Министерсво науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИСЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ГОСУДАРСВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ(НИ ТГУ)
компьютерных наук

ОТЧЁТ ПО ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРАКТИКЕ
ИСЛЕДОВАНИЕ N-ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ M|H_2|N С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика,
направленость(профиль) «Прикладная математика и информатика»

Рыжикова Валерия Валентиновна

Руководитель ВКР
доктор тех. наук, профессор
______________Назаров А.А.
подпись
Автор работы

студентка гуппы №931720
______________Рыжикова В.В.
подпись
«_____»_______2021г.

Томск 2021 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Передача данных это большая проблема, особенно сейчас, когда передача данных очень часто используется для предоставления интернет или телекоммуникационных услуг. При исследовании данных проблем часто используются системы массового обслуживания [4, 5, 7, 11], в том числе двухфазные системы [3, 14, 15], а также когда имеется большое количество абонентов, системы с орбитой, также называемы RQ-системами [1, 10, 12, 13]. Данная работа же отличается совмещения двух этих особенностей с тем фактом, что система N-линейна, или говоря другими словами имеет N приборов.

1 Математическая модель и постановка задач

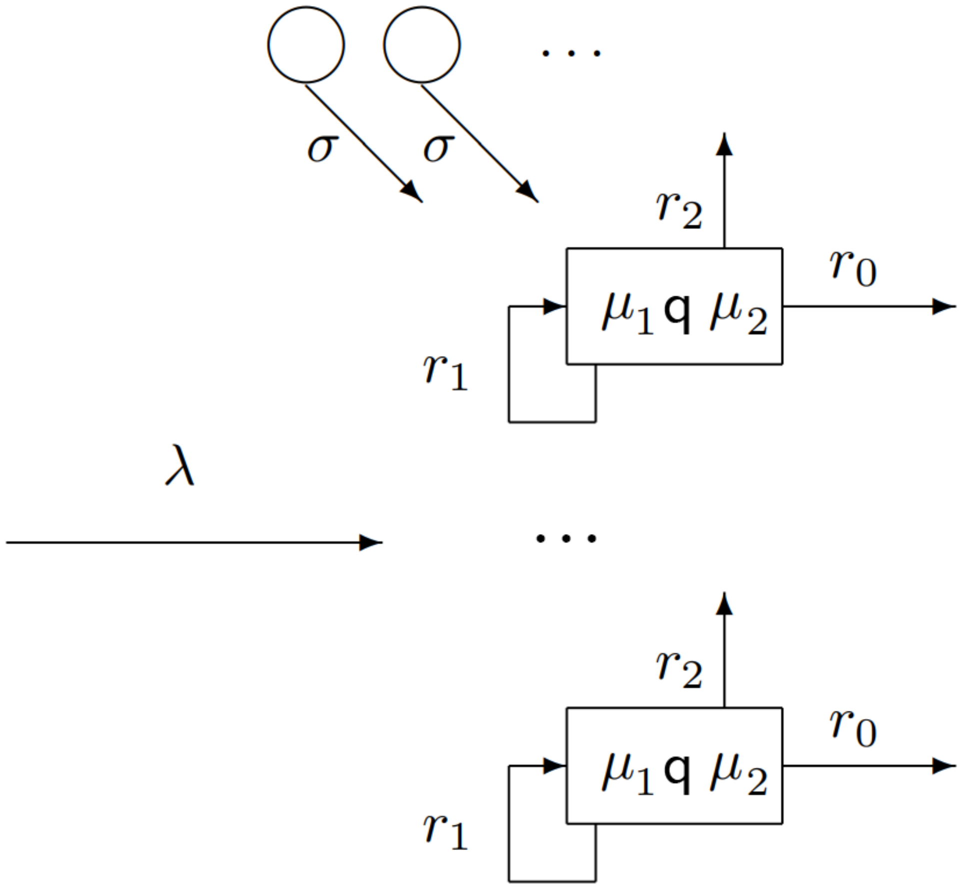

Рис. 1: Система массового обслуживания M|H_2|N с обратной связью

Рассматривается RQ-система с обратной связью. Из простейшего потока заявка поступает на любой, из N имеющийся, свободный прибор. Время пребывания на приборах распределено по гиперэкспоненциальному закону. Это означает, что заявка на приборе с вероятностью q поступает на первую фазу, с экспоненциальным распределением с параметром μ_1, и с вероятность 1-q на вторую, с параметром μ_2.

После завершения обслуживания заявка с вероятностью r_0 покидает систему, с вероятностью r_1 мгновенно поступает на повторное обслуживание и с вероятностью r_2 уходит на орбиту. Так же, если на момент поступления заявки из потока оба прибора заняты, то заявка уходит на орбиту. Через некоторое время задержки, продолжительность которого распределена по экспоненциальному закону, заявка с орбиты вновь обращается к приборам.

Пусть i(t) – число заявок на орбите, $n_1(t)$ - число приборов занятых на первой фазе, $n_2(t)$ - число приборов занятых на второй фазе

Под состоянием системы будем понимать состояние процесса {n_1(t), n_2(t), i(t)} в момент времени t. Обозначим вероятности следующим образом - $P(n_1(t) = n_2, n_2(t) = n_2, i(t) = i)$= P_{n_1,n_2}(i,t)-вероятность того, что n_1 -приборов занято на первой фазе, а n_2 -приборов занято на второй фазе
При этом P_{n_1,n_2}(i,t)=0, если $n_1 < 0$, $n_2 < 0$ или $n_1+n_2 > N$

В каждой вероятности на орбите находятся i заявок в момент времени t.
Будет применять методы асимптотического анализа [1, 7, 9, 11] и асимптотически диффузионного анализа [1].

Цель дипломной работы: исследовать N-линейную систему M|H_2|N с обратной связью.

Задачи:

1.Построить математическую модель N-линейной системы M|H_2|M с обратной связью.
2.Составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова.
3.С помощью метода асимптотического анализа найти коэффициенты переноса и диффузии дифференциального уравнения N-линейной системы M|H_2|N с обратной связью.
4.С помощью метода асимптотически диффузионного анализа вычислить плотность распределения вероятностей произвольного числа заявок на орбите и получить дискретное распределение вероятностей.

2 Уравнения Колмогорова

Для данных вероятностей составим систему уравнений в конечных разностях [4,5,6]. Для упрощения выражений введем индикатор:

$$E_a^b = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b, \end{cases}$$

$$\overline{E}_a^b = 1 - E_a^b.$$

$$\begin{aligned} P_{n_1,n_2}(i, t+\Delta t) =& (1 - \Delta t(\lambda + i\sigma \overline{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2))P_{n_1,n_2}(i,t) + \Delta t \mu_1 r_1 q n_1 P_{n_1,n_2}(i,t) + \\ &+ \Delta t \mu_2 (1-q) r_1 n_2 P_{n_1,n_2}(i,t) + \Delta t \lambda E_{n_1+n_2}^N P_{n_1,n_2}(i-1,t) + \\ &+ \Delta t \lambda q P_{n_1-1,n_2}(i,t) + \Delta t (i+1)\sigma q P_{n_1-1,n_2}(i+1,t) + \\ &+ \Delta t \lambda (1-q) P_{n_1,n_2-1}(i,t) + \Delta t (i+1)\sigma(1-q) P_{n_1,n_2-1}(i+1,t) + \\ &+ \Delta t \mu_1 r_0 (n_1+1) P_{n_1+1,n_2}(i,t) + \Delta t \mu_1 r_2 (n_1+1) P_{n_1+1,n_2}(i-1,t) + \\ &+ \Delta t \mu_2 r_0 (n_2+1) P_{n_1,n_2+1}(i,t) + \Delta t \mu_2 r_2 (n_2+1) P_{n_1,n_2+1}(i-1,t) + \\ &+ \Delta t \mu_1 r_1 (1-q)(n_1+1) P_{n_1+1,n_2-1}(i,t) + \Delta t \mu_2 r_1 q (n_2+1) P_{n_1-1,n_2+1}(i,t) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

