

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)  
Институт прикладной математики и компьютерных наук

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК

Руководитель ООП

доктор техн. наук, профессор

\_\_\_\_\_ А.М. Горцев

подпись

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2021г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА  
ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ И  
ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика,  
направленность(профиль) «Прикладная математика и информатика»

Рыжикова Валерия Валентиновна

Руководитель ВКР

доктор техн. наук, профессор

\_\_\_\_\_ Назаров А.А.

подпись

Автор работы

студентка группы №931720

\_\_\_\_\_ Рыжикова В.В.

подпись

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2021г.

Томск 2021 г.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)  
Институт прикладной математики и компьютерных наук  
Кафедра теории вероятностей и математической статистики

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель ООП

д-р техн. наук, профессор

\_\_\_\_\_ А. М. Горцев

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 г.

**ЗАДАНИЕ**

по подготовке ВКР бакалавра

студентке Ряжиковой Валерии Валентиновне группы №931828.

1. Тема ВКР:

«Исследование многолинейной системы с обратной связью и гиперэкспоненциальным распределением»

2. Срок сдачи студентом выполненной ВКР:

а) на кафедре \_\_\_\_\_

б) в ГЭК \_\_\_\_\_

3. Исходные данные к работе.

Целью настоящей работы является асимптотически-диффузионный анализ RQ-систем вида  $M|H_2|2$ ,  $M|H_2|N$  с обратной связью.

В соответствии с целью были поставлены и решены следующие задачи:

- изучение литературы по исследованию RQ-систем с обратной связью;
- построение математических моделей RQ-систем вида  $M|H_2|2$ ,  $M|H_2|N$  с обратной связью;
- построение системы дифференциальных уравнений Колмогорова для систем  $M|H_2|2$ ,  $M|H_2|N$  с обратной связью;

- построение аппроксимаций для распределения вероятностей числа приборов, находящихся на первой и второй фазе в системах вида  $M|H_2|2$ ,  $M|H_2|N$  с обратной связью методом асимптотического анализа и в предельном условии большой задержки заявок на орбите;

- построение аппроксимаций распределения вероятностей количества заявок на орбите в RQ-системах вида  $M|H_2|2$ ,  $M|H_2|N$  с обратной связью методом асимптотически-диффузионного анализа;

Объектом исследования выступают RQ-системы вида  $M|H_2|2$ ,  $M|H_2|N$  с обратной связью.

Методами исследования являются методы теории вероятностей, теории случайных процессов, теории массового обслуживания, теории дифференциальных уравнений, а также методы асимптотического и асимптотически диффузионного анализа.

#### 4. Краткое содержание работы.

Основные разделы:

- I. Исследование RQ-системы  $M|H_2|2$  с обратной связью методами асимптотического анализа и асимптотически диффузионного анализа, численный пример.
- II. Исследование RQ-системы  $M|H_2|N$  с обратной связью методами асимптотического анализа и асимптотически диффузионного анализа, численный пример.

5. Указать предприятие, организацию, по заданию которого выполняется работа: кафедра теории вероятностей и математической статистики Национального исследовательского Томского государственного университета (НИ ТГУ).

6. Дата выдачи задания «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 г.

Научный руководитель ВКР  
д-р техн. наук, профессор,  
заведующий каф. ТВиМС

\_\_\_\_\_

А. А. Назаров

Задание принял к исполнению

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 г.

\_\_\_\_\_

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	4
1. Исследование системы $M H_2 2$ с орбитой . . . . .	5
1.1 Математическая модель и постановка задач . . . . .	5
1.2 Уравнения Колмогорова . . . . .	7
1.3 Первый этап асимптотического анализа . . . . .	13
1.4 Второй этап асимптотического анализа . . . . .	15
1.5 Метод асимптотически диффузионного анализа . . . . .	18
1.6 Численные эксперименты . . . . .	21
2. Исследование системы $M H_2 N$ с орбитой . . . . .	22
2.1 Математическая модель и постановка задачи . . . . .	22
2.2 Уравнения Колмогорова . . . . .	24
2.3 Первый этап асимптотического анализа . . . . .	29
2.4 Второй этап асимптотического анализа . . . . .	34
2.5 Метод асимптотически диффузионного анализа . . . . .	43
2.6 Численные эксперименты . . . . .	47
Список использованной литературы . . . . .	48

## ВВЕДЕНИЕ

Передача данных это большая проблема, особенно сейчас, когда передача данных очень часто используется для предоставления интернет или телекоммуникационных услуг. При исследовании данных проблем часто используются системы массового обслуживания [4, 5, 7, 11], в том числе двухфазные системы [3, 14, 15], а также когда имеется большое количество абонентов, системы с орбитой, также называемы RQ-системами [1, 10, 12, 13]. Данная работа же отличается совмещения двух этих особенностей с тем фактом, что система N-линейна, или говоря другими словами имеет N приборов.

**Цель дипломной работы:** исследовать N-линейную систему  $M|H_2|N$  с обратной связью.

### Задачи:

1. Построить математическую модель N-линейной системы  $M|H_2|M$  с обратной связью.
2. Составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова.
3. С помощью метода асимптотического анализа найти коэффициенты переноса и диффузии дифференциального уравнения N-линейной системы  $M|H_2|N$  с обратной связью.
4. С помощью метода асимптотически диффузионного анализа вычислить плотность распределения вероятностей произвольного числа заявок на орбите и получить дискретное распределение вероятностей.

# 1. ИСЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ $M|H_2|2$ С ОРБИТОЙ

## 1.1 Математическая модель и постановка задач

Рассмотрим систему массового обслуживания  $M|H_2|2$  с обратной связью (Рисунок 1).

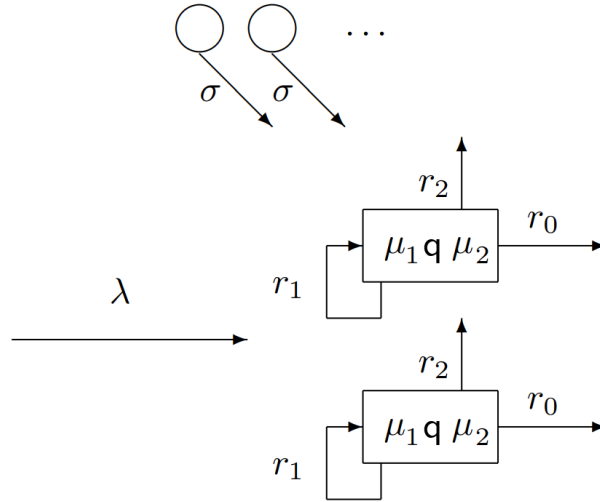


Рис. 1: Система массового обслуживания  $M|H_2|2$  с обратной связью

Система имеет два обслуживающих прибора. Заявки поступают в систему согласно простейшему потоку с параметром  $\lambda$ . Каждая заявка занимает один из свободных приборов на время, распределенное по гиперэкспоненциальному закону. Это означает, что заявка на приборе с вероятностью  $q$  поступает на первую фазу, с экспоненциальным распределением с параметром  $\mu_1$ , и с вероятностью  $1 - q$  на вторую, с параметром  $\mu_2$ .

После завершения обслуживания заявка с вероятностью  $r_0$  покидает систему, с вероятностью  $r_1$  мгновенно поступает на повторное обслуживание и с вероятностью  $r_2$  уходит на орбиту. Также, если на момент поступления заявки из потока оба прибора заняты, то заявка уходит на орбиту. Через время, продолжительность которого распределена по экспоненциальному закону с параметром  $\sigma$ , заявка вновь обращается с орбиты к приборам.

Пусть  $i(t)$  – число заявок на орбите в момент времени  $t$ ,  $n_1(t)$  – число приборов занятых на первой фазе в момент времени  $t$ ,  $n_2(t)$  – число приборов занятых на второй фазе в момент времени  $t$ .

Рассмотрим трехмерный процесс  $\{n_1(t), n_2(t), i(t)\}$ . Под состоянием системы будем понимать состояние процесса  $\{n_1(t), n_2(t), i(t)\}$  в момент времени  $t$ .

Обозначим вероятности следующим образом:

$P(n_1 = 0, n_2 = 0, i(t) = i) = P_0(i, t)$  – вероятность того, что ни один прибор не занят.

$P(n_1 = 0, n_2 = 1, i(t) = i) = P_1(i, t)$  – вероятность того, что один прибор занят на второй фазе.

$P(n_1 = 1, n_2 = 0, i(t) = i) = P_2(i, t)$  – вероятность того, что один прибор занят на первой фазе.

$P(n_1 = 0, n_2 = 2, i(t) = i) = P_3(i, t)$  – вероятность того, что два прибора заняты на второй фазе.

$P(n_1 = 1, n_2 = 1, i(t) = i) = P_4(i, t)$  – вероятность того, что один прибор занят на первой фазе, а другой на второй.

$P(n_1 = 2, n_2 = 0, i(t) = i) = P_5(i, t)$  – вероятность того, что два прибора заняты на первой фазе.

В каждой вероятности на орбите находятся  $i$  заявок в момент времени  $t$ .

Для решения будем применять методы асимптотического анализа [1, 7, 9, 11] и асимптотически диффузионного анализа [1].

## 1.2 Уравнения Колмогорова

Для введенных вероятностей составим систему уравнений в конечных разностях [4, 5, 6].

$$\begin{aligned}
P_0(i, t + \Delta t) &= (1 - \Delta t(\lambda + i\sigma))P_0(i, t) + \Delta t\mu_2r_0P_1(i, t) + \Delta t\mu_2r_2P_1(i - 1, t) + \\
&\quad + \Delta t\mu_1r_0P_2(i, t) + \Delta t\mu_1r_2P_2(i - 1, t) + o(\Delta t), \\
P_1(i, t + \Delta t) &= (1 - \Delta t(\lambda + i\sigma + \mu_2))P_1(i, t) + \Delta t\lambda(1 - q)P_0(i, t) + \\
&\quad + \Delta t\sigma(i + 1)(1 - q)P_0(i + 1, t) + 2\Delta t\mu_2r_0P_3(i, t) + \mu_2r_1(1 - q)P_1(i, t) + \\
&\quad + 2\mu_2r_2P_3(i - 1, t) + \Delta t\mu_1r_0P_4(i, t) + \Delta t\mu_1r_2P_4(i - 1, t) + \\
&\quad + \Delta t\mu_1r_1(1 - q)P_2(i, t) + o(\Delta t), \\
P_2(i, t + \Delta t) &= (1 - \Delta t(\lambda + i\sigma + \mu_1))P_2(i, t) + \Delta tq\lambda P_0(i, t) + \\
&\quad + \Delta t\sigma(i + 1)qP_0(i + 1, t) + \Delta t\mu_2r_1qP_1(i, t) + \\
&\quad + \Delta t\mu_1r_1qP_2(i, t) + \Delta t\mu_2r_0P_4(i, t) + \Delta t\mu_2r_2P_4(i - 1, t) + \\
&\quad + 2\Delta t\mu_1r_2P_5(i - 1, t) + 2\Delta t\mu_1r_0P_5(i, t) + o(\Delta t), \\
P_3(i, t + \Delta t) &= (1 - \Delta t(\lambda + i\sigma + 2\mu_2))P_3(i, t) + \\
&\quad + \Delta t\lambda(1 - q)P_1(i, t) + \Delta t\sigma(i + 1)(1 - q)P_1(i + 1, t) + \\
&\quad + 2\Delta t\mu_2r_1(1 - q)P_3(i, t) + \Delta t\mu_1r_1(1 - q)P_4(i, t) + \Delta t\lambda P_3(i - 1, t) + o(\Delta t), \\
P_4(i, t + \Delta t) &= (1 - \Delta t(\lambda + i\sigma + \mu_1 + \mu_2))P_4(i, t) + \Delta t\lambda qP_1(i, t) + \Delta t\sigma(i + 1)qP_1(i + 1, t) + \\
&\quad + 2\Delta t\mu_2r_1qP_3(i, t) + \Delta t\lambda(1 - q)P_2(i, t) + \Delta t\sigma(i + 1)(1 - q)P_2(i + 1, t) + \\
&\quad + \Delta t\mu_2r_1(1 - q)P_4(i, t) + \Delta t\mu_1r_1qP_4(i, t) + \\
&\quad + 2\Delta t\mu_1r_1(1 - q)P_5(i, t) + \Delta t\lambda P_4(i - 1, t) + o(\Delta t), \\
P_5(i, t + \Delta t) &= (1 - \Delta t(\lambda + i\sigma + 2\mu_1))P_5(i, t) + \Delta t\sigma(i + 1)qP_2(i + 1, t) + \Delta t\lambda qP_2(i, t) + \\
&\quad + \Delta t\mu_2r_1qP_4(i, t) + 2\Delta t\mu_1r_1qP_5(i, t) + \Delta t\lambda P_5(i - 1, t) + o(\Delta t).
\end{aligned}$$

