Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Институт прикладной математики и компьютерных наук

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ООП
доктор техн. наук, профессор
______________А.М. Горцев
подпись
«_____»_______2021г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА
ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ И ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика,
направленность(профиль) «Прикладная математика и информатика»

Рыжикова Валерия Валентиновна

Руководитель ВКР
доктор техн. наук, профессор
______________Назаров А.А.
подпись
Автор работы

студентка группы №931720
______________Рыжикова В.В.
подпись
«_____»_______2021г.

Томск 2021 г.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра теории вероятностей и математической статистики

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель ООП
д-р техн. наук, профессор
________________ А.М. Горцев
подпись
«_____»____________ 2020 г.

ЗАДАНИЕ

по выполнению выпускной квалификационной работы бакалавра
студентке Ряжиковой Валерии Валентиновне группы №931828.

1. Тема выпускной квалификационной работы
«Исследование многолинейной системы с обратной связью и гиперэкспоненциальным распределением»

2. Срок сдачи обучающимся выполненной выпускной квалификационной работы:

а) в учебный офис / деканат – ____________________ б) в ГЭК – ____________________

3. Исходные данные к работе.

Объектом исследования выступают RQ-системы вида $M|H_2|2$, $M|H_2|N$ с обратной связью.

Целью настоящей работы является асимптотически-диффузионный анализ RQ-систем вида $M|H_2|2$, $M|H_2|N$ с обратной связью.

Задачи:

- изучение литературы по исследованию RQ-систем с обратной связью;

- построение математических моделей RQ-систем вида $M|H_2|2$, $M|H_2|N$ с обратной связью;

- построене системы дифференциальных уравнений Колмогорова для систем $M|H_2|2$, $M|H_2|N$ с обратной связью;

- построение аппроксимаций для распределения вероятностей числа приборов, находящихся на первой и второй фазе в системах вида $M|H_2|2$, $M|H_2|N$ с обратной связью методом асимптотического анализа и в предельном условиии большой задержки заявок на орбите;

- построение аппроксимаций распределения вероятностей количества заявок на орбите в RQ-системах вида $M|H_2|2$, $M|H_2|N$ с обратной связью методом асимптотически-диффузионного анализа;

Методами исследования являются методы теории вероятностей, теории случайных процессов, теории массового обслуживания, теории дифференциальных уравнений, а также методы асимптотического и асимптотически диффузионного анализа.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики Национального исследовательского Томского государственного университета (НИ ТГУ).

4. Краткое содержание работы.
Основные разделы:

I. Исследование RQ-системы $M|H_2|2$ с обратной связью методами асимптотического анализа и асимптотически диффузионого анализа, численный пример.

II. Исследование RQ-системы $M|H_2|N$ с обратной связью методами асимптотического анализа и асимптотически диффузионого анализа, численный пример.

Научный руководитель ВКР
д-р техн. наук, профессор,
заведующий каф. ТВиМС ________________ А. А. Назаров

Задание принял к исполнению «_____»____________ 2020 г. ____________

АНОТАЦИЯ

Настоящая работа изучает систему массового обслуживания, с простейшим потоком, орбитой, а также произвольным количеством приборов с гиперэкспоненциальным распределением и обратной связью.

Ключевые слова:теория массового обслуживания, система массового обслуживания, RQ-система, характеристическая функция, метод асимптотического анализа, метод асимптотически диффузионного анализа, простейший поток, гиперэкспоненциальное распределение, произвольное количество приборов, орбита.

Объект исследования: RQ-система M|H_2|N.

Цель: построить ряд распределения, или его апроксимацию, для количества заявок на орите для RQ-системы M|H_2|N в стационарном режиме.

Структура работы: настоящая работа включает в себя 2 раздела, 46 страниц, 8 рисунка, 20 источников литературы.

Начиная с малого в первой главе мы получаем путем асимптотически-диффузионного анализа, использую асимптотическое условие предельно малой интенсивности заявки на орбите, через матричные уравнения распределение количества занятых приборов на первой и второй фазе в стационарном режиме для двух приборов, также как аппроксимацию ряда распределения количества заявок на орбите в стационарном режиме для двух приборов, а после получаем визуальное представление второго результата при конкретных значениях. Во второй главе аналогичными действиями, только используя скалярные выражения, вместо матричных выводим распределение количества занятых приборов на первой и второй фазе в стационарном режиме для произвольного положительного целого количества приборов, также как аппроксимацию ряда распределения количества заявок на орбите в стационарном режиме для произвольного положительного целого количества приборов, в итоге построив графики для различного количества приборов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 5

1. Иследование системы M|H_2|2 с орбитой 6

1.1 Математическая модель и постановка задач 6

1.2 Уравнения Колмогорова 8

1.3 Первый этап асимптотического анализа 14

1.4 Второй этап асимптотического анализа 16

1.5 Метод асимптотически диффузионного анализа 19

1.6 Численные эксперементы 22

2. Иследование системы M|H_2|N с орбитой 23

2.1 Математическая модель и постановка задачи 23

2.2 Уравнения Колмогорова 25

2.3 Первый этап асимптотического анализа 31

2.4 Второй этап асимптотического анализа 36

2.5 Метод асимптотически диффузионного анализа 45

2.6 Численные эксперементы 49

Список использованной литературы 50

ВВЕДЕНИЕ

Системы массового обслуживания с орбитами, также называемые RQ-системами, обладают большой популярностью, иначе книги посвящённые только данной теме, количество страниц у которых исчесляются в сотнях, не существовали бы [11, 12]. Но в нашем иследовании намного больше пригодилась статья [1]. В ней использовался метод ассимптотически диффузионного анализа, использующее асимптотическое условие предельное малой интенсивности заявки на орбите.

Если в первой главе хватает одномерного процесса для отслеживания состояния блока обслуживания, то во второй главе, пришлось последовать примеру статьи[3] и вводить двумерный процесс, что в конечном итоге перерастает в трёхмерный, так как нам нужно следить не только за состоянием блока обслуживания, но и за состоянием орбиты.

На самом деле исследование двухфазных систем в условиях большой задержки на орбите уже проводилось, даже при участии одного из авторов данной статьи - Назарова Анатолия Андреевича [13]. Но две фазы там были расположены последовательно, а не как в данной работе выбиралась одна из двух с определённой вероятностью, с орбиты заявка могла поступить только на вторую фазу, обратной связи не было, да и использован был в статье[13] метод симптотического анализа, а не асимптотически диффузионного. Но также и проводилось исследования использующие асимптотически диффузионный анализ, но в данной статье у приборов отсутствует обратная связь.

Также помогли книги[2,4,5,6,7,8,10] для ознакомления с различными методами.

Цель дипломной работы: построить ряд распределения, или его апроксимацию, для количества заявок на орите для RQ-системы M|H_2|N в стационарном режиме.

Задачи:

1.Построить математическую модель систем $M|H_2|2$, $M|H_2|N$ с обратной связью.
2.Составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для систем $M|H_2|2$, $M|H_2|N$ с обратной связью.
3.С помощью метода асимптотического анализа найти коэффициенты переноса и диффузии дифференциальных уравнений систем $M|H_2|2$, $M|H_2|N$ с обратной связью.
4.С помощью метода асимптотически диффузионного анализа вычислить плотность распределений вероятностей произвольного количества заявок на орбите и получить дискретные распределения вероятностей.

1. ИСЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ M|H_2|2 С ОРБИТОЙ

1.1 Математическая модель и постановка задач

Рассмотрим систему массового обслуживания $M|H_2|2$ с обратной связью (Рисунок 1).

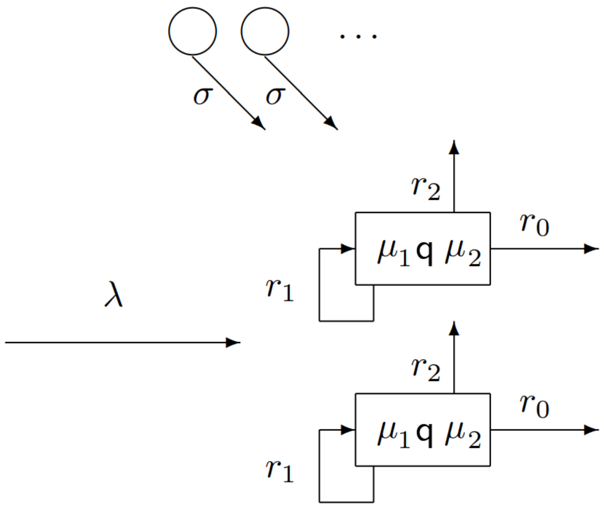

Рис. 1: Система массового обслуживания M|H_2|2 с обратной связью

Система имеет два обслуживающих прибора. Заявки поступают в систему согласно простейщиму потоку с параметром λ. Каждая заявка занимеет один из свободных приборов на время, распределенное по гиперэкспоненциальному закону. Это означает, что заявка на приборе с вероятностью q поступает на первую фазу, с экспоненциальным распределением с параметром μ_1, и с вероятность $1 - q$ на вторую, с параметром μ_2.

После завершения обслуживания заявка с вероятностью r_0 покидает систему, с вероятностью r_1 мгновенно поступает на повторное обслуживание и с вероятностью r_2 уходит на орбиту. Также, если на момент поступления заявки из потока оба прибора заняты, то заявка уходит на орбиту. Через время, продолжительность которого распределена по экспоненциальному закону с пареметром σ, заявка вновь обращается с орбиты к приборам.

Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t, $n_1(t)$ – число приборов занятых на первой фазе в момент времени t, $n_2(t)$ – число приборов занятых на второй фазе в момент времени t.

Рассмотрим трехмерный процесс $\{n_1(t), n_2(t), i(t)\}$. Под состоянием системы будем понимать состояние процесса $\{n_1(t), n_2(t), i(t)\}$ в момент времени t.

Обозначим вероятности следующим образом:

$P(n_1 = 0, n_2 = 0, i(t) = i) = P_0(i,t)$ – вероятность того, что ни один прибор не занят.
$P(n_1 = 0, n_2 = 1, i(t) = i) = P_1(i,t)$ – вероятность того, что один прибор занят на второй фазе.
$P(n_1 = 1, n_2 = 0, i(t) = i) = P_2(i,t)$ – вероятность того, что один прибор занят на первой фазе.
$P(n_1 = 0, n_2 = 2, i(t) = i) = P_3(i,t)$ – вероятность того, что два прибора заняты на второй фазе.
$P(n_1 = 1, n_2 = 1, i(t) = i) = P_4(i,t)$ – вероятность того, что один прибор занят на первой фазе, а другой на второй.
$P(n_1 = 2, n_2 = 0, i(t) = i) = P_5(i,t)$ – вероятность того, что два прибора заняты на первой фазе.
В каждой вероятности на орбите находятся i заявок в момент времени t.

Для решения будем применять методы асимптотического анализа [1, 7, 9, 11] и асимптотически диффузионного анализа [1].

1.2 Уравнения Колмогорова

Для введенных вероятностей составим систему уравнений в конечных разностях [4, 5, 6].

$$
\begin{aligned}
P_0(i,t+\Delta t) =&(1-\Delta t(\lambda+i\sigma))P_0(i,t)+\Delta t\mu_2 r_0 P_1(i,t)+\Delta t\mu_2 r_2 P_1(i-1,t)+\\
&+\Delta t\mu_1 r_0 P_2(i,t)++\Delta t\mu_1 r_2 P_2(i-1,t)+o(\Delta t),\\
P_1(i,t+\Delta t) =&(1-\Delta t(\lambda+i\sigma+\mu_2))P_1(i,t)+\Delta t\lambda(1-q)P_0(i,t)+\\
&+\Delta t\sigma(i+1)(1-q)P_0(i+1,t)+2\Delta t\mu_2 r_0 P_3(i,t)+\mu_2 r_1(1-q)P_1(i,t)+\\
&+2\mu_2 r_2 P_3(i-1,t)+\Delta t\mu_1 r_0 P_4(i,t)+\Delta t\mu_1 r_2 P_4(i-1,t)+\\
&+\Delta t\mu_1 r_1(1-q)P_2(i,t)+o(\Delta t),\\
P_2(i,t+\Delta t) =&(1-\Delta t(\lambda+i\sigma+\mu_1))P_2(i,t)+\Delta tq\lambda P_0(i,t)+\\
&\Delta t\sigma(i+1)qP_0(i+1,t)+\Delta t\mu_2 r_1 qP_1(i,t)+\\
&+\Delta t\mu_1 r_1 qP_2(i,t)+\Delta t\mu_2 r_0 P_4(i,t)+\Delta t\mu_2 r_2 P_4(i-1,t)+\\
&+2\Delta t\mu_1 r_2 P_5(i-1,t)+2\Delta t\mu_1 r_0 P_5(i,t)+o(\Delta t),\\
P_3(i,t+\Delta t) =&(1-\Delta t(\lambda+i\sigma+2\mu_2))P_3(i,t)+\\
&+\Delta t\lambda(1-q)P_1(i,t)+\Delta t\sigma(i+1)(1-q)P_1(i+1,t)+\\
&+2\Delta t\mu_2 r_1(1-q)P_3(i,t)+\Delta t\mu_1 r_1(1-q)P_4(i,t)+\Delta t\lambda P_3(i-1,t)+o(\Delta t),\\
P_4(i,t+\Delta t) =&(1-\Delta t(\lambda+i\sigma+\mu_1+\mu_2))P_4(i,t)+\Delta t\lambda qP_1(i,t)+\Delta t\sigma(i+1)qP_1(i+1,t)+\\
&+2\Delta t\mu_2 r_1 qP_3(i,t)+\Delta t\lambda(1-q)P_2(i,t)+\Delta t\sigma(i+1)(1-q)P_2(i+1,t)+\\
&+\Delta t\mu_2 r_1(1-q)P_4(i,t)+\Delta t\mu_1 r_1 qP_4(i,t)+\\
&+2\Delta t\mu_1 r_1(1-q)P_5(i,t)+\Delta t\lambda P_4(i-1,t)+o(\Delta t),\\
P_5(i,t+\Delta t) =&(1-\Delta t(\lambda+i\sigma+2\mu_1))P_5(i,t)+\Delta t\sigma(i+1)qP_2(i+1,t)+\Delta t\lambda qP_2(i,t)+\\
&+\Delta t\mu_2 r_1 qP_4(i,t)+2\Delta t\mu_1 r_1 qP_5(i,t)+\Delta t\lambda P_5(i-1,t)+o(\Delta t).
\end{aligned}
$$