У первого слагаемого в правой части перемножаем единицу на соответствующею вероятность переносим полученное слагаемое со знаком минус в левую сторону, а после делим на Δt, получая данные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{P_{n_1,n_2}(i,t+\Delta t) - P_{n_1,n_2}(i,t)}{\Delta t} =& -(\lambda + i\sigma \overline{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) P_{n_1,n_2}(i,t) + n_1 \mu_1 r_1 q P_{n_1,n_2}(i,t) + \\ &+ \mu_2 r_1 (1-q) n_2 P_{n_1,n_2}(i,t) + \lambda E_{n_1+n_2}^N P_{n_1,n_2}(i-1,t) + \\ &+ \lambda q P_{n_1-1,n_2}(i,t) + (i+1)\sigma q P_{n_1-1,n_2}(i+1,t) + \\ &+ \lambda(1-q) P_{n_1,n_2-1}(i,t) + (i+1)\sigma(1-q) P_{n_1,n_2-1}(i+1,t) + \\ &+ \mu_1 r_0 (n_1+1) P_{n_1+1,n_2}(i,t) + \mu_1 r_2 (n_1+1) P_{n_1+1,n_2}(i-1,t) + \\ &+ \mu_2 r_0 (n_2+1) P_{n_1,n_2+1}(i,t) + \mu_2 r_2 (n_2+1) P_{n_1,n_2+1}(i-1,t) + \\ &+ \mu_1 r_1 (1-q)(n_1+1) P_{n_1+1,n_2-1}(i,t) + \mu_2 r_1 q (n_2+1) P_{n_1-1,n_2+1}(i,t) + \\ &+ o(\Delta t)/\Delta t. \end{aligned}$$

Пусть $\Delta t \to 0$,

$$\begin{aligned} \frac{dP_{n_1,n_2}(i,t)}{\partial t} =& -(\lambda + i\sigma \overline{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) P_{n_1,n_2}(i,t) + \mu_1 r_1 q n_1 P_{n_1,n_2}(i,t) + \\ &+ \mu_2 r_1 (1-q) n_2 P_{n_1,n_2}(i,t) + \lambda E_{n_1+n_2}^N P_{n_1,n_2}(i-1,t) + \\ &+ \lambda q P_{n_1-1,n_2}(i,t) + (i+1)\sigma q P_{n_1-1,n_2}(i+1,t) + \\ &+ \lambda(1-q) P_{n_1,n_2-1}(i,t) + (i+1)\sigma(1-q) P_{n_1,n_2-1}(i+1,t) + \\ &+ \mu_1 r_0 (n_1+1) P_{n_1+1,n_2}(i,t) + \mu_1 r_2 (n_1+1) P_{n_1+1,n_2}(i-1,t) + \\ &+ \mu_2 r_0 (n_2+1) P_{n_1,n_2+1}(i,t) + \mu_2 r_2 (n_2+1) P_{n_1,n_2+1}(i-1,t) + \\ &+ \mu_1 r_1 (1-q)(n_1+1) P_{n_1+1,n_2-1}(i,t) + \mu_2 r_1 q (n_2+1) P_{n_1-1,n_2+1}(i,t). \end{aligned}$$

Введем частичные характеристические функции:

$$H_{n_1,n_2}(u,t)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{iuj}P_{n_1,n_2}(i,t).$$

Тогда уравнения будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t}=&-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)H_{n_1,n_2}(u,t)+j\sigma\overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\&+\mu_1 r_1 q n_1 H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2 r_1(1-q)n_2 H_{n_1,n_2}(u,t)+\lambda e^{ju}E^N_{n_1+n_2}H_{n_1,n_2}(u,t)+\\&+\lambda q H_{n_1-1,n_2}(u,t)-j\sigma q e^{-ju}\frac{\partial H_{n_1-1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\&+\lambda(1-q)H_{n_1,n_2-1}(u,t)-j\sigma(1-q)e^{-ju}\frac{\mathrm{d}H_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\mathrm{d}u}+\\&+\mu_1 r_0(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t)+\mu_1 r_2 e^{ju}(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t)+\\&+\mu_2 r_0(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\mu_2 r_2 e^{ju}(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\\&+\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)H_{n_1+1,n_2-1}(u,t)+(n_2+1)\mu_2 r_1 q H_{n_1-1,n_2+1}(u,t).\end{aligned}$$

Просуммируем по n_1 и n_2

$$\begin{aligned}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} =& -\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)+j\sigma\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\overline{E}^{N}_{n_1+n_2}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}-\\ &-\mu_1\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t)-\mu_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t)+\\ &+\mu_1r_1q\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2r_1(1-q)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t)+\\ &+\lambda e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}E^{N}_{n_1+n_2}H_{n_1,n_2}(u,t)+\\ &+\lambda q\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}H_{n_1-1,n_2}(u,t)-j\sigma qe^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1-1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\ &+\lambda(1-q)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}H_{n_1,n_2-1}(u,t)u-j\sigma(1-q)e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\partial u}+\\ &+\mu_1r_0\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t)+\mu_1r_2e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t)+\\ &+\mu_2r_0\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\mu_2r_2e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\\ &+\mu_1r_1(1-q)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_1+1)H_{n_1+1,n_2-1}(u,t)+\\ &+\mu_2r_1q\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_2+1)H_{n_1-1,n_2+1}(u,t).\end{aligned}$$

Избавимся от индикаторов, путем исключения некоторых компонент из суммы

$$
\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} = &-\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t) + +j\sigma\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}-\\
&-\mu_1(r_0+r_2)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t)-\mu_2(r_0+r_2)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\lambda e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\lambda q\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_2}H_{n_1,n_2}(u,t)-j\sigma q e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\
&+\lambda(1-q)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)-j\sigma(1-q)e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\
&+\mu_1 r_0\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_1 r_2 e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\mu_2 r_0\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2 r_2 e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t).
\end{aligned}
$$

Сократим некоторый слагаемые

$$
\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} =&\lambda(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)-\\
&-j\sigma q(e^{-ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}-\\
&-j\sigma(1-q)(e^{-ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\
&+\mu_1 r_2(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2 r_2(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} =&\lambda(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)-\\
&-j\sigma(e^{-ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\
&+\mu_1 r_2(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2 r_2(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t).
\end{aligned}
$$

И вынесем $(e^{ju}-1)$

$$\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t}=(e^{ju}-1)\Bigg\{\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)+$$
$$+j\sigma e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}+$$
$$+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1 H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2 H_{n_1,n_2}(u,t)\Bigg\}.$$

Получим уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} = &-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)H_{n_1,n_2}(u,t)+j\sigma\overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\ &+\mu_1 r_1 q n_1 H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2 r_1(1-q)n_2 H_{n_1,n_2}(u,t)+\lambda e^{ju}E^N_{n_1+n_2}H_{n_1,n_2}(u,t)+\\ &+\lambda q H_{n_1-1,n_2}(u,t)-j\sigma q e^{-ju}\frac{\partial H_{n_1-1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\ &+\lambda(1-q)H_{n_1,n_2-1}(u,t)-j\sigma(1-q)e^{-ju}\frac{\mathrm{d}H_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\mathrm{d}u}+\\ &+\mu_1 r_0(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t)+\mu_1 r_2 e^{ju}(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t)+\\ &+\mu_2 r_0(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\mu_2 r_2 e^{ju}(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\\ &+\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)H_{n_1+1,n_2-1}(u,t)+(n_2+1)\mu_2 r_1 q H_{n_1-1,n_2+1}(u,t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} = &(e^{ju}-1)\Bigg\{\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)+\\ &+j\sigma e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\ &+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1 H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2 H_{n_1,n_2}(u,t)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{1}$$

3 Первый этап асимтотического анализа

Сделаем замены:

$$\sigma = \varepsilon, \tau = t\varepsilon, u = \varepsilon w, H_{n_1,n_2}(u,t) = F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon).$$