Раскроем скобки, разделим на каждое уравнение на  $\Delta t$ , получим

$$\begin{aligned}
\frac{P_0(i, t + \Delta t) - P_0(i, t)}{\Delta t} &= -(\lambda + i\sigma)P_0(i, t) + \mu_2r_0P_1(i, t) + \mu_2r_2P_1(i - 1, t) + \mu_1r_0P_2(i, t) + \\
&\quad + \mu_1r_2P_2(i - 1, t), \\
\frac{P_1(i, t + \Delta t) - P_1(i, t)}{\Delta t} &= -(\lambda + i\sigma + \mu_2)P_1(i, t) + \lambda(1 - q)P_0(i, t) + \sigma(i + 1)(1 - q)P_0(i + 1, t) + \\
&\quad + 2\mu_2r_0P_3(i, t) + \mu_2r_1(1 - q)P_1(i, t) + 2\mu_2r_2P_3(i - 1, t) + \mu_1r_0P_4(i, t) + \\
&\quad + \mu_1r_2P_4(i - 1, t) + \mu_1r_1(1 - q)P_2(i, t),
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\frac{P_2(i, t + \Delta t) - P_2(i, t)}{\Delta t} &= -(\lambda + i\sigma + \mu_1)P_2(i, t) + q\lambda P_0(i, t) \\
&\quad + \sigma(i + 1)qP_0(i + 1, t) + \mu_2 r_1 q P_1(i, t) + \\
&\quad + \mu_1 r_1 q P_2(i, t) + \mu_2 r_0 P_4(i, t) + \mu_2 r_2 P_4(i - 1, t) + \\
&\quad + 2\mu_1 r_2 P_5(i - 1, t) + 2\mu_1 r_0 P_5(i, t), \\
\frac{P_3(i, t + \Delta t) - P_3(i, t)}{\Delta t} &= -(\lambda + i\sigma + 2\mu_2)P_3(i, t) + \lambda(1 - q)P_1(i, t) + \\
&\quad + \sigma(i + 1)(1 - q)P_1(i + 1, t) + 2\mu_2 r_1(1 - q)P_3(i, t) + \\
&\quad + \mu_1 r_1(1 - q)P_4(i, t) + \lambda P_3(i - 1, t), \\
\frac{P_4(i, t + \Delta t) - P_4(i, t)}{\Delta t} &= -(\lambda + i\sigma + \mu_1 + \mu_2)P_4(i, t) + \lambda q P_1(i, t) + \sigma(i + 1)q P_1(i + 1, t) + \\
&\quad + 2\mu_2 r_1 q P_3(i, t) + \lambda(1 - q)P_2(i, t) + \sigma(i + 1)(1 - q)P_2(i + 1, t) + \\
&\quad + \mu_2 r_1(1 - q)P_4(i, t) + \mu_1 r_1 q P_4(i, t) + 2\mu_1 r_1(1 - q)P_5(i, t) + \\
&\quad + \lambda P_4(i - 1, t), \\
\frac{P_5(i, t + \Delta t) - P_5(i, t)}{\Delta t} &= -(\lambda + i\sigma + 2\mu_1)P_5(i, t) + \sigma(i + 1)q P_2(i + 1, t) + \lambda q P_2(i, t) + \\
&\quad + \mu_2 r_1 q P_4(i, t) + 2\mu_1 r_1 q P_5(i, t) + \lambda P_5(i - 1, t).
\end{aligned}$$

Устремим  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$\begin{aligned}
\frac{dP_0(i, t)}{\partial t} &= -(\lambda + i\sigma)P_0(i, t) + \mu_2 r_0 P_1(i, t) + \mu_2 r_2 P_1(i - 1, t) + \mu_1 r_0 P_2(i, t) + \\
&\quad + \mu_1 r_2 P_2(i - 1, t), \\
\frac{dP_1(i, t)}{\partial t} &= -(\lambda + i\sigma + \mu_2)P_1(i, t) + \lambda(1 - q)P_0(i, t) + \sigma(i + 1)(1 - q)P_0(i + 1, t) + \\
&\quad + 2\mu_2 r_0 P_3(i, t) + \mu_2 r_1(1 - q)P_1(i, t) + 2\mu_2 r_2 P_3(i - 1, t) + \mu_1 r_0 P_4(i, t) + \\
&\quad + \mu_1 r_2 P_4(i - 1, t) + \mu_1 r_1(1 - q)P_2(i, t), \\
\frac{dP_2(i, t)}{\partial t} &= -(\lambda + i\sigma + \mu_1)P_2(i, t) + q\lambda P_0(i, t) + \sigma(i + 1)qP_0(i + 1, t) + \mu_2 r_1 qP_1(i, t) + \\
&\quad + \mu_1 r_1 qP_2(i, t) + \mu_2 r_0 P_4(i, t) + \mu_2 r_2 P_4(i - 1, t) + 2\mu_1 r_2 P_5(i - 1, t) + \\
&\quad + 2\mu_1 r_0 P_5(i, t), \\
\frac{dP_3(i, t)}{\partial t} &= -(\lambda + i\sigma + 2\mu_2)P_3(i, t) + \lambda(1 - q)P_1(i, t) + \sigma(i + 1)(1 - q)P_1(i + 1, t) + \\
&\quad + 2\mu_2 r_1(1 - q)P_3(i, t) + \mu_1 r_1(1 - q)P_4(i, t) + \lambda P_3(i - 1, t), \\
\frac{dP_4(i, t)}{\partial t} &= -(\lambda + i\sigma + \mu_1 + \mu_2)P_4(i, t) + \lambda q P_1(i, t) + \sigma(i + 1)qP_1(i + 1, t) + \\
&\quad + 2\mu_2 r_1 qP_3(i, t) + \lambda(1 - q)P_2(i, t) + \sigma(i + 1)(1 - q)P_2(i + 1, t) + \\
&\quad + \mu_2 r_1(1 - q)P_4(i, t) + \mu_1 r_1 qP_4(i, t) + 2\mu_1 r_1(1 - q)P_5(i, t) + \lambda P_4(i - 1, t), \\
\frac{dP_5(i, t)}{\partial t} &= -(\lambda + i\sigma + 2\mu_1)P_5(i, t) + \sigma(i + 1)qP_2(i + 1, t) + \lambda q P_2(i, t) + \\
&\quad + \mu_2 r_1 qP_4(i, t) + 2\mu_1 r_1 qP_5(i, t) + \lambda P_5(i - 1, t).
\end{aligned}$$

Введем частичные характеристические функции

$$H_k(u, t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{iuj} P_k(i, t).$$

Тогда система примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dH_0(u, t)}{dt} &= -\lambda H_0(u, t) + j\sigma \frac{dH_0(u, t)}{du} + \mu_2 r_0 H_1(u, t) + \mu_2 r_2 e^{ju} H_1(u, t) + \\
&\quad + \mu_1 r_0 H_2(u, t) + \mu_1 r_1 e^{ju} H_2(u, t), \\
\frac{dH_1(u, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_2) H_1(u, t) + j\sigma \frac{dH_1(u, t)}{du} + \lambda(1 - q) H_0(u, t) - \\
&\quad - j\sigma e^{-ju} (1 - q) \frac{dH_0(u, t)}{du} + 2\mu_2 r_0 H_3(u, t) + \mu_2 r_1 (1 - q) H_1(u, t) + \\
&\quad + 2\mu_2 r_2 e^{ju} H_3(u, t) + \mu_1 r_0 H_4(u, t) + \mu_1 r_2 e^{ju} H_4(u, t) + \\
&\quad + \mu_1 r_1 (1 - q) H_2(u, t), \\
\frac{dH_2(u, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_1) H_2(u, t) + j\sigma \frac{dH_2(u, t)}{du} + q\lambda H_2(u, t) - j\sigma e^{-ju} q \frac{dH_0(u, t)}{du} + \\
&\quad + \mu_2 r_1 q H_1(u, t) + \mu_1 r_1 q H_2(u, t) + \mu_2 r_0 H_4(u, t) + \mu_2 r_2 e^{ju} H_4(u, t) + \\
&\quad + 2\mu_1 r_2 e^{ju} H_5(u, t) + 2\mu_1 r_0 H_5(u, t), \\
\frac{dH_3(u, t)}{dt} &= -(\lambda + 2\mu_2) H_3(u, t) + j\sigma \frac{dH_3(u, t)}{du} + \lambda(1 - q) H_1(u, t) - \\
&\quad - j\sigma (1 - q) e^{-ju} \frac{dH_0(u, t)}{du} + 2\mu_2 r_1 (1 - q) H_3(u, t) + \\
&\quad + \mu_1 r_1 (1 - q) H_4(u, t) + \lambda e^{ju} H_3(u, t), \\
\frac{dH_4(u, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_1 + \mu_2) H_4(u, t) + j\sigma \frac{dH_4(u, t)}{du} + \lambda q H_4(u, t) - \\
&\quad - j\sigma q e^{-ju} \frac{dH_1(u, t)}{du} + 2\mu_2 r_1 q H_3(u, t) + \lambda(1 - q) H_2(u, t) - \\
&\quad - j\sigma (1 - q) e^{-ju} \frac{dH_0(u, t)}{du} + \mu_2 r_1 (1 - q) H_4(u, t) + \mu_1 r_1 q H_4(u, t) + \\
&\quad + 2\mu_1 r_1 (1 - q) H_5(u, t) + \lambda e^{ju} H_4(u, t), \\
\frac{dH_5(u, t)}{dt} &= -(\lambda + 2\mu_1) H_5(u, t) + j\sigma \frac{dH_5(u, t)}{du} - j\sigma q e^{-ju} \frac{dH_2(u, t)}{du} + \\
&\quad + \lambda q H_2(u, t) + \mu_2 r_1 q H_4(u, t) + 2\mu_1 r_1 q H_5(u, t) + \lambda e^{ju} H_5(u, t).
\end{aligned}$$

Обозначим вектор-строки

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(u, t) &= \{H_0(u, t), H_1(u, t), H_2(u, t), H_3(u, t), H_4(u, t), H_5(u, t)\}, \\
\frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} &= \left\{ \frac{\partial H_0(u, t)}{\partial t}, \frac{\partial H_1(u, t)}{\partial t}, \frac{\partial H_2(u, t)}{\partial t}, \frac{\partial H_3(u, t)}{\partial t}, \frac{\partial H_4(u, t)}{\partial t}, \frac{\partial H_5(u, t)}{\partial t} \right\}, \\
\frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial u} &= \left\{ \frac{\partial H_0(u, t)}{\partial u}, \frac{\partial H_1(u, t)}{\partial u}, \frac{\partial H_2(u, t)}{\partial u}, \frac{\partial H_3(u, t)}{\partial u}, \frac{\partial H_4(u, t)}{\partial u}, \frac{\partial H_5(u, t)}{\partial u} \right\}.
\end{aligned}$$

Запишем систему уравнений в виде матричного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u, t)(\mathbf{A} + e^{ju} \mathbf{B}) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial u} (\mathbf{I}_0 - e^{-ju} \mathbf{I}_1),$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda(1-q) & \lambda q & 0 \\ r_0\mu_2 & -\lambda + r_1\mu_2(1-q) - \mu_2 & qr_1\mu_2 & \lambda(1-q) \\ r_0\mu_1 & r_1\mu_1(1-q) & -\lambda + qr_1\mu_1 - \mu_1 & 0 \\ 0 & 2r_0\mu_2 & 0 & -\lambda + 2r_1\mu_2(1-q) - 2\mu_2 \\ 0 & r_0\mu_1 & r_0\mu_2 & r_1\mu_1(1-q) \\ 0 & 0 & 2r_0\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda q & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(1-q) & \lambda q & 0 & 0 \\ 2qr_1\mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda + qr_1\mu_1 + r_1\mu_2(1-q) - \mu_1 - \mu_2 & qr_1\mu_2 & 0 & 0 \\ 2r_1\mu_1(1-q) & -\lambda + 2qr_1\mu_1 - 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2(-r_0 - r_1 + 1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1(-r_0 - r_1 + 1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu_2(-r_0 - r_1 + 1) & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1(-r_0 - r_1 + 1) & \mu_2(-r_0 - r_1 + 1) & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu_1(-r_0 - r_1 + 1) & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1-q & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-q & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-q & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Домножим матричное уравнение на единичный вектор-столбец  $\mathbf{e}$  и, с учетом

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{e} = 0$$

и

$$(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)\mathbf{e} = 0$$

получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} \mathbf{e} &= \mathbf{H}(u, t)(e^{ju} - 1) \mathbf{B} \mathbf{e} + j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial u} (e^{ju} - 1) \mathbf{I}_0 \mathbf{e} = \\ &= (e^{ju} - 1) \left\{ \mathbf{H}(u, t) \mathbf{B} \mathbf{e} + j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial u} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} \right\}.\end{aligned}$$

Таким образом получаем уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} &= \mathbf{H}(u, t)(\mathbf{A} + e^{ju} \mathbf{B}) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial u} (\mathbf{I}_0 - e^{-ju} \mathbf{I}_1), \\ \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial t} \mathbf{e} &= (e^{ju} - 1) \left\{ \mathbf{H}(u, t) \mathbf{B} \mathbf{e} + j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}(u, t)}{\partial u} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} \right\}.\end{aligned}\tag{1}$$

### 1.3 Первый этап асимптотического анализа

Будем решать уравнения (1) методом асимптотического анализа. Сделаем замены

$$\sigma = \varepsilon, \tau = t\varepsilon, u = \varepsilon w, \mathbf{H}(u, t) = \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon). \quad (2)$$

Тогда можем переписать уравнения (1)

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)(\mathbf{A} + e^{j\varepsilon w} \mathbf{B}) + j \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} (\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w} \mathbf{I}_1), \\ \varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \mathbf{e} &= (e^{j\varepsilon w} - 1) \{ \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon) \mathbf{B} \mathbf{e} + j e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} \}. \end{aligned} \quad (3)$$

При условии, что  $\varepsilon \rightarrow 0$ , можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 1.1.** Компоненты  $R_n$  или вектор-строка  $\mathbf{R}$  распределения вероятностей числа приборов, занятых на первой и второй фазе имеет вид

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{2\mu_1^2 \mu_2^2 (r_1 - 1)^2}{c}, \\ R_1 &= \frac{2\mu_1^2 \mu_2 (1 - q)(1 - r_1)(\lambda + x)}{c}, \\ R_2 &= \frac{2\mu_1 \mu_2^2 q(1 - r_1)(\lambda + x)}{c}, \\ R_3 &= \frac{\mu_1^2 (1 - q)^2 (\lambda + x)^2}{c}, \\ R_4 &= \frac{2\mu_1 \mu_2 q(1 - q)(\lambda + x)^2}{c}, \\ R_5 &= \frac{\mu_2^2 q^2 (\lambda + x)^2}{c}, \\ c &= (\mu_1 \mu_2 (1 - r_1) + (\lambda + x)(\mu_2 q + \mu_1 (1 - q)))^2 + \mu_1^2 \mu_2^2 (1 - r_1)^2, \end{aligned} \quad (4)$$

где вектор-строка  $\mathbf{R} = \{R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$  – распределение вероятностей состояния двулинейного блока обслуживания,  $x(\tau)$  является решением уравнения  $x = x(\tau) : x'(\tau) = a(x) = \mathbf{R} \mathbf{B} \mathbf{e} - x(\tau) \mathbf{R} \mathbf{I}_0 \mathbf{e}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим первое уравнение системы (3) в пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , обозначим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon) = \mathbf{F}(w, \tau)$$

и получим

$$\mathbf{F}(w, \tau)(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + j \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau)}{\partial w} (\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) = 0. \quad (5)$$

Находим решение уравнения (5) в виде  $\mathbf{F}(w, \tau) = \mathbf{R} e^{jw x(\tau)}$ . Получим следующую систему

уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\{(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - x(\tau)(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)\} &= 0, \\ \mathbf{R}\mathbf{e} &= 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Решение системы (6) совпадает (4). Вектор-строка  $\mathbf{R}$  вычислена с помощью символьного исчисления на языке Python, используя библиотеку SymPy [16].

