МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

на тему:
«Исследование двулинейной системы M$|H_2|$N с обратной связью»

Выполнил:
студент 4 курса 931720 гуппы
Рыжикова В.В.

Преподаватель:
доктор тех. наук, профессор:
Назаров А.А.

Томск 2021 г.

Contents

1 Введение

Передача данных это большая проблема, особенно сейчас, когда передача данных очень часто используется для предоставления интернет или телекомуникационных услуг. При исследовании данных проблем часто используются системы массового обслуживания [4, 5, 7, 11], в том числе двухфазные систмы [3, 14, 15], а также когда имеется большое количество абонентов, системы с орбитой, также называемы RQ-системами [1, 10, 12, 13]. Данная работа же отличается совмещения двух этих особенностей с тем фактом, что система двулинейна, или говоря другими словами имеет два прибора.

2 Математическая модель и постановка задач

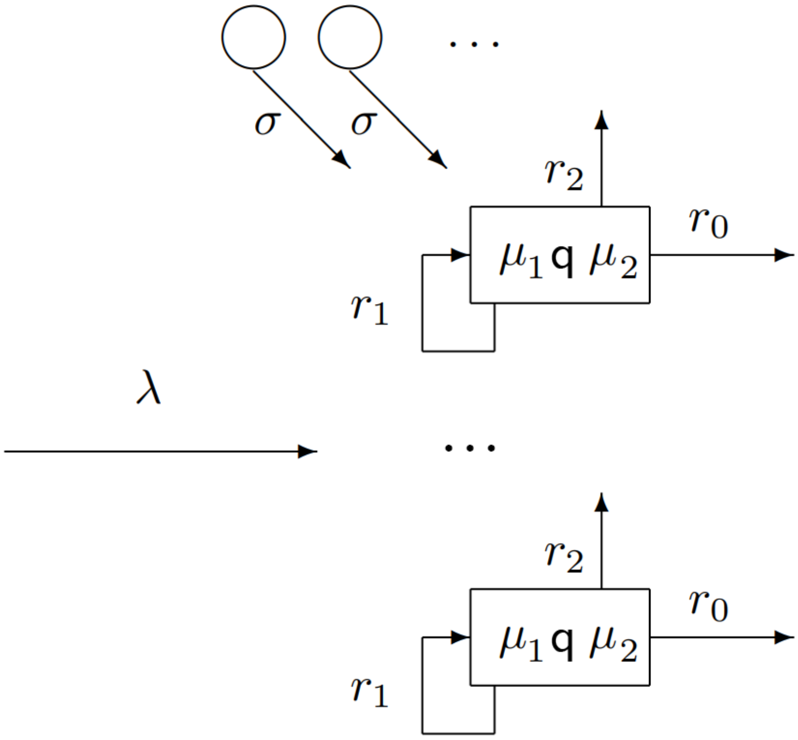

Figure 1: Система массового обслуживания M|H_2|N с обратной связью

Рассматривается RQ-система с обратной связью. Из простейшего потока заявка поступает на любой, из N имеющийся, свободный прибор. Время пребывания на приборах распределено по гиперэкспоненциальному закону. Это означает, что заявка на приборе с вероятностью q поступает на первую фазу, с экспоненциальным распределением с параметром μ_1, и с вероятность 1-q на вторую, с параметром μ_2.

После завершения обслуживания заявка с вероятностью r_0 покидает систему, с вероятностью r_1 мгновенно поступает на повторное обслуживание и с вероятностью r_2 уходит на орбиту. Так же, если на момент поступления заявки из потока оба прибора заняты, то заявка уходит на орбиту. Через некоторое время задержки, продолжительность которого распределена по экспоненциальному закону, заявка с орбиты вновь обращается к приборам.

Пусть i(t) – число заявок на орбите, $n_1(t)$ - число приборов занятых на первой фазе, $n_2(t)$ - число приборов занятых на второй фазе

Под состоянием системы будем понимать состояние процесса $\{n_1(\text{t}),\ n_2(\text{t}),\ \text{i(t)}\}$

в момент времени t. Обозначим вероятности следующим образом – $P(n_1(t) = n_2, n_2(t) = n_2, i(t) = i)$= P_{n_1,n_2}(i,t)-вероятность того, что n_1 –приборов занято на первой фазе, а n_2 –приборов занято на второй фазе
При этом P_{n_1,n_2}(i,t)=0, если $n_1 < 0$, $n_2 < 0$ или $n_1+n_2 >$ N
В каждой вероятности на орбите находятся i заявок в момент времени t.
Будет применять методы асимтотического анализа [1, 7, 9, 11] и асимптотически диффузионного анализа [1].

Цель курсовой работы: исследовать двулинейную систему M|H_2|N с обратной связью.

Задачи:
1)Построить математическую модель двулинейной системы M|H_2|M с обратной связью.
2)Составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова.
3)С помощью метода асимптотического анализа найти коэффициенты переноса и диффузии дифференциального уравнения двулинейной системы M|H_2|N с обратной связью.
4)С помощью метода асимптотически диффузионного анализа вычислить плотность распределения вероятностей произвольного числа заявок на орбите и получить дискретное распределение вероятностей.

