北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

数据结构与程序设计
(Data Structure and Programming)

数据结构

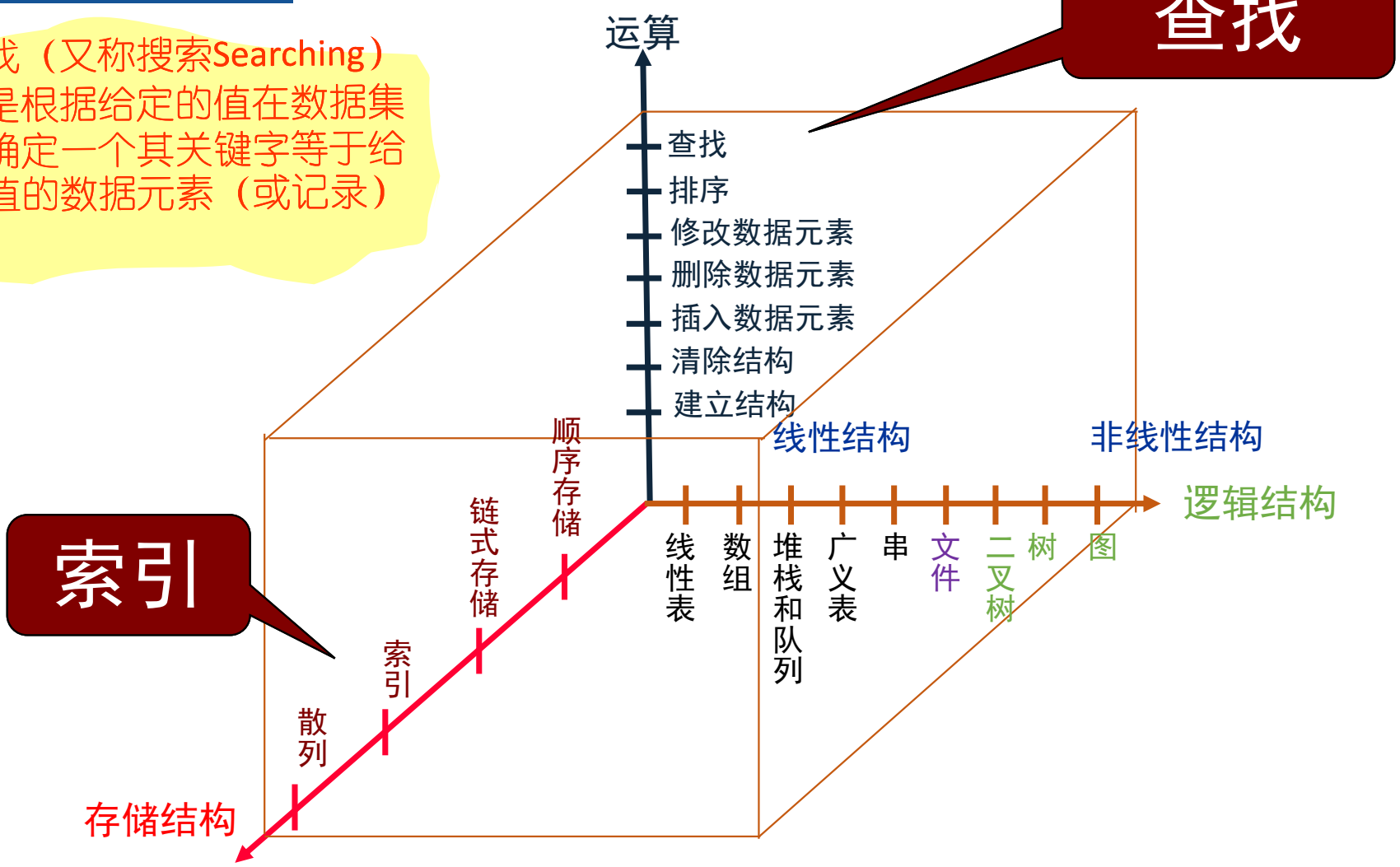
查找

(Searching)

