МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ

УНИВЕРСИТЕТ им. Р.Е.АЛЕКСЕЕВА

Институт радиоэлектроники и информационных технологий

Курсовая работа

по дисциплине

«Основы теории управления»

Вариант 6

РУКОВОДИТЕЛЬ:

_______________ _ Никулин.Е.А__

(подпись) (фамилия, и.,о.)

СТУДЕНТ:

_______________ _ Сухоруков В.А.___

(подпись) (фамилия, и.,о.)

_______________ _ Мосташов В.С.___

(подпись) (фамилия, и.,о.)

_____19-ВМ_______

(шифр группы)

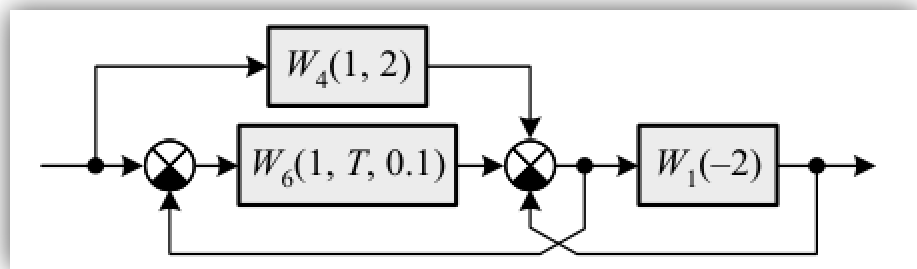
Работа защищена «___»____________

С оценкой ________________________

Нижний Новгород 2022

Оглавление

1 Исследование свойств типовых звеньев структурной схемы и построение их принципиальных схем на операционных усилителях.



1.1 Звено W4

$$W_4(K,T) = \frac{K}{1+Ts}$$

$$W_4(1,2) = \frac{1}{1+2s}$$

1.1.1 Вывод функционального уравнения

$$Y(s) = X(s) * W(s) = X(s) * \frac{B(s)}{A(s)} = X(s) * \frac{1}{1+2s}$$

$$Y(s) + 2s * Y(s) = X(s)$$

Заменим s на $\frac{d}{dt}$.

$$y(t) + 2 * y(t)' = x(t)$$

$\underline{y(t) + 2 * y(t)' - x(t) = 0}$ – Дифференциальное уравнение первого порядка.

1.1.2 Вывод частотных характеристик

- Комплексная частотная характеристика:

$$C(\omega) = W(i\omega) = \frac{K}{1+Ti\omega} = \frac{K*(1-Ti\omega)}{(1+Ti\omega)*(1-Ti\omega)} = \frac{K - KTi\omega}{1+T^2\omega^2} =$$
$$= \frac{K}{1+T^2\omega^2} - \frac{KT\omega}{1+T^2\omega^2} * i$$

При K=1, T=2

$$C(\omega) = \frac{1}{1+4\omega^2} - \frac{2}{1+4\omega^2} i$$

❖ Вещественная частотная характеристика:

$$P(\omega) = Re\big(C(\omega)\big) = Re\left(\frac{K}{1+T^2\omega^2} - \frac{KT\omega}{1+T^2\omega^2} * i\right) = \frac{K}{1+T^2\omega^2}$$

При K=1, T=2

$$P(\omega) = \frac{1}{1+4\omega^2}$$

❖ Мнимая частотная характеристика:

$$Q(\omega) = Im\big(C(\omega)\big) = Im\left(\frac{K}{1+T^2\omega^2} - \frac{KT\omega}{1+T^2\omega^2} * i\right) = -\frac{KT\omega}{1+T^2\omega^2}$$

При K=1, T=2

$$Q(\omega) = \frac{-2\omega}{1+4\omega^2}$$

❖ Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = |C(\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\left(\frac{K}{1+T^2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{-KT\omega}{1+T^2\omega^2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{K^2 + K^2T^2\omega^2}{(1+T^2\omega^2)^2}} = \sqrt{\frac{K^2(1+T^2\omega^2)}{(1+T^2\omega^2)^2}} = \sqrt{\frac{K^2}{1+T^2\omega^2}} = \frac{|K|}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$$

При K=1, T=2

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2}} \qquad \omega := 0, 0.01 \ldots 100$$

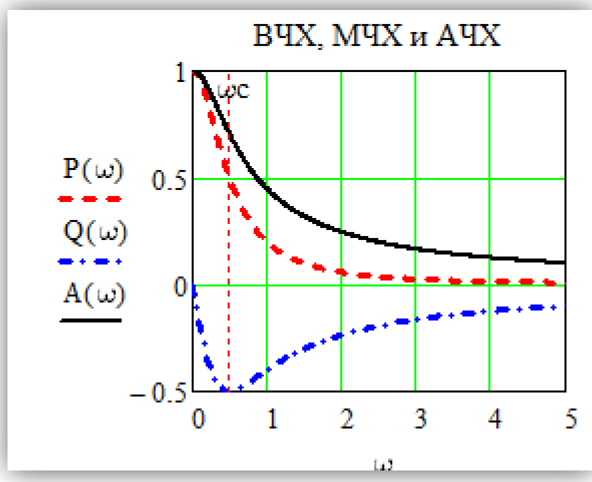


Рис 1.

$$\omega_c = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0.5$$

❖ Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика

$$L(\omega) = 20\log(A(\omega)) = 20\log\left(\frac{|K|}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\right) = 20\,log(|K|) - 10log(1+T^2\omega^2)$$

При K=1, T=2

$$L(\omega) = 20log(1) - 10log(1+4^2\omega^2) = -10log(1+4^2\omega^2)$$

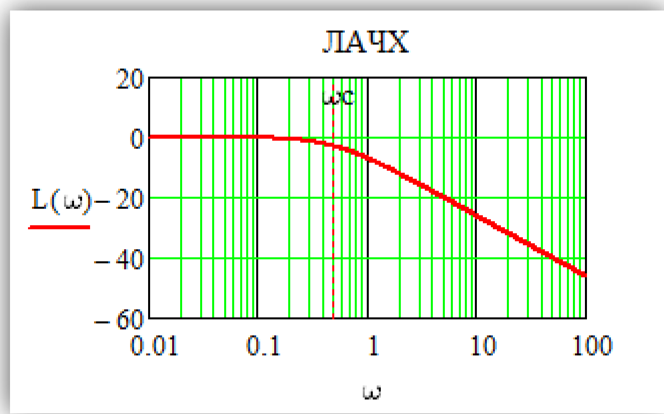


Рис 2.

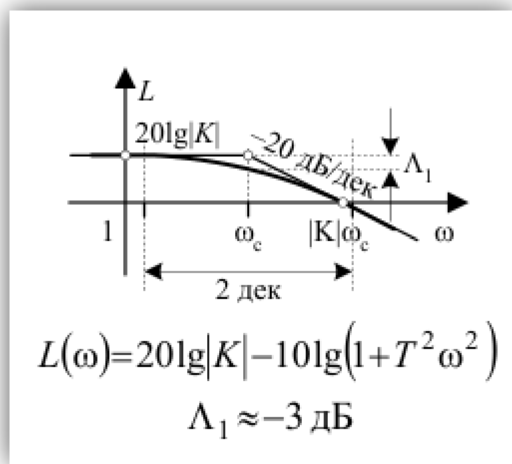


Рис 3.

Проверим правильность построения графика по таблице «Приложение 1. Частотные и временные характеристики типовых звеньев» (Рис 3).

$20\lg(|K|) = 20\lg(1) = 0$

$\omega_c = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0.5$ – частота, при которой логарифмическое усиление амплитуды равно -3дБ.

При изменении частоты от $\omega_1 = \frac{\omega_c}{10} = 0.05$ до $\omega_2 = \omega_c * 10 = 5$ амплитуда колебания уменьшается на 20 дБ.

График построен верно.

❖ Логарифмическая фазо-частотная характеристика

$$\Phi(\omega) = arctg(C(\omega)) = arctg\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) =$$

$$= \begin{cases} arctg\left(-\frac{KT\omega}{1+T^2\omega^2} : \frac{K}{1+T^2\omega^2}\right) \text{ при } K > 0 \\ arctg\left(-\frac{KT\omega}{1+T^2\omega^2} : \frac{K}{1+T^2\omega^2}\right) \pm 180\,°\text{при } K < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} arctg(-T\omega) \text{ при } K > 0 \\ arctg(-T\omega) \pm 180\,°\text{при } K < 0 \end{cases} = \begin{cases} -arctg(T\omega) \text{ при } K > 0 \\ -arctg(T\omega) \pm 180\,°\text{при } K < 0 \end{cases}$$

При K=1, T=2

$\Phi(\omega) = arcrg(-2\omega)$

<u>Задание функции в Mathcad</u>:

$$\varphi(\omega) := \arg(C(\omega)) \cdot deg^{-1}$$

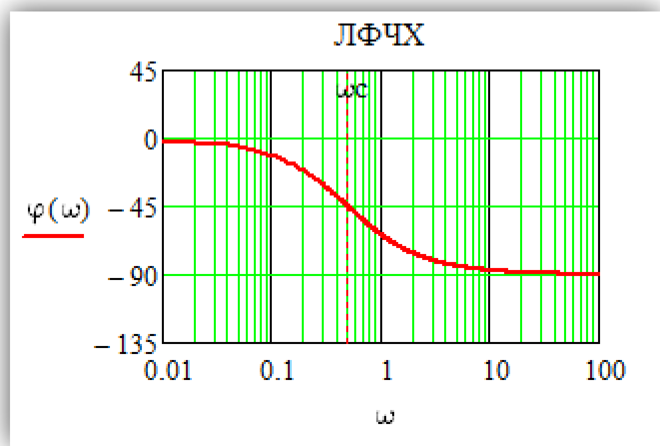


Рис 4.

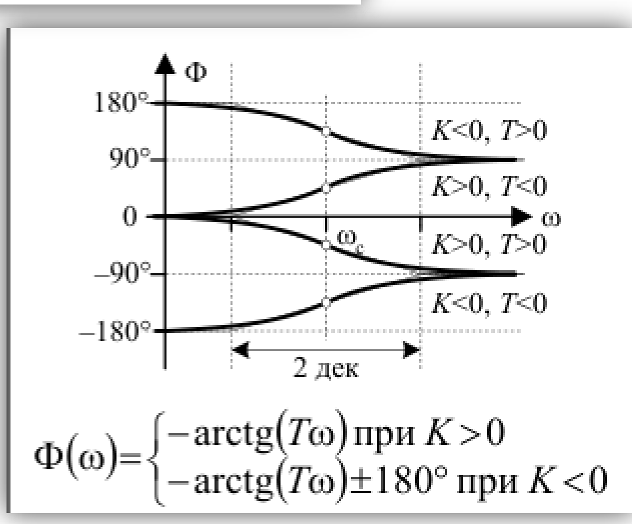


Рис 5.

Проверим правильность построения графика по таблице <u>«Приложение 1. Частотные и временные характеристики типовых звеньев»</u> (Рис 5).

График построен верно.

- Годограф

$$P(\omega) = \frac{1}{1+4\omega^2}, Q(\omega) = \frac{-2\omega}{1+4\omega^2}$$

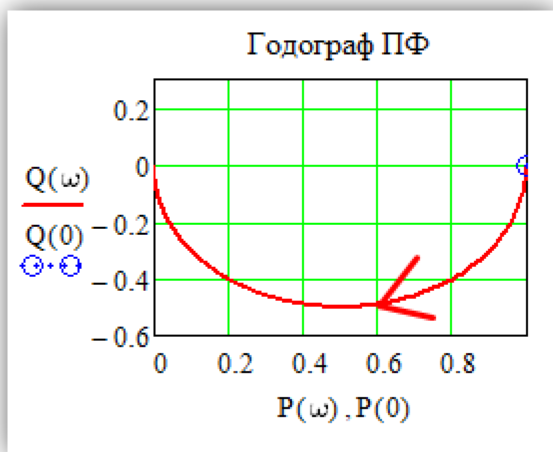


Рис 6.

1.1.3 Вывод временных характеристик

- Импульсная характеристика

$$w(t) = L^{-1}(W(s)) = L^{-1}\left(\frac{K}{1+Ts}\right) = K * L^{-1}\left(\frac{1}{1+Ts}\right)$$

По таблице обратного преобразования Лапласа, изображение $F(s) = \frac{1}{1+TS}$ соответствует оригиналу $f(t) = \alpha e^{-\alpha t}$, где $\alpha = \frac{1}{T}$.

При K=1, T=2

$$w(t) = 1 * \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t}$$

<u>Задание функций в Mathcad</u>:

$$\varepsilon := 0.01 \qquad \delta(t) := \frac{0 \le t \le \varepsilon}{\varepsilon}$$

$$w1(t) := W(s) \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace}, s \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow 0.5 \cdot e^{-0.5 \cdot t} \qquad w(t) := w1(t) \cdot \Phi(t)$$

$$ty := 3T \text{ float}, 3 \rightarrow 6.0 \qquad t := -5, -4.99 .. 20$$

$$w0 := \lim_{t \to 0} w1(t) \rightarrow 0.5 \qquad wy := \lim_{t \to \infty} w1(t) \rightarrow 0.0$$

$$\Delta 1 := |wy - w0| \cdot 5\% \text{ float}, 3 \rightarrow 0.025$$

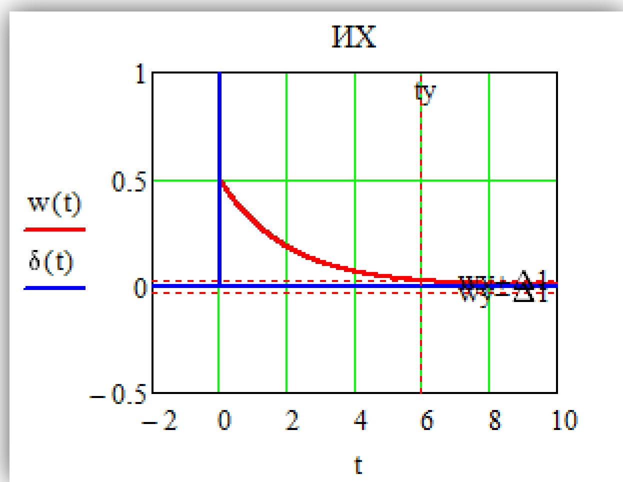


Рис 7.

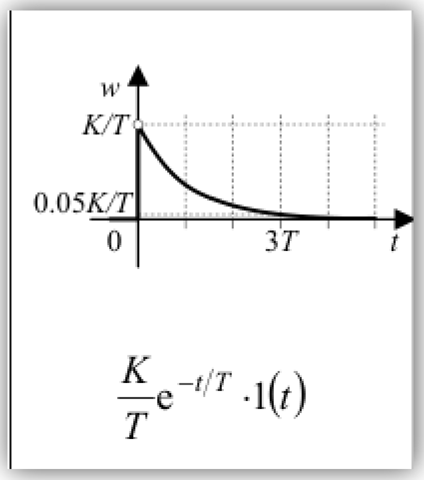


Рис 8.

Проверим правильность построения графика по таблице <u>«Приложение 1. Частотные и временные характеристики типовых звеньев»</u> (Рис 8).

$$K/_{T} = 1/_{2} = 0.5, \qquad ty = 3T = 6$$

График построен верно.

- Переходная характеристика

$$h(t) = L^{-1}\left(\frac{W(s)}{s}\right) = L^{-1}\left(\frac{K}{s(1+Ts)}\right) = K * L^{-1}\left(\frac{1}{s(1+Ts)}\right)$$

По таблице обратного преобразования Лапласа, изображение $F(s) = \frac{1}{s(1+Ts)}$ соответствует оригиналу $f(t) = 1 - e^{-\alpha t}$, где $\alpha = \frac{1}{T}$.

При K=1, T=2

$h(t) = 1 * (1 - e^{-\frac{1}{2}t})$

<u>Задание функций в Mathcad</u>:

$$h(t) := \frac{W(s)}{s} \begin{vmatrix} \text{invlaplace}, s \\ \text{float}, 3 \end{vmatrix} \rightarrow -1.0 \cdot e^{-0.5 \cdot t} + 1.0$$

$$h(t) := h(t) \cdot \Phi(t)$$

$$ty := 3T \text{ float}, 3 \rightarrow 6.0 \qquad t := -5, -4.99 .. 20$$

$$h0 := \lim_{t \to 0} h(t) \rightarrow 0 \qquad hy := \lim_{t \to \infty} h(t) \rightarrow 1.0$$

$$\Delta := |hy - h0| \cdot 5\% \text{ float}, 3 \rightarrow 0.05$$

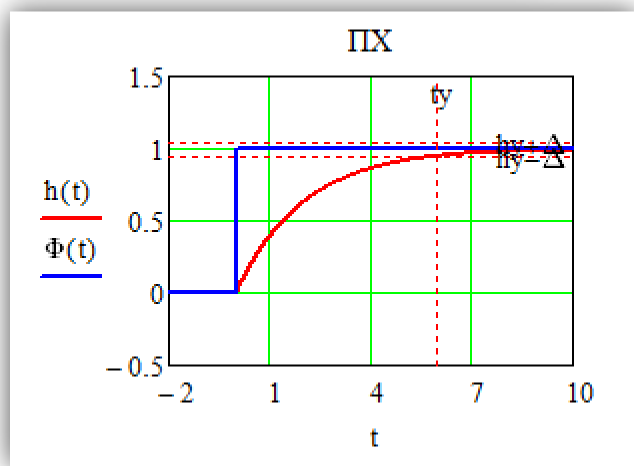


Рис 9.

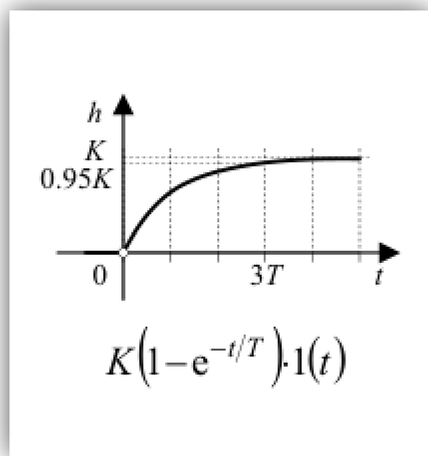


Рис 10.

Проверим правильность построения графика по таблице <u>«Приложение 1. Частотные и временные характеристики типовых звеньев»</u> (Рис 10).

$0.95K = 0.95, \qquad ty = 3T = 6$

График построен верно.

1.1.4 Синтез схемы на операционном усилителе

Передаточная функция:

$$W_4(1{,}2) = \frac{1}{1+2s}$$

Вычислим суммы коэффициентов усиления по прямому и инверсному входам

$$S_1(s) = \frac{1}{1+2s} \qquad S_2(s) = 0$$

Условие баланса:

$$S_1(s) = \ S_2(s) + 1$$

$$\frac{1}{1+2s} \neq \ 0 + 1$$

Условие баланса не выполняется, значит нужно подобрать передаточные функции $W_{10}(s)$ и $W_{20}(s)$ с положительными коэффициентами, удовлетворяющие условию

$S_1(s) + W_{10}(s) = S_2(s) + 1 + W_{20}(s)$

$$\frac{1}{1+2s} + W_{10}(s) = 1 + W_{20}(s)$$

Для оптимальной схемы (в целях экономии сопротивления Z_{20}) предположим $W_{20}(s) = 0$.

$$W_{10}(s) = 1 - \frac{1}{1+2s} = \frac{2s}{1+2s}$$

Полиномы числителя и знаменателя с положительными коэффициентами, следовательно, предположение верно и $W_{20}(s) = 0$.

Эскизная схема имеет вид:

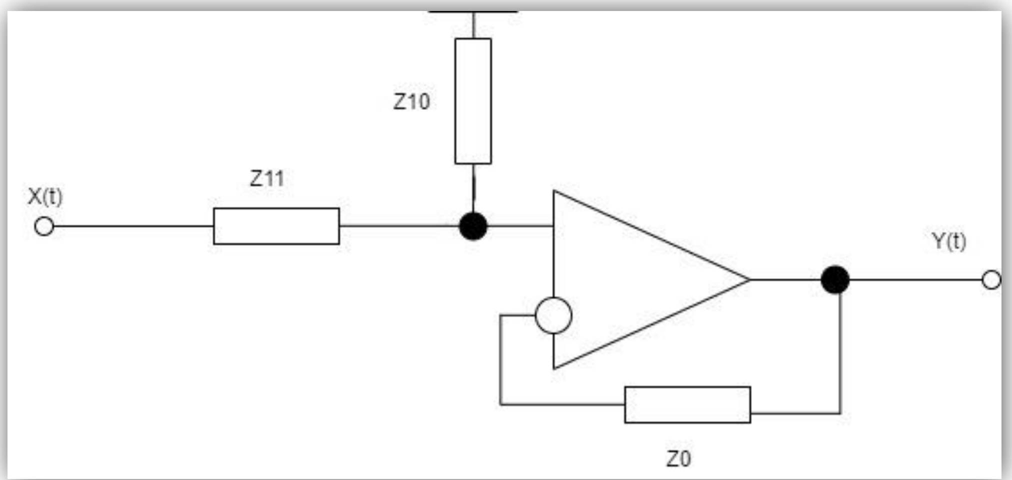


Рис 11.

Для инверсного входа:

$$W_0 * Z_0 = const$$

$$1 * Z_0 = const$$

1.В качестве константы можно взять любое неотрицательное число. Возьмем константу равную нулю, тогда сопротивление $Z_0 = 0$ Ом.

2. Z_0 можно заменить проводом, поскольку входное сопротивление *идеального* ОУ бесконечно велико, и входной ток равен нулю.

Для прямого входа:

$$W_{10} * Z_{10} = W_{11} * Z_{11} = const$$

$$\frac{2s}{1+2s} * Z_{10} = \frac{1}{1+2s} * Z_{11} = const$$

$$Z_{11} = 2s * Z_{10}$$

Возьмём Z_{10}равное сопративлению конденсатора $= \frac{1}{C_{10}*s}$, так как при таком выборе в уравнении сократится s.

$$Z_{11} = \frac{2s}{C_{10}*s} = \frac{2}{C_{10}}$$

Из полученного соотношения видно, что удобно взять: $Z_{11} = R_{11} = \frac{2}{C_{10}}$.

Возьмем $C_{10} = 1$мкФ, тогда $R_{11} = 2$ МОм.

Получим схему:

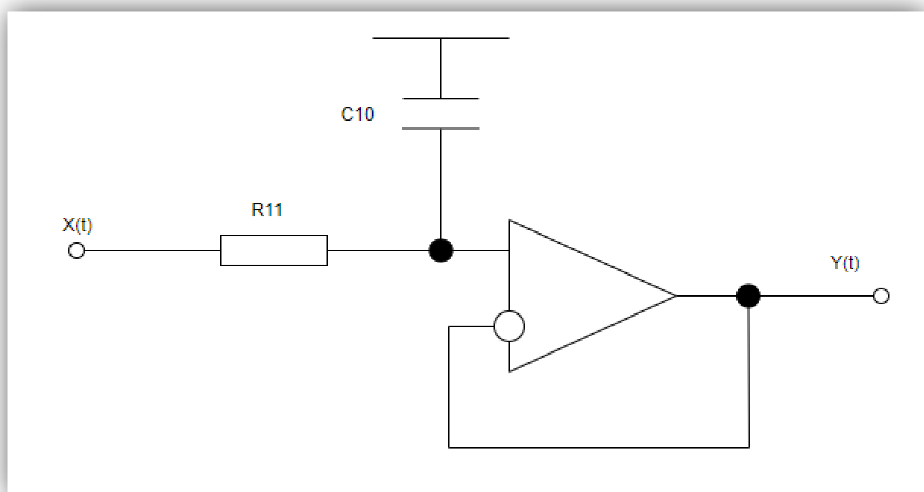
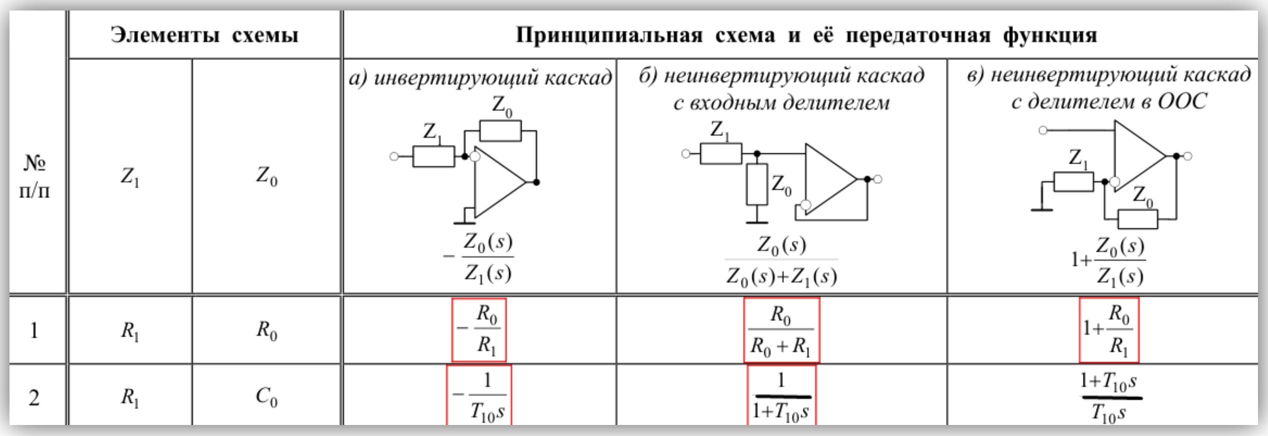


Рис 12.

Проверим правильность построения схемы по таблице «Приложение 2. Схемы каскадов на ОУ» (Рис 13). Схема соответствует строке 2, столбцу б.



№ п/п	Элементы схемы		Принципиальная схема и её передаточная функция		
	Z_1	Z_0	*а) инвертирующий каскад* $-\frac{Z_0(s)}{Z_1(s)}$	*б) неинвертирующий каскад с входным делителем* $\frac{Z_0(s)}{Z_0(s)+Z_1(s)}$	*в) неинвертирующий каскад с делителем в ООС* $1+\frac{Z_0(s)}{Z_1(s)}$
1	R_1	R_0	$\boxed{-\frac{R_0}{R_1}}$	$\boxed{\frac{R_0}{R_0+R_1}}$	$\boxed{1+\frac{R_0}{R_1}}$
2	R_1	C_0	$\boxed{-\frac{1}{T_{10}s}}$	$\boxed{\frac{1}{1+T_{10}s}}$	$\frac{1+T_{10}s}{T_{10}s}$

Рис 13.

1.2 Звено W6

$$W_6(K,T,\xi) = \frac{K}{1+2\xi Ts+T^2s^2}$$

$$W_6(1,T,0.1) = \frac{1}{1+0.2Ts+T^2s^2}$$

$$T=1;\quad W_6(1{,}1{,}0.1) = \frac{1}{1+0.2s+s^2}$$

1.2.1 Вывод функционального уравнения

$$Y(s) = X(s)*W(s) = X(s)*\frac{B(s)}{A(s)} = X(s)*\frac{1}{1+0.2s+s^2}$$

$$Y(s)+0.2s*Y(s)+s^2*Y(s) = X(s)$$

Заменим s на $\frac{d}{dt}$.

$\underline{y(t)+0.2*y(t)'+y(t)''=x(t)}$ – Дифференциальное уравнение второго порядка.