Расскроем скобки, разделим на каждое уравнение на Δt, получим

$$
\begin{aligned}
\frac{P_0(i,t+\Delta t)-P_0(i,t)}{\Delta t} =&-(\lambda+i\sigma)P_0(i,t)+\mu_2 r_0 P_1(i,t)+\mu_2 r_2 P_1(i-1,t)+\mu_1 r_0 P_2(i,t)+\\
&+\mu_1 r_2 P_2(i-1,t),\\
\frac{P_1(i,t+\Delta t)-P_1(i,t)}{\Delta t} =&-(\lambda+i\sigma+\mu_2)P_1(i,t)+\lambda(1-q)P_0(i,t)+\sigma(i+1)(1-q)P_0(i+1,t)+\\
&+2\mu_2 r_0 P_3(i,t)+\mu_2 r_1(1-q)P_1(i,t)+2\mu_2 r_2 P_3(i-1,t)+\mu_1 r_0 P_4(i,t)+\\
&+\mu_1 r_2 P_4(i-1,t)+\mu_1 r_1(1-q)P_2(i,t),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{P_2(i,t+\Delta t)-P_2(i,t)}{\Delta t} =& -(\lambda+i\sigma+\mu_1)P_2(i,t)+q\lambda P_0(i,t)\\
&+\sigma(i+1)qP_0(i+1,t)+\mu_2 r_1 qP_1(i,t)+\\
&+\mu_1 r_1 qP_2(i,t)+\mu_2 r_0 P_4(i,t)+\mu_2 r_2 P_4(i-1,t)+\\
&+2\mu_1 r_2 P_5(i-1,t)+2\mu_1 r_0 P_5(i,t),\\
\frac{P_3(i,t+\Delta t)-P_3(i,t)}{\Delta t} =& -(\lambda+i\sigma+2\mu_2)P_3(i,t)+\lambda(1-q)P_1(i,t)+\\
&+\sigma(i+1)(1-q)P_1(i+1,t)+2\mu_2 r_1(1-q)P_3(i,t)+\\
&+\mu_1 r_1(1-q)P_4(i,t)\lambda P_3(i-1,t),\\
\frac{P_4(i,t+\Delta t)-P_4(i,t)}{\Delta t} =& -(\lambda+i\sigma+\mu_1+\mu_2)P_4(i,t)+\lambda qP_1(i,t)+\sigma(i+1)qP_1(i+1,t)+\\
&+2\mu_2 r_1 qP_3(i,t)+\lambda(1-q)P_2(i,t)+\sigma(i+1)(1-q)P_2(i+1,t)+\\
&+\mu_2 r_1(1-q)P_4(i,t)+\mu_1 r_1 qP_4(i,t)+2\mu_1 r_1(1-q)P_5(i,t)+\\
&+\lambda P_4(i-1,t),\\
\frac{P_5(i,t+\Delta t)-P_5(i,t)}{\Delta t} =& -(\lambda+i\sigma+2\mu_1)P_5(i,t)+\sigma(i+1)qP_2(i+1,t)+\lambda qP_2(i,t)+\\
&+\mu_2 r_1 qP_4(i,t)+2\mu_1 r_1 qP_5(i,t)+\lambda P_5(i-1,t).
\end{aligned}
$$

Устремим $\Delta t \to 0$, получим

$$
\begin{aligned}
\frac{dP_0(i,t)}{\partial t} =& -(\lambda + i\sigma)P_0(i,t) + \mu_2 r_0 P_1(i,t) + \mu_2 r_2 P_1(i-1,t) + \mu_1 r_0 P_2(i,t) + \\
&+ \mu_1 r_2 P_2(i-1,t), \\
\frac{dP_1(i,t)}{\partial t} =& -(\lambda + i\sigma + \mu_2)P_1(i,t) + \lambda(1-q)P_0(i,t) + \sigma(i+1)(1-q)P_0(i+1,t) + \\
&+ 2\mu_2 r_0 P_3(i,t) + \mu_2 r_1 (1-q)P_1(i,t) + 2\mu_2 r_2 P_3(i-1,t) + \mu_1 r_0 P_4(i,t) + \\
&+ \mu_1 r_2 P_4(i-1,t) + \mu_1 r_1 (1-q) P_2(i,t), \\
\frac{dP_2(i,t)}{\partial t} =& -(\lambda + i\sigma + \mu_1)P_2(i,t) + q\lambda P_0(i,t) + \sigma(i+1)qP_0(i+1,t) + \mu_2 r_1 q P_1(i,t) + \\
&+ \mu_1 r_1 q P_2(i,t) + \mu_2 r_0 P_4(i,t) + \mu_2 r_2 P_4(i-1,t) + 2\mu_1 r_2 P_5(i-1,t) + \\
&+ 2\mu_1 r_0 P_5(i,t), \\
\frac{dP_3(i,t)}{\partial t} =& -(\lambda + i\sigma + 2\mu_2)P_3(i,t) + \lambda(1-q)P_1(i,t) + \sigma(i+1)(1-q)P_1(i+1,t) + \\
&+ 2\mu_2 r_1 (1-q) P_3(i,t) + \mu_1 r_1 (1-q) P_4(i,t) + \lambda P_3(i-1,t), \\
\frac{dP_4(i,t)}{\partial t} =& -(\lambda + i\sigma + \mu_1 + \mu_2)P_4(i,t) + \lambda q P_1(i,t) + \sigma(i+1)qP_1(i+1,t) + \\
&+ 2\mu_2 r_1 q P_3(i,t) + \lambda(1-q)P_2(i,t) + \sigma(i+1)(1-q)P_2(i+1,t) + \\
&+ \mu_2 r_1 (1-q) P_4(i,t) + \mu_1 r_1 q P_4(i,t) + 2\mu_1 r_1 (1-q) P_5(i,t) + \lambda P_4(i-1,t), \\
\frac{dP_5(i,t)}{\partial t} =& -(\lambda + i\sigma + 2\mu_1)P_5(i,t) + \sigma(i+1)qP_2(i+1,t) + \lambda q P_2(i,t) + \\
&+ \mu_2 r_1 q P_4(i,t) + 2\mu_1 r_1 q P_5(i,t) + \lambda P_5(i-1,t).
\end{aligned}
$$

Введем частичные характерестические функции

$$
H_k(u,t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{iuj} P_k(i,t).
$$

Тогда система примет вид

$$
\begin{aligned}
\frac{dH_0(u,t)}{\partial t} =& -\lambda H_0(u,t) + j\sigma\frac{dH_0(u,t)}{\partial u} + \mu_2 r_0 H_1(u,t) + \mu_2 r_2 e^{ju} H_1(u,t) + \\
&+ \mu_1 r_0 H_2(u,t) + \mu_1 r_1 e^{ju} H_2(u,t), \\
\frac{dH_1(u,t)}{\partial t} =& -(\lambda+\mu_2)H_1(u,t) + j\sigma\frac{dH_1(u,t)}{\partial u} + \lambda(1-q)H_0(u,t) - \\
&- j\sigma e^{-ju}(1-q)\frac{dH_0(u,t)}{\partial u} + 2\mu_2 r_0 H_3(u,t) + \mu_2 r_1 (1-q) H_1(u,t) + \\
&+ 2\mu_2 r_2 e^{ju} H_3(u,t) + \mu_1 r_0 H_4(u,t) + \mu_1 r_2 e^{ju} H_4(u,t) + \\
&+ \mu_1 r_1 (1-q) H_2(u,t), \\
\frac{dH_2(u,t)}{\partial t} =& -(\lambda+\mu_1)H_2(u,t) + j\sigma\frac{dH_2(u,t)}{\partial u} + q\lambda H_2(u,t) - j\sigma e^{-ju} q\frac{dH_0(u,t)}{\partial u} + \\
&+ \mu_2 r_1 q H_1(u,t) + \mu_1 r_1 q H_2(u,t) + \mu_2 r_0 H_4(u,t) + \mu_2 r_2 e^{ju} H_4(u,t) + \\
&+ 2\mu_1 r_2 e^{ju} H_5(u,t) + 2\mu_1 r_0 H_5(u,t), \\
\frac{dH_3(u,t)}{\partial t} =& -(\lambda+2\mu_2)H_3(u,t) + j\sigma\frac{dH_3(u,t)}{\partial u} + \lambda(1-q)H_1(u,t) - \\
&- j\sigma(1-q)e^{-ju}\frac{dH_0(u,t)}{\partial u} + 2\mu_2 r_1 (1-q) H_3(u,t) + \\
&+ \mu_1 r_1 (1-q) H_4(u,t) + \lambda e^{ju} H_3(u,t), \\
\frac{dH_4(u,t)}{\partial t} =& -(\lambda+\mu_1+\mu_2)H_4(u,t) + j\sigma\frac{dH_4(u,t)}{\partial u} + \lambda q H_4(u,t) - \\
&- j\sigma q e^{-ju}\frac{dH_1(u,t)}{\partial u} + 2\mu_2 r_1 q H_3(u,t) + \lambda(1-q)H_2(u,t) - \\
&- j\sigma(1-q)e^{-ju}\frac{dH_0(u,t)}{\partial u} + \mu_2 r_1 (1-q) H_4(u,t) + \mu_1 r_1 q H_4(u,t) + \\
&+ 2\mu_1 r_1 (1-q) H_5(u,t) + \lambda e^{ju} H_4(u,t), \\
\frac{dH_5(u,t)}{\partial t} =& -(\lambda+2\mu_1)H_5(u,t) + j\sigma\frac{dH_5(u,t)}{\partial u} - j\sigma q e^{-ju}\frac{dH_2(u,t)}{\partial u} + \\
&+ \lambda q H_2(u,t) + \mu_2 r_1 q H_4(u,t) + 2\mu_1 r_1 q H_5(u,t) + \lambda e^{ju} H_5(u,t).
\end{aligned}
$$

Обозначим вектор-строки

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}(u,t) =& \{H_0(u,t), H_1(u,t), H_2(u,t), H_3(u,t), H_4(u,t), H_5(u,t)\}, \\
\frac{\partial \boldsymbol{H}(u,t)}{\partial t} =& \{\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial t}, \frac{\partial H_1(u,t)}{\partial t}, \frac{\partial H_2(u,t)}{\partial t}, \frac{\partial H_3(u,t)}{\partial t}, \frac{\partial H_4(u,t)}{\partial t}, \frac{\partial H_5(u,t)}{\partial t}\}, \\
\frac{\partial \boldsymbol{H}(u,t)}{\partial u} =& \{\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u}, \frac{\partial H_1(u,t)}{\partial u}, \frac{\partial H_2(u,t)}{\partial u}, \frac{\partial H_3(u,t)}{\partial u}, \frac{\partial H_4(u,t)}{\partial u}, \frac{\partial H_5(u,t)}{\partial u}\}.
\end{aligned}
$$

Запишем систему уравнений в виде матричного уравнения

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}(u,t)}{\partial t} = \boldsymbol{H}(u,t)(\boldsymbol{A} + e^{ju}\boldsymbol{B}) + j\sigma \frac{\partial \boldsymbol{H}(u,t)}{\partial u}(\boldsymbol{I_0} - e^{-ju}\boldsymbol{I_1}),$$

где

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda\left(1-q\right) & \lambda q & 0 & 0 & 0 \\ r_0\mu_2 & -\lambda + r_1\mu_2\left(1-q\right) - \mu_2 & q r_1 \mu_2 & \lambda\left(1-q\right) & \lambda q & 0 \\ r_0\mu_1 & r_1\mu_1\left(1-q\right) & -\lambda + q r_1\mu_1 - \mu_1 & 0 & \lambda\left(1-q\right) & \lambda q \\ 0 & 2r_0\mu_2 & 0 & -\lambda + 2r_1\mu_2\left(1-q\right) - 2\mu_2 & 2qr_1\mu_2 & 0 \\ 0 & r_0\mu_1 & r_0\mu_2 & r_1\mu_1\left(1-q\right) & -\lambda + qr_1\mu_1 + r_1\mu_2\left(1-q\right) - \mu_1 - \mu_2 & qr_1\mu_2 \\ 0 & 0 & 2r_0\mu_1 & 0 & 2r_1\mu_1\left(1-q\right) & -\lambda + 2qr_1\mu_1 - 2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2\left(-r_0 - r_1 + 1\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1\left(-r_0 - r_1 + 1\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu_2\left(-r_0 - r_1 + 1\right) & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1\left(-r_0 - r_1 + 1\right) & \mu_2\left(-r_0 - r_1 + 1\right) & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu_1\left(-r_0 - r_1 + 1\right) & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{I_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{I_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1-q & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-q & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-q & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Домножим матричное уравнение на единичный вектор-столбец $\boldsymbol{e}$ и, с учетом

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{e} = 0$$

и

$$(\boldsymbol{I_0} - \boldsymbol{I_1})\boldsymbol{e} = 0$$

получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{H}(u,t)}{\partial t}\boldsymbol{e} =&\boldsymbol{H}(u,t)(e^{ju}-1)\boldsymbol{B}\boldsymbol{e} + j\sigma e^{-ju}\frac{\partial \boldsymbol{H}(u,t)}{\partial u}(e^{ju}-1)\boldsymbol{I_0}\boldsymbol{e} = \\ &= (e^{ju}-1)\{\boldsymbol{H}(u,t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{e} + j\sigma e^{-ju}\frac{\partial \boldsymbol{H}(u,t)}{\partial u}\boldsymbol{I_0}\boldsymbol{e}\}.\end{aligned}$$