北航计算机学院 晏海华

数据结构的基本问题空间

查找（又称搜索Searching）就是根据给定的值在数据集中确定一个其关键字等于给定值的数据元素（或记录）



互联网时代，几乎我们每个人都会要用到搜索。

本章内容

7.1 查找的基本概念
7.2 顺序表的查找
7.3 索引
7.4 二叉查找树(BST)
7.5 B-树和B+树
7.6 散列(Hash)

查找

重点

7.1 查找的基本概念

例1 花名册

学 号	姓 名	性别	年龄	其 他
99001	张 三	女	20	… …
99002	李 四	男	18	… …
99003	王 五	男	17	… …
…	…	…	…	… …
…	…	…	…	… …
…	…	…	…	… …
99030	刘 末	女	19	… …

例2

商品清单

编 号	名 称	库存数量	入库时间	其 他
010020	电视机	300	2005.7	…
010021	洗衣机	100	2006.1	…
010023	空调机	50	2006.5	…
010025	电冰箱	30	2006.9	…
…	…	…	…	…
…	…	…	…	…
…	…	…	…	…

一. 名词术语

次关键字

主关键字

学 号	姓 名	性别	年龄	其 他
99001	张 三	女	20	……
99002	李 四	男	17	……
99003	王 五	男	18	……
……	……	…	…	……
99030	刘 末	女	19	……

字段、数据项

属性：描述一个客体某一方面特征的数据信息。

记录：反映一个客体数据信息的集合。

查找表：具有相同属性定义的记录的集合。

属性的集合

关键字：区分不同记录的属性或属性组。
（主关键字、次关键字）

主关键字（Primary Key）：可以唯一的标识一个记录。

二. 查找表（Search Table）的逻辑结构

记录呈现在用户眼前的排列的先后次序关系。
(线性结构)

三. 查找表的物理结构

查找表（文件）在存储介质上的组织方式。

1. 连续组织方式(顺序组织方式)
2. 链接组织方式
3. 索引组织方式
4. 随机组织方式(散列组织方式)

顺序查找　索引查找　散列查找

四. 查找表的基本操作

查找

在查找表中确定某个特定记录存在与否的过程。

结论：查找成功，给出被查到记录的位置；
查找失败，给出相应的信息。

(1) 查找表的第i个记录；
(2) 查找当前位置的下一个记录；
(3) 按关键字值查找记录。

插入
删除
修改

以查找操作为基础

排序

使记录按关键字值有序排列的过程。

五. 静态查找表与动态查找表

静态查找表

如果只在查找表中确定某个特定记录是否存在或检索某个特定记录的属性，此类查找表为**静态查找表**(Static Search Table)

动态查找表

如果在查找表中需要插入不存在的数据元素（记录）或需要删除检索到的数据元素（记录），此类查找表为**动态查找表**(Dynamic Search Table)

显然查找效率与表的组织方式（结构）和类型有关！

7.2 顺序表的查找

一. 顺序表的基本概念

在物理结构中记录排列的先后次序与在逻辑结构中记录排列的先后次序一致的查找表称为 ***顺序表***。

记录的排列按关键字值有序的顺序表称为**有序顺序表**，否则，称为**一般顺序文件**。

逻辑上划分

在存储介质上采用连续组织方式的顺序表称为**连续顺序表**；采用链接组织方式的顺序表称为**链接顺序表**。

物理上划分

若排序顺序文件在存储介质上采用连续组织方式，称之为 ***有序连续顺序表***

关键字

排序顺序表 !

学 号	姓 名	性别	年龄	其他
06001	张 三	女	20	…
06002	李 四	男	17	…
06003	王 五	男	19	…
…	…	…		…
…	…	…		…
…	…	…		…
06050	刘 末	女	16	…

关键字

一般顺序表 !

