Алгоритмы численных методов. Самостоятельные работы

В. С. Верхотуров

БСБО-05-20

РТУ МИРЭА

11 июля 2022 г.

Содержание

Задание

Самостоятельная работа № 1. Решение нелинейных уравнений и систем линейных уравнений

Задача 1

Дано уравнение $5x^2 + 2x - 6 = 0$.

1. Найти точное решение уравнения;
2. построить график левой части этого уравнения;
3. найти приближенное значение левого корня этого уравнения методом половинного деления с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$;
4. найти приближенное значение правого корня методом простой итерации, $\varepsilon = 10^{-6}$.

Задача 2

Дано уравнение $x^2 \exp(x) - 6 = 0$.

1. Построить график левой части уравнения;
2. найти приближенное решение методом простой итерации, $\varepsilon = 10^{-6}$.

Задача 3

Найти точное решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - x_3 = -12 + 6, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 29 + 6, \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = 5 + 6. \end{cases}$$

Самостоятельная работа № 2. Построение интерполяционных многочленов

1. Найти приближение функции, заданной в точках, многочленом, значения которого совпадают со значениями функции в указанных точках:

x	y
1	$0 + 6$
3	$4 + 6$
5	$2 + 6$
7	$6 + 6$
9	$8 + 6$

2. построить график полученного интерполяционного многочлена;
3. найти значение функции в точке $x = 6$.

Самостоятельная работа № 3. Вычисление определённых интегралов

1. Найти аналитическое выражение для неопределённого интеграла
$$\int \sin(\ln(6x))\,dx;$$
2. построить графики найденного интеграла — красным цветом и подынтегральной функции — синим цветом;
3. вычислить приближенное значение этого интеграла:
$$\int\limits_{2}^{6+2} \sin(\ln(6x))\,dx;$$
4. вычислить приближенное значение интеграла
$$\int\limits_{2}^{6+2} \exp(-x^2)\sin(6x)\,dx.$$

Самостоятельная работа № 4. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Найти аналитическое решение задачи Коши:
$$y'(t) = \frac{1}{6}(t+y), \quad y(0) = 6;$$
2. построить график найденного решения на отрезке $[0; 6]$;
3. найти численное решение задачи Коши:
$$y'(t) = \frac{1}{6}(t+y), \quad y(0) = 6;$$
4. найти численное решение задачи Коши
$$y'(t) = \sin(6y(t) + t^2), \quad y(0) = 6$$
в точках $t = 1$ и $t = 2$;
5. построить график найденного решения на отрезке $[0;\ 5]$.

1 Самостоятельная работа № 1. Решение нелинейных уравнений и систем линейных уравнений

1.1 Задача 1

Дано уравнение $5x^2 + 2x - 6 = 0$.

Точное решение уравнения

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 5 \times (-6) = 4 + 120 = 124,$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$
$$\begin{cases} x_1 = \frac{-2+\sqrt{124}}{2\times 5}, \\ x_2 = \frac{-2-\sqrt{124}}{2\times 5}, \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -0{,}2 + 0{,}2\sqrt{31}, \\ x_2 = -0{,}2 - 0{,}2\sqrt{31}. \end{cases}$$

График левой части уравнения

См. рис. 1 на стр. 4.

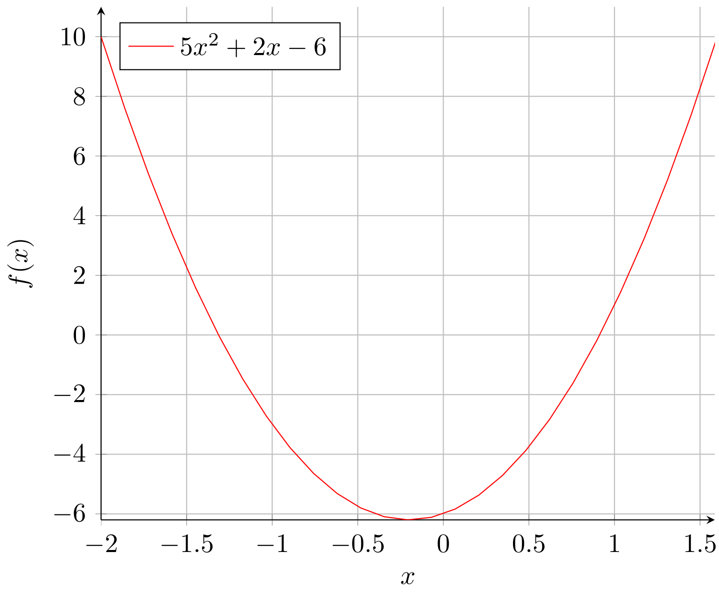

Рис. 1: График функции

Приближенное значение левого корня методом половинного деления

Необходимо найти приближенное значение левого корня $5x^2 + 2x - 6 = 0$ методом половинного деления с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

