Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Институт прикладной математики и компьютерных наук

ОТЧЁТ ПО ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРАКТИКЕ

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ И ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика,
направленность(профиль) «Прикладная математика и информатика»

Рыжикова Валерия Валентиновна

Руководитель ВКР
доктор техн. наук, профессор
_______________Назаров А.А.
подпись

Автор работы
студентка группы №931720
_______________Рыжикова В.В.
подпись
«_____»_______2021г.

Томск 2021 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Системы массового обслуживания с орбитами, также называемые RQ-системы, обладают большой популярностью и широко рассмотрены в литературе [6, 8, 12, 13].

Очень похожая работа была также рассмотрена в [18]. В ней, так же как и в этой работе, гиперэкспаненциальное время обслуживания и, если заявка пришла в тот момент, когда все приборы заняты, то она так же отправляется на орбиту, где ожидает время, распределённое по экспоненциальному закону. Однако, после завершения обслуживания, в работе [18] заявка покидает в систему, в то время как в данной работе заявка может также уйти на орбиту или же мгновенно перейти на повторное обслуживание. И так же, с помощью асимптотически диффузионного анализа был найден ряд распределения количества заявок на орбите.

В данной работе рассматривется двухфазна система $M|H_2|N$ с обратной связью.

Исследование двухфазных систем проводилось [7]. Но принципиальное отличие предложенной системы состоит в том, что в системе, исследуемой в [7] фазы расположены последовательно, с орбиты заявка поступает только на вторую фазу, обратной связи нет. А в данной работе модель предполагает, что заявка из входящего потока выбирает одну из двух фаз обслуживания с определённой вероятностью и имеется обратная связь.

В первой главе исследуется система $M|H_2|2$ методом асимптотического анализа в асимптотическом условии предельно малой интенсивности обращений заявок с орбиты. В стационарном режиме получено распределение вероятностей числа занятых приборов на первой и второй фазе, а также построена аппроксимация ряда распределения вероятностей числа заявок на орбите. Приведены численные примеры. В первой главе для получения результата был рассмотрен одномерный процесс, характеризующий состояние блока обслуживания, однако во второй главе для исследования системы $M|H_2|N$ рассматривается двумерный процесс, характеризующий состояние блока обслуживания и орбиты. Для исследования применялся метод асимптотически диффузионного анализа, использующее асимптотическое условие предельное малой интенсивности заявки на орбите [1]. Для системы $M|H_2|N$ стационарном режиме найдено распределение вероятностей числа занятых приборов на первой и второй фазах, а также построена аппроксимация ряда распределения вероятностей числа заявок на орбите в стационарном режиме. Приведены результаты численных экспериментов и сравнения с результатами имитационного моделирования.

Но в нашем исследовании намного больше пригодилась статья [19].

Также помогли книги [1,2,3,5,9,10,11] и статья [4] для ознакомления с различными методами.

Цель дипломной работы: построить ряд распределения, или его апроксимацию, для количества заявок на орите для RQ-системы $M|H_2|N$ в стационарном режиме.

Задачи:
1. Построить математическую модель системы $M|H_2|N$ с обратной связью.
2. Составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для системы $M|H_2|N$ с обратной связью.
3. С помощью метода асимптотического анализа найти коэффициенты переноса и диффузии дифференциальных уравнений системы $M|H_2|N$ с обратной связью.
4. С помощью метода асимптотически диффузионного анализа вычислить ряд распределений вероятностей количества заявок на орбите.

1 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Рассмотрим систему массового обслуживания $M|H_2|N$ с обратной связью (Рисунок 1).

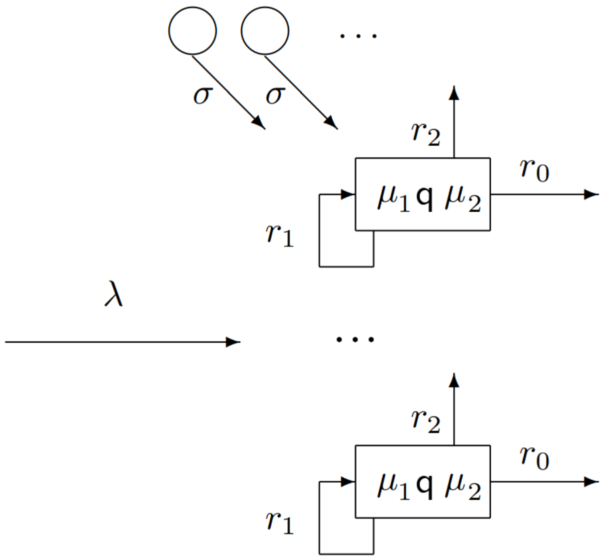

Рисунок 1 – Система массового обслуживания $M|H_2|N$ с обратной связью

Система имеет N обслуживающих приборов. Заявки поступают в систему согласно простейшему потоку с параметром λ. Каждая заявка занимеет один из свободных приборов на время, распределенное по гиперэкспоненциальному закону. Это означает, что заявка на приборе с вероятностью q поступает на первую фазу, с экспоненциальным распределением с параметром μ_1, и с вероятность $1-q$ на вторую, с параметром μ_2.

После завершения обслуживания заявка с вероятностью r_0 покидает систему, с вероятностью r_1 мгновенно поступает на повторное обслуживание и с вероятностью r_2 уходит на орбиту. Также, если на момент поступления заявки из потока все приборы заняты, то заявка уходит на орбиту. Через время, продолжительность которого распределена по экспоненциальному закону с пареметром σ, заявка вновь обращается с орбиты к приборам.

Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t, $n_1(t)$ – число приборов занятых на первой фазе в момент времени t, $n_2(t)$ – число приборов занятых на второй фазе в момент времени t.

Рассмотрим трехмерный процесс $\{n_1(t), n_2(t), i(t)\}$. Под состоянием системы будем понимать состояние процесса $\{n_1(t), n_2(t), i(t)\}$ в момент времени t.

Обозначим вероятности следующим образом

$$P(n_1(t) = n_2, n_2(t) = n_2, i(t) = i) = P_{n_1,n_2}(i,t)$$

вероятность того, что n_1 – приборов занято на первой фазе, а n_2 – приборов занято на второй фазе. При этом $P_{n_1,n_2}(i,t) = 0$, если $n_1 < 0$, $n_2 < 0$ или $n_1 + n_2 > N$.

Для решения будем применять методы асимптотически анализа предложенные в [5, 8, 12, 19] и асимптотически диффузионного анализа предложенные в [19].

2 УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА

Для данных вероятностей составим систему уравнений в конечных разностях [1, 2, 11]. Для упрощения выражений введем индикатор

$$E_a^b = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b, \end{cases}$$

$$\overline{E}_a^b = 1 - E_a^b.$$

$$\begin{aligned} P_{n_1,n_2}(i, t+\Delta t) =& (1 - \Delta t(\lambda + i\sigma\overline{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2))P_{n_1,n_2}(i,t) + \\ &+ \Delta t\mu_1 r_1 q n_1 P_{n_1,n_2}(i,t) + \Delta t\mu_2(1-q)r_1 n_2 P_{n_1,n_2}(i,t) + \\ &+ \Delta t\lambda E_{n_1+n_2}^N P_{n_1,n_2}(i-1,t) + \\ &+ \Delta t\lambda q P_{n_1-1,n_2}(i,t) + \Delta t(i+1)\sigma q P_{n_1-1,n_2}(i+1,t) + \\ &+ \Delta t\lambda(1-q)P_{n_1,n_2-1}(i,t) + \Delta t(i+1)\sigma(1-q)P_{n_1,n_2-1}(i+1,t) + \\ &+ \Delta t\mu_1 r_0(n_1+1)P_{n_1+1,n_2}(i,t) + \Delta t\mu_1 r_2(n_1+1)P_{n_1+1,n_2}(i-1,t) + \\ &+ \Delta t\mu_2 r_0(n_2+1)P_{n_1,n_2+1}(i,t) + \Delta t\mu_2 r_2(n_2+1)P_{n_1,n_2+1}(i-1,t) + \\ &+ \Delta t\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)P_{n_1+1,n_2-1}(i,t) \\ &+ \Delta t\mu_2 r_1 q(n_2+1)P_{n_1-1,n_2+1}(i,t) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Расскроем скобки, разделим на каждое уравнение на Δt, получим

