

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Институт прикладной математики и компьютерных наук

ОТЧЁТ ПО ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРАКТИКЕ

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ И ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика,
направленность(профиль) «Прикладная математика и информатика»

Рыжикова Валерия Валентиновна

Руководитель ВКР
доктор техн. наук, профессор
_____ Назаров А.А.
подпись

Автор работы
студентка группы №931720
_____ Рыжикова В.В.
подпись
« _____ » _____ 2021г.

Томск 2021 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1 Математическая модель и постановка задач	5
2 Уравнения Колмогорова	7
3 Первый этап асимптотического анализа.	13
4 Второй этап асимптотического анализа	18
5 Метод асимптотическо диффузионного анализа	27
Заключение.	33
Список использованной литературы	34

ВВЕДЕНИЕ

Системы массового обслуживания с орбитами, также называемые RQ-системы, обладают большой популярностью и широко рассмотрены в литературе [6, 8, 12, 13].

Очень похожая работа была также рассмотрена в [18]. В ней, так же как и в этой работе, гиперэкспаненциальное время обслуживания и, если заявка пришла в тот момент, когда все приборы заняты, то она так же отправляется на орбиту, где ожидает время, распределённое по экспоненциальному закону. Однако, после завершения обслуживания, в работе [18] заявка покидает систему, в то время как в данной работе заявка может также уйти на орбиту или же мгновенно перейти на повторное обслуживание. И так же, с помощью асимптотически диффузионного анализа был найден ряд распределения количества заявок на орбите.

В данной работе рассматривается двухфазная система $M|H_2|N$ с обратной связью.

Исследование двухфазных систем проводилось [7]. Но принципиальное отличие предложенной системы состоит в том, что в системе, исследуемой в [7] фазы расположены последовательно, с орбиты заявка поступает только на вторую фазу, обратной связи нет. А в данной работе модель предполагает, что заявка из входящего потока выбирает одну из двух фаз обслуживания с определённой вероятностью и имеется обратная связь.

В первой главе исследуется система $M|H_2|2$ методом асимптотического анализа в асимптотическом условии предельно малой интенсивности обращений заявок с орбиты. В стационарном режиме получено распределение вероятностей числа занятых приборов на первой и второй фазе, а также построена аппроксимация ряда распределения вероятностей числа заявок на орбите. Приведены численные примеры. В первой главе для получения результата был рассмотрен одномерный процесс, характеризующий состояние блока обслуживания, однако во второй главе для исследования системы $M|H_2|N$ рассматривается двумерный процесс, характеризующий состояние блока обслуживания и орбиты. Для исследования применялся метод асимптотически диффузионного анализа, использующее асимптотическое условие предельное малой интенсивности заявки на орбите [1]. Для системы $M|H_2|N$ в стационарном режиме найдено распределение вероятностей числа занятых приборов на первой и второй фазах, а также построена аппроксимация ряда распределения вероятностей числа заявок на орбите в стационарном режиме. Приведены результаты численных экспериментов и сравнения с результатами имитационного моделирования.

Но в нашем исследовании намного больше пригодилась статья [19].

Также помогли книги [1,2,3,5,9,10,11] и статья [4] для ознакомления с различными

методами.

Цель дипломной работы: построить ряд распределения, или его аппроксимацию, для количества заявок на орбите для RQ-системы $M|H_2|N$ в стационарном режиме.

Задачи:

1. Построить математическую модель системы $M|H_2|N$ с обратной связью.
2. Составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для системы $M|H_2|N$ с обратной связью.
3. С помощью метода асимптотического анализа найти коэффициенты переноса и диффузии дифференциальных уравнений системы $M|H_2|N$ с обратной связью.
4. С помощью метода асимптотически диффузионного анализа вычислить ряд распределений вероятностей количества заявок на орбите.

1 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Рассмотрим систему массового обслуживания $M|H_2|N$ с обратной связью (Рисунок 1).

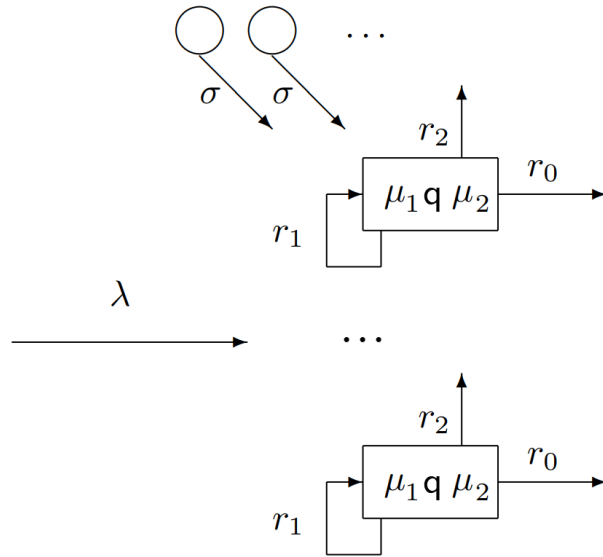


Рисунок 1 – Система массового обслуживания $M|H_2|N$ с обратной связью

Система имеет N обслуживающих приборов. Заявки поступают в систему согласно простейшему потоку с параметром λ . Каждая заявка занимает один из свободных приборов на время, распределенное по гиперэкспоненциальному закону. Это означает, что заявка на приборе с вероятностью q поступает на первую фазу, с экспоненциальным распределением с параметром μ_1 , и с вероятностью $1 - q$ на вторую, с параметром μ_2 .

После завершения обслуживания заявка с вероятностью r_0 покидает систему, с вероятностью r_1 мгновенно поступает на повторное обслуживание и с вероятностью r_2 уходит на орбиту. Также, если на момент поступления заявки из потока все приборы заняты, то заявка уходит на орбиту. Через время, продолжительность которого распределена по экспоненциальному закону с параметром σ , заявка вновь обращается с орбиты к приборам.

Пусть $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t , $n_1(t)$ – число приборов занятых на первой фазе в момент времени t , $n_2(t)$ – число приборов занятых на второй фазе в момент времени t .

Рассмотрим трехмерный процесс $\{n_1(t), n_2(t), i(t)\}$. Под состоянием системы будем понимать состояние процесса $\{n_1(t), n_2(t), i(t)\}$ в момент времени t .

Обозначим вероятности следующим образом

$$P(n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2, i(t) = i) = P_{n_1, n_2}(i, t)$$

вероятность того, что n_1 – приборов занято на первой фазе, а n_2 – приборов занято на второй фазе. При этом $P_{n_1, n_2}(i, t) = 0$, если $n_1 < 0$, $n_2 < 0$ или $n_1 + n_2 > N$.

Для решения будем применять методы асимптотически анализа предложенные в [5, 8, 12, 19] и асимптотически диффузионного анализа предложенные в [19].

2 УРАВНЕНИЯ КОЛМОГорова

Для данных вероятностей составим систему уравнений в конечных разностях [1, 2, 11]. Для упрощения выражений введем индикатор

$$E_a^b = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b, \end{cases}$$

$$\overline{E}_a^b = 1 - E_a^b.$$

$$\begin{aligned} P_{n_1, n_2}(i, t + \Delta t) = & (1 - \Delta t(\lambda + i\sigma \overline{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2))P_{n_1, n_2}(i, t) + \\ & + \Delta t \mu_1 r_1 q n_1 P_{n_1, n_2}(i, t) + \Delta t \mu_2 (1 - q) r_1 n_2 P_{n_1, n_2}(i, t) + \\ & + \Delta t \lambda E_{n_1+n_2}^N P_{n_1, n_2}(i - 1, t) + \\ & + \Delta t \lambda q P_{n_1-1, n_2}(i, t) + \Delta t (i + 1) \sigma q P_{n_1-1, n_2}(i + 1, t) + \\ & + \Delta t \lambda (1 - q) P_{n_1, n_2-1}(i, t) + \Delta t (i + 1) \sigma (1 - q) P_{n_1, n_2-1}(i + 1, t) + \\ & + \Delta t \mu_1 r_0 (n_1 + 1) P_{n_1+1, n_2}(i, t) + \Delta t \mu_1 r_2 (n_1 + 1) P_{n_1+1, n_2}(i - 1, t) + \\ & + \Delta t \mu_2 r_0 (n_2 + 1) P_{n_1, n_2+1}(i, t) + \Delta t \mu_2 r_2 (n_2 + 1) P_{n_1, n_2+1}(i - 1, t) + \\ & + \Delta t \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) P_{n_1+1, n_2-1}(i, t) + \\ & + \Delta t \mu_2 r_1 q (n_2 + 1) P_{n_1-1, n_2+1}(i, t) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Раскроем скобки, разделим на каждое уравнение на Δt , получим

$$\begin{aligned} \frac{P_{n_1, n_2}(i, t + \Delta t) - P_{n_1, n_2}(i, t)}{\Delta t} = & -(\lambda + i\sigma \overline{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)P_{n_1, n_2}(i, t) + \\ & + n_1 \mu_1 r_1 q P_{n_1, n_2}(i, t) + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 P_{n_1, n_2}(i, t) + \\ & + \lambda E_{n_1+n_2}^N P_{n_1, n_2}(i - 1, t) + \lambda q P_{n_1-1, n_2}(i, t) + \\ & + (i + 1) \sigma q P_{n_1-1, n_2}(i + 1, t) \lambda (1 - q) P_{n_1, n_2-1}(i, t) + \\ & + (i + 1) \sigma (1 - q) P_{n_1, n_2-1}(i + 1, t) + \\ & + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) P_{n_1+1, n_2}(i, t) + \\ & + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) P_{n_1+1, n_2}(i - 1, t) + \\ & + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) P_{n_1, n_2+1}(i, t) + \\ & + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) P_{n_1, n_2+1}(i - 1, t) + \\ & + \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) P_{n_1+1, n_2-1}(i, t) + \\ & + \mu_2 r_1 q (n_2 + 1) P_{n_1-1, n_2+1}(i, t) + o(\Delta t)/\Delta t. \end{aligned}$$