По графику на рис. 1 можно предположить, что значение левого корня находится на интервале $[-1{,}5; -1]$. $f(-1{,}5) = 2{,}25$, $f(-1) = -3$. $f(x_0)f(x_1) = 2{,}25 \times (-3) = -6{,}75 \leq 0$, следовательно промежуток действительно содержит хотя бы один корень. Для первой итерации: $x_0 = -1{,}5$, $x_1 = -1$.

Функция нахождения x_2:

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1).$$

См. таблицу 1 на стр. 5.

x_0	x_1	x_2	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_0)f(x_2)$	$f(x_1)f(x_2)$
−1,5	−1	−1,25	2,25	−3	−0,6875	−1,546 875	2,0625
−1,5	−1,25	−1,375	2,25	−0,6875	0,7031	1,581 975	−0,483 381 25
−1,25	−1,375	−1,3125	−0,6875	0,7031	−0,0117	0,008 043 75	−0,008 226 27
−1,375	−1,3125	−1,3438	0,7031	−0,0117	0,3414	0,240 038 34	−0,003 994 38
−1,3125	−1,3438	−1,3282	−0,0117	0,3414	0,1642	−0,001 921 14	0,056 057 88
−1,3125	−1,3282	−1,3204	−0,0117	0,1642	0,0765	−0,000 895 05	0,012 561 3
−1,3125	−1,3204	−1,3165	−0,0117	0,0765	0,0329	−0,000 384 93	0,002 516 85
−1,3125	−1,3165	−1,3145	−0,0117	0,0329	0,0106	−0,000 124 02	0,000 348 74
−1,3125	−1,3145	−1,3135	−0,0117	0,0106	−0,0006	0,000 007 02	−0,000 006 36

Таблица 1: Результаты приближения методом половинного деления

Функции[1] электронной таблицы[2] 1:

столбец A, кроме первой итерации `=IF(G2<=0, A2, B2)`;

столбец B, кроме первой итерации `=C2`;

столбец C `=ROUND((A3+B3)/2, 4)`;

столбец D `=ROUND(POWER(A3, 2)*5+2*A3-6, 4)`;

столбец E `=ROUND(POWER(B3, 2)*5+2*B3-6, 4)`;

столбец F `=ROUND(POWER(C3, 2)*5+2*C3-6, 4)`;

столбец G `=D3*F3`;

столбец H `=E3*F3`.

Приближенным значением левого корня при $\varepsilon = 10^{-3}$ является x_2 при 9 итерации, равная $-1{,}3135$.

Приближенное значение правого корня методом простой итерации

Необходимо найти приближенное значение правого корня методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

По рис. 1 начальное приближение к правому корню $x_0 = 0$.

Итерационная формула:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

[1] представлены формулы для строки 3

[2] Google Sheets

Нахождение производной $f(x)$:

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 6,$$
$$f'(x) = 10x + 2.$$

См. таблицу 2 на стр. 6.

x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}
0	−6	2	3
3	45	32	1,593 75
1,593 75	9,887 695 313	17,9375	1,042 519 599
1,042 519 599	1,519 274 773	12,425 195 99	0,920 245 892 4
0,920 245 892 4	0,074 754 297 02	11,202 458 92	0,913 572 866 6
0,913 572 866 6	0,000 222 646 36	11,135 728 67	0,913 552 872 7
0,913 552 872 7	0,000 000 002 00	11,135 528 73	0,913 552 872 6
0,913 552 872 6	0	11,135 528 73	0,913 552 872 6

Таблица 2: Результаты приближения методом простой итерации

Функции[3] электронной таблицы[4] 2:

столбец A, кроме первой итерации `=D2`;

столбец B `=POWER(A3, 2)*5+2*A3-6`;

столбец C `=10*A3+2`;

столбец D `=A3-B3/C3`.