排序连续顺序表

二. 连续顺序表的查找

1. 顺序查找法

查找思想：从表的第一个记录开始，将用户给出的关键字值与当前被查找记录的关键字值进行比较，若匹配，则查找成功，给出被查到的记录在表中的位置，查找结束。若所有n 个记录的关键字值都已比较，不存在与用户要查的关键字值匹配的记录，则查找失败，给出信息0。

(key_1， key_2， key_3， … ， key_n)

k

被查找记录的关键字值

关键字集合

算法

```
int  search(keytype key[ ],int n,keytype k)
{
      int  i;
      for(i=0;i<n; i++)
           if(key[i]==k)
                return i;
      return -1;
}
```

例

key[0..9]　38　75　19　57　100　48　50　7　62　11

若查找 k=48　　经过6次比较，查找成功，返回 i=5

若查找 k=35　　查找失败，返回信息 -1

查找效率如何

平均查找长度ASL (Average Search Length)

确定一个记录在查找表中的位置所需要进行的关键字值的比较次数的期望值(平均值)。

对于具有n个记录的查找表，有

$$ASL=\sum_{i=1}^{n} p_i c_i$$

其中，p_i为查找第i个记录的概率，c_i为查找第i个记录所进行过的关键字的比较次数。

结论

对于具有n个记录的顺序表，若查找概率相等，则有

$$ASL=\sum_{i=1}^{n}p_i c_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n+1}{2}$$

算法的时间复杂度为O(n)

优点：

- 查找原理和过程简单，易于理解。
- 对于被查找对象的排列次序没有限制。

缺点：

- 查找的时间效率低。

思考：插入对象的位置对查询效率是否有影响？

- 随机插入
- 在头部插入
- 在尾部插入
- 按顺序插入

2. 有序连续顺序表的 折半查找法(Binary Search)

（二分查找法、 对半查找法）

查找思想

将要查找的关键字值与当前查找范围内位置居中的记录的关键字的值进行比较。

若匹配，则查找成功，给出被查到记录在文件中的位置，查找结束。

若要查找的关键字值小于位置居中的记录的关键字值，则到当前查找范围的前半部分重复上述查找过程，否则，到当前查找范围的后半部分重复上述查找过程，直到查找成功或者失败。

若查找失败，则给出错误信息（0）。

几个变量

n　排序连续顺序文件中记录的个数

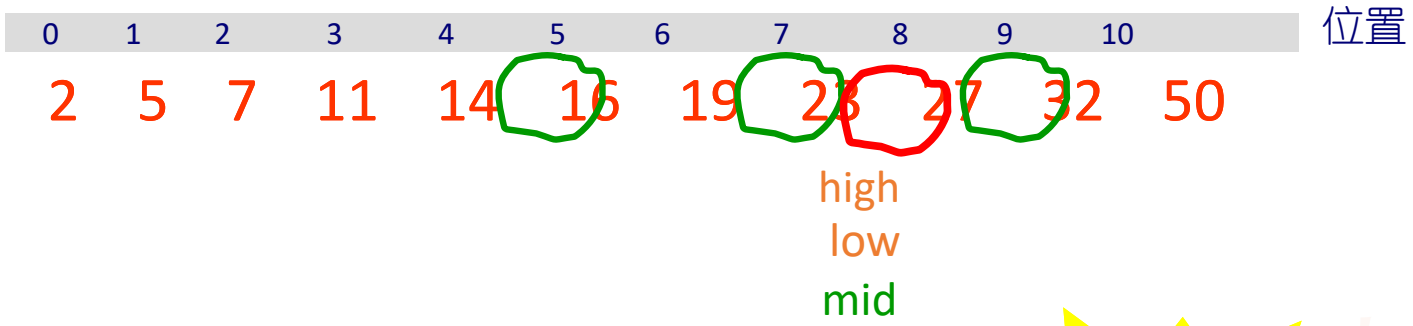
low 当前查找范围内第一个记录在文件中的位置。初值 low=0

high 当前查找范围内最后那个记录在文件中的位置。初值 high=n-1

mid 当前查找范围内位置居中的那个记录在文件中的位置。$mid = \left\lfloor \frac{low+high}{2} \right\rfloor$