Таким образом получаем уравнения

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \boldsymbol{H}(u,t)}{\partial t} = \boldsymbol{H}(u,t)(\boldsymbol{A} + e^{ju}\boldsymbol{B}) + j\sigma\frac{\partial \boldsymbol{H}(u,t)}{\partial u}(\boldsymbol{I_0} - e^{-ju}\boldsymbol{I_1}), \\ &\frac{\partial \boldsymbol{H}(u,t)}{\partial t}\boldsymbol{e} = (e^{ju}-1)\{\boldsymbol{H}(u,t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{e} + j\sigma e^{-ju}\frac{\partial \boldsymbol{H}(u,t)}{\partial u}\boldsymbol{I_0}\boldsymbol{e}\}.\end{aligned} \tag{1}$$

1.3 Первый этап асимптотического анализа

Будем решать уравнения (1) методом асимптотического анализа. Сделаем замены

$$\sigma = \varepsilon, \tau = t\varepsilon, u = \varepsilon w, \boldsymbol{H}(u,t) = \boldsymbol{F}(w,\tau,\varepsilon). \tag{2}$$

Тогда можем переписать уравнения (1)

$$\begin{gathered}
\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{F}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = \boldsymbol{F}(w,\tau,\varepsilon)(\boldsymbol{A} + e^{j\varepsilon w}\boldsymbol{B}) + j\frac{\partial \boldsymbol{F}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}(\boldsymbol{I_0} - e^{-j\varepsilon w}\boldsymbol{I_1}),\\
\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{F}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}\boldsymbol{e} = (e^{j\varepsilon w} - 1)\{\boldsymbol{F}(w,\tau,\varepsilon)\boldsymbol{B}\boldsymbol{e} + je^{-j\varepsilon w}\frac{\partial \boldsymbol{F}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}\boldsymbol{I_0}\boldsymbol{e}\}.
\end{gathered} \tag{3}$$

При условии, что $\varepsilon \to 0$, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1.1. Компоненты R_n или вектор-строка R распределения вероятностей числа приборов, занятых на первой и второй фазе имеет вид

$$\begin{aligned}
&R_0 = \frac{2\mu_1^2\mu_2^2(r_1-1)^2}{c},\\
&R_1 = \frac{2\mu_1^2\mu_2(1-q)(1-r_1)(\lambda+x)}{c},\\
&R_2 = \frac{2\mu_1\mu_2^2 q(1-r_1)(\lambda+x)}{c},\\
&R_3 = \frac{\mu_1^2(1-q)^2(\lambda+x)^2}{c},\\
&R_4 = \frac{2\mu_1\mu_2 q(1-q)(\lambda+x)^2}{c},\\
&R_5 = \frac{\mu_2^2 q^2(\lambda+x)^2}{c},\\
&c = (\mu_1\mu_2(1-r_1) + (\lambda+x)(\mu_2 q + \mu_1(1-q)))^2 + \mu_1^2\mu_2^2(1-r_1)^2,
\end{aligned} \tag{4}$$

где вектор-строка $\boldsymbol{R} = \{R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$ – распределение вероятностей состояния двулинейного блока обслуживания, $x(\tau)$ является решением уравнения $x = x(\tau) : x'(\tau) = a(x) = \boldsymbol{R}\boldsymbol{B}\boldsymbol{e} - x(\tau)\boldsymbol{R}\boldsymbol{I_0}\boldsymbol{e}$.

Доказательство. Рассмотрим первое уравнение системы (3) в пределе при $\varepsilon \to 0$, обозначим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\boldsymbol{F}(w,\tau,\varepsilon) = \boldsymbol{F}(w,\tau)$$

и получим

$$\boldsymbol{F}(w,\tau)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) + j\frac{\boldsymbol{F}(w,\tau)}{\partial w}(\boldsymbol{I_0} - \boldsymbol{I_1}) = 0. \tag{5}$$

Находим решение уравнения (5) в виде $\boldsymbol{F}(w,\tau) = \boldsymbol{R}e^{jwx(\tau)}$. Получим следующую систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{R}\{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})-x(\tau)(\boldsymbol{I_0}-\boldsymbol{I_1})\}=0,\\
&\boldsymbol{Re}=1.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Решение системы (6) совпадает (4). Вектор-строка $\boldsymbol{R}$ вычислена с помощью символьного исчисления на языке Python, используя библиотеку SymPy [16].

Найдем $x=x(\tau)$. Рассмотрим второе уравнение системы (3) в пределе $\varepsilon\to 0$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{F}(w,\tau)}{\partial \tau}e=jw\left\{\boldsymbol{F}(w,\tau)\boldsymbol{Be}+j\frac{\partial \boldsymbol{F}(w,\tau)}{\partial w}\boldsymbol{I_0e}\right\},
$$

подставим решение уравнения (5), тогда

$$
x'(\tau)=a(x)=\boldsymbol{RBe}-x(\tau)\boldsymbol{RI_0e}. \tag{7}
$$

Теорема доказана.

1.4 Второй этап асимптотического анализа

В системе (1) сделаем замену

$$\boldsymbol{H}(u,t)=e^{j\frac{u}{\sigma}x(\sigma t)}\boldsymbol{H}^{(1)}(u,t),$$

получим систему

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{H}^{(1)}(u,t)}{\partial t}+jux'(\sigma t)\boldsymbol{H}^{(1)}(u,t)=\boldsymbol{H}^{(1)}(u,t)(\boldsymbol{A}+e^{ju}\boldsymbol{B})+\\
&+j\sigma\left[\frac{j}{\sigma}x(\sigma t)\boldsymbol{H}^{(1)}(u,t)+\frac{\partial \boldsymbol{H}^{(1)}(u,t)}{\partial u}\right](\boldsymbol{I_0}-e^{-ju}\boldsymbol{I_1}),\\
&\left[\frac{\partial \boldsymbol{H}^{(1)}(u,t)}{\partial t}+jux'(\sigma t)\boldsymbol{H}^{(1)}(u,t)\right]\boldsymbol{e}=(e^{ju}-1)\Big\{\boldsymbol{H}^{(1)}(u,t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}+\\
&+j\sigma e^{-ju}\left[\frac{j}{\sigma}x(\sigma t)\boldsymbol{H}^{(1)}(u,t)+\frac{\partial \boldsymbol{H}^{(1)}(u,t)}{\partial u}\right]\boldsymbol{I_0}\boldsymbol{e}\Big\}.
\end{aligned} \tag{8}$$

С учетом (7) перепишем систему (8)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{H}^{(1)}(u,t)}{\partial t}+jua(x)\boldsymbol{H}^{(1)}(u,t)=\boldsymbol{H}^{(1)}(u,t)(\boldsymbol{A}+e^{ju}\boldsymbol{B}-\\
&-x(\boldsymbol{I_0}-e^{-ju}\boldsymbol{I_1}))+j\sigma\frac{\partial \boldsymbol{H}^{(1)}(u,t)}{\partial u}(\boldsymbol{I_0}-e^{-ju}\boldsymbol{I_1}),\\
&\frac{\partial \boldsymbol{H}^{(1)}(u,t)}{\partial t}\boldsymbol{e}+jua(x)\boldsymbol{H}^{(1)}(u,t)\boldsymbol{e}=(e^{ju}-1)(\boldsymbol{H}^{(1)}(u,t)[\boldsymbol{B}-\\
&-e^{-ju}x\boldsymbol{I_0}]+e^{-ju}j\sigma\frac{\partial \boldsymbol{H}^{(1)}(u,t)}{\partial u}\boldsymbol{I_0})\boldsymbol{e}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим $\sigma=\varepsilon^2$ и сделаем следующие замены в (9)

$$\tau=t\varepsilon^2, u=\varepsilon w, \boldsymbol{H}^{(1)}(u,t)=\boldsymbol{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon). \tag{10}$$

Можем написать

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2\frac{\partial \boldsymbol{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau}+j\varepsilon wa\boldsymbol{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)=\boldsymbol{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)(\boldsymbol{A}+e^{j\varepsilon w}\boldsymbol{B}-x(\boldsymbol{I_0}-e^{-j\varepsilon w}\boldsymbol{I_1}))+\\
&+j\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}(\boldsymbol{I_0}-e^{-j\varepsilon w}\boldsymbol{I_1}),\\
&\varepsilon^2\frac{\partial \boldsymbol{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau}\boldsymbol{e}+j\varepsilon wa\boldsymbol{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)\boldsymbol{e}=\\
&=(e^{j\varepsilon w}-1)(\boldsymbol{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)[\boldsymbol{B}-e^{-j\varepsilon w}x\boldsymbol{I_0}]+e^{-j\varepsilon w}j\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}\boldsymbol{I_0})\boldsymbol{e}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Перепишем первое уранение (11) с учетом разложения

$$e^{j\varepsilon w}=1+(j\varepsilon w)+O(\varepsilon^2), \tag{12}$$

$$
\begin{aligned}
&j\varepsilon wa\boldsymbol{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)=\boldsymbol{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+j\varepsilon w\boldsymbol{B}-x(\boldsymbol{I_0}-\boldsymbol{I_1}+j\varepsilon w\boldsymbol{I_1}))+\\
&+j\varepsilon\frac{\boldsymbol{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{dw}(\boldsymbol{I_0}-\boldsymbol{I_1})+O(\varepsilon^2).
\end{aligned}. \tag{13}
$$

Решение задачи (13) можно записать в виде разложения

$$
\boldsymbol{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)=\Phi(w,\tau)\{\boldsymbol{R}+j\varepsilon w\boldsymbol{f}\}+O(\varepsilon^2), \tag{14}
$$

где $\Phi(w,\tau)$ – скалярная функция, форма которой определена ниже. Получим

$$
\begin{aligned}
&j\varepsilon wa\Phi(w,\tau)\{\boldsymbol{R}+j\varepsilon w\boldsymbol{f}\}=\Phi(w,\tau)\{\boldsymbol{R}+j\varepsilon w\boldsymbol{f}\}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+j\varepsilon w\boldsymbol{B}-x(\boldsymbol{I_0}-\boldsymbol{I_1}+j\varepsilon w\boldsymbol{I_1}))+\\
&+j\varepsilon\frac{\Phi^(w,\tau)}{dw}\{\boldsymbol{R}+j\varepsilon w\boldsymbol{f}\}+\Phi(w,\tau)j\varepsilon\boldsymbol{f}(\boldsymbol{I_0}-\boldsymbol{I_1})+O(\varepsilon^2).
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
&j\varepsilon wa\Phi(w,\tau)\boldsymbol{R}=\Phi(w,\tau)\{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-x(\boldsymbol{I_0}-\boldsymbol{I_1}))+\\
&+j\varepsilon w[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-x(\boldsymbol{I_0}-\boldsymbol{I_1}))+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B}-x\boldsymbol{I_1})]\}+\\
&+j\varepsilon\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{I_0}-\boldsymbol{I_1})+O(\varepsilon^2).
\end{aligned}
$$

С учетом (7) разделим последнее уравнение на $\Phi(w,\tau)j\varepsilon w$ и положим $\varepsilon\to 0$

$$
a\boldsymbol{R}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-x(\boldsymbol{I_0}-\boldsymbol{I_1}))+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B}-x\boldsymbol{I_1})+\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{I_0}-\boldsymbol{I_1}).
$$

Перепишем последнее уравнение

$$
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+x(\boldsymbol{I_1}-\boldsymbol{I_0}))=a\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B}-x\boldsymbol{I_1})-\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{I_0}-\boldsymbol{I_1}). \tag{15}
$$

Решение $\boldsymbol{f}$ задачи (15) можно записать в виде

$$
\boldsymbol{f}=C\boldsymbol{R}+\boldsymbol{g}-\boldsymbol{\varphi}\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{\partial w\Phi(w,\tau)}, \tag{16}
$$

которое мы подставляем в (15) и получаем

$$
\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-x(\boldsymbol{I_0}-\boldsymbol{I_1}))=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{I_0}-\boldsymbol{I_1}) \tag{17}
$$

$$
\boldsymbol{g}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-x(\boldsymbol{I_0}-\boldsymbol{I_1}))=a\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}(x\boldsymbol{I_1}-\boldsymbol{B}). \tag{18}
$$

Рассмотрим первое уравнение системы (8), дифференцируем его по x, получим уравнение

$$
\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial x}\{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-x(\boldsymbol{I_0}-\boldsymbol{I_0})\}-\boldsymbol{R}(\boldsymbol{I_0}-\boldsymbol{I_1})=0.
$$

Учитывая (17) и последнее уравнение для φ, запишем равенство

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial x}, \tag{19}$$

где $\boldsymbol{\varphi e} = 0$. В силу (18) вектор $\boldsymbol{g}$ является частным решением системы (18). Следовательно, она удовлетворяет условию

$$\boldsymbol{ge} = 0. \tag{20}$$

Тогда решение $\boldsymbol{g}$ системы (18), удовлетворяющее условию (20), определяется однозначно.