Тогда мы можем переписать уравнение (1)

$$\begin{aligned}
\varepsilon\frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} =& -(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + j\overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\\
&+\mu_1 r_1 q n_1 F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\mu_2 r_1(1-q)n_2F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\lambda e^{j\varepsilon w}E^N_{n_1+n_2}F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\lambda q F_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)-\\
&-jqe^{-j\varepsilon w}\frac{\partial F_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\lambda(1-q)F_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)-\\
&-j(1-q)e^{-j\varepsilon w}\frac{\mathrm{d}F_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)}{\mathrm{d}w}+\mu_1 r_0(n_1+1)F_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_1 r_2 e^{j\varepsilon w}(n_1+1)F_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\mu_2 r_0(n_2+1)F_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_2 r_2(n_2+1)e^{j\varepsilon w}F_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)F_{n_1+1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_2 r_1 q(n_2+1)F_{n_1-1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon),\\
\varepsilon\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} =&(e^{j\varepsilon w}-1)\Bigg\{\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+je^{-j\varepsilon w}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\\
&+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{2}$$

При условии, что $\varepsilon\to 0$ можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. Компоненты $R_{n_1,n_2}(x)$ распределения вероятностей блока обслуживания:

$$\begin{aligned}
&L_{n_1,n_2}(x) = (\mu_1\mu_2(1-r_1))^{N-(n_1+n_2)}\frac{N!}{(n_1+n_2)!}C^{n_2}_{n_1+n_2}(\mu_1(1-q))^{n_2}(\mu_2 q)^{n_1}(\lambda+x)^{n_1+n_2},\\
&c(x) = \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}L_{n_1,n_2},\\
&R_{n_1,n_2}(x) = \frac{L_{n_1,n_2}(x)}{c(x)}.
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
x = x(\tau); x'(\tau) = a(x) =&\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}R_{n_1,n_2} - x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}R_{n_1,n_2}+\\
&+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1R_{n_1,n_2}+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2R_{n_1,n_2}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим первое уравнение системы (2) в пределе $\varepsilon \to 0$, обозначим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) = F_{n_1,n_2}(w,\tau)$$

и получим

$$\begin{aligned}
&-(\lambda + n_1\mu_1 + n_2\mu_2)F_{n_1,n_2}(w,\tau) + j\overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial F_{n_1,n_2}((w,\tau)}{\partial w}+\\
&+\mu_1 r_1 q n_1 F_{n_1,n_2}(w,\tau) + \mu_2 r_1(1-q)n_2 F_{n_1,n_2}(w,\tau)+\\
&+\lambda E^N_{n_1+n_2}F_{n_1,n_2}(w,\tau) + \lambda q F_{n_1-1,n_2}(w,\tau)-\\
&-jq\frac{\partial F_{n_1-1,n_2}(w,\tau)}{\partial w} + \lambda(1-q)F_{n_1,n_2-1}(w,\tau)-\\
&-j(1-q)\frac{\mathrm{d}F_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\mathrm{d}w} + \mu_1 r_0(n_1+1)F_{n_1+1,n_2}(w,\tau)+\\
&+\mu_1 r_2(n_1+1)F_{n_1+1,n_2}(w,\tau) + \mu_2 r_0(n_2+1)F_{n_1,n_2+1}(w,\tau)+\\
&+\mu_2 r_2(n_2+1)F_{n_1,n_2+1}(w,\tau)+\\
&+\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)F_{n_1+1,n_2-1}(w,\tau)+\\
&+\mu_2 r_1 q(n_2+1)F_{n_1-1,n_2+1}(w,\tau) = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Находим решение уравнения (4) в виде $F_{n_1,n_2}(w,\tau) = L_{n_1,n_2}e^{jwx(\tau)}$. Получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
&-(\lambda + \mu_1 n_1 + n_2\mu_2)L_{n_1,n_2} - x(\tau)\overline{E}^N_{n_1+n_2}L_{n_1,n_2}+\\
&+\mu_1 r_1 q n_1 L_{n_1,n_2} + \mu_2 r_1(1-q)n_2 L_{n_1,n_2}+\\
&+\lambda E^N_{n_1+n_2}L_{n_1,n_2} + \lambda q L_{n_1-1,n_2}+\\
&+x(\tau)qL_{n_1-1,n_2} + \lambda(1-q)L_{n_1,n_2-1}+\\
&+x(\tau)(1-q)L_{n_1,n_2-1} + \mu_1 r_0(n_1+1)L_{n_1+1,n_2}+\\
&+\mu_1 r_2(n_1+1)L_{n_1+1,n_2} + \mu_2 r_0(n_2+1)L_{n_1,n_2+1}+\\
&+\mu_2 r_2(n_2+1)L_{n_1,n_2+1}+\\
&+\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)L_{n_1+1,n_2-1}+\\
&+\mu_2 r_1 q(n_2+1)L_{n_1-1,n_2+1} = 0,
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&L_{n_1,n_2}\{-(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) - x(\tau)\overline{E}^N_{n_1+n_2} + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1(1-q)n_2 + \lambda E^N_{n_1+n_2}\}+\\
&+L_{n_1-1,n_2}\{\lambda q + x(\tau)q\}+\\
&+L_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1-q) + x(\tau)(1-q)\}+\\
&+L_{n_1+1,n_2}\{\mu_1 r_0(n_1+1) + \mu_1 r_2(n_1+1)\}+\\
&+L_{n_1,n_2+1}\{\mu_2 r_0(n_2+1) + \mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+L_{n_1+1,n_2-1}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+L_{n_1-1,n_2+1}\mu_2 r_1 q(n_2+1) = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Чтобы доказать это утверждение (3) воспользуемся символьным исчислением на языке Python, с помощью библиотеки SymPy [16]. Однако, чтобы сделать это, нужно избавится от индикаторов, поэтому рассмотрим разные случаи.

$n_1 = 0, n_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
&L_{0,0}\{-\lambda - x(\tau)\}+\\
&+ L_{1,0}\{\mu_1 r_0 + \mu_1 r_2\}+\\
&+ L_{0,1}\{\mu_2 r_0 + \mu_2 r_2\} = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

$n_1 = 0, n_2 > 0, n_1 + n_2 < N$:

$$\begin{aligned}
&L_{0,n_2}\{-(\lambda + \mu_2 n_2) - x(\tau) + \mu_2 r_1(1-q)n_2\}+\\
&+ L_{0,n_2-1}\{\lambda(1-q) + x(\tau)(1-q)\}+\\
&+ L_{1,n_2}\{\mu_1 r_0 + \mu_1 r_2\}+\\
&+ L_{0,n_2+1}\{\mu_2 r_0(n_2+1) + \mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+ L_{1,n_2-1}\mu_1 r_1(1-q) = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

$n_1 > 0, n_2 = 0, n_1 + n_2 < N$:

$$\begin{aligned}
&L_{n_1,0}\{-(\lambda + \mu_1 n_1) - x(\tau) + \mu_1 r_1 q n_1\}+\\
&+ L_{n_1-1,0}\{\lambda q + x(\tau)q\}+\\
&+ L_{n_1+1,0}\{\mu_1 r_0(n_1+1) + \mu_1 r_2(n_1+1)\}+\\
&+ L_{n_1,1}\{\mu_2 r_0 + \mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+ L_{n_1-1,n_2+1}\mu_2 r_1 q(n_2+1) = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

$n_1 > 0, n_2 > 0, n_1 + n_2 < N$:

$$\begin{aligned}
&L_{n_1,n_2}\{-(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) - x(\tau) + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1(1-q)n_2\}+\\
&+ L_{n_1-1,n_2}\{\lambda q + x(\tau)q\}+\\
&+ L_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1-q) + x(\tau)(1-q)\}+\\
&+ L_{n_1+1,n_2}\{\mu_1 r_0(n_1+1) + \mu_1 r_2(n_1+1)\}+\\
&+ L_{n_1,n_2+1}\{\mu_2 r_0(n_2+1) + \mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+ L_{n_1+1,n_2-1}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+ L_{n_1-1,n_2+1}\mu_2 r_1 q(n_2+1) = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