$$\begin{aligned} \frac{P_{n_1,n_2}(i,t+\Delta t) - P_{n_1,n_2}(i,t)}{\Delta t} =& -(\lambda + i\sigma\overline{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)P_{n_1,n_2}(i,t) + \\ &+ n_1\mu_1 r_1 q P_{n_1,n_2}(i,t) + \mu_2 r_1(1-q)n_2 P_{n_1,n_2}(i,t) + \\ &+ \lambda E_{n_1+n_2}^N P_{n_1,n_2}(i-1,t) + \lambda q P_{n_1-1,n_2}(i,t) + \\ &+ (i+1)\sigma q P_{n_1-1,n_2}(i+1,t)\lambda(1-q)P_{n_1,n_2-1}(i,t) + \\ &+ (i+1)\sigma(1-q)P_{n_1,n_2-1}(i+1,t) + \\ &+ \mu_1 r_0(n_1+1)P_{n_1+1,n_2}(i,t) + \\ &+ \mu_1 r_2(n_1+1)P_{n_1+1,n_2}(i-1,t) + \\ &+ \mu_2 r_0(n_2+1)P_{n_1,n_2+1}(i,t) + \\ &+ \mu_2 r_2(n_2+1)P_{n_1,n_2+1}(i-1,t) + \\ &+ \mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)P_{n_1+1,n_2-1}(i,t) + \\ &+ \mu_2 r_1 q(n_2+1)P_{n_1-1,n_2+1}(i,t) + o(\Delta t)/\Delta t. \end{aligned}$$

Устремим $\Delta t \to 0$, получим

$$\begin{aligned}
\frac{dP_{n_1,n_2}(i,t)}{\partial t} = & -(\lambda + i\sigma \overline{E}^N_{n_1+n_2} + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)P_{n_1,n_2}(i,t) + \mu_1 r_1 q n_1 P_{n_1,n_2}(i,t) + \\
& + \mu_2 r_1(1-q) n_2 P_{n_1,n_2}(i,t) + \lambda E^N_{n_1+n_2} P_{n_1,n_2}(i-1,t) + \\
& + \lambda q P_{n_1-1,n_2}(i,t) + (i+1)\sigma q P_{n_1-1,n_2}(i+1,t) + \\
& + \lambda(1-q) P_{n_1,n_2-1}(i,t) + (i+1)\sigma(1-q) P_{n_1,n_2-1}(i+1,t) + \\
& + \mu_1 r_0 (n_1+1) P_{n_1+1,n_2}(i,t) + \mu_1 r_2 (n_1+1) P_{n_1+1,n_2}(i-1,t) + \\
& + \mu_2 r_0 (n_2+1) P_{n_1,n_2+1}(i,t) + \mu_2 r_2 (n_2+1) P_{n_1,n_2+1}(i-1,t) + \\
& + \mu_1 r_1 (1-q)(n_1+1) P_{n_1+1,n_2-1}(i,t) + \mu_2 r_1 q (n_2+1) P_{n_1-1,n_2+1}(i,t).
\end{aligned}$$

Введем частичные характеристические функции

$$H_{n_1,n_2}(u,t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{iuj} P_{n_1,n_2}(i,t).$$

Тогда уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} = & -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) H_{n_1,n_2}(u,t) + j\sigma \overline{E}^N_{n_1+n_2} \frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u} + \\
& + \mu_1 r_1 q n_1 H_{n_1,n_2}(u,t) + \mu_2 r_1 (1-q) n_2 H_{n_1,n_2}(u,t) + \\
& + \lambda e^{ju} E^N_{n_1+n_2} H_{n_1,n_2}(u,t) + \lambda q H_{n_1-1,n_2}(u,t) - \\
& - j\sigma q e^{-ju} \frac{\partial H_{n_1-1,n_2}(u,t)}{\partial u} + \\
& + \lambda(1-q) H_{n_1,n_2-1}(u,t) - j\sigma(1-q) e^{-ju} \frac{\mathrm{d}H_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\mathrm{d}u} + \\
& + \mu_1 r_0 (n_1+1) H_{n_1+1,n_2}(u,t) + \mu_1 r_2 e^{ju} (n_1+1) H_{n_1+1,n_2}(u,t) + \\
& + \mu_2 r_0 (n_2+1) H_{n_1,n_2+1}(u,t) + \mu_2 r_2 e^{ju} (n_2+1) H_{n_1,n_2+1}(u,t) + \\
& + \mu_1 r_1 (1-q)(n_1+1) H_{n_1+1,n_2-1}(u,t) + (n_2+1)\mu_2 r_1 q H_{n_1-1,n_2+1}(u,t).
\end{aligned}$$

Просуммируем по n_1 и n_2

$$
\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} = & -\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t) + j\sigma\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\overline{E}_{n_1+n_2}^{N}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}- \\
& -\mu_1\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t) - \mu_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t)+ \\
& +\mu_1r_1q\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t)+ \\
& +\mu_2r_1(1-q)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t)+ \\
& +\lambda e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}E_{n_1+n_2}^{N}H_{n_1,n_2}(u,t)+ \\
& +\lambda q\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}H_{n_1-1,n_2}(u,t) - j\sigma q e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1-1,n_2}(u,t)}{\partial u}+ \\
& +\lambda(1-q)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}H_{n_1,n_2-1}(u,t)u- \\
& -j\sigma(1-q)e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\partial u}+ \\
& +\mu_1r_0\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t)+ \\
& +\mu_1r_2e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t)+ \\
& +\mu_2r_0\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+ \\
& +\mu_2r_2e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+ \\
& +\mu_1r_1(1-q)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_1+1)H_{n_1+1,n_2-1}(u,t)+ \\
& +\mu_2r_1q\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_2+1)H_{n_1-1,n_2+1}(u,t).
\end{aligned}
$$

Преобразуем

$$
\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} = & -\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t) + +j\sigma\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}- \\
& -\mu_1(r_0+r_2)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t)+ \\
& -\mu_2(r_0+r_2)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t)+ \\
& +\lambda e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)+ \\
& +\lambda q\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_2}H_{n_1,n_2}(u,t) - j\sigma q e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}+ \\
& +\lambda(1-q)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)- \\
& -j\sigma(1-q)e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}+ \\
& +\mu_1r_0\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_1r_2e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t)+ \\
& +\mu_2r_0\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2r_2e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t).
\end{aligned}
$$

Приведем подобные слагаемые

$$
\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} = & \lambda(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)- \\
& -j\sigma q(e^{-ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}- \\
& -j\sigma(1-q)(e^{-ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}+ \\
& +\mu_1r_2(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t)+ \\
& +\mu_2r_2(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} =&\lambda(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)-\\
&-j\sigma(e^{-ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\
&+\mu_1 r_2(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1 H_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\mu_2 r_2(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2 H_{n_1,n_2}(u,t).
\end{aligned}
$$

Вынесем $(e^{ju}-1)$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} =&(e^{ju}-1)\Bigg\{\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+j\sigma e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\
&+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1 H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2 H_{n_1,n_2}(u,t)\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Получим уравнения

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} = -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) H_{n_1,n_2}(u,t) + j\sigma \overline{E}^N_{n_1+n_2} \frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u} + \\
&+ \mu_1 r_1 q n_1 H_{n_1,n_2}(u,t) + \mu_2 r_1 (1-q) n_2 H_{n_1,n_2}(u,t) + \\
&+ \lambda e^{ju} E^N_{n_1+n_2} H_{n_1,n_2}(u,t) + \\
&+ \lambda q H_{n_1-1,n_2}(u,t) - j\sigma q e^{-ju} \frac{\partial H_{n_1-1,n_2}(u,t)}{\partial u} + \\
&+ \lambda(1-q) H_{n_1,n_2-1}(u,t) - j\sigma(1-q) e^{-ju} \frac{\mathrm{d} H_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\mathrm{d}u} + \\
&+ \mu_1 r_0 (n_1+1) H_{n_1+1,n_2}(u,t) + \mu_1 r_2 e^{ju} (n_1+1) H_{n_1+1,n_2}(u,t) + \\
&+ \mu_2 r_0 (n_2+1) H_{n_1,n_2+1}(u,t) + \mu_2 r_2 e^{ju} (n_2+1) H_{n_1,n_2+1}(u,t) + \\
&+ \mu_1 r_1 (1-q)(n_1+1) H_{n_1+1,n_2-1}(u,t) + \\
&+ (n_2+1) \mu_2 r_1 q H_{n_1-1,n_2+1}(u,t),
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} = (e^{ju}-1) \Bigg\{ \lambda \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} H_{n_1,n_2}(u,t) + \\
&+ j\sigma e^{-ju} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u} + \\
&+ \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1,n_2}(u,t) + \\
&+ \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1,n_2}(u,t) \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