Теперь рассмотрим второе уравнение системы (12), в которую подставляем разложение (14)

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial \tau} + ja\varepsilon w \Phi(w,\tau)\{1 + j\varepsilon w \boldsymbol{fe}\} = (j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2})$$
$$(\Phi(w,\tau)\{\boldsymbol{R} + j\varepsilon w \boldsymbol{f}\}[\boldsymbol{B} - x\boldsymbol{I_0} + j\varepsilon w x \boldsymbol{I_0}] + j\varepsilon \frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial w} \boldsymbol{RI_0})\boldsymbol{e} + o(\varepsilon^3).$$

Тогда с помощью уравнения (8)

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial \tau} = \Phi(w,\tau)((j\varepsilon w)^2\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{B} - x\boldsymbol{I_0}) + x\boldsymbol{RI_0} - a\boldsymbol{f}\}\boldsymbol{e} +$$
$$\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B} - x\boldsymbol{I_0})\boldsymbol{e}) + (j\varepsilon)^2 w \frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial w} \boldsymbol{RI_0 e},$$

получаем следующее уравнение

$$\frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{\Phi(w,\tau)} = \frac{(jw)^2}{2}\{2(\boldsymbol{f}[\boldsymbol{B} - x\boldsymbol{I_0}] + \boldsymbol{R}x\boldsymbol{I_0} - a\boldsymbol{f})\boldsymbol{e} + a\} -$$
$$- w \frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{\Phi(w,\tau)} \boldsymbol{RI_0 e},$$

в которое мы подставляем (16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial \tau}{\Phi(w,\tau)} &= \frac{(jw)^2}{2}\{2\boldsymbol{g}[\boldsymbol{B} - x\boldsymbol{I_0}]\boldsymbol{e} + 2\boldsymbol{R}x\boldsymbol{I_0}\boldsymbol{e} + a\} + \\ &+ w \frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{\Phi(w,\tau)}\{\boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{B} - x\boldsymbol{I_0}]\boldsymbol{e} - \boldsymbol{RI_0 e}\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Результатом второго этапа асимптотического анализа является $b(x)$ определенная следующим образом

$$b(x) = a(x) + 2\boldsymbol{g}[\boldsymbol{B} - x\boldsymbol{I_0}]e + 2\boldsymbol{R}x\boldsymbol{I_0}. \tag{22}$$

1.5 Метод асимптотически диффузионного анализа

Построим аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок на орбите методом асимптотически диффузионного анализа. Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 1.2. Ряд распределения вероятностей нормированного числа заявок на орбите можно аппроксимировать следующей функцией плотности вероятностей

$$\pi(z) = \frac{C}{b(z)} exp\left\{\frac{2}{\sigma}\int\limits_0^z \frac{a(x)}{b(x)}dx\right\}, \tag{23}$$

где C – нормировчная константа,

$$\begin{aligned} a(x) &= \boldsymbol{RBe} - x\boldsymbol{RI_0e}, \\ b(x) &= a(x) + 2\boldsymbol{g}[\boldsymbol{B} - x\boldsymbol{I_0}]e + 2\boldsymbol{R}x\boldsymbol{I_0}, \end{aligned} \tag{24}$$

здесь вектор-строка $\boldsymbol{g}$ определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}(a + \boldsymbol{B} + x(\boldsymbol{I_1} - \boldsymbol{I_0})) &= a\boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}(x\boldsymbol{I_1} - \boldsymbol{B}), \\ \boldsymbol{ge} &= 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Доказательство. Подставим $b(x)$ в (20)

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau} = w\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}\left\{\boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{B} - x\boldsymbol{I_0}]\boldsymbol{e} - \boldsymbol{RI_0e}\right\} + \frac{(jw)^2}{2}b(x)\Phi(w,\tau). \tag{26}$$

Рассмотрим

$$\boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{B} - x\boldsymbol{I_0}]\boldsymbol{e} - \boldsymbol{RI_0e}.$$

Подставим (19) в последнее выражение, получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial x}[\boldsymbol{B} - x\boldsymbol{I_0}]\boldsymbol{e} - \boldsymbol{RI_0e}. \tag{27}$$

Рассмотрим функцию $a(x)$, найдем ее производную по , учитывая, что $\boldsymbol{R}$, как решение зависит от x

$$a'(x) = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial x}\boldsymbol{Be} - x\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial x}\boldsymbol{I_0e} - \boldsymbol{RI_0e} = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial x}[\boldsymbol{B} - x\boldsymbol{I_0}]\boldsymbol{e} - \boldsymbol{RI_0e}.$$

Тогда (25) перепишем в виде

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau} = a'(x)w\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w} + \frac{(jw)^2}{2}b(x)\Phi(w,\tau). \tag{28}$$

Уравнение (27) это преобразование Фурье уравнения Фокера-Планка для плотности распределения вероятностей $P(y,\tau)$ значений центрированного и нормированного количества заявок на орбите. Находя обратное преобразование Фурье от (27), получим

$$\frac{\partial P(y,\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y}\{a'(x)yP(y,\tau)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{b(x)P(y,\tau)\}. \tag{29}$$

Следовательно $P(y,\tau)$ плотность распределения вероятностей диффузионного процесса [2], который обозначим $y(\tau)$ с коэффициентом переносом $a(x)$ и коэффициентом диффузии $b(x)$

$$dy(\tau) = a'(x)yd\tau + \sqrt{b(x)}dw(\tau). \tag{30}$$

Рассмотрим стохастический процесс нормированного числа заявок на орбите

$$z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y(\tau), \tag{31}$$

где $\varepsilon = \sqrt{\sigma}$, исходя из (8), $dx(\tau) = a(x)d\tau$, следует

$$dz(\tau) = d(x(\tau) + \varepsilon y(\tau)) = (a(x) + \varepsilon y a'(x))d\tau + \varepsilon\sqrt{b(x)}dw(\tau). \tag{32}$$

Разложим $a(z)$ в ряд

$$\begin{aligned}
&a(z) = a(x+\varepsilon y) = a(x) + \varepsilon y a'(x) + O(\varepsilon^2),\\
&\varepsilon\sqrt{b(z)} = \varepsilon\sqrt{b(x+\varepsilon y)} = \varepsilon\sqrt{b(x) + O(\varepsilon)} = \sqrt{\sigma b(x)} + O(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Перепишем уравнение (31) с точностью до $O(\varepsilon^2)$

$$dz(\tau) = a(z)d\tau + \sqrt{\sigma b(z)}dw(\tau). \tag{33}$$

Обозначим плотность распределения вероятностей для процесса $z(\tau)$

$$\pi(z,\tau) = \frac{\partial P\{z(\tau) < z\}}{\partial z}.$$

Так как $z(\tau)$ – это решение стохастического дифференциального уравнения (32), следовательно, процесс является диффузионным и для его плотности распределения вероятностей можем записать уравнение Фокера-Планка

$$\frac{\partial \pi(z,\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial z}\{a(z)\pi(z,\tau)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{\sigma b(z)\pi(z,\tau)\}. \tag{34}$$

Предполагая, что существует стационарный режим, обозначим

$$\pi(z,\tau) = \pi(z), \tag{35}$$

запишем уравнение Фокера-Планка для стационарного распределения вероятностей $\pi(z)$

$$(a(z)\pi(z))' + \frac{\sigma}{2}(b(z)\pi(z))'' = 0,$$
$$-a(z)\pi(z) + \frac{\sigma}{2}(b(z)\pi(z))' = 0.$$

Решая данную систему уравнений получаем плотность распределения вероятностей $\pi(z)$ нормированного числа заявок на орбите

$$\pi(z) = \frac{C}{b(z)} exp\left\{ \frac{2}{\sigma} \int\limits_0^z \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}. \tag{36}$$

Теорема доказана.

Получим дискретное распределение вероятностей

$$P(i) = \pi(\sigma i) / \sum_{i=0}^{\infty} \pi(\sigma i), \tag{37}$$

которое будем называть диффузионной аппроксимацией дискретного распределения вероятностей количества заявок на орбите для изучаемой системы.

Нетрудно показать, что условием существования стационарного режима рассматриваемой системы является неравенство

$$\lambda < 2r_0 \left(\frac{q}{\mu_1} + \frac{1-q}{\mu_2} \right). \tag{38}$$

Введем следующую замену для того, чтобы среднее время обслуживания равнялось единице

$$q = \frac{\mu_1(1-\mu_2)}{\mu_1 - \mu_2}.$$

В таком случае неравенство (38) имеет вид

$$\lambda < 2r_0.$$

1.6 Численные эксперементы

На рисунке 2 представлены графики изменения $a(x)$ и $b(x)$, в зависимости от x, на рисунке 3 ряд распределения вероятностей количества заявок на орбите для следующих параметров системы $r_0 = 0,3, r_1 = 0,2, r_2 = 0,5, \lambda = 1,1, \mu_1 = 0,5, \mu_2 = 1,5, q = 0.25, \sigma = 0,1$.

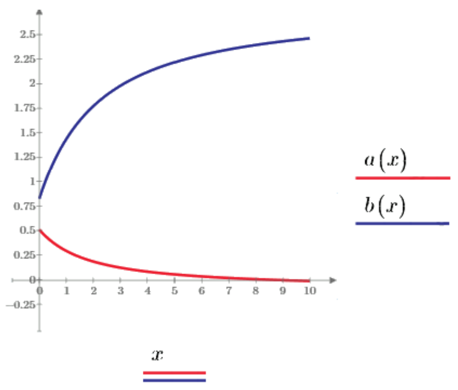

Рис. 2: Коэффициенты переноса $a(x)$ и диффузии $b(x)$

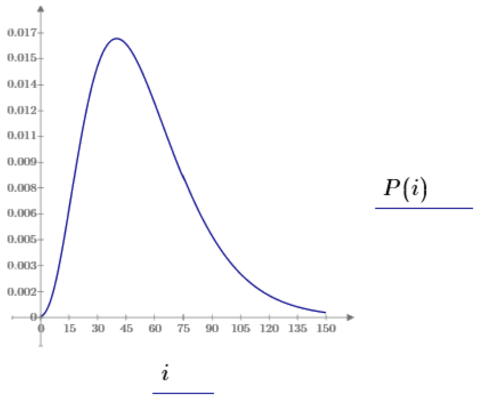

Рис. 3: Ряд распределения вероятностей количества заявок на орбите

Данные графики были построены с помощью приложения Mathcad.

2. ИСЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ M|H_2|N С ОРБИТОЙ

2.1 Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания $M|H_2|N$ с обратной связью (Рисунок 4).

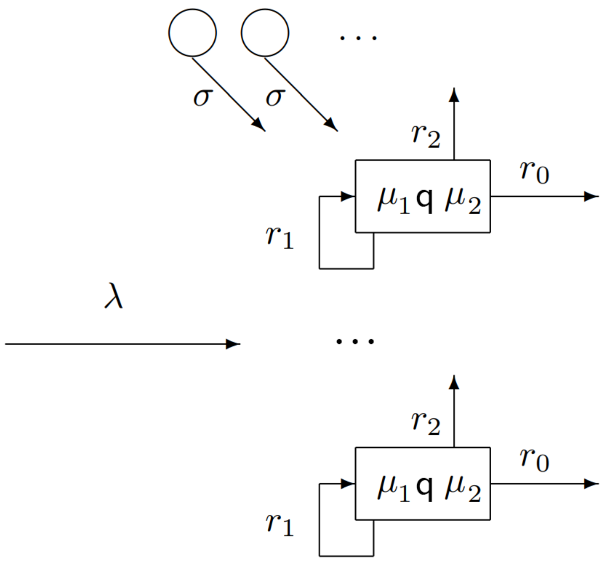

Рис. 4: Система массового обслуживания $M|H_2|N$ с обратной связью

Система имеет N обслуживающих приборов. Заявки поступают в систему согласно простейщиму потоку с параметром λ. Каждая заявка занимеет один из свободных приборов на время, распределенное по гиперэкспоненциальному закону. Это означает, что заявка на приборе с вероятностью q поступает на первую фазу, с экспоненциальным распределением с параметром μ_1, и с вероятность $1-q$ на вторую, с параметром μ_2.

После завершения обслуживания заявка с вероятностью r_0 покидает систему, с вероятностью r_1 мгновенно поступает на повторное обслуживание и с вероятностью r_2 уходит на орбиту. Также, если на момент поступления заявки из потока все приборы заняты, то заявка уходит на орбиту. Через время, продолжительность которого распределена по экспоненциальному закону с пареметром σ, заявка вновь обращается с орбиты к приборам.

Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t, $n_1(t)$ – число приборов занятых на первой фазе в момент времени t, $n_2(t)$ – число приборов занятых на второй фазе в момент времени t.

Рассмотрим трехмерный процесс $\{n_1(t), n_2(t), i(t)\}$. Под состоянием системы будем понимать состояние процесса $\{n_1(t), n_2(t), i(t)\}$ в момент времени t.

Обозначим вероятности следующим образом

$$P(n_1(t) = n_2, n_2(t) = n_2, i(t) = i) = P_{n_1,n_2}(\mathrm{i,t})$$

вероятность того, что n_1 – приборов занято на первой фазе, а n_2 – приборов занято на второй фазе. При этом $P_{n_1,n_2}(i,t) = 0$, если $n_1 < 0$, $n_2 < 0$ или $n_1 + n_2 > N.$

Для решения будем применять методы асимптотически анализа предложенные в [1, 7, 9, 11] и асимптотически диффузионного анализа предложенные в [1].

