Контрольний приклад

Нехай, потрібно розв'язати задачу:

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)-q(x)u=-f(x),\quad 0<x<1, \tag{27}$$

$$k(0)\frac{du(0)}{dx}=\beta_1 u(0)-\mu_1,\quad -k(1)\frac{du(1)}{dx}=\beta_2 u(1)-\mu_2, \tag{28}$$

де

$$k(x)=1+x^2,\ q(x)\equiv x,\ f(x)=-x^2,\ \mu_1=-1,\ \mu_2=0,\ \beta_1=1,\ \beta_2=1. \tag{29}$$

Сформулюємо і розв'яжемо аналітично відповідну модельну задачу:

$$\bar{k}\frac{d^2u}{dx^2}-\bar{q}u=-\overline{f},\quad 0<x<1, \tag{30}$$

$$\bar{k}\frac{du(0)}{dx}=u(0)+1,\quad -\bar{k}\frac{du(1)}{dx}=u(1), \tag{31}$$

де $\bar{k}=k(0{,}5)=1{,}25,\ \bar{q}=q(0{,}5)=0{,}5,\ \overline{f}=f(0{,}5)=-0{,}25$.

Знайдемо точний розв'язок задачі (30), (31). Оскільки $\frac{\bar{q}}{\bar{k}}>0$, то загальний розв'язок рівняння (30) має вигляд

$$u(x)=C_1e^{x\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}+C_2e^{-x\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}+\frac{\bar{f}}{\bar{q}},$$

а його похідна

$$\frac{du(x)}{dx}=C_1\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}e^{x\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}-C_2\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}e^{-x\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}.$$

Константи C_1 і C_2 виберемо так, щоб цей розв'язок задовольняв крайові умови (31), тоді

$$\begin{cases}\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}-1\right)C_1-\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}+1\right)C_2=\frac{\bar{f}}{\bar{q}}+1,\\ \left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}+1\right)e^{\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}C_1-\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}-1\right)e^{-\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}C_2=-\frac{\bar{f}}{\bar{q}}.\end{cases}$$

За допомогою правила Крамера розв'яжемо цю систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\Delta=\begin{vmatrix}\sqrt{\bar{k}\bar{q}}-1 & -\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}+1\right)\\ \left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}+1\right)e^{\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}} & -\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}-1\right)e^{-\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}\end{vmatrix}=-\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}-1\right)^2e^{-\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}+\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}+1\right)^2e^{\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}},$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}\frac{\bar{f}}{\bar{q}}+1 & -\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}+1\right)\\ -\frac{\bar{f}}{\bar{q}} & -\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}-1\right)e^{-\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}\end{vmatrix}=-\left(\frac{\bar{f}}{\bar{q}}+1\right)\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}-1\right)e^{-\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}-\frac{\bar{f}}{\bar{q}}\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}+1\right),$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\sqrt{\bar{k}\bar{q}}-1 & \dfrac{\bar{f}}{\bar{q}}+1\\ \left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}+1\right)e^{\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}} & -\dfrac{\bar{f}}{\bar{q}}\end{vmatrix}=-\frac{\bar{f}}{\bar{q}}\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}-1\right)-\left(\frac{\bar{f}}{\bar{q}}+1\right)\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}+1\right)e^{\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}},$$

$$C_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\left(\dfrac{\bar{f}}{\bar{q}}+1\right)\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}-1\right)e^{-\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}+\dfrac{\bar{f}}{\bar{q}}\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}+1\right)}{\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}-1\right)^2e^{-\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}-\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}+1\right)^2e^{\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}},$$

$$C_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{\left(\dfrac{\bar{f}}{\bar{q}}+1\right)\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}+1\right)e^{\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}+\dfrac{\bar{f}}{\bar{q}}\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}-1\right)}{\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}-1\right)^2e^{-\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}-\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}+1\right)^2e^{\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}}.$$

Отже,

$$u(x)=\frac{\left(\dfrac{\bar{f}}{\bar{q}}+1\right)\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}-1\right)e^{-\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}+\dfrac{\bar{f}}{\bar{q}}\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}+1\right)}{\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}-1\right)^2e^{-\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}-\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}+1\right)^2e^{\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}}e^{x\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}+$$

$$+\frac{\left(\dfrac{\bar{f}}{\bar{q}}+1\right)\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}+1\right)e^{\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}+\dfrac{\bar{f}}{\bar{q}}\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}-1\right)}{\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}-1\right)^2e^{-\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}-\left(\sqrt{\bar{k}\bar{q}}+1\right)^2e^{\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}}e^{-x\sqrt{\frac{\bar{q}}{\bar{k}}}}+\frac{\bar{f}}{\bar{q}}.$$