1.2.2 Вывод частотных характеристик

❖ **Комплексная частотная характеристика:**

$$\text{C}(\omega) = W(i\omega) = \frac{K}{1+2\xi Ti\omega+T^2(i\omega)^2} = \frac{K}{1+2\xi Ti\omega-T^2\omega^2} =$$

$$= \frac{K(1-T^2\omega^2-2\xi Ti\omega)}{(1-T^2\omega^2+2\xi Ti\omega)*(1-T^2\omega^2-2\xi Ti\omega)} = \frac{K(1-T^2\omega^2-2\xi Ti\omega)}{(1-T^2\omega^2)^2-(2\xi Ti\omega)^2} =$$

$$= \frac{K(1-T^2\omega^2-2\xi Ti\omega)}{1-2T^2\omega^2+T^4\omega^4+4\xi^2T^2\omega^2} = \frac{K(1-T^2\omega^2-2\xi Ti\omega)}{T^2\omega^2(T^2\omega^2-2+4\xi^2)+1} =$$

$$= \frac{K(1-T^2\omega^2)}{T^2\omega^2(T^2\omega^2-2+4\xi^2)+1} - \frac{2\xi T\omega K}{T^2\omega^2(T^2\omega^2-2+4\xi^2)+1}*i$$

<u>При K=1, ξ =0.1</u>

$$\mathrm{C}(\omega) = \frac{1 - T^2\omega^2}{T^2\omega^2(T^2\omega^2 - 2 + 0.04) + 1} - \frac{0.2T\omega}{T^2\omega^2(T^2\omega^2 - 2 + 0.04) + 1} * i =$$
$$= \frac{1 - T^2\omega^2}{1 - 1.96 * T^2\omega^2 + T^4\omega^4} - \frac{0.2T\omega}{1 - 1.96 * T^2\omega^2 + T^4\omega^4} * i$$

❖ Вещественная частотная характеристика:

$$P(\omega) = Re\big(C(\omega)\big) = Re(\frac{K(1 - T^2\omega^2)}{T^2\omega^2(T^2\omega^2 - 2 + 4\xi^2) + 1} -$$

$$- \frac{2\xi T\omega K}{T^2\omega^2(T^2\omega^2 - 2 + 4\xi^2) + 1} * i) = \frac{K(1 - T^2\omega^2)}{T^2\omega^2(T^2\omega^2 - 2 + 4\xi^2) + 1}$$

<u>При K=1, ξ =0.1</u>

$$P(\omega) = \frac{K(1 - T^2\omega^{2)}}{T^2\omega^2(T^2\omega^2 - 2 + 4\xi^2) + 1} = \frac{1 - T^2\omega^2}{1 - 1.96 * T^2\omega^2 + T^4\omega^4}$$

Рассмотрим три разных значения параметра T:

- T1 = 1
- T2 = 0.1
- T3 = -1

$$P1(\omega) = \frac{1 - T1^2\omega^2}{1 - 1.96 * T1^2\omega^2 + T1^4\omega^4} = \frac{1 - \omega^2}{1 - 1.96 * \omega^2 + \omega^4}$$

$$P2(\omega) = \frac{1 - T2^2\omega^2}{1 - 1.96 * T2^2\omega^2 + T2^4\omega^4} = \frac{1 - 0.01\omega^2}{1 - 1.96 * 0.01\omega^2 + 0.0001\omega^4} =$$

$$= \frac{1 - 0.01\omega^2}{1 - 0.0196\omega^2 + 0.0001\omega^4}$$

$$P3(\omega) = \frac{1 - T3^2\omega^2}{1 - 1.96 * T3^2\omega^2 + T3^4\omega^4} = \frac{1 - \omega^2}{1 - 1.96\omega^2 + \omega^4}$$

$$\omega := 0, 0.01 \dots 100$$

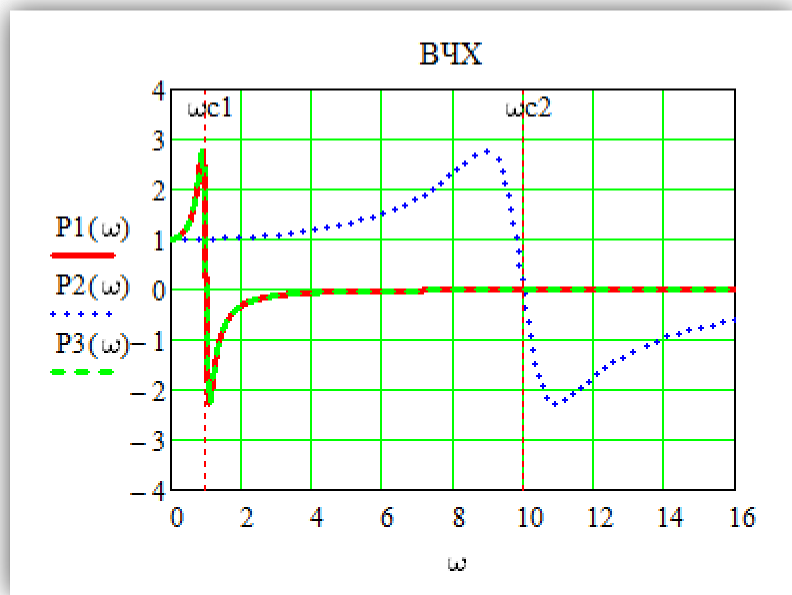


Рис 14.

$$\omega_{c1} = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \omega_{c2} = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0.1} = 10$$

При уменьшении модуля параметра T график вытягивается вдоль оси абсцисс. Изменение знака параметра T на график не влияет.

- **Мнимая частотная характеристика:**

$$Q(\omega) = Im\big(C(\omega)\big) = Im\Big(\frac{K(1 - T^2\omega^2)}{T^2\omega^2(T^2\omega^2 - 2 + 4\xi^2) + 1} -$$

$$- \frac{2\xi T\omega K}{T^2\omega^2(T^2\omega^2 - 2 + 4\xi^2) + 1} * i\Big) = -\frac{2\xi T\omega K}{T^2\omega^2(T^2\omega^2 - 2 + 4\xi^2) + 1}$$

__При K=1, ξ =0.1__

$$Q(\omega) = -\frac{2\xi T\omega K}{T^2\omega^2(T^2\omega^2 - 2 + 4\xi^2) + 1} = -\frac{0.2T\omega}{1 - 1.96 * T^2\omega^2 + T^4\omega^4}$$

$$Q1(\omega) = -\frac{0.2T1\omega}{1 - 1.96 * T1^2\omega^2 + T1^4\omega^4} = -\frac{0.2\omega}{1 - 1.96 * \omega^2 + \omega^4}$$

$$Q2(\omega) = -\frac{0.2T2\omega}{1 - 1.96 * T2^2\omega^2 + T2^4\omega^4} = -\frac{0.02\omega}{1 - 0.0196\omega^2 + 0.0001\omega^4}$$

$$Q3(\omega) = -\frac{0.2T3\omega}{1 - 1.96 * T3^2\omega^2 + T3^4\omega^4} = \frac{0.2\omega}{1 - 1.96 * \omega^2 + \omega^4}$$

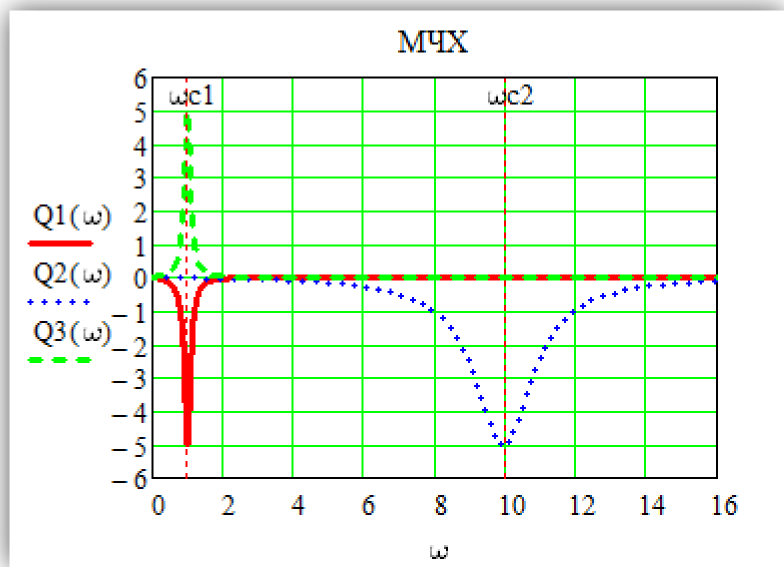


Рис 15.

При уменьшении модуля параметра Т график вытягивается вдоль оси абсцисс. При изменении знака параметра Т график отражается от оси абсцисс.

❖ Амплитудная частотная характеристика:

$$A(\omega) = |C(\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + \ Q^2(\omega)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{K(1-T^2\omega^2)}{1-2T^2\omega^2+T^4\omega^4+4\xi^2T^2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi T\omega K}{1-2T^2\omega^2+T^4\omega^4+4\xi^2T^2\omega^2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{K^2(1-T^2\omega^2)^2+(2\xi T\omega K)^2}{(1-2T^2\omega^2+T^4\omega^4+4\xi^2T^2\omega^2)^2}} = \sqrt{\frac{K^2(1-2T^2\omega^2+T^4\omega^4)+4\xi^2T^2\omega^2K^2}{(1-2T^2\omega^2+T^4\omega^4+4\xi^2T^2\omega^2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{K^2(1-2T^2\omega^2+T^4\omega^4+4\xi^2T^2\omega^2)}{(1-2T^2\omega^2+T^4\omega^4+4\xi^2T^2\omega^2)^2}} = \sqrt{\frac{K^2}{1-2T^2\omega^2+T^4\omega^4+4\xi^2T^2\omega^2}} =$$

$$= \frac{|K|}{\sqrt{1-2T^2\omega^2+T^4\omega^4+4\xi^2T^2\omega^2}} = \frac{|K|}{\sqrt{T^2\omega^2(4\xi^2+T^2\omega^2-2)+1}}$$

<u>При K=1, ξ =0.1</u>

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2(0.04+T^2\omega^2-2)+1}} = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2(-1.96+T^2\omega^2)+1}}$$

$$A1(\omega)=\frac{1}{\sqrt{T1^2\omega^2(-1.96+T1^2\omega^2)+1}}=\frac{1}{\sqrt{\omega^2(-1.96+\omega^2)+1}}$$

$$A2(\omega)=\frac{1}{\sqrt{T2^2\omega^2(-1.96+T2^2\omega^2)+1}}=\frac{1}{\sqrt{0.01\omega^2(-1.96+0.01\omega^2)+1}}$$

$$A3(\omega)=\frac{1}{\sqrt{T3^2\omega^2(-1.96+T3^2\omega^2)+1}}=\frac{1}{\sqrt{\omega^2(-1.96+\omega^2)+1}}$$

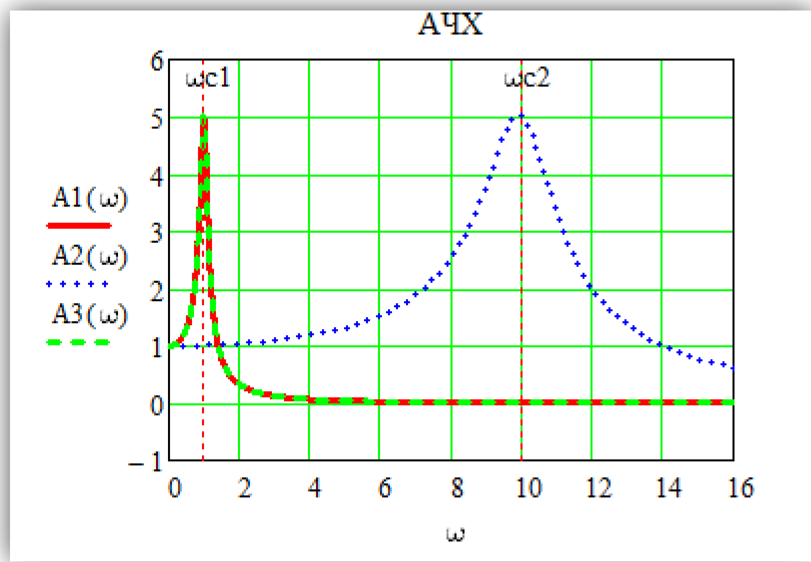


Рис 16.

При уменьшении модуля параметра Т график вытягивается вдоль оси абсцисс. Изменение знака параметра Т на график не влияет.

❖ Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика:

$$L(\omega)=20\log\big(A(\omega)\big)=20\log\left(\frac{|K|}{\sqrt{T^2\omega^2(4\xi^2+T^2\omega^2-2)+1}}\right)=$$

$$=20log(|K|)-10log(T^2\omega^2(4\xi^2+T^2\omega^2-2)+1)$$

При K=1, ξ =0.1

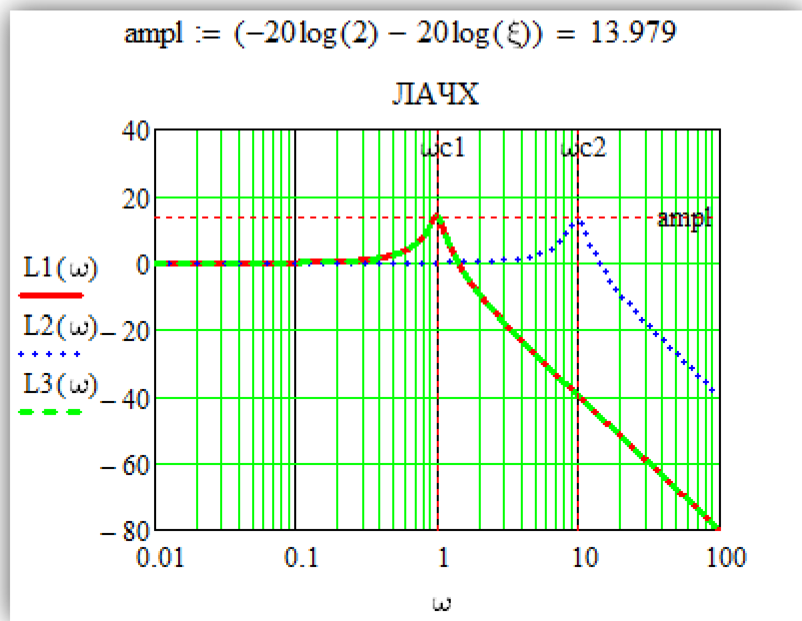
$$L(\omega)=20log(|1|)-10log(T^2\omega^2(0.04+T^2\omega^2-2)+1)=$$

$$=-10log(T^2\omega^2(-1.96+T^2\omega^2)+1)$$

$$L1(\omega)=-10log(T1^2\omega^2(-1.96+T1^2\omega^2)+1)=-10log(\omega^2(-1.96+\omega^2)+1)$$

$$L2(\omega)=-10log(T2^2\omega^2(-1.96+T2^2\omega^2)+1)=-10log(0.01\omega^2(-1.96+0.01\omega^2)+1)$$

$$L3(\omega)=-10log(T3^2\omega^2(-1.96+T3^2\omega^2)+1)=-10log(\omega^2(-1.96+\omega^2)+1)$$



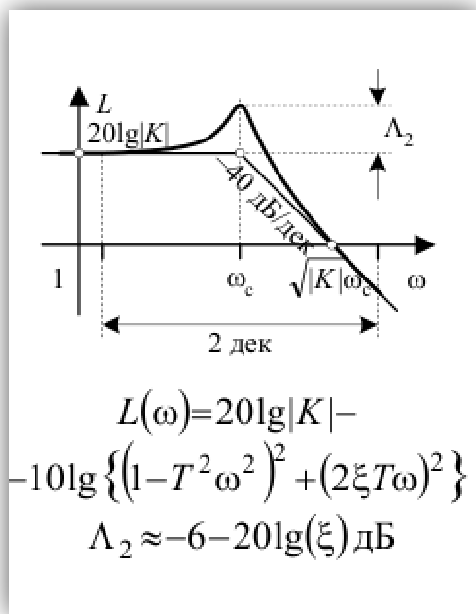


Рис 17. Рис 18.

При уменьшении модуля параметра T график сдвигается вправо вдоль оси абсцисс. Изменение знака параметра T на график не влияет.

Проверим правильность построения графика по таблице «Приложение 1. Частотные и временные характеристики типовых звеньев» (Рис 18).

1. $20\lg(|K|) = 20\lg(1) = 0$
2. Изменение амплитуды при $\omega_c = \frac{1}{T}$ равно $-6 - 20\log(\xi)$
3. При изменении частоты от $\omega_1 = \frac{\omega_c}{10}$ до $\omega_2 = \omega_c * 10$ амплитуда колебания уменьшается на 20 дБ.

График построен верно.

❖ Логарифмическая фазо-частотная характеристика:

$$\Phi(\omega) = arctg\big(C(\omega)\big) = arctg\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) =$$

$$= \begin{cases} arctg\left(-\dfrac{2\xi T\omega K}{T^2\omega^2(T^2\omega^2 - 2 + 4\xi^2) + 1} : \dfrac{K(1 - T^2\omega^2)}{T^2\omega^2(T^2\omega^2 - 2 + 4\xi^2) + 1}\right) \text{ при } K > 0 \\ arctg\left(-\dfrac{2\xi T\omega K}{T^2\omega^2(T^2\omega^2 - 2 + 4\xi^2) + 1} : \dfrac{K(1 - T^2\omega^2)}{T^2\omega^2(T^2\omega^2 - 2 + 4\xi^2) + 1}\right) \pm 180\,°\text{при } K < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} arctg\left(-\dfrac{2\xi T\omega K}{K(1 - T^2\omega^2)}\right) \text{ при } K > 0 \\ arctg\left(-\dfrac{2\xi T\omega K}{K(1 - T^2\omega^2)}\right) \pm 180\,°\text{при } K < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -arctg\left(\dfrac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2}\right) \text{ при } K > 0 \\ -arctg\left(\dfrac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2}\right) \pm 180\,°\text{при } K < 0 \end{cases}$$

<u>При K=1, ξ =0.1</u>

$$\Phi(\omega) = -arctg\left(\frac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2}\right) = -arctg\left(\frac{0.2T\omega}{1-T^2\omega^2}\right)$$

$$\Phi1(\omega) = -arctg\left(\frac{0.2T1\omega}{1-T1^2\omega^2}\right) = -arctg\left(\frac{0.2\omega}{1-\omega^2}\right)$$

$$\Phi2(\omega) = -arctg\left(\frac{0.2T2\omega}{1-T2^2\omega^2}\right) = -arctg\left(\frac{0.02\omega}{1-0.01\omega^2}\right)$$

$$\Phi3(\omega) = -arctg\left(\frac{0.2T3\omega}{1-T3^2\omega^2}\right) = arctg\left(\frac{0.2\omega}{1-\omega^2}\right)$$

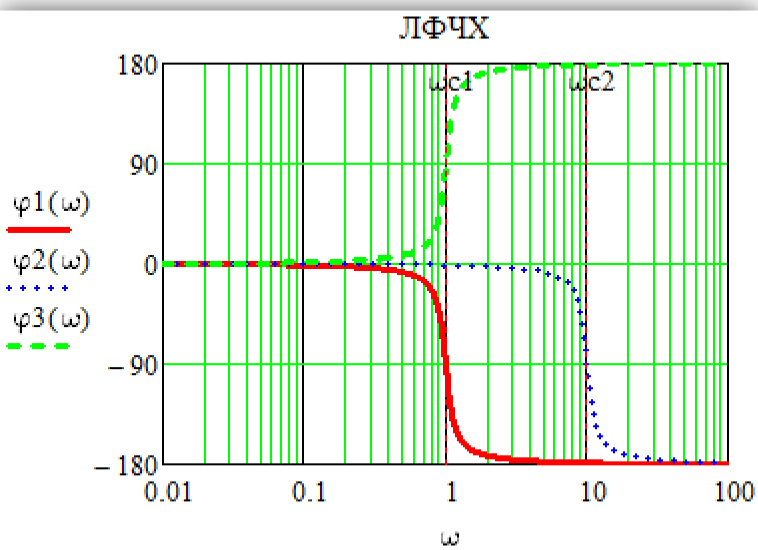
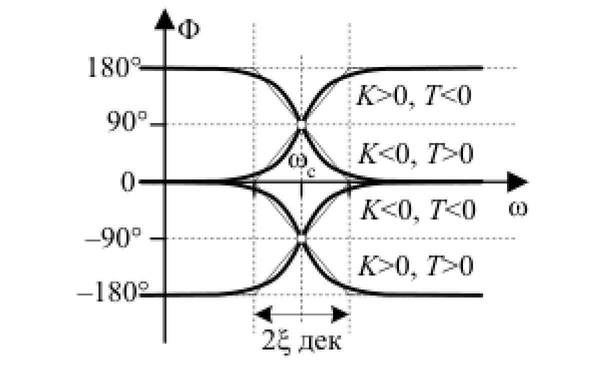


Рис 19.



$$\Phi(\omega)=\begin{cases} -\mathrm{arctg}\dfrac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2} \text{ при } K>0 \\ -\mathrm{arctg}\dfrac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2}\pm 180° \text{ при } K<0 \end{cases}$$

Рис 20.

При уменьшении модуля параметра T график смещается вдоль оси абсцисс. Изменение знака параметра T приводит к отражению графика от оси абсцисс.

Проверим правильность построения графика по таблице <u>«Приложение 1. Частотные и временные характеристики типовых звеньев»</u> (Рис 20).

График построен верно.

❖ **Годограф:**

$$Q1(\omega) = -\frac{0.2\omega}{1 - 1.96 * \omega^2 + \omega^4} \qquad P1(\omega) = \frac{1 - \omega^2}{1 - 1.96 * \omega^2 + \omega^4}$$

$$Q2(\omega) = -\frac{0.02\omega}{1 - 0.0196\omega^2 + 0.0001\omega^4} \qquad P2(\omega) = \frac{1 - 0.01\omega^2}{1 - 0.0196\omega^2 + 0.0001\omega^4}$$

$$Q3(\omega) = \frac{0.2\omega}{1 - 1.96 * \omega^2 + \omega^4} \qquad P3(\omega) = \frac{1 - \omega^2}{1 - 1.96\omega^2 + \omega^4}$$

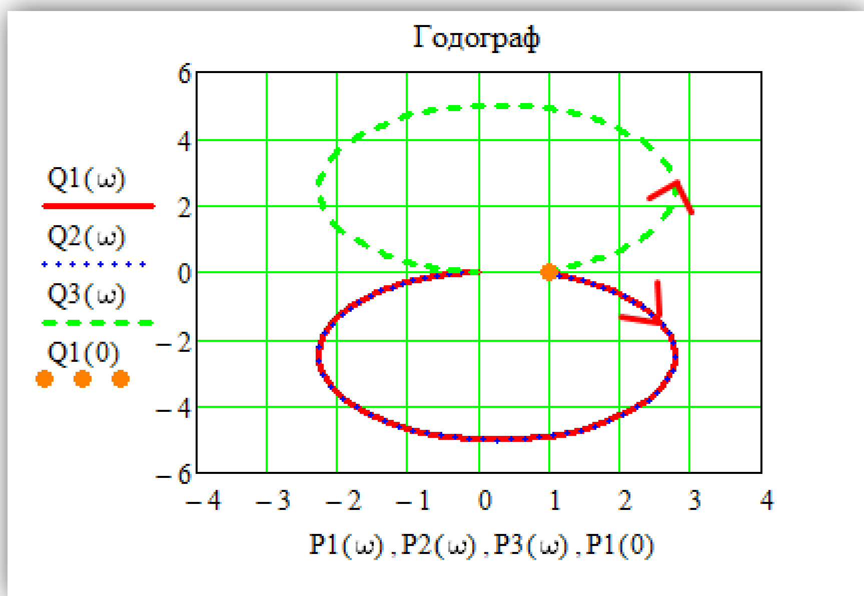


Рис 21.

Уменьшение модуля параметра T не влияет на график. Изменение знака параметра T приводит к отражению графика относительно оси абсцисс.

1.2.3 Вывод временных характеристик

❖ **Импульсная характеристика:**

$$w(t) = L^{-1}(W(s)) = L^{-1}\left(\frac{K}{1 + 2\xi Ts + T^2 s^2}\right) = K * L^{-1}\left(\frac{1}{1 + 2\xi Ts + T^2 s^2}\right)$$

По таблице обратного преобразования Лапласа, изображение $F(s) = \frac{1}{1+2\xi Ts+T^2s^2}$ соответствует оригиналу $f(t) = Ce^{-\beta t}\sin(\omega t)$, где

$C = \frac{1}{\omega T^2}$; $\beta = \frac{\xi}{T}$; $\omega T = \sqrt{1 - \xi^2}$

$$w(t) = \frac{K}{\omega T^2} * e^{-\frac{\xi t}{T}} * \sin(\omega t)$$

При K=1, ξ =0.1

$$w(t) = \frac{1}{\omega T^2} * e^{-\frac{0.1t}{T}} * \sin(\omega t) \qquad \omega T = \sqrt{1-\xi^2} = 0{,}99 \to \omega = 0{,}99/T$$

$$w1(t) = \frac{1}{\omega T1^2} * e^{-\frac{0.1t}{T1}} * \sin(\omega t) = 1{,}01e^{-0.1t} * \sin(0{,}99t)$$

$$w2(t) = \frac{1}{\omega T2^2} * e^{-\frac{0.1t}{T2}} * \sin(\omega t) = 10{,}1e^{-0.1t} * \sin(9{,}9t)$$

$$w3(t) = \frac{1}{\omega T3^2} * e^{-\frac{0.1t}{T3}} * \sin(\omega t) = -1{,}01e^{-0.1t} * \sin(-0{,}99t)$$

$$\Delta 1 := \left|\frac{K}{\omega 1 \cdot T1^2}\right| \cdot 5\% \text{ float},3 \;\to 0.0503 \qquad \Delta 2 := \left|\frac{K}{\omega 2 \cdot T2^2}\right| \cdot 5\% \text{ float},3 \;\to 0.503$$

$$ty1 := \frac{3T1}{\xi} \text{ float},3 \;\to 30.0 \qquad ty2 := \frac{3T2}{\xi} \text{ float},3 \;\to 3.0$$

$$w1(t) := w1(t) \cdot \Phi(t)$$

$$w2(t) := w2(t) \cdot \Phi(t)$$

$$w3(t) := w3(t) \cdot \Phi(t)$$

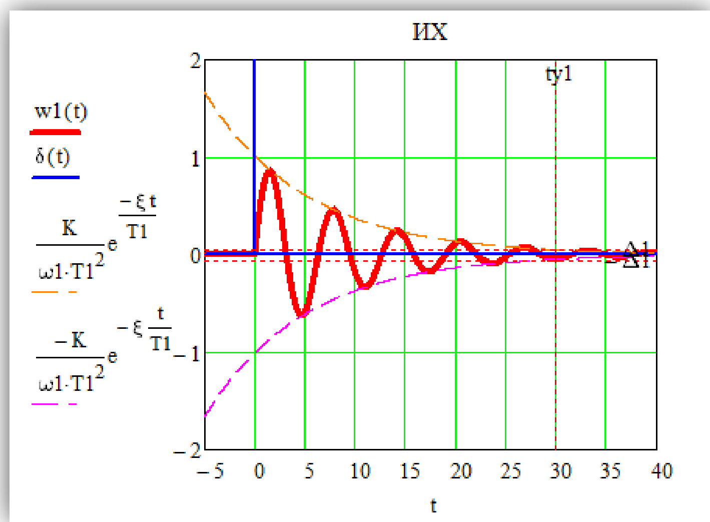


Рис 22.

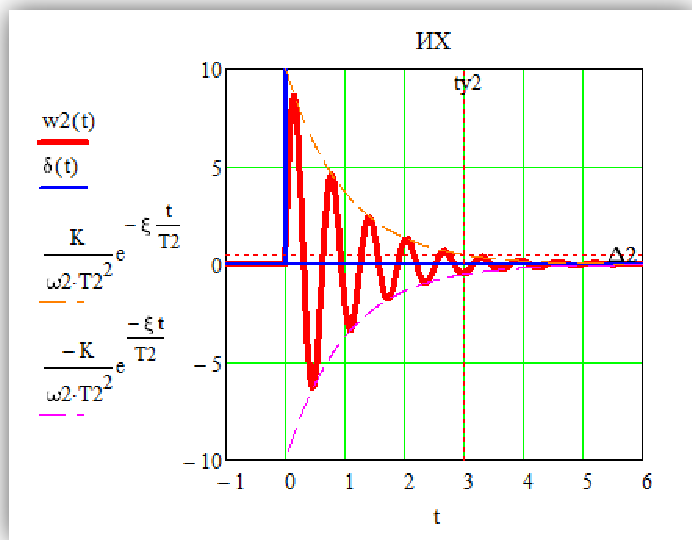


Рис 23.

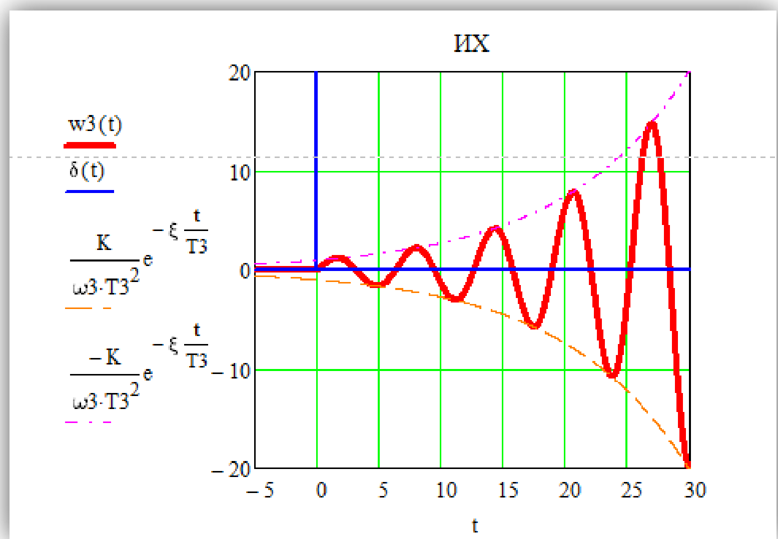


Рис 24.