3 ПЕРВЫЙ ЭТАП АСИМТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Будем решать систему уравнений (1) и уравнение (2) методом асимптотического анализа. Сделаем замены

$$\sigma = \varepsilon, \tau = t\varepsilon, u = \varepsilon w, H_{n_1,n_2}(u,t) = F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon).$$

Тогда мы можем переписать систему уравнений (1) и уравнение (2)

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = -(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + j\overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} +\\
&+\mu_1 r_1 q n_1 F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \mu_2 r_1(1-q)n_2 F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\lambda e^{j\varepsilon w}E^N_{n_1+n_2}F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \lambda q F_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)-\\
&-jqe^{-j\varepsilon w}\frac{\partial F_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \lambda(1-q)F_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)-\\
&-j(1-q)e^{-j\varepsilon w}\frac{\mathrm{d}F_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)}{\mathrm{d}w} + \mu_1 r_0(n_1+1)F_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_1 r_2 e^{j\varepsilon w}(n_1+1)F_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \mu_2 r_0(n_2+1)F_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_2 r_2(n_2+1)e^{j\varepsilon w}F_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)F_{n_1+1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_2 r_1 q(n_2+1)F_{n_1-1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon),\\
&\varepsilon\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = (e^{j\varepsilon w}-1)\Bigg\{\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+je^{-j\varepsilon w}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\\
&+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)\Bigg\}.
\end{aligned}\tag{3}$$

При условии, что $\varepsilon \to 0$, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2.1. Компоненты $R_{n_1,n_2}(x)$ распределения вероятностей числа приборов, занятых на первой и второй фазе имеет вид

$$R_{n_1,n_2}(x) = \frac{L_{n_1,n_2}(x)}{c(x)}, \tag{4}$$

где

$$L_{n_1,n_2}(x) = (\mu_1\mu_2(1-r_1))^{N-(n_1+n_2)} \frac{N!}{(n_1+n_2)!} C_{n_1+n_2}^{n_2} (\mu_1(1-q))^{n_2} (\mu_2 q)^{n_1} (\lambda + x)^{n_1+n_2},$$

$$c(x) = \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} L_{n_1,n_2}.$$

$$\begin{aligned} x = x(\tau); x'(\tau) = a(x) = &\lambda \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} R_{n_1,n_2} - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} R_{n_1,n_2} + \\ &+ \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 R_{n_1,n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 R_{n_1,n_2}. \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим первое уравнение системы (3) в пределе $\varepsilon \to 0$, обозначим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) = F_{n_1,n_2}(w,\tau)$$

и получим

$$\begin{aligned} &-(\lambda + n_1\mu_1 + n_2\mu_2) F_{n_1,n_2}(w,\tau) + j\overline{E}_{n_1+n_2}^{N} \frac{\partial F_{n_1,n_2}((w,\tau)}{\partial w} + \\ &+ \mu_1 r_1 q n_1 F_{n_1,n_2}(w,\tau) + \mu_2 r_1 (1-q) n_2 F_{n_1,n_2}(w,\tau) + \\ &+ \lambda E_{n_1+n_2}^{N} F_{n_1,n_2}(w,\tau) + \lambda q F_{n_1-1,n_2}(w,\tau) - \\ &- jq \frac{\partial F_{n_1-1,n_2}(w,\tau)}{\partial w} + \lambda(1-q) F_{n_1,n_2-1}(w,\tau) - \\ &- j(1-q) \frac{\mathrm{d}F_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\mathrm{d}w} + \mu_1 r_0 (n_1+1) F_{n_1+1,n_2}(w,\tau) + \\ &+ \mu_1 r_2 (n_1+1) F_{n_1+1,n_2}(w,\tau) + \mu_2 r_0 (n_2+1) F_{n_1,n_2+1}(w,\tau) + \\ &+ \mu_2 r_2 (n_2+1) F_{n_1,n_2+1}(w,\tau) + \\ &+ \mu_1 r_1 (1-q)(n_1+1) F_{n_1+1,n_2-1}(w,\tau) + \\ &+ \mu_2 r_1 q (n_2+1) F_{n_1-1,n_2+1}(w,\tau) = 0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Находим решение уравнения (5) в виде $F_{n_1,n_2}(w,\tau) = L_{n_1,n_2} e^{jwx(\tau)}$. Получим следующую систему

$$
\begin{aligned}
&- (\lambda + \mu_1 n_1 + n_2\mu_2) L_{n_1,n_2} - x(\tau)\overline{E}^N_{n_1+n_2} L_{n_1,n_2} + \\
&+ \mu_1 r_1 q n_1 L_{n_1,n_2} + \mu_2 r_1 (1-q) n_2 L_{n_1,n_2} + \\
&+ \lambda E^N_{n_1+n_2} L_{n_1,n_2} + \lambda q L_{n_1-1,n_2} + \\
&+ x(\tau) q L_{n_1-1,n_2} + \lambda(1-q) L_{n_1,n_2-1} + \\
&+ x(\tau)(1-q) L_{n_1,n_2-1} + \mu_1 r_0 (n_1+1) L_{n_1+1,n_2} + \\
&+ \mu_1 r_2 (n_1+1) L_{n_1+1,n_2} + \mu_2 r_0 (n_2+1) L_{n_1,n_2+1} + \\
&+ \mu_2 r_2 (n_2+1) L_{n_1,n_2+1} + \\
&+ \mu_1 r_1 (1-q)(n_1+1) L_{n_1+1,n_2-1} + \\
&+ \mu_2 r_1 q (n_2+1) L_{n_1-1,n_2+1} = 0,
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
&L_{n_1,n_2}\{-(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) - x(\tau)\overline{E}^N_{n_1+n_2} + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1-q) n_2 + \lambda E^N_{n_1+n_2}\} + \\
&+ L_{n_1-1,n_2}\{\lambda q + x(\tau) q\} + \\
&+ L_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1-q) + x(\tau)(1-q)\} + \\
&+ L_{n_1+1,n_2}\{\mu_1 r_0 (n_1+1) + \mu_1 r_2 (n_1+1)\} + \\
&+ L_{n_1,n_2+1}\{\mu_2 r_0 (n_2+1) + \mu_2 r_2 (n_2+1)\} + \\
&+ L_{n_1+1,n_2-1} \mu_1 r_1 (1-q)(n_1+1) + \\
&+ L_{n_1-1,n_2+1} \mu_2 r_1 q (n_2+1) = 0.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Чтобы доказать утверждение (4) воспользуемся языком программирования Python и символьным исчислением библиотеки SymPy [21], реализация данной части доказательства выложена в открытый доступ [15]. Однако, чтобы сделать это, нужно избавится от индикаторов, поэтому рассмотрим частные случаи.

$n_1 = 0, n_2 = 0$:

$$
\begin{aligned}
&L_{0,0}\{-\lambda - x(\tau)\} + \\
&+ L_{1,0}\{\mu_1 r_0 + \mu_1 r_2\} + \\
&+ L_{0,1}\{\mu_2 r_0 + \mu_2 r_2\} = 0.
\end{aligned} \tag{7}
$$

$n_1 = 0, n_2 > 0, n_1 + n_2 < N$:

$$
\begin{aligned}
&L_{0,n_2}\{-(\lambda + \mu_2 n_2) - x(\tau) + \mu_2 r_1 (1-q) n_2\} + \\
&+ L_{0,n_2-1}\{\lambda(1-q) + x(\tau)(1-q)\} + \\
&+ L_{1,n_2}\{\mu_1 r_0 + \mu_1 r_2\} + \\
&+ L_{0,n_2+1}\{\mu_2 r_0 (n_2+1) + \mu_2 r_2 (n_2+1)\} + \\
&+ L_{1,n_2-1} \mu_1 r_1 (1-q) = 0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

$n_1 > 0, n_2 = 0, n_1 + n_2 < N$:

$$\begin{aligned}
&L_{n_1,0}\{-(\lambda + \mu_1 n_1) - x(\tau) + \mu_1 r_1 q n_1\}+\\
&+ L_{n_1-1,0}\{\lambda q + x(\tau)q\}+\\
&+ L_{n_1+1,0}\{\mu_1 r_0(n_1+1) + \mu_1 r_2(n_1+1)\}+\\
&+ L_{n_1,1}\{\mu_2 r_0 + \mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+ L_{n_1-1,n_2+1}\mu_2 r_1 q(n_2+1) = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