Для чисельного розв’язування задачі (30), (31), використаємо різницеву схему:

$$(ay_{\bar{x}})_{x,i}-d_iy_i=-\varphi_i,\quad i=\overline{1,N-1},\tag{32}$$

$$a_1y_{x,0}=\overline{\beta}_1y_0-\overline{\mu}_1,\quad -a_Ny_{\bar{x},N}=\overline{\beta}_2y_N-\overline{\mu}_2,\tag{33}$$

де

$$a_i=\bar{k},\quad i=\overline{1,N},\quad d_i=\bar{q},\quad \varphi_i=\bar{f},\quad i=\overline{0,N},$$

$$\overline{\beta}_1=\beta_1+0{,}5hd_0,\quad \overline{\mu}_1=\mu_1+0{,}5h\varphi_0,\quad \overline{\beta}_2=\beta_2+0{,}5hd_N,\quad \overline{\mu}_2=\mu_2+0{,}5h\varphi_N.$$

Різницеву схему (32),(33) можна записати у вигляді системи триточкових різницевих рівнянь

$$\begin{aligned}&-C_0y_0+B_0y_1=-F_0,\\ &A_iy_{i-1}-C_iy_i+B_iy_{i+1}=-F_i,\quad i=\overline{1,N-1},\\ &A_Ny_{N-1}-C_Ny_N=-F_N,\end{aligned}\tag{34}$$

де

$$B_0=\frac{a_1}{h},\quad C_0=B_0+0{,}5hd_0+\beta_1,\quad F_0=0{,}5h\varphi_0+\mu_1,$$

$$A_i = \frac{a_i}{h^2},\ C_i = \frac{a_i}{h^2} + \frac{a_{i+1}}{h^2} + d_i,\ B_i = \frac{a_{i+1}}{h^2},\ F_i = \varphi_i,\ i = \overline{1, N-1},$$

$$A_N = \frac{a_N}{h}, \quad C_N = A_N + 0{,}5hd_N + \beta_2,\ F_N = 0{,}5h\varphi_N + \mu_2,$$

Оскільки $a_i > 0, i = \overline{1, N-1}, d_i > 0, i = \overline{0, N}, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$, то

$$|C_0| = \frac{a_1}{h} + 0{,}5hd_0 + \beta_1 > \frac{a_1}{h} = |B_0|,$$

$$|C_i| = \frac{a_i + a_{i+1}}{h^2} + d_i > \frac{a_i}{h^2} + \frac{a_{i+1}}{h^2} = |A_i| + |B_i|, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$|C_N| = \frac{a_N}{h} + 0{,}5hd_N + \beta_2 > \frac{a_N}{h} = |A_N|,$$

тобто різницева задача (34) однозначно розв′язна і її можна розв′язати методом прогонки.

За допомогою комп’ютера розв’яжемо різницеву задачу (32),(33) з точністю $\varepsilon = 10^{-2}$. Для практичної оцінки точності використаємо правило Рунге. Оскільки різницева схема (32), (33) має другий порядок апроксимації; то за виконання умови

$$\left\| y^h - y^{h/2} \right\|_{C(\omega)} = \max_{1 \le i \le N} \left| y_i^h - y_i^{h/2} \right| < 3\varepsilon$$

точність ε, з якою необхідно розв’язати задачу, вважається досягнутою, інакше величина кроку зменшується в два рази і обчислення повторюються. Тут y_i^h – розв’язок різницевої схеми, отриманий з кроком h, $y_i^{h/2}$ – розв’язок різницевої схеми з кроком $h/2$.

Одержаний чисельний розв’язок, отриманий за допомогою програми наведеної у додатку порівняємо з точним у різницевій нормі $C(\omega_h)$, тобто обчислимо $e_{\max} = \|y - u\|_{C(\omega_h)} = 1{,}6497 \cdot 10^{-5}$. Переконавшись в тому, що $e_{\max} \le \varepsilon$ або близьке до ε знайдемо чисельний розв’язок вихідної задачі (27)-(29), за допомогою різницевої схеми (32), (33), з коефіцієнтами:

$$a_i = k_{i-1/2}, i = \overline{1, N}, \quad d_i \equiv q_i, \quad \varphi_i = f_i, \quad i = \overline{0, N},$$

$$\overline{\beta}_1 = \beta_1 + 0{,}5hd_0, \quad \overline{\mu}_1 = \mu_1 + 0{,}5h\varphi_0, \quad \overline{\beta}_2 = \beta_2 + 0{,}5hd_N, \quad \overline{\mu}_2 = \mu_2 + 0{,}5h\varphi_N$$

та з точністю $\varepsilon = 10^{-2}$. Результати розв’язування наведено у таблиці 1.

Таблиця 1. Чисельний розв’язок вихідної задачі

x_i	y_i
0,0	-6,706394E-01
0,1	-6,378808E-01
0,2	-6,062696E-01
0,3	-5,765935E-01
0,4	-5,492244E-01
0,5	-5,241570E-01
0,6	-5,010946E-01
0,7	-4,795511E-01
0,8	-4,589431E-01

0,9	-4,386599E-01
1,0	-4,181090E-01