Найдем  $x = x(\tau)$ . Рассмотрим второе уравнение системы (3) в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau)}{\partial \tau} \mathbf{e} = jw \left\{ \mathbf{F}(w, \tau) \mathbf{B} \mathbf{e} + j \frac{\partial \mathbf{F}(w, \tau)}{\partial w} \mathbf{I}_0 \mathbf{e} \right\},$$

подставим решение уравнения (5), тогда

$$x'(\tau) = a(x) = \mathbf{R} \mathbf{B} \mathbf{e} - x(\tau) \mathbf{R} \mathbf{I}_0 \mathbf{e}. \tag{7}$$

Теорема доказана.

## 1.4 Второй этап асимптотического анализа

В системе (1) сделаем замену

$$\mathbf{H}(u, t) = e^{j\frac{u}{\sigma}x(\sigma t)} \mathbf{H}^{(1)}(u, t),$$

получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u, t)}{\partial t} + ju x'(\sigma t) \mathbf{H}^{(1)}(u, t) &= \mathbf{H}^{(1)}(u, t) (\mathbf{A} + e^{ju} \mathbf{B}) + \\ &+ j\sigma \left[ \frac{j}{\sigma} x(\sigma t) \mathbf{H}^{(1)}(u, t) + \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u, t)}{\partial u} \right] (\mathbf{I}_0 - e^{-ju} \mathbf{I}_1), \\ \left[ \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u, t)}{\partial t} + ju x'(\sigma t) \mathbf{H}^{(1)}(u, t) \right] \mathbf{e} &= (e^{ju} - 1) \left\{ \mathbf{H}^{(1)}(u, t) \mathbf{B} \mathbf{e} + \right. \\ &\left. + j\sigma e^{-ju} \left[ \frac{j}{\sigma} x(\sigma t) \mathbf{H}^{(1)}(u, t) + \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u, t)}{\partial u} \right] \mathbf{I}_0 \mathbf{e} \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом (7) перепишем систему (8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u, t)}{\partial t} + ju a(x) \mathbf{H}^{(1)}(u, t) &= \mathbf{H}^{(1)}(u, t) (\mathbf{A} + e^{ju} \mathbf{B} - \\ &- x(\mathbf{I}_0 - e^{-ju} \mathbf{I}_1)) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u, t)}{\partial u} (\mathbf{I}_0 - e^{-ju} \mathbf{I}_1), \\ \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u, t)}{\partial t} \mathbf{e} + ju a(x) \mathbf{H}^{(1)}(u, t) \mathbf{e} &= (e^{ju} - 1) (\mathbf{H}^{(1)}(u, t) [\mathbf{B} - \\ &- e^{-ju} x \mathbf{I}_0] + e^{-ju} j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}(u, t)}{\partial u} \mathbf{I}_0) \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначим  $\sigma = \varepsilon^2$  и сделаем следующие замены в (9)

$$\tau = t\varepsilon^2, u = \varepsilon w, \mathbf{H}^{(1)}(u, t) = \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon). \quad (10)$$

Можем написать

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) &= \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) (\mathbf{A} + e^{j\varepsilon w} \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w} \mathbf{I}_1)) + \\ &+ j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} (\mathbf{I}_0 - e^{-j\varepsilon w} \mathbf{I}_1), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \mathbf{e} + j\varepsilon w a \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) \mathbf{e} &= \\ = (e^{j\varepsilon w} - 1) (\mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) [\mathbf{B} - e^{-j\varepsilon w} x \mathbf{I}_0] &+ e^{-j\varepsilon w} j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{I}_0) \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (11)$$

Перепишем первое уравнение (11) с учетом разложения

$$e^{j\varepsilon w} = 1 + (j\varepsilon w) + O(\varepsilon^2), \quad (12)$$



$$j\varepsilon w a \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) = \mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)(\mathbf{A} + \mathbf{B} + j\varepsilon w \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1 + j\varepsilon w \mathbf{I}_1)) + \\ + j\varepsilon \frac{\mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{dw}(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) + O(\varepsilon^2). \quad (13)$$

Решение задачи (13) можно записать в виде разложения

$$\mathbf{F}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) = \Phi(w, \tau)\{\mathbf{R} + j\varepsilon w \mathbf{f}\} + O(\varepsilon^2), \quad (14)$$

где  $\Phi(w, \tau)$  – скалярная функция, форма которой определена ниже. Получим

$$j\varepsilon w a \Phi(w, \tau)\{\mathbf{R} + j\varepsilon w \mathbf{f}\} = \Phi(w, \tau)\{\mathbf{R} + j\varepsilon w \mathbf{f}\}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + j\varepsilon w \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1 + j\varepsilon w \mathbf{I}_1)) + \\ + j\varepsilon \frac{\Phi(w, \tau)}{dw}\{\mathbf{R} + j\varepsilon w \mathbf{f}\} + \Phi(w, \tau)j\varepsilon \mathbf{f}(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) + O(\varepsilon^2).$$

Тогда

$$j\varepsilon w a \Phi(w, \tau)\mathbf{R} = \Phi(w, \tau)\{\mathbf{R}(\mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)) + \\ + j\varepsilon w [\mathbf{f}(\mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)) + \mathbf{R}(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_1)]\} + \\ + j\varepsilon \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w}\mathbf{R}(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) + O(\varepsilon^2).$$

С учетом (7) разделим последнее уравнение на  $\Phi(w, \tau)j\varepsilon w$  и положим  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$a\mathbf{R} = \mathbf{f}(\mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)) + \mathbf{R}(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_1) + \frac{\partial \Phi(w, \tau)/\partial w}{w\Phi(w, \tau)}\mathbf{R}(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1).$$

Перепишем последнее уравнение

$$\mathbf{f}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + x(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0)) = a\mathbf{R} - \mathbf{R}(\mathbf{B} - x\mathbf{I}_1) - \frac{\partial \Phi(w, \tau)/\partial w}{w\Phi(w, \tau)}\mathbf{R}(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1). \quad (15)$$

Решение  $\mathbf{f}$  задачи (15) можно записать в виде

$$\mathbf{f} = C\mathbf{R} + \mathbf{g} - \varphi \frac{\partial \Phi(w, \tau)/\partial w}{\partial w \Phi(w, \tau)}, \quad (16)$$

которое мы подставляем в (15) и получаем

$$\varphi(\mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)) = \mathbf{R}(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) \quad (17)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)) = a\mathbf{R} + \mathbf{R}(x\mathbf{I}_1 - \mathbf{B}). \quad (18)$$

Рассмотрим первое уравнение системы (8), дифференцируем его по  $x$ , получим уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\{\mathbf{A} + \mathbf{B} - x(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1)\} - \mathbf{R}(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) = 0.$$

Учитывая (17) и последнее уравнение для  $\varphi$ , запишем равенство

$$\varphi = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}, \quad (19)$$

где  $\varphi \mathbf{e} = 0$ . В силу (18) вектор  $\mathbf{g}$  является частным решением системы (18). Следовательно, она удовлетворяет условию

$$\mathbf{g} \mathbf{e} = 0. \quad (20)$$

Тогда решение  $\mathbf{g}$  системы (18), удовлетворяющее условию (20), определяется однозначно.

Теперь рассмотрим второе уравнение системы (12), в которую подставляем разложение (14)

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + ja\varepsilon w \Phi(w, \tau) \{1 + j\varepsilon w \mathbf{f} \mathbf{e}\} &= (j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}) \\ (\Phi(w, \tau) \{\mathbf{R} + j\varepsilon w \mathbf{f}\} [\mathbf{B} - x \mathbf{I}_0 + j\varepsilon w x \mathbf{I}_0] + j\varepsilon \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} \mathbf{R} \mathbf{I}_0) \mathbf{e} &+ o(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Тогда с помощью уравнения (8)

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} &= \Phi(w, \tau) ((j\varepsilon w)^2 \{\mathbf{f} (\mathbf{B} - x \mathbf{I}_0) + x \mathbf{R} \mathbf{I}_0 - a \mathbf{f}\} \mathbf{e} + \\ \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \mathbf{R} (\mathbf{B} - x \mathbf{I}_0) \mathbf{e}) &+ (j\varepsilon)^2 w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} \mathbf{R} \mathbf{I}_0 \mathbf{e}, \end{aligned}$$

получаем следующее уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{\Phi(w, \tau)} &= \frac{(jw)^2}{2} \{2(\mathbf{f} [\mathbf{B} - x \mathbf{I}_0] + \mathbf{R} x \mathbf{I}_0 - a \mathbf{f}) \mathbf{e} + a\} - \\ - w \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{\Phi(w, \tau)} \mathbf{R} \mathbf{I}_0 \mathbf{e}, \end{aligned}$$

в которое мы подставляем (16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial \tau}{\Phi(w, \tau)} &= \frac{(jw)^2}{2} \{2\mathbf{g} [\mathbf{B} - x \mathbf{I}_0] \mathbf{e} + 2\mathbf{R} x \mathbf{I}_0 \mathbf{e} + a\} + \\ + w \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{\Phi(w, \tau)} \{\varphi [\mathbf{B} - x \mathbf{I}_0] \mathbf{e} - \mathbf{R} \mathbf{I}_0 \mathbf{e}\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Результатом второго этапа асимптотического анализа является  $b(x)$  определенная следующим образом

$$b(x) = a(x) + 2\mathbf{g} [\mathbf{B} - x \mathbf{I}_0] \mathbf{e} + 2\mathbf{R} x \mathbf{I}_0. \quad (22)$$

## 1.5 Метод асимптотически диффузионного анализа

Построим аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок на орбите методом асимптотически диффузионного анализа. Сформулируем и докажем следующую теорему.

**Теорема 1.2.** Ряд распределения вероятностей нормированного числа заявок на орбите можно аппроксимировать следующей функцией плотности вероятностей

$$\pi(z) = \frac{C}{b(z)} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^z \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}, \quad (23)$$

где  $C$  – нормировочная константа,

$$\begin{aligned} a(x) &= \mathbf{R} \mathbf{B} e - x \mathbf{R} \mathbf{I}_0 e, \\ b(x) &= a(x) + 2\mathbf{g}[\mathbf{B} - x \mathbf{I}_0]e + 2\mathbf{R} x \mathbf{I}_0, \end{aligned} \quad (24)$$

здесь вектор-строка  $\mathbf{g}$  определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(a + \mathbf{B} + x(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_0)) &= a\mathbf{R} + \mathbf{R}(x\mathbf{I}_1 - \mathbf{B}), \\ \mathbf{g}e &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

**Доказательство.** Подставим  $b(x)$  в (20)

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} \left\{ \varphi[\mathbf{B} - x \mathbf{I}_0]e - \mathbf{R} \mathbf{I}_0 e \right\} + \frac{(jw)^2}{2} b(x) \Phi(w, \tau). \quad (26)$$

Рассмотрим

$$\varphi[\mathbf{B} - x \mathbf{I}_0]e - \mathbf{R} \mathbf{I}_0 e.$$

Подставим (19) в последнее выражение, получим

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} [\mathbf{B} - x \mathbf{I}_0]e - \mathbf{R} \mathbf{I}_0 e. \quad (27)$$

Рассмотрим функцию  $a(x)$ , найдем ее производную по  $x$ , учитывая, что  $\mathbf{R}$ , как решение зависит от  $x$

$$a'(x) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \mathbf{B} e - x \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \mathbf{I}_0 e - \mathbf{R} \mathbf{I}_0 e = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} [\mathbf{B} - x \mathbf{I}_0]e - \mathbf{R} \mathbf{I}_0 e.$$

Тогда (25) перепишем в виде

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = a'(x) w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} + \frac{(jw)^2}{2} b(x) \Phi(w, \tau). \quad (28)$$

Уравнение (27) это преобразование Фурье уравнения Фокера-Планка для плотности распре-

деления вероятностей  $P(y, \tau)$  значений централизованного и нормированного количества заявок на орбите. Находя обратное преобразование Фурье от (27), получим

$$\frac{\partial P(y, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y} \{a'(x)yP(y, \tau)\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{b(x)P(y, \tau)\}. \quad (29)$$