2.2 Уравнения Колмогорова

Для данных вероятностей составим систему уравнений в конечных разностях [4, 5, 6]. Для упрощения выражений введем индикатор

$$E_a^b = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b, \end{cases}$$

$$\overline{E}_a^b = 1 - E_a^b.$$

$$\begin{aligned} P_{n_1,n_2}(i, t+\Delta t) =&(1 - \Delta t(\lambda + i\sigma\overline{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2))P_{n_1,n_2}(i,t) + \Delta t\mu_1 r_1 q n_1 P_{n_1,n_2}(i,t)+ \\ &+ \Delta t\mu_2(1-q)r_1 n_2 P_{n_1,n_2}(i,t) + \Delta t\lambda E_{n_1+n_2}^N P_{n_1,n_2}(i-1,t)+ \\ &+ \Delta t\lambda q P_{n_1-1,n_2}(i,t) + \Delta t(i+1)\sigma q P_{n_1-1,n_2}(i+1,t)+ \\ &+ \Delta t\lambda(1-q)P_{n_1,n_2-1}(i,t) + \Delta t(i+1)\sigma(1-q)P_{n_1,n_2-1}(i+1,t)+ \\ &+ \Delta t\mu_1 r_0(n_1+1)P_{n_1+1,n_2}(i,t) + \Delta t\mu_1 r_2(n_1+1)P_{n_1+1,n_2}(i-1,t)+ \\ &+ \Delta t\mu_2 r_0(n_2+1)P_{n_1,n_2+1}(i,t) + \Delta t\mu_2 r_2(n_2+1)P_{n_1,n_2+1}(i-1,t)+ \\ &+ \Delta t\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)P_{n_1+1,n_2-1}(i,t) \\ &+ \Delta t\mu_2 r_1 q(n_2+1)P_{n_1-1,n_2+1}(i,t) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Расскроем скобки, разделим на каждое уравнение на Δt, получим

$$\begin{aligned} \frac{P_{n_1,n_2}(i,t+\Delta t) - P_{n_1,n_2}(i,t)}{\Delta t} =& -(\lambda + i\sigma\overline{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)P_{n_1,n_2}(i,t)+ \\ &+ n_1\mu_1 r_1 q P_{n_1,n_2}(i,t) + \mu_2 r_1(1-q)n_2 P_{n_1,n_2}(i,t)+ \\ &+ \lambda E_{n_1+n_2}^N P_{n_1,n_2}(i-1,t) + \lambda q P_{n_1-1,n_2}(i,t)+ \\ &+ (i+1)\sigma q P_{n_1-1,n_2}(i+1,t)\lambda(1-q)P_{n_1,n_2-1}(i,t)+ \\ &+ (i+1)\sigma(1-q)P_{n_1,n_2-1}(i+1,t)+ \\ &+ \mu_1 r_0(n_1+1)P_{n_1+1,n_2}(i,t) + \mu_1 r_2(n_1+1)P_{n_1+1,n_2}(i-1,t)+ \\ &+ \mu_2 r_0(n_2+1)P_{n_1,n_2+1}(i,t) + \mu_2 r_2(n_2+1)P_{n_1,n_2+1}(i-1,t)+ \\ &+ \mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)P_{n_1+1,n_2-1}(i,t)+ \\ &+ \mu_2 r_1 q(n_2+1)P_{n_1-1,n_2+1}(i,t) + o(\Delta t)/\Delta t. \end{aligned}$$

Устремим $\Delta t \to 0$, получим

$$
\begin{aligned}
\frac{dP_{n_1,n_2}(i,t)}{\partial t} = & -(\lambda + i\sigma\overline{E}^N_{n_1+n_2} + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)P_{n_1,n_2}(i,t) + \mu_1 r_1 q n_1 P_{n_1,n_2}(i,t) + \\
& + \mu_2 r_1 (1-q) n_2 P_{n_1,n_2}(i,t) + \lambda E^N_{n_1+n_2} P_{n_1,n_2}(i-1,t) + \\
& + \lambda q P_{n_1-1,n_2}(i,t) + (i+1)\sigma q P_{n_1-1,n_2}(i+1,t) + \\
& + \lambda(1-q)P_{n_1,n_2-1}(i,t) + (i+1)\sigma(1-q)P_{n_1,n_2-1}(i+1,t) + \\
& + \mu_1 r_0 (n_1+1) P_{n_1+1,n_2}(i,t) + \mu_1 r_2 (n_1+1) P_{n_1+1,n_2}(i-1,t) + \\
& + \mu_2 r_0 (n_2+1) P_{n_1,n_2+1}(i,t) + \mu_2 r_2 (n_2+1) P_{n_1,n_2+1}(i-1,t) + \\
& + \mu_1 r_1 (1-q)(n_1+1) P_{n_1+1,n_2-1}(i,t) + \mu_2 r_1 q (n_2+1) P_{n_1-1,n_2+1}(i,t).
\end{aligned}
$$

Введем частичные характеристические функции

$$
H_{n_1,n_2}(u,t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{iuj} P_{n_1,n_2}(i,t).
$$

Тогда уравнения будут иметь вид

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} = & -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) H_{n_1,n_2}(u,t) + j\sigma\overline{E}^N_{n_1+n_2} \frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u} + \\
& + \mu_1 r_1 q n_1 H_{n_1,n_2}(u,t) + \mu_2 r_1 (1-q) n_2 H_{n_1,n_2}(u,t) + \\
& + \lambda e^{ju} E^N_{n_1+n_2} H_{n_1,n_2}(u,t) + \lambda q H_{n_1-1,n_2}(u,t) - \\
& - j\sigma q e^{-ju} \frac{\partial H_{n_1-1,n_2}(u,t)}{\partial u} + \\
& + \lambda(1-q) H_{n_1,n_2-1}(u,t) - j\sigma(1-q)e^{-ju} \frac{\mathrm{d} H_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\mathrm{d}u} + \\
& + \mu_1 r_0 (n_1+1) H_{n_1+1,n_2}(u,t) + \mu_1 r_2 e^{ju} (n_1+1) H_{n_1+1,n_2}(u,t) + \\
& + \mu_2 r_0 (n_2+1) H_{n_1,n_2+1}(u,t) + \mu_2 r_2 e^{ju} (n_2+1) H_{n_1,n_2+1}(u,t) + \\
& + \mu_1 r_1 (1-q)(n_1+1) H_{n_1+1,n_2-1}(u,t) + (n_2+1)\mu_2 r_1 q H_{n_1-1,n_2+1}(u,t).
\end{aligned}
$$

Просуммируем по n_1 и n_2

$$
\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} = & -\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t) + j\sigma\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\overline{E}_{n_1+n_2}^{N}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}- \\
& -\mu_1\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t) - \mu_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t)+ \\
& +\mu_1r_1q\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t) + \mu_2r_1(1-q)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t)+ \\
& +\lambda e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}E_{n_1+n_2}^{N}H_{n_1,n_2}(u,t)+ \\
& +\lambda q\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}H_{n_1-1,n_2}(u,t) - j\sigma q e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1-1,n_2}(u,t)}{\partial u}+ \\
& +\lambda(1-q)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}H_{n_1,n_2-1}(u,t)u- \\
& -j\sigma(1-q)e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\partial u}+ \\
& +\mu_1r_0\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t)+ \\
& +\mu_1r_2e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t)+ \\
& +\mu_2r_0\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+ \\
& +\mu_2r_2e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+ \\
& +\mu_1r_1(1-q)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_1+1)H_{n_1+1,n_2-1}(u,t)+ \\
& +\mu_2r_1q\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_2+1)H_{n_1-1,n_2+1}(u,t).
\end{aligned}
$$

Преобразуем

$$\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} = -\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t) + +j\sigma\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}-$$

$$-\mu_1(r_0+r_2)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t)+$$

$$-\mu_2(r_0+r_2)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t)+\lambda e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)+$$

$$+\lambda q\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_2}H_{n_1,n_2}(u,t)-j\sigma q e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}+$$

$$+\lambda(1-q)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)-$$

$$-j\sigma(1-q)e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}+$$

$$+\mu_1 r_0\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_1 r_2 e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t)+$$

$$+\mu_2 r_0\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2 r_2 e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t).$$

Приведем подобные слагаемые

$$\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} =\lambda(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)-$$

$$-j\sigma q(e^{-ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}-$$

$$-j\sigma(1-q)(e^{-ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}+$$

$$+\mu_1 r_2(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t)+$$

$$+\mu_2 r_2(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t),$$

$$\begin{aligned}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t}=&\lambda(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)-\\&-j\sigma(e^{-ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\&+\mu_1 r_2(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1 H_{n_1,n_2}(u,t)+\\&+\mu_2 r_2(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2 H_{n_1,n_2}(u,t).\end{aligned}$$

Вынесем $(e^{ju}-1)$

$$\begin{aligned}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t}=&(e^{ju}-1)\Bigg\{\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)+\\&+j\sigma e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\&+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1 H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2 H_{n_1,n_2}(u,t)\Bigg\}.\end{aligned}$$

Получим уравнения

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} &= -(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)H_{n_1,n_2}(u,t)+j\sigma\overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\
&+\mu_1 r_1 q n_1 H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2 r_1(1-q)n_2 H_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\lambda e^{ju}E^N_{n_1+n_2}H_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\lambda q H_{n_1-1,n_2}(u,t)-j\sigma q e^{-ju}\frac{\partial H_{n_1-1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\
&+\lambda(1-q)H_{n_1,n_2-1}(u,t)-j\sigma(1-q)e^{-ju}\frac{\mathrm{d}H_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\mathrm{d}u}+\\
&+\mu_1 r_0(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t)+\mu_1 r_2 e^{ju}(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t)+\\
&+\mu_2 r_0(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\mu_2 r_2 e^{ju}(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\\
&+\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)H_{n_1+1,n_2-1}(u,t)+\\
&+(n_2+1)\mu_2 r_1 q H_{n_1-1,n_2+1}(u,t),
\end{aligned} \tag{39}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} &= (e^{ju}-1)\Bigg\{\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+j\sigma e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\
&+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1 H_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2 H_{n_1,n_2}(u,t)\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

2.3 Первый этап асимптотического анализа

Будем решать уравнения (39) методом асимптотического анализа. Сделаем замены

$$\sigma = \varepsilon, \tau = t\varepsilon, u = \varepsilon w, H_{n_1,n_2}(u,t) = F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon).$$

Тогда мы можем переписать уравнения (39)

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = -(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + j\overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\\
&+\mu_1 r_1 q n_1 F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \mu_2 r_1(1-q)n_2 F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\lambda e^{j\varepsilon w}E^N_{n_1+n_2}F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \lambda q F_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)-\\
&-jqe^{-j\varepsilon w}\frac{\partial F_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \lambda(1-q)F_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)-\\
&-j(1-q)e^{-j\varepsilon w}\frac{\mathrm{d}F_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)}{\mathrm{d}w} + \mu_1 r_0(n_1+1)F_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_1 r_2 e^{j\varepsilon w}(n_1+1)F_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \mu_2 r_0(n_2+1)F_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_2 r_2(n_2+1)e^{j\varepsilon w}F_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)F_{n_1+1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_2 r_1 q(n_2+1)F_{n_1-1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon),\\
&\varepsilon\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = (e^{j\varepsilon w}-1)\Bigg\{\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+je^{-j\varepsilon w}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\\
&+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1 F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2 F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{40}$$

При условии, что $\varepsilon\to 0$, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2.1. Компоненты $R_{n_1,n_2}(x)$ распределения вероятностей числа приборов, занятых на первой и второй фазе имеет вид

$$R_{n_1,n_2}(x) = \frac{L_{n_1,n_2}(x)}{c(x)}, \tag{41}$$

где

$$\begin{aligned}
L_{n_1,n_2}(x) =&(\mu_1\mu_2(1-r_1))^{N-(n_1+n_2)}\frac{N!}{(n_1+n_2)!}C^{n_2}_{n_1+n_2}(\mu_1(1-q))^{n_2}(\mu_2 q)^{n_1}(\lambda+x)^{n_1+n_2},\\
c(x) =&\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}L_{n_1,n_2}.
\end{aligned}$$

$$x=x(\tau);x'(\tau)=a(x)=\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}R_{n_1,n_2}-x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}R_{n_1,n_2}+$$
$$+\mu_1r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1R_{n_1,n_2}+\mu_2r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2R_{n_1,n_2}.$$

Доказательство. Рассмотрим первое уравнение системы (40) в пределе $\varepsilon\to 0$, обозначим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)=F_{n_1,n_2}(w,\tau)$$

и получим

$$\begin{aligned}
&-(\lambda+n_1\mu_1+n_2\mu_2)F_{n_1,n_2}(w,\tau)+j\overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial F_{n_1,n_2}((w,\tau)}{\partial w}+\\
&+\mu_1r_1qn_1F_{n_1,n_2}(w,\tau)+\mu_2r_1(1-q)n_2F_{n_1,n_2}(w,\tau)+\\
&+\lambda E^N_{n_1+n_2}F_{n_1,n_2}(w,\tau)+\lambda qF_{n_1-1,n_2}(w,\tau)-\\
&-jq\frac{\partial F_{n_1-1,n_2}(w,\tau)}{\partial w}+\lambda(1-q)F_{n_1,n_2-1}(w,\tau)-\\
&-j(1-q)\frac{\mathrm{d}F_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\mathrm{d}w}+\mu_1r_0(n_1+1)F_{n_1+1,n_2}(w,\tau)+\\
&+\mu_1r_2(n_1+1)F_{n_1+1,n_2}(w,\tau)+\mu_2r_0(n_2+1)F_{n_1,n_2+1}(w,\tau)+\\
&+\mu_2r_2(n_2+1)F_{n_1,n_2+1}(w,\tau)+\\
&+\mu_1r_1(1-q)(n_1+1)F_{n_1+1,n_2-1}(w,\tau)+\\
&+\mu_2r_1q(n_2+1)F_{n_1-1,n_2+1}(w,\tau)=0.
\end{aligned}\tag{42}$$

Находим решение уравнения (42) в виде $F_{n_1,n_2}(w,\tau)=L_{n_1,n_2}e^{jwx(\tau)}$. Получим следующую систему

$$\begin{aligned}
&-(\lambda+\mu_1n_1+n_2\mu_2)L_{n_1,n_2}-x(\tau)\overline{E}^N_{n_1+n_2}L_{n_1,n_2}+\\
&+\mu_1r_1qn_1L_{n_1,n_2}+\mu_2r_1(1-q)n_2L_{n_1,n_2}+\\
&+\lambda E^N_{n_1+n_2}L_{n_1,n_2}+\lambda qL_{n_1-1,n_2}+\\
&+x(\tau)qL_{n_1-1,n_2}+\lambda(1-q)L_{n_1,n_2-1}+\\
&+x(\tau)(1-q)L_{n_1,n_2-1}+\mu_1r_0(n_1+1)L_{n_1+1,n_2}+\\
&+\mu_1r_2(n_1+1)L_{n_1+1,n_2}+\mu_2r_0(n_2+1)L_{n_1,n_2+1}+\\
&+\mu_2r_2(n_2+1)L_{n_1,n_2+1}+\\
&+\mu_1r_1(1-q)(n_1+1)L_{n_1+1,n_2-1}+\\
&+\mu_2r_1q(n_2+1)L_{n_1-1,n_2+1}=0,
\end{aligned}$$

или

$$
\begin{aligned}
&L_{n_1,n_2}\{-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)-x(\tau)\overline{E}^N_{n_1+n_2}+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2+\lambda E^N_{n_1+n_2}\}+\\
&+L_{n_1-1,n_2}\{\lambda q+x(\tau)q\}+\\
&+L_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1-q)+x(\tau)(1-q)\}+\\
&+L_{n_1+1,n_2}\{\mu_1 r_0(n_1+1)+\mu_1 r_2(n_1+1)\}+\\
&+L_{n_1,n_2+1}\{\mu_2 r_0(n_2+1)+\mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+L_{n_1+1,n_2-1}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+L_{n_1-1,n_2+1}\mu_2 r_1 q(n_2+1)=0.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Чтобы доказать утверждение (41) воспользуемся символьным исчислением на языке Python, с помощью библиотеки SymPy [15]. Однако, чтобы сделать это, нужно избавится от индикаторов, поэтому рассмотрим частные случаи.