Критерий окончания процесса $|x_7 - x_6| = |0{,}9135528726 - 0{,}9135528727| = 10^{-10} < \varepsilon = 10^{-6}$ выполнен.

Приближенное значение правого корня равно 0,9135529 при $\varepsilon = 10^{-6}$.

1.2 Задача 2

Дано уравнение $x^2 \exp(x) - 6 = 0$.

См. рис. 2 на стр. 7.

График левой части уравнения

Нахождение приближенного решения

Необходимо найти приближенное решение методом простой итерации при $\varepsilon = 10^{-6}$.

По рис. 2 начальное приближение к корню $x_0 = 1$.

Нахождение производной $f(x)$:

$$f(x) = x^2 \exp(x) - 6,$$
$$f'(x) = 2x \exp(x) + x^2 \exp(x).$$

См. таблицу 3 на стр. 7.

[3] представлены формулы для строки 3

[4] Google Sheets

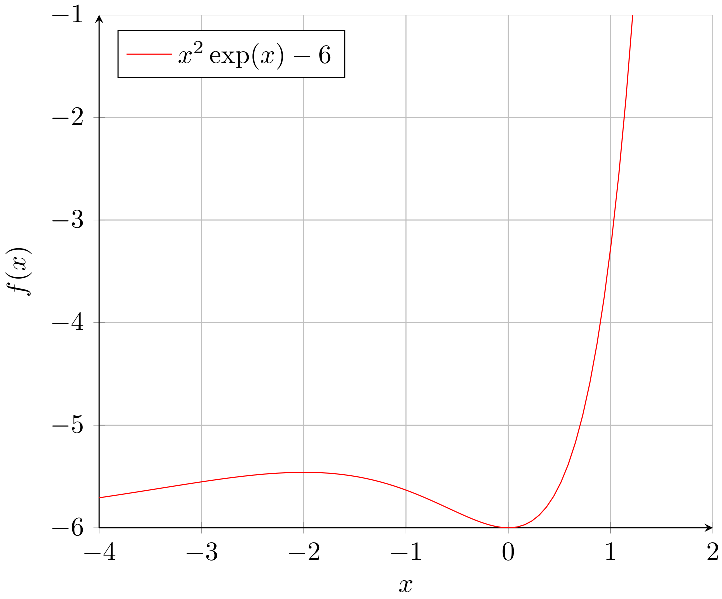

Рис. 2: График функции

x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}
1	−3,281 718 172	8,154 845 485	1,402 425 549
1,402 425 549	1,995 125 904	19,396 980 23	1,299 567 997
1,299 567 997	0,194 314 128 6	15,727 196 05	1,287 212 703
1,287 212 703	0,002 470 136 08	15,328 776 69	1,287 051 559
1,287 051 559	0,000 000 414 15	15,323 636 86	1,287 051 532
1,287 051 532	0	15,323 636	1,287 051 532

Таблица 3: Результаты приближения методом простой итерации

Функции[5] электронной таблицы[6] 3:

столбец A, кроме первой итерации `=D2`;

столбец B `=POWER(A3,2)*EXP(A3)-6`;

столбец C `=2*A3*EXP(A3)+POWER(A3,2)*EXP(A3)`;

столбец D `=A3-B3/C3`.

Критерий окончания процесса $|x_5 - x_4| = |1{,}287051559 - 1{,}287051532| = 2{,}7 \times 10^{-8} < \varepsilon = 10^{-6}$ выполнен.

Приближенное значение корня равно 1,2870515 при $\varepsilon = 10^{-6}$.

1.3 Задача 3

Дана система уравнений:

[5] представлены формулы для строки 3

[6] Google Sheets

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - x_3 = -12 + 6 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 29 + 6 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = 5 + 6 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - x_3 = -6 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 35 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

Точное решение системы уравнений

Решение СЛАУ методом Гаусса. Прямой ход.

