МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

Інститут прикладної математики та фундаментальних наук
Кафедра прикладної математики

Звіт

про виконання лабораторної роботи №5
з курсу “Чисельні методи частина 2”
на тему:
«РОЗВ’ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ»

Виконав:
студент гр. ПМ-41
Дудяк М.С.
Прийняв:
доцент
Пізюр Я. В.

Львів-2016

Варіант 6

Постановка задачі

Методом скінченних різниць розв'язати наступну крайову задачу для ЗДР 2го порядку:

$$(k(x)u')' - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < 1$$

$$k(0)u'(0) = \beta_1 u(0) - \mu_1; \quad -k(1)u'(1) = \beta_2 u(1) - \mu_2$$

№ вар.	$k(x)$	$q(x)$	$f(x)$	β_1	μ_1	β_2	μ_2	ε
6	$x+1$	e^x	e^{-x^2}	0	0	1	0	0,01

Аналітична частина

Сформулюємо і розв'яжемо аналітично відповідну модельну задачу:

$$\bar{k}\frac{d^2u}{dx^2} - \bar{q}u = -\bar{f}, \quad 0 < x < 1, \tag{30}$$

$$\bar{k}\frac{du(0)}{dx} = 0, \quad -\bar{k}\frac{du(1)}{dx} = u(1) \quad , \tag{31}$$

де $\bar{k} = k(0.5) = 1.5; \ \bar{q} = q(0.5) = e^{0.5}; \ \bar{f} = f(0.5) = e^{-0.25}$.

Знайдемо точний розв'язок задачі (30), (31). Оскільки $\frac{\bar{q}}{\bar{k}} > 0$, то загальний розв'язок рівняння (30) має вигляд

$$u(x) = C_1 e^{x\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}} + C_2 e^{-x\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}} + \frac{\bar{f}}{\bar{q}},$$

а його похідна

$$\frac{du(x)}{dx} = C_1\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}e^{x\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}} - C_2\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}e^{-x\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}.$$

Позначимо $k_1 = \sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}, \quad k_2 = \frac{\bar{f}}{\bar{q}}$

Константи C_1 і C_2 виберемо так, щоб цей розв'язок задовольняв крайові умови (31), тоді

$$\begin{cases} k_1\bar{k}C_1 - k_1\bar{k}C_2 = 0 \\ -e^{k_1}(k_1\bar{k}+1)C_1 + e^{-k_1}(k_1\bar{k}-1)C_2 = k_2 \end{cases}$$

За допомогою правила Крамера розв'яжемо цю систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\Delta = \begin{bmatrix} k_1\bar{k} & -k_1\bar{k} \\ -e^{k_1}(k_1\bar{k}+1) & e^{-k_1}(k_1\bar{k}-1) \end{bmatrix} = e^{-k_1}(\bar{k}k_1-1) - e^{k_1}(\bar{k}k_1+1) \quad ,$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & -k_1\bar{k} \\ k_2 & e^{-k_1}(k_1\bar{k}-1) \end{bmatrix} = \bar{k}k_1k_2$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} k_1\bar{k} & 0 \\ -e^{k_1}(k_1\bar{k}+1) & k_2 \end{bmatrix} = \bar{k}k_1k_2$$

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{k_2}{e^{-k_1}(\bar{k}k_1-1) - e^{k_1}(\bar{k}k_1+1)}$$

$$C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{k_2}{e^{-k_1}(\bar{k}k_1-1) - e^{k_1}(\bar{k}k_1+1)}$$

Отже,

$$u(x) = \frac{\bar{f}}{\sqrt{\bar{q}\bar{k}}\left(e^{-\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}(\sqrt{\bar{q}\bar{k}}-1) - e^{\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}(\sqrt{\bar{q}\bar{k}}+1)\right)}\left(e^{x\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}} - e^{-x\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}\right)$$

Для чисельного розв'язування задачі (30), (31), використаємо різницеву схему:

$$(ay_{\bar{x}})_{x,i} - d_i y_i = -\varphi_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \tag{32}$$

$$a_1 y_{x,0} = \bar{\beta}_1 y_0 - \bar{\mu}_1, \quad -a_N y_{\bar{x},N} = \bar{\beta}_2 y_N - \bar{\mu}_2, \tag{33}$$