Следовательно  $P(y, \tau)$  плотность распределения вероятностей диффузионного процесса [2], который обозначим  $y(\tau)$  с коэффициентом переноса  $a(x)$  и коэффициентом диффузии  $b(x)$

$$dy(\tau) = a'(x)y d\tau + \sqrt{b(x)} dw(\tau). \quad (30)$$

Рассмотрим стохастический процесс нормированного числа заявок на орбите

$$z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y(\tau), \quad (31)$$

где  $\varepsilon = \sqrt{\sigma}$ , исходя из (8),  $dx(\tau) = a(x)d\tau$ , следует

$$dz(\tau) = d(x(\tau) + \varepsilon y(\tau)) = (a(x) + \varepsilon y a'(x))d\tau + \varepsilon \sqrt{b(x)} dw(\tau). \quad (32)$$

Разложим  $a(z)$  в ряд

$$\begin{aligned} a(z) &= a(x + \varepsilon y) = a(x) + \varepsilon y a'(x) + O(\varepsilon^2), \\ \varepsilon \sqrt{b(z)} &= \varepsilon \sqrt{b(x + \varepsilon y)} = \varepsilon \sqrt{b(x) + O(\varepsilon)} = \sqrt{\sigma b(x)} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Перепишем уравнение (31) с точностью до  $O(\varepsilon^2)$

$$dz(\tau) = a(z)d\tau + \sqrt{\sigma b(z)} dw(\tau). \quad (33)$$

Обозначим плотность распределения вероятностей для процесса  $z(\tau)$

$$\pi(z, \tau) = \frac{\partial P\{z(\tau) < z\}}{\partial z}.$$

Так как  $z(\tau)$  – это решение стохастического дифференциального уравнения (32), следовательно, процесс является диффузионным и для его плотности распределения вероятностей можем записать уравнение Фокера-Планка

$$\frac{\partial \pi(z, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial z} \{a(z)\pi(z, \tau)\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{\sigma b(z)\pi(z, \tau)\}. \quad (34)$$

Предполагая, что существует стационарный режим, обозначим

$$\pi(z, \tau) = \pi(z), \quad (35)$$

запишем уравнение Фокера-Планка для стационарного распределения вероятностей  $\pi(z)$

$$\begin{aligned}(a(z)\pi(z))' + \frac{\sigma}{2}(b(z)\pi(z))'' &= 0, \\ -a(z)\pi(z) + \frac{\sigma}{2}(b(z)\pi(z))' &= 0.\end{aligned}$$

Решая данную систему уравнений получаем плотность распределения вероятностей  $\pi(z)$  нормированного числа заявок на орбите

$$\pi(z) = \frac{C}{b(z)} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^z \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}. \quad (36)$$

Теорема доказана.

Получим дискретное распределение вероятностей

$$P(i) = \pi(\sigma i) / \sum_{i=0}^{\infty} \pi(\sigma i), \quad (37)$$

которое будем называть диффузионной аппроксимацией дискретного распределения вероятностей количества заявок на орбите для изучаемой системы.

Нетрудно показать, что условием существования стационарного режима рассматриваемой системы является неравенство

$$\lambda < 2r_0 \left( \frac{q}{\mu_1} + \frac{1-q}{\mu_2} \right). \quad (38)$$

Введем следующую замену для того, чтобы среднее время обслуживания равнялось единице

$$q = \frac{\mu_1(1 - \mu_2)}{\mu_1 - \mu_2}.$$

В таком случае неравенство (38) имеет вид

$$\lambda < 2r_0.$$

## 1.6 Численные эксперименты

На рисунке 2 представлены графики изменения  $a(x)$  и  $b(x)$ , в зависимости от  $x$ , на рисунке 3 ряд распределения вероятностей количества заявок на орбите для следующих параметров системы  $r_0 = 0,3, r_1 = 0,2, r_2 = 0,5, \lambda = 1,1, \mu_1 = 0,5, \mu_2 = 1,5, q = 0,25, \sigma = 0,1$ .

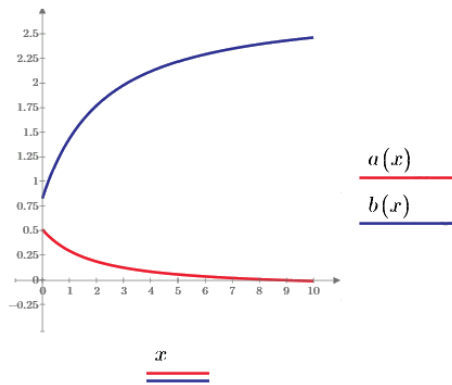


Рис. 2: Коэффициенты переноса  $a(x)$  и диффузии  $b(x)$

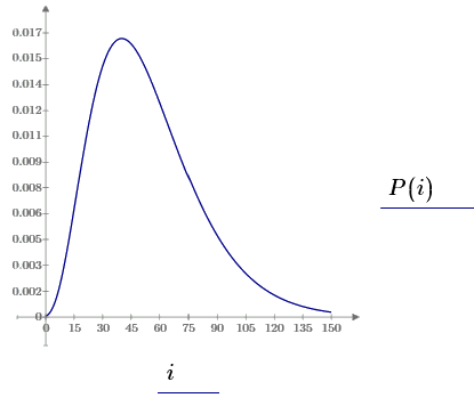


Рис. 3: Ряд распределения вероятностей количества заявок на орбите

Данные графики были построены с помощью приложения Mathcad.

## 2. ИСЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ $M|H_2|N$ С ОРБИТОЙ

### 2.1 Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания  $M|H_2|N$  с обратной связью (Рисунок 4).

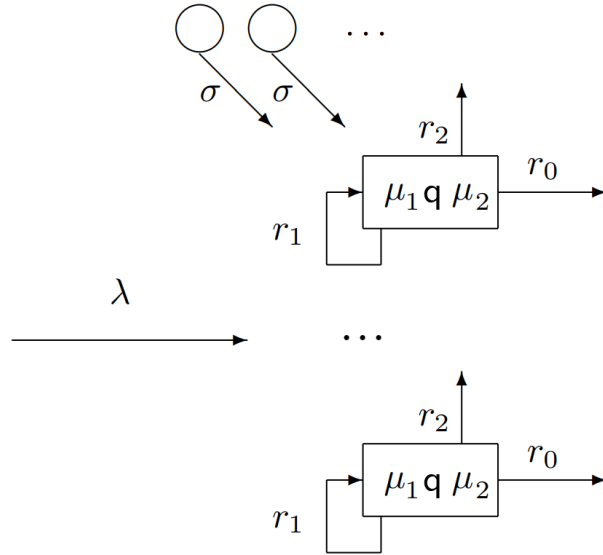


Рис. 4: Система массового обслуживания  $M|H_2|N$  с обратной связью

Система имеет  $N$  обслуживающих приборов. Заявки поступают в систему согласно простейшему потоку с параметром  $\lambda$ . Каждая заявка занимает один из свободных приборов на время, распределенное по гиперэкспоненциальному закону. Это означает, что заявка на приборе с вероятностью  $q$  поступает на первую фазу, с экспоненциальным распределением с параметром  $\mu_1$ , и с вероятностью  $1 - q$  на вторую, с параметром  $\mu_2$ .

После завершения обслуживания заявка с вероятностью  $r_0$  покидает систему, с вероятностью  $r_1$  мгновенно поступает на повторное обслуживание и с вероятностью  $r_2$  уходит на орбиту. Также, если на момент поступления заявки из потока все приборы заняты, то заявка уходит на орбиту. Через время, продолжительность которого распределена по экспоненциальному закону с параметром  $\sigma$ , заявка вновь обращается с орбиты к приборам.

Пусть  $i(t)$  – число заявок на орбите в момент времени  $t$ ,  $n_1(t)$  – число приборов занятых на первой фазе в момент времени  $t$ ,  $n_2(t)$  – число приборов занятых на второй фазе в момент времени  $t$ .

Рассмотрим трехмерный процесс  $\{n_1(t), n_2(t), i(t)\}$ . Под состоянием системы будем понимать состояние процесса  $\{n_1(t), n_2(t), i(t)\}$  в момент времени  $t$ .

Обозначим вероятности следующим образом

$$P(n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2, i(t) = i) = P_{n_1, n_2}(i, t)$$

вероятность того, что  $n_1$  – приборов занято на первой фазе, а  $n_2$  – приборов занято на второй фазе. При этом  $P_{n_1, n_2}(i, t) = 0$ , если  $n_1 < 0$ ,  $n_2 < 0$  или  $n_1 + n_2 > N$ .

Для решения будем применять методы асимптотического анализа предложенные в [1, 7, 9, 11] и асимптотически диффузионного анализа предложенные в [1].



## 2.2 Уравнения Колмогорова

Для данных вероятностей составим систему уравнений в конечных разностях [4, 5, 6].  
Для упрощения выражений введем индикатор

$$E_a^b = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b, \end{cases}$$

$$\overline{E}_a^b = 1 - E_a^b.$$

$$\begin{aligned} P_{n_1, n_2}(i, t + \Delta t) = & (1 - \Delta t(\lambda + i\sigma \overline{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2))P_{n_1, n_2}(i, t) + \Delta t \mu_1 r_1 q n_1 P_{n_1, n_2}(i, t) + \\ & + \Delta t \mu_2 (1 - q) r_1 n_2 P_{n_1, n_2}(i, t) + \Delta t \lambda E_{n_1+n_2}^N P_{n_1, n_2}(i - 1, t) + \\ & + \Delta t \lambda q P_{n_1-1, n_2}(i, t) + \Delta t (i + 1) \sigma q P_{n_1-1, n_2}(i + 1, t) + \\ & + \Delta t \lambda (1 - q) P_{n_1, n_2-1}(i, t) + \Delta t (i + 1) \sigma (1 - q) P_{n_1, n_2-1}(i + 1, t) + \\ & + \Delta t \mu_1 r_0 (n_1 + 1) P_{n_1+1, n_2}(i, t) + \Delta t \mu_1 r_2 (n_1 + 1) P_{n_1+1, n_2}(i - 1, t) + \\ & + \Delta t \mu_2 r_0 (n_2 + 1) P_{n_1, n_2+1}(i, t) + \Delta t \mu_2 r_2 (n_2 + 1) P_{n_1, n_2+1}(i - 1, t) + \\ & + \Delta t \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) P_{n_1+1, n_2-1}(i, t) \\ & + \Delta t \mu_2 r_1 q (n_2 + 1) P_{n_1-1, n_2+1}(i, t) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Раскроем скобки, разделим на каждое уравнение на  $\Delta t$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{P_{n_1, n_2}(i, t + \Delta t) - P_{n_1, n_2}(i, t)}{\Delta t} = & -(\lambda + i\sigma \overline{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)P_{n_1, n_2}(i, t) + \\ & + n_1 \mu_1 r_1 q P_{n_1, n_2}(i, t) + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 P_{n_1, n_2}(i, t) + \lambda E_{n_1+n_2}^N P_{n_1, n_2}(i - 1, t) + \\ & + \lambda q P_{n_1-1, n_2}(i, t) + \\ & + (i + 1) \sigma q P_{n_1-1, n_2}(i + 1, t) \lambda (1 - q) P_{n_1, n_2-1}(i, t) + \\ & + (i + 1) \sigma (1 - q) P_{n_1, n_2-1}(i + 1, t) + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) P_{n_1+1, n_2}(i, t) + \\ & + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) P_{n_1+1, n_2}(i - 1, t) + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) P_{n_1, n_2+1}(i, t) \\ & + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) P_{n_1, n_2+1}(i - 1, t) + \\ & + \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) P_{n_1+1, n_2-1}(i, t) + \mu_2 r_1 q (n_2 + 1) P_{n_1-1, n_2+1}(i, t) \\ & + o(\Delta t)/\Delta t. \end{aligned}$$

Устремим  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{dP_{n_1, n_2}(i, t)}{\partial t} = & -(\lambda + i\sigma \bar{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)P_{n_1, n_2}(i, t) + \mu_1 r_1 q n_1 P_{n_1, n_2}(i, t) + \\ & + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 P_{n_1, n_2}(i, t) + \lambda E_{n_1+n_2}^N P_{n_1, n_2}(i - 1, t) + \\ & + \lambda q P_{n_1-1, n_2}(i, t) + (i + 1) \sigma q P_{n_1-1, n_2}(i + 1, t) + \\ & + \lambda (1 - q) P_{n_1, n_2-1}(i, t) + (i + 1) \sigma (1 - q) P_{n_1, n_2-1}(i + 1, t) + \\ & + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) P_{n_1+1, n_2}(i, t) + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) P_{n_1+1, n_2}(i - 1, t) + \\ & + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) P_{n_1, n_2+1}(i, t) + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) P_{n_1, n_2+1}(i - 1, t) + \\ & + \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) P_{n_1+1, n_2-1}(i, t) + \mu_2 r_1 q (n_2 + 1) P_{n_1-1, n_2+1}(i, t). \end{aligned}$$

Введем частичные характеристические функции

$$H_{n_1, n_2}(u, t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{iuj} P_{n_1, n_2}(i, t).$$

Тогда уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial t} = & -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) H_{n_1, n_2}(u, t) + j\sigma \bar{E}_{n_1+n_2}^N \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} + \\ & + \mu_1 r_1 q n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 H_{n_1, n_2}(u, t) + \lambda e^{ju} E_{n_1+n_2}^N H_{n_1, n_2}(u, t) + \\ & + \lambda q H_{n_1-1, n_2}(u, t) - j\sigma q e^{-ju} \frac{\partial H_{n_1-1, n_2}(u, t)}{\partial u} + \\ & + \lambda (1 - q) H_{n_1, n_2-1}(u, t) - j\sigma (1 - q) e^{-ju} \frac{\partial H_{n_1, n_2-1}(u, t)}{\partial u} + \\ & + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2}(u, t) + \mu_1 r_2 e^{ju} (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2}(u, t) + \\ & + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) H_{n_1, n_2+1}(u, t) + \mu_2 r_2 e^{ju} (n_2 + 1) H_{n_1, n_2+1}(u, t) + \\ & + \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2-1}(u, t) + (n_2 + 1) \mu_2 r_1 q H_{n_1-1, n_2+1}(u, t). \end{aligned}$$