$n_1 = 0, n_2 = N$:

$$\begin{aligned}
&L_{0,N}\{-(\lambda + N\mu_2) + N\mu_2 r_1(1-q) + \lambda\}+\\
&+ L_{0,N-1}\{\lambda(1-q) + x(\tau)(1-q)\}+\\
&+ L_{1,N-1}\mu_1 r_1(1-q) = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

$n_1 = N, n_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
&L_{N,0}\{-N\mu_1 + N\mu_2 r_1 q\}+\\
&+ L_{N-1,0}\{\lambda q + x(\tau)q\}+\\
&+ L_{N-1,1}\mu_2 r_1 q = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

$n_1 + n2 = N, n1 \neq N, n2 \neq N$:

$$
\begin{aligned}
&L_{n_1,n_2}\{-(\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2\}+\\
&+L_{n_1-1,n_2}\{\lambda q+x(\tau)q\}+\\
&+L_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1-q)+x(\tau)(1-q)\}+\\
&+L_{n_1+1,n_2-1}(n_1+1)\mu_1 r_1(1-q)+\\
&+L_{n_1-1,n_2+1}\mu_2 r_1 q(n_2+1)=0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

В результате выполнения программы [17] получим, что левая часть уравнения так же равна 0, при подстановки решения (3), во всех случаях, кроме (10). Результат выполнения следующий:

$$
-N\mu_2(qr_z-r1+1)(\mu_1 q(-\mu_1(q-1))^{(N-1)}(\lambda+x)^N-\mu_1(-\mu_1(q-1))^{(N-1)}(\lambda+x)^N+(-\mu_1(\lambda q-\lambda+qx-x))^N).
$$

По неизвестной причине, выражение не сокрашается до 0, используя SymPy. Однако, если рассмотреть третию по счету скобку получим:

$$
\begin{aligned}
&\mu_1 q(-\mu_1(q-1))^{(N-1)}(\lambda+x)^N-\mu_1(-\mu_1(q-1))^{(N-1)}(\lambda+x)^N+(-\mu_1(\lambda q-\lambda+qx-x))^N=\\
&=\mu_1 q(\mu_1(1-q))^{(N-1)}(\lambda+x)^N-m1(m1(1-q))^(N-1)(\lambda+x)^N+\\
&+(m1(1-q)(l+x))^N=\\
&=(\mu_1(\lambda-q))^{(N-1)}(\lambda+x)^N(\mu_1 q-\mu_1)+(\mu_1(1-q)(\lambda+x))^N=\\
&=-(\mu_1(1-q))^N(\lambda+x)^N+(\mu_1(1-q)(\lambda+x))^N=0
\end{aligned}
$$

Следовательно, решение (3) верно и в данном случае.
Заметим, что:

$$
\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}R_{n_1,n_2}=1.
$$

Для этого разделим полученное решения на сумму всех L_{n_1,n_2}
Получим

$$
c=\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}L_{n_1,n_2},\,R_{n_1,n_2}=\frac{L_{n_1,n_2}}{c}.
$$

Рассмотрим второе уравнение системы (1) в пределе $\varepsilon\to 0$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau)}{\partial\tau}=jw\Bigg\{&\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+j\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau)}{\partial w}+\\
&+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1F_{n_1,n_2}(w,\tau)+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2F_{n_1,n_2}(w,\tau)\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Заменим решение $F_{n_1,n_2}(w,\tau) = R_{n_1,n_2}e^{jwx(\tau)}$, тогда

$$\begin{aligned} x'(\tau) =&\lambda \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} R_{n_1,n_2} - x(\tau) \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} R_{n_1,n_2} + \\ &+ \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 R_{n_1,n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 R_{n_1,n_2}. \end{aligned}$$

Обозначим через

$$\begin{aligned} x'(\tau) = a(x) =&\lambda \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} R_{n_1,n_2} - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} R_{n_1,n_2} + \\ &+ \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 R_{n_1,n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 R_{n_1,n_2}. \end{aligned} \tag{13}$$

4 Второй этап асимтотического анализа

Сделаем следующие подстановки в (1):

$$H_{n_1,n_2}(u,t) = e^{j\frac{u}{\sigma}x(\sigma t)}H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t).$$

Получим систему:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}c(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t) = &-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+ j\sigma\overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u} - x(\sigma t)\overline{E}^N_{n_1+n_2}H^{(1)}_{n_1,n_2}+\\
&+ \mu_1 r_1 q n_1 H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t) + \mu_2 r_1(1-q)n_2 H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+ \lambda e^{ju}E^N_{n_1+n_2}H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+ \lambda q H^{(1)}_{n_1-1,n_2}(u,t) - j\sigma q e^{-ju}\frac{\partial H^{(1)}_{n_1-1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\
&+ q e^{-ju}x(\sigma t)H^{(1)}_{n_1-1,n_2}(u,t)+\\
&+ \lambda(1-q)H^{(1)}_{n_1,n_2-1}(u,t) - j\sigma(1-q)e^{-ju}\frac{\mathrm{d}H^{(1)}_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\mathrm{d}u}+\\
&+ (1-q)e^{-ju}x(\sigma t)H^{(1)}_{n_1,n_2-1}(u,t)\\
&+ \mu_1 r_0(n_1+1)H^{(1)}_{n_1+1,n_2}(u,t)+\\
&+ \mu_1 r_2 e^{ju}(n_1+1)H^{(1)}_{n_1+1,n_2}(u,t)+\\
&+ \mu_2 r_0(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\\
&+ \mu_2 r_2 e^{ju}(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\\
&+ \mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)H^{(1)}_{n_1+1,n_2-1}(u,t)+\\
&+ (n_2+1)\mu_2 r_1 q H^{(1)}_{n_1-1,n_2+1}(u,t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\Big\{\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\Big\} =&(e^{ju}-1)\Bigg\{\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+ e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\Bigg[j\sigma\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}-\\
&- x(\sigma t)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\Bigg]+\\
&+ \mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1 H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+ \mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2 H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{14}$$

С учетом (13) перепишем систему (14),

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}c(u,t)}{\partial t} + jua(x)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t) = &-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+j\sigma\overline{E}^{N}_{n_1+n_2}\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u} - x\overline{E}^{N}_{n_1+n_2}H^{(1)}_{n_1,n_2}+\\
&+\mu_1 r_1 q n_1 H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2 r_1(1-q)n_2 H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\lambda e^{ju}E^{N}_{n_1+n_2}H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\lambda q H^{(1)}_{n_1-1,n_2}(u,t) - j\sigma q e^{-ju}\frac{\partial H^{(1)}_{n_1-1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\
&+q e^{-ju} x H^{(1)}_{n_1-1,n_2}(u,t)+\\
&+\lambda(1-q)H^{(1)}_{n_1,n_2-1}(u,t) - j\sigma(1-q)e^{-ju}\frac{\mathrm{d}H^{(1)}_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\mathrm{d}u}+\\
&+(1-q)e^{-ju}xH^{(1)}_{n_1,n_2-1}(u,t)+\\
&+\mu_1 r_0(n_1+1)H^{(1)}_{n_1+1,n_2}(u,t)+\\
&+\mu_1 r_2 e^{ju}(n_1+1)H^{(1)}_{n_1+1,n_2}(u,t)+\\
&+\mu_2 r_0(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\\
&+\mu_2 r_2 e^{ju}(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\\
&+\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)H^{(1)}_{n_1+1,n_2-1}(u,t)+\\
&+(n_2+1)\mu_2 r_1 q H^{(1)}_{n_1-1,n_2+1}(u,t),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\{\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t}+jua(x)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\} =&(e^{ju}-1)\Bigg\{\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\\
&+e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\left[\sigma j\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u} - xH^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\right]+\\
&+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1 H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2 H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Обозначим $\sigma=\varepsilon^2$ и сделаем следующие замены в (15):

$$
\tau = t\varepsilon^2, u=\varepsilon w, H^{(1)}_{n_1,n_2}(u1,t) = F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon).
$$