де

$$a_i = \bar{k}, \quad i = \overline{1, N}, \quad d_i = \bar{q}, \quad \varphi_i = \bar{f}, \quad i = \overline{0, N},$$

$$\bar{\beta}_1 = \beta_1 + 0{,}5hd_0, \quad \bar{\mu}_1 = \mu_1 + 0{,}5h\varphi_0, \quad \bar{\beta}_2 = \beta_2 + 0{,}5hd_N, \quad \bar{\mu}_2 = \mu_2 + 0{,}5h\varphi_N.$$

Різницеву схему (32),(33) можна записати у вигляді системи триточкових різницевих рівнянь

$$\begin{aligned} &-C_0 y_0 + B_0 y_1 = -F_0, \\ &A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ &A_N y_{N-1} - C_N y_N = -F_N, \end{aligned} \tag{34}$$

де

$$B_0=\frac{a_1}{h},\quad C_0=B_0+0.5\mathrm{hd}_0,\quad F_0=0.5\mathrm{h}\,\phi_0,$$

$$A_i=\frac{a_i}{h^2},\ C_i=\frac{a_i}{h^2}+\frac{a_{i+1}}{h^2}+d_i,\ B_i=\frac{a_{i+1}}{h^2},\ F_i=\varphi_i,\ i=\overline{1,N-1},$$

$$A_N=\frac{a_N}{h},\quad C_N=A_N+0.5\mathrm{hd}_N+1,\quad F_N=0.5\mathrm{h}\,\phi_N,$$

Оскільки $a_i>0, i=\overline{1,N-1}, d_i>0, i=\overline{0,N}, \beta_1>0, \beta_2>0$, то

$$|C_0|=\frac{a_1}{h}+0.5\mathrm{hd}_0>\frac{a_1}{h}=|B_0|,$$
$$|C_i|=\frac{a_i+a_{i+1}}{h^2}+d_i>\frac{a_i}{h^2}+\frac{a_{i+1}}{h^2}=|A_i|+|B_i|,\ \ i=\overline{1,\ N-1}$$
$$|C_N|=\frac{a_N}{h}+0.5\mathrm{hd}_N+1>\frac{a_N}{h}=|A_N|,$$

тобто різницева задача (34) однозначно розв′язна і її можна розв′язати методом прогонки.

За допомогою комп’ютера розв’яжемо різницеву задачу (32),(33) з точністю $\varepsilon=10^{-2}$. Для практичної оцінки точності використаємо правило Рунге. Оскільки різницева схема (32), (33) має другий порядок апроксимації; то за виконання умови

$$\left\|y^h-y^{h/2}\right\|_{C(\omega)}=\max_{1\le i\le N}\left|y_i^{\,h}-y_i^{h/2}\right|<3\varepsilon$$

точність ε, з якою необхідно розв’язати задачу, вважається досягнутою, інакше величина кроку зменшується в два рази і обчислення повторюються. Тут y_i^h – розв’язок різницевої схеми, отриманий з кроком h, $y_i^{h/2}$ – розв’язок різницевої схеми з кроком $h/2$.

Одержаний чисельний розв’язок, отриманий за допомогою програми наведеної у додатку порівняємо з точним у різницевій нормі $C(\omega_h)$, тобто обчислимо $e_{max} = \|y - u\|_{C(\omega_h)} = 3.312511957 \cdot 10^{-5}$. Переконавшись в тому, що $e_{\max} \le \varepsilon$ або близьке до ε знайдемо чисельний розв'язок вихідної задачі (27)-(29), за допомогою різницевої схеми (32), (33), з коефіцієнтами:

$$a_i = k_{i-1/2}, i = \overline{1, N}, \quad d_i \equiv q_i, \quad \varphi_i = f_i, \quad i = \overline{0, N},$$

$$\overline{\beta_1} = 0.5hd_{0,} \quad \overline{\mu_1} = 0.5h\,\phi_{0,} \quad \overline{\beta_2} = 1 + 0.5hd_N, \quad \overline{\mu_2} = 0.5h\,\phi_N,$$