$n_1=0, n_2=0$:

$$
\begin{aligned}
&L_{0,0}\{-\lambda-x(\tau)\}+\\
&+L_{1,0}\{\mu_1 r_0+\mu_1 r_2\}+\\
&+L_{0,1}\{\mu_2 r_0+\mu_2 r_2\}=0.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

$n_1=0, n_2>0, n_1+n_2<N$:

$$
\begin{aligned}
&L_{0,n_2}\{-(\lambda+\mu_2 n_2)-x(\tau)+\mu_2 r_1(1-q)n_2\}+\\
&+L_{0,n_2-1}\{\lambda(1-q)+x(\tau)(1-q)\}+\\
&+L_{1,n_2}\{\mu_1 r_0+\mu_1 r_2\}+\\
&+L_{0,n_2+1}\{\mu_2 r_0(n_2+1)+\mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+L_{1,n_2-1}\mu_1 r_1(1-q)=0.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

$n_1>0, n_2=0, n_1+n_2<N$:

$$
\begin{aligned}
&L_{n_1,0}\{-(\lambda+\mu_1 n_1)-x(\tau)+\mu_1 r_1 q n_1\}+\\
&+L_{n_1-1,0}\{\lambda q+x(\tau)q\}+\\
&+L_{n_1+1,0}\{\mu_1 r_0(n_1+1)+\mu_1 r_2(n_1+1)\}+\\
&+L_{n_1,1}\{\mu_2 r_0+\mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+L_{n_1-1,n_2+1}\mu_2 r_1 q(n_2+1)=0.
\end{aligned}
\tag{46}
$$

$n_1>0, n_2>0, n_1+n_2<N$:

$$
\begin{aligned}
&L_{n_1,n_2}\{-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)-x(\tau)+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2\}+\\
&+L_{n_1-1,n_2}\{\lambda q+x(\tau)q\}+\\
&+L_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1-q)+x(\tau)(1-q)\}+\\
&+L_{n_1+1,n_2}\{\mu_1 r_0(n_1+1)+\mu_1 r_2(n_1+1)\}+\\
&+L_{n_1,n_2+1}\{\mu_2 r_0(n_2+1)+\mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+L_{n_1+1,n_2-1}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+L_{n_1-1,n_2+1}\mu_2 r_1 q(n_2+1)=0.
\end{aligned}
\tag{47}
$$

$n_1=0, n_2=N:$

$$
\begin{aligned}
&L_{0,N}\{-(\lambda+N\mu_2)+N\mu_2 r_1(1-q)+\lambda\}+\\
&+L_{0,N-1}\{\lambda(1-q)+x(\tau)(1-q)\}+\\
&+L_{1,N-1}\mu_1 r_1(1-q)=0.
\end{aligned}
\tag{48}
$$

$n_1=N, n_2=0:$

$$
\begin{aligned}
&L_{N,0}\{-N\mu_1+N\mu_2 r_1 q\}+\\
&+L_{N-1,0}\{\lambda q+x(\tau)q\}+\\
&+L_{N-1,1}\mu_2 r_1 q=0.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

$n_1+n2=N, n1\neq N, n2\neq N$:

$$
\begin{aligned}
&L_{n_1,n_2}\{-(\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2\}+\\
&+L_{n_1-1,n_2}\{\lambda q+x(\tau)q\}+\\
&+L_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1-q)+x(\tau)(1-q)\}+\\
&+L_{n_1+1,n_2-1}(n_1+1)\mu_1 r_1(1-q)+\\
&+L_{n_1-1,n_2+1}\mu_2 r_1 q(n_2+1)=0.
\end{aligned}
\tag{50}
$$

Подставляя (41) в предложенные равенства, получим тождество. Следовательно (41) является решением. Заметим, что

$$\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} R_{n_1,n_2}=1.$$

Для этого разделим полученное решение на сумму всех L_{n_1,n_2}

$$c=\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} L_{n_1,n_2}.$$

Получим

$$R_{n_1,n_2} = \frac{L_{n_1,n_2}}{c}.$$

Найдем $x = x(\tau)$. Рассмотрим второе уравнение системы (39) в пределе $\varepsilon \to 0$.

$$\begin{aligned}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau)}{\partial \tau} =& jw\Bigg\{\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\ &+j\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau)}{\partial w}+\\ &+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1F_{n_1,n_2}(w,\tau)+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2F_{n_1,n_2}(w,\tau)\Bigg\}.\end{aligned}$$

Выполним замену $F_{n_1,n_2}(w,\tau) = R_{n_1,n_2}e^{jwx(\tau)}$, тогда

$$\begin{aligned}x'(\tau) =& \lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}R_{n_1,n_2} - x(\tau)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}R_{n_1,n_2}+\\ &+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1R_{n_1,n_2}+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2R_{n_1,n_2}.\end{aligned}$$

Обозначим через

$$\begin{aligned}x'(\tau) = a(x) =& \lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}R_{n_1,n_2} - x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}R_{n_1,n_2}+\\ &+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1R_{n_1,n_2}+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2R_{n_1,n_2}.\end{aligned} \tag{51}$$

Теорема доказана.

2.4 Второй этап асимптотического анализа

В системе (39) сделаем замену

$$H_{n_1,n_2}(u,t) = e^{j\frac{u}{\sigma}x(\sigma t)} H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t),$$

получим систему

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}c(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t) =& -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t) + \\
&+ j\sigma \overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u} - x(\sigma t)\overline{E}^N_{n_1+n_2}H^{(1)}_{n_1,n_2} + \\
&+ \mu_1 r_1 q n_1 H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t) + \mu_2 r_1 (1-q) n_2 H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t) + \\
&+ \lambda e^{ju} E^N_{n_1+n_2} H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t) + \\
&+ \lambda q H^{(1)}_{n_1-1,n_2}(u,t) - j\sigma q e^{-ju}\frac{\partial H^{(1)}_{n_1-1,n_2}(u,t)}{\partial u} + \\
&+ q e^{-ju} x(\sigma t) H^{(1)}_{n_1-1,n_2}(u,t) + \\
&+ \lambda(1-q)H^{(1)}_{n_1,n_2-1}(u,t) - j\sigma(1-q)e^{-ju}\frac{\mathrm{d}H^{(1)}_{n_1,n_2-1}}{\mathrm{d}u} \\
&+ (1-q)e^{-ju}x(\sigma t)H^{(1)}_{n_1,n_2-1}(u,t) \\
&+ \mu_1 r_0 (n_1+1)H^{(1)}_{n_1+1,n_2}(u,t) + \\
&+ \mu_1 r_2 e^{ju}(n_1+1)H^{(1)}_{n_1+1,n_2}(u,t) + \\
&+ \mu_2 r_0 (n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t) + \\
&+ \mu_2 r_2 e^{ju}(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t) + \\
&+ \mu_1 r_1 (1-q)(n_1+1)H^{(1)}_{n_1+1,n_2-1}(u,t) + \\
&+ (n_2+1)\mu_2 r_1 q H^{(1)}_{n_1-1,n_2+1}(u,t), \\
\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\left\{\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\right\} =& (e^{ju}-1)\Bigg\{\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t) + \\
&+ e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\Bigg[j\sigma\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u} - \\
&- x(\sigma t)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\Bigg] + \\
&+ \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t) + \\
&+ \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{52}$$

С учетом (51) перепишем систему (52)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}c(u,t)}{\partial t}+jua(x)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)=-(\lambda+\mu_1n_1+\mu_2n_2)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+j\sigma\overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}-x\overline{E}^N_{n_1+n_2}H^{(1)}_{n_1,n_2}+\\
&+\mu_1r_1qn_1H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2r_1(1-q)n_2H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\lambda e^{ju}E^N_{n_1+n_2}H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\lambda qH^{(1)}_{n_1-1,n_2}(u,t)-j\sigma qe^{-ju}\frac{\partial H^{(1)}_{n_1-1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\
&+qe^{-ju}xH^{(1)}_{n_1-1,n_2}(u,t)+\\
&+\lambda(1-q)H^{(1)}_{n_1,n_2-1}(u,t)-j\sigma(1-q)e^{-ju}\frac{\mathrm{d}H^{(1)}_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\mathrm{d}u}+\\
&+(1-q)e^{-ju}xH^{(1)}_{n_1,n_2-1}(u,t)+\\
&+\mu_1r_0(n_1+1)H^{(1)}_{n_1+1,n_2}(u,t)+\\
&+\mu_1r_2e^{ju}(n_1+1)H^{(1)}_{n_1+1,n_2}(u,t)+\\
&+\mu_2r_0(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\\
&+\mu_2r_2e^{ju}(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\\
&+\mu_1r_1(1-q)(n_1+1)H^{(1)}_{n_1+1,n_2-1}(u,t)+\\
&+(n_2+1)\mu_2r_1qH^{(1)}_{n_1-1,n_2+1}(u,t),\\
&\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\left\{\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t}+jua(x)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\right\}=(e^{ju}-1)\bigg\{\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\\
&+e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\left[\sigma j\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}-xH^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\right]+\\
&+\mu_1r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\mu_2r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\bigg\}.
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Обозначив $\sigma=\varepsilon^2$ и сделав следующие замены в (53)

$$\tau=t\varepsilon^2, u=\varepsilon w, H^{(1)}_{n_1,n_2}(u1,t)=F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon),$$

можем написать

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^2 \frac{\partial F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial t} + j\varepsilon w a F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) = -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ j\varepsilon \overline{E}^N_{n_1+n_2} \frac{\partial F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} - x\overline{E}^N_{n_1+n_2} F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ \mu_1 r_1 q n_1 F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \mu_2 r_1 (1-q) n_2 F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ \lambda e^{j\varepsilon w} E^N_{n_1+n_2} F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ \lambda q F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) - j\varepsilon q e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \\
&+ q e^{-ju} x F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ \lambda (1-q) F^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon) - j\varepsilon (1-q) e^{-j\varepsilon w} \frac{\mathrm{d}F^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)}{\mathrm{d}w} + \\
&+ (1-q) e^{-j\varepsilon w} x F^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ \mu_1 r_0 (n_1+1) F^{(1)}_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ \mu_1 r_2 e^{j\varepsilon w} (n_1+1) F^{(1)}_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ \mu_2 r_0 (n_2+1) F^{(1)}_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ \mu_2 r_2 e^{j\varepsilon w} (n_2+1) F^{(1)}_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ \mu_1 r_1 (1-q)(n_1+1) F^{(1)}_{n_1+1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ (n_2+1) \mu_2 r_1 q F^{(1)}_{n_1-1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon), \\
&\varepsilon^2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \left\{ \frac{\partial F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial t} + j\varepsilon a F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) \right\} = \\
&= (e^{j\varepsilon w} - 1) \Bigg\{ \lambda \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ e^{-j\varepsilon w} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \left[j\varepsilon \frac{\partial F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial u} - x F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) \right] \\
&+ \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{54}
$$

Перепишем первое уранение (54) с учетом разложения

$$
e^{j\varepsilon w} = 1 + (j\varepsilon w) + O(\varepsilon^2), \tag{55}
$$

$$
\begin{aligned}
j\varepsilon w a F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) = &-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+j\varepsilon\overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}-x\overline{E}^N_{n_1+n_2}F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_1 r_1 q n_1 F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\mu_2 r_1(1-q)n_2 F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\lambda E^N_{n_1+n_2}F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+j\varepsilon w\lambda E^N_{n_1+n_2}F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\lambda q F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)-\varepsilon q\frac{\partial F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\\
&+qxF^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)-j\varepsilon w q x F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\lambda(1-q)F^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)-j\varepsilon(1-q)\frac{\mathrm{d}F^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)}{\mathrm{d}w}+\\
&+(1-q)xF^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)-j\varepsilon w(1-q)xF^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_1 r_0(n_1+1)F^{(1)}_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_1 r_2(n_1+1)F^{(1)}_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+j\varepsilon w\mu_1 r_2(n_1+1)F^{(1)}_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_2 r_0(n_2+1)F^{(1)}_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_2 r_2(n_2+1)F^{(1)}_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+j\varepsilon w\mu_2 r_2(n_2+1)F^{(1)}_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)F^{(1)}_{n_1+1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+(n_2+1)\mu_2 r_1 q F^{(1)}_{n_1-1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon).
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Решение задачи (56) можно записать в виде разложения

$$
F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)=\Phi(w,\tau)\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\}+O(\varepsilon^2), \tag{57}
$$

где $\Phi(w,\tau)$ – скалярная функция, форма которой определена ниже.