Мы можем написать:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^2 \frac{\partial F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial t} + j\varepsilon w a F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) = &-(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ j\varepsilon \overline{E}^N_{n_1+n_2} \frac{\partial F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} - x\overline{E}^N_{n_1+n_2} F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ \mu_1 r_1 q n_1 F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \mu_2 r_1 (1-q) n_2 F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ \lambda e^{j\varepsilon w} E^N_{n_1+n_2} F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ \lambda q F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) - j\varepsilon q e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \\
&+ q e^{-ju} x F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ \lambda (1-q) F^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon) - j\varepsilon (1-q) e^{-j\varepsilon w} \frac{\mathrm{d} F^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)}{\mathrm{d} w} + \\
&+ (1-q) e^{-j\varepsilon w} x F^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ \mu_1 r_0 (n_1+1) F^{(1)}_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ \mu_1 r_2 e^{j\varepsilon w} (n_1+1) F^{(1)}_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ \mu_2 r_0 (n_2+1) F^{(1)}_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ \mu_2 r_2 e^{j\varepsilon w} (n_2+1) F^{(1)}_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ \mu_1 r_1 (1-q)(n_1+1) F^{(1)}_{n_1+1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ (n_2+1) \mu_2 r_1 q F^{(1)}_{n_1-1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon), \\
\varepsilon^2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \left\{ \frac{\partial F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial t} + j\varepsilon a F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) \right\} = &\, (e^{j\varepsilon w} - 1) \Bigg\{ \lambda \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ e^{-j\varepsilon w} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \left[j\varepsilon \frac{\partial F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial u} - x F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) \right] \\
&+ \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \\
&+ \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) \Bigg\}.
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

Запишем первое уравнение (16) с точностью до O(ε^2):

$$
\begin{aligned}
j\varepsilon w a F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) = & -(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ j\varepsilon \overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} - x\overline{E}^N_{n_1+n_2}F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_1 r_1 q n_1 F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \mu_2 r_1(1-q)n_2 F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \lambda E^N_{n_1+n_2}F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + j\varepsilon w\lambda E^N_{n_1+n_2}F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \lambda q F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) - \varepsilon q\frac{\partial F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\\
&+ qxF^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) - j\varepsilon w q x F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \lambda(1-q)F^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon) - j\varepsilon(1-q)\frac{\mathrm{d}F^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)}{\mathrm{d}w}+\\
&+ (1-q)xF^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon) - j\varepsilon w(1-q)xF^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_1 r_0(n_1+1)F^{(1)}_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_1 r_2(n_1+1)F^{(1)}_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + j\varepsilon w\mu_1 r_2(n_1+1)F^{(1)}_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_2 r_0(n_2+1)F^{(1)}_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_2 r_2(n_2+1)F^{(1)}_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon) + j\varepsilon w\mu_2 r_2(n_2+1)F^{(1)}_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)F^{(1)}_{n_1+1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ (n_2+1)\mu_2 r_1 q F^{(1)}_{n_1-1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Решение задачи (17) можно записать в виде разложения

$$
F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) = \Phi(w,\tau)\{R_{n_1,n_2} + j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\} + O(\varepsilon^2),
\tag{18}
$$

где $\Phi(w,\tau)$ - скалярная функция, форма которой определена ниже.

Мы получим:

$$
\begin{aligned}
j\varepsilon w a\Phi(w,\tau)\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\} = & \Phi(w,\tau)\{\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\}\{-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)+\\
&- x\overline{E}^N_{n_1+n_2} + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1(1-q)n_2 + \lambda E^N_{n_1+n_2} + j\varepsilon w\lambda E^N_{n_1+n_2}\}+\\
&+ \{R_{n_1-1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1-1,n_2}\}\{\lambda q + qx - j\varepsilon w q x\}+\\
&+ \{R_{n_1,n_2-1}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2-1}\}\{\lambda(1-q)+\\
&+ (1-q)x - j\varepsilon w(1-q)x\}+\\
&+ \{R_{n_1+1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1+1,n_2}\}\{\mu_1 r_0(n_1+1)+\\
&+ \mu_1 r_2(n_1+1) + j\varepsilon w\mu_1 r_2(n_1+1)\}+\\
&+ \{R_{n_1,n_2+1}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2+1}\}\{\mu_2 r_0(n_2+1)+\\
&+ \mu_2 r_2(n_2+1) + j\varepsilon w\mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+ \{R_{n_1+1,n_2+1}+j\varepsilon w f_{n_1-1,n_2-1}\}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+ \{R_{n_1-1,n_2+1}+j\varepsilon w f_{n_1-1,n_2+1}\}(n_2+1)\mu_2 r_1 q\}+\\
&+ \frac{\partial\Phi(w,t)}{\partial w}\{j\varepsilon\overline{E}^N_{n_1+n_2}\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\}-\\
&- j\varepsilon q\{R_{n_1-1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1-1,n_2}\}-\\
&- j\varepsilon(1-q)\{R_{n_1,n_2-1}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2-1}\}\}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
j\varepsilon wa\Phi(w,\tau)R_{n_1,n_2} = &\Phi(w,\tau)\{\{R_{n_1,n_2} + j\varepsilon wf_{n_1,n_2}\}\{-(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) +\\
&- x\overline{E}^N_{n_1+n_2} + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1(1-q)n_2 + \lambda E^N_{n_1+n_2}\} + j\varepsilon w\lambda E^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2} +\\
&+ \{R_{n_1-1,n_2} + j\varepsilon wf_{n_1-1,n_2}\}\{\lambda q + qx\} - j\varepsilon wqxR_{n_1-1,n_2} +\\
&+ \{R_{n_1,n_2-1} + j\varepsilon wf_{n_1,n_2-1}\}\{\lambda(1-q) +\\
&+ (1-q)x\} - j\varepsilon w(1-q)xR_{n_1,n_2-1} +\\
&+ \{R_{n_1+1,n_2} + j\varepsilon wf_{n_1+1,n_2}\}\{\mu_1 r_0(n_1+1) +\\
&+ \mu_1 r_2(n_1+1)\} + j\varepsilon w\mu_1 r_2(n_1+1)R_{n_1+1,n_2} +\\
&+ \{R_{n_1,n_2+1} + j\varepsilon wf_{n_1,n_2+1}\}\{\mu_2 r_0(n_2+1) +\\
&+ \mu_2 r_2(n_2+1)\} + j\varepsilon w\mu_2 r_2(n_2+1)R_{n_1,n_2+1} +\\
&+ \{R_{n_1+1,n_2+1} + j\varepsilon wf_{n_1-1,n_2-1}\}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1) +\\
&+ \{R_{n_1-1,n_2+1} + j\varepsilon wf_{n_1-1,n_2+1}\}(n_2+1)\mu_2 r_1 q\} +\\
&+ \frac{\partial\Phi(w,t)}{\partial w}\{j\varepsilon\overline{E}^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2} - j\varepsilon qR_{n_1-1,n_2} - j\varepsilon(1-q)R_{n_1,n_2-1}\}.
\end{aligned}
$$