例1

key[0..n-1]　n=11　k=23



查找成功

经过四次元素之间的比较，查找成功，给出被查到记录在文件中的位置7(mid)。

例2

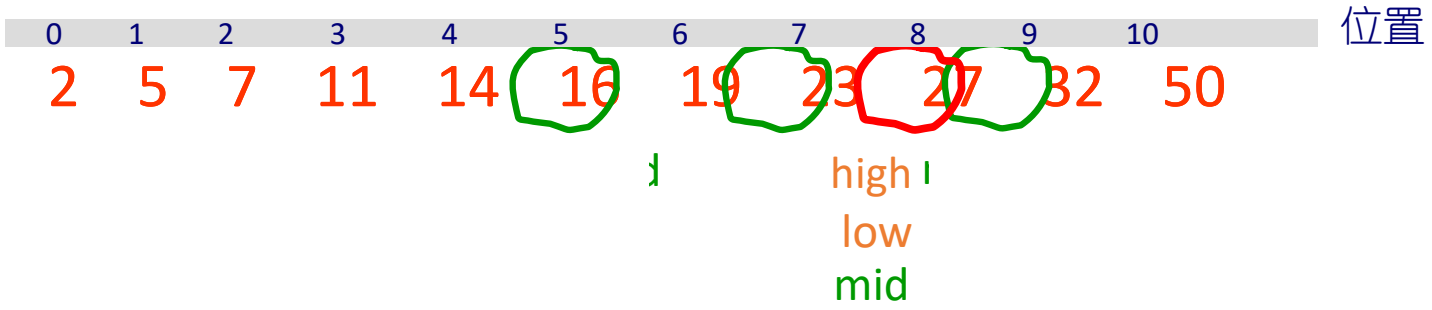
key[0..n-1]　n=11　k=9

查找失败

经过3次元素之间的比较，
未能查到匹配的记录，查找失败。
给出信息-1。

判断

key[0..n-1] n=11 k=23



key[0..n-1] n=11 k=9

当算法中出现high=low=mid的情况时，表示查找成功？

非递归算法

```
int  binsearch(keytype key[ ], int n, keytype k)
{
    int low=0, high=n-1, mid;
     while(low<=high){
          mid=(low+high)/2;
          if(k==key[mid])
               return mid;          /*  查找成功  */
          if(k>key[mid])
               low=mid+1;          /*  准备查找后半部分 */
          else
               high=mid–1;         /* 准备查找前半部分 */
      }
      return -1;                   /*   查找失败  */
}
```

递归算法

```
int binsearch2(keytype key[ ], int low, int high, keytype k)
{
    int  mid;
    if(low>high)
        return -1;
    else{
        mid=(low+high)/2;
        if(k==key[mid])
            return mid;
        else
            if(k<key[mid])
               return  binsearch2(key,low,mid–1,k);
            else
               return  binsearch2(key,mid+1,high,k);
        }
}
```

low=0;
high=n-1;
pos=binsearch2(KEY,low,high,k);