$n_1 > 0, n_2 > 0, n_1 + n_2 < N$:

$$\begin{aligned}
&L_{n_1,n_2}\{-(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) - x(\tau) + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1(1-q)n_2\}+\\
&+ L_{n_1-1,n_2}\{\lambda q + x(\tau)q\}+\\
&+ L_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1-q) + x(\tau)(1-q)\}+\\
&+ L_{n_1+1,n_2}\{\mu_1 r_0(n_1+1) + \mu_1 r_2(n_1+1)\}+\\
&+ L_{n_1,n_2+1}\{\mu_2 r_0(n_2+1) + \mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+ L_{n_1+1,n_2-1}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+ L_{n_1-1,n_2+1}\mu_2 r_1 q(n_2+1) = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

$n_1 = 0, n_2 = N :$

$$\begin{aligned}
&L_{0,N}\{-(\lambda + N\mu_2) + N\mu_2 r_1(1-q) + \lambda\}+\\
&+ L_{0,N-1}\{\lambda(1-q) + x(\tau)(1-q)\}+\\
&+ L_{1,N-1}\mu_1 r_1(1-q) = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

$n_1 = N, n_2 = 0 :$

$$\begin{aligned}
&L_{N,0}\{-N\mu_1 + N\mu_2 r_1 q\}+\\
&+ L_{N-1,0}\{\lambda q + x(\tau)q\}+\\
&+ L_{N-1,1}\mu_2 r_1 q = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

$n_1 + n2 = N, n1 \neq N, n2 \neq N$:

$$\begin{aligned}
&L_{n_1,n_2}\{-(\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1(1-q)n_2\}+\\
&+ L_{n_1-1,n_2}\{\lambda q + x(\tau)q\}+\\
&+ L_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1-q) + x(\tau)(1-q)\}+\\
&+ L_{n_1+1,n_2-1}(n_1+1)\mu_1 r_1(1-q)+\\
&+ L_{n_1-1,n_2+1}\mu_2 r_1 q(n_2+1) = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Подставляя (4) в предложенные равенства, получим тождество. Следовательно (4) является решением. Заметим, что

$$\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} R_{n_1,n_2} = 1.$$

Для этого разделим полученное решение на сумму всех L_{n_1,n_2}

$$c = \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} L_{n_1,n_2}.$$

Получим

$$R_{n_1,n_2} = \frac{L_{n_1,n_2}}{c}.$$

Найдем $x = x(\tau)$. Рассмотрим второе уравнение (3) в пределе $\varepsilon \to 0$.

$$\begin{aligned}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau)}{\partial \tau} =& jw\Bigg\{\lambda \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \\ & s + j\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau)}{\partial w} + \\ & + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 F_{n_1,n_2}(w,\tau) + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 F_{n_1,n_2}(w,\tau)\Bigg\}.\end{aligned}$$

Выполним замену $F_{n_1,n_2}(w,\tau) = R_{n_1,n_2} e^{jwx(\tau)}$, тогда

$$\begin{aligned}x'(\tau) =& \lambda \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} R_{n_1,n_2} - x(\tau)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} R_{n_1,n_2} + \\ & + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 R_{n_1,n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 R_{n_1,n_2}.\end{aligned}$$

Обозначим через

$$\begin{aligned}x'(\tau) = a(x) =& \lambda \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} R_{n_1,n_2} - x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} R_{n_1,n_2} + \\ & + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 R_{n_1,n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 R_{n_1,n_2}.\end{aligned} \tag{14}$$

Теорема доказана.

4 ВТОРОЙ ЭТАП АСИМТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В системе уравнений (1) и уравнение (2) сделаем замену

$$H_{n_1,n_2}(u,t) = e^{j\frac{u}{\sigma}x(\sigma t)}H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t),$$

получим систему

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}c(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t) = -(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+j\sigma\overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u} - x(\sigma t)\overline{E}^N_{n_1+n_2}H^{(1)}_{n_1,n_2}+\\
&+\mu_1 r_1 q n_1 H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t) + \mu_2 r_1(1-q)n_2 H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\lambda e^{ju}E^N_{n_1+n_2}H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\lambda q H^{(1)}_{n_1-1,n_2}(u,t) - j\sigma q e^{-ju}\frac{\partial H^{(1)}_{n_1-1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\
&+qe^{-ju}x(\sigma t)H^{(1)}_{n_1-1,n_2}(u,t)+\\
&+\lambda(1-q)H^{(1)}_{n_1,n_2-1}(u,t) - j\sigma(1-q)e^{-ju}\frac{\mathrm{d}H^{(1)}_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\mathrm{d}u}+\\
&+(1-q)e^{-ju}x(\sigma t)H^{(1)}_{n_1,n_2-1}(u,t)\\
&+\mu_1 r_0(n_1+1)H^{(1)}_{n_1+1,n_2}(u,t)+\\
&+\mu_1 r_2 e^{ju}(n_1+1)H^{(1)}_{n_1+1,n_2}(u,t)+\\
&+\mu_2 r_0(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\\
&+\mu_2 r_2 e^{ju}(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\\
&+\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)H^{(1)}_{n_1+1,n_2-1}(u,t)+\\
&+(n_2+1)\mu_2 r_1 q H^{(1)}_{n_1-1,n_2+1}(u,t),\\
&\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\left\{\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\right\} =\\
&=(e^{ju}-1)\Bigg\{\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\Bigg[j\sigma\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}-\\
&-x(\sigma t)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\Bigg]+\\
&+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1 H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2 H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\Bigg\}.
\end{aligned}\tag{15}$$

С учетом (14) перепишем систему (15)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}c(u,t)}{\partial t}+juа(x)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)=-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+j\sigma\overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}-x\overline{E}^N_{n_1+n_2}H^{(1)}_{n_1,n_2}+\\
&+\mu_1 r_1 q n_1 H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2 r_1(1-q)n_2 H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\lambda e^{ju}E^N_{n_1+n_2}H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\lambda q H^{(1)}_{n_1-1,n_2}(u,t)-j\sigma q e^{-ju}\frac{\partial H^{(1)}_{n_1-1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\
&+q e^{-ju}xH^{(1)}_{n_1-1,n_2}(u,t)+\\
&+\lambda(1-q)H^{(1)}_{n_1,n_2-1}(u,t)-j\sigma(1-q)e^{-ju}\frac{\mathrm{d}H^{(1)}_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\mathrm{d}u}+\\
&+(1-q)e^{-ju}xH^{(1)}_{n_1,n_2-1}(u,t)+\\
&+\mu_1 r_0(n_1+1)H^{(1)}_{n_1+1,n_2}(u,t)+\\
&+\mu_1 r_2 e^{ju}(n_1+1)H^{(1)}_{n_1+1,n_2}(u,t)+\\
&+\mu_2 r_0(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\\
&+\mu_2 r_2 e^{ju}(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\\
&+\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)H^{(1)}_{n_1+1,n_2-1}(u,t)+\\
&+(n_2+1)\mu_2 r_1 q H^{(1)}_{n_1-1,n_2+1}(u,t),\\
&\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\left\{\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t}+juа(x)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\right\}=(e^{ju}-1)\Bigg\{\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\\
&+e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\left[\sigma j\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}-xH^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\right]+\\
&+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1 H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2 H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Обозначив $\sigma=\varepsilon^2$ и сделав следующие замены в (16)

$$
\tau=t\varepsilon^2, u=\varepsilon w, H^{(1)}_{n_1,n_2}(u1,t)=F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon),
$$