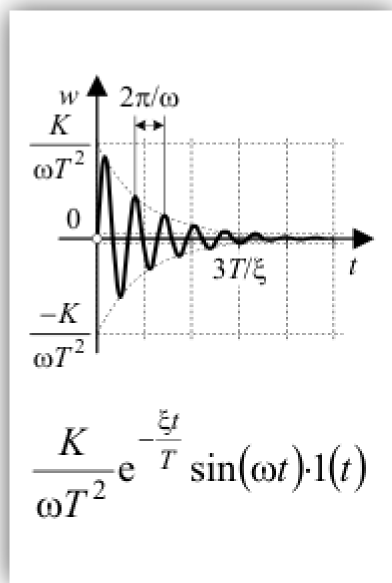


Рис 25.

При уменьшении модуля параметра Т, график вытягивается вдоль оси ординат и сжимается вдоль оси абсцисс. Изменение знака параметра Т, приводит к расходимости графика – в характеристическом полиноме появляются положительные корни.

Проверим правильность построения графика по таблице «Приложение 1. Частотные и временные характеристики типовых звеньев» (Рис 25). График построен верно.

❖ **Переходная характеристика:**

$$h(t) = L^{-1}\left(\frac{W(s)}{s}\right) = L^{-1}\left(\frac{K}{s(1+2\xi Ts+T^2s^2)}\right) =$$

$$= K * L^{-1}\left(\frac{1}{s(1+2\xi Ts+T^2s^2)}\right)$$

По таблице обратного преобразования Лапласа, изображение $F(s) = \frac{1}{s(1+2\xi Ts+T^2s^2)}$ соответствует оригиналу $f(t) = 1 - Ce^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi)$, где

$$C = \frac{1}{\omega T}\ ; \quad \beta = \frac{\xi}{T}\ ; \quad \omega T = \sqrt{1-\xi^2};\ \varphi = arctg\left(\frac{\omega}{\beta}\right) = arctg\left(\frac{\omega T}{\xi}\right) =$$

$$= arctg\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$$

$$h(t) = K\left(1 - \frac{e^{-\frac{\xi}{T}t}}{\omega \mathrm{T}}\sin\left(\omega t + arctg\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right)$$

При K=1, ξ =0.1

$$arctg\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) = 0{,}78\ \text{рад} \quad \omega T = \sqrt{1-\xi^2} = 0{,}99 \to \omega = 0{,}99/T$$

$$h(t) = 1 - \frac{e^{-\frac{0.1}{T}t}}{\omega T}\sin(\omega t + 0{,}78)$$

$$h1(t) = 1 - \frac{e^{-\frac{0.1}{T1}t}}{\omega T1}\sin(\omega t + 0{,}78) = 1 - 1{,}01e^{-0.1t}\sin(0{,}99t + 0{,}78)$$

$$h2(t) = 1 - \frac{e^{-\frac{0.1}{T2}t}}{\omega T2}\sin(\omega t + 0{,}78) = 1 - 10{,}1e^{-t}\sin(9{,}9t + 0{,}78)$$

$$h3(t) = 1 - \frac{e^{-\frac{0.1}{T3}t}}{\omega T3}\sin(\omega t + 0{,}78) = 1 + 1{,}01e^{0.1t}\sin(-0{,}99t + 0{,}78)$$

$$h1(t) := h1(t)\cdot\Phi(t)$$

$$h2(t) := h2(t)\cdot\Phi(t)$$

$$h3(t) := h3(t)\cdot\Phi(t)$$

$$ty1 := \frac{3T1}{\xi}\ \text{float},3 \ \rightarrow 30.0 \qquad ty2 := \frac{3T2}{\xi}\ \text{float},3 \ \rightarrow 3.0$$

$$h01 := \lim_{t\to 0} h1(t) \rightarrow 0 \qquad hy1 := \lim_{t\to\infty} h1(t) \rightarrow 1.0 \qquad h02 := \lim_{t\to 0} h2(t) \rightarrow 0 \qquad hy2 := \lim_{t\to\infty} h2(t) \rightarrow 1.0$$

$$\Delta 1h := |hy1 - h01|\cdot 5\%\ \text{float},3 \ \rightarrow 0.05 \qquad \Delta 2h := |hy2 - h02|\cdot 5\%\ \text{float},3 \ \rightarrow 0.05$$

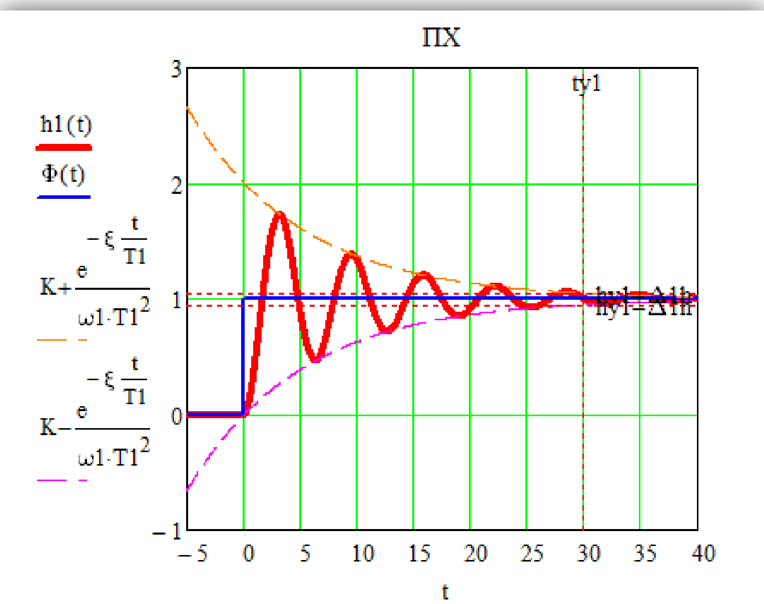


Рис 26.

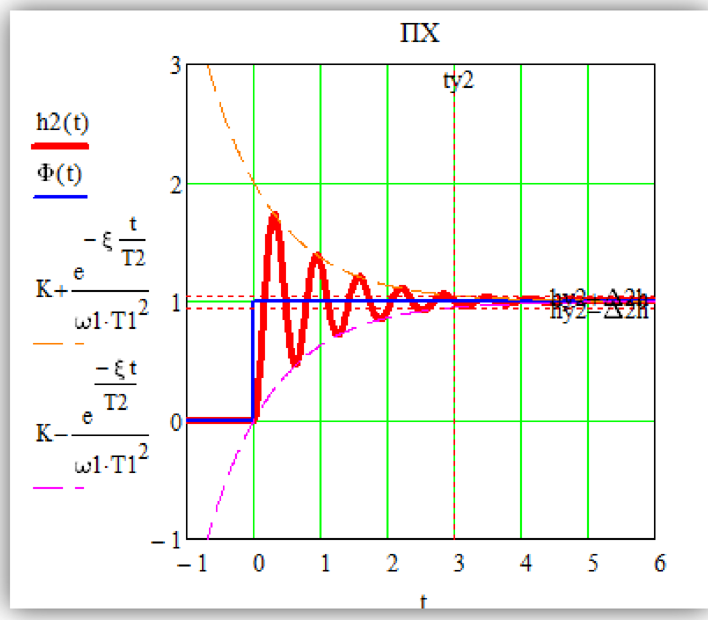
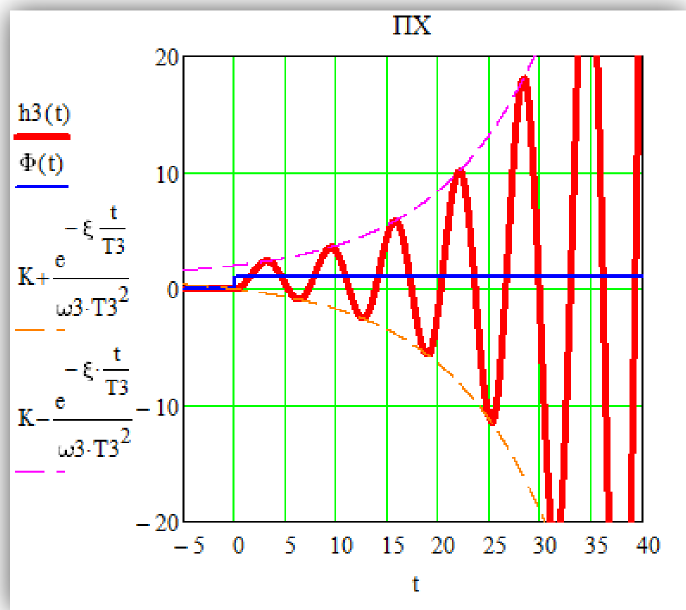


Рис 27.



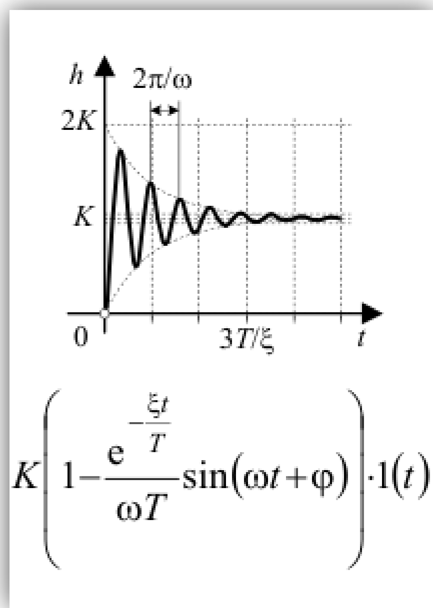


Рис 28. Рис 29.

При уменьшении параметра T, график сжимается вдоль оси абсцисс. Изменение знака параметра T, приводит к расходимости графика.

Проверим правильность построения графика по таблице «Приложение 1. Частотные и временные характеристики типовых звеньев» (Рис 29). График построен верно.

1.2.4 Синтез схемы на операционном усилителе

❖ **T=1**

Передаточная функция:

$$W_6(1,1,0.1) = \frac{1}{1 + 0.2s + s^2}$$

Вычислим суммы коэффициентов усиления по прямому и инверсному входам

$$S_1(s) = \frac{1}{1 + 0.2s + s^2} \qquad S_2(s) = 0$$

Условие баланса:

$$S_1(s) = \ S_2(s) + 1$$

$$\frac{1}{1 + 0.2s + s^2} \neq \ 0 + 1$$

Условие баланса не выполняется, значит нужно подобрать передаточные функции $W_{10}(s)$ и $W_{20}(s)$ с положительными коэффициентами, удовлетворяющие условию

$S_1(s) + W_{10}(s) = S_2(s) + 1 + W_{20}(s)$

$$\frac{1}{1 + 0.2s + s^2} + W_{10}(s) = 1 + W_{20}(s)$$

Для оптимальной схемы (в целях экономии сопротивления Z_{20}) предположим $W_{20}(s) = 0$.

$$W_{10}(s) = 1 - \frac{1}{1 + 0.2s + s^2} = \frac{0.2s + s^2}{1 + 0.2s + s^2}$$

Полиномы числителя и знаменателя с положительными коэффициентами, следовательно, предположение верно и $W_{20}(s) = 0$.

Эскизная схема имеет вид:

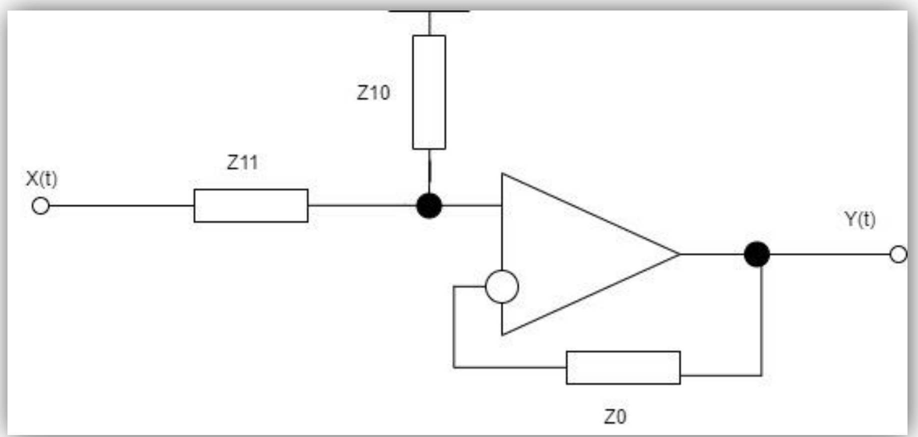


Рис 30.

Для инверсного входа:

$$W_0 * \mathrm{Z}_0 = const$$

$$1 * \mathrm{Z}_0 = const$$

1.В качестве константы можно взять любое неотрицательное число. Возьмем константу равную нулю, тогда сопротивление $\mathrm{Z}_0 = 0$ Ом.

2. Z_0 можно заменить проводом, поскольку входное сопротивление *идеального* ОУ бесконечно велико, и входной ток равен нулю.

Для прямого входа:

$$W_{10} * \mathrm{Z}_{10} = W_{11} * \mathrm{Z}_{11} = const$$

$$\frac{0.2s + s^2}{1 + 0.2s + s^2} * \mathrm{Z}_{10} = \frac{1}{1 + 0.2s + s^2} * \mathrm{Z}_{11} = const$$

$$(0.2s + s^2) * \mathrm{Z}_{10} = \mathrm{Z}_{11} = const$$

$$s(0.2 + s) * \mathrm{Z}_{10} = \mathrm{Z}_{11}$$

Возьмём Z_{10} равное сопративлению конденсатора $= \frac{1}{C_{10} * s}$, так как при таком выборе в уравнении сократится s.

$$Z_{11} = \frac{s(0.2+s)}{C_{10} * s} = \frac{(0.2+s)}{C_{10}}$$

Последовательное соединение резистора и индуктивности равно R+Ls. Сопротивление индуктивности равно Ls.

$$Z_{11} = \frac{(0.2+s)}{C_{10}} = \frac{0.2}{C_{10}} + \frac{s}{C_{10}} = R_{11} + L_{11}$$

$$R_{11} = \frac{0.2}{c_{10}} \quad L_{11} = \frac{1}{c_{10}}$$

Возьмем $C_{10} = 10$мкФ, тогда $R_{11} = 20$ КОм, $L_{11} = 100$КГн.

Итоговая схема имеет вид:

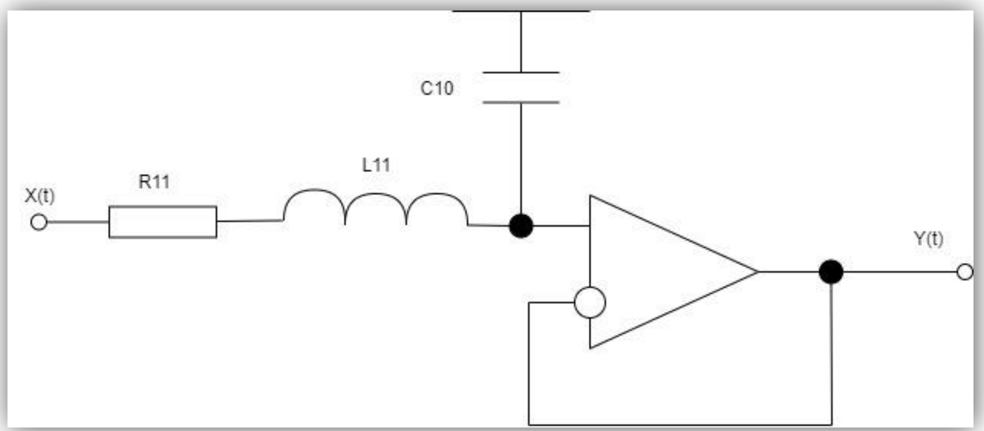
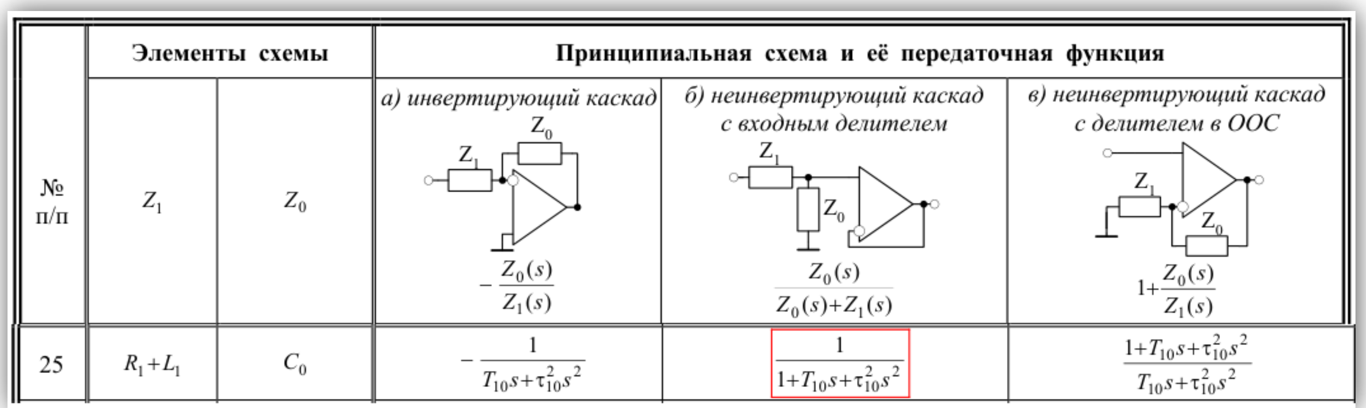


Рис 31.

Проверим правильность построения схемы по таблице «Приложение 2. Схемы каскадов на ОУ» (Рис 32). Схема соответствует строке 25, столбцу б.



№ п/п	Элементы схемы		Принципиальная схема и её передаточная функция		
	Z_1	Z_0	*а) инвертирующий каскад* $-\frac{Z_0(s)}{Z_1(s)}$	*б) неинвертирующий каскад с входным делителем* $\frac{Z_0(s)}{Z_0(s)+Z_1(s)}$	*в) неинвертирующий каскад с делителем в ООС* $1+\frac{Z_0(s)}{Z_1(s)}$
25	R_1+L_1	C_0	$-\frac{1}{T_{10}s+\tau_{10}^2 s^2}$	$\boxed{\frac{1}{1+T_{10}s+\tau_{10}^2 s^2}}$	$\frac{1+T_{10}s+\tau_{10}^2 s^2}{T_{10}s+\tau_{10}^2 s^2}$

Рис 32.

- **T=0.1**

$$W_6(1{,}0.1{,}0.1) = \frac{1}{1+0.02s+0.01s^2}$$

$$S_1(s) = \frac{1}{1+0.02s+0.01s^2} \qquad S_2(s) = 0$$

$$S_1(s) = \ S_2(s) + 1$$

$$\frac{1}{1 + 0.02s + 0.01s^2} \neq \ 0 + 1$$

Условие баланса не выполняется, значит нужно подобрать передаточные функции $W_{10}(s)$ и $W_{20}(s)$ с положительными коэффициентами, удовлетворяющие условию
$S_1(s) + W_{10}(s) = S_2(s) + 1 + W_{20}(s)$

$$\frac{1}{1 + 0.02s + 0.01s^2} + W_{10}(s) = 1 + W_{20}(s)$$

Для оптимальной схемы (в целях экономии сопротивления Z_{20}) предположим $W_{20}(s) = 0$.

$$W_{10}(s) = 1 - \frac{1}{1 + 0.02s + 0.01s^2} = \frac{0.02s + 0.01s^2}{1 + 0.2s + s^2}$$

Полиномы числителя и знаменателя с положительными коэффициентами, следовательно, предположение верно и $W_{20}(s) = 0$.

Эскизная схема имеет вид:

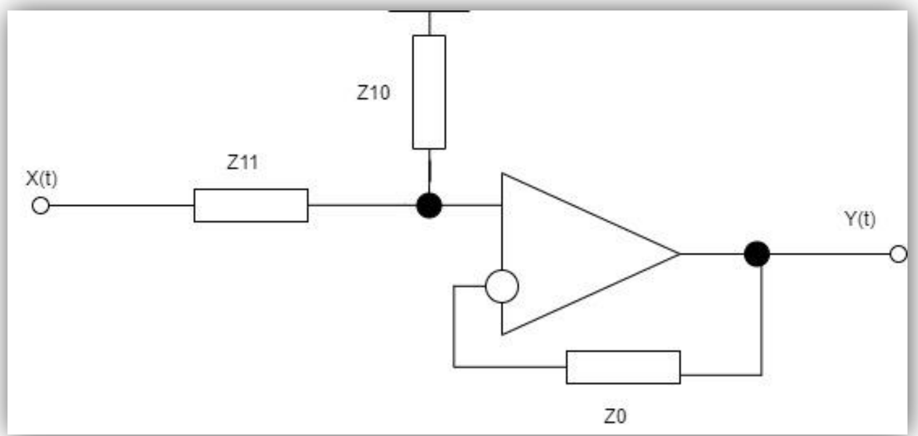


Рис 33.

Для инверсного входа:

$$W_0 * \mathrm{Z}_0 = const$$

$$1 * \mathrm{Z}_0 = const$$

1.В качестве константы можно взять любое неотрицательное число. Возьмем константу равную нулю, тогда сопротивление $\mathrm{Z}_0 = 0$ Ом.

2. Z_0 можно заменить проводом, поскольку входное сопротивление *идеального* ОУ бесконечно велико, и входной ток равен нулю.

Для прямого входа:

$$W_{10} * \mathrm{Z}_{10} = W_{11} * \mathrm{Z}_{11} = const$$

$$\frac{0.02s + 0.01s^2}{1 + 0.2s + s^2} * \mathrm{Z}_{10} = \frac{1}{1 + 0.02s + 0.01s^2} * \mathrm{Z}_{11} = const$$

$$(0.02s + 0.01s^2) * \mathrm{Z}_{10} = \mathrm{Z}_{11} = const$$

$$s(0.02 + 0.01s) * \mathrm{Z}_{10} = \mathrm{Z}_{11}$$

Возьмём Z_{10} равное сопративлению конденсатора $= \frac{1}{C_{10} * s}$, так как при таком выборе в уравнении сократится s.

$$\mathrm{Z}_{11} = \frac{s(0.02 + 0.01s)}{C_{10} * s} = \frac{(0.02 + 0.01s)}{C_{10}}$$

Последовательное соединение резистора и индуктивности равно R+Ls. Сопротивление индуктивности равно Ls.

$$\mathrm{Z}_{11} = \frac{(0.02 + 0.01s)}{C_{10}} = \frac{0.02}{C_{10}} + \frac{0.01s}{C_{10}} = R_{11} + L_{11}$$

$$R_{11} = \frac{0.02}{c_{10}} \quad L_{11} = \frac{0.01}{c_{10}}$$

Возьмем $C_{10} = 10$мкФ, тогда $R_{11} = 2$ КОм, $L_{11} = 10$КГн.

Итоговая схема имеет вид:

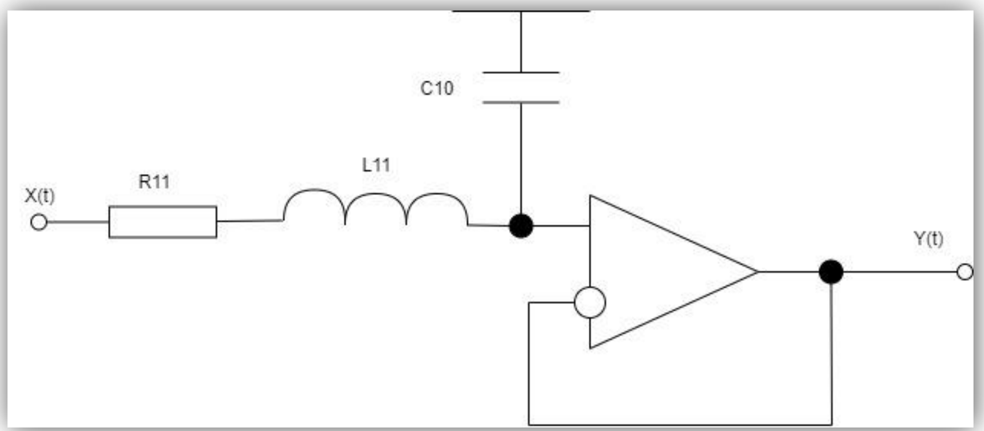


Рис 34.

1.3 Звено W1

$$W_1(K) = K \quad W_1(-2) = -2$$

1.3.1 Вывод функционального уравнения

$$Y(s) = X(s) * W(s) = X(s) * (-2)$$

$$Y(s) = -2X(s)$$

$\underline{y(t) = 2x(t)}$ – алгебраическое уравнение.

1.3.2 Вывод частотных характеристик

❖ Комплексная частотная характеристика:

$C(\omega) = W(j\omega) = -2$

❖ Вещественная частотная характеристика:

$P(\omega) = Re\big(C(\omega)\big) = Re(K) = -2$

❖ Мнимая частотная характеристика:

$Q(\omega) = Im\big(C(\omega)\big) = Im(K) = 0$

❖ Амплитудно-частотная характеристика:

$A(\omega) = |C(\omega)| = 2$

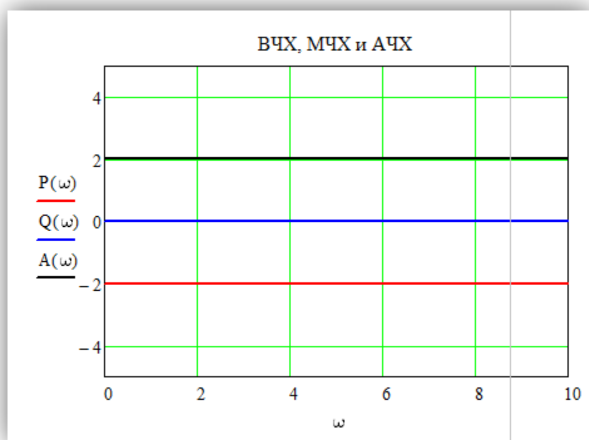


Рис 35.

❖ Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика:

$L(\omega) = 20\log\big(A(\omega)\big) = 20\log(2) = 6$

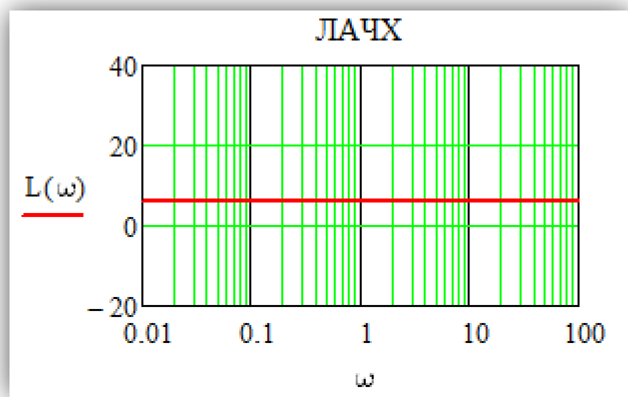


Рис 36.

❖ Логарифмическая фазо-частотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = arctg\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) = \begin{cases} 0 \text{ при } K > 0 \\ \pm 180\,° \text{при } K < 0 \end{cases}$$

$$\varphi(\omega) := \mathrm{atan2}(P(\omega), Q(\omega)) \cdot deg^{-1}$$

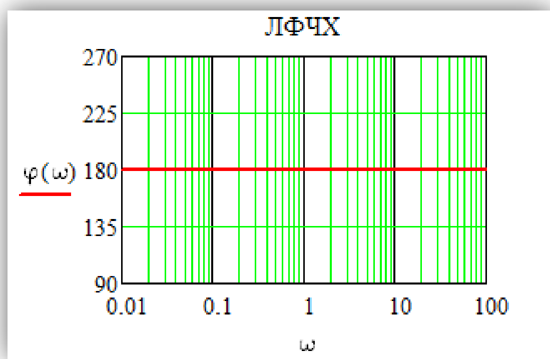


Рис 37.