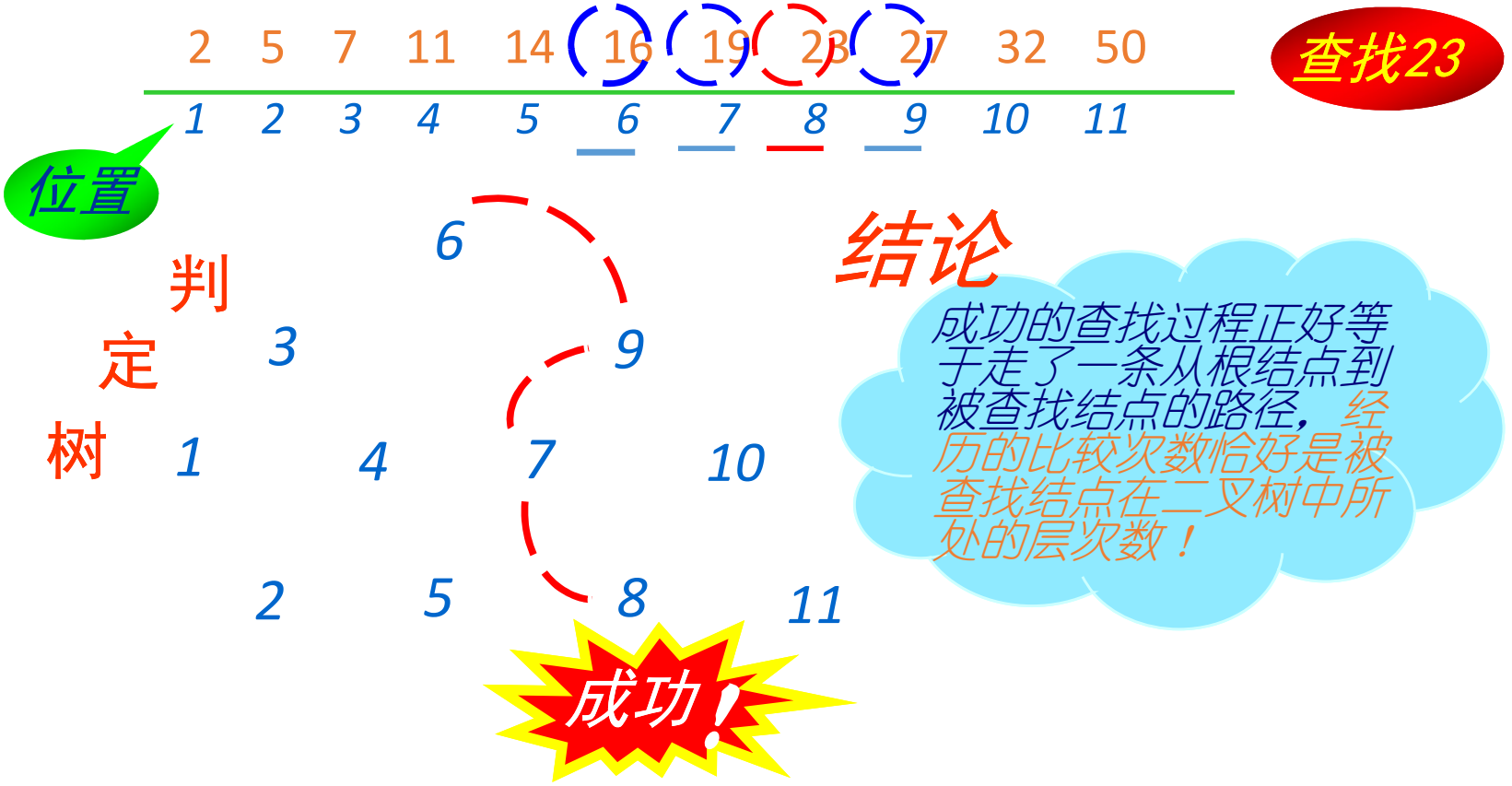
在第1次调用的算法中

查找效率如何

平均查找长度ASL

判定树

若把当前查找范围内居中的记录的位置作为根结点，前半部分与后半部分的记录的位置分别构成根结点的左子树与右子树，则由此得到一棵称为“判定树”的二叉树，利用它来描述折半查找的过程。



结论

成功的查找过程正好等于走了一条从根结点到被查找结点的路径，经历的比较次数恰好是被查找结点在二叉树中所处的层次数！

平均查找长度

对于具有n个记录的排序连续顺序文件，若查找概率相等，则有

$$ASL=\sum_{i=1}^{n} p_i c_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{h} j\times 2^{j-1} = \frac{n+1}{n}\log_2(n+1)-1$$