можем написать

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^2 \frac{\partial F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial t} + j\varepsilon w a F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) = -(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ j\varepsilon \overline{E}^N_{n_1+n_2} \frac{\partial F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} - x\overline{E}^N_{n_1+n_2} F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_1 r_1 q n_1 F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \mu_2 r_1 (1-q) n_2 F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \lambda e^{j\varepsilon w} E^N_{n_1+n_2} F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \lambda q F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) - j\varepsilon q e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\\
&+ q e^{-ju} x F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \lambda(1-q) F^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon) - j\varepsilon(1-q) e^{-j\varepsilon w} \frac{\mathrm{d}F^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)}{\mathrm{d}w}+\\
&+ (1-q) e^{-j\varepsilon w} x F^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_1 r_0 (n_1+1) F^{(1)}_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_1 r_2 e^{j\varepsilon w} (n_1+1) F^{(1)}_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_2 r_0 (n_2+1) F^{(1)}_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_2 r_2 e^{j\varepsilon w} (n_2+1) F^{(1)}_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_1 r_1 (1-q)(n_1+1) F^{(1)}_{n_1+1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ (n_2+1)\mu_2 r_1 q F^{(1)}_{n_1-1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon),\\
&\varepsilon^2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \left\{ \frac{\partial F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial t} + j\varepsilon a F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) \right\} =\\
&= (e^{j\varepsilon w}-1)\Bigg\{ \lambda \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ e^{-j\varepsilon w} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \left[j\varepsilon \frac{\partial F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial u} - x F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) \right]\\
&+ \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Перепишем первое уранение (17) с учетом разложения

$$
e^{j\varepsilon w} = 1 + (j\varepsilon w) + O(\varepsilon^2), \tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
j\varepsilon w a F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) = &- (\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ j\varepsilon\overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} - x\overline{E}^N_{n_1+n_2}F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_1 r_1 q n_1 F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \mu_2 r_1(1-q)n_2 F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \lambda E^N_{n_1+n_2}F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + j\varepsilon w\lambda E^N_{n_1+n_2}F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \lambda q F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) - \varepsilon q\frac{\partial F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\\
&+ q x F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) - j\varepsilon w q x F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \lambda(1-q)F^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon) - j\varepsilon(1-q)\frac{\mathrm{d}F^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)}{\mathrm{d}w}+\\
&+ (1-q)xF^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon) - j\varepsilon w(1-q)xF^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_1 r_0(n_1+1)F^{(1)}_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_1 r_2(n_1+1)F^{(1)}_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + j\varepsilon w\mu_1 r_2(n_1+1)F^{(1)}_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_2 r_0(n_2+1)F^{(1)}_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_2 r_2(n_2+1)F^{(1)}_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon) + j\varepsilon w\mu_2 r_2(n_2+1)F^{(1)}_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)F^{(1)}_{n_1+1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ (n_2+1)\mu_2 r_1 q F^{(1)}_{n_1-1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon).
\end{aligned} \tag{19}
$$

Решение задачи (19) можно записать в виде разложения

$$
F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) = \Phi(w,\tau)\{R_{n_1,n_2} + j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\} + O(\varepsilon^2), \tag{20}
$$

где $\Phi(w,\tau)$ – скалярная функция, форма которой определена ниже.

Получим

$$
\begin{aligned}
j\varepsilon w a\Phi(w,\tau)\{R_{n_1,n_2} + j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\} = \Phi(w,\tau)\{&\{R_{n_1,n_2} + j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\}\{-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)-\\
&- x\overline{E}^N_{n_1+n_2} + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1(1-q)n_2 + \lambda E^N_{n_1+n_2} + j\varepsilon w\lambda E^N_{n_1+n_2}\}+\\
&+ \{R_{n_1-1,n_2} + j\varepsilon w f_{n_1-1,n_2}\}\{\lambda q + qx - j\varepsilon w q x\}+\\
&+ \{R_{n_1,n_2-1} + j\varepsilon w f_{n_1,n_2-1}\}\{\lambda(1-q) + (1-q)x - j\varepsilon w(1-q)x\}+\\
&+ \{R_{n_1+1,n_2} + j\varepsilon w f_{n_1+1,n_2}\}\{\mu_1 r_0(n_1+1) + \mu_1 r_2(n_1+1) + j\varepsilon w\mu_1 r_2(n_1+1)\}+\\
&+ \{R_{n_1,n_2+1} + j\varepsilon w f_{n_1,n_2+1}\}\{\mu_2 r_0(n_2+1) + \mu_2 r_2(n_2+1) + j\varepsilon w\mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+ \{R_{n_1+1,n_2+1} + j\varepsilon w f_{n_1-1,n_2-1}\}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+ \{R_{n_1-1,n_2+1} + j\varepsilon w f_{n_1-1,n_2+1}\}(n_2+1)\mu_2 r_1 q+\\
&+ \frac{\partial\Phi(w,t)}{\partial w}\{j\varepsilon\overline{E}^N_{n_1+n_2}\{R_{n_1,n_2} + j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\} - j\varepsilon q\{R_{n_1-1,n_2} + j\varepsilon w f_{n_1-1,n_2}\}-\\
&- j\varepsilon(1-q)\{R_{n_1,n_2-1} + j\varepsilon w f_{n_1,n_2-1}\}\}.
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
j\varepsilon wa\Phi(w,\tau)R_{n_1,n_2} =& \Phi(w,\tau)\{\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon wf_{n_1,n_2}\}\{-(\lambda+\mu_1n_1+\mu_2n_2)+\\
&-x\overline{E}^N_{n_1+n_2}+\mu_1r_1qn_1+\mu_2r_1(1-q)n_2+\lambda E^N_{n_1+n_2}\}+\\
&+j\varepsilon w\lambda E^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2}+\\
&+\{R_{n_1-1,n_2}+j\varepsilon wf_{n_1-1,n_2}\}\{\lambda q+qx\}-j\varepsilon wqxR_{n_1-1,n_2}+\\
&+\{R_{n_1,n_2-1}+j\varepsilon wf_{n_1,n_2-1}\}\{\lambda(1-q)+\\
&+(1-q)x\}-j\varepsilon w(1-q)xR_{n_1,n_2-1}+\\
&+\{R_{n_1+1,n_2}+j\varepsilon wf_{n_1+1,n_2}\}\{\mu_1r_0(n_1+1)+\\
&+\mu_1r_2(n_1+1)\}+j\varepsilon w\mu_1r_2(n_1+1)R_{n_1+1,n_2}+\\
&+\{R_{n_1,n_2+1}+j\varepsilon wf_{n_1,n_2+1}\}\{\mu_2r_0(n_2+1)+\\
&+\mu_2r_2(n_2+1)\}+j\varepsilon w\mu_2r_2(n_2+1)R_{n_1,n_2+1}+\\
&+\{R_{n_1+1,n_2+1}+j\varepsilon wf_{n_1-1,n_2-1}\}\mu_1r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+\{R_{n_1-1,n_2+1}+j\varepsilon wf_{n_1-1,n_2+1}\}(n_2+1)\mu_2r_1q\}+\\
&+\frac{\partial\Phi(w,t)}{\partial w}\{j\varepsilon\overline{E}^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2}-j\varepsilon qR_{n_1-1,n_2}-j\varepsilon(1-q)R_{n_1,n_2-1}\}.
\end{aligned}
$$

С учетом (6) разделим последнее уравнение на $\Phi(w,\tau)j\varepsilon w$ и положим $\varepsilon\to 0$

$$
\begin{aligned}
aR_{n_1,n_2} =& f_{n_1,n_2}\{-(\lambda+\mu_1n_1+\mu_2n_2)+\\
&-x\overline{E}^N_{n_1+n_2}+\mu_1r_1qn_1+\mu_2r_1(1-q)n_2+\lambda E^N_{n_1+n_2}\}+E^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2}+\\
&+f_{n_1-1,n_2}\{\lambda q+qx\}-qxR_{n_1-1,n_2}+\\
&+f_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1-q)+\\
&+(1-q)x\}-(1-q)xR_{n_1,n_2-1}+\\
&+f_{n_1+1,n_2}\{\mu_1r_0(n_1+1)+\\
&+\mu_1r_2(n_1+1)\}+\mu_1r_2(n_1+1)R_{n_1+1,n_2}+\\
&+f_{n_1,n_2+1}\{\mu_2r_0(n_2+1)+\\
&+\mu_2r_2(n_2+1)\}+\mu_2r_2(n_2+1)R_{n_1,n_2+1}+\\
&+f_{n_1-1,n_2-1}\mu_1r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+f_{n_1-1,n_2+1}(n_2+1)\mu_2r_1q+\\
&+\frac{\partial\Phi(w,t)/\partial w}{w\Phi(w,t)}\{\overline{E}^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2}-qR_{n_1-1,n_2}-(1-q)R_{n_1,n_2-1}\}.
\end{aligned}
$$

Перепишем последнее уравнение

$$
\begin{aligned}
& f_{n_1,n_2}\{-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2) - x\overline{E}^N_{n_1+n_2} + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1(1-q)n_2 + \lambda E^N_{n_1+n_2}\}+ \\
& + f_{n_1-1,n_2}\{\lambda q + qx\}+ \\
& + f_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1-q)+(1-q)x\}+ \\
& + f_{n_1+1,n_2}\{\mu_1 r_0(n_1+1)+\mu_1 r_2(n_1+1)\}+ \\
& + f_{n_1,n_2+1}\{\mu_2 r_0(n_2+1)+\mu_2 r_2(n_2+1)\}+ \\
& + f_{n_1-1,n_2-1}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+ \\
& + f_{n_1-1,n_2+1}(n_2+1)\mu_2 r_1 q = \\
& = -aR_{n_1,n_2} + E^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2} - qxR_{n_1-1,n_2} - (1-q)xR_{n_1,n_2-1}+ \\
& + \mu_1 r_2(n_1+1)R_{n_1+1,n_2} + \mu_2 r_2(n_2+1)R_{n_1,n_2+1}+ \\
& + \frac{\partial\Phi(w,t)/\partial w}{w\Phi(w,t)}\{\overline{E}^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2} - qR_{n_1-1,n_2} - (1-q)R_{n_1,n_2-1}\}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Решение f_{n_1,n_2} можно записать в виде

$$
f_{n_1,n_2} = R_{n_1,n_2} + g - \varphi\frac{\partial\Phi(w,t)/\partial w}{w\Phi(w,t)}, \tag{22}
$$