3 Уравнения Колмогорова

Для данных вероятностей составим систему уравнений в конечных разностях [4,5,6]. Для упрощения выражений введем индикатор:

$$E_a^b = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$$

$$\overline{E}_a^b = 1 - E_a^b$$

$$\begin{aligned}
P_{n_1,n_2}(i, t+\Delta t) =&(1 - \Delta t(\lambda + i\sigma\overline{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2))P_{n_1,n_2}(i,t) + \Delta t\mu_1 r_1 q n_1 P_{n_1,n_2}(i,t) + \\
&+ \Delta t\mu_2(1-q)r_1 n_2 P_{n_1,n_2}(i,t) + \Delta t\lambda E_{n_1+n_2}^N P_{n_1,n_2}(i-1,t) + \\
&+ \Delta t\lambda q P_{n_1-1,n_2}(i,t) + \Delta t(i+1)\sigma q P_{n_1-1,n_2}(i+1,t) + \\
&+ \Delta t\lambda(1-q)P_{n_1,n_2-1}(i,t) + \Delta t(i+1)\sigma(1-q)P_{n_1,n_2-1}(i+1,t) + \\
&+ \Delta t\mu_1 r_0(n_1+1)P_{n_1+1,n_2}(i,t) + \Delta t\mu_1 r_2(n_1+1)P_{n_1+1,n_2}(i-1,t) + \\
&+ \Delta t\mu_2 r_0(n_2+1)P_{n_1,n_2+1}(i,t) + \Delta t\mu_2 r_2(n_2+1)P_{n_1,n_2+1}(i-1,t) + \\
&+ \Delta t\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)P_{n_1+1,n_2-1}(i,t) + \Delta t\mu_2 r_1 q(n_2+1)P_{n_1-1,n_2+1}(i,t) + o(\Delta t)
\end{aligned}$$

У первого слагаемого в правой части перемножаем единицу на соответствующею вероятноь переносим полученное слагаемое со знаком минус в левую сторону, а после делим на Δt, получая данные уранения.

$$\begin{aligned}
\frac{P_{n_1,n_2}(i,t+\Delta t) - P_{n_1,n_2}(i,t)}{\Delta t} =&-(\lambda + i\sigma\overline{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)P_{n_1,n_2}(i,t) + n_1\mu_1 r_1 q P_{n_1,n_2}(i,t) + \\
&+ \mu_2 r_1(1-q)n_2 P_{n_1,n_2}(i,t) + \lambda E_{n_1+n_2}^N P_{n_1,n_2}(i-1,t) + \\
&+ \lambda q P_{n_1-1,n_2}(i,t) + (i+1)\sigma q P_{n_1-1,n_2}(i+1,t) + \\
&+ \lambda(1-q)P_{n_1,n_2-1}(i,t) + (i+1)\sigma(1-q)P_{n_1,n_2-1}(i+1,t) + \\
&+ \mu_1 r_0(n_1+1)P_{n_1+1,n_2}(i,t) + \mu_1 r_2(n_1+1)P_{n_1+1,n_2}(i-1,t) + \\
&+ \mu_2 r_0(n_2+1)P_{n_1,n_2+1}(i,t) + \mu_2 r_2(n_2+1)P_{n_1,n_2+1}(i-1,t) + \\
&+ \mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)P_{n_1+1,n_2-1}(i,t) + \mu_2 r_1 q(n_2+1)P_{n_1-1,n_2+1}(i,t) \\
&+ o(\Delta t)/\Delta t
\end{aligned}$$

Пусть $\Delta t \to 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{dP_{n_1,n_2}(i,t)}{\partial t} = &-(\lambda + i\sigma\overline{E}^{N}_{n_1+n_2} + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)P_{n_1,n_2}(i,t) + \mu_1 r_1 q n_1 P_{n_1,n_2}(i,t) + \\
&+ \mu_2 r_1(1-q)n_2 P_{n_1,n_2}(i,t) + \lambda E^{N}_{n_1+n_2} P_{n_1,n_2}(i-1,t) + \\
&+ \lambda q P_{n_1-1,n_2}(i,t) + (i+1)\sigma q P_{n_1-1,n_2}(i+1,t) + \\
&+ \lambda(1-q)P_{n_1,n_2-1}(i,t) + (i+1)\sigma(1-q)P_{n_1,n_2-1}(i+1,t) + \\
&+ \mu_1 r_0(n_1+1)P_{n_1+1,n_2}(i,t) + \mu_1 r_2(n_1+1)P_{n_1+1,n_2}(i-1,t) + \\
&+ \mu_2 r_0(n_2+1)P_{n_1,n_2+1}(i,t) + \mu_2 r_2(n_2+1)P_{n_1,n_2+1}(i-1,t) + \\
&+ \mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)P_{n_1+1,n_2-1}(i,t) + \mu_2 r_1 q(n_2+1)P_{n_1-1,n_2+1}(i,t)
\end{aligned}
$$

Введем частичные характерестические функции:

$$
H_{n_1,n_2}(u,t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{iuj} P_{n_1,n_2}(i,t)
$$