Просуммируем по  $n_1$  и  $n_2$

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial t} = & -\lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} H_{n_1, n_2}(u, t) + j\sigma \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \bar{E}_{n_1+n_2}^N \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} - \\
& -\mu_1 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) - \mu_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}(u, t) + \\
& + \mu_1 r_1 q \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) + \mu_2 r_1 (1-q) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}(u, t) + \\
& + \lambda e^{ju} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} E_{n_1+n_2}^N H_{n_1, n_2}(u, t) + \\
& + \lambda q \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} H_{n_1-1, n_2}(u, t) - j\sigma q e^{-ju} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial H_{n_1-1, n_2}(u, t)}{\partial u} + \\
& + \lambda (1-q) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} H_{n_1, n_2-1}(u, t) u - j\sigma (1-q) e^{-ju} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2-1}(u, t)}{\partial u} + \\
& + \mu_1 r_0 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2}(u, t) + \mu_1 r_2 e^{ju} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2}(u, t) + \\
& + \mu_2 r_0 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} (n_2 + 1) H_{n_1, n_2+1}(u, t) + \mu_2 r_2 e^{ju} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} (n_2 + 1) H_{n_1, n_2+1}(u, t) + \\
& + \mu_1 r_1 (1-q) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2-1}(u, t) + \\
& + \mu_2 r_1 q \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} (n_2 + 1) H_{n_1-1, n_2+1}(u, t).
\end{aligned}$$

Преобразуем

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial t} = & -\lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} H_{n_1, n_2}(u, t) + j\sigma \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} - \\
& -\mu_1(r_0 + r_2) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) - \mu_2(r_0 + r_2) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}(u, t) + \\
& + \lambda e^{ju} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} H_{n_1, n_2}(u, t) + \\
& + \lambda q \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} H_{n_1, n_2}(u, t) - j\sigma q e^{-ju} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} + \\
& + \lambda(1-q) \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} H_{n_1, n_2}(u, t) - j\sigma(1-q) e^{-ju} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} - \\
& + \mu_1 r_0 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) + \mu_1 r_2 e^{ju} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) + \\
& + \mu_2 r_0 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}(u, t) + \mu_2 r_2 e^{ju} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}(u, t).
\end{aligned}$$

Приведем подобные слагаемые

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial t} = & \lambda(e^{ju} - 1) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} H_{n_1, n_2}(u, t) - \\
& - j\sigma q(e^{-ju} - 1) \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} - \\
& - j\sigma(1-q)(e^{-ju} - 1) \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} + \\
& + \mu_1 r_2(e^{ju} - 1) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) + \mu_2 r_2(e^{ju} - 1) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}(u, t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial t} = & \lambda(e^{ju} - 1) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} H_{n_1, n_2}(u, t) - \\
& - j\sigma(e^{-ju} - 1) \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} + \\
& + \mu_1 r_2(e^{ju} - 1) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) + \mu_2 r_2(e^{ju} - 1) \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}(u, t)
\end{aligned}$$

Вынесем  $(e^{ju} - 1)$

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial t} = & (e^{ju} - 1) \left\{ \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} H_{n_1, n_2}(u, t) + \right. \\ & + j\sigma e^{-ju} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} + \\ & \left. + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}(u, t) \right\}. \end{aligned}$$

Получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial t} = & -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) H_{n_1, n_2}(u, t) + j\sigma \bar{E}_{n_1+n_2}^N \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} + \\ & + \mu_1 r_1 q n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 H_{n_1, n_2}(u, t) + \\ & + \lambda e^{ju} E_{n_1+n_2}^N H_{n_1, n_2}(u, t) + \\ & + \lambda q H_{n_1-1, n_2}(u, t) - j\sigma q e^{-ju} \frac{\partial H_{n_1-1, n_2}(u, t)}{\partial u} + \\ & + \lambda (1 - q) H_{n_1, n_2-1}(u, t) - j\sigma (1 - q) e^{-ju} \frac{dH_{n_1, n_2-1}(u, t)}{du} + \\ & + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2}(u, t) + \mu_1 r_2 e^{ju} (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2}(u, t) + \\ & + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) H_{n_1, n_2+1}(u, t) + \mu_2 r_2 e^{ju} (n_2 + 1) H_{n_1, n_2+1}(u, t) + \\ & + \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2-1}(u, t) + (n_2 + 1) \mu_2 r_1 q H_{n_1-1, n_2+1}(u, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial t} = & (e^{ju} - 1) \left\{ \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} H_{n_1, n_2}(u, t) + \right. \\ & + j\sigma e^{-ju} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial H_{n_1, n_2}(u, t)}{\partial u} + \\ & \left. + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}(u, t) + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}(u, t) \right\}. \end{aligned} \tag{39}$$

### 2.3 Первый этап асимптотического анализа

Будем решать уравнения (39) методом асимптотического анализа. Сделаем замены

$$\sigma = \varepsilon, \tau = t\varepsilon, u = \varepsilon w, H_{n_1, n_2}(u, t) = F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon).$$

Тогда мы можем переписать уравнения (39)

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = & -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) + j \bar{E}_{n_1 + n_2}^N \frac{\partial F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \\ & + \mu_1 r_1 q n_1 F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) + \\ & + \lambda e^{j\varepsilon w} E_{n_1 + n_2}^N F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) + \lambda q F_{n_1 - 1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) - \\ & - j q e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_{n_1 - 1, n_2}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \lambda (1 - q) F_{n_1, n_2 - 1}(w, \tau, \varepsilon) - \\ & - j (1 - q) e^{-j\varepsilon w} \frac{d F_{n_1, n_2 - 1}(w, \tau, \varepsilon)}{dw} + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) F_{n_1 + 1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) + \\ & + \mu_1 r_2 e^{j\varepsilon w} (n_1 + 1) F_{n_1 + 1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) F_{n_1, n_2 + 1}(w, \tau, \varepsilon) + \\ & + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) e^{j\varepsilon w} F_{n_1, n_2 + 1}(w, \tau, \varepsilon) + \\ & + \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) F_{n_1 + 1, n_2 - 1}(w, \tau, \varepsilon) + \\ & + \mu_2 r_1 q (n_2 + 1) F_{n_1 - 1, n_2 + 1}(w, \tau, \varepsilon), \\ \varepsilon \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = & (e^{j\varepsilon w} - 1) \left\{ \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) + \right. \\ & + j e^{-j\varepsilon w} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \\ & \left. + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) \right\}. \end{aligned} \quad (40)$$

При условии, что  $\varepsilon \rightarrow 0$ , можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 2.1.** Компоненты  $R_{n_1, n_2}(x)$  распределения вероятностей числа приборов, занятых на первой и второй фазе имеет вид

$$R_{n_1, n_2}(x) = \frac{L_{n_1, n_2}(x)}{c(x)}, \quad (41)$$

где

$$L_{n_1, n_2}(x) = (\mu_1 \mu_2 (1 - r_1))^{N - (n_1 + n_2)} \frac{N!}{(n_1 + n_2)!} C_{n_1 + n_2}^{m_2} (\mu_1 (1 - q))^{n_2} (\mu_2 q)^{n_1} (\lambda + x)^{n_1 + n_2},$$

$$c(x) = \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} L_{n_1, n_2}.$$

$$x = x(\tau); x'(\tau) = a(x) = \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} R_{n_1, n_2} - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} R_{n_1, n_2} +$$

$$+ \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 R_{n_1, n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 R_{n_1, n_2}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим первое уравнение системы (40) в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ , обозначим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) = F_{n_1, n_2}(w, \tau)$$

и получим

$$\begin{aligned} & - (\lambda + n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2) F_{n_1, n_2}(w, \tau) + j \bar{E}_{n_1 + n_2}^N \frac{\partial F_{n_1, n_2}(w, \tau)}{\partial w} + \\ & + \mu_1 r_1 q n_1 F_{n_1, n_2}(w, \tau) + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 F_{n_1, n_2}(w, \tau) + \\ & + \lambda E_{n_1 + n_2}^N F_{n_1, n_2}(w, \tau) + \lambda q F_{n_1 - 1, n_2}(w, \tau) - \\ & - j q \frac{\partial F_{n_1 - 1, n_2}(w, \tau)}{\partial w} + \lambda (1 - q) F_{n_1, n_2 - 1}(w, \tau) - \\ & - j (1 - q) \frac{d F_{n_1, n_2 - 1}(u, t)}{dw} + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) F_{n_1 + 1, n_2}(w, \tau) + \\ & + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) F_{n_1 + 1, n_2}(w, \tau) + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) F_{n_1, n_2 + 1}(w, \tau) + \\ & + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) F_{n_1, n_2 + 1}(w, \tau) + \\ & + \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) F_{n_1 + 1, n_2 - 1}(w, \tau) + \\ & + \mu_2 r_1 q (n_2 + 1) F_{n_1 - 1, n_2 + 1}(w, \tau) = 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Находим решение уравнения (42) в виде  $F_{n_1, n_2}(w, \tau) = L_{n_1, n_2} e^{j w x(\tau)}$ . Получим следующую систему

$$\begin{aligned}
& -(\lambda + \mu_1 n_1 + n_2 \mu_2) L_{n_1, n_2} - x(\tau) \bar{E}_{n_1 + n_2}^N L_{n_1, n_2} + \\
& + \mu_1 r_1 q n_1 L_{n_1, n_2} + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 L_{n_1, n_2} + \\
& + \lambda E_{n_1 + n_2}^N L_{n_1, n_2} + \lambda q L_{n_1 - 1, n_2} + \\
& + x(\tau) q L_{n_1 - 1, n_2} + \lambda (1 - q) L_{n_1, n_2 - 1} + \\
& + x(\tau) (1 - q) L_{n_1, n_2 - 1} + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) L_{n_1 + 1, n_2} + \\
& + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) L_{n_1 + 1, n_2} + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) L_{n_1, n_2 + 1} + \\
& + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) L_{n_1, n_2 + 1} + \\
& + \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) L_{n_1 + 1, n_2 - 1} + \\
& + \mu_2 r_1 q (n_2 + 1) L_{n_1 - 1, n_2 + 1} = 0,
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
& L_{n_1, n_2} \{ -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) - x(\tau) \bar{E}_{n_1 + n_2}^N + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 + \lambda E_{n_1 + n_2}^N \} + \\
& + L_{n_1 - 1, n_2} \{ \lambda q + x(\tau) q \} + \\
& + L_{n_1, n_2 - 1} \{ \lambda (1 - q) + x(\tau) (1 - q) \} + \\
& + L_{n_1 + 1, n_2} \{ \mu_1 r_0 (n_1 + 1) + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) \} + \\
& + L_{n_1, n_2 + 1} \{ \mu_2 r_0 (n_2 + 1) + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) \} + \\
& + L_{n_1 + 1, n_2 - 1} \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) + \\
& + L_{n_1 - 1, n_2 + 1} \mu_2 r_1 q (n_2 + 1) = 0.
\end{aligned} \tag{43}$$

Чтобы доказать утверждение (41) воспользуемся символьным исчислением на языке Python, с помощью библиотеки SymPy [15]. Однако, чтобы сделать это, нужно избавиться от индикаторов, поэтому рассмотрим частные случаи.

$$n_1 = 0, n_2 = 0:$$

$$\begin{aligned}
& L_{0,0} \{ -\lambda - x(\tau) \} + \\
& + L_{1,0} \{ \mu_1 r_0 + \mu_1 r_2 \} + \\
& + L_{0,1} \{ \mu_2 r_0 + \mu_2 r_2 \} = 0.
\end{aligned} \tag{44}$$

$$n_1 = 0, n_2 > 0, n_1 + n_2 < N:$$

$$\begin{aligned}
& L_{0, n_2} \{ -(\lambda + \mu_2 n_2) - x(\tau) + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 \} + \\
& + L_{0, n_2 - 1} \{ \lambda (1 - q) + x(\tau) (1 - q) \} + \\
& + L_{1, n_2} \{ \mu_1 r_0 + \mu_1 r_2 \} + \\
& + L_{0, n_2 + 1} \{ \mu_2 r_0 (n_2 + 1) + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) \} + \\
& + L_{1, n_2 - 1} \mu_1 r_1 (1 - q) = 0.
\end{aligned} \tag{45}$$



$n_1 > 0, n_2 = 0, n_1 + n_2 < N$ :

$$\begin{aligned}
& L_{n_1,0}\{-(\lambda + \mu_1 n_1) - x(\tau) + \mu_1 r_1 q n_1\} + \\
& + L_{n_1-1,0}\{\lambda q + x(\tau)q\} + \\
& + L_{n_1+1,0}\{\mu_1 r_0(n_1 + 1) + \mu_1 r_2(n_1 + 1)\} + \\
& + L_{n_1,1}\{\mu_2 r_0 + \mu_2 r_2(n_2 + 1)\} + \\
& + L_{n_1-1,n_2+1}\mu_2 r_1 q(n_2 + 1) = 0.
\end{aligned} \tag{46}$$

$n_1 > 0, n_2 > 0, n_1 + n_2 < N$ :

$$\begin{aligned}
& L_{n_1,n_2}\{-(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) - x(\tau) + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1(1 - q)n_2\} + \\
& + L_{n_1-1,n_2}\{\lambda q + x(\tau)q\} + \\
& + L_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1 - q) + x(\tau)(1 - q)\} + \\
& + L_{n_1+1,n_2}\{\mu_1 r_0(n_1 + 1) + \mu_1 r_2(n_1 + 1)\} + \\
& + L_{n_1,n_2+1}\{\mu_2 r_0(n_2 + 1) + \mu_2 r_2(n_2 + 1)\} + \\
& + L_{n_1+1,n_2-1}\mu_1 r_1(1 - q)(n_1 + 1) + \\
& + L_{n_1-1,n_2+1}\mu_2 r_1 q(n_2 + 1) = 0.
\end{aligned} \tag{47}$$