Получим

$$
\begin{aligned}
j\varepsilon wa\Phi(w,\tau)\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon wf_{n_1,n_2}\} =&\Phi(w,\tau)\{\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon wf_{n_1,n_2}\}\{-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)+\\
&-x\overline{E}^N_{n_1+n_2}+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2+\lambda E^N_{n_1+n_2}+\\
&+j\varepsilon w\lambda E^N_{n_1+n_2}\}+\\
&+\{R_{n_1-1,n_2}+j\varepsilon wf_{n_1-1,n_2}\}\{\lambda q+qx-j\varepsilon wqx\}+\\
&+\{R_{n_1,n_2-1}+j\varepsilon wf_{n_1,n_2-1}\}\{\lambda(1-q)+\\
&+(1-q)x-j\varepsilon w(1-q)x\}+\\
&+\{R_{n_1+1,n_2}+j\varepsilon wf_{n_1+1,n_2}\}\{\mu_1 r_0(n_1+1)+\\
&+\mu_1 r_2(n_1+1)+j\varepsilon w\mu_1 r_2(n_1+1)\}+\\
&+\{R_{n_1,n_2+1}+j\varepsilon wf_{n_1,n_2+1}\}\{\mu_2 r_0(n_2+1)+\\
&+\mu_2 r_2(n_2+1)+j\varepsilon w\mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+\{R_{n_1+1,n_2+1}+j\varepsilon wf_{n_1-1,n_2-1}\}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+\{R_{n_1-1,n_2+1}+j\varepsilon wf_{n_1-1,n_2+1}\}(n_2+1)\mu_2 r_1 q\}+\\
&+\frac{\partial\Phi(w,t)}{\partial w}\{j\varepsilon\overline{E}^N_{n_1+n_2}\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon wf_{n_1,n_2}\}-\\
&-j\varepsilon q\{R_{n_1-1,n_2}+j\varepsilon wf_{n_1-1,n_2}\}-\\
&-j\varepsilon(1-q)\{R_{n_1,n_2-1}+j\varepsilon wf_{n_1,n_2-1}\}\}.
\end{aligned}
\tag{58}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
j\varepsilon wa\Phi(w,\tau)R_{n_1,n_2} =&\Phi(w,\tau)\{\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon wf_{n_1,n_2}\}\{-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)+\\
&-x\overline{E}^N_{n_1+n_2}+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2+\lambda E^N_{n_1+n_2}\}+\\
&+j\varepsilon w\lambda E^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2}+\\
&+\{R_{n_1-1,n_2}+j\varepsilon wf_{n_1-1,n_2}\}\{\lambda q+qx\}-j\varepsilon wqxR_{n_1-1,n_2}+\\
&+\{R_{n_1,n_2-1}+j\varepsilon wf_{n_1,n_2-1}\}\{\lambda(1-q)+\\
&+(1-q)x\}-j\varepsilon w(1-q)xR_{n_1,n_2-1}+\\
&+\{R_{n_1+1,n_2}+j\varepsilon wf_{n_1+1,n_2}\}\{\mu_1 r_0(n_1+1)+\\
&+\mu_1 r_2(n_1+1)\}+j\varepsilon w\mu_1 r_2(n_1+1)R_{n_1+1,n_2}+\\
&+\{R_{n_1,n_2+1}+j\varepsilon wf_{n_1,n_2+1}\}\{\mu_2 r_0(n_2+1)+\\
&+\mu_2 r_2(n_2+1)\}+j\varepsilon w\mu_2 r_2(n_2+1)R_{n_1,n_2+1}+\\
&+\{R_{n_1+1,n_2+1}+j\varepsilon wf_{n_1-1,n_2-1}\}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+\{R_{n_1-1,n_2+1}+j\varepsilon wf_{n_1-1,n_2+1}\}(n_2+1)\mu_2 r_1 q\}+\\
&+\frac{\partial\Phi(w,t)}{\partial w}\{j\varepsilon\overline{E}^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2}-j\varepsilon qR_{n_1-1,n_2}-j\varepsilon(1-q)R_{n_1,n_2-1}\}.
\end{aligned}
$$

С учетом (43) разделим последнее уравнение на $\Phi(w,\tau)j\varepsilon w$ и положим $\varepsilon\to 0$

$$
\begin{aligned}
aR_{n_1,n_2} =& f_{n_1,n_2}\{-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)+\\
&- x\overline{E}^N_{n_1+n_2}+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2+\lambda E^N_{n_1+n_2}\}+E^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2}+\\
&+ f_{n_1-1,n_2}\{\lambda q+qx\}-qxR_{n_1-1,n_2}+\\
&+ f_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1-q)+\\
&+ (1-q)x\}-(1-q)xR_{n_1,n_2-1}+\\
&+ f_{n_1+1,n_2}\{\mu_1 r_0(n_1+1)+\\
&+ \mu_1 r_2(n_1+1)\}+\mu_1 r_2(n_1+1)R_{n_1+1,n_2}+\\
&+ f_{n_1,n_2+1}\{\mu_2 r_0(n_2+1)+\\
&+ \mu_2 r_2(n_2+1)\}+\mu_2 r_2(n_2+1)R_{n_1,n_2+1}+\\
&+ f_{n_1-1,n_2-1}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+ f_{n_1-1,n_2+1}(n_2+1)\mu_2 r_1 q+\\
&+ \frac{\partial\Phi(w,t)/\partial w}{w\Phi(w,t)}\{\overline{E}^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2}-qR_{n_1-1,n_2}-(1-q)R_{n_1,n_2-1}\}.
\end{aligned}
$$

Перепишем последнее уравнение

$$
\begin{aligned}
& f_{n_1,n_2}\{-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)-x\overline{E}^N_{n_1+n_2}+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2+\lambda E^N_{n_1+n_2}\}+\\
&+ f_{n_1-1,n_2}\{\lambda q+qx\}+\\
&+ f_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1-q)+(1-q)x\}+\\
&+ f_{n_1+1,n_2}\{\mu_1 r_0(n_1+1)+\mu_1 r_2(n_1+1)\}+\\
&+ f_{n_1,n_2+1}\{\mu_2 r_0(n_2+1)+\mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+ f_{n_1-1,n_2-1}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+ f_{n_1-1,n_2+1}(n_2+1)\mu_2 r_1 q=\\
&= -aR_{n_1,n_2}+E^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2}-qxR_{n_1-1,n_2}-(1-q)xR_{n_1,n_2-1}+\\
&+ \mu_1 r_2(n_1+1)R_{n_1+1,n_2}+\mu_2 r_2(n_2+1)R_{n_1,n_2+1}+\\
&+ \frac{\partial\Phi(w,t)/\partial w}{w\Phi(w,t)}\{\overline{E}^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2}-qR_{n_1-1,n_2}-(1-q)R_{n_1,n_2-1}\}.
\end{aligned}
\tag{59}
$$

Решение f_{n_1,n_2} можно записать в виде

$$
f_{n_1,n_2}=R_{n_1,n_2}+g-\varphi\frac{\partial\Phi(w,t)/\partial w}{w\Phi(w,t)}, \tag{60}
$$

которое мы подставляем в (59) и получаем

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{n_1,n_2}(-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2+\lambda E^N_{n_1+n_2}-x\overline{E}^N_{n_1+n_2})+\\
&+\varphi_{n_1-1,n_2}(\lambda q\overline{E}^0_{n_1}+xq\overline{E}^0_{n_1})+\varphi_{n_1,n_2-1}(\lambda(1-q)\overline{E}^0_{n_2}+x(1-q)\overline{E}^0_{n_2})+\\
&+\varphi_{n_1+1,n_2}(\mu_1 r_0(n_1+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2}+\mu_1 r_2(n_1+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2})+\\
&+\varphi_{n_1,n_2+1}(\mu_2 r_0(n_2+1)\overline{E}^N_{n+n_2}+\mu_2 r_2(n_2+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2})+\\
&+\varphi_{n_1+1,n_2-1}(1-q)\mu_1 r_1(n_1+1)+\varphi_{n_1-1,n_2+1}q\mu_2 r_1(n_2+1)=\\
&=R_{n_1,n_2}x\overline{E}^N_{n_1+n_2}-R_{n_1-1,n_2}xq\overline{E}^0_{n_1}-R_{n_1,n_2-1}x(1-q)\overline{E}^0_{n_2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_{n_1,n_2}(-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2+\lambda E^N_{n_1+n_2}-x\overline{E}^N_{n_1+n_2})+\\
&+g_{n_1-1,n_2}(\lambda q\overline{E}^0_{n_1}+xq\overline{E}^0_{n_1})+g_{n_1,n_2-1}(\lambda(1-q)\overline{E}^0_{n_2}+x(1-q)\overline{E}^0_{n_2})+\\
&+f_{n_1+1,n_2}(\mu_1 r_0(n_1+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2}+\mu_1 r_2(n_1+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2})+\\
&+g_{n_1,n_2+1}(\mu_2 r_0(n_2+1)\overline{E}^N_{n+n_2}+\mu_2 r_2(n_2+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2})+\\
&+g_{n_1+1,n_2-1}(1-q)\mu_1 r_1(n_1+1)+gn_{1-1,n_2+1}q\mu_2 r_1(n_2+1)=\\
&=R_{n_1,n_2}a-\lambda R_{n_1,n_2}+xqE^0_{n_1}R_{n_1-1,n_2}+x(1-q)\overline{E}^0_{n_2}R_{n_1,n_2-1}\\
&-\mu_1 r_2(n_1+1)R_{n_1+1,n_2}\overline{E}^N_{n_1+n_2}-\mu_2 r_2(n_2+1)R_{n_1,n_2+1}\overline{E}^N_{n_1+n_2}.
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Рассмотрим первое уравнение системы (43), дифференцируем его по x, получим уравнение

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}\{-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)-x(\tau)\overline{E}^N_{n_1+n_2}+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2+\lambda E^N_{n_1+n_2}\}+\\
&+\frac{\partial R_{n_1-1,n_2}}{\partial x}\{\lambda q+x(\tau)q\}+\\
&+\frac{\partial R_{n_1,n_2-1}}{\partial x}\{\lambda(1-q)+x(\tau)(1-q)\}+\\
&+\frac{\partial R_{n_1+1,n_2}}{\partial x}\{\mu_1 r_0(n_1+1)+\mu_1 r_2(n_1+1)\}+\\
&+\frac{\partial R_{n_1,n_2+1}}{\partial x}\{\mu_2 r_0(n_2+1)+\mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+\frac{\partial R_{n_1+1,n_2-1}}{\partial x}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+\frac{\partial R_{n_1-1,n_2+1}}{\partial x}\mu_2 r_1 q(n_2+1)-\\
&-R_{n_1,n_2}x\overline{E}^N_{n_1+n_2}+R_{n_1-1,n_2}xq\overline{E}^0_{n_1}+R_{n_1,n_2-1}x(1-q)\overline{E}^0_{n_2}=0.
\end{aligned}
\tag{62}
$$

Учитывая (62) и последнее уравнение для φ, запишем равенство

$$
\varphi_{n_1,n_2}=\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x},
\tag{63}
$$

где $\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\varphi_{n_1,n_2}=0$. В силу (61) g_{n_1,n_2} является частным решением системы (62). Следовательно, она удовлетворяет условию

$$\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} g_{n_1,n_2}=0. \qquad (64)$$

Тогда решение g_{n_1,n_2} системы (62), удовлетворяющее условию (64), определяется однозначно.

Теперь рассмотрим второе уравнение системы (54), в которую подставляем разложение (57)

$$\varepsilon^2\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}+ja\varepsilon w\Phi(w,\tau)\left\{1+j\varepsilon w\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1,n_2}\right\}=$$
$$=(j\varepsilon w+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2})\Bigg[\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\Phi(w,\tau)\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\}+$$
$$+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1\Phi(w,\tau)\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\}+$$
$$+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2\Phi(w,\tau)\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\}+$$
$$+j\varepsilon\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}\frac{\partial\Phi_{n_1,n_2}}{\partial w}-(1-j\varepsilon w)x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}\Phi(w,\tau)\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\}\Bigg].$$

Тогда с помощью уравнения (51)

$$\varepsilon^2\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}=(jw\varepsilon)^2\Phi(w,\tau)\Bigg[\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1,n_2}+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 f_{n_1,n_2}+$$
$$+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} n_2 f_{n_1,n_2}-x\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1,n_2}+x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1,n_2}-a\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1,n_2}\Bigg]+$$
$$+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\Phi(w,\tau)\Bigg[\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} R_{n_1,n_2}+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 R_{n_1,n_2}+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 R_{n_1,n_2}-$$
$$-x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1,n_2}\Bigg]+(j\varepsilon)^2 w\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1,n_2}\frac{\partial\Phi_{n_1,n_2}}{\partial w},$$

получаем следующее уравнение,

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial\tau}{\Phi(w,\tau)} = \frac{(jw)^2}{2}\Phi(w,\tau)\Bigg[2\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1,n_2} + 2\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 f_{n_1,n_2} +$$
$$+ 2\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 f_{n_1,n_2} - 2x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} f_{n_1,n_2} + 2x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1,n_2} -$$
$$- 2a\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1,n_2} + a\Bigg] - w\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1,n_2}\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{\Phi(w,\tau)},$$

в которое мы подставляем (60)

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial\tau}{\Phi(w,\tau)} = \frac{(jw)^2}{2}\Phi(w,\tau)\Bigg[2\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} g_{n_1,n_2} + 2\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 g_{n_1,n_2} +$$
$$+ 2\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 g_{n_1,n_2} - 2x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} g_{n_1,n_2} +$$
$$+ 2x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1,n_2} + a\Bigg] + w\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{\Phi(w,\tau)}\Bigg[\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\varphi_{n_1,n_2} + \quad (65)$$
$$+ \mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1\varphi_{n_1,n_2} + \mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2\varphi_{n_1,n_2} -$$
$$- x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}\varphi_{n_1,n_2} - \sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1,n_2}\Bigg].$$

Результатом второго этапа асимптотического анализа является $b(x)$, определенная следующим образом

$$b(x) = 2\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} g_{n_1,n_2} + 2\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 g_{n_1,n_2} + 2\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 g_{n_1,n_2} -$$
$$- 2x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} g_{n_1,n_2} + 2x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1,n_2} + a.$$

2.5 Метод асимптотически диффузионного анализа

Построим аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок на орбите методом асимптотически диффузионного анализа. Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 2.2. Ряд распределения вероятностей нормированного числа заявок на орбите можно аппроксимировать следующей функцией плотности вероятностей

$$\pi(z) = \frac{C}{b(z)} exp\left\{ \frac{2}{\sigma} \int\limits_{0}^{z} \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}, \tag{66}$$