С учетом (5) разделим последнее уравнение на $\Phi(w,\tau)j\varepsilon w$ и положим $\varepsilon \to 0$:

$$
\begin{aligned}
aR_{n_1,n_2} = &f_{n_1,n_2}\{-(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) +\\
&- x\overline{E}^N_{n_1+n_2} + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1(1-q)n_2 + \lambda E^N_{n_1+n_2}\} + E^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2} +\\
&+ f_{n_1-1,n_2}\{\lambda q + qx\} - qxR_{n_1-1,n_2} +\\
&+ f_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1-q) +\\
&+ (1-q)x\} - (1-q)xR_{n_1,n_2-1} +\\
&+ f_{n_1+1,n_2}\{\mu_1 r_0(n_1+1) +\\
&+ \mu_1 r_2(n_1+1)\} + \mu_1 r_2(n_1+1)R_{n_1+1,n_2} +\\
&+ f_{n_1,n_2+1}\{\mu_2 r_0(n_2+1) +\\
&+ \mu_2 r_2(n_2+1)\} + \mu_2 r_2(n_2+1)R_{n_1,n_2+1} +\\
&+ f_{n_1-1,n_2-1}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1) +\\
&+ f_{n_1-1,n_2+1}(n_2+1)\mu_2 r_1 q +\\
&+ \frac{\partial\Phi(w,t)/\partial w}{w\Phi(w,t)}\{\overline{E}^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2} - qR_{n_1-1,n_2} - (1-q)R_{n_1,n_2-1}\}.
\end{aligned}
$$

Переписываем последнее уравнение:

$$
\begin{aligned}
&f_{n_1,n_2}\{-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)-x\overline{E}^N_{n_1+n_2}+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2+\lambda E^N_{n_1+n_2}\}+\\
&+f_{n_1-1,n_2}\{\lambda q+qx\}+\\
&+f_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1-q)+(1-q)x\}+\\
&+f_{n_1+1,n_2}\{\mu_1 r_0(n_1+1)+\mu_1 r_2(n_1+1)\}+\\
&+f_{n_1,n_2+1}\{\mu_2 r_0(n_2+1)+\mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+f_{n_1-1,n_2-1}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+f_{n_1-1,n_2+1}(n_2+1)\mu_2 r_1 q=\\
&=-aR_{n_1,n_2}+E^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2}-qxR_{n_1-1,n_2}-(1-q)xR_{n_1,n_2-1}+\\
&+\mu_1 r_2(n_1+1)R_{n_1+1,n_2}+\mu_2 r_2(n_2+1)R_{n_1,n_2+1}+\\
&+\frac{\partial\Phi(w,t)/\partial w}{w\Phi(w,t)}\{\overline{E}^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2}-qR_{n_1-1,n_2}-(1-q)R_{n_1,n_2-1}\}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Решение f можно записать в виде:

$$
f_{n_1,n_2}=R_{n_1,n_2}+g-\varphi\frac{\partial\Phi(w,t)/\partial w}{w\Phi(w,t)}. \tag{21}
$$

которое мы подставляем в (20) и получаем

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{n_1,n_2}(-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2+\lambda E^N_{n_1+n_2}-x\overline{E}^N_{n_1+n_2})+\\
&+\varphi_{n_1-1,n_2}(\lambda q\overline{E}^0_{n_1}+xq\overline{E}^0_{n_1})+\varphi_{n_1,n_2-1}(\lambda(1-q)\overline{E}^0_{n_2}+x(1-q)\overline{E}^0_{n_2})+\\
&+\varphi_{n_1+1,n_2}(\mu_1 r_0(n_1+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2}+\mu_1 r_2(n_1+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2})+\\
&+\varphi_{n_1,n_2+1}(\mu_2 r_0(n_2+1)\overline{E}^N_{n+n_2}+\mu_2 r_2(n_2+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2})+\\
&+\varphi_{n_1+1,n_2-1}(1-q)\mu_1 r_1(n_1+1)+\varphi_{n_1-1,n_2+1}q\mu_2 r_1(n_2+1)=\\
&=R_{n_1,n_2}x\overline{E}^N_{n_1+n_2}-R_{n_1-1,n_2}xq\overline{E}^0_{n_1}-R_{n_1,n_2-1}x(1-q)\overline{E}^0_{n_2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_{n_1,n_2}(-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2+\lambda E^N_{n_1+n_2}-x\overline{E}^N_{n_1+n_2})+\\
&+g_{n_1-1,n_2}(\lambda q\overline{E}^0_{n_1}+xq\overline{E}^0_{n_1})+g_{n_1,n_2-1}(\lambda(1-q)\overline{E}^0_{n_2}+x(1-q)\overline{E}^0_{n_2})+\\
&+f_{n_1+1,n_2}(\mu_1 r_0(n_1+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2}+\mu_1 r_2(n_1+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2})+\\
&+g_{n_1,n_2+1}(\mu_2 r_0(n_2+1)\overline{E}^N_{n+n_2}+\mu_2 r_2(n_2+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2})+\\
&+g_{n_1+1,n_2-1}(1-q)\mu_1 r_1(n_1+1)+gn_{1-1,n_2+1}q\mu_2 r_1(n_2+1)=\\
&=R_{n_1,n_2}a-\lambda R_{n_1,n_2}+xqE^0_{n_1}R_{n_1-1,n_2}+x(1-q)\overline{E}^0_{n_2}R_{n_1,n_2-1}\\
&-\mu_1 r_2(n_1+1)R_{n_1+1,n_2}\overline{E}^N_{n_1+n_2}-\mu_2 r_2(n_2+1)R_{n_1,n_2+1}\overline{E}^N_{n_1+n_2}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Рассмотрим первое уравнение системы (5), дифференцируем его по x, получим уравнение:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}\{-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)-x(\tau)\overline{E}^N_{n_1+n_2}+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2+\lambda E^N_{n_1+n_2}\}+\\
&+\frac{\partial R_{n_1-1,n_2}}{\partial x}\{\lambda q+x(\tau)q\}+\\
&+\frac{\partial R_{n_1,n_2-1}}{\partial x}\{\lambda(1-q)+x(\tau)(1-q)\}+\\
&+\frac{\partial R_{n_1+1,n_2}}{\partial x}\{\mu_1 r_0(n_1+1)+\mu_1 r_2(n_1+1)\}+\\
&+\frac{\partial R_{n_1,n_2+1}}{\partial x}\{\mu_2 r_0(n_2+1)+\mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+\frac{\partial R_{n_1+1,n_2-1}}{\partial x}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+\frac{\partial R_{n_1-1,n_2+1}}{\partial x}\mu_2 r_1 q(n_2+1)-\\
&-R_{n_1,n_2}x\overline{E}^N_{n_1+n_2}+R_{n_1-1,n_2}xq\overline{E}^0_{n_1}+R_{n_1,n_2-1}x(1-q)\overline{E}^0_{n_2}=0.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Учитывая (23) и последнее уравнение для φ, запишем важное равенство:

$$
\varphi_{n_1,n_2}=\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x},
\tag{24}
$$

где $\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\varphi_{n_1,n_2}=0$. В силу (22) g является частным решением системы (23). Следовательно, она удовлетворяет некоторому дополнительному условию, которое мы выберем в виде $\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}g_{n_1,n_2}=0$. Тогда решение g системы (23), удовлетворяющее условию $\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}g_{n_1,n_2}=0$, определяется однозначно. Теперь рассмотрим второе уравнение системы (16), в которую подставляем разложение (18):

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^2\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}+ja\varepsilon w\Phi(w,\tau)\left\{1+j\varepsilon w\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}f_{n_1,n_2}\right\}=\\
&=(j\varepsilon w+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2})\Bigg[\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\Phi(w,\tau)\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\}+\\
&+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1\Phi(w,\tau)\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\}+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2\Phi(w,\tau)\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\}+\\
&+j\varepsilon\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}\frac{\partial\Phi_{n_1,n_2}}{\partial w}-(1-j\varepsilon w)x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}\Phi(w,\tau)\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\}\Bigg],
\end{aligned}
$$

тогда с помощью уравнения (13)

$$\varepsilon^2\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}=(jw\varepsilon)^2\Phi(w,\tau)\Bigg[\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}f_{n_1,n_2}+\mu_1r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1f_{n_1,n_2}+\mu_2r_2\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}n_2f_{n_1,n_2}-$$
$$-x\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}f_{n_1,n_2}+x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}R_{n_1,n_2}-a\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}f_{n_1,n_2}\Bigg]+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\Phi(w,\tau)\Bigg[\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}R_{n_1,n_2}+$$
$$+\mu_1r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1R_{n_1,n_2}+\mu_2r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2R_{n_1,n_2}-x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}R_{n_1,n_2}\Bigg]+(j\varepsilon)^2w\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}R_{n_1,n_2}\frac{\partial\Phi_{n_1,n_2}}{\partial w},$$