Устремим $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} \frac{dP_{n_1, n_2}(i, t)}{\partial t} = & -(\lambda + i\sigma \bar{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)P_{n_1, n_2}(i, t) + \mu_1 r_1 q n_1 P_{n_1, n_2}(i, t) + \\ & + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 P_{n_1, n_2}(i, t) + \lambda E_{n_1+n_2}^N P_{n_1, n_2}(i - 1, t) + \\ & + \lambda q P_{n_1-1, n_2}(i, t) + (i + 1) \sigma q P_{n_1-1, n_2}(i + 1, t) + \\ & + \lambda (1 - q) P_{n_1, n_2-1}(i, t) + (i + 1) \sigma (1 - q) P_{n_1, n_2-1}(i + 1, t) + \\ & + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) P_{n_1+1, n_2}(i, t) + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) P_{n_1+1, n_2}(i - 1, t) + \\ & + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) P_{n_1, n_2+1}(i, t) + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) P_{n_1, n_2+1}(i - 1, t) + \\ & + \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) P_{n_1+1, n_2-1}(i, t) + \mu_2 r_1 q (n_2 + 1) P_{n_1-1, n_2+1}(i, t). \end{aligned}$$

Введем частичные характеристические функции

$$H_{n_1, n_2}(u, t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{iuj} P_{n_1, n_2}(i, t).$$

Тогда уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial t} = & -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) H_{n_1, n_2}(u, t) + j\sigma \bar{E}_{n_1+n_2}^N \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} + \\ & + \mu_1 r_1 q n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 H_{n_1, n_2}(u, t) + \\ & + \lambda e^{ju} E_{n_1+n_2}^N H_{n_1, n_2}(u, t) + \lambda q H_{n_1-1, n_2}(u, t) - \\ & - j\sigma q e^{-ju} \frac{\partial H_{n_1-1, n_2}(u, t)}{\partial u} + \\ & + \lambda (1 - q) H_{n_1, n_2-1}(u, t) - j\sigma (1 - q) e^{-ju} \frac{dH_{n_1, n_2-1}(u, t)}{du} + \\ & + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2}(u, t) + \mu_1 r_2 e^{ju} (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2}(u, t) + \\ & + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) H_{n_1, n_2+1}(u, t) + \mu_2 r_2 e^{ju} (n_2 + 1) H_{n_1, n_2+1}(u, t) + \\ & + \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2-1}(u, t) + (n_2 + 1) \mu_2 r_1 q H_{n_1-1, n_2+1}(u, t). \end{aligned}$$

Просуммируем по n_1 и n_2

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial t} = & -\lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} H_{n_1, n_2}(u, t) + j\sigma \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \bar{E}_{n_1+n_2}^N \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} - \\
& -\mu_1 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) - \mu_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}(u, t) + \\
& + \mu_1 r_1 q \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) + \\
& + \mu_2 r_1 (1-q) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}(u, t) + \\
& + \lambda e^{ju} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} E_{n_1+n_2}^N H_{n_1, n_2}(u, t) + \\
& + \lambda q \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} H_{n_1-1, n_2}(u, t) - j\sigma q e^{-ju} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial H_{n_1-1, n_2}(u, t)}{\partial u} + \\
& + \lambda (1-q) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} H_{n_1, n_2-1}(u, t) u - \\
& - j\sigma (1-q) e^{-ju} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2-1}(u, t)}{\partial u} + \\
& + \mu_1 r_0 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2}(u, t) + \\
& + \mu_1 r_2 e^{ju} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2}(u, t) + \\
& + \mu_2 r_0 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} (n_2 + 1) H_{n_1, n_2+1}(u, t) + \\
& + \mu_2 r_2 e^{ju} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} (n_2 + 1) H_{n_1, n_2+1}(u, t) + \\
& + \mu_1 r_1 (1-q) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2-1}(u, t) + \\
& + \mu_2 r_1 q \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} (n_2 + 1) H_{n_1-1, n_2+1}(u, t).
\end{aligned}$$

Преобразуем

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial t} = & -\lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} H_{n_1, n_2}(u, t) + j\sigma \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} - \\
& -\mu_1(r_0 + r_2) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) + \\
& -\mu_2(r_0 + r_2) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}(u, t) + \\
& + \lambda e^{ju} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} H_{n_1, n_2}(u, t) + \\
& + \lambda q \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} H_{n_1, n_2}(u, t) - j\sigma q e^{-ju} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} + \\
& + \lambda(1-q) \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} H_{n_1, n_2}(u, t) - \\
& - j\sigma(1-q) e^{-ju} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} + \\
& + \mu_1 r_0 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) + \mu_1 r_2 e^{ju} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) + \\
& + \mu_2 r_0 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}(u, t) + \mu_2 r_2 e^{ju} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}(u, t).
\end{aligned}$$

Приведем подобные слагаемые

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial t} = & \lambda(e^{ju} - 1) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} H_{n_1, n_2}(u, t) - \\
& - j\sigma q(e^{-ju} - 1) \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} - \\
& - j\sigma(1-q)(e^{-ju} - 1) \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} + \\
& + \mu_1 r_2(e^{ju} - 1) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) + \\
& + \mu_2 r_2(e^{ju} - 1) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}(u, t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial t} = & \lambda(e^{ju} - 1) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} H_{n_1, n_2}(u, t) - \\
& - j\sigma(e^{-ju} - 1) \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} + \\
& + \mu_1 r_2(e^{ju} - 1) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) + \\
& + \mu_2 r_2(e^{ju} - 1) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}(u, t).
\end{aligned}$$

Вынесем $(e^{ju} - 1)$

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial t} = & (e^{ju} - 1) \left\{ \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} H_{n_1, n_2}(u, t) + \right. \\
& + j\sigma e^{-ju} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} + \\
& \left. + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}(u, t) \right\}.
\end{aligned}$$

Получим уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial t} = & -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) H_{n_1, n_2}(u, t) + j\sigma \bar{E}_{n_1+n_2}^N \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} + \\
& + \mu_1 r_1 q n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 H_{n_1, n_2}(u, t) + \\
& + \lambda e^{ju} E_{n_1+n_2}^N H_{n_1, n_2}(u, t) + \\
& + \lambda q H_{n_1-1, n_2}(u, t) - j\sigma q e^{-ju} \frac{\partial H_{n_1-1, n_2}(u, t)}{\partial u} + \\
& + \lambda (1 - q) H_{n_1, n_2-1}(u, t) - j\sigma (1 - q) e^{-ju} \frac{dH_{n_1, n_2-1}(u, t)}{du} + \\
& + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2}(u, t) + \mu_1 r_2 e^{ju} (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2}(u, t) + \\
& + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) H_{n_1, n_2+1}(u, t) + \mu_2 r_2 e^{ju} (n_2 + 1) H_{n_1, n_2+1}(u, t) + \\
& + \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2-1}(u, t) + \\
& + (n_2 + 1) \mu_2 r_1 q H_{n_1-1, n_2+1}(u, t),
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial t} = & (e^{ju} - 1) \left\{ \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} H_{n_1, n_2}(u, t) + \right. \\
& + j\sigma e^{-ju} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} + \\
& + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) + \\
& \left. + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}(u, t) \right\}.
\end{aligned} \tag{2}$$

3 ПЕРВЫЙ ЭТАП АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Будем решать систему уравнений (1) и уравнение (2) методом асимптотического анализа. Сделаем замены

$$\sigma = \varepsilon, \tau = t\varepsilon, u = \varepsilon w, H_{n_1, n_2}(u, t) = F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon).$$

Тогда мы можем переписать систему уравнений (1) и уравнение (2)