❖ Годограф:

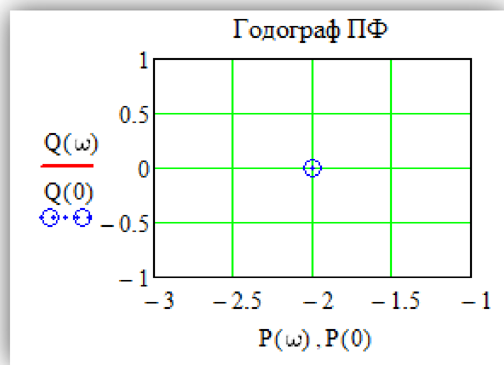


Рис 38.

1.3.3 Вывод временных характеристик

❖ Импульсная характеристика

$w(t) = L^{-1}(W(s)) = L^{-1}(K) = K * L^{-1}(1)$

По таблице обратного преобразования Лапласа, изображение $1(t)$ соответствует оригиналу $f(t) = \delta(t)$.

$w(t) = -2\delta(t)$

$$\delta(t) := \frac{0 \le t \le \varepsilon}{\varepsilon} \qquad w(t) := -2\,\delta(t)$$

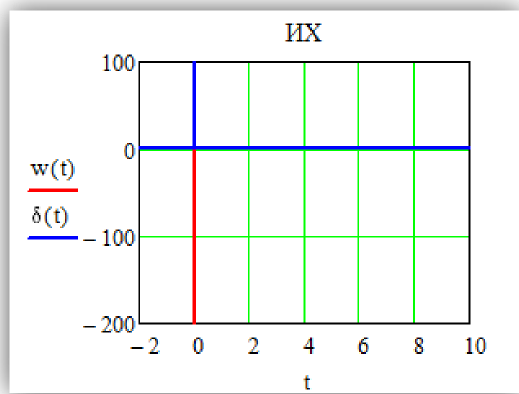


Рис 39.

❖ Переходная характеристика

$$h(t) = L^{-1}\left(\frac{W(s)}{s}\right) = L^{-1}\left(\frac{K}{s}\right) = K * L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

По таблице обратного преобразования Лапласа, изображение $\frac{1}{s^n}$ соответствует оригиналу $f(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

$$h(t) = -2\frac{t^0}{0!} = -2$$

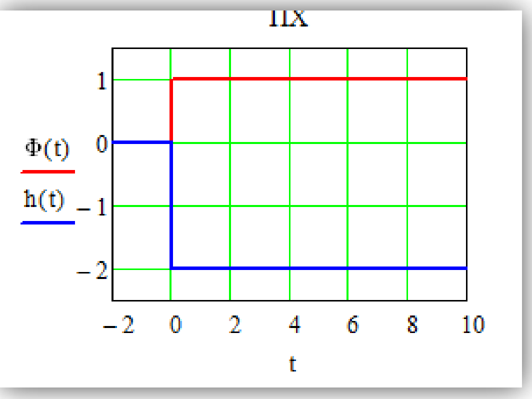


Рис 40.

1.3.4 Синтез схемы на ОУ

$W_1(-2) = -2$

Вычислим суммы коэффициентов усиления по прямому и инверсному входам

$S_1(s) = 0 \qquad S_2(s) = 2$

Условие баланса:

$S_1 = \ S_2 + 1$

$0 \neq \ 2 + 1$

Условие баланса не выполняется, значит нужно подобрать передаточные функции $W_{10}(s)$ и $W_{20}(s)$ с положительными коэффициентами, удовлетворяющие условию

$S_1(s) + W_{10}(s) = S_2(s) + 1 + W_{20}(s)$

$W_{10}(s) = 2 + 1 + W_{20}(s)$

Для оптимальной схемы (в целях экономии сопротивления Z_{20}) предположим $W_{20}(s) = 0$.

$W_{10}(s) = 3$

$W_{10}(s) > 0$, следовательно, предположение верно и $W_{20}(s) = 0$.

Эскизная схема имеет вид:

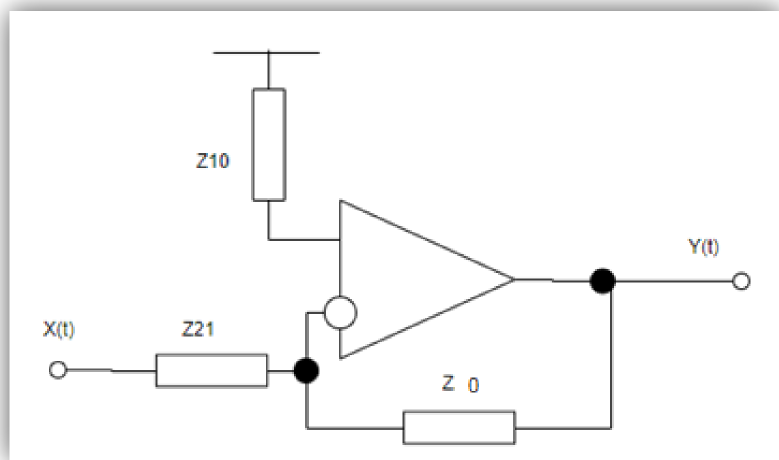


Рис 41.

Для прямого входа:

$W_{10} * \mathrm{Z}_{10} = const$

$3 * \mathrm{Z}_{10} = const$

1.В качестве константы можно взять любое неотрицательное число. Возьмем константу равную нулю, тогда сопротивление $\mathrm{Z}_{10} = 0$ Ом.

2. Z_{10} можно заменить проводом, поскольку входное сопротивление *идеального* ОУ бесконечно велико, и входной ток равен нулю.

Для инверсного входа:

$W_{20} * \mathrm{Z}_0 = W_{21} * \mathrm{Z}_{21} = const$

$1 * \mathrm{Z}_{20} = 2 * \mathrm{Z}_{21} = const$

$\mathrm{Z}_{20} = 2 * \mathrm{Z}_{21}$

Из полученного соотношения видно, что нужно взять:

$Z_0 = R_0$; $Z_{21} = R_{21}$

Пусть $R_0 = 10$ кОм , тогда получим $R_{21} = 5$ кОм

Итоговая схема:

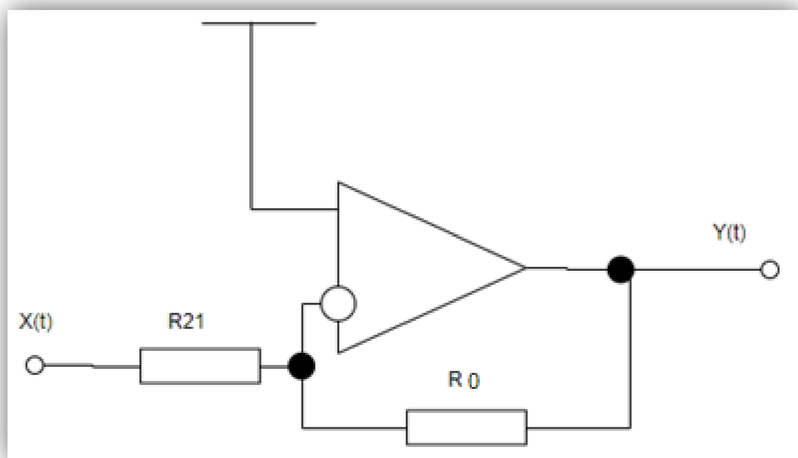
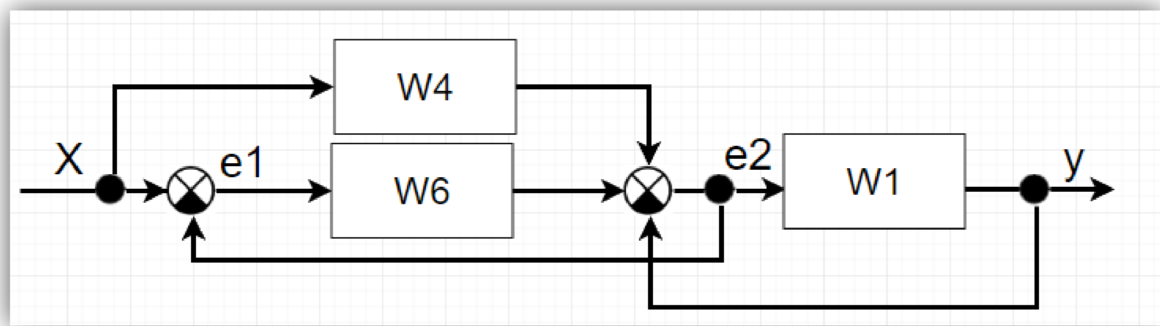


Рис 42.

2 Вывод передаточной функции разомкнутой системы

2.1 Метод алгебраических преобразований



$$\begin{cases} e_1 = x - e_2 \\ e_2 = xw_4 + e_1 w_6 - y \\ y = e_2 w_1 \end{cases}$$

1)Подставляем третье уравнение во второе

$$e_2 = xw_4 + e_1 w_6 - e_2 w_1$$

$$e_1 = \frac{e_2 - xw_4 + e_2 w_1}{w_6}$$

$$e_1 = \frac{e_2(1 + w_1) - xw_4}{w_6}$$

2)Приравниваем полученное выражение первому уравнению

$$\frac{e_2(1 + w_1) - xw_4}{w_6} = x - e_2$$

$$e_2(1 + w_1) - xw_4 = (x - e_2)w_6$$

$$e_2 + e_2 w_1 - xw_4 = xw_6 - e_2 w_6$$

$$e_2(1 + w_1 + w_6) = x(w_6 + w_4)$$

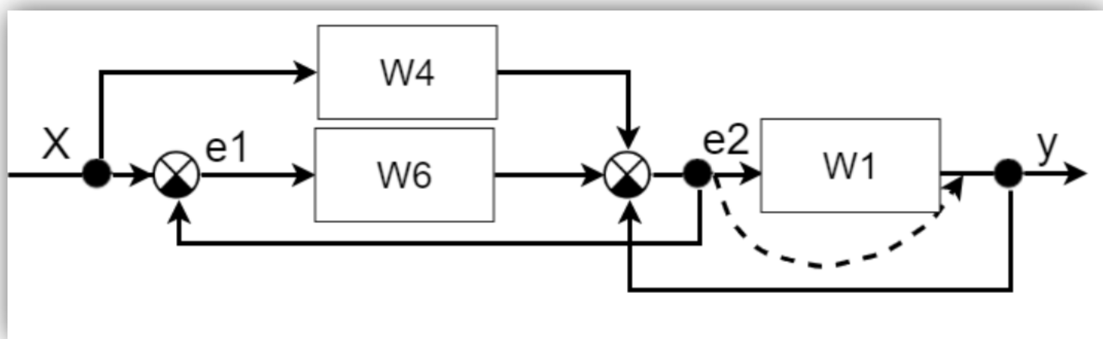
$$e_2 = \frac{x(w_6 + w_4)}{(1 + w_1 + w_6)}$$

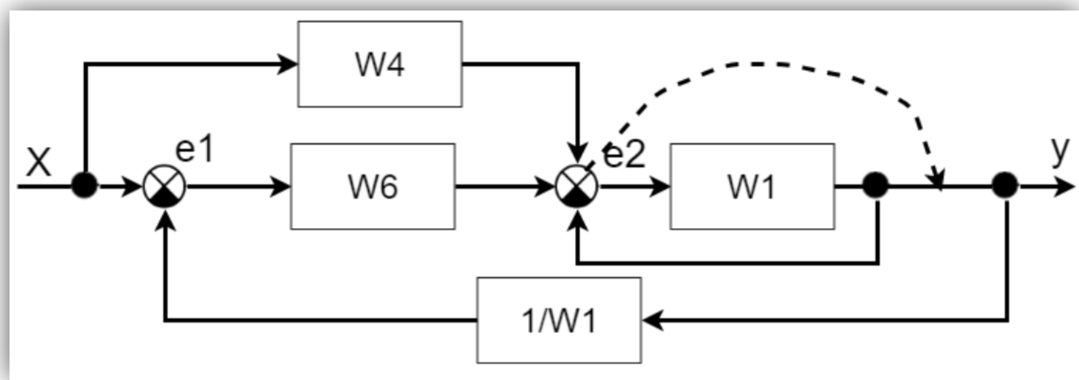
3) Подставляем полученное выражение в третье уравнение

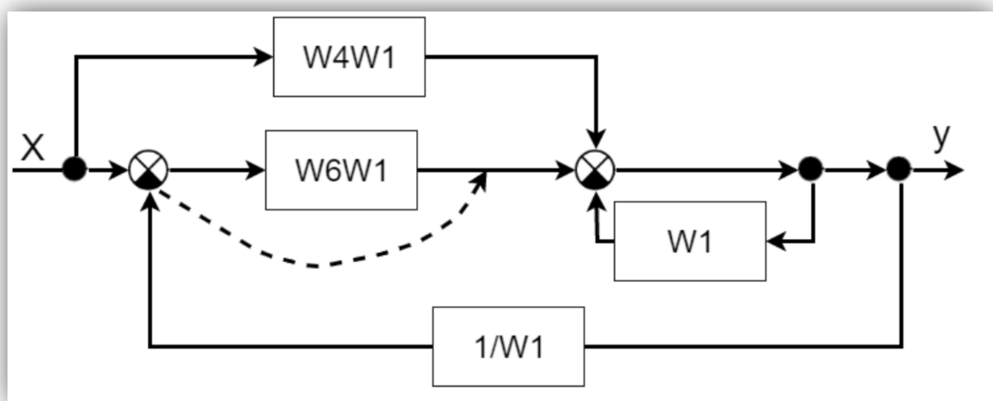
$$y = \frac{x(w_6 + w_4)}{(1 + w_1 + w_6)} w_1$$

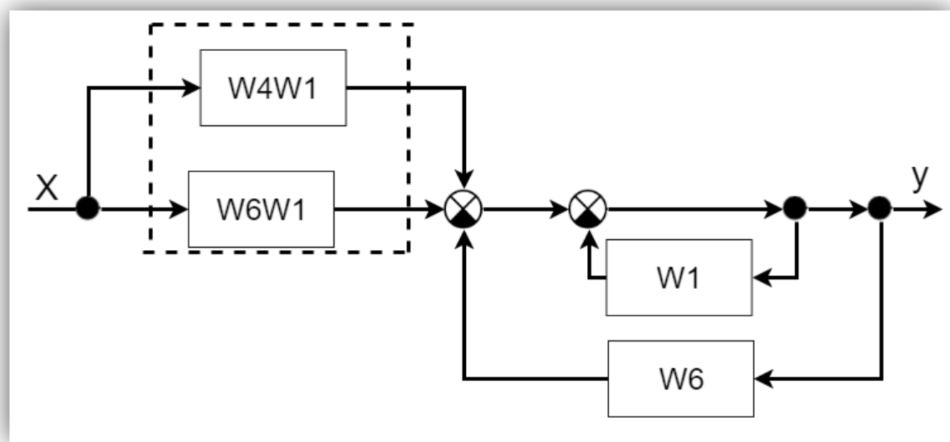
$$W = \frac{y}{x} = \frac{x(w_6 + w_4)w_1}{(1 + w_1 + w_6)x} = \frac{(w_6 + w_4)w_1}{(1 + w_1 + w_6)}$$

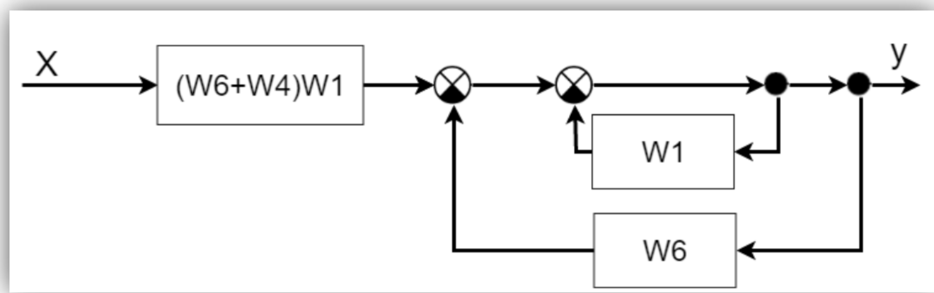
2.2 Метод схематических преобразований

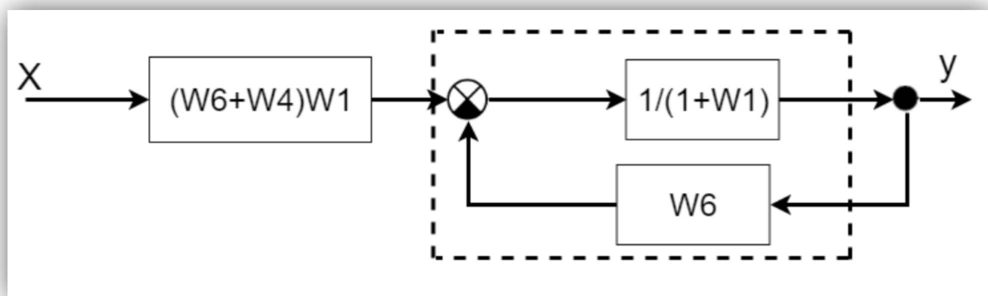


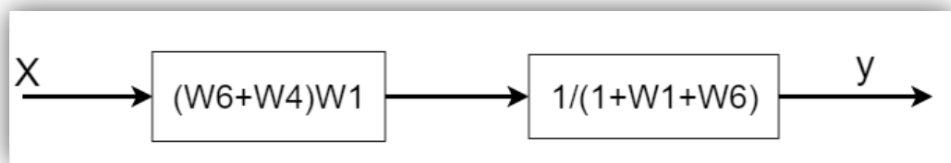


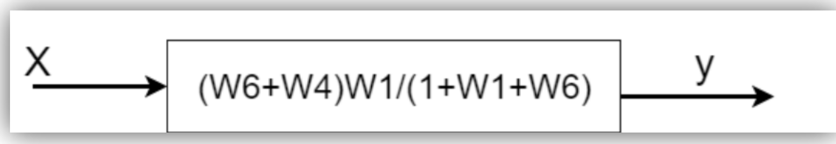






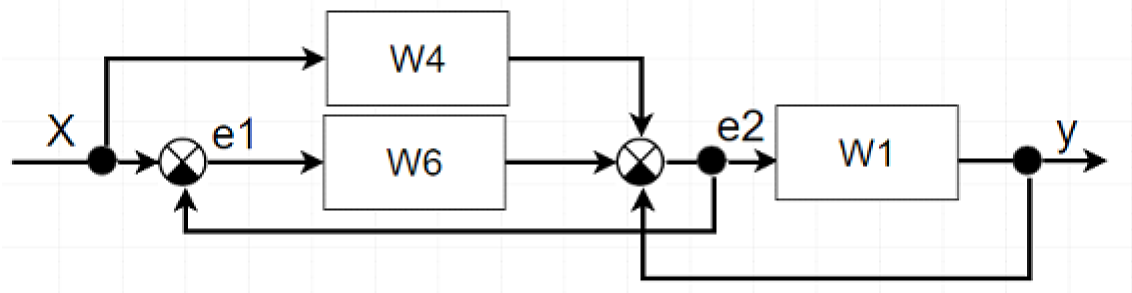






Полученная передаточная функция совпадает с той, которая получена алгебраическими преобразованиями.

2.3 Проверка вычислений с помощью Mathcad



Given

$e1 = x - e2 \qquad e2 = x \cdot W4 + e1 \cdot W6 - y \qquad y = e2 \cdot W1$

$$F(W1, W4, W6) := \frac{\mathrm{Find}(y, e1, e2)_0}{x} \; \mathrm{simplify} \; \rightarrow \frac{W1 \cdot (W4 + W6)}{W1 + W6 + 1}$$

Выражение, полученное в Mathcad, совпадает с вычисленными вручную.

2.4 Подстановка в передаточную функцию разомкнутой системы передаточных функций типовых звеньев

$$W1(K) = K \qquad W4(K,T) = \frac{K}{1+Ts} \qquad W_6(K,T,\xi) = \frac{K}{1+2\xi Ts + T^2 s^2}$$

$$W1(-2) = -2 \qquad W4(1,2) = \frac{1}{1+2s} \qquad W_6(1,T,0.1) = \frac{1}{1+0.2Ts+T^2s^2}$$

Вычислим W(s) с помощью Mathcad

$$Wp(s,T) := F\left(-2, \frac{1}{1+2\cdot s}, \frac{1}{1+0.2\cdot T s + T^2 \cdot s^2}\right) \Bigg| \begin{matrix} \mathrm{simplify} \\ \mathrm{collect}, s \end{matrix} \rightarrow \frac{10.0 \cdot T^2 \cdot s^2 + s \cdot (2.0 \cdot T + 20.0) + 20.0}{s^2 \cdot \left(5.0 \cdot T^2 + 2.0 \cdot T\right) + 10.0 \cdot T^2 \cdot s^3 + T \cdot s}$$

$$W(s) = \frac{20 + (20+2T)s + 10T^2 s^2}{Ts + (5T^2 + 2T)s^2 + 10T^2 s^3}$$

3 Исследование устойчивости разомкнутой системы от буквенного параметра

3.1 Метод Гурвица

Выделим в передаточной функции характеристический полином

$\mathrm{C(s)} = \mathrm{A(s)} = Ts + (5T^2 + 2T)s^2 + 10T^2 s^3$

Свободный член равен нулю(c0=0). Это означает, что система не может быть устойчива. Найдем значения параметра Т, при которых система находится на апериодической границе устойчивости.

Матрица Гурвица для полинома третьего порядка:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} c_2 & c_0 & 0 \\ c_3 & c_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Для устойчивости системы должно выполняться условие: $(\mathrm{sgn}(c_n))^i M_i > 0 \forall i = 1, n$. То есть c_0, c_2 и c_3 должны быть одного знака и $M_2 > 0$.

Где M_i– миноры матрицы Гурвица:

- ❖ $M_1 = c_2$
- ❖ $M_2 = \begin{vmatrix} c_2 & c_0 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} = c_2 c_1 - c_0 c_3$
- ❖ $M_3 = \mid \Gamma \mid = c_0 M_2$

- Найдём второй минор матрицы

$$M_2 = (5T^2 + 2T)T = 5T^3 + 2T^2$$

- Найдём значения Т, при которых система на АГУ.

1) Если $c_3 > 0$, то c_2 и M_2 должны быть больше нуля.

$$\begin{cases} 10T^2 > 0 \\ 5T^2 + 2T > 0 \\ 5T^3 + 2T^2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T \neq 0 \\ T < -0.4 \text{ или } T > 0 \\ -0.4 < T < 0 \text{ или } T > 0 \end{cases}$$

Решением системы является $T > 0$

2) Если $c_3 < 0$, тогда c_2 должен быть <0 , М2 должно быть >0.

$$\begin{cases} 10T^2 < 0 \\ 5T^2 + 2T < 0 \\ 5T^3 + 2T^2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{нет решений} \\ -0.4 < T < 0 \\ -0.4 < T < 0 \text{ или } T > 0 \end{cases}$$

Решением системы является пустое множество.

- Определим состояние системы при $T \rightarrow 0$.

$\mathrm{C(s)} = \mathrm{A(s)} = Ts + (5T^2 + 2T)s^2 + 10T^2 s^3$ сократим на Т.

$s + (5T + 2)s^2 + 10Ts^3$ при $T \rightarrow 0$ равно $s + 2s^2$. $s_1 = 0$ $s_2 = -2$. Положительных корней нет, значит, система на апериодической границе устойчивости.

По критерию Гурвица:

- ❖ *система неустойчива при $T < 0$,*
- ❖ *система на апериодической границе устойчивости при $T \geq 0$.*

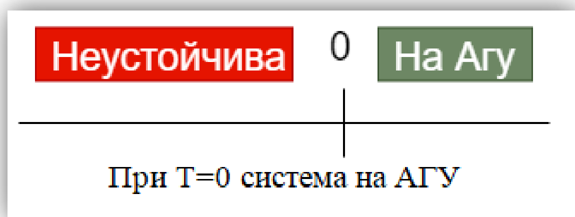


Рис 43.

3.2 Метод Михайлова

Характеристический полином

$\mathrm{C(s)} = \mathrm{A(s)} = Ts + (5T^2 + 2T)s^2 + 10T^2s^3$

Согласно критерию Михайлова, чтобы система была устойчивой, она должна удовлетворять следующим требованиям:

- Положительное направление вращения - при $c_0(T)$и $c_1(T)$ одного знака: $c_0(T) * c_1(T) > 0$
- Поочередное пересечение осей $\mathrm{P}(\omega)$ и $\mathrm{Q}(\omega)$ - при $\omega_0(\mathrm{T}) < \omega_1(\mathrm{T}) < \omega_2(\mathrm{T})$

1) Свободный член равен нулю (c0=0). Это означает, что система не может быть устойчива. Найдем значения параметра T, при которых система находится на апериодической границе устойчивости.

I. Если $\mathrm{c}_0 = |\xi|$, тогда $c_1(T)$ должен быть > 0. Это условие выполняется при <u>T>0.</u>

2) $Q(\omega) = Im\big(C(i\omega)\big) = Im(|\xi| + T\omega i - (5T^2 + 2T)\omega^2 - 10T^2\omega^3 i) =$

$$= T\omega - 10T^2\omega^3 = 0 \to \omega_0(T) = 0 \quad {\omega_2}^2(T) = \frac{1}{10T}$$

$$P(\omega) = Re\big(C(i\omega)\big) = Re(|\xi| + T\omega i - (5T^2 + 2T)\omega^2 - 10T^2\omega^3 i) =$$

$$= |\xi| - (5T^2 + 2T)\omega^2 \quad \to {\omega_1}^2(T) = \frac{|\xi|}{5T^2 + 2T}$$

a) Для того чтобы выполнялось условие ${\omega_1}^2(T) > {\omega_0}^2(T)$ должно быть верным неравенство $(5T^2 + 2T) > 0$

$$(5T^2 + 2T) > 0$$

$$\underline{T < -0.4 \text{ или } T > 0}$$

b) ${\omega_2}^2(T) > {\omega_1}^2(T)$

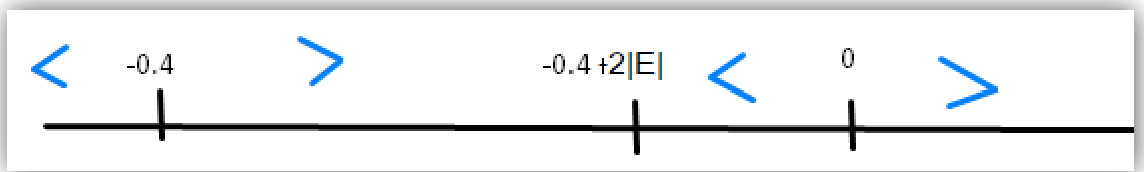
$$\frac{1}{10T} > \frac{|\xi|}{(5T^2 + 2T)}$$

$$\frac{-|\xi|}{(5T^2 + 2T)} + \frac{1}{10T} > 0$$

$$\frac{-10T|\xi| + (5T^2 + 2T)}{10T(5T^2 + 2T)} > 0$$

$$\frac{T(-10|\xi| + 5T + 2)}{10T(5T^2 + 2T)} > 0$$

$$\frac{5T - 10|\xi| + 2}{10(5T^2 + 2T)} > 0$$



$\underline{-0.4 < T < -0.4 + 2|\xi| \text{ или } T > 0}$

3) Найдем пересечение области I) с областями I.2.a) и I.2.b)

$$\begin{cases} T > 0 \\ T < -0.4 \text{ или } T > 0 \\ -0.4 < T < -0.4 + 2|\xi| \text{ или } T > 0 \end{cases}$$

Решением системы будет $T > 0$. Система на АГУ при $T > 0$.