Тогда уравнения будут иметь вид:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} = &-(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)H_{n_1,n_2}(u,t) + j\sigma\overline{E}^{N}_{n_1+n_2}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u} + \\
&+ \mu_1 r_1 q n_1 H_{n_1,n_2}(u,t) + \mu_2 r_1(1-q)n_2 H_{n_1,n_2}(u,t) + \lambda e^{ju} E^{N}_{n_1+n_2} H_{n_1,n_2}(u,t) + \\
&+ \lambda q H_{n_1-1,n_2}(u,t) - j\sigma q e^{-ju}\frac{\partial H_{n_1-1,n_2}(i+1,t)}{\partial u} + \\
&+ \lambda(1-q)H_{n_1,n_2-1}(u,t) - j\sigma(1-q)e^{-ju}\frac{\mathrm{d}H_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\mathrm{d}u} + \\
&+ \mu_1 r_0(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t) + \mu_1 r_2 e^{ju}(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t) + \\
&+ \mu_2 r_0(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t) + \mu_2 r_2 e^{ju}(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t) + \\
&+ \mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)H_{n_1+1,n_2-1}(u,t) + (n_2+1)\mu_2 r_1 q H_{n_1-1,n_2+1}(u,t)
\end{aligned}
$$

Просуммируем по n_1 и n_2

$$
\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} = &-\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t) + j\sigma\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\overline{E}_{n_1+n_2}^{N}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}\\
&-\mu_1\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t) - \mu_2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t)\\
&+\mu_1r_1q\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t) + \mu_2r_1(1-q)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t)\\
&+\lambda e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}E_{n_1+n_2}^{N}H_{n_1,n_2}(u,t)\\
&+\lambda q\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}H_{n_1-1,n_2}(u,t) - j\sigma q e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1-1,n_2}(u,t)}{\partial u}\\
&+\lambda(1-q)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}H_{n_1,n_2-1}(u,t)u - j\sigma(1-q)e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\partial u}\\
&+\mu_1r_0\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t) + \mu_1r_2e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t)\\
&+\mu_2r_0\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t) + \mu_2r_2e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)\\
&+\mu_1r_1(1-q)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_1+1)H_{n_1+1,n_2-1}(u,t)\\
&+\mu_2r_1q\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}(n_2+1)H_{n_1-1,n_2+1}(u,t)
\end{aligned}
$$

Избавимся от индикаторов, путем исключения некотрых компонент из суммы

$$\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} = -\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t) + j\sigma\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}$$
$$-\mu_1(r_0+r_2)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t) - \mu_2(r_0+r_2)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t)$$
$$+\mu_1r_1q\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t) + \mu_2r_1(1-q)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t)$$
$$+\lambda e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)$$
$$+\lambda q\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_2}H_{n_1,n_2}(u,t) - j\sigma q e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}$$
$$+\lambda(1-q)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t) - j\sigma(1-q)e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}$$
$$+\mu_1r_0\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t) + \mu_1r_2e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t)$$
$$+\mu_2r_0\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t) + \mu_2r_2e^{ju}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t)$$

Сократим некоторый слагаемые

$$\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} = \lambda(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)$$
$$-j\sigma q(e^{-ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}$$
$$-j\sigma(1-q)(e^{-ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}$$
$$+\mu_1r_2(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}n_1H_{n_1,n_2}(u,t) + \mu_2r_2(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}n_2H_{n_1,n_2}(u,t)$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} =&\lambda(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} H_{n_1,n_2}(u,t)\\
&-j\sigma(e^{-ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}\\
&+\mu_1 r_2(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} n_1 H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2 r_2(e^{ju}-1)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} n_2 H_{n_1,n_2}(u,t)
\end{aligned}
$$

И вынесем $(e^{ju}-1)$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} =&(e^{ju}-1)\{\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} H_{n_1,n_2}(u,t)\\
&+j\sigma e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}\\
&+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} n_1 H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} n_2 H_{n_1,n_2}(u,t)\}
\end{aligned}
$$

Получим уравнения

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} =& -(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)H_{n_1,n_2}(u,t)+j\sigma\overline{E^N_{n_1+n_2}}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}+\\
&+\mu_1 r_1 q n_1 H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2 r_1(1-q)n_2 H_{n_1,n_2}(u,t)+\lambda e^{ju}E^N_{n_1+n_2}H_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\lambda q H_{n_1-1,n_2}(u,t)-j\sigma q e^{-ju}\frac{\partial H_{n_1-1,n_2}(i+1,t)}{\partial u}+\\
&+\lambda(1-q)H_{n_1,n_2-1}(u,t)-j\sigma(1-q)e^{-ju}\frac{\mathrm{d}H_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\mathrm{d}u}+\\
&+\mu_1 r_0(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t)+\mu_1 r_2 e^{ju}(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t)+\\
&+\mu_2 r_0(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\mu_2 r_2 e^{ju}(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\\
&+\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)H_{n_1+1,n_2-1}(u,t)+(n_2+1)\mu_2 r_1 q H_{n_1-1,n_2+1}(u,t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} =&(e^{ju}-1)\{\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)\\
&+j\sigma e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial H_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}\\
&+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}n_1 H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}n_2 H_{n_1,n_2}(u,t)\}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

4 Первый этап асимтотического анализа

$$\sigma = \varepsilon, \tau = t\varepsilon, u = \varepsilon w, H_{n_1,n_2}(u,t) = F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) \tag{2}$$

Тогда мы можем переписать уравнение (1)

$$\begin{aligned}
\varepsilon\frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = & -(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+j\overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\\
&+\mu_1 r_1 q n_1 F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\mu_2 r_1(1-q)n_2 F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\lambda e^{j\varepsilon w}E^N_{n_1+n_2}F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\lambda q F_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&-jqe^{-j\varepsilon w}\frac{\partial F_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\lambda(1-q)F_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&-j(1-q)e^{-j\varepsilon w}\frac{\mathrm{d}F_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)}{\mathrm{d}w}+\mu_1 r_0(n_1+1)F_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_1 r_2 e^{j\varepsilon w}(n_1+1)F_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\mu_2 r_0(n_2+1)F_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_2 r_2(n_2+1)e^{j\varepsilon w}F_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)F_{n_1+1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_2 r_1 q(n_2+1)F_{n_1-1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon),\\
\varepsilon\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = & (e^{j\varepsilon w}-1)\{\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)\\
&-je^{-j\varepsilon w}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}\\
&+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}n_1 F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}n_2 F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)\}
\end{aligned} \tag{3}$$