которое мы подставляем в (21) и получаем

$$
\begin{aligned}
& \varphi_{n_1,n_2}(-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2) + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1(1-q)n_2 + \lambda E^N_{n_1+n_2} - x\overline{E}^N_{n_1+n_2})+ \\
& + \varphi_{n_1-1,n_2}(\lambda q\overline{E}^0_{n_1} + xq\overline{E}^0_{n_1}) + \varphi_{n_1,n_2-1}(\lambda(1-q)\overline{E}^0_{n_2} + x(1-q)\overline{E}^0_{n_2})+ \\
& + \varphi_{n_1+1,n_2}(\mu_1 r_0(n_1+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2} + \mu_1 r_2(n_1+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2})+ \\
& + \varphi_{n_1,n_2+1}(\mu_2 r_0(n_2+1)\overline{E}^N_{n+n_2} + \mu_2 r_2(n_2+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2})+ \\
& + \varphi_{n_1+1,n_2-1}(1-q)\mu_1 r_1(n_1+1) + \varphi_{n_1-1,n_2+1}q\mu_2 r_1(n_2+1) = \\
& = R_{n_1,n_2}x\overline{E}^N_{n_1+n_2} - R_{n_1-1,n_2}xq\overline{E}^0_{n_1} - R_{n_1,n_2-1}x(1-q)\overline{E}^0_{n_2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& g_{n_1,n_2}(-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2) + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1(1-q)n_2 + \lambda E^N_{n_1+n_2} - x\overline{E}^N_{n_1+n_2})+ \\
& + g_{n_1-1,n_2}(\lambda q\overline{E}^0_{n_1} + xq\overline{E}^0_{n_1}) + g_{n_1,n_2-1}(\lambda(1-q)\overline{E}^0_{n_2} + x(1-q)\overline{E}^0_{n_2})+ \\
& + f_{n_1+1,n_2}(\mu_1 r_0(n_1+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2} + \mu_1 r_2(n_1+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2})+ \\
& + g_{n_1,n_2+1}(\mu_2 r_0(n_2+1)\overline{E}^N_{n+n_2} + \mu_2 r_2(n_2+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2})+ \\
& + g_{n_1+1,n_2-1}(1-q)\mu_1 r_1(n_1+1) + gn_{1-1,n_2+1}q\mu_2 r_1(n_2+1) = \\
& = R_{n_1,n_2}a - \lambda R_{n_1,n_2}E^N_{n_1+n_2} + xq\overline{E}^0_{n_1}R_{n_1-1,n_2} + x(1-q)\overline{E}^0_{n_2}R_{n_1,n_2-1} \\
& - \mu_1 r_2(n_1+1)R_{n_1+1,n_2}\overline{E}^N_{n_1+n_2} - \mu_2 r_2(n_2+1)R_{n_1,n_2+1}\overline{E}^N_{n_1+n_2}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Рассмотрим первое уравнение системы (6), дифференцируем его по x, получим уравнение

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}\{-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)-x(\tau)\overline{E}^N_{n_1+n_2}+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2+\lambda E^N_{n_1+n_2}\}+\\
&+\frac{\partial R_{n_1-1,n_2}}{\partial x}\{\lambda q+x(\tau)q\}+\\
&+\frac{\partial R_{n_1,n_2-1}}{\partial x}\{\lambda(1-q)+x(\tau)(1-q)\}+\\
&+\frac{\partial R_{n_1+1,n_2}}{\partial x}\{\mu_1 r_0(n_1+1)+\mu_1 r_2(n_1+1)\}+\\
&+\frac{\partial R_{n_1,n_2+1}}{\partial x}\{\mu_2 r_0(n_2+1)+\mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+\frac{\partial R_{n_1+1,n_2-1}}{\partial x}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+\frac{\partial R_{n_1-1,n_2+1}}{\partial x}\mu_2 r_1 q(n_2+1)-\\
&-R_{n_1,n_2}x\overline{E}^N_{n_1+n_2}+R_{n_1-1,n_2}xq\overline{E}^0_{n_1}+R_{n_1,n_2-1}x(1-q)\overline{E}^0_{n_2}=0.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Учитывая (24) и последнее уравнение для φ, запишем равенство

$$
\varphi_{n_1,n_2}=\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}, \tag{25}
$$

где $\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\varphi_{n_1,n_2}=0$. В силу (23) g_{n_1,n_2} является частным решением системы (24). Следовательно, она удовлетворяет условию

$$
\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}g_{n_1,n_2}=0. \tag{26}
$$

Тогда решение g_{n_1,n_2} системы (24), удовлетворяющее условию (26), определяется однозначно.

Теперь рассмотрим второе уравнение системы (17), в которую подставляем разложение (20)

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^2\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}+ja\varepsilon w\Phi(w,\tau)\left\{1+j\varepsilon w\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}f_{n_1,n_2}\right\}=\\
&=(j\varepsilon w+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2})\Bigg[\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\Phi(w,\tau)\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\}+\\
&+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1\Phi(w,\tau)\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\}+\\
&+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2\Phi(w,\tau)\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\}+\\
&+j\varepsilon\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}\frac{\partial\Phi_{n_1,n_2}}{\partial w}-(1-j\varepsilon w)x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}\Phi(w,\tau)\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\}\Bigg].
\end{aligned}
$$

Тогда с помощью уравнения (14)

$$\varepsilon^2\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau} = (jw\varepsilon)^2\Phi(w,\tau)\Bigg[\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1,n_2} + \mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 f_{n_1,n_2} +$$
$$+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} n_2 f_{n_1,n_2} - x\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1,n_2} + x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1,n_2} - a\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1,n_2}\Bigg]+$$
$$+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\Phi(w,\tau)\Bigg[\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} R_{n_1,n_2} + \mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 R_{n_1,n_2} + \mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 R_{n_1,n_2} -$$
$$- x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1,n_2}\Bigg] + (j\varepsilon)^2 w\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1,n_2}\frac{\partial\Phi_{n_1,n_2}}{\partial w},$$

получаем следующее уравнение,

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial\tau}{\Phi(w,\tau)} = \frac{(jw)^2}{2}\Phi(w,\tau)\Bigg[2\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1,n_2} + 2\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 f_{n_1,n_2} +$$
$$+2\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 f_{n_1,n_2} - 2x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} f_{n_1,n_2} + 2x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1,n_2} -$$
$$-2a\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1,n_2} + a\Bigg] - w\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1,n_2}\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{\Phi(w,\tau)},$$

в которое мы подставляем (22)

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial\tau}{\Phi(w,\tau)} = \frac{(jw)^2}{2}\Phi(w,\tau)\Bigg[2\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} g_{n_1,n_2} + 2\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 g_{n_1,n_2} +$$
$$+2\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 g_{n_1,n_2} - 2x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} g_{n_1,n_2} +$$
$$+2x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1,n_2} + a\Bigg] + w\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{\Phi(w,\tau)}\Bigg[\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\varphi_{n_1,n_2} + \tag{27}$$
$$+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1\varphi_{n_1,n_2} + \mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2\varphi_{n_1,n_2} -$$
$$- x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}\varphi_{n_1,n_2} - \sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1,n_2}\Bigg].$$

Результатом второго этапа асимптотического анализа является $b(x)$, определенная следующим образом

$$b(x) = 2\lambda \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} g_{n_1,n_2} + 2\mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 g_{n_1,n_2} + 2\mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 g_{n_1,n_2} -$$
$$- 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} g_{n_1,n_2} + 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1,n_2} + a.$$

5 МЕТОД АСИМТОТИЧЕСКО ДИФФУЗИОННОГО АНАЛИЗА

Построим аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок на орбите методом асимптотически диффузионного анализа. Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 2.2. Предельное распределение вероятностей нормированного числа заявок на орбите в условии растущего времени задержки заявок на орбите имеет функцию плотности вероятности

$$\pi(z) = \frac{C}{b(z)} exp\left\{ \frac{2}{\sigma} \int\limits_0^z \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}, \tag{28}$$