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = & -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) + j \bar{E}_{n_1 + n_2}^N \frac{\partial F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \\ & + \mu_1 r_1 q n_1 F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) + \\ & + \lambda e^{j\varepsilon w} E_{n_1 + n_2}^N F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) + \lambda q F_{n_1 - 1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) - \\ & - j q e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_{n_1 - 1, n_2}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \lambda (1 - q) F_{n_1, n_2 - 1}(w, \tau, \varepsilon) - \\ & - j (1 - q) e^{-j\varepsilon w} \frac{d F_{n_1, n_2 - 1}(w, \tau, \varepsilon)}{dw} + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) F_{n_1 + 1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) + \\ & + \mu_1 r_2 e^{j\varepsilon w} (n_1 + 1) F_{n_1 + 1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) F_{n_1, n_2 + 1}(w, \tau, \varepsilon) + \\ & + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) e^{j\varepsilon w} F_{n_1, n_2 + 1}(w, \tau, \varepsilon) + \\ & + \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) F_{n_1 + 1, n_2 - 1}(w, \tau, \varepsilon) + \\ & + \mu_2 r_1 q (n_2 + 1) F_{n_1 - 1, n_2 + 1}(w, \tau, \varepsilon), \\ \varepsilon \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = & (e^{j\varepsilon w} - 1) \left\{ \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) + \right. \\ & + j e^{-j\varepsilon w} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \\ & \left. + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

При условии, что $\varepsilon \rightarrow 0$, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2.1. Компоненты $R_{n_1, n_2}(x)$ распределения вероятностей числа приборов, занятых на первой и второй фазе имеет вид

$$R_{n_1, n_2}(x) = \frac{L_{n_1, n_2}(x)}{c(x)}, \quad (4)$$

где

$$L_{n_1, n_2}(x) = (\mu_1 \mu_2 (1 - r_1))^{N - (n_1 + n_2)} \frac{N!}{(n_1 + n_2)!} C_{n_1 + n_2}^{m_2} (\mu_1 (1 - q))^{n_2} (\mu_2 q)^{n_1} (\lambda + x)^{n_1 + n_2},$$

$$c(x) = \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} L_{n_1, n_2}.$$

$$x = x(\tau); x'(\tau) = a(x) = \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} R_{n_1, n_2} - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} R_{n_1, n_2} +$$

$$+ \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 R_{n_1, n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 R_{n_1, n_2}.$$

Доказательство. Рассмотрим первое уравнение системы (3) в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$, обозначим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) = F_{n_1, n_2}(w, \tau)$$

и получим

$$\begin{aligned} & - (\lambda + n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2) F_{n_1, n_2}(w, \tau) + j \bar{E}_{n_1 + n_2}^N \frac{\partial F_{n_1, n_2}(w, \tau)}{\partial w} + \\ & + \mu_1 r_1 q n_1 F_{n_1, n_2}(w, \tau) + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 F_{n_1, n_2}(w, \tau) + \\ & + \lambda E_{n_1 + n_2}^N F_{n_1, n_2}(w, \tau) + \lambda q F_{n_1 - 1, n_2}(w, \tau) - \\ & - j q \frac{\partial F_{n_1 - 1, n_2}(w, \tau)}{\partial w} + \lambda (1 - q) F_{n_1, n_2 - 1}(w, \tau) - \\ & - j (1 - q) \frac{d F_{n_1, n_2 - 1}(u, t)}{d w} + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) F_{n_1 + 1, n_2}(w, \tau) + \\ & + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) F_{n_1 + 1, n_2}(w, \tau) + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) F_{n_1, n_2 + 1}(w, \tau) + \\ & + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) F_{n_1, n_2 + 1}(w, \tau) + \\ & + \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) F_{n_1 + 1, n_2 - 1}(w, \tau) + \\ & + \mu_2 r_1 q (n_2 + 1) F_{n_1 - 1, n_2 + 1}(w, \tau) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Находим решение уравнения (5) в виде $F_{n_1, n_2}(w, \tau) = L_{n_1, n_2} e^{j w x(\tau)}$. Получим следующую систему

$$\begin{aligned}
& -(\lambda + \mu_1 n_1 + n_2 \mu_2) L_{n_1, n_2} - x(\tau) \bar{E}_{n_1+n_2}^N L_{n_1, n_2} + \\
& + \mu_1 r_1 q n_1 L_{n_1, n_2} + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 L_{n_1, n_2} + \\
& + \lambda E_{n_1+n_2}^N L_{n_1, n_2} + \lambda q L_{n_1-1, n_2} + \\
& + x(\tau) q L_{n_1-1, n_2} + \lambda (1 - q) L_{n_1, n_2-1} + \\
& + x(\tau) (1 - q) L_{n_1, n_2-1} + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) L_{n_1+1, n_2} + \\
& + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) L_{n_1+1, n_2} + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) L_{n_1, n_2+1} + \\
& + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) L_{n_1, n_2+1} + \\
& + \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) L_{n_1+1, n_2-1} + \\
& + \mu_2 r_1 q (n_2 + 1) L_{n_1-1, n_2+1} = 0,
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
& L_{n_1, n_2} \{ -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) - x(\tau) \bar{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 + \lambda E_{n_1+n_2}^N \} + \\
& + L_{n_1-1, n_2} \{ \lambda q + x(\tau) q \} + \\
& + L_{n_1, n_2-1} \{ \lambda (1 - q) + x(\tau) (1 - q) \} + \\
& + L_{n_1+1, n_2} \{ \mu_1 r_0 (n_1 + 1) + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) \} + \\
& + L_{n_1, n_2+1} \{ \mu_2 r_0 (n_2 + 1) + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) \} + \\
& + L_{n_1+1, n_2-1} \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) + \\
& + L_{n_1-1, n_2+1} \mu_2 r_1 q (n_2 + 1) = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Чтобы доказать утверждение (4) воспользуемся языком программирования Python и символьным исчислением библиотеки SymPy [21], реализация данной части доказательства выложена в открытый доступ [15]. Однако, чтобы сделать это, нужно избавиться от индикаторов, поэтому рассмотрим частные случаи.

$$n_1 = 0, n_2 = 0:$$

$$\begin{aligned}
& L_{0,0} \{ -\lambda - x(\tau) \} + \\
& + L_{1,0} \{ \mu_1 r_0 + \mu_1 r_2 \} + \\
& + L_{0,1} \{ \mu_2 r_0 + \mu_2 r_2 \} = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

$$n_1 = 0, n_2 > 0, n_1 + n_2 < N:$$

$$\begin{aligned}
& L_{0, n_2} \{ -(\lambda + \mu_2 n_2) - x(\tau) + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 \} + \\
& + L_{0, n_2-1} \{ \lambda (1 - q) + x(\tau) (1 - q) \} + \\
& + L_{1, n_2} \{ \mu_1 r_0 + \mu_1 r_2 \} + \\
& + L_{0, n_2+1} \{ \mu_2 r_0 (n_2 + 1) + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) \} + \\
& + L_{1, n_2-1} \mu_1 r_1 (1 - q) = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

$n_1 > 0, n_2 = 0, n_1 + n_2 < N$:

$$\begin{aligned}
& L_{n_1,0}\{-(\lambda + \mu_1 n_1) - x(\tau) + \mu_1 r_1 q n_1\} + \\
& + L_{n_1-1,0}\{\lambda q + x(\tau)q\} + \\
& + L_{n_1+1,0}\{\mu_1 r_0(n_1 + 1) + \mu_1 r_2(n_1 + 1)\} + \\
& + L_{n_1,1}\{\mu_2 r_0 + \mu_2 r_2(n_2 + 1)\} + \\
& + L_{n_1-1,n_2+1}\mu_2 r_1 q(n_2 + 1) = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

$n_1 > 0, n_2 > 0, n_1 + n_2 < N$:

$$\begin{aligned}
& L_{n_1,n_2}\{-(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) - x(\tau) + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1(1 - q)n_2\} + \\
& + L_{n_1-1,n_2}\{\lambda q + x(\tau)q\} + \\
& + L_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1 - q) + x(\tau)(1 - q)\} + \\
& + L_{n_1+1,n_2}\{\mu_1 r_0(n_1 + 1) + \mu_1 r_2(n_1 + 1)\} + \\
& + L_{n_1,n_2+1}\{\mu_2 r_0(n_2 + 1) + \mu_2 r_2(n_2 + 1)\} + \\
& + L_{n_1+1,n_2-1}\mu_1 r_1(1 - q)(n_1 + 1) + \\
& + L_{n_1-1,n_2+1}\mu_2 r_1 q(n_2 + 1) = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

$n_1 = 0, n_2 = N$:

$$\begin{aligned}
& L_{0,N}\{-(\lambda + N\mu_2) + N\mu_2 r_1(1 - q) + \lambda\} + \\
& + L_{0,N-1}\{\lambda(1 - q) + x(\tau)(1 - q)\} + \\
& + L_{1,N-1}\mu_1 r_1(1 - q) = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