При условии, что $\varepsilon \to 0$ можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. В рассматриваемой системе с обратной связью компоненты R_{n_1,n_2} распределения вероятностей определяется уравнением

$$\begin{aligned}
&L_{n_1,n_2} = (\mu_1\mu_2(1-r_1))^{N-(n_1+n_2)}\frac{N!}{(n_1+n_2)!}C^{n_1+n_2}_{n_2}(\mu_1(1-q))^{n_1}(\mu_2 q)^{n_2}(\lambda+x)^{n_1+n_2},\\
&c = \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}L_{n_1,n_2},\\
&R_{n_1,n_2} = \frac{L_{n_1,n_2}}{c}
\end{aligned} \tag{4}$$

$x = x(\tau) : x'(\tau) = a(x) = \lambda \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} R_{n_1,n_2} - x(\tau) \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} R_{n_1,n_2} + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} n_1 R_{n_1,n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} n_2 R_{n_1,n_2}$

Доказательство. Рассмотрим первое уравнение системы (3) в пределе $\varepsilon \to 0$, обозначим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_{n_1,n_2}(w, \tau, \varepsilon) = F_{n_1,n_2}(w, \tau)$$

и получим

$$\begin{aligned}
&-(\lambda + n_1\mu_1 + n_2\mu_2)F_{n_1,n_2}(w,\tau) + j\overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial F_{n_1,n_2}((w,\tau)}{\partial w} + \\
&+ \mu_1 r_1 q n_1 F_{n_1,n_2}(w,\tau) + \mu_2 r_1(1-q) n_2 F_{n_1,n_2}(w,\tau) + \\
&+ \lambda E^N_{n_1+n_2} F_{n_1,n_2}(w,\tau) + \lambda q F_{n_1-1,n_2}(w,\tau) + \\
&- jq\frac{\partial F_{n_1-1,n_2}(w,\tau)}{\partial w} + \lambda(1-q)F_{n_1,n_2-1}(w,\tau) + \\
&- j(1-q)\frac{\mathrm{d}F_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\mathrm{d}w} + \mu_1 r_0(n_1+1)F_{n_1+1,n_2}(w,\tau) + \\
&+ \mu_1 r_2(n_1+1)F_{n_1+1,n_2}(w,\tau) + \mu_2 r_0(n_2+1)F_{n_1,n_2+1}(w,\tau) + \\
&+ \mu_2 r_2(n_2+1)F_{n_1,n_2+1}(w,\tau) + \\
&+ \mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)F_{n_1+1,n_2-1}(w,\tau) + \\
&+ \mu_2 r_1 q(n_2+1)F_{n_1-1,n_2+1}(w,\tau) = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

Находим решение уравнения (5) в виде $F_{n_1,n_2}(w,\tau) = L_{n_1,n_2}e^{jwx(\tau)}$. Получим следующую систему

$$\begin{aligned}
&-(\lambda + \mu_1 n_1 + n_2\mu_2)L_{n_1,n_2} - x(\tau)\overline{E}^N_{n_1+n_2}L_{n_1,n_2} + \\
&+ \mu_1 r_1 q n_1 L_{n_1,n_2} + \mu_2 r_1(1-q)n_2 L_{n_1,n_2} + \\
&+ \lambda E^N_{n_1+n_2}L_{n_1,n_2} + \lambda q L_{n_1-1,n_2} - \\
&+ x(\tau) q L_{n_1-1,n_2} + \lambda(1-q)L_{n_1,n_2-1} - \\
&+ x(\tau)(1-q)L_{n_1,n_2-1} + \mu_1 r_0(n_1+1)L_{n_1+1,n_2} + \\
&+ \mu_1 r_2(n_1+1)L_{n_1+1,n_2} + \mu_2 r_0(n_2+1)L_{n_1,n_2+1} + \\
&+ \mu_2 r_2(n_2+1)L_{n_1,n_2+1} + \\
&+ \mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)L_{n_1+1,n_2-1} + \\
&+ \mu_2 r_1 q(n_2+1)L_{n_1-1,n_2+1} = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

Или

$$
\begin{aligned}
&L_{n_1,n_2}\{-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)-x(\tau)\overline{E}^N_{n_1+n_2}+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2+\lambda E^N_{n_1+n_2}\}+\\
&+L_{n_1-1,n_2}\{\lambda q+x(\tau)q\}+\\
&+L_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1-q)+x(\tau)(1-q)\}+\\
&+L_{n_1+1,n_2}\{\mu_1 r_0(n_1+1)+\mu_1 r_2(n_1+1)\}+\\
&+L_{n_1,n_2+1}\{\mu_2 r_0(n_2+1)+\mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+L_{n_1+1,n_2-1}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+L_{n_1-1,n_2+1}\mu_2 r_1 q(n_2+1)=0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Чтобы доказать это утверждение (4) воспользуемся символьным исчеслением на языке Python, с помощью библиотеки SymPy [16]. Однако, чтобы сделать это, нужно избавится от индикаторов, поэтому рассмоторим разные случаи:

$n_1=0, n_2=0$:

$$
\begin{aligned}
&L_{0,0}\{-\lambda-x(\tau)\}+\\
&+L_{1,0}\{\mu_1 r_0+\mu_1 r_2\}\\
&+L_{0,1}\{\mu_2 r_0+\mu_2 r_2\}=0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$n_1=0, n_2>0$
$n_1+n_2<N$:

$$
\begin{aligned}
&L_{0,n_2}\{-(\lambda+\mu_2 n_2)-x(\tau)+\mu_2 r_1(1-q)n_2\}+\\
&+L_{0,n_2-1}\{\lambda(1-q)+x(\tau)(1-q)\}\\
&+L_{1,n_2}\{\mu_1 r_0+\mu_1 r_2\}\\
&+L_{0,n_2+1}\{\mu_2 r_0(n_2+1)+\mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+L_{1,n_2-1}\mu_1 r_1(1-q)=0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$n_1>0, n_2=0$
$n_1+n_2<N$:

$$
\begin{aligned}
&L_{n_1,0}\{-(\lambda+\mu_1 n_1)-x(\tau)+\mu_1 r_1 q n_1\}+\\
&+L_{n_1-1,0}\{\lambda q+x(\tau)q\}\\
&+L_{n_1+1,0}\{\mu_1 r_0(n_1+1)+\mu_1 r_2(n_1+1)\}\\
&+L_{n_1,1}\{\mu_2 r_0+\mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+L_{n_1-1,n_2+1}\mu_2 r_1 q(n_2+1)=0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$n_1>0, n_2>0$
$n_1+n_2<N$:

$$
\begin{aligned}
&L_{n_1,n_2}\{-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)-x(\tau)+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2\}+\\
&+L_{n_1-1,n_2}\{\lambda q+x(\tau)q\}\\
&+L_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1-q)+x(\tau)(1-q)\}\\
&+L_{n_1+1,n_2}\{\mu_1 r_0(n_1+1)+\mu_1 r_2(n_1+1)\}\\
&+L_{n_1,n_2+1}\{\mu_2 r_0(n_2+1)+\mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+L_{n_1+1,n_2-1}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+L_{n_1-1,n_2+1}\mu_2 r_1 q(n_2+1)=0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$n_1=0, n_2=N:$

$$
\begin{aligned}
&L_{0,N}\{-(\lambda+N\mu_2)+N\mu_2 r_1(1-q)+\lambda\}+\\
&+L_{0,N-1}\{\lambda(1-q)+x(\tau)(1-q)\}+\\
&+L_{1,N-1}\mu_1 r_1(1-q)=0
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$n_1=N, n_2=0:$

$$
\begin{aligned}
&L_{N,0}\{-N\mu_1+N\mu_2 r_1 q\}+\\
&+L_{N-1,0}\{\lambda q+x(\tau)q\}\\
&+L_{N-1,1}\mu_2 r_1 q=0
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$n_1+n2=N,$
$n1\neq N, n2\neq N$:

$$
\begin{aligned}
&L_{n_1,n_2}\{-(\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2\}+\\
&+L_{n_1-1,n_2}\{\lambda q+x(\tau)q\}\\
&+L_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1-q)+x(\tau)(1-q)\}\\
&+L_{n_1+1,n_2-1}(n_1+1)\mu_1 r_1(1-q)+\\
&+L_{n_1-1,n_2+1}\mu_2 r_1 q(n_2+1)=0
\end{aligned}
\tag{14}
$$

В результате выполнения программы [17] получим, что левая часть уравнения так же равна 0, при подстановки решения (4), во всех случаях, кроме $n_1=0, n_2=N$. Результат выполнения следующий:

$$
-N\mu_2(qr_z-r1+1)(\mu_1 q(-\mu_1(q-1))^{(N-1)}(\lambda+x)^N-\mu_1(-\mu_1(q-1))^{(N-1)}(\lambda+x)^N+(-\mu_1(\lambda q-\lambda+qx-x))^N)
$$

По неизвестной причине, выражение не сокрашается до 0. Однако, если рассмотреть третию по счету скобку получим:

$\mu_1 q(-\mu_1(q-1))^{(N-1)} * (\lambda+x)^N - \mu_1(-\mu_1(q-1))^{(N-1)}(\lambda+x)^N + (-\mu_1(\lambda q - \lambda + qx - x))^N =$
$= \mu_1 q(\mu_1(1-q))^{(N-1)} * (\lambda+x)^N - m1 * (m1 * (1-q))^(N-1) * (\lambda+x)^N +$
$+ (m1(1-q)(l+x))^N =$
$= (\mu_1(\lambda-q))^{(N-1)}(\lambda+x)^N(\mu_1 q - \mu_1) + (\mu_1 * (1-q) * (\lambda+x))^N =$
$= -(\mu_1(1-q))^N(\lambda+x)^N + (\mu_1(1-q)(\lambda+x))^N = 0$

Следовательно, решение (4) верно и в данном случае.
Заметим, что:

$$\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} R_{n_1,n_2} = 1$$

Для этого разделим полученне решения на сумму всех L_{n_1,n_2}
Получим

$$c = \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} L_{n_1,n_2}, R_{n_1,n_2} = \frac{L_{n_1,n_2}}{c}$$