Расширенная матрица СЛАУ:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 & -6 \\ 5 & -1 & 2 & 35 \\ -3 & -4 & 1 & 11 \end{vmatrix}.$$

Преобразование матрицы:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 & -6 \\ 5 & -1 & 2 & 35 \\ -3 & -4 & 1 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} | \times 5 \\ | \times (-2) \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 32 & -9 & -100 \\ 5 & -1 & 2 & 35 \\ -3 & -4 & 1 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ | \times 3 \\ | \times 5 \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 32 & -9 & -100 \\ 0 & -23 & 11 & 160 \\ -3 & -4 & 1 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} | \times 23 \\ | \times 32 \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 146 & 2820 \\ 0 & -23 & 11 & 160 \\ -3 & -4 & 1 & 11 \end{vmatrix}.$$

Обратный ход:

$$x_3 = \frac{2820}{145} = \frac{564}{29},$$

$$x_2 = \frac{160 - 11x_3}{-23} = \frac{160 - 11 \times \frac{564}{29}}{-23} = \frac{68}{29},$$

$$x_1 = \frac{11 + 4x_2 - x_3}{-3} = \frac{11 + 4 \times \frac{68}{29} - \frac{568}{29}}{-3} = -\frac{9}{29}.$$

Приближенное решение системы уравнений

Решение СЛАУ методом Зейделя.

$$\begin{cases} x_1 = 7 + \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{6}x_3, \\ x_2 = -1 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_3, \\ x_3 = 11 + 3x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Примем за начальное приближение:

$$\begin{cases} x_1^{\{0\}} = 0, \\ x_2^{\{0\}} = 0, \\ x_3^{\{0\}} = 0. \end{cases}$$

См. таблицу 4 на стр. 9.

Функции[7] электронной таблицы[8] 4:

[7]представлены формулы для строки 3

[8]Google Sheets

$x_1^{\{m\}}$	$x_2^{\{m\}}$	$x_3^{\{m\}}$
0	0	0
7	−3,333 333 333	18,666 666 67
−1,133 333 333	2,488 888 889	17,555 555 56
0,475 555 555 6	1,767 407 407	19,496 296 3
−0,445 037 037	2,397 728 395	19,255 802 47
−0,222 775 308 6	2,283 558 848	19,465 909 47
−0,329 652 016 5	2,354 202 25	19,427 852 95
−0,300 300 729 8	2,338 075 735	19,451 400 75
−0,312 945 153	2,346 215 176	19,446 025 24
−0,309 167 062 8	2,344 059 895	19,448 738 39
−0,310 683 377 8	2,345 017 525	19,448 019 97
−0,310 204 481 1	2,344 738 155	19,448 339 17
−0,310 388 039	2,344 852 542	19,448 246 05
−0,310 327 912 2	2,344 816 979	19,448 284 18

Таблица 4: Результаты приближения методом Зейделя

столбец A, кроме первой итерации `=7+B2/5-C2*2/5`;

столбец B, кроме первой итерации `=-1-A3/3+C2/6`;

столбец C, кроме первой итерации `=11+3*A3+4*B3`.

$$\left|x_1^{\{13\}} - x_1^{\{12\}}\right| < 10^{-4},$$
$$\left|x_2^{\{13\}} - x_2^{\{12\}}\right| < 10^{-4},$$
$$\left|x_3^{\{13\}} - x_3^{\{12\}}\right| < 10^{-4}.$$

При $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}31032, \\ x_2 = 2{,}34481, \\ x_3 = 19{,}44828. \end{cases}$$

2 Самостоятельная работа № 2. Построение интерполяционных многочленов

Приближение функции

Необходимо найти приближение функции, заданной в точках, многочленом, значения которого совпадают со значениями функции в указанных точках:

x	y
1	6
3	10
5	8
7	12
9	14

См. таблицу 5 на стр. 10.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1	6				
		4			
3	10		−6		
		−2		12	
5	8		6		−20
		4		−8	
7	12		−2		
		2			
9	14				

Таблица 5: Расчёт разностей табличной функции

Узлы интерполяции равноотстоящие, т.к. $h = 3 - 1 = 5 - 3 = 7 - 5 = 9 - 7 = 2 = const$.

Первая интерполяционная формула Ньютона:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}).$$

$$P_n(x) = 6 + \frac{4}{1!2}(x - 1) + \frac{-6}{2!2^2}(x - 1)(x - 3) + \\ + \frac{12}{3!2^3}(x - 1)(x - 3)(x - 5) + \\ + \frac{-20}{4!2^4}(x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 7) = \\ = \frac{-5x^4 + 104x^3 - 718x^2 + 1912x - 717}{96} = \\ = -\frac{5}{96}x^4 + \frac{13}{12}x^3 - \frac{359}{48}x^2 + \frac{239}{12}x - \frac{239}{32}.$$

Построение графика

См. рис. 3 на стр. 11.