II. Если $c_0 = -|\xi|$, тогда $c_1(T)$ должен быть < 0. Это условие выполняется при <u>T<0.</u>

$$2) Q(\omega) = \mathrm{Im}\big(C(i\omega)\big) = \mathrm{Im}(-|\xi| + T\omega i - (5T^2 + 2T)\omega^2 - 10T^2\omega^3 i) =$$

$$= T\omega - 10T^2\omega^3 = 0 \to \omega_0(T) = 0 \quad {\omega_2}^2(T) = \frac{1}{10T}$$

$$P(\omega) = Re\big(C(i\omega)\big) = Re(-|\xi| + T\omega i - (5T^2 + 2T)\omega^2 - 10T^2\omega^3 i) =$$

$$= -|\xi| - (5T^2 + 2T)\omega^2 \quad \to {\omega_1}^2(T) = \frac{-|\xi|}{5T^2 + 2T}$$

a) Для того чтобы выполнялось условие ${\omega_1}^2(T) > {\omega_0}^2(T)$ должно быть верным неравенство $(5T^2 + 2T) < 0$

$(5T^2 + 2T) < 0$

$\underline{-0.4 < T < 0}$

b) ${\omega_2}^2(T) > {\omega_1}^2(T)$

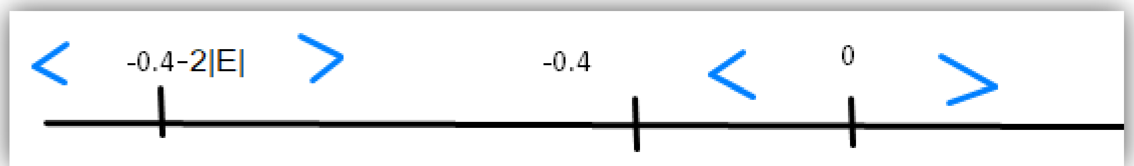
$$\frac{1}{10T} > \frac{-|\xi|}{(5T^2 + 2T)}$$

$$\frac{|\xi|}{(5T^2 + 2T)} + \frac{1}{10T} > 0$$

$$\frac{10T|\xi| + (5T^2 + 2T)}{10T(5T^2 + 2T)} > 0$$

$$\frac{T(10|\xi| + 5T + 2)}{10T(5T^2 + 2T)} > 0$$

$$\frac{5T + 10|\xi| + 2}{10(5T^2 + 2T)} > 0$$



$$-0.4 - 2|\xi| < T < -0.4 \text{ или } T > 0$$

3) Найдем пересечение области II) с областями II.2.a) и II.2.b)

$$\begin{cases} T < 0 \\ -0.4 < T < 0 \\ -0.4 - 2|\xi| < T < -0.4 \text{ или } T > 0 \end{cases}$$

При $\boldsymbol{T < 0}$ ***система неустойчива.***

- Определим состояние системы при $T \to 0$.

$C(s) = A(s) = Ts + (5T^2 + 2T)s^2 + 10T^2s^3$ сократим на T.

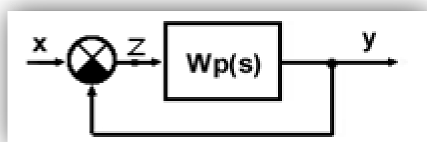
$s + (5T + 2)s^2 + 10Ts^3$ при $T \to 0$ равно $s + 2s^2$. $s_1 = 0$ $s_2 = -2$. Положительных корней нет, значит, система на апериодической границе устойчивости.

По критерию Михайлова:

- *система неустойчива при* $T < 0$,
- *система на апериодической границе устойчивости при* $T \geq 0$.

4 Исследование устойчивости замкнутой системы от буквенного параметра

4.1 Получение передаточной функции системы, замкнутой единичной отрицательной обратной связью.



Передаточная функция системы с единичной отрицательной обратной связью имеет вид:

$$W_з(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{\frac{B}{A}}{1 + \frac{B}{A}} = \frac{\frac{B}{A}}{\frac{A + B}{A}} = \frac{B}{A + B}$$

$$W_з(s) = \frac{B}{A+B} = \frac{20 + (20+2T)s + 10T^2s^2}{Ts + (5T^2+2T)s^2 + 10T^2s^3 + 20 + (20+2T)s + 10T^2s^2} =$$

$$= \frac{20 + (20+2T)s + 10T^2s^2}{20 + (20+3T)s + (15T^2+2T)s^2 + 10T^2s^3}$$

Сверимся с результатами, полученными в Mathcad:

$$Wz(T,s) := \frac{W(T,s)}{1+W(T,s)} \,\Bigg|\, \begin{matrix} \text{simplify} \\ \text{collect}, s \end{matrix} \rightarrow \frac{10\cdot T^2\cdot s^2 + s\cdot(2\cdot T+20)+20}{10\cdot T^2\cdot s^3 + s^2\cdot\left(15\cdot T^2 + 2\cdot T\right) + s\cdot(3\cdot T+20)+20}$$

4.2 Метод Гурвица

Выделим в передаточной функции характеристический полином $\text{Cz(s)} = \text{Az(s)} = 20 + (20+3T)s + (15T^2+2T)s^2 + 10T^2s^3$

Матрица Гурвица для полинома третьего порядка:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} c_2 & c_0 & 0 \\ c_3 & c_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Для устойчивости системы должно выполняться условие: $(\text{sgn}(c_n))^i M_i > 0 \forall i = 1, n.$ То есть c_0, c_2 и c_3 должны быть одного знака и $M_2 > 0$.

Где M_i– миноры матрицы Гурвица:

- $M_1 = c_2$
- $M_2 = \begin{vmatrix} c_2 & c_0 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} = c_2c_1 - c_0c_3$
- $M_3 = \mid \Gamma \mid = c_0 M_2$

- Найдём второй минор матрицы

$M_2 = (15T^2+2T)(20+3T) - 20 * 10T^2 =$
$= 300T^2 + 45T^3 + 40\text{T} + 6T^2 - 200T^2 = 45T^3 + 106T^2 + 40T$

- Найдём значения T, при которых система устойчива.

Так как $c_0 > 0$, то c_2 и c_3 должны быть больше нуля.

$$\begin{cases} 15T^2 + 2T > 0 \\ 10T^2 > 0 \\ 45T^3 + 106T^2 + 40T > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T < -0.1333 \text{ или } T > 0 \\ T \neq 0 \\ -1.8837 < T < -0.4719 \text{ или } T > 0 \end{cases}$$

- Проверим граничные значения параметра

Найдем корни характеристического полинома при граничных значениях T с помощью Mathcad.

$$\begin{pmatrix} T3z \\ T2z \\ T1z \end{pmatrix} := M2z(p) \text{ solve}, p \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -0.47189421447695150974 \\ -1.8836613410786040458 \end{pmatrix}$$

❖При T1 полином имеет два мнимых корня, значит T1-колебательная граница устойчивости.

$$zz := \mathrm{polyroots}(Cz(T1z)) = \begin{pmatrix} -1.393824 \\ 0.635928i \\ -0.635928i \end{pmatrix}$$

❖При T2 полином имеет два мнимых корня, значит T2-колебательная граница устойчивости.

$$zz := \mathrm{polyroots}(Cz(T2z)) = \begin{pmatrix} -1.076176 \\ 2.888874i \\ -2.888874i \end{pmatrix}$$

❖При T3 полином имеет один действительный левый корень, значит при T3система устойчива.

$$zz := \mathrm{polyroots}(Cz(T3z)) = -1$$

По критерию Гурвица:

- ❖ *система неустойчива при $T < -1.8837$ или$-0.4719 < T < 0$*
- ❖ *система устойчива при $T \geq 0$ или $-1.8837 < T < -0.4719$*
- ❖ *КГУ -1,8837, -0,4719*

5 Нахождение числа правых корней разомкнутой системы методом Михайлова

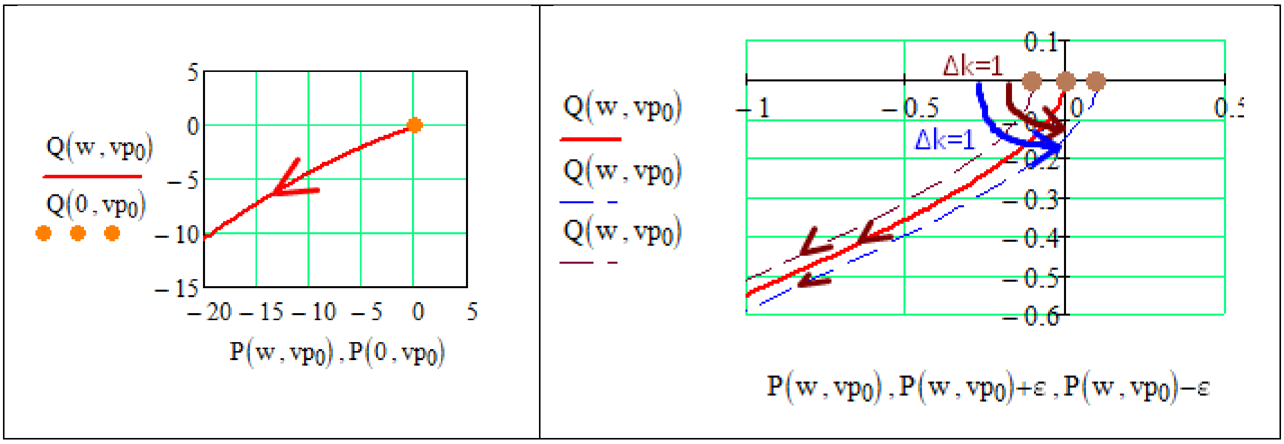
Характеристический полином $\mathrm{C(s)} = Ts + (5T^2 + 2T)s^2 + 10T^2 s^3$. Список значений параметра T={-10 , -1.884 , -1 , -0.2 , 1}.

$$vp := \mathrm{stack}(-10, -1.884, -1, -0.2, 1)$$

Поскольку c_0 характеристического полинома равен нулю, то при всех T годограф <u>выходит из начала координат</u>, значит, необходим дополнительный анализ условий нейтральности ХП.

Изменим коэффициент c0, который в ХП равен нулю. Это будет идентично сдвигу годографа вдоль вещественной оси в положительную и отрицательную стороны на малое расстояние.

❖ T=-10



- При смещении на **ε:**

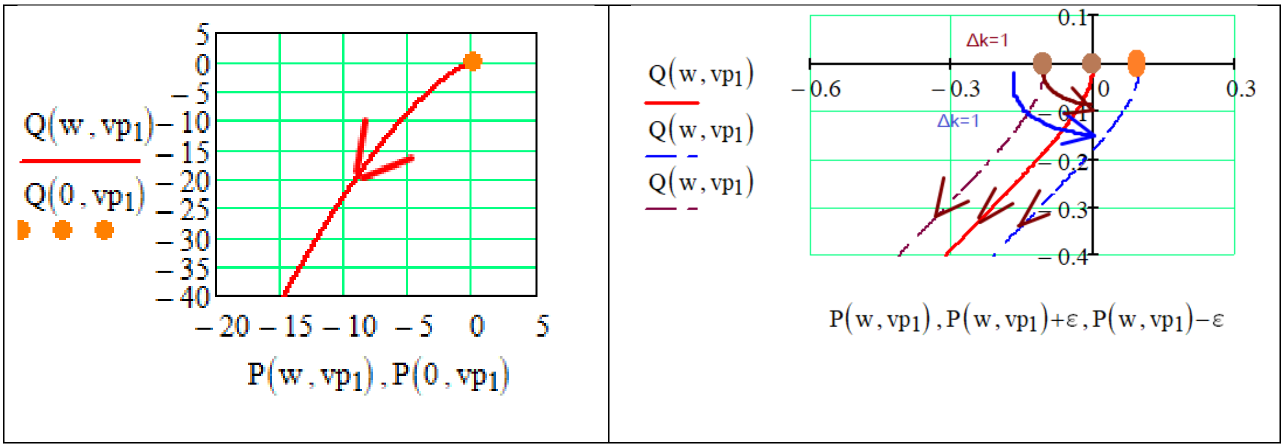
$$\Delta k = +1 \; n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

- При смещении на **-ε:**

$$\Delta k = +1 \; n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

Ситема неустойчива, есть один правый корень.

❖ T=-1.884



- При смещении на **ε:**

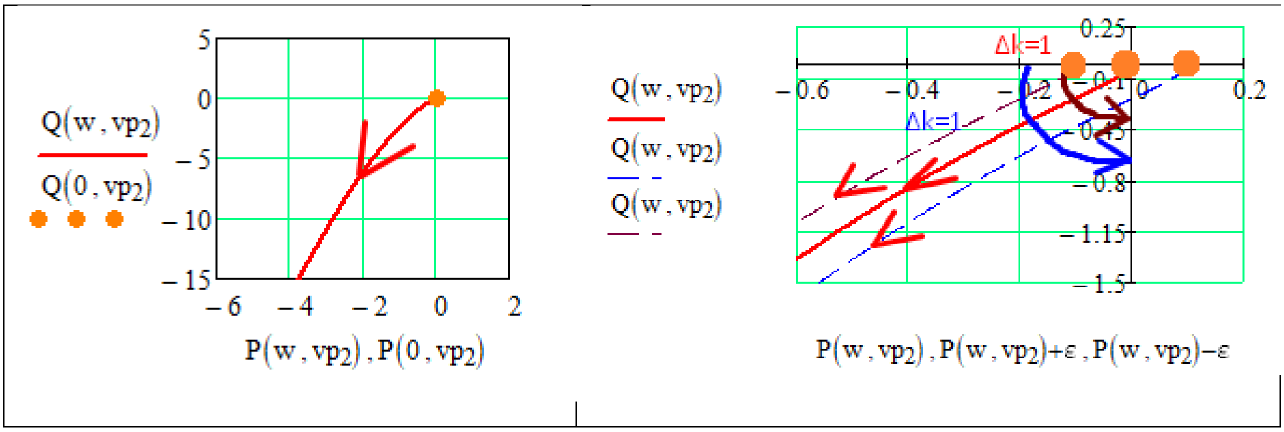
$$\Delta k = +1 \; n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

- При смещении на -ε:

$$\Delta k = +1 \; n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

Ситема неустойчива, есть один правый корень.

❖ T=-1



- При смещении на ε:

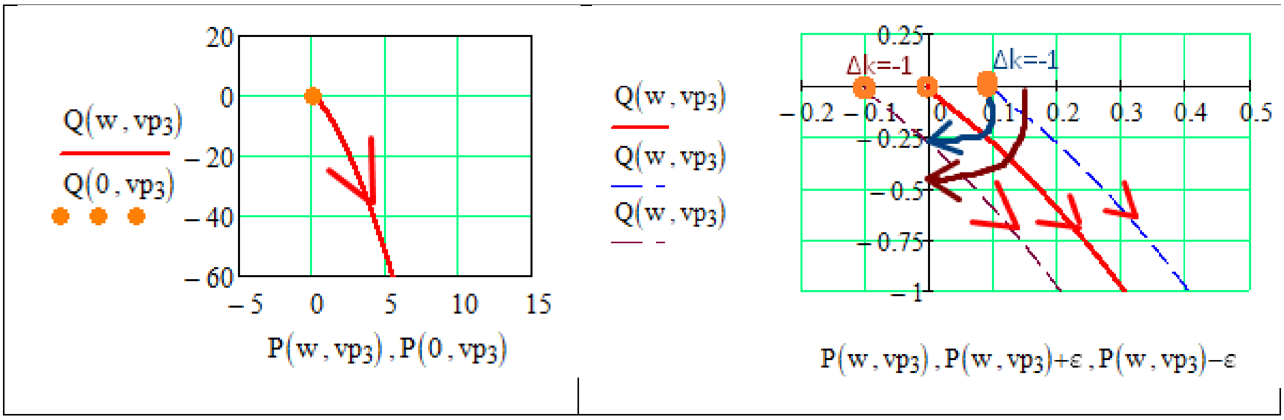
$$\Delta k = +1 \; n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

- При смещении на -ε:

$$\Delta k = +1 \; n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

Ситема неустойчива, есть один правый корень.

❖ T=-0.2



- При смещении на ε:

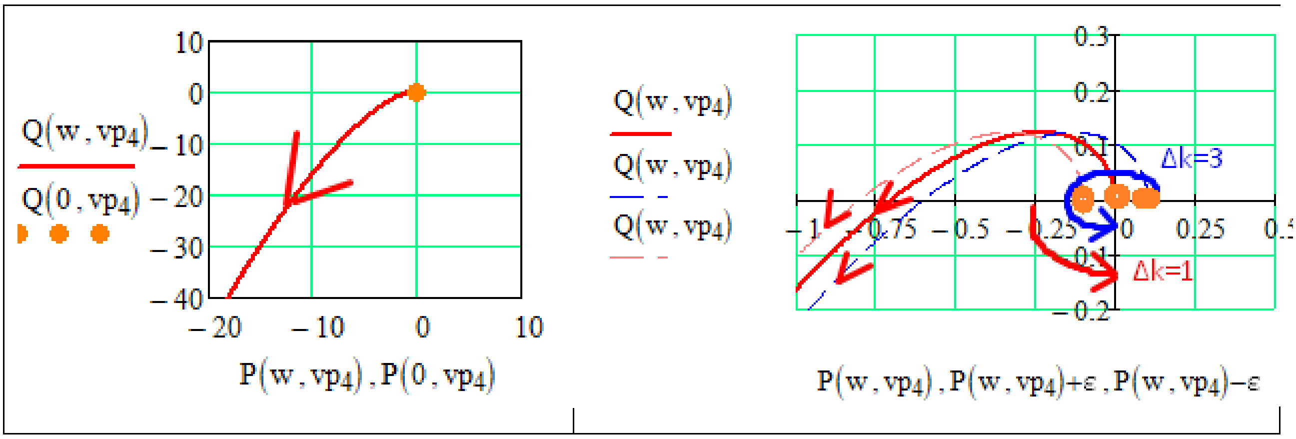
$$\Delta k = -1 \; n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

- При смещении на -ε:

$$\Delta k = -1 \; n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

Ситема неустойчива, есть два правых корня.

❖ T=1



- При смещении на **ε:**

$$\Delta k = +3 \; n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = \frac{3-3}{2} = 0$$

- При смещении на **-ε:**

$$\Delta k = +1 \; n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

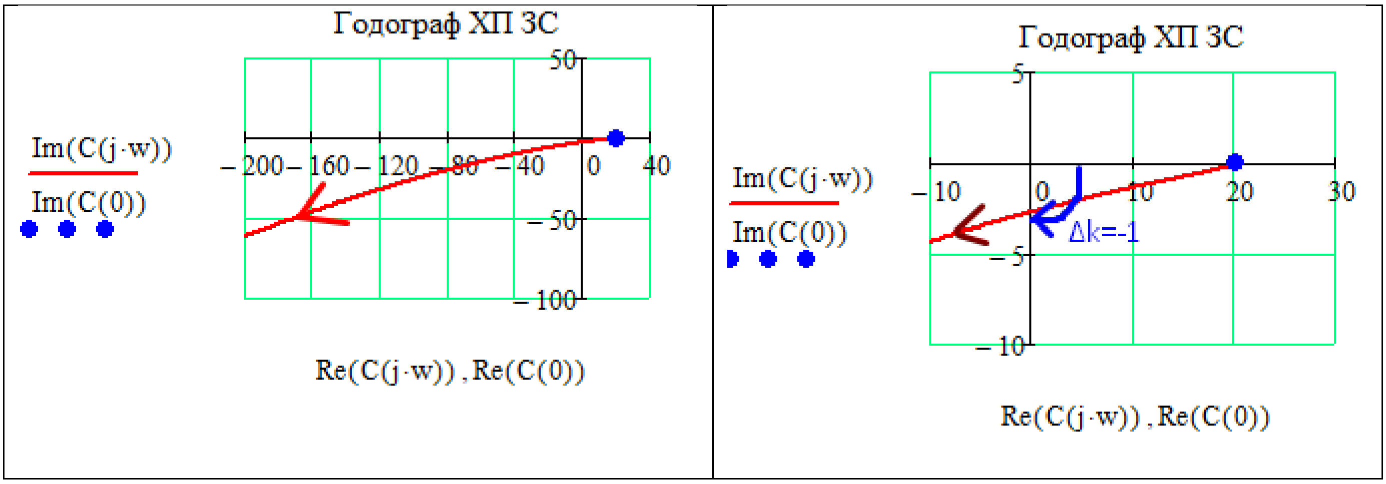
Ситема на АГУ. Есть один правый корень при смещении на ε, правых корней нет при смещении на –ε.

6 Исследование устойчивости замкнутой системы частотными методами

Для каждого значения параметра построить все необходимые частотные характеристики и исследовать устойчивость замкнутой системы по критериям Найквиста и Михайлова.

6.1 Критерий Михайлова

❖ T=-10



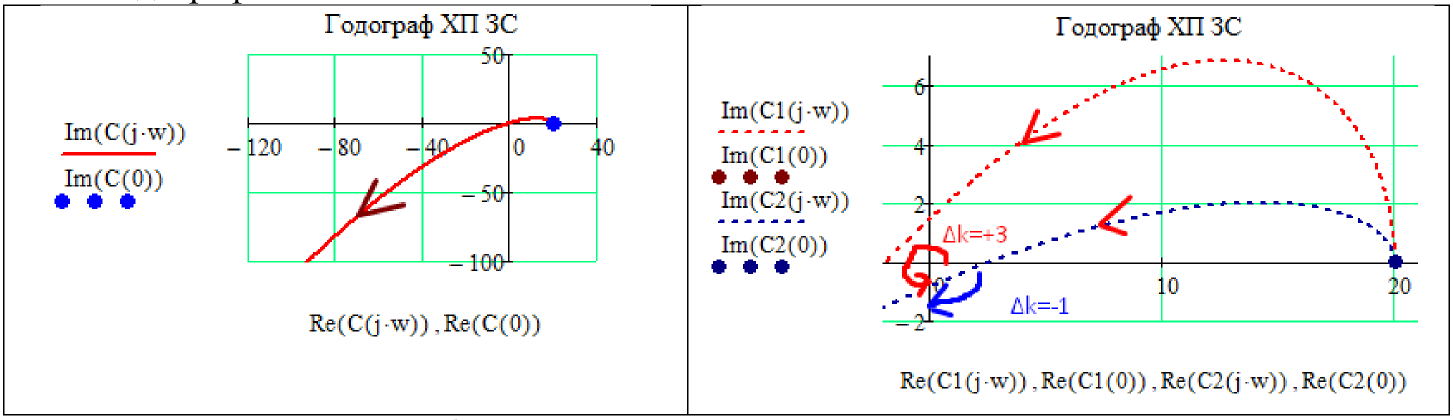
$$\Delta k = -1 \; n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

Система неустойчива, есть два правых корня.

$$C(s)\ \Big|\begin{matrix}\text{solve}, s\\ \text{float}, 6\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1.49563 \\ 0.00781355 + 0.115374i \\ 0.00781355 - 0.115374i \end{pmatrix}$$

❖ T=-1.884

По Критерию Гурвица было вычислено, что T ≈-1.8837 граница устойчивости. Годограф проходит через (0;0j). Построим два смещенных годографа.



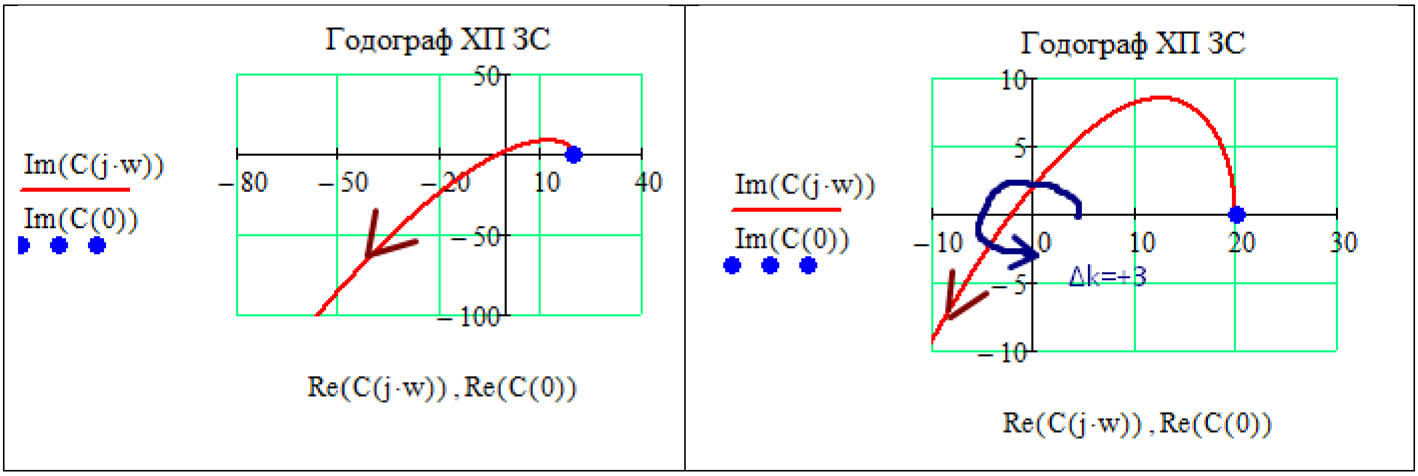
$$\Delta k1 = -1 \ n_{+} = \frac{n - \Delta k}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$\Delta k2 = 3 \ n_{+} = \frac{n - \Delta k}{2} = \frac{3-3}{2} = 0$$

<u>*Система на колебательной границе устойчивости.*</u>

$$C(s)\ \Big|\begin{matrix}\text{solve}, s\\ \text{float}, 6\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1.39386 \\ 0.00000685829 + 0.635807i \\ 0.00000685829 - 0.635807i \end{pmatrix}$$

❖ T=-1

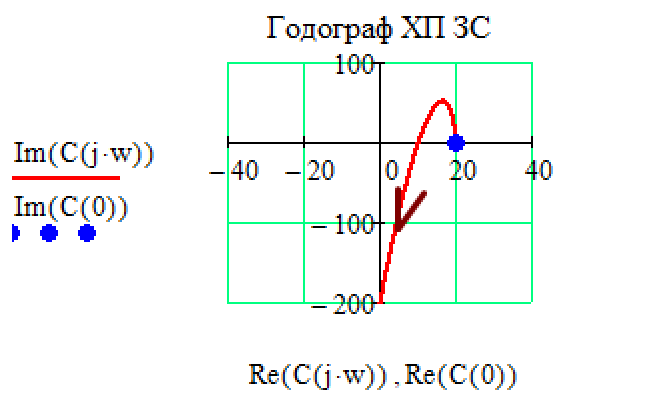


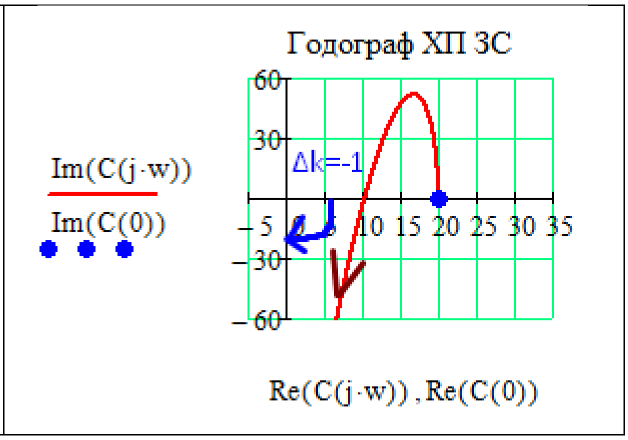
$$\Delta k = 3 \quad n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = \frac{3-3}{2} = 0$$

Система устойчива, правых корней нет.

$$C(s) \left| \begin{array}{l} \text{solve}, s \\ \text{float}, 6 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -1.23488 \\ -0.0325588 + 1.27221i \\ -0.0325588 - 1.27221i \end{pmatrix}$$

❖ T=-0.2



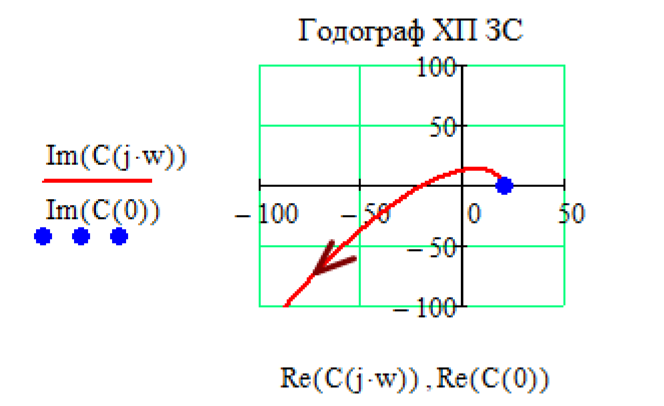


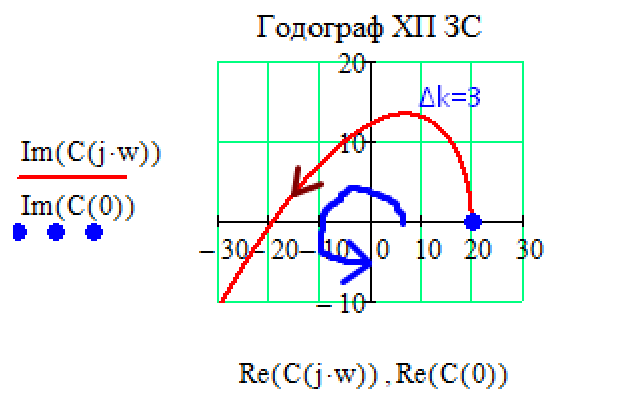
$$\Delta k = -1 \quad n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

Система неустойчива, есть два правых корня.

$$C(s) \left| \begin{array}{l} \text{solve}, s \\ \text{float}, 6 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -1.01978 \\ 0.259891 - 6.99732i \\ 0.259891 + 6.99732i \end{pmatrix}$$

❖ T=1





$$\Delta \mathrm{k} = 3 \; n_+ = \frac{n - \Delta \mathrm{k}}{2} = \frac{3-3}{2} = 0$$

Система устойчива, правых корней нет.

$$C(s) \;\Big|\begin{matrix} \text{solve}, s \\ \text{float}, 6 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1.18406 \\ -0.257968 + 1.27379i \\ -0.257968 - 1.27379i \end{pmatrix}$$

6.2 Критерий Найквиста

Для устойчивости замкнутой системы сумма всех переходов годографом W(jω), не проходящим через точку Найквиста N=(-1;0j), действительной оси левее N должна быть равна $n_+/2$.