Найдем $x = x(\tau)$ Рассмотрим второе уравнение системы (1) в пределе $\varepsilon \to 0$.

$$\begin{aligned}\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau)}{\partial \tau} =& jw\{\lambda \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} F_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)\\ &+ j\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial F_{n_1,n_2}(w,\tau)}{\partial w}\\ &+ \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} n_1 F_{n_1,n_2}(w,\tau) + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} n_2 F_{n_1,n_2}(w,\tau)\}\end{aligned}$$

и заменим решение $F_{n_1,n_2}(w,\tau) = R_{n_1,n_2} e^{jwx(\tau)}$, тогда

$$\begin{aligned}x'(\tau) =& \lambda \sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} R_{n_1,n_2} - x(\tau)\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} R_{n_1,n_2}\\ &+ \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} n_1 R_{n_1,n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} n_2 R_{n_1,n_2}\end{aligned} \qquad (15)$$

Обозначим через

$$
\begin{aligned}
x'(\tau) = a(x) = & \lambda \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} R_{n_1,n_2} - x(\tau) \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} R_{n_1,n_2} \\
& + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} n_1 R_{n_1,n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} n_2 R_{n_1,n_2}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

5 Второй этап асимтотического анализа

Сделаем следующие подстановки в (1)

$$H_{n_1,n_2}(u,t) = e^{j\frac{u}{\sigma}x(\sigma t)}H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)$$

Получим систему

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_{n_1,n_2}c(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t) =& -(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+j\sigma\overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u} - x(\sigma t)\overline{E}^N_{n_1+n_2}H^{(1)}_{n_1,n_2}+\\
&+\mu_1 r_1 q n_1 H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2 r_1(1-q)n_2 H_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\lambda e^{ju}E^N_{n_1+n_2}H_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\lambda q H_{n_1-1,n_2}(u,t) - j\sigma q e^{-ju}\frac{\partial H_{n_1-1,n_2}(i+1,t)}{\partial u}+\\
&+qe^{-ju}x(\sigma t)H^{(1)}_{n_1-1,n_2}(u,t)+\\
&+\lambda(1-q)H_{n_1,n_2-1}(u,t) - j\sigma(1-q)e^{-ju}\frac{\mathrm{d}H_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\mathrm{d}u}+\\
&+(1-q)e^{-ju}x(\sigma t)H^{(1)}_{n_1,n_2-1}(u,t)\\
&+\mu_1 r_0(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t)+\\
&+\mu_1 r_2 e^{ju}(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t)+\\
&+\mu_2 r_0(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\\
&+\mu_2 r_2 e^{ju}(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+\\
&+\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)H_{n_1+1,n_2-1}(u,t)+\\
&+(n_2+1)\mu_2 r_1 q H_{n_1-1,n_2+1}(u,t),\\
\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\{\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\} =&(e^{ju}-1)\{\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)\\
&+j\sigma e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\{\sigma e^{-ju}\frac{\partial jH_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}-\\
&-x(\sigma t)H_{n_1,n_2}(u,t)\}\\
&+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}n_1 H_{n_1,n_2}(u,t)+\\
&+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}n_2 H_{n_1,n_2}(u,t)\}
\end{aligned} \tag{17}$$

С учетом (8) перепишем систему (9)

$$\frac{\partial H_{n_1,n_2}c(u,t)}{\partial t}+jua(x)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)=-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)+$$
$$+j\sigma\overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}-x\overline{E}^N_{n_1+n_2}H^{(1)}_{n_1,n_2}+$$
$$+\mu_1 r_1 q n_1 H_{n_1,n_2}(u,t)+\mu_2 r_1(1-q)n_2 H_{n_1,n_2}(u,t)+$$
$$+\lambda e^{ju}E^N_{n_1+n_2}H_{n_1,n_2}(u,t)+$$
$$+\lambda q H_{n_1-1,n_2}(u,t)-j\sigma q e^{-ju}\frac{\partial H_{n_1-1,n_2}(i+1,t)}{\partial u}+$$
$$+qe^{-ju}xH^{(1)}_{n_1-1,n_2}(u,t)+$$
$$+\lambda(1-q)H_{n_1,n_2-1}(u,t)-j\sigma(1-q)e^{-ju}\frac{\mathrm{d}H_{n_1,n_2-1}(u,t)}{\mathrm{d}u}+$$
$$+(1-q)e^{-ju}xH^{(1)}_{n_1,n_2-1}(u,t)$$
$$+\mu_1 r_0(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t)+$$
$$+\mu_1 r_2 e^{ju}(n_1+1)H_{n_1+1,n_2}(u,t)+$$
$$+\mu_2 r_0(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+$$
$$+\mu_2 r_2 e^{ju}(n_2+1)H_{n_1,n_2+1}(u,t)+$$
$$+\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)H_{n_1+1,n_2-1}(u,t)+$$
$$+(n_2+1)\mu_2 r_1 q H_{n_1-1,n_2+1}(u,t),$$
$$\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\{\frac{\partial H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial t}+jua(x)H^{(1)}_{n_1,n_2}(u,t)\}=(e^{ju}-1)\{\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}H_{n_1,n_2}(u,t)$$
$$+j\sigma e^{-ju}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\{\sigma e^{-ju}\frac{\partial jH_{n_1,n_2}(u,t)}{\partial u}-$$
$$-xH_{n_1,n_2}(u,t)\}$$
$$+\mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}n_1 H_{n_1,n_2}(u,t)+$$
$$+\mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}n_2 H_{n_1,n_2}(u,t)\} \tag{18}$$