$n_1 = 0, n_2 = N$ :

$$\begin{aligned}
& L_{0,N}\{-(\lambda + N\mu_2) + N\mu_2 r_1(1 - q) + \lambda\} + \\
& + L_{0,N-1}\{\lambda(1 - q) + x(\tau)(1 - q)\} + \\
& + L_{1,N-1}\mu_1 r_1(1 - q) = 0.
\end{aligned} \tag{48}$$

$n_1 = N, n_2 = 0$ :

$$\begin{aligned}
& L_{N,0}\{-N\mu_1 + N\mu_2 r_1 q\} + \\
& + L_{N-1,0}\{\lambda q + x(\tau)q\} + \\
& + L_{N-1,1}\mu_2 r_1 q = 0.
\end{aligned} \tag{49}$$

$n_1 + n_2 = N, n_1 \neq N, n_2 \neq N$ :

$$\begin{aligned}
& L_{n_1,n_2}\{-(\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1(1 - q)n_2\} + \\
& + L_{n_1-1,n_2}\{\lambda q + x(\tau)q\} + \\
& + L_{n_1,n_2-1}\{\lambda(1 - q) + x(\tau)(1 - q)\} + \\
& + L_{n_1+1,n_2-1}(n_1 + 1)\mu_1 r_1(1 - q) + \\
& + L_{n_1-1,n_2+1}\mu_2 r_1 q(n_2 + 1) = 0.
\end{aligned} \tag{50}$$

Подставляя (41) в предложенные равенства, получим тождество. Следовательно (41)

является решением. Заметим, что

$$\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} R_{n_1, n_2} = 1.$$

Для этого разделим полученное решение на сумму всех  $L_{n_1, n_2}$

$$c = \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} L_{n_1, n_2}.$$

Получим

$$R_{n_1, n_2} = \frac{L_{n_1, n_2}}{c}.$$

Найдем  $x = x(\tau)$ . Рассмотрим второе уравнение системы (53)! в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial F_{n_1, n_2}(w, \tau)}{\partial \tau} = & jw \left\{ \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} F_{n_1, n_2}(w, \tau, \varepsilon) + \right. \\ & + j \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \frac{\partial F_{n_1, n_2}(w, \tau)}{\partial w} + \\ & \left. + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 F_{n_1, n_2}(w, \tau) + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 F_{n_1, n_2}(w, \tau) \right\}. \end{aligned}$$

Выполним замену  $F_{n_1, n_2}(w, \tau) = R_{n_1, n_2} e^{jwx(\tau)}$ , тогда

$$\begin{aligned} x'(\tau) = & \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} R_{n_1, n_2} - x(\tau) \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} R_{n_1, n_2} + \\ & + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 R_{n_1, n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 R_{n_1, n_2}. \end{aligned}$$

Обозначим через

$$\begin{aligned} x'(\tau) = a(x) = & \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} R_{n_1, n_2} - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} R_{n_1, n_2} + \\ & + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 R_{n_1, n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 R_{n_1, n_2}. \end{aligned} \tag{51}$$

Теорема доказана.

## 2.4 Второй этап асимптотического анализа

В системе (39) сделаем замену

$$H_{n_1, n_2}(u, t) = e^{j\frac{u}{\sigma}x(\sigma t)} H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t),$$

получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) = & -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\ & + j\sigma \bar{E}_{n_1+n_2}^N \frac{\partial H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t)}{\partial u} - x(\sigma t)\bar{E}_{n_1+n_2}^N H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\ & + \mu_1 r_1 q n_1 H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \mu_2 r_1 (1-q)n_2 H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\ & + \lambda e^{ju} E_{n_1+n_2}^N H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\ & + \lambda q H_{n_1-1, n_2}^{(1)}(u, t) - j\sigma q e^{-ju} \frac{\partial H_{n_1-1, n_2}^{(1)}(u, t)}{\partial u} + \\ & + q e^{-ju} x(\sigma t) H_{n_1-1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\ & + \lambda(1-q)H_{n_1, n_2-1}^{(1)}(u, t) - j\sigma(1-q)e^{-ju} \frac{dH_{n_1, n_2-1}^{(1)}}{du} + \\ & + (1-q)e^{-ju} x(\sigma t) H_{n_1, n_2-1}^{(1)}(u, t) + \\ & + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\ & + \mu_1 r_2 e^{ju} (n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\ & + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) H_{n_1, n_2+1}(u, t) + \\ & + \mu_2 r_2 e^{ju} (n_2 + 1) H_{n_1, n_2+1}(u, t) + \\ & + \mu_1 r_1 (1-q)(n_1 + 1) H_{n_1+1, n_2-1}^{(1)}(u, t) + \\ & + (n_2 + 1) \mu_2 r_1 q H_{n_1-1, n_2+1}^{(1)}(u, t), \\ \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \left\{ \frac{\partial H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) \right\} = & (e^{ju} - 1) \left\{ \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \right. \\ & + e^{-ju} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \left[ j\sigma \frac{\partial H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t)}{\partial u} - \right. \\ & \left. \left. - x(\sigma t) H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) \right] + \right. \\ & + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\ & \left. + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) \right\}. \end{aligned} \tag{52}$$

С учетом (51) перепишем систему (52)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial H_{n_1, n_2}^{(1)} c(u, t)}{\partial t} + jua(x)H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) = -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\
& + j\sigma \bar{E}_{n_1 + n_2}^N \frac{\partial H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t)}{\partial u} - x \bar{E}_{n_1 + n_2}^N H_{n_1, n_2}^{(1)} + \\
& + \mu_1 r_1 q n_1 H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\
& + \lambda e^{ju} E_{n_1 + n_2}^N H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\
& + \lambda q H_{n_1 - 1, n_2}^{(1)}(u, t) - j\sigma q e^{-ju} \frac{\partial H_{n_1 - 1, n_2}^{(1)}(u, t)}{\partial u} + \\
& + q e^{-ju} x H_{n_1 - 1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\
& + \lambda (1 - q) H_{n_1, n_2 - 1}^{(1)}(u, t) - j\sigma (1 - q) e^{-ju} \frac{dH_{n_1, n_2 - 1}^{(1)}}{du} + \\
& + (1 - q) e^{-ju} x H_{n_1, n_2 - 1}^{(1)}(u, t) + \\
& + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) H_{n_1 + 1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\
& + \mu_1 r_2 e^{ju} (n_1 + 1) H_{n_1 + 1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\
& + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) H_{n_1, n_2 + 1}(u, t) + \\
& + \mu_2 r_2 e^{ju} (n_2 + 1) H_{n_1, n_2 + 1}(u, t) + \\
& + \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) H_{n_1 + 1, n_2 - 1}^{(1)}(u, t) + \\
& + (n_2 + 1) \mu_2 r_1 q H_{n_1 - 1, n_2 + 1}^{(1)}(u, t), \\
& \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \left\{ \frac{\partial H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t)}{\partial t} + jua(x)H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) \right\} = (e^{ju} - 1) \left\{ \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) \right. \\
& + e^{-ju} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \left[ \sigma j \frac{\partial H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t)}{\partial u} - x H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) \right] \\
& + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) + \\
& + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{53}$$

Обозначив  $\sigma = \varepsilon^2$  и сделав следующие замены в (53)

$$\tau = t\varepsilon^2, u = \varepsilon w, H_{n_1, n_2}^{(1)}(u, t) = F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon),$$

МОЖЕМ НАПИСАТЬ

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \frac{\partial F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial t} + j\varepsilon w a F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) = -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + j\varepsilon \bar{E}_{n_1+n_2}^N \frac{\partial F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} - x \bar{E}_{n_1+n_2}^N F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_1 r_1 q n_1 F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \mu_2 r_1 (1-q) n_2 F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \lambda e^{j\varepsilon w} E_{n_1+n_2}^N F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \lambda q F_{n_1-1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) - j\varepsilon q e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_{n_1-1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \\
& + q e^{-j\varepsilon w} x F_{n_1-1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \lambda (1-q) F_{n_1, n_2-1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) - j\varepsilon (1-q) e^{-j\varepsilon w} \frac{d F_{n_1, n_2-1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{dw} + \\
& + (1-q) e^{-j\varepsilon w} x F_{n_1, n_2-1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) F_{n_1+1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_1 r_2 e^{j\varepsilon w} (n_1 + 1) F_{n_1+1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) F_{n_1, n_2+1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_2 r_2 e^{j\varepsilon w} (n_2 + 1) F_{n_1, n_2+1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_1 r_1 (1-q) (n_1 + 1) F_{n_1+1, n_2-1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + (n_2 + 1) \mu_2 r_1 q F_{n_1-1, n_2+1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon), \\
& \varepsilon^2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \left\{ \frac{\partial F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial t} + j\varepsilon a F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) \right\} = (e^{j\varepsilon w} - 1) \left\{ \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \right. \\
& + e^{-j\varepsilon w} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} \left[ j\varepsilon \frac{\partial F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial u} - x F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) \right] \\
& + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& \left. + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) \right\}.
\end{aligned} \tag{54}$$

Перепишем первое уравнение (54) с учетом разложения

$$e^{j\varepsilon w} = 1 + (j\varepsilon w) + O(\varepsilon^2), \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
j\varepsilon w a F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) = & -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + j\varepsilon \bar{E}_{n_1+n_2}^N \frac{\partial F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} - x \bar{E}_{n_1+n_2}^N F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_1 r_1 q n_1 F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \lambda E_{n_1+n_2}^N F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + j\varepsilon w \lambda E_{n_1+n_2}^N F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \lambda q F_{n_1-1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) - \varepsilon q \frac{\partial F_{n_1-1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{\partial w} + \\
& + q x F_{n_1-1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) - j\varepsilon w q x F_{n_1-1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \lambda (1 - q) F_{n_1, n_2-1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) - j\varepsilon (1 - q) \frac{d F_{n_1, n_2-1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon)}{dw} + \\
& + (1 - q) x F_{n_1, n_2-1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) - j\varepsilon w (1 - q) x F_{n_1, n_2-1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_1 r_0 (n_1 + 1) F_{n_1+1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) F_{n_1+1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + j\varepsilon w \mu_1 r_2 (n_1 + 1) F_{n_1+1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_2 r_0 (n_2 + 1) F_{n_1, n_2+1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) F_{n_1, n_2+1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + j\varepsilon w \mu_2 r_2 (n_2 + 1) F_{n_1, n_2+1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) F_{n_1+1, n_2-1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) + \\
& + (n_2 + 1) \mu_2 r_1 q F_{n_1-1, n_2+1}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon).
\end{aligned} \tag{56}$$

Решение задачи (56) можно записать в виде разложения

$$F_{n_1, n_2}^{(1)}(w, \tau, \varepsilon) = \Phi(w, \tau) \{R_{n_1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2}\} + O(\varepsilon^2), \tag{57}$$

где  $\Phi(w, \tau)$  – скалярная функция, форма которой определена ниже.

Получим

$$\begin{aligned}
j\varepsilon w a \Phi(w, \tau) \{R_{n_1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2}\} = & \Phi(w, \tau) \{ \{R_{n_1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2}\} \{ -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) + \\
& - x \bar{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1-q) n_2 + \lambda E_{n_1+n_2}^N + j\varepsilon w \lambda E_{n_1+n_2}^N \} \\
& + \{R_{n_1-1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1-1, n_2}\} \{ \lambda q + qx - j\varepsilon w q x \} + \\
& + \{R_{n_1, n_2-1} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2-1}\} \{ \lambda(1-q) + \\
& + (1-q)x - j\varepsilon w(1-q)x \} + \\
& + \{R_{n_1+1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1+1, n_2}\} \{ \mu_1 r_0(n_1+1) + \\
& + \mu_1 r_2(n_1+1) + j\varepsilon w \mu_1 r_2(n_1+1) \} + \\
& + \{R_{n_1, n_2+1} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2+1}\} \{ \mu_2 r_0(n_2+1) + \\
& + \mu_2 r_2(n_2+1) + j\varepsilon w \mu_2 r_2(n_2+1) \} + \\
& + \{R_{n_1+1, n_2+1} + j\varepsilon w f_{n_1-1, n_2-1}\} \mu_1 r_1(1-q)(n_1+1) + \\
& + \{R_{n_1-1, n_2+1} + j\varepsilon w f_{n_1-1, n_2+1}\} (n_2+1) \mu_2 r_1 q \} + \\
& + \frac{\partial \Phi(w, t)}{\partial w} \{ j\varepsilon \bar{E}_{n_1+n_2}^N \{R_{n_1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2}\} - \\
& - j\varepsilon q \{R_{n_1-1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1-1, n_2}\} - \\
& - j\varepsilon(1-q) \{R_{n_1, n_2-1} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2-1}\} \}.
\end{aligned} \tag{58}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
j\varepsilon w a \Phi(w, \tau) R_{n_1, n_2} = & \Phi(w, \tau) \{ \{R_{n_1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2}\} \{ -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) + \\
& - x \bar{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1-q) n_2 + \lambda E_{n_1+n_2}^N \} + j\varepsilon w \lambda E_{n_1+n_2}^N R_{n_1, n_2} + \\
& + \{R_{n_1-1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1-1, n_2}\} \{ \lambda q + qx \} - j\varepsilon w q x R_{n_1-1, n_2} + \\
& + \{R_{n_1, n_2-1} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2-1}\} \{ \lambda(1-q) + \\
& + (1-q)x \} - j\varepsilon w(1-q)x R_{n_1, n_2-1} + \\
& + \{R_{n_1+1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1+1, n_2}\} \{ \mu_1 r_0(n_1+1) + \\
& + \mu_1 r_2(n_1+1) \} + j\varepsilon w \mu_1 r_2(n_1+1) R_{n_1+1, n_2} + \\
& + \{R_{n_1, n_2+1} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2+1}\} \{ \mu_2 r_0(n_2+1) + \\
& + \mu_2 r_2(n_2+1) \} + j\varepsilon w \mu_2 r_2(n_2+1) R_{n_1, n_2+1} + \\
& + \{R_{n_1+1, n_2+1} + j\varepsilon w f_{n_1-1, n_2-1}\} \mu_1 r_1(1-q)(n_1+1) + \\
& + \{R_{n_1-1, n_2+1} + j\varepsilon w f_{n_1-1, n_2+1}\} (n_2+1) \mu_2 r_1 q \} + \\
& + \frac{\partial \Phi(w, t)}{\partial w} \{ j\varepsilon \bar{E}_{n_1+n_2}^N R_{n_1, n_2} - j\varepsilon q R_{n_1-1, n_2} - j\varepsilon(1-q) R_{n_1, n_2-1} \}.
\end{aligned}$$