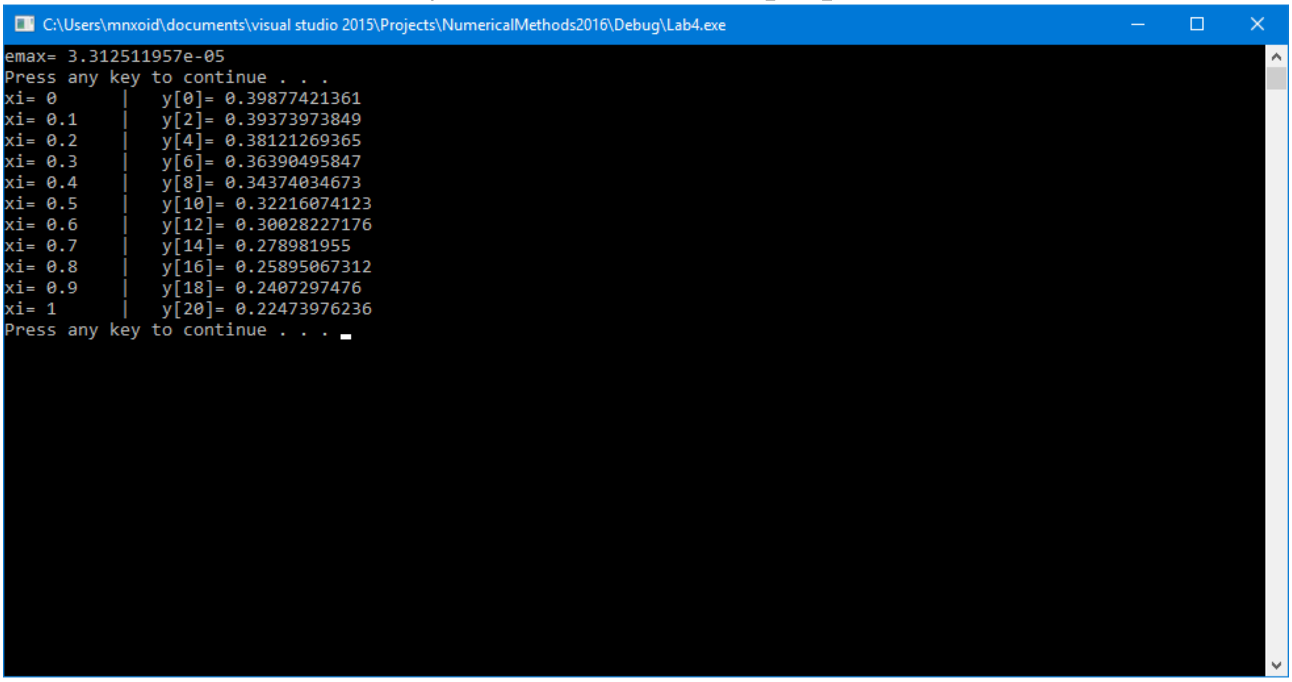
та з точністю $\varepsilon = 10^{-2}$.