Если годограф начинается в точке Найквиста или проходит через неё, то возникает претензия на апериодическую или границу устойчивости ЗС.

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W(s) = \frac{20 + (20 + 2T)s + 10T^2 s^2}{Ts + (5T^2 + 2T)s^2 + 10T^2 s^3}$$

Годограф ПФ РС заканчивается в точке (0;0), поскольку степень полинома числителя больше степени полинома знаменателя – на частоте, стремящейся к бесконечности, годограф будет проходить через точку (0;0).

Поэтому к годографу ПФ РС построить «пунктирное дополнение» дуги окружности для определения охвата годографом точки Найквиста.

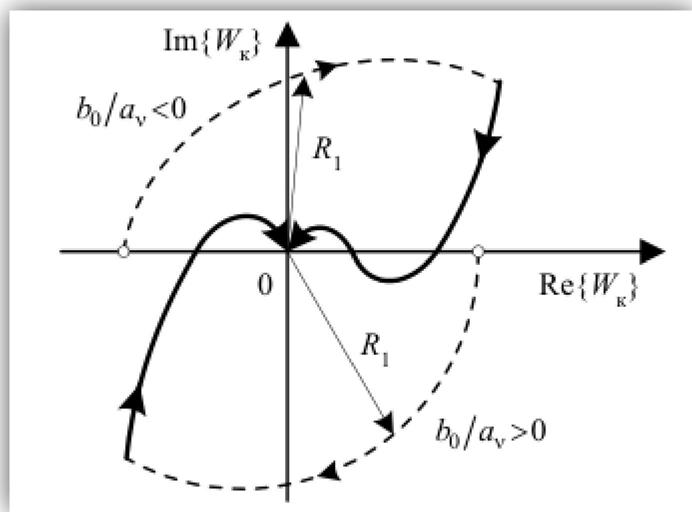


Рис 44.

❖ T=-10

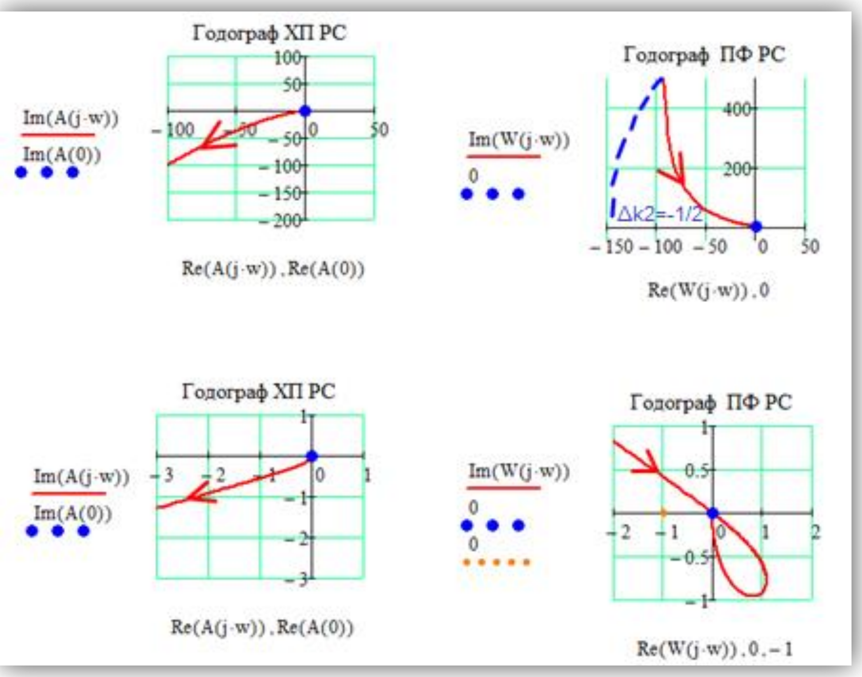


Рис 45.

Пересечения годографа ПФ РС с осью абсцисс левее точки Найквиста нет. Это означает, что $\Delta k_1 = 0$. Пунктирное дополнение даёт $\Delta k_2 = -\frac{1}{2}$. $\Delta k = \Delta k_1 + \Delta k_2 = -\frac{1}{2}$. Количество положительных корней ХП РС по Михайлову $n_+ = 1$.

$\Delta k \neq \frac{n_+}{2}$, значит *ЗС неустойчива*.

❖ T=-1.884

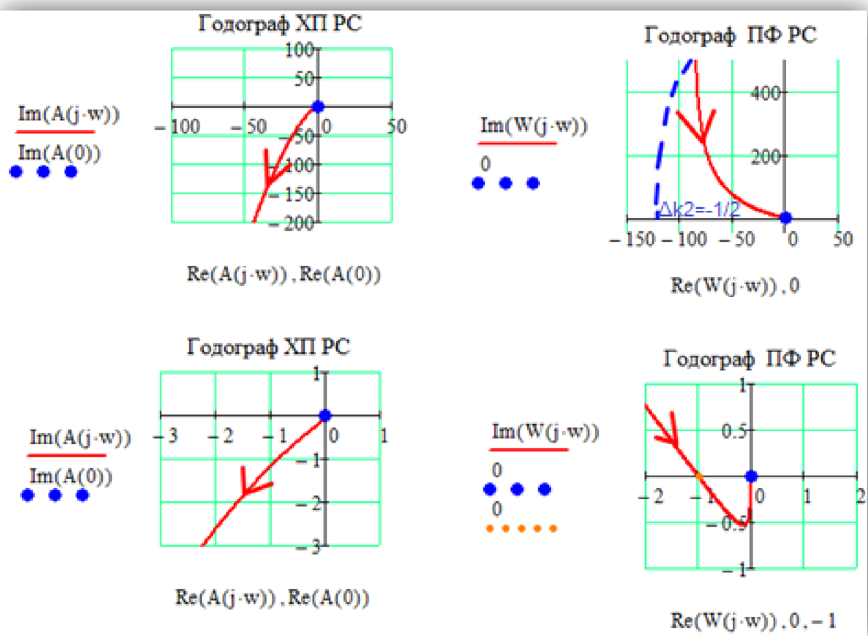


Рис 46.

Годограф проходит через точку Найквиста. ЗС может находиться на границе устойчивости. Построим два смещенных годографа.

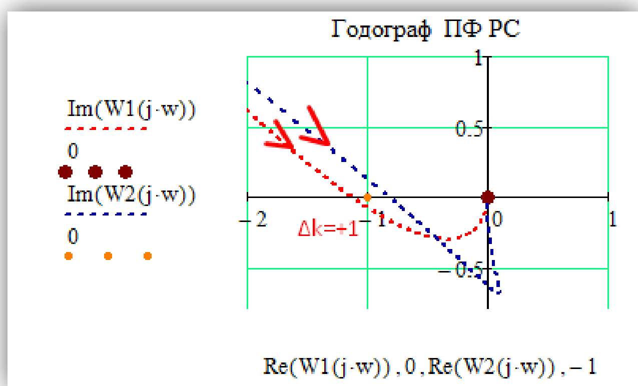


Рис 47.

Годограф, смещенный на + ε, проходит левее точки Найквиста 1 раз сверху вниз, значит $\Delta k_{1(+\,\varepsilon)} = 1$. Годограф, смещенный на – ε, не проходит левее точки Найквиста, значит $\Delta k_{1(-\,\varepsilon)} = 0$. Пунктирное дополнение даёт $\Delta k_2 = -\frac{1}{2}$.

$$\Delta k_{(+\,\varepsilon)} = \Delta k_{1(+\,\varepsilon)} + \Delta k_2 = \frac{1}{2} \qquad \Delta k_{(-\,\varepsilon)} = \Delta k_{1(-\,\varepsilon)} + \Delta k_2 = -\frac{1}{2}$$

Количество положительных корней ХП РС по Михайлову $n_+ = 1$.

$\Delta k_{(+\,\varepsilon)} = \frac{n_+}{2}$, значит ЗС при смещении на + ε устойчива.

$\Delta k_{(-\,\varepsilon)} \neq \frac{n_+}{2}$, значит ЗС при смещении на - ε неустойчива.

При T=-1.884 ЗС находится на границе устойчивости.

- T=-1

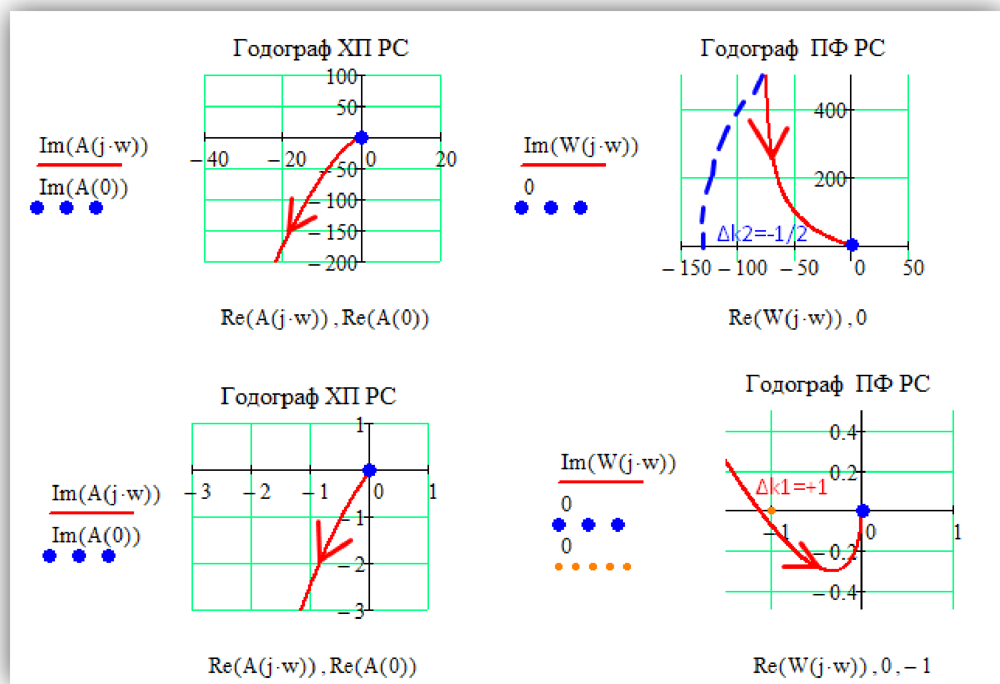


Рис 48.

$\Delta k_1 = 1 \quad \Delta k_2 = -\frac{1}{2} \qquad \Delta k = \Delta k_1 + \Delta k_2 = \frac{1}{2}.$

Количество положительных корней ХП РС по Михайлову $n_+ = 1$.

$\Delta k = \dfrac{n_+}{2}$

<u>При T=-1 ЗС устойчива.</u>

- T=-0.2

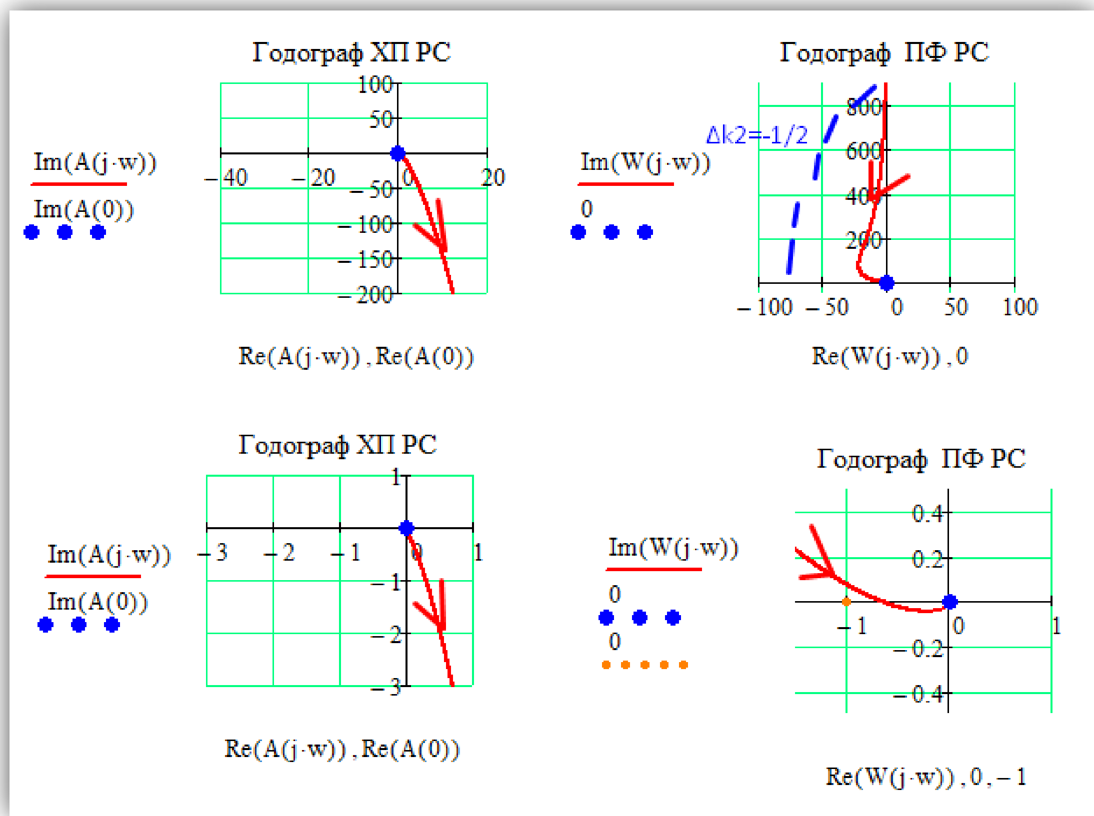


Рис 49.

$\Delta k_1 = 0 \quad \Delta k_2 = -\frac{1}{2} \qquad \Delta k = \Delta k_1 + \Delta k_2 = -\frac{1}{2}.$

Количество положительных корней ХП РС по Михайлову $n_+ = 2$.

$\Delta k \neq \dfrac{n_+}{2}$

<u>При T=-0.2 ЗС неустойчива.</u>

❖ T=1

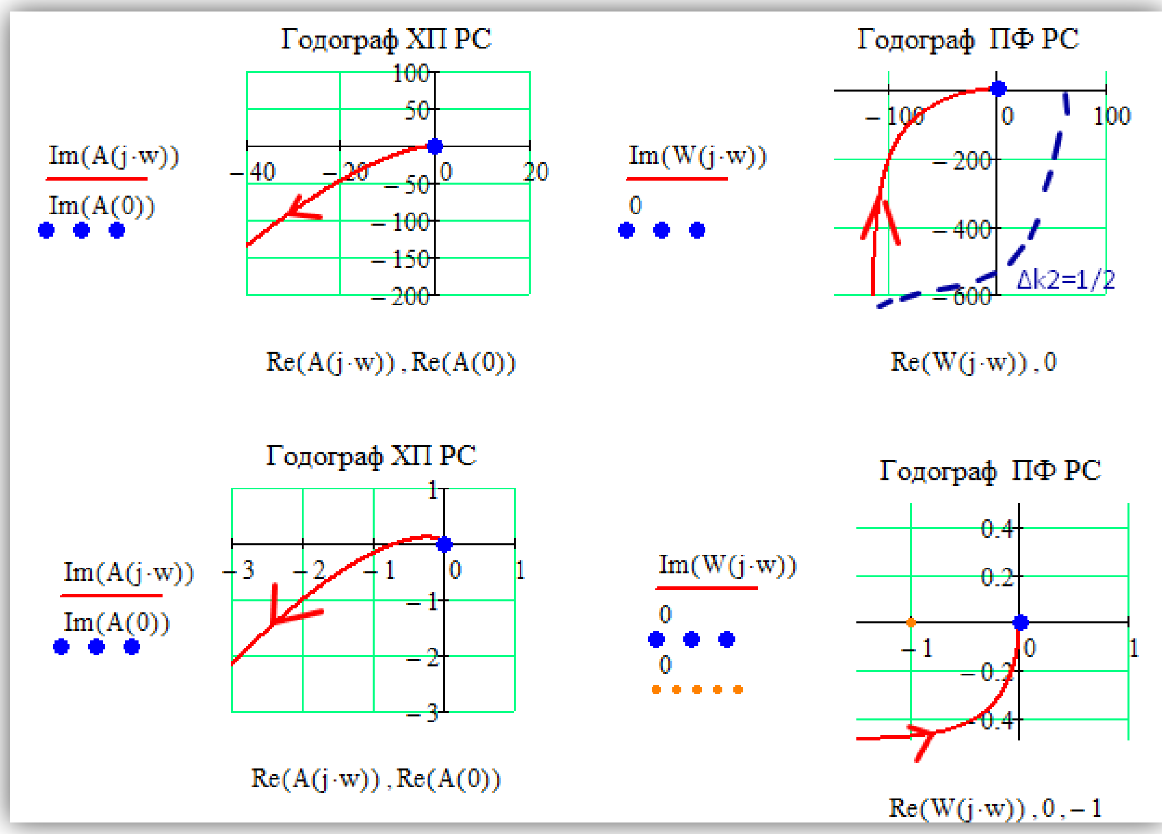


Рис 50.

$\Delta k_1 = 0 \quad \Delta k_2 = \frac{1}{2} \qquad \Delta k = \Delta k_1 + \Delta k_2 = \frac{1}{2}.$

При T=1 РС находится на АГУ. При смещении на +ε количество положительных корней ХП РС по Михайлову $n_+ = 0$, при смещении на -ε количество положительных корней ХП РС по Михайлову $n_+ = 1$.

$\Delta k = \frac{n_+}{2}$ при смещении годографа ХП РС на –ε.

<u>При T=1 ЗС устойчива.</u>

6.3 Логарифмический критерий устойчивости Найквиста

Логарифмический критерий устойчивости Найквиста формулируется следующим образом: для устойчивости замкнутой системы с контурной передаточной функцией Wк(s), имеющей n+ правых полюсов, необходимо и достаточно, чтобы на интервалах частот, где $L_k(\omega) > 0$, число пересечений характеристикой $\Phi_k(\omega) > 0$ граничных уровней фазы $\varphi_{гр} = 180° \pm 360°$ составляло в сумме $\frac{n_+}{2}$.

Построим ЛАЧХ и ЛФЧХ ПФ РС. Также разложим ПФ на типовые звенья

❖ T=-10

$$W(s) \rightarrow \frac{1000 \cdot s^2 + 20}{1000 \cdot s^3 + 480 \cdot s^2 - 10 \cdot s} \qquad z := B(s) \begin{vmatrix} \text{solve}, s \\ \text{float}, 6 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.141421i \\ -0.141421i \end{pmatrix} \qquad p := A(s) \begin{vmatrix} \text{solve}, s \\ \text{float}, 6 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 0.02 \end{pmatrix}$$

$$W1(s) := 20 \qquad W3(s) := \left(1 - \frac{s}{z_0}\right) \cdot \left(1 - \frac{s}{z_1}\right) \text{simplify} \rightarrow 50.000251898769053403 \cdot s^2 + 1.0$$

$$W4(s) := (-10s)^{-1} \qquad W5(s) := \left(1 - \frac{s}{p_1}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{s}{p_2}\right)^{-1} \text{simplify} \rightarrow -\frac{0.01}{(s - 0.02) \cdot (s + 0.5)}$$

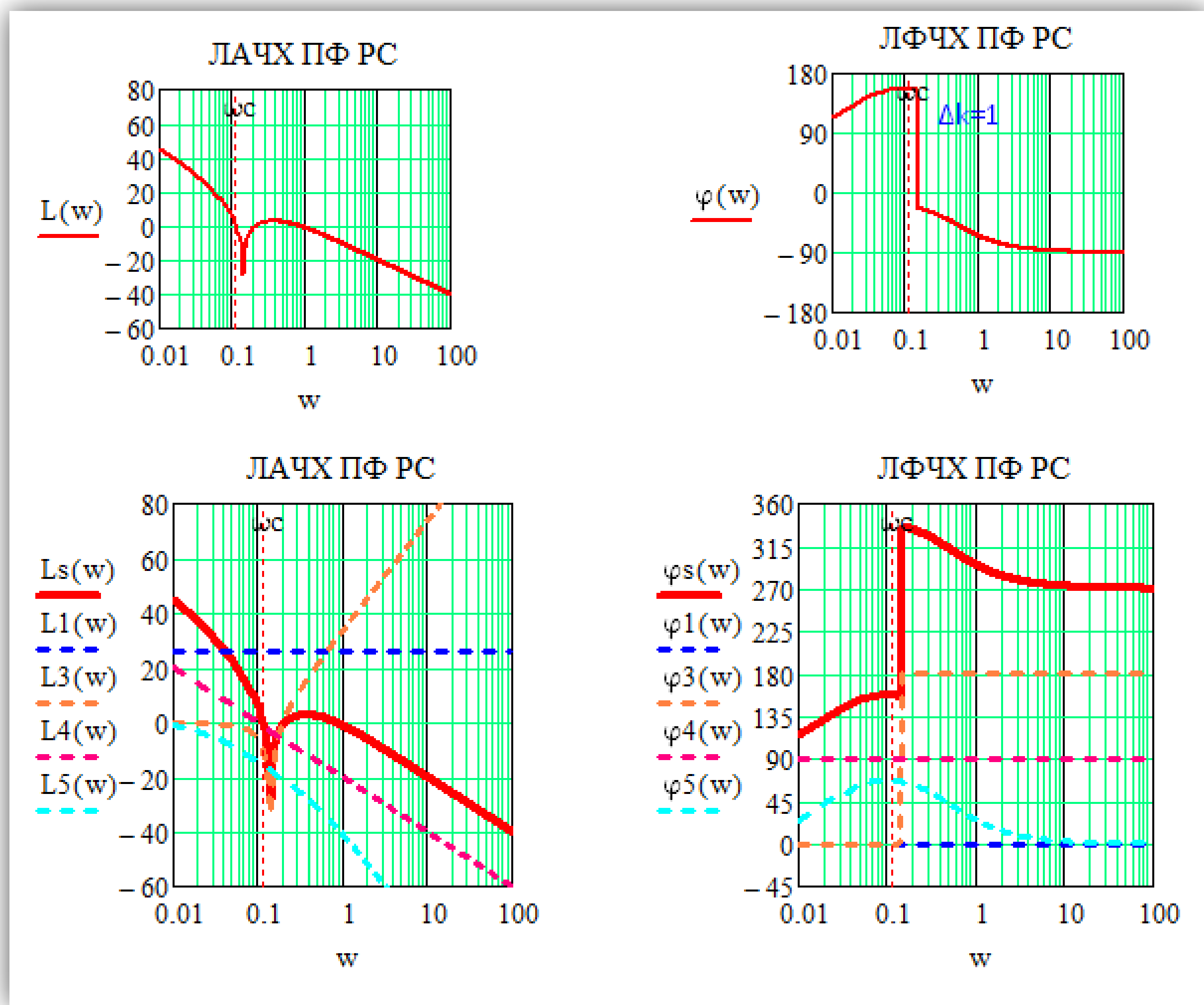


Рис 51.

ЛФЧХ ПФ РС один раз пересекает граничный уровень фазы в положительном направлении, значит $\Delta k = 1$. Количество положительных корней ХП РС по Михайлову равно $n_+ = 1$

$\Delta k \neq \frac{n_+}{2}$, значит <u>*ЗС неустойчива.*</u>

❖ T=-1.884

$$W(s) \rightarrow \frac{35.49456 \cdot s^2 + 16.232 \cdot s + 20}{-1.884 \cdot s + 35.49456 \cdot s^3 + 13.97928 \cdot s^2} \;\Bigg|\; \begin{matrix} \text{solve}, s \\ \text{float}, 6 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -0.228655 - 0.71497\cdot \\ -0.228655 + 0.71497\cdot \end{pmatrix} \quad p := A(s) \;\Bigg|\; \begin{matrix} \text{solve}, s \\ \text{float}, 6 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 0.106157 \end{pmatrix}$$

$$W1(s) := 20 \qquad W3(s) := \left(1 - \frac{s}{z_0}\right) \cdot \left(1 - \frac{s}{z_1}\right) \text{ simplify } \rightarrow 1.7747279594721234013 \cdot s^2 + 0.81160084314619675263 \cdot s + 1.0$$

$$W4(s) := (-s)^{-1} \qquad W5(s) := \left(1 - \frac{s}{p_1}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{s}{p_2}\right)^{-1} \text{ simplify } \rightarrow -\frac{0.0530785}{(s - 0.106157) \cdot (s + 0.5)}$$

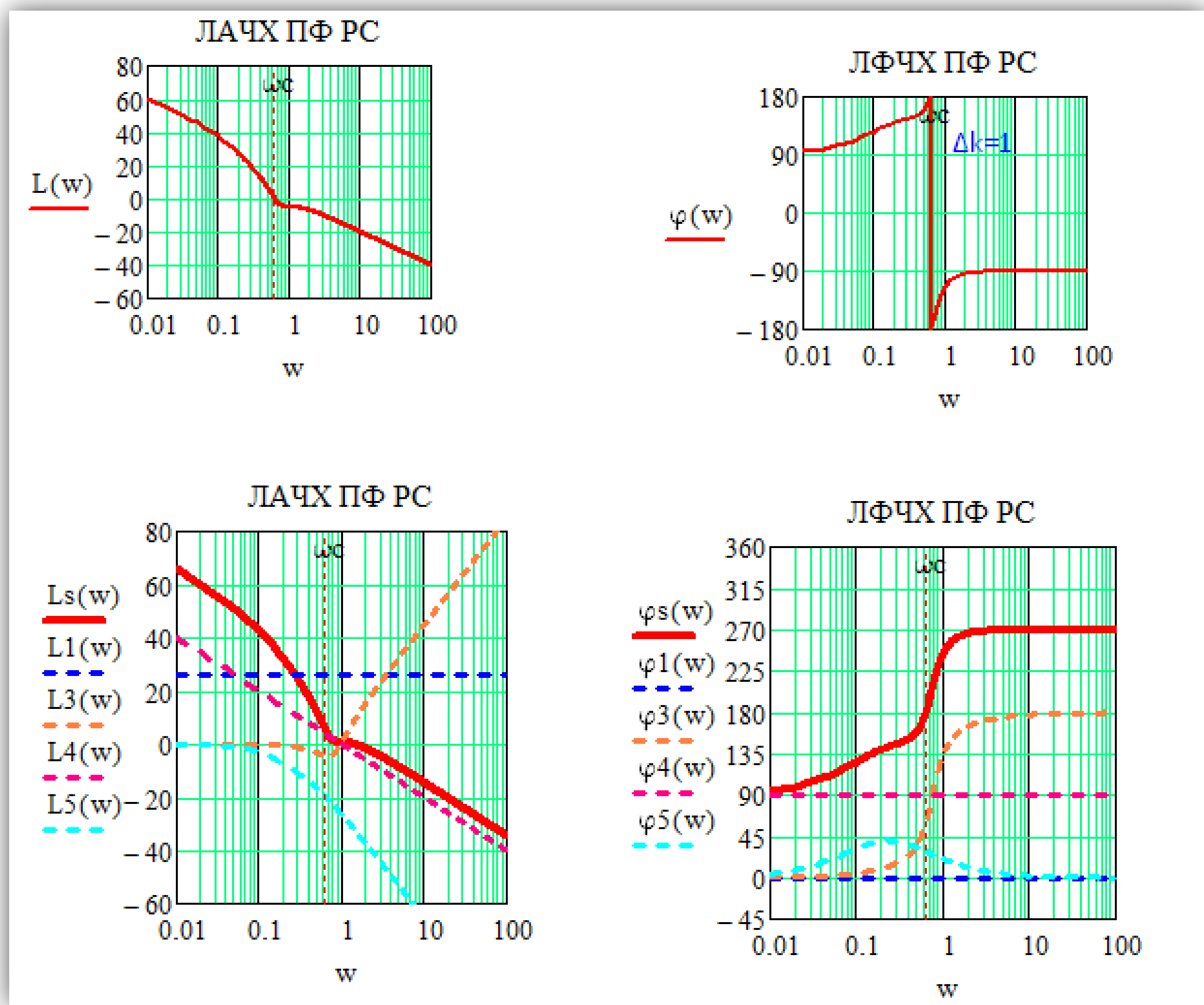


Рис 52.