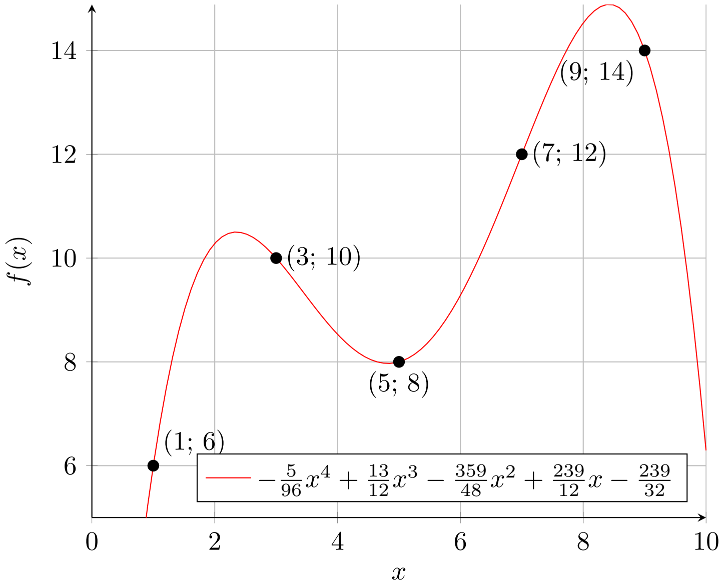

Рис. 3: График полученного интерполяционного многочлена

Значение в точке

Найти значение в точке $x = 6$.

$$P_n(6) = -\frac{5}{96} \times 6^4 + \frac{13}{12} \times 6^3 - \frac{359}{48} \times 6^2 + \frac{239}{12} \times 6 - \frac{239}{32} =$$
$$= -\frac{135}{2} + 234 - \frac{1077}{4} + \frac{239}{2} - \frac{239}{32} = \frac{297}{32}.$$

3 Самостоятельная работа № 3. Вычисление определённых интегралов

Аналитическое выражение

Найти аналитическое выражение для неопределённого интеграла

$$\int \sin(\ln(6x))\,dx.$$

$$\begin{aligned}\int \sin(\ln(6x))\,dx = [u = 6x, \quad du = 6dx] = \frac{1}{6}\int \sin(\ln(u))\,du = \\ = \left[v = \ln(u), \quad dv = \frac{1}{u}\,du\right] = \frac{1}{6}\int \exp(v)\sin(v)\,dv = \\ = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\exp(v)((\sin(v) - \cos(v))\right) + C = \\ = \frac{1}{12}u(\sin(\ln(u)) - \cos(\ln(u))) + C = \\ = \frac{1}{2}x(\sin(\ln(6x)) - \cos(\ln(6x))) + C.\end{aligned}$$

Графики интеграла и подынтегральной функции

Построить графики найденного интеграла — красным цветом и подынтегральной функции — синим цветом.

См. рис. 4 на стр. 12.

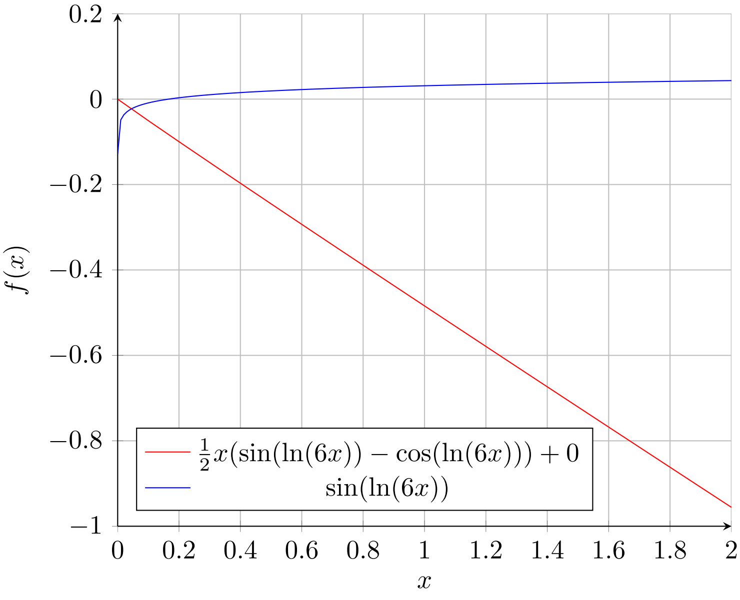

Рис. 4: Графики интеграла, подынтегральной функции

Приближенное значение интеграла

Вычислить приближенное значение интеграла:

$$\int\limits_2^8 \sin(\ln(6x))\,dx.$$

Формула Симпсона:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

$$\begin{aligned}
f(2) &= \sin(\ln(6\times 2)) = 0{,}611,\\
f\left(\frac{2+8}{2}\right) &= \sin(\ln(6\times 5)) = -0{,}257,\\
f(8) &= \sin(\ln(6\times 8)) = -0{,}667.
\end{aligned}$$

$$\int\limits_2^8 \sin(\ln(6x))\,dx = \frac{8-2}{6}(0{,}611 + 4(-0{,}257) - 0{,}667) = -1{,}083.$$

Ошибка аппроксимации:

$$E = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \max(f^{(4)}(\xi)), \quad \text{где } \xi \in [a;b].$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\cos(\ln(6)+\ln(x))}{x},\\
f''(x) &= -\frac{\sin(\ln(6)+\ln(x)) + \cos(\ln(6)+\ln(x))}{x^2},\\
f'''(x) &= \frac{\cos(\ln(6)+\ln(x)) + 3\sin(\ln(6)+\ln(x))}{x^3},\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{10\sin(\ln(6)+\ln(x))}{x^4}.
\end{aligned}$$

Нахождение $\max(f^{(4)}(x))$ на отрезке $x = [a; b]$:

$$f^{(5)}(x) = \frac{40\sin(\ln(6) + \ln(x)) - 10\cos(\ln(6) + \ln(x))}{x^5}.$$

$$\frac{40\sin(\ln(6x)) - 10\cos(\ln(6x))}{x^5} = 0,$$

$$\begin{cases} x_1 \approx 0{,}213, \\ x_2 \approx 4{,}927. \end{cases}$$

$$f^{(4)}(0{,}213) \approx -1{,}1798 \times 10^7,$$

$$f^{(4)}(4{,}927) \approx 0{,}0041,$$

$$f^{(4)}(2) \approx -0{,}38156,$$

$$f^{(4)}(8) \approx 0{,}0016.$$

$$\max(f^{(4)}(\xi)) = f^{(4)}(4{,}927) \approx 0{,}0041.$$

$$E = -\frac{1}{90}\left(\frac{8-2}{2}\right)^5 \times 0{,}0041 \approx -0{,}01107.$$

$$\int\limits_2^8 \sin(\ln(6x))\,dx = -1{,}083 \pm 0{,}01107.$$

Приближенное значение интеграла

Вычислить приближенное значение интеграла:

$$\int\limits_2^8 \exp(-x^2)\sin(6x)\,dx.$$

Метод трапеций:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)).$$

Разобьём интеграл на $N = 6$ равных промежутков. $\Delta x = \frac{b-a}{N} = \frac{8-2}{6}$. См. таблицу 6 на стр. 15.

$$\int\limits_2^8 \exp(-x^2)\sin(6x)\,dx \approx \frac{1}{2}(-0{,}0098) = -0{,}0049.$$

Анализ ошибки:

$$E = -\frac{(b-a)^3}{12N^2}\max(f''(\xi)), \quad \text{где } \xi \in [a; b].$$

i	x_i	y_i
0	2	$-0{,}0098$
1	3	$-9{,}27 \times 10^{-5} \approx 0$
2	4	$-1{,}02 \times 10^{-7} \approx 0$
3	5	$-1{,}37 \times 10^{-11} \approx 0$
4	6	$-2{,}3 \times 10^{-16} \approx 0$
5	7	$-4{,}81 \times 10^{-22} \approx 0$
6	8	$-1{,}23 \times 10^{-28} \approx 0$

Таблица 6: Результат приближения значения интеграла

$$\begin{aligned}f''(x) = -38\exp(-x^2)\sin(6x) + 4x^2\exp(-x^2)\sin(6x) - \\ - 24x\exp(-x^2)\cos(6x) = \\ = 4\exp(-x^2)\left(\sin(6x)x^2 - 6\cos(6x)x - \frac{19\sin(6x)}{2}\right).\end{aligned}$$