$n_1 = N, n_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
& L_{N,0}\{-N\mu_1 + N\mu_2 r_1 q\} + \\
& + L_{N-1,0}\{\lambda q + x(\tau)q\} + \\
& + L_{N-1,1}\mu_2 r_1 q = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

$n_1 + n_2 = N, n_1 \neq N, n_2 \neq N$:

$$\begin{aligned}
& L_{n_1,n_2}\{-(\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1(1 - q)n_2\} + \\
& + L_{n_1-1,n_2}\{\lambda q + x(\tau)q\} + \\
& + L_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1 - q) + x(\tau)(1 - q)\} + \\
& + L_{n_1+1,n_2-1}(n_1 + 1)\mu_1 r_1(1 - q) + \\
& + L_{n_1-1,n_2+1}\mu_2 r_1 q(n_2 + 1) = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Подставляя (4) в предложенные равенства, получим тождество. Следовательно (4) яв-

ляется решением. Заметим, что

$$\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} R_{n_1, n_2} = 1.$$

Для этого разделим полученное решение на сумму всех L_{n_1, n_2}

$$c = \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} L_{n_1, n_2}.$$

Получим

$$R_{n_1, n_2} = \frac{L_{n_1, n_2}}{c}.$$

Найдем $x = x(\tau)$. Рассмотрим второе уравнение (3) в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial F_{n_1, n_2}(w, \tau)}{\partial \tau} = & jw \left\{ \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) + \right. \\ & s + j \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial F_{n_1, n_2}(w, \tau)}{\partial w} + \\ & \left. + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 F_{n_1, n_2}(w, \tau) + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 F_{n_1, n_2}(w, \tau) \right\}. \end{aligned}$$

Выполним замену $F_{n_1, n_2}(w, \tau) = R_{n_1, n_2} e^{jwx(\tau)}$, тогда

$$\begin{aligned} x'(\tau) = & \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} R_{n_1, n_2} - x(\tau) \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} R_{n_1, n_2} + \\ & + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 R_{n_1, n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 R_{n_1, n_2}. \end{aligned}$$

Обозначим через

$$\begin{aligned} x'(\tau) = a(x) = & \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} R_{n_1, n_2} - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} R_{n_1, n_2} + \\ & + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 R_{n_1, n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 R_{n_1, n_2}. \end{aligned} \tag{14}$$

Теорема доказана.

4 ВТОРОЙ ЭТАП АСИМТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В системе уравнений (1) и уравнение (2) сделаем замену

$$H_{n_1, n_2}(u, t) = e^{j\frac{u}{\sigma}x(\sigma t)} H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t),$$

получим систему

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) = -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\
 & + j\sigma \bar{E}_{n_1+n_2}^N \frac{\partial H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t)}{\partial u} - x(\sigma t)\bar{E}_{n_1+n_2}^N H_{n_1, n_2}^{(1)} + \\
 & + \mu_1 r_1 q n_1 H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \mu_2 r_1 (1-q)n_2 H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\
 & + \lambda e^{ju} E_{n_1+n_2}^N H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\
 & + \lambda q H_{n_1-1, n_2}^{(1)}(u, t) - j\sigma q e^{-ju} \frac{\partial H_{n_1-1, n_2}^{(1)}(u, t)}{\partial u} + \\
 & + q e^{-ju} x(\sigma t) H_{n_1-1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\
 & + \lambda (1-q) H_{n_1, n_2-1}^{(1)}(u, t) - j\sigma (1-q) e^{-ju} \frac{dH_{n_1, n_2-1}^{(1)}(u, t)}{du} + \\
 & + (1-q) e^{-ju} x(\sigma t) H_{n_1, n_2-1}^{(1)}(u, t) + \\
 & + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\
 & + \mu_1 r_2 e^{ju} (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\
 & + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) H_{n_1, n_2+1}(u, t) + \\
 & + \mu_2 r_2 e^{ju} (n_2 + 1) H_{n_1, n_2+1}(u, t) + \\
 & + \mu_1 r_1 (1-q)(n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2-1}^{(1)}(u, t) + \\
 & + (n_2 + 1) \mu_2 r_1 q H_{n_1-1, n_2+1}^{(1)}(u, t), \\
 & \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \left\{ \frac{\partial H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) \right\} = \\
 & = (e^{ju} - 1) \left\{ \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \right. \\
 & + e^{-ju} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \left[j\sigma \frac{\partial H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t)}{\partial u} - \right. \\
 & \left. \left. - x(\sigma t)H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) \right] + \right. \\
 & + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\
 & \left. + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) \right\}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

С учетом (14) перепишем систему (15)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t)}{\partial t} + jua(x)H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) = -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\
& + j\sigma \bar{E}_{n_1+n_2}^N \frac{\partial H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t)}{\partial u} - x \bar{E}_{n_1+n_2}^N H_{n_1, n_2}^{(1)} + \\
& + \mu_1 r_1 q n_1 H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\
& + \lambda e^{ju} E_{n_1+n_2}^N H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\
& + \lambda q H_{n_1-1, n_2}^{(1)}(u, t) - j\sigma q e^{-ju} \frac{\partial H_{n_1-1, n_2}^{(1)}(u, t)}{\partial u} + \\
& + q e^{-ju} x H_{n_1-1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\
& + \lambda (1 - q) H_{n_1, n_2-1}^{(1)}(u, t) - j\sigma (1 - q) e^{-ju} \frac{dH_{n_1, n_2-1}^{(1)}(u, t)}{du} + \\
& + (1 - q) e^{-ju} x H_{n_1, n_2-1}^{(1)}(u, t) + \\
& + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\
& + \mu_1 r_2 e^{ju} (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\
& + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) H_{n_1, n_2+1}^{(1)}(u, t) + \\
& + \mu_2 r_2 e^{ju} (n_2 + 1) H_{n_1, n_2+1}^{(1)}(u, t) + \\
& + \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2-1}^{(1)}(u, t) + \\
& + (n_2 + 1) \mu_2 r_1 q H_{n_1-1, n_2+1}^{(1)}(u, t), \\
& \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \left\{ \frac{\partial H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t)}{\partial t} + jua(x)H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) \right\} = (e^{ju} - 1) \left\{ \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) \right. \\
& + e^{-ju} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \left[\sigma j \frac{\partial H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t)}{\partial u} - x H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) \right] + \\
& + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\
& \left. + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) \right\}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Обозначив $\sigma = \varepsilon^2$ и сделав следующие замены в (16)

$$\tau = t\varepsilon^2, u = \varepsilon w, H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) = F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon),$$

МОЖЕМ НАПИСАТЬ

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \frac{\partial F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial t} + j\varepsilon w a F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) = -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + j\varepsilon \bar{E}_{n_1+n_2}^N \frac{\partial F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} - x \bar{E}_{n_1+n_2}^N F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_1 r_1 q n_1 F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \lambda e^{j\varepsilon w} \bar{E}_{n_1+n_2}^N F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \lambda q F_{n_1-1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) - j\varepsilon q e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_{n_1-1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \\
& + q e^{-j\varepsilon w} x F_{n_1-1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \lambda (1 - q) F_{n_1, n_2-1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) - j\varepsilon (1 - q) e^{-j\varepsilon w} \frac{d F_{n_1, n_2-1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{dw} + \\
& + (1 - q) e^{-j\varepsilon w} x F_{n_1, n_2-1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) F_{n_1+1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_1 r_2 e^{j\varepsilon w} (n_1 + 1) F_{n_1+1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) F_{n_1, n_2+1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_2 r_2 e^{j\varepsilon w} (n_2 + 1) F_{n_1, n_2+1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) F_{n_1+1, n_2-1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + (n_2 + 1) \mu_2 r_1 q F_{n_1-1, n_2+1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon), \\
& \varepsilon^2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \left\{ \frac{\partial F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial t} + j\varepsilon a F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) \right\} = \\
& = (e^{j\varepsilon w} - 1) \left\{ \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \right. \\
& + e^{-j\varepsilon w} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \left[j\varepsilon \frac{\partial F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial u} - x F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) \right] \\
& + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& \left. + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) \right\}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Перепишем первое уравнение (17) с учетом разложения

$$e^{j\varepsilon w} = 1 + (j\varepsilon w) + O(\varepsilon^2), \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
j\varepsilon w a F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) = & -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + j\varepsilon \bar{E}_{n_1+n_2}^N \frac{\partial F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} - x \bar{E}_{n_1+n_2}^N F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_1 r_1 q n_1 F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \lambda E_{n_1+n_2}^N F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + j\varepsilon w \lambda E_{n_1+n_2}^N F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \lambda q F_{n_1-1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) - \varepsilon q \frac{\partial F_{n_1-1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \\
& + q x F_{n_1-1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) - j\varepsilon w q x F_{n_1-1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \lambda (1 - q) F_{n_1, n_2-1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) - j\varepsilon (1 - q) \frac{d F_{n_1, n_2-1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{dw} + \\
& + (1 - q) x F_{n_1, n_2-1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) - j\varepsilon w (1 - q) x F_{n_1, n_2-1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) F_{n_1+1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) F_{n_1+1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + j\varepsilon w \mu_1 r_2 (n_1 + 1) F_{n_1+1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) F_{n_1, n_2+1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) F_{n_1, n_2+1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + j\varepsilon w \mu_2 r_2 (n_2 + 1) F_{n_1, n_2+1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) F_{n_1+1, n_2-1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + (n_2 + 1) \mu_2 r_1 q F_{n_1-1, n_2+1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon).
\end{aligned} \tag{19}$$

Решение задачи (19) можно записать в виде разложения

$$F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) = \Phi(w, \tau) \{R_{n_1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2}\} + O(\varepsilon^2), \tag{20}$$

где $\Phi(w, \tau)$ – скалярная функция, форма которой определена ниже.