Обозначим $\sigma=\varepsilon^2$ и сделаем следующие замены в (18)

$$\tau=t\varepsilon^2, u=\varepsilon w, H^{(1)}_{n_1,n_2}(u1,t)=F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) \tag{19}$$

Мы можем написать

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^2\frac{\partial F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial t} &+ j\varepsilon w a(x)F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) = -(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ j\varepsilon\overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} - x\overline{E}^N_{n_1+n_2}F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_1 r_1 q n_1 F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) + \mu_2 r_1(1-q)n_2F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \lambda e^{j\varepsilon w}E^N_{n_1+n_2}F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \lambda q F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) - j\varepsilon q e^{-j\varepsilon w}\frac{\partial F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\\
&+ q e^{-ju}xF^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \lambda(1-q)F^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon) - j\varepsilon(1-q)e^{-j\varepsilon w}\frac{\mathrm{d}F_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)}{\mathrm{d}w}+\\
&+ (1-q)e^{-j\varepsilon w}xF^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)\\
&+ \mu_1 r_0(n_1+1)F^{(1)}_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_1 r_2 e^{j\varepsilon w}(n_1+1)F^{(1)}_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_2 r_0(n_2+1)F^{(1)}_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_2 r_2 e^{j\varepsilon w}(n_2+1)F^{(1)}_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)F^{(1)}_{n_1+1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ (n_2+1)\mu_2 r_1 q F^{(1)}_{n_1-1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon),\\
\varepsilon^2\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=0}^{N-n_1}\{\frac{\partial F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial t} &+ j\varepsilon a(x)F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)\} = (e^{j\varepsilon w}-1)\{\lambda\sum_{n_1=0}^{N}\sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1}F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)\\
&+ \sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}\{j\varepsilon e^{-j\varepsilon w}\frac{\partial jF^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial u}-\\
&- xF^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)\}\\
&+ \mu_1 r_2\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}n_1F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+ \mu_2 r_2\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1-n_1}n_2F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)\}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Запишем первое уравнение (12) с точностью до $O(\varepsilon^2)$

$$
\begin{aligned}
j\varepsilon wa(x)F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon) = &-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+j\varepsilon\overline{E}^N_{n_1+n_2}\frac{\partial F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}-x\overline{E}^N_{n_1+n_2}F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_1 r_1 q n_1 F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\mu_2 r_1(1-q)n_2 F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\lambda E^N_{n_1+n_2}F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+j\varepsilon w\lambda E^N_{n_1+n_2}F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\lambda qF^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)-\varepsilon q\frac{\partial F^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\\
&+qxF^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)-j\varepsilon wqxF^{(1)}_{n_1-1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\lambda(1-q)F^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)-j\varepsilon(1-q)\frac{\mathrm{d}F_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)}{\mathrm{d}w}+\\
&+(1-q)xF^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)-j\varepsilon w(1-q)xF^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)\\
&+\mu_1 r_0(n_1+1)F^{(1)}_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_1 r_2(n_1+1)F^{(1)}_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+j\varepsilon w\mu_1 r_2(n_1+1)F^{(1)}_{n_1+1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_2 r_0(n_2+1)F^{(1)}_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_2 r_2(n_2+1)F^{(1)}_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+j\varepsilon w\mu_2 r_2(n_2+1)F^{(1)}_{n_1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)F^{(1)}_{n_1+1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+(n_2+1)\mu_2 r_1 qF^{(1)}_{n_1-1,n_2+1}(w,\tau,\varepsilon)
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Решение задачи (15) можно записать в виде

$$
F^{(1)}_{n_1,n_2}(w,\tau,\varepsilon)=\Phi(w,\tau)\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon wf_{n_1,n_2}\}+O(\varepsilon^2), \tag{22}
$$

где $\Phi(w,\tau)$ – скалярная функция, форма которой определена ниже. Мы получим