Нахождение $\max(f''(x))$, где $x \in [2; 8]$:

$$\begin{aligned}f'''(x) = 228x\exp(-x^2)\sin(6x) - 252\exp(-x^2)\cos(6x) - \\ - 8x^3\exp(-x^2)\sin(6x) + 72x^2\exp(-x^2)\cos(6x) = \\ = -8\exp(-x^2)\left(\sin(6x)x^3 - 9\cos(6x)x^2 - \frac{57\sin(6x)x}{2} + \frac{63\cos(6x)}{2}\right).\end{aligned}$$

При $f'''(x) = 0$:

$$\begin{cases} x_1 \approx 0{,}228, \\ x_2 \approx 3{,}507. \end{cases}$$

$$f''(0{,}228) \approx -36{,}186,$$

$$f''(3{,}507) \approx 0{,}00026,$$

$$f''(2) \approx -0{,}5257,$$

$$f''(8) \approx -71{,}48 \times 10^{-28}.$$

$$\max(f''(x)) = 0{,}00026.$$

$$E = -\frac{(8-2)^3}{12 \times 1^2} \times 0{,}00026 = -0{,}00468.$$

$$\int\limits_2^8 \exp(-x^2)\sin(6x)\,dx \approx \frac{1}{2}(-0{,}0098) = -0{,}0049 \pm 0{,}00468.$$

4 Самостоятельная работа № 4. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Аналитическое решение задачи Коши

Найти аналитическое решение задачи Коши:

$$y'(t) = \frac{1}{6}(t + y), \quad y(0) = 6.$$
$$-\frac{y}{6} + y' = \frac{t}{6}.$$

Замена на $y = uv$, $y' = u'v + uv'$:

$$-\frac{uv}{6} + uv' + u'v = \frac{t}{6},$$
$$u\left(-\frac{v}{6} + v'\right) + u'v = \frac{t}{6},$$
$$\begin{cases} u\left(-\frac{v}{6} + v'\right) = 0, \\ u'v = \frac{t}{6}. \end{cases}$$

Нахождение v. При $u = 0$:

$$-\frac{v}{6} + v' = 0,$$
$$v' = \frac{v}{6},$$
$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{6}dt,$$
$$\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{6}\int dt,$$
$$\ln(v) = \frac{t}{6},$$
$$v = \exp\left(\frac{t}{6}\right).$$

Нахождение u:

$$u'v = \frac{t}{6},$$
$$u' \exp\left(\frac{t}{6}\right) = \frac{t}{6},$$
$$u' = \frac{t\exp\left(-\frac{t}{6}\right)}{6},$$
$$u = \int \frac{t\exp\left(-\frac{t}{6}\right)}{6}\,dt = \frac{1}{6}\int t\exp\left(-\frac{1}{6}\right)\,dt.$$

Формула интегрирования по частям:

$$\int U\,dV = UV - \int V\,dU.$$

$$U = t, \quad dV = \exp\left(-\frac{t}{6}\right) dt,$$
$$dU = dt, \quad V = -6\exp\left(-\frac{t}{6}\right),$$
$$\int t\exp\left(-\frac{t}{6}\right) dt = -6t\exp\left(-\frac{t}{6}\right) - \int -6\exp\left(-\frac{t}{6}\right) dt =$$
$$= -6t\exp\left(-\frac{t}{6}\right) + \int 6\exp\left(-\frac{t}{6}\right) dt = -6t\exp\left(-\frac{t}{6}\right) - 36\exp\left(-\frac{t}{6}\right) + C.$$
$$u = \frac{1}{6}\int t\exp\left(-\frac{t}{6}\right) dt = \frac{1}{6}(-6x - 36)\exp\left(-\frac{t}{6}\right),$$
$$y = uv = \left(C + (-6t - 36)\frac{\exp\left(-\frac{t}{6}\right)}{6}\right)\exp\left(\frac{t}{6}\right) = C\exp\left(\frac{t}{6}\right) - t - 6.$$

При $y(0) = 6$:

$$6 = C\exp(0) - 0 - 6,$$
$$C = 12,$$
$$y = 12\exp\left(\frac{t}{6}\right) - t - 6.$$

График найденного решения

Построить график найденного решения на отрезке $[0; 6]$.

См. рис. 5 на стр. 17.