Получим

$$\begin{aligned}
j\varepsilon w a \Phi(w, \tau) \{R_{n_1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2}\} = & \Phi(w, \tau) \{ \{R_{n_1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2}\} \{ -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) - \\
& - x \bar{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 + \lambda E_{n_1+n_2}^N + j\varepsilon w \lambda E_{n_1+n_2}^N \} + \\
& + \{R_{n_1-1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1-1, n_2}\} \{ \lambda q + q x - j\varepsilon w q x \} + \\
& + \{R_{n_1, n_2-1} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2-1}\} \{ \lambda (1 - q) + (1 - q) x - j\varepsilon w (1 - q) x \} + \\
& + \{R_{n_1+1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1+1, n_2}\} \{ \mu_1 r_0 (n_1 + 1) + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) + j\varepsilon w \mu_1 r_2 (n_1 + 1) \} + \\
& + \{R_{n_1, n_2+1} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2+1}\} \{ \mu_2 r_0 (n_2 + 1) + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) + j\varepsilon w \mu_2 r_2 (n_2 + 1) \} + \\
& + \{R_{n_1+1, n_2+1} + j\varepsilon w f_{n_1+1, n_2+1}\} \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) + \\
& + \{R_{n_1-1, n_2+1} + j\varepsilon w f_{n_1-1, n_2+1}\} (n_2 + 1) \mu_2 r_1 q + \\
& + \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} \{ j\varepsilon \bar{E}_{n_1+n_2}^N \{R_{n_1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2}\} - j\varepsilon q \{R_{n_1-1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1-1, n_2}\} - \\
& - j\varepsilon (1 - q) \{R_{n_1, n_2-1} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2-1}\} \}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
j\varepsilon w a \Phi(w, \tau) R_{n_1, n_2} = & \Phi(w, \tau) \{ \{ R_{n_1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2} \} \{ -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) + \\
& - x \bar{E}_{n_1 + n_2}^N + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 + \lambda E_{n_1 + n_2}^N \} + \\
& + j\varepsilon w \lambda E_{n_1 + n_2}^N R_{n_1, n_2} + \\
& + \{ R_{n_1 - 1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1 - 1, n_2} \} \{ \lambda q + qx \} - j\varepsilon w q x R_{n_1 - 1, n_2} + \\
& + \{ R_{n_1, n_2 - 1} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2 - 1} \} \{ \lambda(1 - q) + \\
& + (1 - q)x \} - j\varepsilon w (1 - q)x R_{n_1, n_2 - 1} + \\
& + \{ R_{n_1 + 1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1 + 1, n_2} \} \{ \mu_1 r_0 (n_1 + 1) + \\
& + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) \} + j\varepsilon w \mu_1 r_2 (n_1 + 1) R_{n_1 + 1, n_2} + \\
& + \{ R_{n_1, n_2 + 1} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2 + 1} \} \{ \mu_2 r_0 (n_2 + 1) + \\
& + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) \} + j\varepsilon w \mu_2 r_2 (n_2 + 1) R_{n_1, n_2 + 1} + \\
& + \{ R_{n_1 + 1, n_2 + 1} + j\varepsilon w f_{n_1 + 1, n_2 + 1} \} \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) + \\
& + \{ R_{n_1 - 1, n_2 + 1} + j\varepsilon w f_{n_1 - 1, n_2 + 1} \} (n_2 + 1) \mu_2 r_1 q \} + \\
& + \frac{\partial \Phi(w, t)}{\partial w} \{ j\varepsilon \bar{E}_{n_1 + n_2}^N R_{n_1, n_2} - j\varepsilon q R_{n_1 - 1, n_2} - j\varepsilon (1 - q) R_{n_1, n_2 - 1} \}.
\end{aligned}$$

С учетом (6) разделим последнее уравнение на $\Phi(w, \tau) j\varepsilon w$ и положим $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
a R_{n_1, n_2} = & f_{n_1, n_2} \{ -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) + \\
& - x \bar{E}_{n_1 + n_2}^N + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 + \lambda E_{n_1 + n_2}^N \} + E_{n_1 + n_2}^N R_{n_1, n_2} + \\
& + f_{n_1 - 1, n_2} \{ \lambda q + qx \} - q x R_{n_1 - 1, n_2} + \\
& + f_{n_1, n_2 - 1} \{ \lambda(1 - q) + \\
& + (1 - q)x \} - (1 - q)x R_{n_1, n_2 - 1} + \\
& + f_{n_1 + 1, n_2} \{ \mu_1 r_0 (n_1 + 1) + \\
& + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) \} + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) R_{n_1 + 1, n_2} + \\
& + f_{n_1, n_2 + 1} \{ \mu_2 r_0 (n_2 + 1) + \\
& + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) \} + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) R_{n_1, n_2 + 1} + \\
& + f_{n_1 - 1, n_2 - 1} \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) + \\
& + f_{n_1 - 1, n_2 + 1} (n_2 + 1) \mu_2 r_1 q + \\
& + \frac{\partial \Phi(w, t) / \partial w}{w \Phi(w, t)} \{ \bar{E}_{n_1 + n_2}^N R_{n_1, n_2} - q R_{n_1 - 1, n_2} - (1 - q) R_{n_1, n_2 - 1} \}.
\end{aligned}$$

Перепишем последнее уравнение

$$\begin{aligned}
& f_{n_1, n_2} \{ -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) - x \bar{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1-q) n_2 + \lambda E_{n_1+n_2}^N \} + \\
& + f_{n_1-1, n_2} \{ \lambda q + q x \} + \\
& + f_{n_1, n_2-1} \{ \lambda(1-q) + (1-q)x \} + \\
& + f_{n_1+1, n_2} \{ \mu_1 r_0 (n_1+1) + \mu_1 r_2 (n_1+1) \} + \\
& + f_{n_1, n_2+1} \{ \mu_2 r_0 (n_2+1) + \mu_2 r_2 (n_2+1) \} + \\
& + f_{n_1-1, n_2-1} \mu_1 r_1 (1-q) (n_1+1) + \\
& + f_{n_1-1, n_2+1} (n_2+1) \mu_2 r_1 q = \\
& = -a R_{n_1, n_2} + E_{n_1+n_2}^N R_{n_1, n_2} - q x R_{n_1-1, n_2} - (1-q)x R_{n_1, n_2-1} + \\
& + \mu_1 r_2 (n_1+1) R_{n_1+1, n_2} + \mu_2 r_2 (n_2+1) R_{n_1, n_2+1} + \\
& + \frac{\partial \Phi(w, t) / \partial w}{w \Phi(w, t)} \{ \bar{E}_{n_1+n_2}^N R_{n_1, n_2} - q R_{n_1-1, n_2} - (1-q) R_{n_1, n_2-1} \}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Решение f_{n_1, n_2} можно записать в виде

$$f_{n_1, n_2} = R_{n_1, n_2} + g - \varphi \frac{\partial \Phi(w, t) / \partial w}{w \Phi(w, t)}, \tag{22}$$