С учетом (43) разделим последнее уравнение на  $\Phi(w, \tau) j\varepsilon w$  и положим  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
aR_{n_1, n_2} = & f_{n_1, n_2} \{ -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) + \\
& - x \bar{E}_{n_1 + n_2}^N + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 + \lambda E_{n_1 + n_2}^N \} + E_{n_1 + n_2}^N R_{n_1, n_2} + \\
& + f_{n_1 - 1, n_2} \{ \lambda q + qx \} - qx R_{n_1 - 1, n_2} + \\
& + f_{n_1, n_2 - 1} \{ \lambda (1 - q) + \\
& + (1 - q)x \} - (1 - q)x R_{n_1, n_2 - 1} + \\
& + f_{n_1 + 1, n_2} \{ \mu_1 r_0 (n_1 + 1) + \\
& + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) \} + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) R_{n_1 + 1, n_2} + \\
& + f_{n_1, n_2 + 1} \{ \mu_2 r_0 (n_2 + 1) + \\
& + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) \} + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) R_{n_1, n_2 + 1} + \\
& + f_{n_1 - 1, n_2 - 1} \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) + \\
& + f_{n_1 - 1, n_2 + 1} (n_2 + 1) \mu_2 r_1 q + \\
& + \frac{\partial \Phi(w, t) / \partial w}{w \Phi(w, t)} \{ \bar{E}_{n_1 + n_2}^N R_{n_1, n_2} - q R_{n_1 - 1, n_2} - (1 - q) R_{n_1, n_2 - 1} \}.
\end{aligned}$$

Перепишем последнее уравнение

$$\begin{aligned}
& f_{n_1, n_2} \{ -(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) - x \bar{E}_{n_1 + n_2}^N + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 + \lambda E_{n_1 + n_2}^N \} + \\
& + f_{n_1 - 1, n_2} \{ \lambda q + qx \} + \\
& + f_{n_1, n_2 - 1} \{ \lambda (1 - q) + (1 - q)x \} + \\
& + f_{n_1 + 1, n_2} \{ \mu_1 r_0 (n_1 + 1) + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) \} + \\
& + f_{n_1, n_2 + 1} \{ \mu_2 r_0 (n_2 + 1) + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) \} + \\
& + f_{n_1 - 1, n_2 - 1} \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) + \\
& + f_{n_1 - 1, n_2 + 1} (n_2 + 1) \mu_2 r_1 q = \\
& = -aR_{n_1, n_2} + E_{n_1 + n_2}^N R_{n_1, n_2} - qx R_{n_1 - 1, n_2} - (1 - q)x R_{n_1, n_2 - 1} + \\
& + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) R_{n_1 + 1, n_2} + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) R_{n_1, n_2 + 1} + \\
& + \frac{\partial \Phi(w, t) / \partial w}{w \Phi(w, t)} \{ \bar{E}_{n_1 + n_2}^N R_{n_1, n_2} - q R_{n_1 - 1, n_2} - (1 - q) R_{n_1, n_2 - 1} \}.
\end{aligned} \tag{59}$$

Решение  $f_{n_1, n_2}$  можно записать в виде

$$f_{n_1, n_2} = R_{n_1, n_2} + g - \varphi \frac{\partial \Phi(w, t) / \partial w}{w \Phi(w, t)}, \tag{60}$$



которое мы подставляем в (59) и получаем

$$\begin{aligned}
& \varphi_{n_1, n_2} (-(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 + \lambda E_{n_1 + n_2}^N - x \bar{E}_{n_1 + n_2}^N) + \\
& + \varphi_{n_1 - 1, n_2} (\lambda q \bar{E}_{n_1}^0 + x q \bar{E}_{n_1}^0) + \varphi_{n_1, n_2 - 1} (\lambda (1 - q) \bar{E}_{n_2}^0 + x (1 - q) \bar{E}_{n_2}^0) + \\
& + \varphi_{n_1 + 1, n_2} (\mu_1 r_0 (n_1 + 1) \bar{E}_{n_1 + n_2}^N + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) \bar{E}_{n_1 + n_2}^N) + \\
& + \varphi_{n_1, n_2 + 1} (\mu_2 r_0 (n_2 + 1) \bar{E}_{n_1 + n_2}^N + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) \bar{E}_{n_1 + n_2}^N) + \\
& + \varphi_{n_1 + 1, n_2 - 1} (1 - q) \mu_1 r_1 (n_1 + 1) + \varphi_{n_1 - 1, n_2 + 1} q \mu_2 r_1 (n_2 + 1) = \\
& = R_{n_1, n_2} x \bar{E}_{n_1 + n_2}^N - R_{n_1 - 1, n_2} x q \bar{E}_{n_1}^0 - R_{n_1, n_2 - 1} x (1 - q) \bar{E}_{n_2}^0, \\
\\
& g_{n_1, n_2} (-(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 + \lambda E_{n_1 + n_2}^N - x \bar{E}_{n_1 + n_2}^N) + \\
& + g_{n_1 - 1, n_2} (\lambda q \bar{E}_{n_1}^0 + x q \bar{E}_{n_1}^0) + g_{n_1, n_2 - 1} (\lambda (1 - q) \bar{E}_{n_2}^0 + x (1 - q) \bar{E}_{n_2}^0) + \\
& + f_{n_1 + 1, n_2} (\mu_1 r_0 (n_1 + 1) \bar{E}_{n_1 + n_2}^N + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) \bar{E}_{n_1 + n_2}^N) + \\
& + g_{n_1, n_2 + 1} (\mu_2 r_0 (n_2 + 1) \bar{E}_{n_1 + n_2}^N + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) \bar{E}_{n_1 + n_2}^N) + \\
& + g_{n_1 + 1, n_2 - 1} (1 - q) \mu_1 r_1 (n_1 + 1) + g_{n_1 - 1, n_2 + 1} q \mu_2 r_1 (n_2 + 1) = \\
& = R_{n_1, n_2} a - \lambda R_{n_1, n_2} + x q E_{n_1}^0 R_{n_1 - 1, n_2} + x (1 - q) \bar{E}_{n_2}^0 R_{n_1, n_2 - 1} \\
& - \mu_1 r_2 (n_1 + 1) R_{n_1 + 1, n_2} \bar{E}_{n_1 + n_2}^N - \mu_2 r_2 (n_2 + 1) R_{n_1, n_2 + 1} \bar{E}_{n_1 + n_2}^N.
\end{aligned} \tag{61}$$

Рассмотрим первое уравнение системы (43), дифференцируем его по  $x$ , получим уравнение

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial R_{n_1, n_2}}{\partial x} \{-(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) - x(\tau) \bar{E}_{n_1 + n_2}^N + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 + \lambda E_{n_1 + n_2}^N\} + \\
& + \frac{\partial R_{n_1 - 1, n_2}}{\partial x} \{\lambda q + x(\tau) q\} + \\
& + \frac{\partial R_{n_1, n_2 - 1}}{\partial x} \{\lambda (1 - q) + x(\tau) (1 - q)\} + \\
& + \frac{\partial R_{n_1 + 1, n_2}}{\partial x} \{\mu_1 r_0 (n_1 + 1) + \mu_1 r_2 (n_1 + 1)\} + \\
& + \frac{\partial R_{n_1, n_2 + 1}}{\partial x} \{\mu_2 r_0 (n_2 + 1) + \mu_2 r_2 (n_2 + 1)\} + \\
& + \frac{\partial R_{n_1 + 1, n_2 - 1}}{\partial x} \mu_1 r_1 (1 - q) (n_1 + 1) + \\
& + \frac{\partial R_{n_1 - 1, n_2 + 1}}{\partial x} \mu_2 r_1 q (n_2 + 1) - \\
& - R_{n_1, n_2} x \bar{E}_{n_1 + n_2}^N + R_{n_1 - 1, n_2} x q \bar{E}_{n_1}^0 + R_{n_1, n_2 - 1} x (1 - q) \bar{E}_{n_2}^0 = 0.
\end{aligned} \tag{62}$$

Учитывая (62) и последнее уравнение для  $\varphi$ , запишем равенство

$$\varphi_{n_1, n_2} = \frac{\partial R_{n_1, n_2}}{\partial x}, \tag{63}$$

где  $\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \varphi_{n_1, n_2} = 0$ . В силу (61)  $g_{n_1, n_2}$  является частным решением системы (62). Следовательно, она удовлетворяет условию

$$\sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} g_{n_1, n_2} = 0. \quad (64)$$

Тогда решение  $g_{n_1, n_2}$  системы (62), удовлетворяющее условию (64), определяется однозначно.

Теперь рассмотрим второе уравнение системы (54), в которую подставляем разложение (57)

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} + ja\varepsilon w \Phi(w, \tau) \left\{ 1 + j\varepsilon w \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1, n_2} \right\} = \\ = (j\varepsilon w + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}) \left[ \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \Phi(w, \tau) \{ R_{n_1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2} \} + \right. \\ + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 \Phi(w, \tau) \{ R_{n_1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2} \} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 \Phi(w, \tau) \{ R_{n_1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2} \} + \\ \left. + j\varepsilon \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} \frac{\partial \Phi_{n_1, n_2}}{\partial w} - (1 - j\varepsilon w) x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} \Phi(w, \tau) \{ R_{n_1, n_2} + j\varepsilon w f_{n_1, n_2} \} \right]. \end{aligned}$$

Тогда с помощью уравнения (51)

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = (jw\varepsilon)^2 \Phi(w, \tau) \left[ \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1, n_2} + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 f_{n_1, n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} n_2 f_{n_1, n_2} - \right. \\ - x \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1, n_2} + x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2} - a \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1, n_2} \left. \right] + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \Phi(w, \tau) \left[ \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} R_{n_1, n_2} + \right. \\ + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 R_{n_1, n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 R_{n_1, n_2} - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2} \left. \right] + (j\varepsilon)^2 w \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2} \end{aligned}$$

получаем следующее уравнение,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial \tau}{\Phi(w, \tau)} = \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau) \left[ 2\lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1, n_2} + 2\mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 f_{n_1, n_2} + 2\mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 f_{n_1, n_2} - \right. \\ - 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} f_{n_1, n_2} + 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2} - 2a \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} f_{n_1, n_2} + a \left. \right] - w \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2} \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\Phi(w, \tau)} \end{aligned}$$

в которое мы подставляем (60)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial \tau}{\Phi(w, \tau)} = & \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau) \left[ 2\lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} g_{n_1, n_2} + 2\mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 g_{n_1, n_2} + 2\mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 g_{n_1, n_2} - \right. \\
& - 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} g_{n_1, n_2} + 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2} + a \left. \right] + w \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{\Phi(w, \tau)} \left[ \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \varphi_{n_1, n_2} + \right. \\
& + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 \varphi_{n_1, n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 \varphi_{n_1, n_2} - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} \varphi_{n_1, n_2} - \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2} \left. \right].
\end{aligned} \tag{65}$$

Результатом второго этапа асимптотического анализа является  $b(x)$ , определенная следующим образом

$$\begin{aligned}
b(x) = & 2\lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} g_{n_1, n_2} + 2\mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 g_{n_1, n_2} + 2\mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 g_{n_1, n_2} - \\
& - 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} g_{n_1, n_2} + 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2} + a.
\end{aligned}$$

## 2.5 Метод асимптотически диффузионного анализа

Построим аппроксимацию распределения вероятностей числа заявок на орбите методом асимптотически диффузионного анализа. Сформулируем и докажем следующую теорему.