где C – нормировочная константа,

$$\begin{aligned} a(x) =& \lambda \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} R_{n_1,n_2} - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} R_{n_1,n_2} + \\ &+ \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 R_{n_1,n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 R_{n_1,n_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(x) = 2\lambda \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} g_{n_1,n_2} + 2\mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 g_{n_1,n_2} + 2\mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 g_{n_1,n_2} - \\ - 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} g_{n_1,n_2} + 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1,n_2} + a, \end{aligned}$$

g_{n_1,n_2} определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} & g_{n_1,n_2}(-(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1-q) n_2 + \lambda E^N_{n_1+n_2} - x\overline{E}^N_{n_1+n_2}) + \\ & + g_{n_1-1,n_2}(\lambda q \overline{E}^0_{n_1} + xq\overline{E}^0_{n_1}) + g_{n_1,n_2-1}(\lambda(1-q)\overline{E}^0_{n_2} + x(1-q)\overline{E}^0_{n_2}) + \\ & + g_{n_1+1,n_2}(\mu_1 r_0 (n_1+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2} + \mu_1 r_2 (n_1+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2}) + \\ & + g_{n_1,n_2+1}(\mu_2 r_0 (n_2+1)\overline{E}^N_{n+n_2} + \mu_2 r_2 (n_2+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2}) + \\ & + g_{n_1+1,n_2-1}(1-q)\mu_1 r_1 (n_1+1) + gn_{1-1,n_2+1} q \mu_2 r_1 (n_2+1) = \\ & = R_{n_1,n_2} a - \lambda R_{n_1,n_2} + xqE^0_{n_1} R_{n_1-1,n_2} + x(1-q)\overline{E}^0_{n_2} R_{n_1,n_2-1} \\ & - \mu_1 r_2 (n_1+1) R_{n_1+1,n_2} \overline{E}^N_{n_1+n_2} - \mu_2 r_2 (n_2+1) R_{n_1,n_2+1} \overline{E}^N_{n_1+n_2}, \\ & \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} g_{n_1,n_2} = 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Подставим $b(x)$ в (65)

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial\tau}{\Phi(w,\tau)} = \frac{(jw)^2}{2}\Phi(w,\tau)b(x) - w\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{\Phi(w,\tau)}\Bigg[\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\varphi_{n_1,n_2}+ \\ +\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1\varphi_{n_1,n_2}+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2\varphi_{n_1,n_2}- \\ -x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}\varphi_{n_1,n_2}-\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}R_{n_1,n_2}\Bigg]. \tag{67}$$

Рассмотрим

$$\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\varphi_{n_1,n_2}+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1\varphi_{n_1,n_2}+ \\ +\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2\varphi_{n_1,n_2}-x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}\varphi_{n_1,n_2}-\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}R_{n_1,n_2}.$$

Подставим (63) в последнее выражение, получим

$$\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}- \\ -x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}-\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}R_{n_1,n_2}. \tag{68}$$

Рассмотрим функцию $a(x)$, найдем ее производную по x, учитывая, что R_{n_1,n_2}, как решение зависит от x

$$a'(x) = \lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}-x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}-\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}R_{n_1,n_2}+ \\ +\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}.$$

Тогда (67) перепишем в виде

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau} = a'(x)w\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w}+\frac{(jw)^2}{2}b(x)\Phi(w,\tau) \tag{69}$$

Уравнение с это преобразование Фурье уравнения Фокера-Планка для плотности распределения вероятностей $P(y,\tau)$ значений центрированного и нормированного количества заявок на орбите. Находя обратное преобразование Фурье от (69), получим

$$\frac{\partial P(y,\tau)}{\partial\tau} = -\frac{\partial}{\partial y}\{a'(x)yP(y,\tau)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{b(x)P(y,\tau)\}. \tag{70}$$

Следовательно $P(y,\tau)$ плотность распределения вероятностей диффузионного процесса [2], который обозначим $y(\tau)$ с коэффициентом переносом $a(x)$ и коэффициентом диффузии $b(x)$

$$dy(\tau) = a'(x)yd\tau + \sqrt{b(x)}dw(\tau). \tag{71}$$

Рассмотрим стохастический процесс нормированного числа заявок на орбите

$$z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y(\tau), \tag{72}$$

где $\varepsilon = \sqrt{\sigma}$, исходя из (51), $dx(\tau) = a(x)d\tau$, следует

$$dz(\tau) = d(x(\tau) + \varepsilon y(\tau)) = (a(x) + \varepsilon ya'(x))d\tau + \varepsilon\sqrt{b(x)}dw(\tau). \tag{73}$$

Разложим $a(z)$ в ряд

$$\begin{aligned}
&a(z) = a(x+\varepsilon y) = a(x) + \varepsilon ya'(x) + O(\varepsilon^2),\\
&\varepsilon\sqrt{b(z)} = \varepsilon\sqrt{b(x+\varepsilon y)} = \varepsilon\sqrt{b(x)+O(\varepsilon)} = \sqrt{\sigma b(x)} + O(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Перепишем уравнение (73) с точностью до $O(\varepsilon^2)$

$$dz(\tau) = a(z)d\tau + \sqrt{\sigma b(z)}dw(\tau). \tag{74}$$

Обозначим плотность распределения вероятностей для процесса $z(\tau)$

$$\pi(z,\tau) = \frac{\partial P\{z(\tau) < z\}}{\partial z}.$$

Так как $z(\tau)$ – это решение стохастического дифференциального уравнения (74), следовательно, процесс является диффузионным и для его плотности распределения вероятностей можем записать уравнение Фокера-Планка

$$\frac{\partial\pi(z,\tau)}{\partial\tau} = -\frac{\partial}{\partial z}\{a(z)\pi(z,\tau)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{\sigma b(z)\pi(z,\tau)\}. \tag{75}$$

Предполагая, что существует стационарный режим, обозначим

$$\pi(z,\tau) = \pi(z), \tag{76}$$

запишем уравнение Фокера-Планка для стационарного распределения вероятностей $\pi(z)$

$$(a(z)\pi(z))' + \frac{\sigma}{2}(b(z)\pi(z))'' = 0,$$
$$-a(z)\pi(z) + \frac{\sigma}{2}(b(z)\pi(z))' = 0.$$

Решая данную систему уравнений получаем плотность распределения вероятностей $\pi(z)$ нормированного числа заявок на орбите

$$\pi(z) = \frac{C}{b(z)} exp\left\{\frac{2}{\sigma}\int\limits_0^z \frac{a(x)}{b(x)}dx\right\}. \tag{77}$$

Теорема доказана.

Получим дискретное распределение вероятностей

$$P(i) = \pi(\sigma i) / \sum_{i=0}^{\infty} \pi(\sigma i), \tag{78}$$

которое будем называть диффузионной аппроксимацией дискретного распределения вероятностей количества заявок на орбите для изучаемой системы.

Нетрудно показать, что условием существования стационарного режима рассматриваемой системы является неравенство

$$\lambda < Nr_0 \left(\frac{q}{\mu_1} + \frac{1-q}{\mu_2}\right). \tag{79}$$

Введем следующую замену для того, чтобы среднее время обслуживания равнялось единице

$$q = \frac{\mu_1(1-\mu_2)}{\mu_1 - \mu_2}.$$

В таком случае неравенство (79) имеет вид

$$\lambda < Nr_0.$$

2.6 Численные эксперементы

Экспремент 1.

На рисунке 5 представлены графики изменения $a(x)$ и $b(x)$, в зависимости от x, на рисунке 6 ряд распределения вероятностей количества заявок на орбите для следующих параметров системы $N = 2, r_0 = 0,7, r_1 = 0,2, r_2 = 0,1, \lambda = 0,8, \mu_1 = 0,6, \mu_2 = 1,5, q = 0,25$.

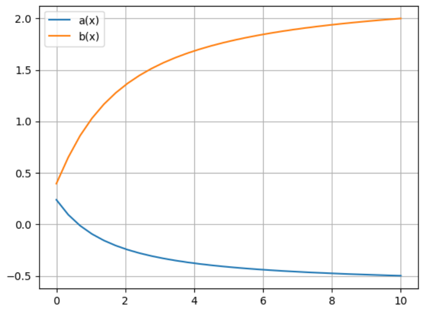

Рис. 5: Коэффициенты переноса $a(x)$ и диффузии $b(x)$

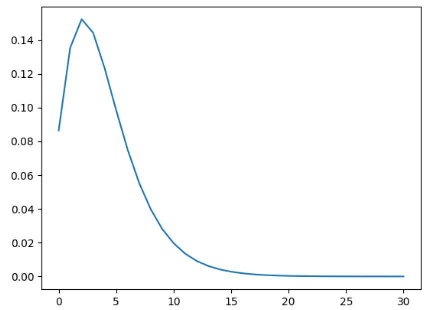

Рис. 6: Ряд распределения вероятностей числа заявок на орбите

Экспремент 2.

На рисунке 7 представлены графики изменения $a(x)$ и $b(x)$, в зависимости от x, на рисунке 8 ряд распределения вероятностей количества заявок на орбите для следующих параметров системы $N = 10, r_0 = 0,7, r_1 = 0,2, r_2 = 0,1, \lambda = 0,8, \mu_1 = 0,6, \mu_2 = 1,5, q = 0,25$.

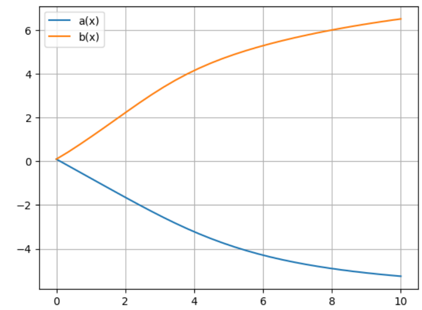

Рис. 7: Коэффициенты переноса $a(x)$ и диффузии $b(x)$

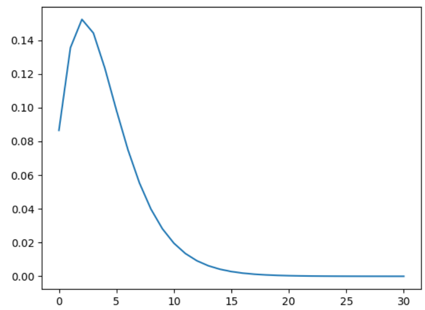

Рис. 8: Ряд распределения вероятностей числа заявок на орбите

Численные результаты были получены с помощью библиотек NymPy [19] (для $a(x)$ и $b(x)$) и SimPy [15] языка Python. Данные графики были построены с помощью библиотеки Mathplotlib [20] языка Python.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nazarov A.A. Method of asymptotic diffusuon analysis of queueing sistem M|M|N with feedback / A.A. Nazarov, S.V. Paul, E.A. Pavlova // Lecture Notes in Computer Science. – 2020. – P. 131–143.

2. Назаров А.А. Теория вероятностей и случайных процессов / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. – Томск : Изд-во научно-технической литературы, 2006. – 199 с.

3. Krishna C.M. A study of two-phase service / C.M. Krishna, Y.H. Lee // Operations Research Letters. – 1990. – № 9. – P. 91–97.

4. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, К.И. Николаевич. – М.:КомКнига, 2005. – 400 с.

5. Назаров А.А. Теория массового обслуживания/ А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. – Томск : Изд-во научно-технической литературы, 2010. – 228 с.

6. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей: учебное пособие / Гельфонд А.О. – М.: КомКнига, 2006. – 376 с.

7. Моисеев А.Н. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания / А.Н. Моисеев, Назаров А.А.– Томск: Изд-во научно-технической литературы, 2015. – 240 с.

8. Назаров А.А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А.А. Назаров, Моисеева С. П. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

9. Любина Т.В. Исследование математических моделей динамических и адаптивных RQ-систем с входящим MMPP-потоком: дисс. ... канд. физ. мат. наук. – Томск., 2013. – 163 с.

10. Ивченко Г.И. Теория массового обслуживания: учебное пособие / Г.И. Ивченко, В.А. Каштанов, И.Н. Коваленко. – М. : Высшая школа , 1982. – 296 с.

11. Artalejo J.R. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach / J. R. Artalejo, A. Gomez-Corral. Springer, 2008. – 309 p.

12. Falin, G.I. Retrial queues / G.I. Falin, J.G.C. Templeton. London : Chapman Hall, 1997.–328

13.Назаров А. А. Асимптотический анализ двухфазной RQ-системы M|M|1 в условии большой задержки на орбите / А. А. Назаров, А. А. Анисимова // Марчуковские научные чтения – 2017, 25 июня - 14 июля 2017 года : труды. – 2017. – С. 641–647.

14.Moiseev A. N. Asymptotic diffusion analysis of multi-server retrial queue with hyper-exponential service / A. N. Moiseev, A. A. Nazarov, S. V. Paul // Mathematics. – 2020. – № 4. – P. 1 – 16.
15.SymPy 1.6 documentation/Matrices. – [M.].
– https://docs.sympy.org/latest/modules/matrices/matrices.html/ (дата обращения: 28.10.2020.).

16. GitHub / checkPhase2EquationR. – [M.].
– https://github.com/ValeriyaRyzhikova/checkPhase2EquationR (дата обращения: 01.06.2021).

17. GitHub / calculationPi_a_b. – [M].
– https://github.com/ValeriyaRyzhikova/calculationPi_a_b (дата обращения: 01.06.2021).

18. GitHub / diplom2Phase. – [M.].
– https://github.com/ValeriyaRyzhikova/diplom2Phase (дата обращения: 01.06.2021).

19.NumPy 1.2 documentation / Linear algebra. – [M.].
–- https://numpy.org/doc/1.20/reference/routines.linalg.html (дата обращения 10.04.2021.).

20.Mathplotlib documentation. –‘[M.].
– https://matplotlib.org/stable/contents.html (дата обращения 04.06.2021.).