где C – нормировочная константа,

$$\begin{aligned} a(x) =& \lambda \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} R_{n_1,n_2} - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} R_{n_1,n_2} + \\ & + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 R_{n_1,n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 R_{n_1,n_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(x) &= 2\lambda \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} g_{n_1,n_2} + 2\mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 g_{n_1,n_2} + 2\mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 g_{n_1,n_2} - \\ & - 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} g_{n_1,n_2} + 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1,n_2} + a, \end{aligned}$$

g_{n_1,n_2} определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} & g_{n_1,n_2}(-(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1-q) n_2 + \lambda E^N_{n_1+n_2} - x\overline{E}^N_{n_1+n_2}) + \\ & + g_{n_1-1,n_2}(\lambda q \overline{E}^0_{n_1} + xq\overline{E}^0_{n_1}) + g_{n_1,n_2-1}(\lambda(1-q)\overline{E}^0_{n_2} + x(1-q)\overline{E}^0_{n_2}) + \\ & + g_{n_1+1,n_2}(\mu_1 r_0 (n_1+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2} + \mu_1 r_2 (n_1+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2}) + \\ & + g_{n_1,n_2+1}(\mu_2 r_0 (n_2+1)\overline{E}^N_{n+n_2} + \mu_2 r_2 (n_2+1)\overline{E}^N_{n_1+n_2}) + \\ & + g_{n_1+1,n_2-1}(1-q)\mu_1 r_1 (n_1+1) + gn_{1-1,n_2+1} q \mu_2 r_1 (n_2+1) = \\ & = R_{n_1,n_2} a - \lambda R_{n_1,n_2} + xqE^0_{n_1} R_{n_1-1,n_2} + x(1-q)\overline{E}^0_{n_2} R_{n_1,n_2-1} \\ & - \mu_1 r_2 (n_1+1) R_{n_1+1,n_2} \overline{E}^N_{n_1+n_2} - \mu_2 r_2 (n_2+1) R_{n_1,n_2+1} \overline{E}^N_{n_1+n_2}, \\ & \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N-n_1} g_{n_1,n_2} = 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Подставим $b(x)$ в (27)

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial\tau}{\Phi(w,\tau)} = \frac{(jw)^2}{2}\Phi(w,\tau)b(x) - w\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{\Phi(w,\tau)}\Bigg[\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\varphi_{n_1,n_2}+ \\ + \mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1\varphi_{n_1,n_2} + \mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2\varphi_{n_1,n_2}- \\ - x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}\varphi_{n_1,n_2} - \sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}R_{n_1,n_2}\Bigg]. \tag{29}$$

Рассмотрим

$$\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\varphi_{n_1,n_2} + \mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1\varphi_{n_1,n_2}+ \\ + \mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2\varphi_{n_1,n_2} - x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}\varphi_{n_1,n_2} - \sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}R_{n_1,n_2}.$$

Подставим (25) в последнее выражение, получим

$$\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x} + \mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x} + \mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}- \\ - x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x} - \sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-n_1-1}R_{n_1,n_2}. \tag{30}$$

Рассмотрим функцию $a(x)$, найдем ее производную по x, учитывая, что R_{n_1,n_2}, как решение зависит от x

$$a'(x) = \lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x} - x\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x} - \sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}R_{n_1,n_2}+ \\ + \mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x} + \mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2\frac{\partial R_{n_1,n_2}}{\partial x}.$$

Тогда (29) перепишем в виде

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau} = a'(x)w\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w} + \frac{(jw)^2}{2}b(x)\Phi(w,\tau) \tag{31}$$

Уравнение с это преобразование Фурье уравнения Фокера-Планка для плотности распределения вероятностей $P(y,\tau)$ значений центрированного и нормированного количества заявок на орбите. Находя обратное преобразование Фурье от (31), получим

$$\frac{\partial P(y,\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y}\{a'(x)yP(y,\tau)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{b(x)P(y,\tau)\}. \tag{32}$$

Следовательно $P(y,\tau)$ плотность распределения вероятностей диффузионного процесса [10], который обозначим $y(\tau)$ с коэффициентом переносом $a(x)$ и коэффициентом диффузии $b(x)$

$$dy(\tau) = a'(x)yd\tau + \sqrt{b(x)}dw(\tau). \tag{33}$$

Рассмотрим стохастический процесс нормированного числа заявок на орбите

$$z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y(\tau), \tag{34}$$

где $\varepsilon = \sqrt{\sigma}$, исходя из (14), $dx(\tau) = a(x)d\tau$, следует

$$dz(\tau) = d(x(\tau) + \varepsilon y(\tau)) = (a(x) + \varepsilon y a'(x))d\tau + \varepsilon\sqrt{b(x)}dw(\tau). \tag{35}$$

Разложим $a(z)$ в ряд

$$\begin{aligned} &a(z) = a(x+\varepsilon y) = a(x) + \varepsilon y a'(x) + O(\varepsilon^2),\\ &\varepsilon\sqrt{b(z)} = \varepsilon\sqrt{b(x+\varepsilon y)} = \varepsilon\sqrt{b(x) + O(\varepsilon)} = \sqrt{\sigma b(x)} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Перепишем уравнение (35) с точностью до $O(\varepsilon^2)$

$$dz(\tau) = a(z)d\tau + \sqrt{\sigma b(z)}dw(\tau). \tag{36}$$

Обозначим плотность распределения вероятностей для процесса $z(\tau)$

$$\pi(z,\tau) = \frac{\partial P\{z(\tau) < z\}}{\partial z}.$$

Так как $z(\tau)$ – это решение стохастического дифференциального уравнения (36), следовательно, процесс является диффузионным и для его плотности распределения вероятностей можем записать уравнение Фокера-Планка

$$\frac{\partial \pi(z,\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial z}\{a(z)\pi(z,\tau)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{\sigma b(z)\pi(z,\tau)\}. \tag{37}$$

Предполагая, что существует стационарный режим, обозначим

$$\pi(z,\tau) = \pi(z), \tag{38}$$

запишем уравнение Фокера-Планка для стационарного распределения вероятностей $\pi(z)$

$$(a(z)\pi(z))' + \frac{\sigma}{2}(b(z)\pi(z))'' = 0,$$
$$-a(z)\pi(z) + \frac{\sigma}{2}(b(z)\pi(z))' = 0.$$

Решая данную систему уравнений получаем плотность распределения вероятностей $\pi(z)$ нормированного числа заявок на орбите

$$\pi(z) = \frac{C}{b(z)}exp\left\{\frac{2}{\sigma}\int\limits_0^z \frac{a(x)}{b(x)}dx\right\}. \tag{39}$$

Теорема доказана.

Получим дискретное распределение вероятностей

$$P(i) = \pi(\sigma i)/\sum_{i=0}^{\infty}\pi(\sigma i), \tag{40}$$

которое будем называть диффузионной аппроксимацией дискретного распределения вероятностей количества заявок на орбите для изучаемой системы.

Возможно показать, что условием существования стационарного режима рассматриваемой системы является неравенство

$$\lambda < Nr_0/\left(\frac{q}{\mu_1} + \frac{1-q}{\mu_2}\right). \tag{41}$$

Введем следующую замену для того, чтобы среднее время обслуживания равнялось единице

$$q = \frac{\mu_1(1-\mu_2)}{\mu_1-\mu_2}.$$

В таком случае неравенство (41) имеет вид

$$\lambda < Nr_0.$$

Эксперимент 1.

На рисунке 5 представлены графики изменения $a(x)$ и $b(x)$, в зависимости от x, на рисунке 6 ряд распределения вероятностей количества заявок на орбите для следующих параметров системы $N = 2$, $r_0 = 0,5, r_1 = 0,2, r_2 = 0,3, \lambda = 0,8, \mu_1 = 1,2, \mu_2 = 0,6, q = 0,8, \sigma = 0.2$.