которое мы подставляем в (21) и получаем

$$\begin{aligned}
& \varphi_{n_1, n_2} (-(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1-q) n_2 + \lambda E_{n_1+n_2}^N - x \bar{E}_{n_1+n_2}^N) + \\
& + \varphi_{n_1-1, n_2} (\lambda q \bar{E}_{n_1}^0 + x q \bar{E}_{n_1}^0) + \varphi_{n_1, n_2-1} (\lambda(1-q) \bar{E}_{n_2}^0 + x(1-q) \bar{E}_{n_2}^0) + \\
& + \varphi_{n_1+1, n_2} (\mu_1 r_0 (n_1+1) \bar{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 r_2 (n_1+1) \bar{E}_{n_1+n_2}^N) + \\
& + \varphi_{n_1, n_2+1} (\mu_2 r_0 (n_2+1) \bar{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_2 r_2 (n_2+1) \bar{E}_{n_1+n_2}^N) + \\
& + \varphi_{n_1+1, n_2-1} (1-q) \mu_1 r_1 (n_1+1) + \varphi_{n_1-1, n_2+1} q \mu_2 r_1 (n_2+1) = \\
& = R_{n_1, n_2} x \bar{E}_{n_1+n_2}^N - R_{n_1-1, n_2} x q \bar{E}_{n_1}^0 - R_{n_1, n_2-1} x (1-q) \bar{E}_{n_2}^0, \\
& g_{n_1, n_2} (-(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1-q) n_2 + \lambda E_{n_1+n_2}^N - x \bar{E}_{n_1+n_2}^N) + \\
& + g_{n_1-1, n_2} (\lambda q \bar{E}_{n_1}^0 + x q \bar{E}_{n_1}^0) + g_{n_1, n_2-1} (\lambda(1-q) \bar{E}_{n_2}^0 + x(1-q) \bar{E}_{n_2}^0) + \\
& + f_{n_1+1, n_2} (\mu_1 r_0 (n_1+1) \bar{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 r_2 (n_1+1) \bar{E}_{n_1+n_2}^N) + \\
& + g_{n_1, n_2+1} (\mu_2 r_0 (n_2+1) \bar{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_2 r_2 (n_2+1) \bar{E}_{n_1+n_2}^N) + \\
& + g_{n_1+1, n_2-1} (1-q) \mu_1 r_1 (n_1+1) + g_{n_1-1, n_2+1} q \mu_2 r_1 (n_2+1) = \\
& = R_{n_1, n_2} a - \lambda R_{n_1, n_2} E_{n_1+n_2}^N + x q \bar{E}_{n_1}^0 R_{n_1-1, n_2} + x(1-q) \bar{E}_{n_2}^0 R_{n_1, n_2-1} \\
& - \mu_1 r_2 (n_1+1) R_{n_1+1, n_2} \bar{E}_{n_1+n_2}^N - \mu_2 r_2 (n_2+1) R_{n_1, n_2+1} \bar{E}_{n_1+n_2}^N.
\end{aligned} \tag{23}$$

Рассмотрим первое уравнение системы (6), дифференцируем его по x , получим урав-

нение

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial R_{n_1, n_2}}{\partial x} \{ -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) - x(\tau) \bar{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1-q) n_2 + \lambda E_{n_1+n_2}^N \} + \\
& + \frac{\partial R_{n_1-1, n_2}}{\partial x} \{ \lambda q + x(\tau) q \} + \\
& + \frac{\partial R_{n_1, n_2-1}}{\partial x} \{ \lambda (1-q) + x(\tau) (1-q) \} + \\
& + \frac{\partial R_{n_1+1, n_2}}{\partial x} \{ \mu_1 r_0 (n_1+1) + \mu_1 r_2 (n_1+1) \} + \\
& + \frac{\partial R_{n_1, n_2+1}}{\partial x} \{ \mu_2 r_0 (n_2+1) + \mu_2 r_2 (n_2+1) \} + \\
& + \frac{\partial R_{n_1+1, n_2-1}}{\partial x} \mu_1 r_1 (1-q) (n_1+1) + \\
& + \frac{\partial R_{n_1-1, n_2+1}}{\partial x} \mu_2 r_1 q (n_2+1) - \\
& - R_{n_1, n_2} x \bar{E}_{n_1+n_2}^N + R_{n_1-1, n_2} x q \bar{E}_{n_1}^0 + R_{n_1, n_2-1} x (1-q) \bar{E}_{n_2}^0 = 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Учитывая (24) и последнее уравнение для φ , запишем равенство

$$\varphi_{n_1, n_2} = \frac{\partial R_{n_1, n_2}}{\partial x}, \tag{25}$$

где $\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \varphi_{n_1, n_2} = 0$. В силу (23) g_{n_1, n_2} является частным решением системы (24). Следовательно, она удовлетворяет условию

$$\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} g_{n_1, n_2} = 0. \tag{26}$$

Тогда решение g_{n_1, n_2} системы (24), удовлетворяющее условию (26), определяется однозначно.

Теперь рассмотрим второе уравнение системы (17), в которую подставляем разложение (20)

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + j a \varepsilon w \Phi(w, \tau) \left\{ 1 + j \varepsilon w \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1, n_2} \right\} = \\
& = (j \varepsilon w + \frac{(j \varepsilon w)^2}{2}) \left[\lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \Phi(w, \tau) \{ R_{n_1, n_2} + j \varepsilon w f_{n_1, n_2} \} + \right. \\
& + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 \Phi(w, \tau) \{ R_{n_1, n_2} + j \varepsilon w f_{n_1, n_2} \} + \\
& + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 \Phi(w, \tau) \{ R_{n_1, n_2} + j \varepsilon w f_{n_1, n_2} \} + \\
& \left. + j \varepsilon \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} \frac{\partial \Phi_{n_1, n_2}}{\partial w} - (1 - j \varepsilon w) x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} \Phi(w, \tau) \{ R_{n_1, n_2} + j \varepsilon w f_{n_1, n_2} \} \right].
\end{aligned}$$

Тогда с помощью уравнения (14)

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = & (jw\varepsilon)^2 \Phi(w, \tau) \left[\lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1, n_2} + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 f_{n_1, n_2} + \right. \\
& + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} n_2 f_{n_1, n_2} - x \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1, n_2} + x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2} - a \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1, n_2} \Big] + \\
& + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \Phi(w, \tau) \left[\lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} R_{n_1, n_2} + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 R_{n_1, n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} n_2 R_{n_1, n_2} - \right. \\
& \left. - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2} \right] + (j\varepsilon)^2 w \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2} \frac{\partial \Phi_{n_1, n_2}}{\partial w},
\end{aligned}$$

получаем следующее уравнение,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi(w, \tau)/\partial \tau}{\Phi(w, \tau)} = & \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau) \left[2\lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1, n_2} + 2\mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 f_{n_1, n_2} + \right. \\
& + 2\mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} n_2 f_{n_1, n_2} - 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} f_{n_1, n_2} + 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2} - \\
& \left. - 2a \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1, n_2} + a \right] - w \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2} \frac{\partial \Phi(w, \tau)/\partial w}{\Phi(w, \tau)},
\end{aligned}$$

в которое мы подставляем (22)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi(w, \tau)/\partial \tau}{\Phi(w, \tau)} = & \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau) \left[2\lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} g_{n_1, n_2} + 2\mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 g_{n_1, n_2} + \right. \\
& + 2\mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} n_2 g_{n_1, n_2} - 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} g_{n_1, n_2} + \\
& \left. + 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2} + a \right] + w \frac{\partial \Phi(w, \tau)/\partial w}{\Phi(w, \tau)} \left[\lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \varphi_{n_1, n_2} + \right. \\
& + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 \varphi_{n_1, n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} n_2 \varphi_{n_1, n_2} - \\
& \left. - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} \varphi_{n_1, n_2} - \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2} \right]. \tag{27}
\end{aligned}$$

Результатом второго этапа асимптотического анализа является $b(x)$, определенная следующим образом

$$\begin{aligned}
b(x) = & 2\lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} g_{n_1, n_2} + 2\mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 g_{n_1, n_2} + 2\mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 g_{n_1, n_2} - \\
& - 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} g_{n_1, n_2} + 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2} + a.
\end{aligned}$$

5 МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКО ДИФФУЗИОННОГО АНАЛИЗА

Построим аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок на орбите методом асимптотически диффузионного анализа. Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 2.2. Предельное распределение вероятностей нормированного числа заявок на орбите в условии растущего времени задержки заявок на орбите имеет функцию плотности вероятности

$$\pi(z) = \frac{C}{b(z)} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^z \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}, \quad (28)$$