Текст програми

```
	// Lab4.cpp : Defines the entry point for the console application.
//

#include "stdafx.h"
#include "L62.h"
#include "L61.h"


int main()
{
	L61 part1;
	L62 part2;

	L60* pts[] = { &part1, &part2 };

	for (L60* pt : pts)
	{
		pt->k = [](long double x) {return x + 1; };
		pt->q = [](long double x) {return exp(x); };
		pt->f = [](long double x) {return exp(-x*x); };
		pt->n = 10;
		pt->eps = 0.01;
		pt->mu1 = 0.0;
		pt->mu2 = 0.0;
		pt->beta1 = 0.0;
		pt->beta2 = 1.0;

		pt->kl = 1;
		pt->kr = 1;
	}

	part1.main();
	part2.main();

    return 0;
}

    void L61::main()
{
	long double *a, *b, *c, *d, *f, *y, *y2;
	a = new long double[nd]; b = new long double[nd]; c = new long double[nd]; d = new
long double[nd];
	f = new long double[nd]; y = new long double[nd]; y2 = new long double[nd];
	/* Задання початкових даних */
	halfn = n / 2;
	/* Обчислення чисельного розв'язку задачі y(i) */
	cds(a, b, c, d, f, y, y2);
	if (kflag == 1) {
		h = 1.0 / n;
		emax = 0.0;
		/* Обчислення точного розв'язку задачі y1(i) у вузлах сітки
		і похибки emax у сітковій нормі C */
		// Old code:
		/*dk = 1.0 + 0.5*0.5; dq = 0.5; df = -0.5*0.5; sqk = sqrt(dk*dq);
		dk1 = sqk - 1.0; dk2 = sqk + 1.0; dk3 = sqrt(dq / dk);
		del = pow(dk1, 2)*exp(-dk3) - pow(dk2, 2)*exp(dk3);*/
		// New code:
		dk = k(0.5);
		dq = q(0.5);
		df = this->f(0.5);
		long double k1 = sqrt(dq / dk);
		long double k2 = df / dq;
		long double kr_a, kr_b, kr_c, kr_d, kr_e, kr_f;
		kr_a = dk*k1 - beta1;                          kr_b = -dk*k1 - beta1;
			kr_e = beta1*k2 - mu1;
```

```
		kr_c = -exp(k1)*(dk*k1 + beta2);  kr_d = exp(-k1)*(dk*k1 - beta2);  kr_f = 
beta2*k2 - mu2;
		long double c1, c2;
		long double det = kr_a*kr_d - kr_b*kr_c;
		if (det != 0) {
			c1 = (kr_e*kr_d - kr_b*kr_f) / det;
			c2 = (kr_a*kr_f - kr_e*kr_c) / det;
		}
		else {
			cout << "Cramer equations system: determinant is zero\n" << "there are 
either no solutions or many solutions exist." << endl;
			return;
		}
		for (int i = 0; i <= n; i++) {
			xi = i*h;
			//y2[i] = (((df / dq + 1.0)*dk1*exp(-dk3) + df / dq*dk2)*exp(xi*dk3) + 
((df / dq + 1.0)*dk2*exp(dk3) + df / dq*dk1)*exp(-xi*dk3)) / del + df / dq;
			y2[i] = c1*exp(xi*k1) + c2*exp(-xi*k1) + k2;
			e = abs(y[i] - y2[i]);
			if (e > emax) emax = e;
		}
		cout.precision(10);
		cout << "emax= " << emax << endl;
	}
	else cout << "kflag= " << kflag << endl;
	system("pause");

/* Текст головної програми розв’язування заданої задачі
(див. контрольний приклад) */
void L62::main() {
	ofstream fout("result.txt", ios_base::out | ios_base::trunc);
	/* Задання початкових даних */
	long double *a, *b, *c, *d, *f, *y, *y2;
	a = new long double[nd]; b = new long double[nd]; c = new long double[nd]; d = new 
long double[nd];
	f = new long double[nd]; y = new long double[nd]; y2 = new long double[nd];
	/* Обчислення чисельного розв'язку задачі y(i) */
	cds(a, b, c, d, f, y, y2);
	cout.precision(11);
	fout.precision(11);
	if (kflag == 1) {
		h = 1.0 / n;
		/* Обчислення точного розв'язку задачі y1(i) у вузлах сітки
		і похибки emax у сітковій нормі C */
		emax = 0.0;
		j = 0;
		int z = n / 2;

		for (int i = 0; i <= z; i++) {
			xi = j * h;
			cout << "xi= " << xi << "\t   |   ";
			fout << "xi= " << xi << "\t   |   ";
			cout << "y[" << j << "]= " << y[j] << endl;
			fout << "y[" << j << "]= " << y[j] << endl;
			j = j + 2;
		}

	}
	else cout << "kflag= " << kflag;

	fout.close();
	delete[] a; delete[] b; delete[] c; delete[] d;
	delete[] f; delete[] y; delete[] y2;
	system("pause");
}
```

Результат виконання програми



C:\Users\mnxoid\documents\visual studio 2015\Projects\NumericalMethods2016\Debug\Lab4.exe

```
emax= 3.312511957e-05
Press any key to continue . . .
xi= 0       |   y[0]= 0.39877421361
xi= 0.1     |   y[2]= 0.39373973849
xi= 0.2     |   y[4]= 0.38121269365
xi= 0.3     |   y[6]= 0.36390495847
xi= 0.4     |   y[8]= 0.34374034673
xi= 0.5     |   y[10]= 0.32216074123
xi= 0.6     |   y[12]= 0.30028227176
xi= 0.7     |   y[14]= 0.278981955
xi= 0.8     |   y[16]= 0.25895067312
xi= 0.9     |   y[18]= 0.2407297476
xi= 1       |   y[20]= 0.22473976236
Press any key to continue . . .
```

Висновок

В цій лабораторній роботі я навчився: з допомогою мови програмування C++ розв'язувати крайові задачі для ЗДР 2го порядку методом скінченних різниць(різницевих схем, побудованих за інтегро-інтерполяційним методом).