ЛФЧХ ПФ РС один раз пересекает граничный уровень фазы в положительном направлении, значит $\Delta k = 1$. Количество положительных корней ХП РС по Михайлову равно $n_+ = 1$.

$\Delta k \neq \frac{n_+}{2}$, значит *ЗС неустойчива.*

❖ T=1

$$W(s) \rightarrow \frac{10 \cdot s^2 + 22 \cdot s + 20}{10 \cdot s^3 + 7 \cdot s^2 + s} \qquad z := B(s) \left|\begin{matrix}\text{solve}, s \\ \text{float}, 6\end{matrix}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} -1.1 + 0.888819i \\ -1.1 - 0.888819i \end{pmatrix} \qquad p := A(s) \left|\begin{matrix}\text{solve}, s \\ \text{float}, 6\end{matrix}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \\ -0.2 \end{pmatrix}$$

$$W1(s) := 20 \qquad W3(s) := \left(1 - \frac{s}{z_0}\right) \cdot \left(1 - \frac{s}{z_1}\right) \text{ simplify } \rightarrow 0.50000019630982707507 \cdot s^2 + 1.1000004318816195651 \cdot s + 1.0$$

$$W4(s) := (s)^{-1} \qquad W5(s) := \left(1 - \frac{s}{p1}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{s}{p2}\right)^{-1} \text{ simplify } \rightarrow \frac{1}{10.0 \cdot s^2 + 7.0 \cdot s + 1.0}$$

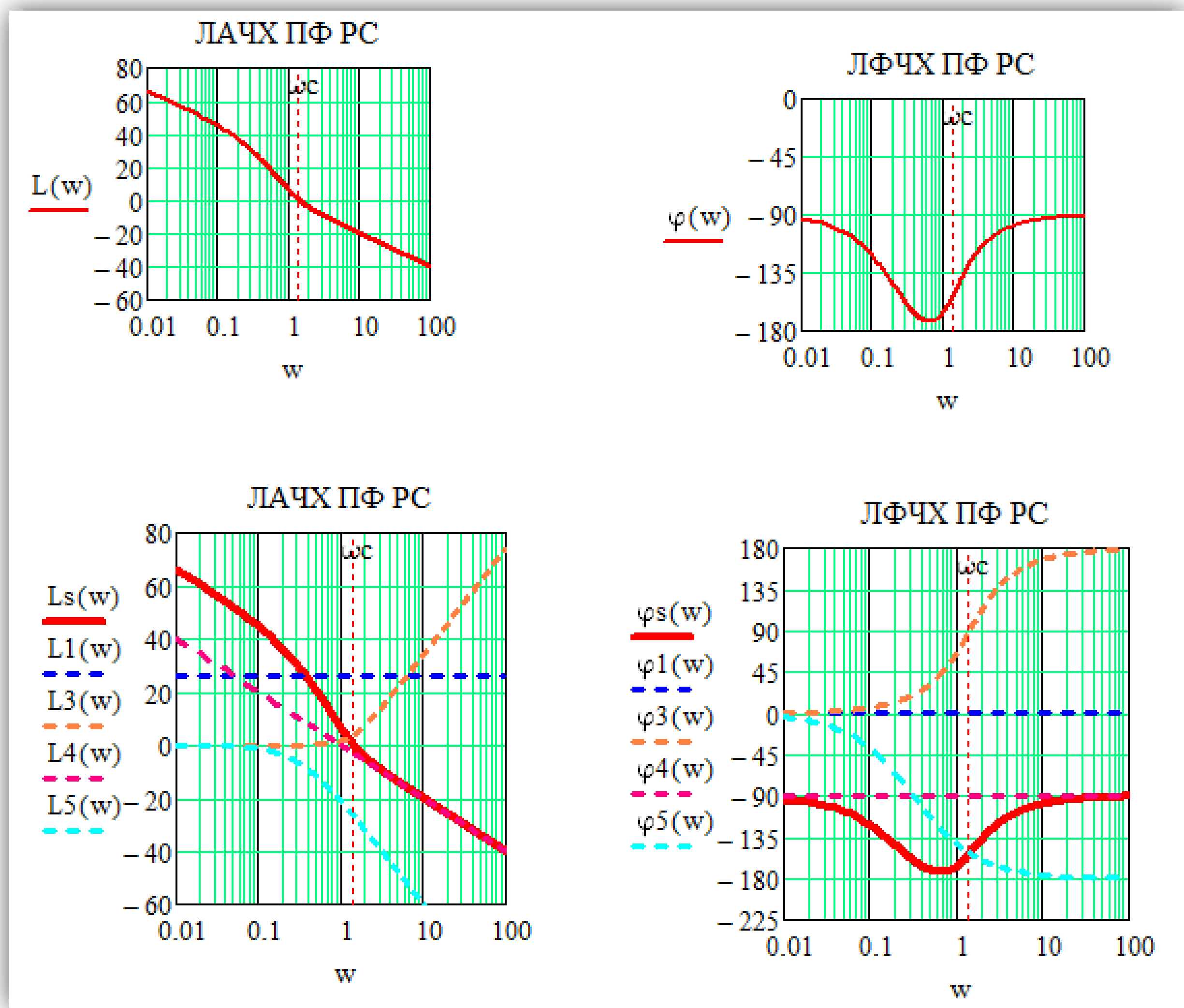


Рис 53.

ЛФЧХ ПФ РС не пересекает граничные уровни фазы, значит $\Delta k = 0$. РС при T=1 находится на АГУ. Количество положительных корней ХП РС по Михайлову при смещении на – ε равно $n_+ = 0$

$\Delta k = \frac{n_+}{2}$, значит <u>*ЗС устойчива.*</u>

7 Исследование свойств разомкнутой системы

Для данного преподавателем параметра построить и исследовать каноническую схему моделирования системы на ОУ в программе Electronics WorkBench.

7.1 Описание метода канонических схем

Метод канонических схем основан на построении вспомогательной схемы с передаточной функцией:

$$W_v(s) = \frac{1}{A(s)} = \frac{V(s)}{X(s)}$$

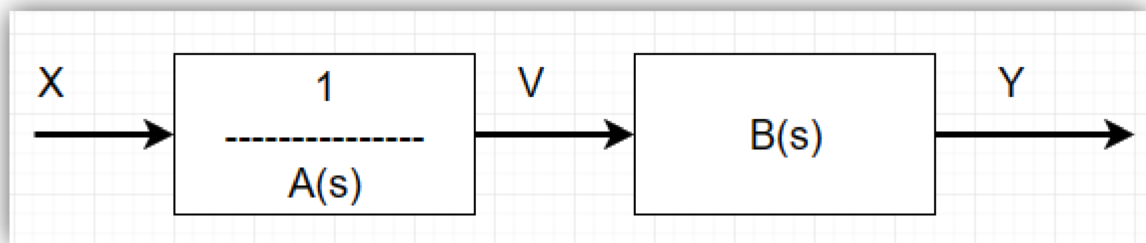
Выход v(t) данной системы, удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$v^{(n)} = \frac{1}{a_n}x - \frac{a_{n-1}}{a_n}v^{(n-1)} - \ldots - \frac{a_1}{a_n}v' - \frac{a_0}{a_n}v\,.$$

Соединив последовательно данную схему со схемой, обладающей передаточной функцией:

$$W(s) = B(s)$$

Получим схему:



Данный метод позволяет избавиться от недостатков методов параллельных каскадов, и последовательных каскадов:

- ❖ Возможность появления каскадов с дифференцирующими свойствами, признаком чего служит наличие оператора s в числителе передаточной функции. Это весьма нежелательно в многокаскадных схемах, т. к. даже самый слабый высокочастотный шум $A * sin(\omega t)$, пройдя через цепочку из N дифференцирующих каскадов, многократно увеличит свою амплитуду $A * \omega * N$ пропорционально N-й степени частоты и заглушит полезную низкочастотную составляющую выходного сигнала.
- ❖ Необходимость вычисления корней полинома для получения разложений.
- ❖ Разнотипность каскадов.
- ❖ Нерегулярная структура полученной схемы.
- ❖ Трудоемкий расчет номиналов радиоэлементов принципиальной схемы.

7.2 Синтез схемы

$$W(s) = \frac{y}{x} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3}$$
$$W_v(s) = \frac{1}{A(s)} = \frac{V(s)}{X(s)}$$
$$y = B(s) * v = b_0 + b_1 v' + b_2 v''$$

$$W(s) = \frac{20 + 22s + 10s^2}{s + 7s^2 + 10s^3} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3}$$
$$W_v(s) = \frac{1}{s + 7s^2 + 10s^3} = \frac{V(s)}{X(s)}$$
$$v'(t) + 7v''(t) + 10v'''(t) = x(t)$$
$$\underline{v'''(t) = 0.1x(t) - 0.7v''(t) - 0.1v'(t)}$$
$$\underline{y(t) = 20v(t) + 22v'(t) + 10v''(t)}$$

Составим схему на инвертирующих интеграторах, тогда

$$v'''(t) = 0.1x(t) + 0.7 * (-v''(t)) - 0.1v'(t)$$
$$y(t) = -20 * (-v(t)) + 22v'(t) - 10 * (-v''(t))$$

Получим схему:

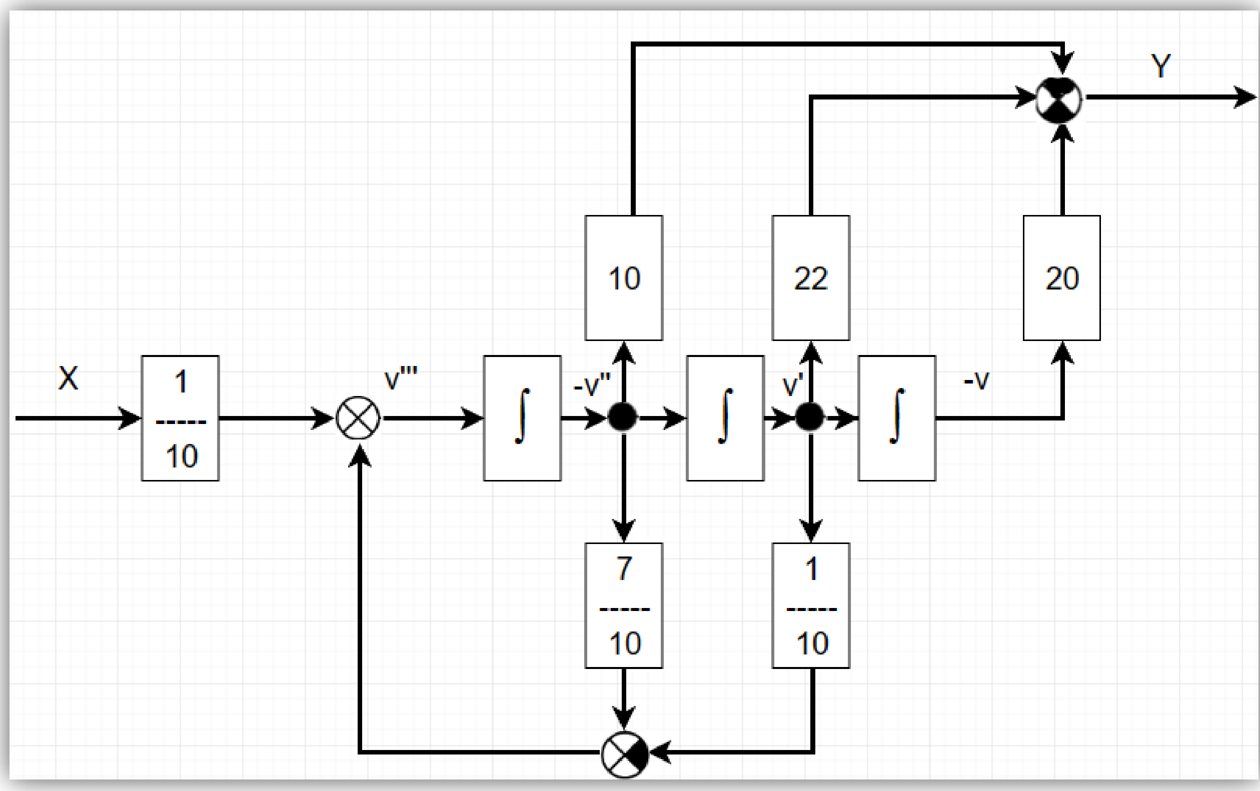


Рис 54.

<u>Входной сумматор:</u>

$$v'''(t) = 0.1x(t) + 0.7 * (-v''(t)) - 0.1v'(t)$$

Суммы коэффициентов усиления прибавляемых и вычитаемых сигналов в формуле $v'''(t)$ составляют $S_1 = 0.1 + 0.7 = 0.8$ $S_2 = 0.1$.

Для обеспечения баланса $S_1 = S_2 + 1$ нужно к прямому входу ОУ подключить нулевой (заземлённый) сигнал с коэффициентом усиления $K_{10} = S_2 + 1 - S_1 = 0.3$.

Номиналы резисторов, проводящих сигналы, должны удовлетворять соотношениям

$$0.1R_x = 0.7R_{-v''} = 0.3R_{10}$$
$$0.1R_{v'} = R_0$$

По которым подбираем целочисленные R∈ [1 кОм, 10 МОм]:

$$R_x = 21 \text{ КОм} \quad R_{-v''} = 3\text{КОм} \quad R_{10} = 7\text{КОм}$$
$$R_{v'} = 10\text{КОм} \quad R_0 = 1\text{КОм}$$

Схема входного сумматора:

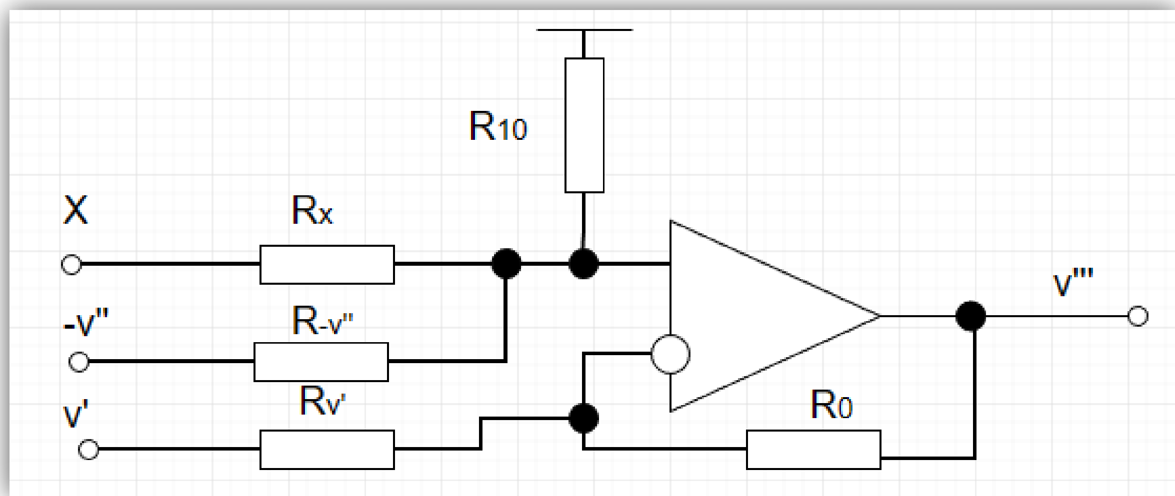


Рис 55.

Выходной сумматор:

$$y(t) = -20 * (-v(t)) + 22v'(t) - 10 * (-v''(t))$$

Суммы коэффициентов усиления прибавляемых и вычитаемых сигналов в формуле $y(t)$ составляют $S_1 = 22$ $S_2 = 20 + 10$.

Для обеспечения баланса $S_1 = S_2 + 1$ нужно к прямому входу ОУ подключить нулевой (заземлённый) сигнал с коэффициентом усиления $K_{10} = S_2 + 1 - S_1 = 9$

Номиналы резисторов, проводящих сигналы, должны удовлетворять соотношениям

$$22R_{v'} = 9R_{10}$$
$$20R_{-v} = 10R_{-v''} = R_0$$

По которым подбираем целочисленные R∈ [1 кОм, 10 МОм]:

$$R_{v'} = 9\text{КОм} \quad R_{10} = 22\text{КОм}$$
$$R_{-v} = 1 \text{ КОм} \quad R_{-v''} = 2\text{КОм} \quad R_0 = 20\text{КОм}$$

Схема выходного сумматора:

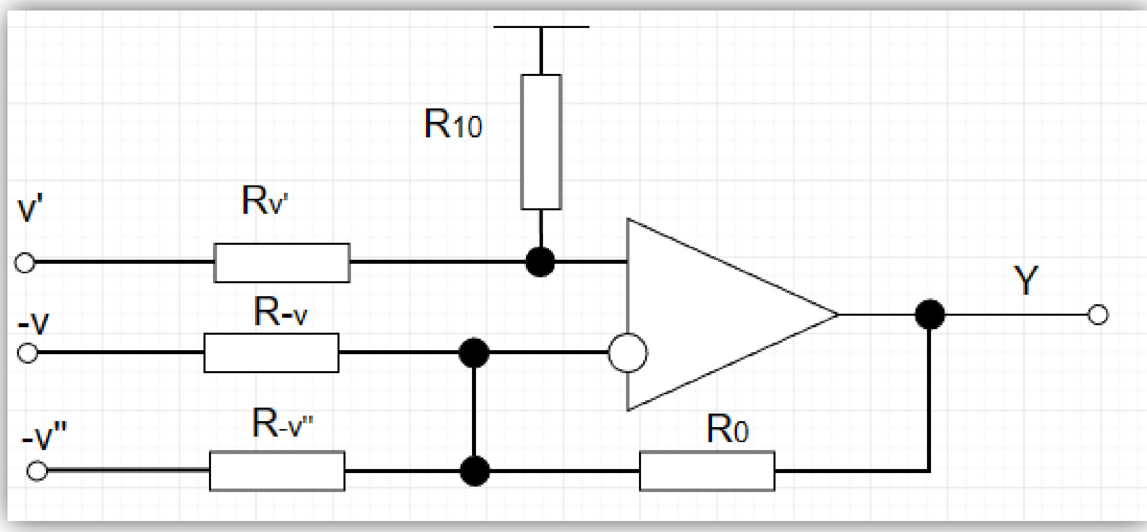


Рис 56.

Схема инвертирующего интегратора на операционном усилителе:

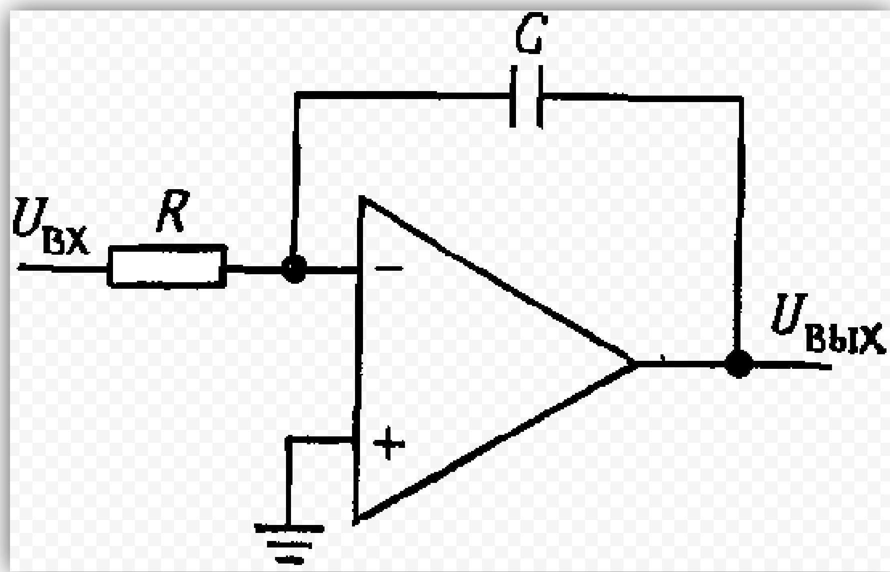


Рис 57.

$$U_{\text{вых}} = -\frac{1}{RC}\int U_{\text{вх}}dt$$

Поскольку нам нужен интегратор с коэффициентом -1, возьмем $\text{С} = 1\text{мкФ}, R = 1\text{МОм}$.

Итоговая схема:

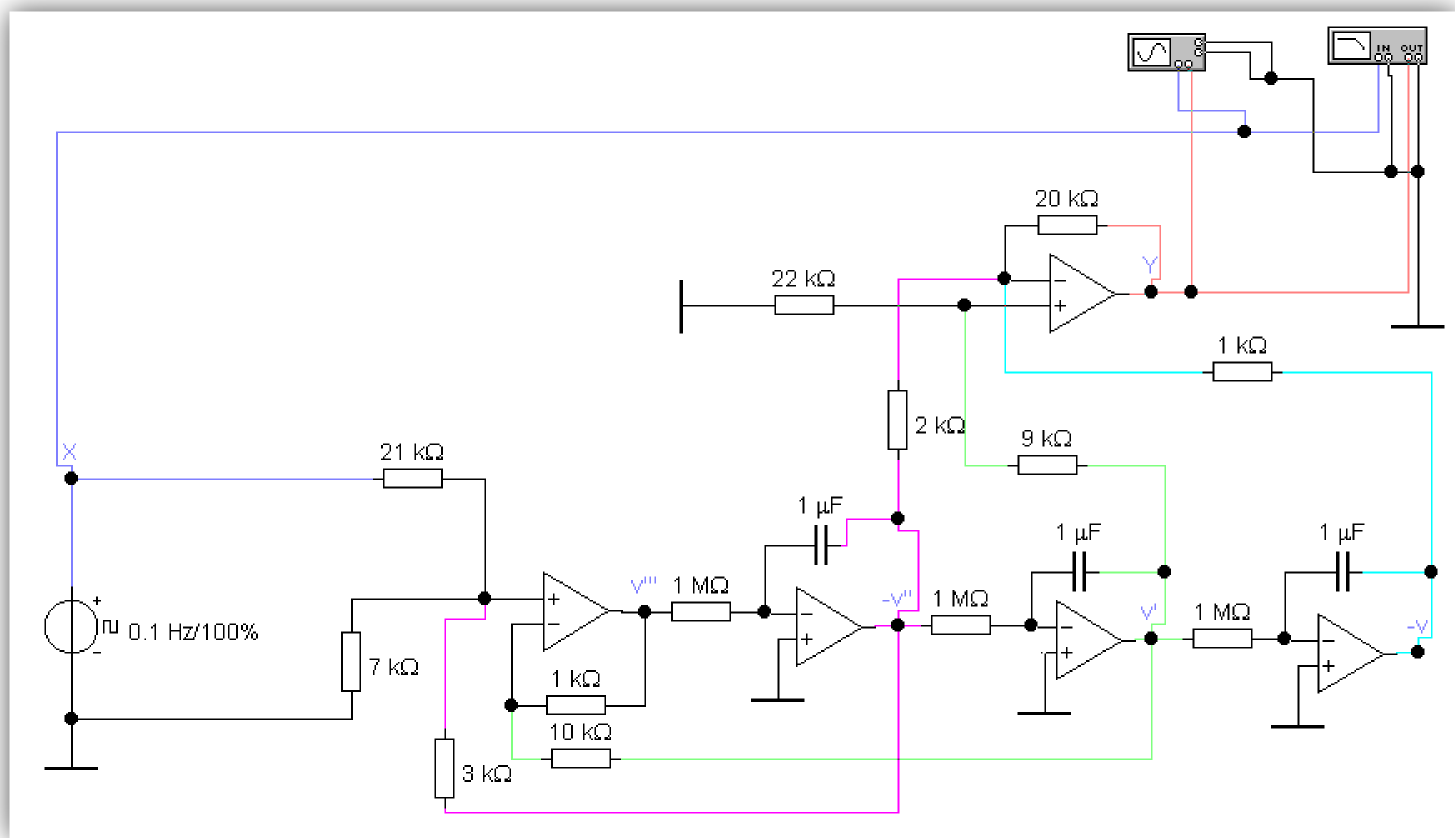


Рис 58.

7.3 Анализ характеристик системы

Для анализа ЛАЧХ и ЛФЧХ к выходу схемы подключен Bode Plotter, а на входе подключен генератор, который формирует в начальный момент времени перепад с 0 до 1 В.

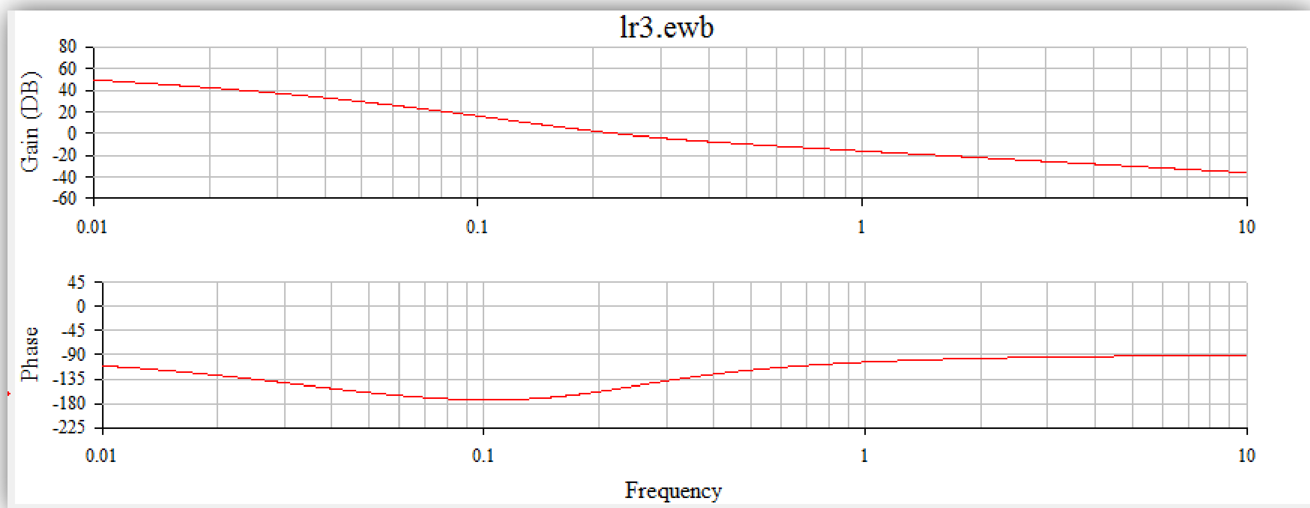


Рис 59.

Сравним полученные графики с графиками, построенными в Mathcad в 6 пункте курсовой работы.

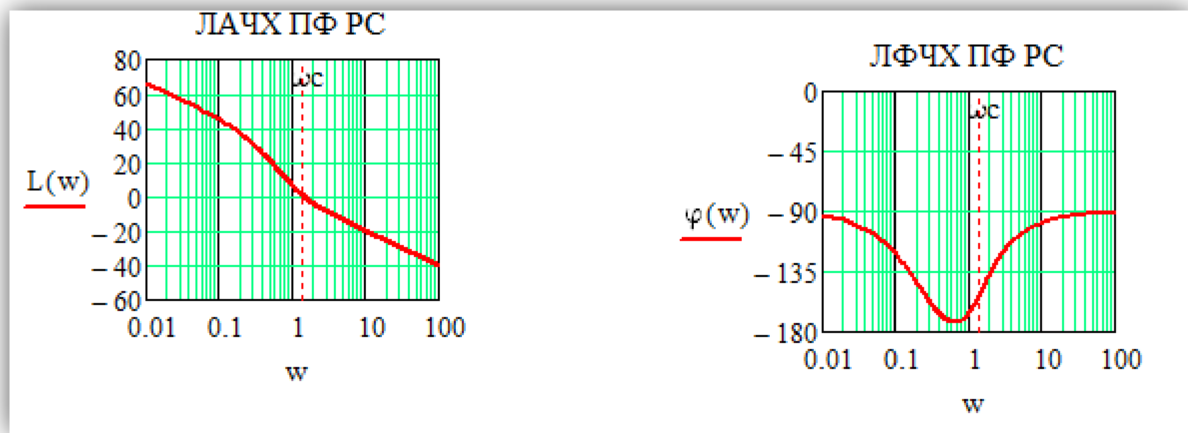


Рис 60.