где C – нормировочная константа,

$$\begin{aligned} a(x) = & \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} R_{n_1, n_2} - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} R_{n_1, n_2} + \\ & + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 R_{n_1, n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 R_{n_1, n_2}, \\ b(x) = & 2\lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} g_{n_1, n_2} + 2\mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 g_{n_1, n_2} + 2\mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 g_{n_1, n_2} - \\ & - 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} g_{n_1, n_2} + 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2} + a, \end{aligned}$$

g_{n_1, n_2} определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} & g_{n_1, n_2} (-(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 + \lambda E_{n_1+n_2}^N - x \bar{E}_{n_1+n_2}^N) + \\ & + g_{n_1-1, n_2} (\lambda q \bar{E}_{n_1}^0 + x q \bar{E}_{n_1}^0) + g_{n_1, n_2-1} (\lambda (1 - q) \bar{E}_{n_2}^0 + x (1 - q) \bar{E}_{n_2}^0) + \\ & + g_{n_1+1, n_2} (\mu_1 r_0 (n_1 + 1) \bar{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) \bar{E}_{n_1+n_2}^N) + \\ & + g_{n_1, n_2+1} (\mu_2 r_0 (n_2 + 1) \bar{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) \bar{E}_{n_1+n_2}^N) + \\ & + g_{n_1+1, n_2-1} (1 - q) \mu_1 r_1 (n_1 + 1) + g_{n_1-1, n_2+1} q \mu_2 r_1 (n_2 + 1) = \\ & = R_{n_1, n_2} a - \lambda R_{n_1, n_2} + x q E_{n_1}^0 R_{n_1-1, n_2} + x (1 - q) \bar{E}_{n_2}^0 R_{n_1, n_2-1} \\ & - \mu_1 r_2 (n_1 + 1) R_{n_1+1, n_2} \bar{E}_{n_1+n_2}^N - \mu_2 r_2 (n_2 + 1) R_{n_1, n_2+1} \bar{E}_{n_1+n_2}^N, \\ & \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} g_{n_1, n_2} = 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Подставим $b(x)$ в (27)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial \tau}{\Phi(w, \tau)} &= \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau) b(x) - w \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{\Phi(w, \tau)} \left[\lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \varphi_{n_1, n_2} + \right. \\ &+ \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 \varphi_{n_1, n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 \varphi_{n_1, n_2} - \\ &\left. - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} \varphi_{n_1, n_2} - \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} &\lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \varphi_{n_1, n_2} + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 \varphi_{n_1, n_2} + \\ &+ \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 \varphi_{n_1, n_2} - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} \varphi_{n_1, n_2} - \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2}. \end{aligned}$$

Подставим (25) в последнее выражение, получим

$$\begin{aligned} &\lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial R_{n_1, n_2}}{\partial x} + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 \frac{\partial R_{n_1, n_2}}{\partial x} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 \frac{\partial R_{n_1, n_2}}{\partial x} - \\ &- x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} \frac{\partial R_{n_1, n_2}}{\partial x} - \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Рассмотрим функцию $a(x)$, найдем ее производную по x , учитывая, что R_{n_1, n_2} , как решение зависит от x

$$\begin{aligned} a'(x) &= \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} \frac{\partial R_{n_1, n_2}}{\partial x} - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial R_{n_1, n_2}}{\partial x} - \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} R_{n_1, n_2} + \\ &+ \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 \frac{\partial R_{n_1, n_2}}{\partial x} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 \frac{\partial R_{n_1, n_2}}{\partial x}. \end{aligned}$$

Тогда (29) перепишем в виде

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = a'(x) w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} + \frac{(jw)^2}{2} b(x) \Phi(w, \tau) \quad (31)$$

Уравнение с это преобразование Фурье уравнения Фокера-Планка для плотности распределения вероятностей $P(y, \tau)$ значений централизованного и нормированного количества заявок

на орбите. Находя обратное преобразование Фурье от (31), получим

$$\frac{\partial P(y, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y}\{a'(x)yP(y, \tau)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{b(x)P(y, \tau)\}. \quad (32)$$

Следовательно $P(y, \tau)$ плотность распределения вероятностей диффузионного процесса [10], который обозначим $y(\tau)$ с коэффициентом переносом $a(x)$ и коэффициентом диффузии $b(x)$

$$dy(\tau) = a'(x)y d\tau + \sqrt{b(x)}dw(\tau). \quad (33)$$

Рассмотрим стохастический процесс нормированного числа заявок на орбите

$$z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y(\tau), \quad (34)$$

где $\varepsilon = \sqrt{\sigma}$, исходя из (14), $dx(\tau) = a(x)d\tau$, следует

$$dz(\tau) = d(x(\tau) + \varepsilon y(\tau)) = (a(x) + \varepsilon y a'(x))d\tau + \varepsilon \sqrt{b(x)}dw(\tau). \quad (35)$$

Разложим $a(z)$ в ряд

$$\begin{aligned} a(z) &= a(x + \varepsilon y) = a(x) + \varepsilon y a'(x) + O(\varepsilon^2), \\ \varepsilon \sqrt{b(z)} &= \varepsilon \sqrt{b(x + \varepsilon y)} = \varepsilon \sqrt{b(x)} + O(\varepsilon) = \sqrt{\sigma b(x)} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Перепишем уравнение (35) с точностью до $O(\varepsilon^2)$

$$dz(\tau) = a(z)d\tau + \sqrt{\sigma b(z)}dw(\tau). \quad (36)$$

Обозначим плотность распределения вероятностей для процесса $z(\tau)$

$$\pi(z, \tau) = \frac{\partial P\{z(\tau) < z\}}{\partial z}.$$

Так как $z(\tau)$ – это решение стохастического дифференциального уравнения (36), следовательно, процесс является диффузионным и для его плотности распределения вероятностей можем записать уравнение Фокера-Планка

$$\frac{\partial \pi(z, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial z}\{a(z)\pi(z, \tau)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{\sigma b(z)\pi(z, \tau)\}. \quad (37)$$

Предполагая, что существует стационарный режим, обозначим

$$\pi(z, \tau) = \pi(z), \quad (38)$$

запишем уравнение Фокера-Планка для стационарного распределения вероятностей $\pi(z)$

$$\begin{aligned}(a(z)\pi(z))' + \frac{\sigma}{2}(b(z)\pi(z))'' &= 0, \\ -a(z)\pi(z) + \frac{\sigma}{2}(b(z)\pi(z))' &= 0.\end{aligned}$$

Решая данную систему уравнений получаем плотность распределения вероятностей $\pi(z)$ нормированного числа заявок на орбите

$$\pi(z) = \frac{C}{b(z)} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^z \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}. \quad (39)$$

Теорема доказана.

Получим дискретное распределение вероятностей

$$P(i) = \pi(\sigma i) / \sum_{i=0}^{\infty} \pi(\sigma i), \quad (40)$$

которое будем называть диффузионной аппроксимацией дискретного распределения вероятностей количества заявок на орбите для изучаемой системы.

Возможно показать, что условием существования стационарного режима рассматриваемой системы является неравенство

$$\lambda < Nr_0 / \left(\frac{q}{\mu_1} + \frac{1-q}{\mu_2} \right). \quad (41)$$

Введем следующую замену для того, чтобы среднее время обслуживания равнялось единице

$$q = \frac{\mu_1(1 - \mu_2)}{\mu_1 - \mu_2}.$$

В таком случае неравенство (41) имеет вид

$$\lambda < Nr_0.$$

Эксперимент 1.

На рисунке 2 представлены графики изменения $a(x)$ и $b(x)$, в зависимости от x , на рисунке 3 ряд распределения вероятностей количества заявок на орбите для следующих параметров системы $N = 2, r_0 = 0,5, r_1 = 0,2, r_2 = 0,3, \lambda = 0,8, \mu_1 = 1,2, \mu_2 = 0,6, q = 0,8, \sigma = 0.2$.

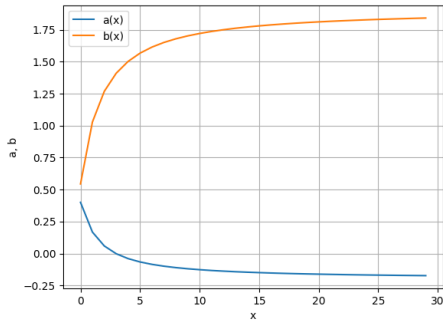


Рисунок 2 – Коэффициенты переноса $a(x)$ и диффузии $b(x)$

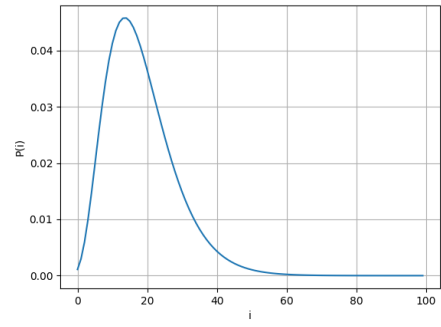


Рисунок 3 – Ряд распределения вероятностей числа заявок на орбите

Эксперимент 2.

На рисунке 4 представлены графики изменения $a(x)$ и $b(x)$, в зависимости от x , на рисунке 5 ряд распределения вероятностей количества заявок на орбите для следующих параметров системы $N = 10$, $r_0 = 0,5$, $r_1 = 0,2$, $r_2 = 0,3$, $\lambda = 0,8$, $\mu_1 = 1,2$, $\mu_2 = 0,6$, $q = 0,8$, $\sigma = 0.1$.