$$
\begin{aligned}
j\varepsilon w a(x)\Phi(w,\tau)\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\} =&\Phi(w,\tau)\{\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\}\{-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)+\\
&-x\overline{E}^N_{n_1+n_2}+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2+\lambda E^N_{n_1+n_2}+j\varepsilon w\lambda E^N_{n_1+n_2}\}+\\
&+\{R_{n_1-1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1-1,n_2}\}\{\lambda q+qx-j\varepsilon w q x\}+\\
&+\{R_{n_1,n_2-1}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2-1}\}\{\lambda(1-q)+\\
&+(1-q)x-j\varepsilon w(1-q)x\}\\
&+\{R_{n_1+1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1+1,n_2}\}\{\mu_1 r_0(n_1+1)+\\
&+\mu_1 r_2(n_1+1)+j\varepsilon w\mu_1 r_2(n_1+1)\}+\\
&+\{R_{n_1,n_2+1}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2+1}\}\{\mu_2 r_0(n_2+1)+\\
&+\mu_2 r_2(n_2+1)+j\varepsilon w\mu_2 r_2(n_2+1)\}+\\
&+\{R_{n_1+1,n_2+1}+j\varepsilon w f_{n_1-1,n_2-1}\}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+\{R_{n_1-1,n_2+1}+j\varepsilon w f_{n_1-1,n_2+1}\}(n_2+1)\mu_2 r_1 q\}+\\
&+\frac{\partial\Phi(w,t)}{\partial w}\{j\varepsilon\overline{E}^N_{n_1+n_2}\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\}-\\
&-j\varepsilon q\{R_{n_1-1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1-1,n_2}\}-\\
&-j\varepsilon(1-q)\{R_{n_1,n_2-1}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2-1}\}\}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
j\varepsilon w a(x)\Phi(w,\tau)R_{n_1,n_2} =&\Phi(w,\tau)\{\{R_{n_1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2}\}\{-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)+\\
&-x\overline{E}^N_{n_1+n_2}+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2+\lambda E^N_{n_1+n_2}\}+j\varepsilon w\lambda E^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2}+\\
&+\{R_{n_1-1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1-1,n_2}\}\{\lambda q+qx\}-j\varepsilon w q x R_{n_1-1,n_2}+\\
&+\{R_{n_1,n_2-1}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2-1}\}\{\lambda(1-q)+\\
&+(1-q)x\}-j\varepsilon w(1-q)xR_{n_1,n_2-1}\\
&+\{R_{n_1+1,n_2}+j\varepsilon w f_{n_1+1,n_2}\}\{\mu_1 r_0(n_1+1)+\\
&+\mu_1 r_2(n_1+1)\}+j\varepsilon w\mu_1 r_2(n_1+1)R_{n_1+1,n_2}+\\
&+\{R_{n_1,n_2+1}+j\varepsilon w f_{n_1,n_2+1}\}\{\mu_2 r_0(n_2+1)+\\
&+\mu_2 r_2(n_2+1)\}+j\varepsilon w\mu_2 r_2(n_2+1)R_{n_1,n_2+1}+\\
&+\{R_{n_1+1,n_2+1}+j\varepsilon w f_{n_1-1,n_2-1}\}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+\{R_{n_1-1,n_2+1}+j\varepsilon w f_{n_1-1,n_2+1}\}(n_2+1)\mu_2 r_1 q\}+\\
&+\frac{\partial\Phi(w,t)}{\partial w}\{j\varepsilon\overline{E}^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2}-j\varepsilon q R_{n_1-1,n_2}-j\varepsilon(1-q)R_{n_1,n_2-1}\}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

С учетом (6) разделим последнее уравнение на $\Phi(w,\tau)j\varepsilon w$ и положим $\varepsilon\to 0$, мы получим

$$\begin{aligned}
a(x)R_{n_1,n_2} =& f_{n_1,n_2}\{-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)+\\
&-x\overline{E}^N_{n_1+n_2}+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2+\lambda E^N_{n_1+n_2}\}+E^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2}+\\
&+f_{n_1-1,n_2}\{\lambda q+qx\}-qxR_{n_1-1,n_2}+\\
&+f_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1-q)F^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+(1-q)x\}-(1-q)xR_{n_1,n_2-1}\\
&+f_{n_1+1,n_2}\{\mu_1 r_0(n_1+1)+\\
&+\mu_1 r_2(n_1+1)\}+\mu_1 r_2(n_1+1)R_{n_1+1,n_2}+\\
&+f_{n_1,n_2+1}\{\mu_2 r_0(n_2+1)+\\
&+\mu_2 r_2(n_2+1)\}+\mu_2 r_2(n_2+1)R_{n_1,n_2+1}+\\
&+f_{n_1-1,n_2-1}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+f_{n_1-1,n_2+1}(n_2+1)\mu_2 r_1 q+\\
&+\frac{\partial\Phi(w,t)/\partial w}{w\Phi(w,t)}\{\overline{E}^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2}-qR_{n_1-1,n_2}-(1-q)R_{n_1,n_2-1}\}
\end{aligned} \tag{25}$$

переписываем последнее уравнение

$$\begin{aligned}
a(x)R_{n_1,n_2} =& f_{n_1,n_2}\{-(\lambda+\mu_1 n_1+\mu_2 n_2)+\\
&-x\overline{E}^N_{n_1+n_2}+\mu_1 r_1 q n_1+\mu_2 r_1(1-q)n_2+\lambda E^N_{n_1+n_2}\}+E^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2}+\\
&+f_{n_1-1,n_2}\{\lambda q+qx\}-qxR_{n_1-1,n_2}+\\
&+f_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1-q)F^{(1)}_{n_1,n_2-1}(w,\tau,\varepsilon)+\\
&+(1-q)x\}-(1-q)xR_{n_1,n_2-1}\\
&+f_{n_1+1,n_2}\{\mu_1 r_0(n_1+1)+\\
&+\mu_1 r_2(n_1+1)\}+\mu_1 r_2(n_1+1)R_{n_1+1,n_2}+\\
&+f_{n_1,n_2+1}\{\mu_2 r_0(n_2+1)+\\
&+\mu_2 r_2(n_2+1)\}+\mu_2 r_2(n_2+1)R_{n_1,n_2+1}+\\
&+f_{n_1-1,n_2-1}\mu_1 r_1(1-q)(n_1+1)+\\
&+f_{n_1-1,n_2+1}(n_2+1)\mu_2 r_1 q+\\
&+\frac{\partial\Phi(w,t)/\partial w}{w\Phi(w,t)}\{\overline{E}^N_{n_1+n_2}R_{n_1,n_2}-qR_{n_1-1,n_2}-(1-q)R_{n_1,n_2-1}\}
\end{aligned} \tag{26}$$

Решение f задачи (17) можно записать в виде