第j层结点数的最大值

第j层每个结点的比较次数

当n足够大时，有

$$ASL\approx \log_2(n+1)-1$$

算法的时间复杂度：$O(\log_2 n)$

优点：

- 查找原理和过程简单，易于理解。
- 查找的时间效率较高。

缺点：

为了保持数据集为排序顺序数据集，在数据集中插入和删除记录时需要移动大量的其它记录

- 要求查找表中的记录按照关键字值有序排列。
- 对于查找表，只适用于有序连续顺序表。

折半查找方法适用于一经建立就很少改动、而又经常需要查找的查找表

思考

有序连续顺序存储（数组）适合于静态查找表。

在线性表中采用折半查找方法查找数据元素，该线性表应该满足什么条件？

数据元素按值有序排列

必须采用顺序存储结构

插值查找(Interpolation Search)*

对于有序顺序表，折半查找时：

```
mid = low + (high-low)/2
```

对于有序顺序表，**插值查找**时：

```
mid=low + (high-low)*(k-a[low])/(a[high]-a[low])
```

插值查找（Interpolation Serach）是根据查找的关键字与查找表中最大最小记录关键字比较后的查找方法，其核心就在于插值的计算：

```
(key-a[low])/ (a[high]-a[low])
```

对于动态表，通常元素没有查找到时要进行插入操作，基于折半查找算法，如何获取元素的插入位置？

```
int insertElem(ElemType list[ ],  ElemType item)
{
     int i=0,j;

     if (N == MAXSIZE) return -1;
     i = searchElem(list, item);          /* 
     for(j=N-1; j>=i; j--)
          list[j+1]=list[j];

     list[i]=item;                        /* 将item插
     N++;
     return 1;
}
```

折半查找

折半查找算法如下:

```
int searchElem(ElemType list[ ], ElemType item)
{
      int low=0, high=n-1, mid;
      while(low <= high){
            mid = (high + low) / 2;
            if(( item < list[mid])
                  high = mid – 1;
            else if ( item > list[mid])
                  low = mid + 1;
            else
                  return (mid);
      }
      return low ;
}
```

延伸阅读*：

折半查找算法效率非常高（时间复杂度仅为$O(\log_2 n)$），针对一些特定的有序集，有没有更快的查找算法呢？

请同学自学有关插值查找(Interpolation Search)及斐波那契查找（Fibonacci Search）算法原理及C实现。

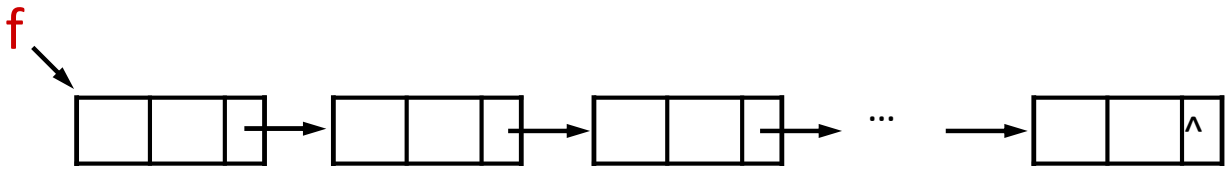
延伸阅读*：

倒排索引（inverted index）是目前搜索引擎中常用的搜索技术。

请同学自学有关倒排索引的基本原理。

三. 链接顺序表的查找

链结点构造



链接顺序表（链表）
适合于动态查找表，
但查找效率低。

算法

```
struct node {
      keytype   key;
      rectype    rec;
      struct node  *link;
} ;
```

```
struct node *search(struct node * p, keytype  k)
{
      for(; p!=NULL; p=p->link )
           if(p->key==k)
                return p;            /* 查找成功 */

      return NULL;                  /* 查找失败 */
}
```