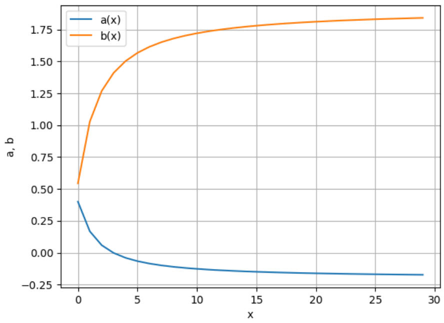

Рисунок 2 – Коэффициенты переноса $a(x)$ и диффузии $b(x)$

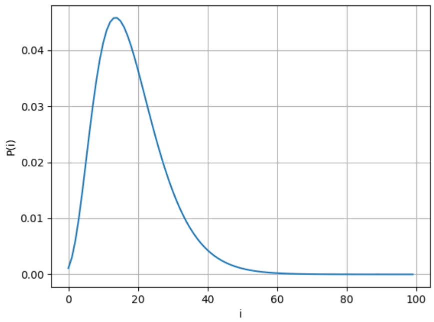

Рисунок 3 – Ряд распределения вероятностей числа заявок на орбите

Эксперимент 2.

На рисунке 7 представлены графики изменения $a(x)$ и $b(x)$, в зависимости от x, на рисунке 8 ряд распределения вероятностей количества заявок на орбите для следующих параметров системы $N = 10$, $r_0 = 0,5, r_1 = 0,2, r_2 = 0,3, \lambda = 0,8, \mu_1 = 1,2, \mu_2 = 0,6, q = 0,8, \sigma = 0.1$.

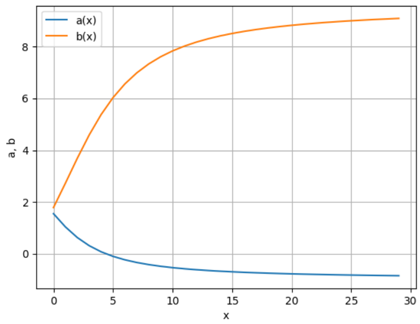

Рисунок 4 – Коэффициенты переноса $a(x)$ и диффузии $b(x)$

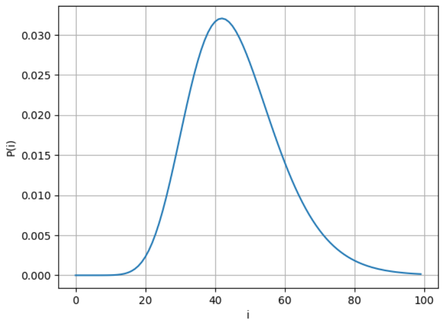

Рисунок 5 – Ряд распределения вероятностей числа заявок на орбите

Численные результаты были получены с помощью библиотек NymPy [20] (для $a(x)$ и $b(x)$) языка программирования Python, реализация выложена в открытый доступ [14]. Данные графики были построены с помощью библиотеки Matplotlib [17] языка Python.

Сравним полученные результаты с имитационной моделью [16]. Для этого обозначим ряд распределения вероятностей числа заявок на орбите, полученный в результате [16], – $P^{(2)}(i)$ и представим на рисунке 9 $P(i)$ и $P^{(2)}(i)$ для следующих параметров системы $N = 64$, $r_0 = 0,5, r_1 = 0,2, r_2 = 0,3, \lambda = 40,96, \mu_1 = 1,2, \mu_2 = 0,6, q = 0,8, \sigma = 0.2$.

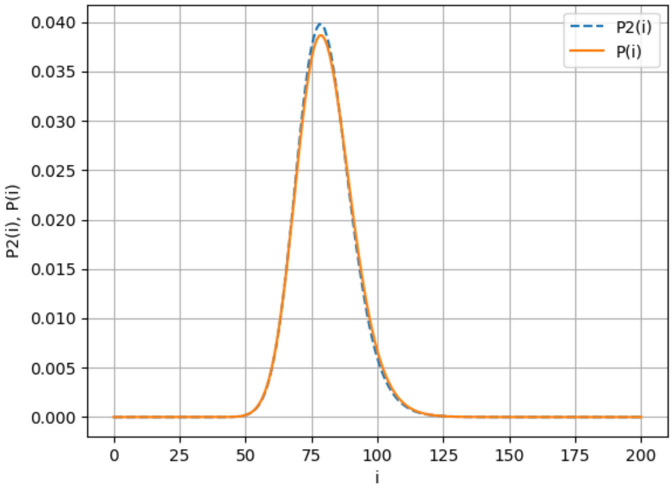

Рисунок 6 – Ряд распределения вероятностей числа заявок на орбите, полученный численно $P(i)$ и с помощью имитационной модели $P^{(2)}(i)$

Для сравнения двух распределений вероятностей будем использовать расстояние Колмогорова

$$\Delta = \max_{0 \le n \le \infty} \left| \sum_{i=0}^{n} (P(i) - P^{(2)}(i)) \right|.$$

Приведем полученные результаты в таблице 1 для изменяющегося числа приборов N и σ.

Таблица 1 – Расстояние Колмогорова

Δ	$\sigma = 5$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0,2$	$\sigma = 0,04$
$N = 2$	0,02124	0,02185	0,00179	0,00060
$N = 4$	0,03852	0,02108	0,00206	0,00030
$N = 16$	0,07338	0,01649	0,00266	0,00056
$N = 64$	0,03329	0,00582	0,00176	0,00032

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, К.И. Николаевич. – М.:КомКнига, 2005. – 400 с.

2. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей: учебное пособие / Гельфонд А.О. – М.: КомКнига, 2006. – 376 с.

3. Ивченко Г.И. Теория массового обслуживания: учебное пособие / Г.И. Ивченко, В.А. Каштанов, И.Н. Коваленко. – М. : Высшая школа , 1982. – 296 с.

4. Любина Т.В. Исследование математических моделей динамических и адаптивных RQ-систем с входящим MMPP-потоком: дисс. ... канд. физ. мат. наук. – Томск., 2013. – 163 с.

5. Моисеев А.Н. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания / А.Н. Моисеев, Назаров А.А.– Томск: Изд-во научно-технической литературы, 2015. – 240 с.

6.Моисеева С. П. Численное исследование RQ-системы MlMl1 в условии большой загрузки / С. П. Моисеева, А. А. Назаров // Информационные технологии и математическое моделирование. Ч. 1 : материалы X Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. – 2011. – С. 160-164.

7.Назаров А. А. Асимптотический анализ двухфазной RQ-системы M|M|1 в условии большой задержки на орбите / А. А. Назаров, А. А. Анисимова // Марчуковские научные чтения – 2017, 25 июня - 14 июля 2017 года : труды. – 2017. – С. 641–647.

8.Назаров А. А. Исследование двухфазной RQ-системы M|M|1 методом моментов /А. А. Назаров, А. А. Анисимова // Марчуковские научные чтения – 2017. – С. 157.

9. Назаров А.А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А.А. Назаров, Моисеева С. П. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

10. Назаров А.А. Теория вероятностей и случайных процессов / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. – Томск : Изд-во научно-технической литературы, 2006. – 199 с.

11. Назаров А.А. Теория массового обслуживания/ А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. – Томск : Изд-во научно-технической литературы, 2010. – 228 с.

12. Artalejo J.R. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach / J. R. Artalejo, A. Gomez-Corral. Springer, 2008. – 309 p.

13. Falin, G.I. Retrial queues / G.I. Falin, J.G.C. Templeton. London : Chapman Hall, 1997.–328

14. GitHub / calculationPi_a_b. – [M].
– https://github.com/ValeriyaRyzhikova/calculationPi_a_b (дата обращения: 01.06.2021).

15. GitHub / checkPhase2EquationR. – [M.].
– https://github.com/ValeriyaRyzhikova/checkPhase2EquationR (дата обращения: 01.06.2021).

16. GitHub / TwoPhaseOrbitImitation. – [M.].
– https://github.com/ValeriyaRyzhikova/TwoPhaseOrbitImitation (дата обращения: 01.06.2021).

17.Matplotlib documentation. –‘[M.].
– https://matplotlib.org/stable/contents.html (дата обращения 04.06.2021.).

18.Moiseev A. N. Asymptotic diffusion analysis of multi-server retrial queue with hyperexponential service / A. N. Moiseev, A. A. Nazarov, S. V. Paul // Mathematics. – 2020. – № 4. – P. 1 – 16.

19. Nazarov A.A. Method of asymptotic diffusuon analysis of queueing sistem M|M|N with feedback / A.A. Nazarov, S.V. Paul, E.A. Pavlova // Lecture Notes in Computer Science. – 2020. – P. 131–143.

20.NumPy 1.2 documentation / Linear algebra. – [M.]. –- https://numpy.org/doc/1.20/reference/routines.linalg.html (дата обращения 10.04.2021.).

21.SymPy 1.6 documentation/Matrices. – [M.]. – https://docs.sympy.org/latest/modules/matrices/matrices.html/ (дата обращения: 28.10.2020.).