получаем следующее уравнение,

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial\tau}{\Phi(w,\tau)}=\frac{(jw)^2}{2}\Phi(w,\tau)\Bigg[2\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}f_{n_1,n_2}+2\mu_1r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1f_{n_1,n_2}+2\mu_2r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2f_{n_1,n_2}-$$
$$-2x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}f_{n_1,n_2}+2x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}R_{n_1,n_2}-2a\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}f_{n_1,n_2}+a\Bigg]-w\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}R_{n_1,n_2}\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{\Phi(w,\tau)},$$

в которое мы подставляем (21)

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial\tau}{\Phi(w,\tau)}=\frac{(jw)^2}{2}\Phi(w,\tau)\Bigg[2\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}g_{n_1,n_2}+2\mu_1r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1g_{n_1,n_2}+2\mu_2r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2g_{n_1,n_2}-$$
$$-2x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}g_{n_1,n_2}+2x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}R_{n_1,n_2}+a\Bigg]+w\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{\Phi(w,\tau)}\Bigg[\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\varphi_{n_1,n_2}+$$
$$+\mu_1r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1\varphi_{n_1,n_2}+\mu_2r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2\varphi_{n_1,n_2}-x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}\varphi_{n_1,n_2}-\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}R_{n_1,n_2}\Bigg].\tag{25}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}b(x)=&2\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}g_{n_1,n_2}+2\mu_1r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1g_{n_1,n_2}+2\mu_2r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2g_{n_1,n_2}-\\&-2x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}g_{n_1,n_2}+2x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}R_{n_1,n_2}+a.\end{aligned}\tag{26}$$

5 Метод асимтотическо диффузионного анализа

Теорема 2. Плотность распределения вероятностей нормировочного числа заявок с орбиты имеют вид

$$\pi(z) = \frac{C}{b(z)} exp\{\frac{2}{\sigma} \int\limits_0^z \frac{a(x)}{b(x)} dx\}, \tag{27}$$

где C – нормированная константа,

$$a(x) = \lambda \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} R_{n_1,n_2} - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} R_{n_1,n_2} + \\ + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 R_{n_1,n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 R_{n_1,n_2},$$

$$b(x) = 2\lambda \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} g_{n_1,n_2} + 2\mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 g_{n_1,n_2} + 2\mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 g_{n_1,n_2} - \\ - 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} g_{n_1,n_2} + 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1,n_2} + a.$$

здесь g определяется системой уравнений

$$g_{n_1,n_2}(-(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1-q) n_2 + \lambda E^N_{n_1+n_2} - x\overline{E}^N_{n_1+n_2}) + \\ + g_{n_1-1,n_2}(\lambda q \overline{E}^0_{n_1} + xq\overline{E}^0_{n_1}) + g_{n_1,n_2-1}(\lambda(1-q)\overline{E}^0_{n_2} + x(1-q)\overline{E}^0_{n_2}) + \\ + g_{n_1+1,n_2}(\mu_1 r_0 (n_1+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2} + \mu_1 r_2 (n_1+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2}) + \\ + g_{n_1,n_2+1}(\mu_2 r_0 (n_2+1)\overline{E}^N_{n+n_2} + \mu_2 r_2 (n_2+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2}) + \\ + g_{n_1+1,n_2-1}(1-q)\mu_1 r_1 (n_1+1) + g n_{1-1,n_2+1} q \mu_2 r_1 (n_2+1) = \\ = R_{n_1,n_2} a - \lambda R_{n_1,n_2} + xqE^0_{n_1} R_{n_1-1,n_2} + x(1-q)\overline{E}^0_{n_2} R_{n_1,n_2-1} \\ - \mu_1 r_2 (n_1+1) R_{n_1+1,n_2} \overline{E}^N_{n_1+n_2} - \mu_2 r_2 (n_2+1) R_{n_1,n_2+1} \overline{E}^N_{n_1+n_2}, \\ \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} g_{n_1,n_2} = 0.$$

Доказательство. Перепишем (25):

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial\tau}{\Phi(w,\tau)} = \frac{(jw)^2}{2}\Phi(w,\tau)b(x) - w\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{\Phi(w,\tau)}\Bigg[\lambda \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \varphi_{n_1,n_2} + \\ + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 \varphi_{n_1,n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 \varphi_{n_1,n_2} - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} \varphi_{n_1,n_2} - \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1,n_2}\Bigg]. \tag{28}$$

Рассмотрим

$$\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\varphi_{n_1,n_2}+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1\varphi_{n_1,n_2}+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2\varphi_{n_1,n_2}-$$
$$-x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}\varphi_{n_1,n_2}-\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}R_{n_1,n_2}?$$

используя замену (24) в последнее выражение, мы можем получить:

$$\begin{aligned}&\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}-\\&-x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}-\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}R_{n_1,n_2}.\end{aligned} \tag{29}$$

Теперь рассмотрим уравнение для a(x), дифференцируем a(x) по x и учитывая, что R как решение зависит от x

$$\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}-x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}-\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}R_{n_1,n_2}+$$
$$+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}.$$

Сравнивая это равенство и (29), запишем уравнение (28) в виде:

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}=a'(x)w\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w}+\frac{(jw)^2}{2}b(x)\Phi(w,\tau). \tag{30}$$

Уравнение (30) это преобразование Фурье уравнения Фокера-Планка для плотности распределения вероятностей $P(y,\tau)$ значений центрированного и номерованного количества заявок на орбите. Находя обратное преобразование Фурье от (30) мы получаем

$$\frac{\partial P(y,\tau)}{\partial\tau}=-\frac{\partial}{\partial y}\{a'(x)yP(y,\tau)\}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{b(x)P(y,\tau)\}, \tag{31}$$

если мы составили уравнение Фокера-Планка для функции, значит это функция является плотностью распределения вероятностей для диффузионного процесса [2], который мы обозначим $y(\tau)$ с коэффициентом переносом a(x) и коэффициентом диффузии b(x):

$$dy(\tau)=a'(x)yd\tau+\sqrt{b(x)}dw(\tau). \tag{32}$$

Рассматривая стохастический процесс нормированного числа заявок на орбите

$$z(\tau)=x(\tau)+\varepsilon y(\tau), \tag{33}$$

где $\varepsilon=\sqrt{\sigma}$, исходя из (13) $dx(\tau)=a(x)d\tau$, следовательно

$$dz(\tau)=d(x(\tau)+\varepsilon y(\tau))=(a(x)+\varepsilon y a'(x))d\tau+\varepsilon\sqrt{b(x)}dw(\tau). \tag{34}$$

Затем выполняя разложение получаем

$$a(z) = a(x + \varepsilon y) = a(x) + \varepsilon y a'(x) + O(\varepsilon^2),$$
$$\varepsilon\sqrt{b(z)} = \varepsilon\sqrt{b(x + \varepsilon y)} = \varepsilon\sqrt{b(x) + O(\varepsilon)} = \sqrt{\sigma b(x)} + O(\varepsilon).$$

После переписываем уравнение (34) с точностью до $O(\varepsilon^2)$:

$$dz(\tau) = a(z)d\tau + \sqrt{\sigma b(z)}dw(\tau). \tag{35}$$

Обозначим плотность распределения вероятностей для процесса $z(\tau)$:

$$\pi(z, \tau) = \frac{\partial P\{z(\tau) < z\}}{\partial z}.$$

Так как $z(\tau)$ это решение стохастического дифференциального уравнения (35), следовательно процесс является диффузионным процессом и для его плотности распределения вероятностей мы можем записать уравнение Фокера-Планка:

$$\frac{\partial \pi(z, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial z}\{a(z)\pi(z, \tau)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{\sigma b(z)\pi(z, \tau)\}. \tag{36}$$