**Теорема 2.2.** Ряд распределения вероятностей нормированного числа заявок на орбите можно аппроксимировать следующей функцией плотности вероятностей

$$\pi(z) = \frac{C}{b(z)} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^z \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}, \quad (66)$$

где  $C$  – нормировочная константа,

$$\begin{aligned} a(x) = & \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} R_{n_1, n_2} - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1-n_1} R_{n_1, n_2} + \\ & + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 R_{n_1, n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 R_{n_1, n_2}, \\ b(x) = & 2\lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} g_{n_1, n_2} + 2\mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 g_{n_1, n_2} + 2\mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 g_{n_1, n_2} - \\ & - 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} g_{n_1, n_2} + 2x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2} + a, \end{aligned}$$

$g_{n_1, n_2}$  определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} & g_{n_1, n_2} (-(\lambda + \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) + \mu_1 r_1 q n_1 + \mu_2 r_1 (1 - q) n_2 + \lambda E_{n_1+n_2}^N - x \bar{E}_{n_1+n_2}^N) + \\ & + g_{n_1-1, n_2} (\lambda q \bar{E}_{n_1}^0 + x q \bar{E}_{n_1}^0) + g_{n_1, n_2-1} (\lambda (1 - q) \bar{E}_{n_2}^0 + x (1 - q) \bar{E}_{n_2}^0) + \\ & + g_{n_1+1, n_2} (\mu_1 r_0 (n_1 + 1) \bar{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_1 r_2 (n_1 + 1) \bar{E}_{n_1+n_2}^N) + \\ & + g_{n_1, n_2+1} (\mu_2 r_0 (n_2 + 1) \bar{E}_{n_1+n_2}^N + \mu_2 r_2 (n_2 + 1) \bar{E}_{n_1+n_2}^N) + \\ & + g_{n_1+1, n_2-1} (1 - q) \mu_1 r_1 (n_1 + 1) + g_{n_1-1, n_2+1} q \mu_2 r_1 (n_2 + 1) = \\ & = R_{n_1, n_2} a - \lambda R_{n_1, n_2} + x q E_{n_1}^0 R_{n_1-1, n_2} + x (1 - q) \bar{E}_{n_2}^0 R_{n_1, n_2-1} \\ & - \mu_1 r_2 (n_1 + 1) R_{n_1+1, n_2} \bar{E}_{n_1+n_2}^N - \mu_2 r_2 (n_2 + 1) R_{n_1, n_2+1} \bar{E}_{n_1+n_2}^N, \\ & \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} g_{n_1, n_2} = 0. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Подставим  $b(x)$  в (65)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial \tau}{\Phi(w, \tau)} = \frac{(jw)^2}{2} \Phi(w, \tau) b(x) - w \frac{\partial \Phi(w, \tau) / \partial w}{\Phi(w, \tau)} \left[ \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \varphi_{n_1, n_2} + \right. \\ \left. + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 \varphi_{n_1, n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 \varphi_{n_1, n_2} - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} \varphi_{n_1, n_2} - \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2} \right]. \end{aligned} \quad (67)$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \varphi_{n_1, n_2} + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 \varphi_{n_1, n_2} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 \varphi_{n_1, n_2} - \\ - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} \varphi_{n_1, n_2} - \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2}. \end{aligned}$$

Подставим (63) в последнее выражение, получим

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} \frac{\partial R_{n_1, n_2}}{\partial x} + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 \frac{\partial R_{n_1, n_2}}{\partial x} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 \frac{\partial R_{n_1, n_2}}{\partial x} - \\ - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} \frac{\partial R_{n_1, n_2}}{\partial x} - \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2}. \end{aligned} \quad (68)$$

Рассмотрим функцию  $a(x)$ , найдем ее производную по  $x$ , учитывая, что  $R_{n_1, n_2}$ , как решение зависит от  $x$

$$\begin{aligned} a'(x) = \lambda \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=N-n_1}^{N-n_1} \frac{\partial R_{n_1, n_2}}{\partial x} - x \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} \frac{\partial R_{n_1, n_2}}{\partial x} - \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-n_1-1} R_{n_1, n_2} + \\ + \mu_1 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_1 \frac{\partial R_{n_1, n_2}}{\partial x} + \mu_2 r_2 \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^{N-n_1} n_2 \frac{\partial R_{n_1, n_2}}{\partial x}. \end{aligned}$$

Тогда (25) перепишем в виде

$$\frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial \tau} = a'(x) w \frac{\partial \Phi(w, \tau)}{\partial w} + \frac{(jw)^2}{2} b(x) \Phi(w, \tau). \quad (69)$$

Уравнение (27) это преобразование Фурье уравнения Фокера-Планка для плотности распределения вероятностей  $P(y, \tau)$  значений центрированного и нормированного количества за-

явок на орбите. Находя обратное преобразование Фурье от (27), получим

$$\frac{\partial P(y, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y}\{a'(x)yP(y, \tau)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{b(x)P(y, \tau)\}. \quad (70)$$

Следовательно  $P(y, \tau)$  плотность распределения вероятностей диффузионного процесса [2], который обозначим  $y(\tau)$  с коэффициентом переносом  $a(x)$  и коэффициентом диффузии  $b(x)$

$$dy(\tau) = a'(x)y d\tau + \sqrt{b(x)}dw(\tau). \quad (71)$$

Рассмотрим стохастический процесс нормированного числа заявок на орбите

$$z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y(\tau), \quad (72)$$

где  $\varepsilon = \sqrt{\sigma}$ , исходя из (8),  $dx(\tau) = a(x)d\tau$ , следует

$$dz(\tau) = d(x(\tau) + \varepsilon y(\tau)) = (a(x) + \varepsilon ya'(x))d\tau + \varepsilon\sqrt{b(x)}dw(\tau). \quad (73)$$

Разложим  $a(z)$  в ряд

$$\begin{aligned} a(z) &= a(x + \varepsilon y) = a(x) + \varepsilon ya'(x) + O(\varepsilon^2), \\ \varepsilon\sqrt{b(z)} &= \varepsilon\sqrt{b(x + \varepsilon y)} = \varepsilon\sqrt{b(x)} + O(\varepsilon) = \sqrt{\sigma b(x)} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Перепишем уравнение (31) с точностью до  $O(\varepsilon^2)$

$$dz(\tau) = a(z)d\tau + \sqrt{\sigma b(z)}dw(\tau). \quad (74)$$

Обозначим плотность распределения вероятностей для процесса  $z(\tau)$

$$\pi(z, \tau) = \frac{\partial P\{z(\tau) < z\}}{\partial z}.$$

Так как  $z(\tau)$  – это решение стохастического дифференциального уравнения (32), следовательно, процесс является диффузионным и для его плотности распределения вероятностей можем записать уравнение Фокера-Планка

$$\frac{\partial \pi(z, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial z}\{a(z)\pi(z, \tau)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{\sigma b(z)\pi(z, \tau)\}. \quad (75)$$

Предполагая, что существует стационарный режим, обозначим

$$\pi(z, \tau) = \pi(z), \quad (76)$$

запишем уравнение Фокера-Планка для стационарного распределения вероятностей  $\pi(z)$

$$\begin{aligned}(a(z)\pi(z))' + \frac{\sigma}{2}(b(z)\pi(z))'' &= 0, \\ -a(z)\pi(z) + \frac{\sigma}{2}(b(z)\pi(z))' &= 0.\end{aligned}$$

Решая данную систему уравнений получаем плотность распределения вероятностей  $\pi(z)$  нормированного числа заявок на орбите

$$\pi(z) = \frac{C}{b(z)} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^z \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\}. \quad (77)$$

Теорема доказана.

Получим дискретное распределение вероятностей

$$P(i) = \pi(\sigma i) / \sum_{i=0}^{\infty} \pi(\sigma i), \quad (78)$$

которое будем называть диффузионной аппроксимацией дискретного распределения вероятностей количества заявок на орбите для изучаемой системы.

Нетрудно показать, что условием существования стационарного режима рассматриваемой системы является неравенство

$$\lambda < Nr_0 \left( \frac{q}{\mu_1} + \frac{1-q}{\mu_2} \right). \quad (79)$$

Введем следующую замену для того, чтобы среднее время обслуживания равнялось единице

$$q = \frac{\mu_1(1 - \mu_2)}{\mu_1 - \mu_2}.$$

В таком случае неравенство (38) имеет вид

$$\lambda < Nr_0.$$

## 2.6 Численные эксперименты

### Экспремент 1.

На рисунке 5 представлены графики изменения  $a(x)$  и  $b(x)$ , в зависимости от  $x$ , на рисунке 6 ряд распределения вероятностей количества заявок на орбите для следующих параметров системы  $N = 2$ ,  $r_0 = 0,7$ ,  $r_1 = 0,2$ ,  $r_2 = 0,1$ ,  $\lambda = 0,8$ ,  $\mu_1 = 0,6$ ,  $\mu_2 = 1,5$ ,  $q = 0,25$ .

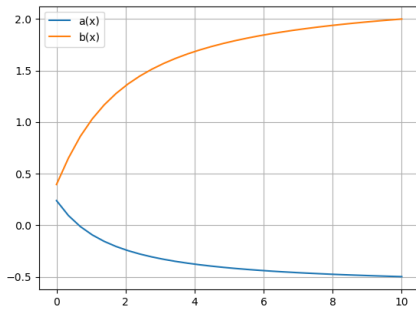


Рис. 5: Коэффициенты переноса  $a(x)$  и диффузии  $b(x)$

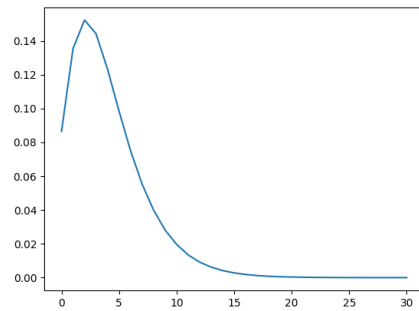


Рис. 6: Ряд распределения вероятностей числа заявок на орбите

### Экспремент 2.

На рисунке 7 представлены графики изменения  $a(x)$  и  $b(x)$ , в зависимости от  $x$ , на рисунке 8 ряд распределения вероятностей количества заявок на орбите для следующих параметров системы  $N = 10$ ,  $r_0 = 0,7$ ,  $r_1 = 0,2$ ,  $r_2 = 0,1$ ,  $\lambda = 0,8$ ,  $\mu_1 = 0,6$ ,  $\mu_2 = 1,5$ ,  $q = 0,25$ .

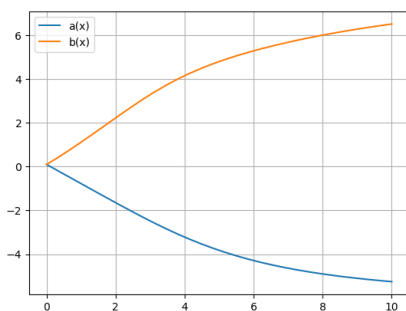


Рис. 7: Коэффициенты переноса  $a(x)$  и диффузии  $b(x)$

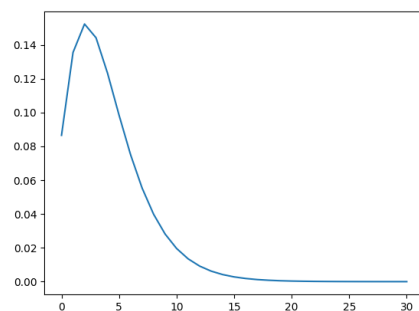


Рис. 8: Ряд распределения вероятностей числа заявок на орбите

Данные графики были построены с помощью библиотек NumPy [20] (для  $a(x)$  и  $b(x)$ ) и SimPy [16] языка Python.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nazarov, A.A. Method of asymptotic diffusion analysis of queueing system  $M|M|N$  with feedback / A.A. Nazarov, S.V. Paul, E.A. Pavlova // Lecture Notes in Computer Science. – 2020. – p. 131–143.
2. Назаров, А.А. Теория вероятностей и случайных процессов / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. – Томск : Изд-во научно-технической литературы, 2006. – 199 с.
3. Krishna C.M. and Lee Y.H. A study of two-phase service // Operations Research Letters. – 1990. – Vol. 9. – P. 91–97.
4. Гнеденко, Б.В. Введение в теорию массового обслуживания/ Б.В. Гнеденко, К.И. Николаевич. – М.:КомКнига, 2005. – 400 с.
5. Назаров, А.А. Теория массового обслуживания/ А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. – Томск : Изд-во научно-технической литературы, 2010. – 228 с.
6. Гельфонд, А.О. Исчисление конечных разностей: учебное пособие / Гельфонд А.О. – М.: КомКнига, 2006. – 376 с.
7. Моисеев, А.Н. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания / А.Н. Моисеев, Назаров А.А. – Томск: Изд-во научно-технической литературы, 2015. – 240 с.
8. Назаров, А.А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А.А. Назаров, Моисеева С. П. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
9. Любина, Т.В. Исследование математических моделей динамических и адаптивных RQ-систем с входящим ММРР-поток: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Томск., 2013. – 163 с.
10. Ивченко, Г.И. Теория массового обслуживания: учебное пособие / Г.И. Ивченко, В.А. Каштанов, И.Н. Коваленко. – М. : Высшая школа , 1982 – 296 с.
11. Artalejo, J.R. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach / J. R. Artalejo, A. Gomez-Corral. Springer, 2008.–309 p.
12. Falin, G.I. Retrial queues / G.I. Falin, J.G.C. Templeton. London : Chapman Hall, 1997.–328
13. Назаров А. А. Асимптотический анализ двухфазной RQ-системы  $M|M|1$  в условии большой задержки на орбите / А. А. Назаров, А. А. Анисимова // Марчуковские научные чтения

– 2017, 25 июня - 14 июля 2017 года : труды. Новосибирск, 2017. С. 641-647.

URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000627552>

14. Назаров А. А. Асимптотический анализ двухфазной RQ-системы  $M|M|1$  в условии большой задержки заявок на орбите / А. А. Назаров, А. А. Анисимова // Материалы V Международной молодежной научной конференции "Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем Томск, 19-20 мая 2017 г. Томск, 2017. С. 81-88 (Труды Томского государственного университета ; т. 301 : Серия физико-математическая.

URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000619465>

15. SymPy 1.6 documentation: Matrices [Электронный ресурс].

– <https://docs.sympy.org/latest/modules/matrices/matrices.html/> (дата обращения 28.10.2020.).

16. GitHub: checkPhase2EquationR [Электронный ресурс].

- <https://github.com/ValeriyaRyzhikova/checkPhase2EquationR> (дата обращения: 01.06.2021).

17. GitHub: calculationPi\_a\_b [Электронный ресурс].

- [https://github.com/ValeriyaRyzhikova/calculationPi\\_a\\_b](https://github.com/ValeriyaRyzhikova/calculationPi_a_b) (дата обращения: 01.06.2021).

18. GitHub: diplom2Phase [Электронный ресурс].

- <https://github.com/ValeriyaRyzhikova/diplom2Phase> (дата обращения: 01.06.2021).

19. NumPy 1.2 documentation: Linear algebra [Электронный ресурс].

– <https://numpy.org/doc/1.20/reference/routines.linalg.html> (дата обращения 10.04.2021.).