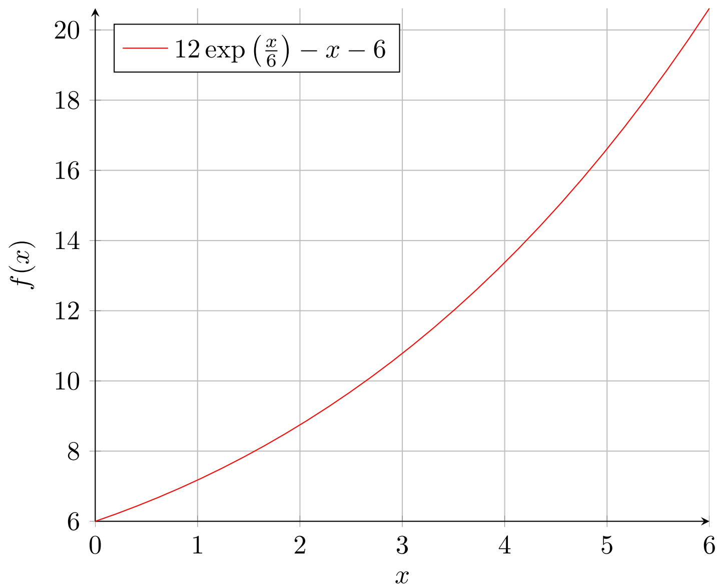

Рис. 5: График найденного решения

Численное решение задачи Коши

Найти численное решение задачи Коши:

$$y'(t) = \frac{1}{6}(t + y), \quad y(0) = 6.$$

Метод Эйлера:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

Пусть $h = 1$, $t \in [0; 6]$.

$$f(t, y) = \frac{1}{6}(t + y),$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(t_n + y_n),$$
$$t_0 = 0, \quad y_0 = 6.$$

См. таблицу 7 на стр. 18.

n	t_n	y_n
0	0	6
1	1	7
2	2	8,333
3	3	10,055
4	4	12,231
5	5	14,936
6	6	18,259

Таблица 7: Результат численного решения

Численное решение задачи Коши

Найти численное решение задачи Коши:

$$y'(t) = \sin(6y(t) + t^2), \quad y(0) = 6$$

в точках $t = 1$ и $t = 2$.

Метод Эйлера:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

Пусть $h = 1$, $t \in [0; 5]$.

$$f(t, y) = \sin(6y + t^2),$$
$$y_{n+1} = y_n + \sin(6y + t^2),$$
$$t_0 = 0, \quad y_0 = 6.$$

См. таблицу 8 на стр. 19.

$$y(1) = 5{,}008, \quad y(2) = 4{,}648.$$

n	t_n	y_n
0	0	6
1	1	5,008
2	2	4,648
3	3	5,103
4	4	6,043
5	5	6,955

Таблица 8: Результат численного решения

График найденного решения

Построить график найденного решения на отрезке [0; 5].

См. рис. 6 на стр. 19.

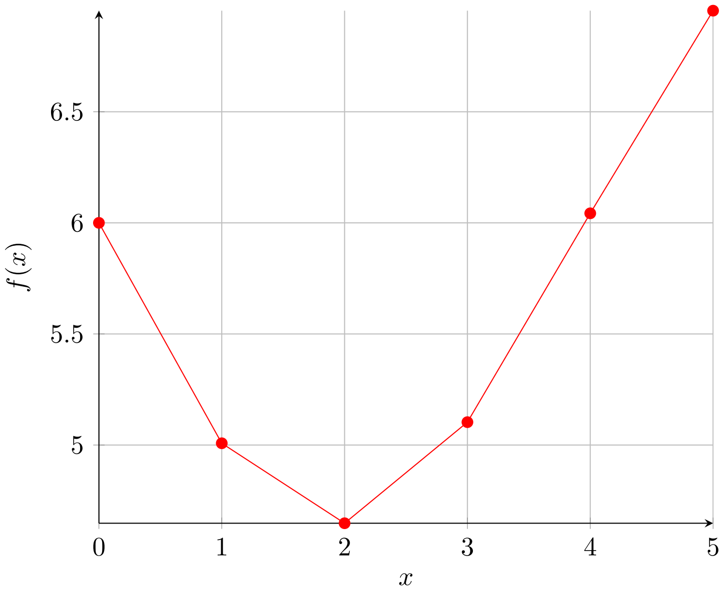

Рис. 6: График найденного решения