Рис. 3

Якщо вектор $\vec{a}$ задано координатами, то вектор $\lambda\vec{a}$ дорівнює

$$\lambda\vec{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}. \qquad (2.7)$$

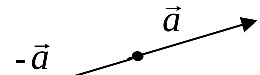


Рис. 4

Якщо $\lambda=-1$, то вектор $-\vec{a}$ є протилежно напрямлений по відношенню до $\vec{a}$ (рис. 4)

і $-\vec{a}=\{-a_x,-a_y,-a_z\}$.

3 Різниця векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ (рис. 5).

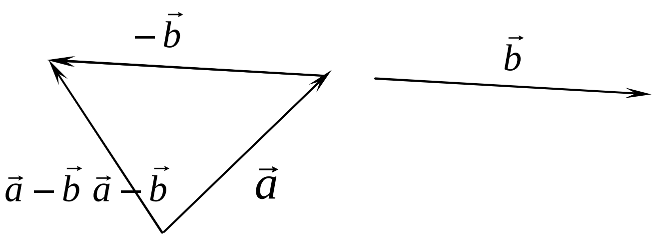


Рис. 5

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ мають спільний початок, то $\vec{a}+\vec{b}$ та $\vec{a}-\vec{b}$ - це вектори, які співпадають з діагоналями паралелограма, побудованого на цих векторах (рис.6).

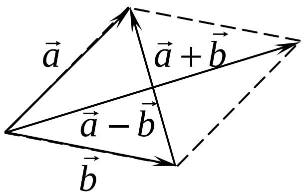


Рис. 6.

Якщо $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$, то

$$\vec{a}-\vec{b}=\{a_x-b_x;a_y-b_y;a_z-b_z\}.$$

Лінійна комбінація векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c},...\vec{m}$ дорівнює

$$\vec{u}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}+...+\lambda_m\vec{m}$$

($\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,...,\lambda_m$ - числа).

Якщо $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, то $\vec{a}$ та $\vec{b}$ - колінеарні ($\vec{a}\|\vec{b}$) і умова колінеарності векторів має вигляд

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=\lambda. \qquad (2.8)$$

Якщо $\vec{c}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - компланарні, тобто, лежать в одній або паралельних площинах.

Ортом вектора $\vec{a}$ називається вектор $\vec{a}^0$, модуль якого дорівнює одиниці $\left(\left|\vec{a}^0\right|=1\right)$, а напрям співпадає із напрямом вектора $\vec{a}$, тобто

$$\vec{a}^0=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\},$$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|};\cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|};\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}\ - \tag{2.9}$$

- напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ (α, β, γ – кути вектора $\vec{a}$ з додатними напрямами відповідно осей координат *Ox*, *Oy*, *Oz*) і

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{2.10}$$

Тоді

$$\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}^0, \tag{2.11}$$

де

$$\vec{a}^0=\left\{\frac{a_x}{|\vec{a}|};\ \frac{a_y}{|\vec{a}|};\ \frac{a_z}{|\vec{a}|}\right\}. \tag{2.12}$$

3 Добутки векторів

3.1 Скалярний добуток двох векторів

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ - це число, яке дорівнює

$$\overrightarrow{ab}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}), \tag{2.13}$$

де $|\vec{a}|$, $\left|\vec{b}\right|$ - модулі векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Якщо вектори задано координатами, а саме: $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, то їх скалярний добуток дорівнює

$$\overrightarrow{ab}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{2.14}$$