График ЛАЧХ, построенный в Mathcad, равен нулю ДБ при $\omega = 1{,}44\,\frac{\text{рад}}{c} \approx 0.23$ ГЦ, построенный в WorkBench - при $\omega = 0.229$ ГЦ.

График ЛФЧХ, построенный в Mathcad, принимает наименьшее значение = -173° при $\omega = 0{,}67\,\frac{\text{рад}}{c} \approx 0.1$ ГЦ, построенный в WorkBench - при $\omega = 1{,}06$ ГЦ.

Графики, построенные в Mathcad и WorkBench, совпадают.

Оценка переходной характеристики

$$W(s) = \frac{20 + 22s + 10s^2}{s + 7s^2 + 10s^3}$$

1. Начальное значение $\mathrm{h}(0) = \mathrm{W}(s \to \infty) = \frac{0}{10} = 0$.
2. Установившееся значение $\mathrm{h}(\mathrm{t} \to \infty) = \mathrm{W}(0) = \frac{20}{0} = \infty$. У системы нет установившегося состояния.
3. На ЛАЧХ отсутствует резонансный пик, значит h(t) не будет колебаться.

Постоим переходную характеристику в WorkBench и Mathcad.

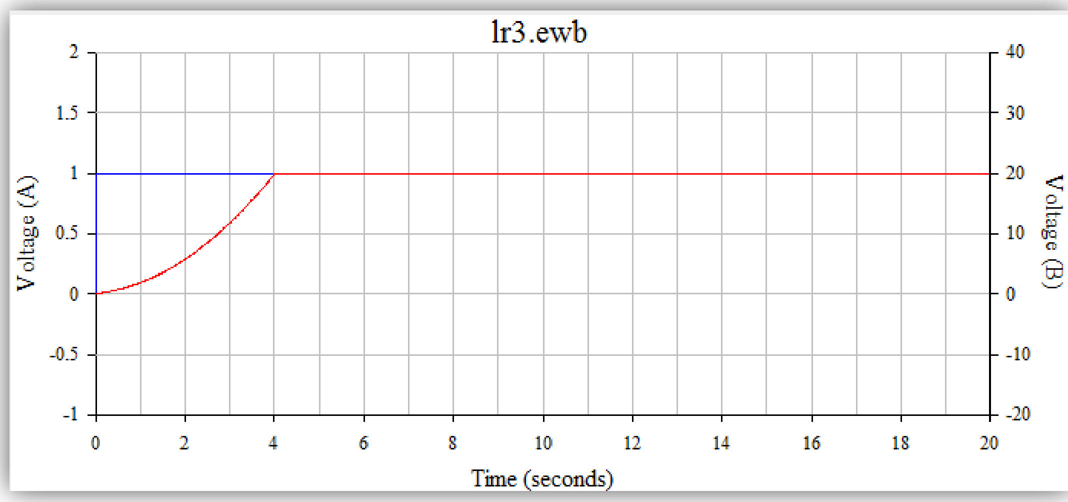


Рис 61.

$$W(s) := \frac{20 + 22s + 10s^2}{s + 7s^2 + 10s^3}$$

$$h(t) := \frac{W(s)}{s} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace}, s \\ \text{float}, 4 \end{array} \right. \rightarrow 20.0 \cdot t + 133.3 \cdot e^{-0.2 \cdot t} + -15.33 \cdot \left(e^{-0.2 \cdot t}\right)^{\frac{5}{2}} - 118.0$$

$$h(t) := h(t) \cdot \Phi(t) \qquad t := -5, -4.99 .. 50$$

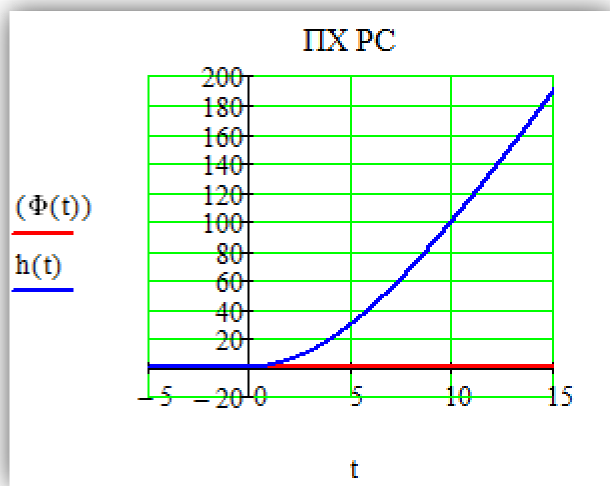


Рис 62.

ПХ в WorkBench ограничена 20В. Это связано с напряжением питания операционного усилителя, которое равно 20В.

Переходная характеристика описывает вынужденное движение, состоящее из:

❖ Собственного движения – движение по экспоненте, возникающее из-за свойств системы, определяемых передаточной функцией.

❖ Установившегося движения – движение по прямой линии 20*t, возникающего из-за постоянного внешнего воздействия – функции Хевисайда.

7.4 Моделирование системы при произвольном входном воздействии

Воздействие для 6 варианта:

Входное воздействие	Номер варианта
$2\sin(0.2t+30°)-\cos(t)$	$\mathrm{mod}(N_{\text{вар}}, 6)=0$

Библиотека источников EWB содержит генератор Nonlinear Dependent Source (NDS), в окне редактирования которого записывается формула выходного сигнала (напряжения либо тока), зависящего от входных напряжений и токов. Поскольку переменной времени в синтаксисе формулы не предусмотрено, то с помощью интегратора создадим напряжение, равное времени и подадим его на первый вход NDS v1.

В настойках интегратора установим «Input offset voltage» равным 1В. Тогда при интегрировании данного значения по времени напряжение на выходе будет равно времени.

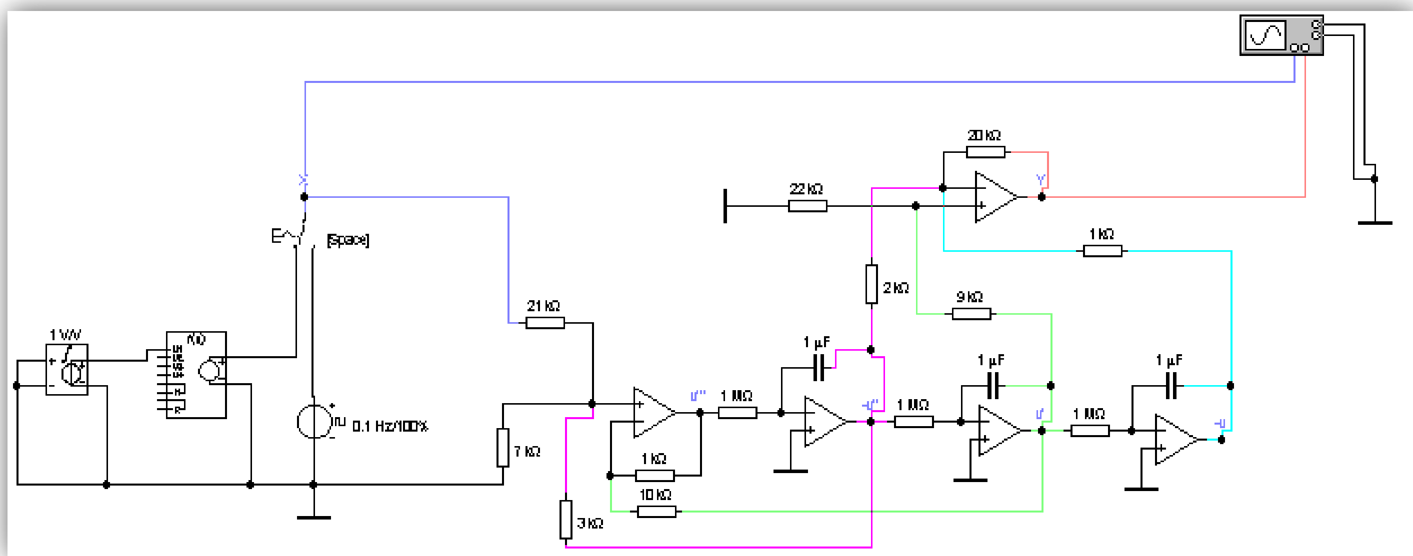


Рис 63.

Запишем в генератор формулу: v=2*sin(0.2*v(1)+0.52)-cos(v(1)) так, как 30°=0,52рад.

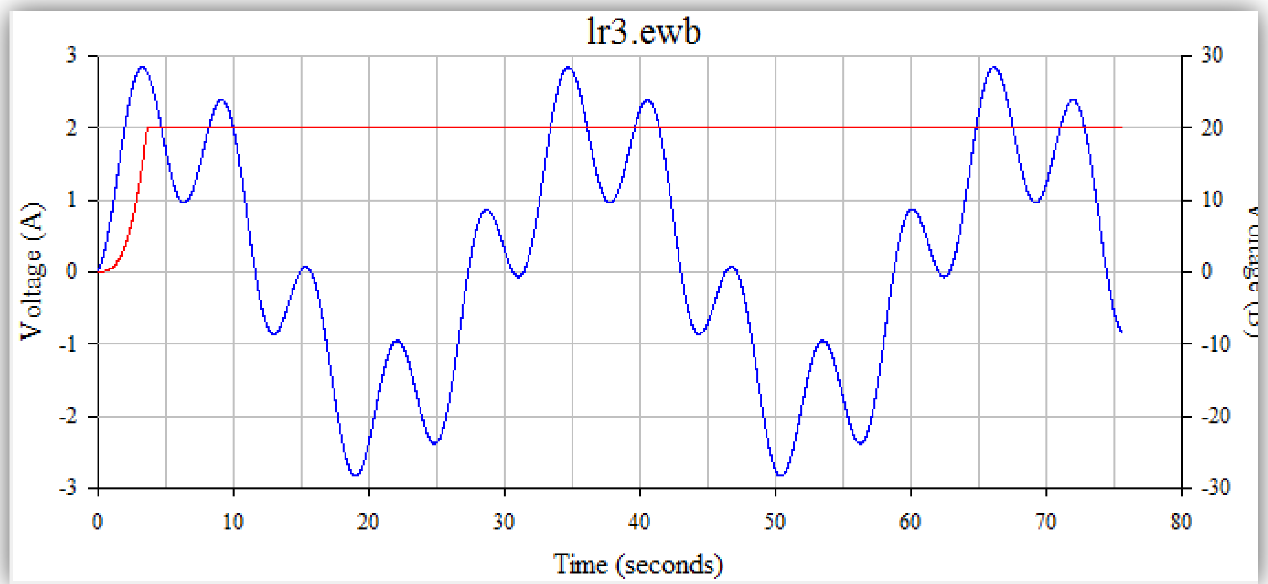


Рис 64.

Сверим график с Mathcad.

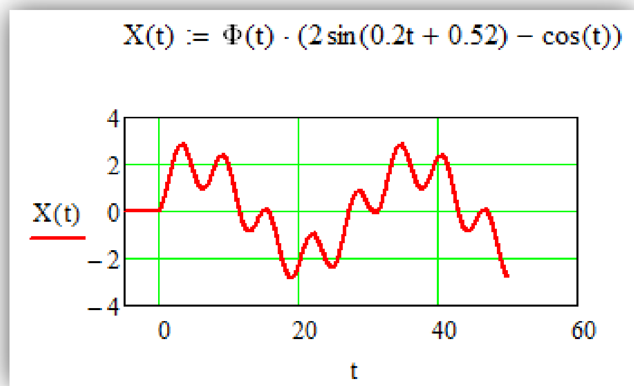


Рис 65.

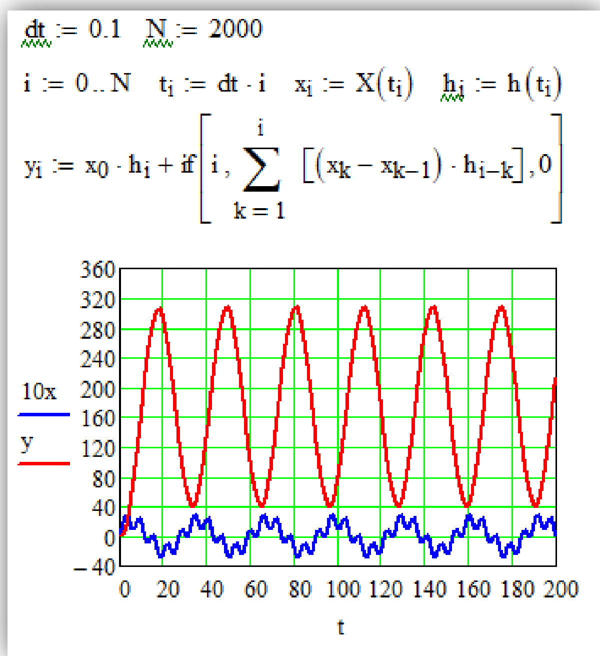


Рис 66.

Теоретический график выходного сигнала имеет амплитуду колебания ≈ 140В и наименьшее, после t=5с, значение 40В. Поэтому на реальном графике строится прямая линия равная 20В после t=5с. Колебания являются незатухающими и не расходящимися из-за того, что система находится на границе устойчивости.

8 Оценки качества переходной характеристики разомкнутой системы спектральными и частотными методами.

8.1 Спектральные оценки

$$W(s) = \frac{10s^2 + 22s + 20}{10s^3 + 7s^2 + s}$$

Найдем полюса передаточной функции из условия A(s)=0

$10s^3 + 7s^2 + s = 0$

$s(10s^2 + 7s + 1) = 0$

$s_1 = 0 \qquad s_2 = -0.5 \qquad s_3 = -0.2$

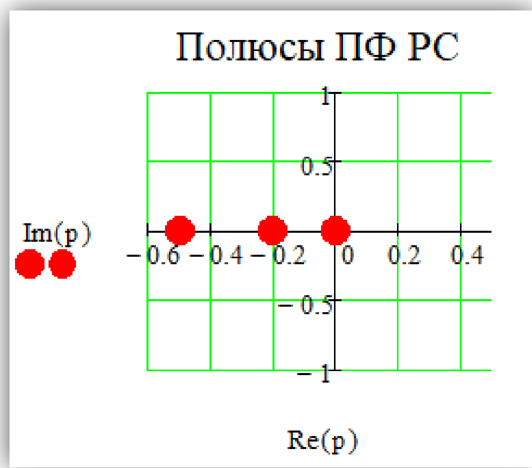


Рис 67.

Параметр	Значение
<u>*Степень устойчивости.*</u> η=-max{Re(si)}, если нет нулевых полюсов.	0
<u>*Степень быстродействия.*</u> γ=-min{Re(si)}.	0.5
<u>*Степень жесткости.*</u> r= γ/ η	∞
<u>*Степень колебательности.*</u> $\mu = \frac{\omega}{\eta}$	∞

Система находится на апериодической границе устойчивости. Рассмотрим основные спектральные оценки качества устойчивости переходной характеристики.

❖ ***Время установления*** - время, по истечении которого отклонение выходной величины от установившегося значения не превышает некоторой заданной величины.

$\frac{3}{\gamma} \leq ty \leq \frac{\omega}{\eta}$, $1.5 \leq ty$. Степень устойчивости равна нулю, поэтому верхняя граница у времени установления отсутствует. Это означает, что система не сходится к устойчивому состоянию, а находится на границе устойчивости.

❖ ***Перерегулирование*** - максимальное отклонение переходной функции от установившегося значения, выраженное в процентах:

$\sigma \leq e^{-\frac{\pi}{\mu}} * 100\%;\ \sigma \leq 100\%$. Поскольку установившегося состояния нет, то максимальное значение ПХ может постоянно увеличиваться.

❖ ***Степень затухания***

$\xi = 1 - e^{\frac{-2\pi}{\mu}} = 1 - e^{\frac{-2\pi}{\infty}} = 0$. Затухание отсутствует.

❖ ***Число колебаний:***

$N_k = \frac{\mu}{2} = \infty$. Колебания не затухают, а значит, и число колебаний будет бесконечно большим.

❖ ***Влияние нулей:***

Найдем нули передаточной функции из условия B(s)=0

$10s^2 + 22s + 20 = 0$

$$p1 := B(s)\ \Big|\begin{matrix} \text{solve}, s \\ \text{float}, 6 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1.1 + 0.888819i \\ -1.1 - 0.888819i \end{pmatrix}$$

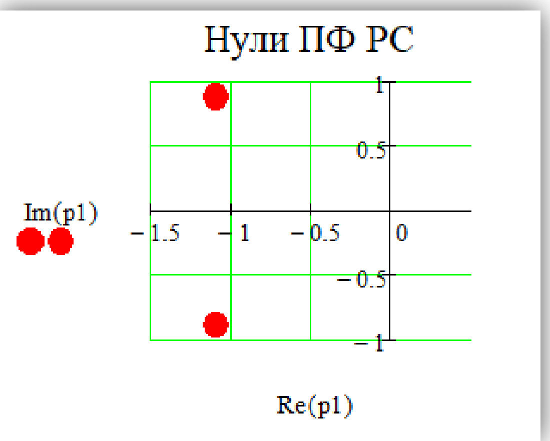


Рис 68.

В передаточной функции нет нулей, которые были бы близки к полюсам, чтобы компенсировать их составляющую колебания. Нули «далеко» от полюсов, поэтому они ухудшают показатели качества переходного процесса.

8.2 Частотные оценки

❖ ***Начальное значение***

$$h(0) = W(s \to \infty) = \frac{0}{10} = 0.$$

❖ ***Установившееся значение***

$h(t \to \infty) = W(0) = \frac{20}{0} = \infty.$ У системы нет установившегося состояния.

Для получения частотных оценок подставим s = $i\omega$ в передаточную функцию

$$W(s) = \frac{10s^2 + 22s + 20}{10s^3 + 7s^2 + s} \qquad C(\omega) = \frac{-10\omega^2 + 22i\omega + 20}{-10i\omega^3 - 7\omega^2 + i\omega} \qquad P(\omega) = Re\big(C(\omega)\big)$$

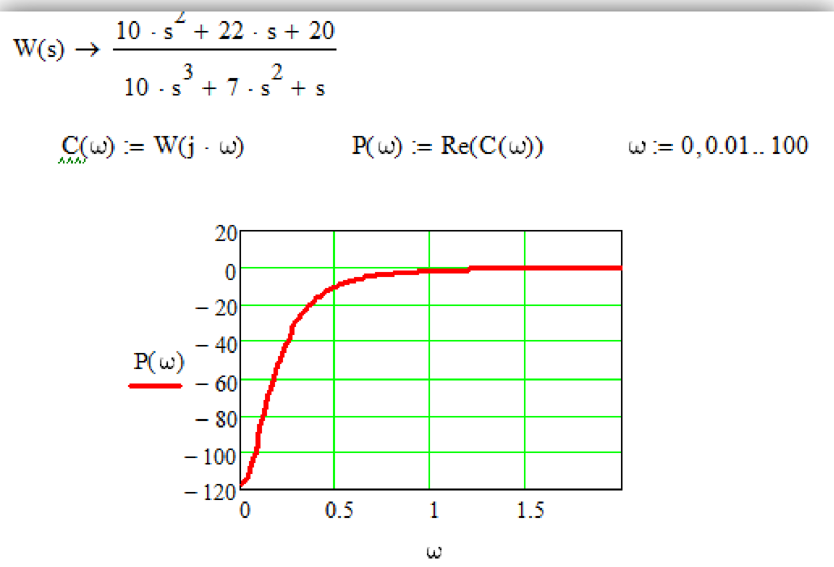


Рис 69.

$P(0) \to \infty \qquad P(\infty) \to 0 \qquad P_{max} = 0$

❖ ***Первая частота***

$$\omega_1: |P(\omega) - P(0)| \le 0.05|P(0)| \ \forall \ \omega \le \omega_1$$

$$t_y \le \frac{3\pi}{\omega_1} \text{ с}$$

Поскольку $P(0) \to \infty$, то $\omega_1 \to \infty$, следовательно, невозможно оценить время установления верхней границей.

❖ ***Частота однозначности***

$$\omega_o: \operatorname{sgn}(P(\omega)) = \text{const} \ \forall \ 0 < \omega < \omega_o$$

$$t_y \ge \frac{\pi}{\omega_o} \text{ с;}$$

Поскольку $P(\infty) \to 0$ из отрицательной области, то знак P всегда постоянен, следовательно, невозможно оценить время установления нижней границей.

❖ ***Оценки перерегулирования σ***

- $P(\omega)$ не является монотонно убывающей и выпуклой вниз, не имеет экстремумов, пиков и не максимальна в начальной точке – оценить перерегулированность нельзя.

❖ ***Оценки параметров колебаний***

$P(\omega)$ не имеет резонансной частоты, поэтому нельзя оценить параметры колебания.

9 Расчёт временных характеристик РС

9.1 Расчет ПХ с помощью обратного преобразования Лапласа.

$$h(t) = L^{-1}\left(\frac{W(s)}{s}\right) = L^{-1}\left(\frac{10s^2 + 22s + 20}{10s^3 + 7s^2 + s} * \frac{1}{s}\right) = L^{-1}\left(\frac{10s^2 + 22s + 20}{10s^4 + 7s^3 + s^2}\right) =$$

$$= L^{-1}\left(\frac{10s^2}{10s^4 + 7s^3 + s^2} + \frac{22s}{10s^4 + 7s^3 + s^2} + \frac{20}{10s^4 + 7s^3 + s^2}\right) =$$

$$= L^{-1}\left(\frac{10}{10s^2 + 7s + 1} + \frac{22}{10s^3 + 7s^2 + s} + \frac{20}{10s^4 + 7s^3 + s^2}\right) =$$

$$= 10 * L^{-1}\left(\frac{10}{10s^2 + 7s + 1}\right) + 22 * L^{-1}\left(\frac{1}{10s^3 + 7s^2 + s}\right) + 20 * L^{-1}\left(\frac{1}{10s^4 + 7s^3 + s^2}\right)$$

$$= L^{-1}\left(\frac{1}{10s^2+7s+1}\right) + 22 * L^{-1}\left(\frac{1}{s(10s^2+7s+1)}\right) + 20 * L^{-1}\left(\frac{1}{s^2(10s^2+7s+1)}\right)$$

$$10s^2 + 7s + 1 = (s+0.2)(s+0.5) = (1+5s)(1+2s)$$

$$h(t) = 10 * L^{-1}\left(\frac{1}{(1+5s)(1+2s)}\right) + 22 * L^{-1}\left(\frac{1}{s(1+5s)(1+2s)}\right) +$$

$$+20 * L^{-1}\left(\frac{1}{s^2(1+5s)(1+2s)}\right)$$

Найдём в таблице Лапласа обратные преобразования для трёх слагаемых.

27	$\frac{1}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$	$\frac{1}{T_1 - T_2}\left(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}\right)$
30	$\frac{1}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$	$1 - C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}$: $C_i = \frac{T_i}{T_1 - T_2}$
33	$\frac{1}{s^2(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$	$t - T_1 - T_2 + C_1 e^{-\alpha_1 t} - C_2 e^{-\alpha_2 t}$: $C_i = \frac{T_i^2}{T_1 - T_2}$

Найдем значение параметра α. $\alpha T = 1 \rightarrow a1 = 0.2 \quad \alpha 2 = 0.5$. Составим функцию в Mathcad и сравним с вычисленной в нём.

$a1 := 0.2 \qquad a2 := 0.5 \qquad T1 := 5 \qquad T2 := 2$

$$f1(t) := \frac{e^{-a1 \cdot t} - e^{-a2 \cdot t}}{T2 - T1}$$

$$f2(t) := 1 + \frac{T2 \cdot e^{-a2 \cdot t}}{T1 - T2} - \frac{T1 \cdot e^{-a1 \cdot t}}{T1 - T2}$$

$$f3(t) := t - T1 - T2 - \frac{T2^2 \cdot e^{-a2 \cdot t}}{T1 - T2} + \frac{T1^2 \cdot e^{-a1 \cdot t}}{T1 - T2}$$

$$h(t) := 10 \cdot f1(t) + 22 \cdot f2(t) + 20 \cdot f3(t)$$

$$h(t) := h(t) \cdot \Phi(t)$$

$$h1(t) := \frac{W(s)}{s} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace}, s \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow 20.0 \cdot t + 133.0 \cdot e^{-0.2 \cdot t} + -15.3 \cdot \left(e^{-0.2 \cdot t}\right)^{\frac{5}{2}} - 118.0$$

$$h1(t) := h1(t) \cdot \Phi(t)$$

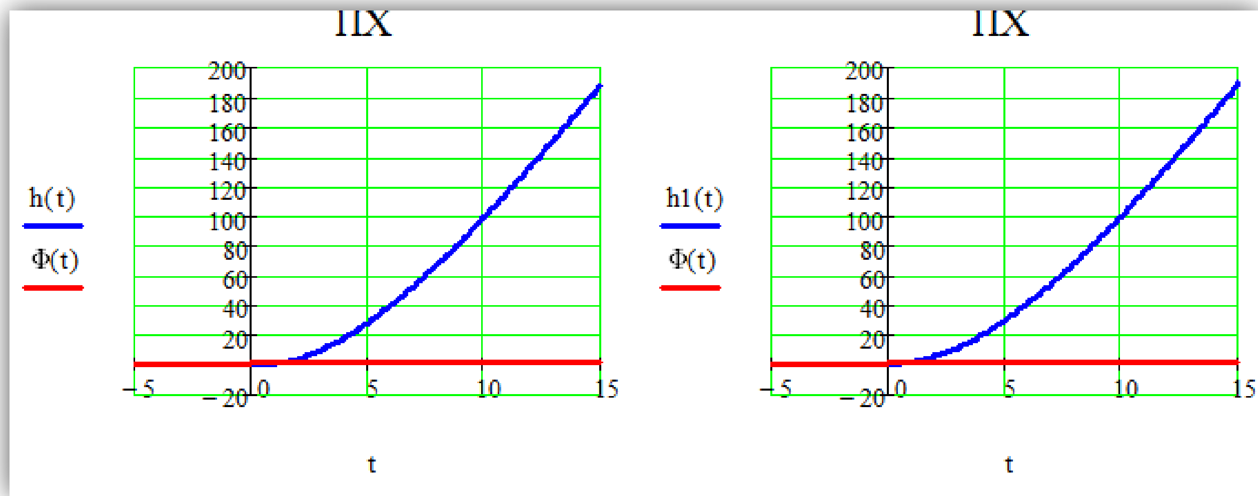


Рис 70.

Графики совпадают, значит, функция, вычисленная вручную составлена верна.

9.2 Расчет импульсной характеристики

Вычислим импульсную характеристику с помощью маткада.

$$w(t) := W(s)\ \left|\begin{array}{l}\text{invlaplace}, s\\ \text{float}, 3\end{array}\right. \rightarrow -26.7\cdot e^{-0.2\cdot t} + 7.67\cdot\left(e^{-0.2\cdot t}\right)^{\frac{5}{2}} + 20.0$$

$$w(t) := w(t)\cdot\Phi(t)$$

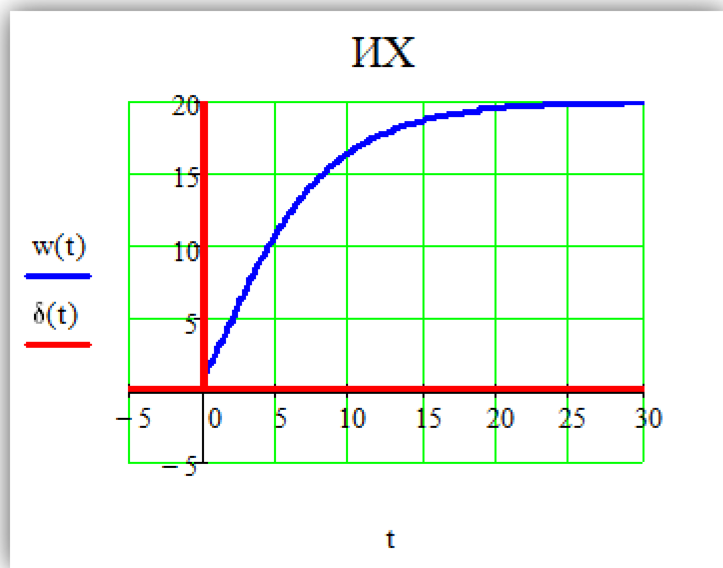


Рис 71.