Предполагая, что существует стационарный режим

$$\pi(z, \tau) = \pi(z), \tag{37}$$

пишем уравнение Фокера-Планка для стационарного распределения вероятностей $\pi(z)$:

$$(a(z)\pi(z))' + \frac{\sigma}{2}(b(z)\pi(z))'' = 0,$$
$$-a(z)\pi(z) + \frac{\sigma}{2}(b(z)\pi(z))' = 0.$$

Решая данную систему уравнений мы получаем плотность распределения вероятностей $\pi(z)$ нормированного числа заявок на орбите:

$$\pi(z) = \frac{C}{b(z)} exp\{\frac{2}{\sigma}\int\limits_0^z \frac{a(x)}{b(x)}dx\}. \tag{38}$$

После чего можем получить дискретное распределение вероятностей:

$$P(i) = \pi(\sigma i)/\sum_{i=0}^{\infty}\pi(\sigma i). \tag{39}$$

Которое называем диффузионной аппроксимацией дискретного распределения вероятностей заявок на орбите для изучаемой системы.

Нетрудно показать, что условие существования стационарного режима рассматриваемой системы является неравенство:

$$\lambda < Nr_0\,(\frac{q}{\mu_1} + \frac{1-q}{\mu_2}). \tag{40}$$

Введем следующую замену для того, чтобы среднее время обслуживания равнялось единице.

$$q = \frac{\mu_1(1 - \mu_2)}{\mu_1 - \mu_2}$$

В таком случаее неравество (40) имеет вид:

$$\lambda < N r_0.$$

Приведем в пример графки a(x), b(x), $P_1(i)$, с различными значениями значениями.
Возьем следующие значения $N = 2$ $r_0 = 0.7$, $r_1 = 0.2$, $r_2 = 0.1$, λ=0.8, μ_1=0.6, μ_2=1.5, q=0.25.

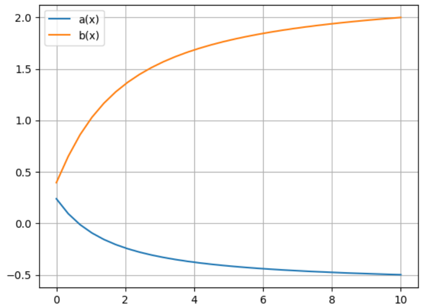

Рис. 2: Коэффициенты переноса и диффузии

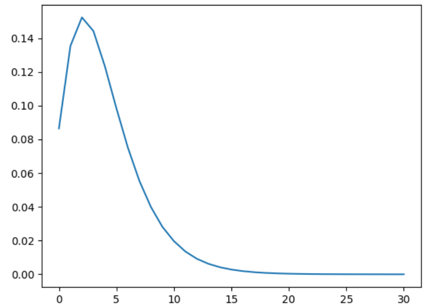

Рис. 3: Плотность распределения вероятностей числа заявок на орбите

$N = 10$ $r_0 = 0.7$, $r_1 = 0.2$, $r_2 = 0.1$, λ=0.8, μ_1=0.6, μ_2=1.5, q=0.25.

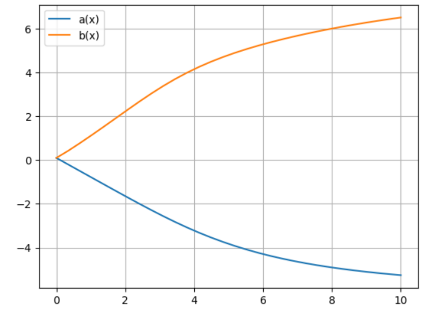

Рис. 4: Коэффициенты переноса и диффузии

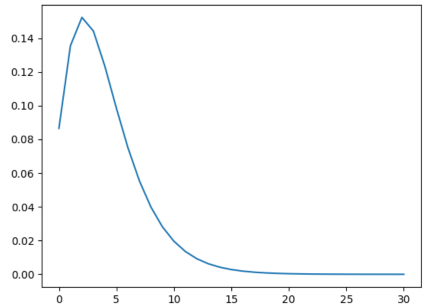

Рис. 5: Плотность распределения вероятностей числа заявок на орбите

Данные графики были построены с помощью библиотек NymPy[20](для a(x) и b(x)) и SimPy[16] языка Python.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nazarov, A.A. Method pf asymptotic diffusuon analysis of queueing sistem M|M|N with feedbeck//LNCS. /A.A. Nazarov, S.V. Paul, Pavlova E.A. Pavlova. – 2020. –p. 131-143.

2. Назаров, А.А. Теория вероятностей и случайных процессов / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. - Томск : Изд-во научно-технической литературы, 2006. - 199 с.

3. Krishna C.M. and Lee Y.H. A study of two-phase service // Operations Research Letters. – 1990. – Vol. 9. – P. 91–97.

4. Гнеденко, Б.В. Введение в теорию массового обслуживания/ Б.В. Гнеденко, К.И. Николаевич. – М.:КомКнига, 2005. – 400 с.

5. Назаров, А.А. Теория массового обслуживания/ А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. – Томск : Изд-во научно-технической литературы, 2010. - 228 с.

6. Гельфонд, А.О. Исчисление конечных разностей: учебное пособие / Гельфонд А.О. – М.: КомКнига, 2006. – 376 с.

7. Моисеев, А.Н. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания / А.Н. Моисеев, Назаров А.А. – Томск: Изд-во научно-технической литературы, 2015. – 240 с.

8. Назаров, А.А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А.А. Назаров, Моисеева С. П. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

9. Любина, Т.В. Исследование математических моделей динамических и адаптивных RQ-систем с входящим MMPP-потоком: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Томск., 2013. – 163 с.

10. Ивченко, Г.И. Теория массового обслуживания: учебное пособие / Г.И. Ивченко, В.А. Каштанов, И.Н. Коваленко. – М. : Высшая школа , 1982 – 296 с.

11. Artalejo, J.R. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach / J. R. Artalejo, A. Gomez-Corral. Springer, 2008.–309 p.

12. Falin, G.I. Retrial queues / G.I. Falin, J.G.C. Templeton. London : Chapman Hall, 1997.–328

13.Назаров А. А. Асимптотический анализ двухфазной RQ-системы M|M|1 в условии большой задержки на орбите / А. А. Назаров, А. А. Анисимова // Марчуковские научные чтения – 2017, 25 июня - 14 июля 2017 года : труды. Новосибирск, 2017. С. 641-647.
URL: http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000627552

14.Назаров А. А. Асимптотический анализ двухфазной RQ-системы M|M|1 в условии большой задержки заявок на орбите / А. А. Назаров, А. А. Анисимова // Материалы V Международной молодежной научной конференции ”Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем Томск, 19-20 мая 2017 г. Томск, 2017. С. 81-88 (Труды Томского государственного университета ; т. 301 : Серия физико-математическая.

URL: http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000619465

15.SymPy 1.6 documentation:Matrices[Электронный ресурс].
–https://docs.sympy.org/latest/modules/matrices/matrices.html/ (дата обращения 28.10.2020.).

16. GitHub:checkPhase2EquationR[Электронный ресурс].
- https://github.com/ValeriyaRyzhikova/checkPhase2EquationR (дата обращения: 01.06.2021).

17. GitHub:calculationPi_a_b[Электронный ресурс].
- https://github.com/ValeriyaRyzhikova/calculationPi_a_b (дата обращения: 01.06.2021).

18. GitHub:diplom2Phase[Электронный ресурс].
- https://github.com/ValeriyaRyzhikova/diplom2Phase (дата обращения: 01.06.2021).

19.NumPy 1.2 documentation:Linear algebra[Электронный ресурс].
–https://numpy.org/doc/1.20/reference/routines.linalg.html (дата обращения 10.04.2021.).