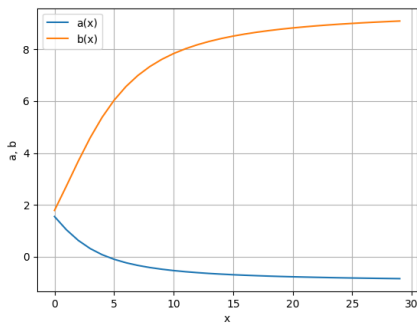


Рисунок 4 – Коэффициенты переноса $a(x)$ и диффузии $b(x)$

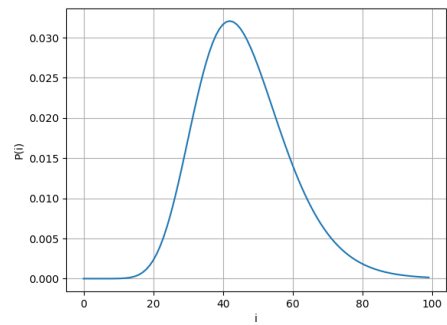


Рисунок 5 – Ряд распределения вероятностей числа заявок на орбите

Численные результаты были получены с помощью библиотек NumPy [20] (для $a(x)$ и $b(x)$) языка программирования Python, реализация выложена в открытый доступ [14]. Данные графики были построены с помощью библиотеки Matplotlib [17] языка Python.

Сравним полученные результаты с имитационной моделью [16]. Для этого обозначим ряд распределения вероятностей числа заявок на орбите, полученный в результате [16], – $P^{(2)}(i)$ и представим на рисунке 6 $P(i)$ и $P^{(2)}(i)$ для следующих параметров системы $N = 64$, $r_0 = 0,5$, $r_1 = 0,2$, $r_2 = 0,3$, $\lambda = 40,96$, $\mu_1 = 1,2$, $\mu_2 = 0,6$, $q = 0,8$, $\sigma = 0.2$.

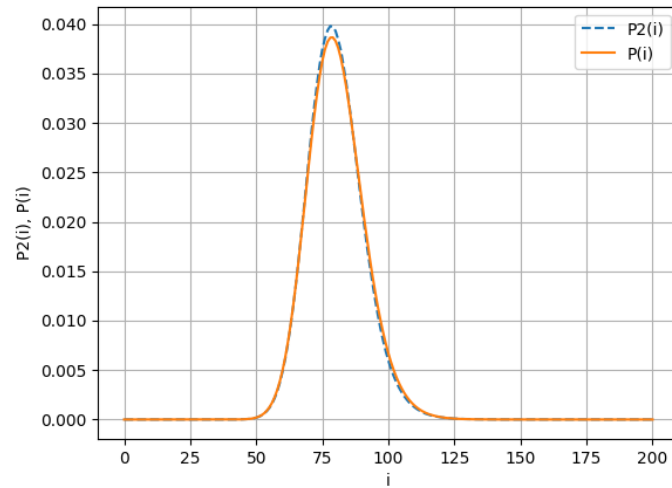


Рисунок 6 – Ряд распределения вероятностей числа заявок на орбите, полученный численно $P(i)$ и с помощью имитационной модели $P^{(2)}(i)$

Визуально два ряда распределения вероятности выглядят очень близкими. Для сравнения двух распределений вероятностей численно будем использовать расстояние Колмогорова

$$\Delta = \max_{0 \leq n \leq \infty} \left| \sum_{i=0}^n (P(i) - P^{(2)}(i)) \right|.$$

Приведем полученные результаты в таблице 1 для изменяющегося числа приборов N и σ .

Таблица 1 – Расстояние Колмогорова

Δ	$\sigma = 5$	$\sigma = 1$	$\sigma = 0,2$	$\sigma = 0,04$
$N = 2$	0,02124	0,02185	0,00179	0,00060
$N = 4$	0,03852	0,02108	0,00206	0,00030
$N = 16$	0,07338	0,01649	0,00266	0,00056
$N = 64$	0,03329	0,00582	0,00176	0,00032

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе представлено исследование RQ-системы с обратной связью $M|H_2|N$. Анализ моделей, выполненный в работе, представлен двумя методами исследования: методом асимптотического и асимптотически диффузионного анализа. В работе построены аппроксимации распределений вероятностей числа приборов, занятых на первой и второй фазе в указанных системах в условии большой задержки заявок на орбите. Также построены диффузионные аппроксимации распределений вероятностей числа заявок на орбите для всех систем. Приведено несколько численных примеров и сравнения с результатами имитационного моделирования.

Основными научными достижениями данного исследования являются:

1. Нахождение аппроксимации распределений вероятностей числа приборов, занятых на первой и второй фазе в системах $M|H_2|2$, $M|H_2|N$.
2. Модификации метода асимптотического анализа для исследования RQ-систем с обратной связью в предельных условиях согласованно высокой интенсивности вызывания заявок, согласованно длительного обслуживания вызываемых заявок и большой задержки заявок на орбите.
3. Алгоритм применения метода асимптотически-диффузионного анализа для исследования RQ-систем с обратной связью.
4. Аппроксимации распределений вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системах с обратной связью при различных условиях функционирования систем.

Результаты, описанные в данной работе, были представлены в докладах на следующих конференциях:

1. VII Международная молодежная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», г. Томск, 28–30 мая, 2020;
2. VIII Международная молодежная научная конференция «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем», г. Томск, 22–30 мая, 2021.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, К.И. Николаевич. – М.:КомКнига, 2005. – 400 с.
2. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей: учебное пособие / Гельфонд А.О. – М.: КомКнига, 2006. – 376 с.
3. Ивченко Г.И. Теория массового обслуживания: учебное пособие / Г.И. Ивченко, В.А. Каштанов, И.Н. Коваленко. – М. : Высшая школа , 1982. – 296 с.
4. Любина Т.В. Исследование математических моделей динамических и адаптивных RQ-систем с входящим ММРР-поток: дисс. ... канд. физ. мат. наук. – Томск., 2013. – 163 с.
5. Моисеев А.Н. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания / А.Н. Моисеев, Назаров А.А.– Томск: Изд-во научно-технической литературы, 2015. – 240 с.
- 6.Моисеева С. П. Численное исследование RQ-системы M|M|1 в условии большой загрузки / С. П. Моисеева, А. А. Назаров // Информационные технологии и математическое моделирование. Ч. 1 : материалы X Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. – 2011. – С. 160-164.
- 7.Назаров А. А. Асимптотический анализ двухфазной RQ-системы M|M|1 в условии большой задержки на орбите / А. А. Назаров, А. А. Анисимова // Марчуковские научные чтения – 2017, 25 июня - 14 июля 2017 года : труды. – 2017. – С. 641–647.
- 8.Назаров А. А. Исследование двухфазной RQ-системы M|M|1 методом моментов /А. А. Назаров, А. А. Анисимова // Марчуковские научные чтения – 2017. – С. 157.
9. Назаров А.А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А.А. Назаров, Моисеева С. П. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
10. Назаров А.А. Теория вероятностей и случайных процессов / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. – Томск : Изд-во научно-технической литературы, 2006. – 199 с.
11. Назаров А.А. Теория массового обслуживания/ А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. – Томск : Изд-во научно-технической литературы, 2010. – 228 с.
12. Artalejo J.R. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach / J. R. Artalejo, A. Gomez-Corral. Springer, 2008. – 309 p.
13. Falin, G.I. Retrial queues / G.I. Falin, J.G.C. Templeton. London : Chapman Hall, 1997.–328
14. GitHub / calculationPi_a_b. – [M].
– https://github.com/ValeriyaRyzhikova/calculationPi_a_b (дата обращения: 01.06.2021).
15. GitHub / checkPhase2EquationR. – [M].
– <https://github.com/ValeriyaRyzhikova/checkPhase2EquationR> (дата обращения: 01.06.2021).
16. GitHub / TwoPhaseOrbitImitation. – [M].
– <https://github.com/ValeriyaRyzhikova/TwoPhaseOrbitImitation> (дата обращения: 01.06.2021).
17. Matplotlib documentation. – [M].
– <https://matplotlib.org/stable/contents.html> (дата обращения 04.06.2021.).
18. Moiseev A. N. Asymptotic diffusion analysis of multi-server retrial queue with hyper-

exponential service / A. N. Moiseev, A. A. Nazarov, S. V. Paul // Mathematics. – 2020. – № 4. – P. 1 – 16.

19. Nazarov A.A. Method of asymptotic diffusion analysis of queueing system $M|M|N$ with feedback / A.A. Nazarov, S.V. Paul, E.A. Pavlova // Lecture Notes in Computer Science. – 2020. – P. 131–143.

20. NumPy 1.2 documentation / Linear algebra. – [M.].

-- <https://numpy.org/doc/1.20/reference/routines.linalg.html> (дата обращения 10.04.2021.).

21. SymPy 1.6 documentation/ Matrices. – [M.].

– <https://docs.sympy.org/latest/modules/matrices/matrices.html/> (дата обращения: 28.10.2020.).