7.3 索引

如何在大规模数据集中快速查找？

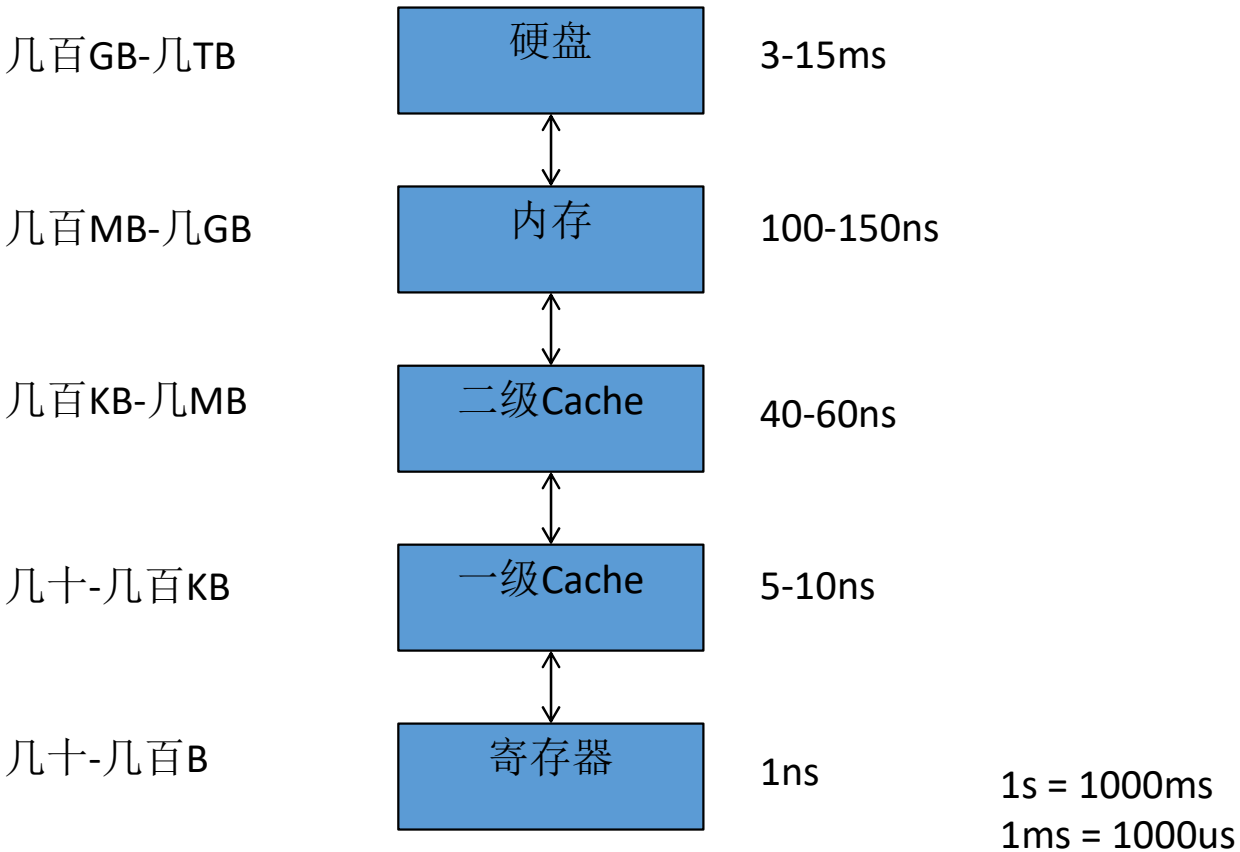
如何根据不同属性查找？

如何利用不同存储介质的性能特性实现快速查找？

Memory Hierarchy

典型容量

典型访问时间



1s = 1000ms
1ms = 1000us
1us = 1000ns

7.3 索引（Index）

一. 索引的基本概念

1.索引

记录关键字值与记录的存储位置之间的对应关系。

2.索引文件

由基本数据与索引表两部分组成的数据集称为索引文件。

3.索引表的特点

(1) 索引表是由系统自动产生的；
(2) 索引表中表项按关键字值有序排列。

二. 稠密索引

特点

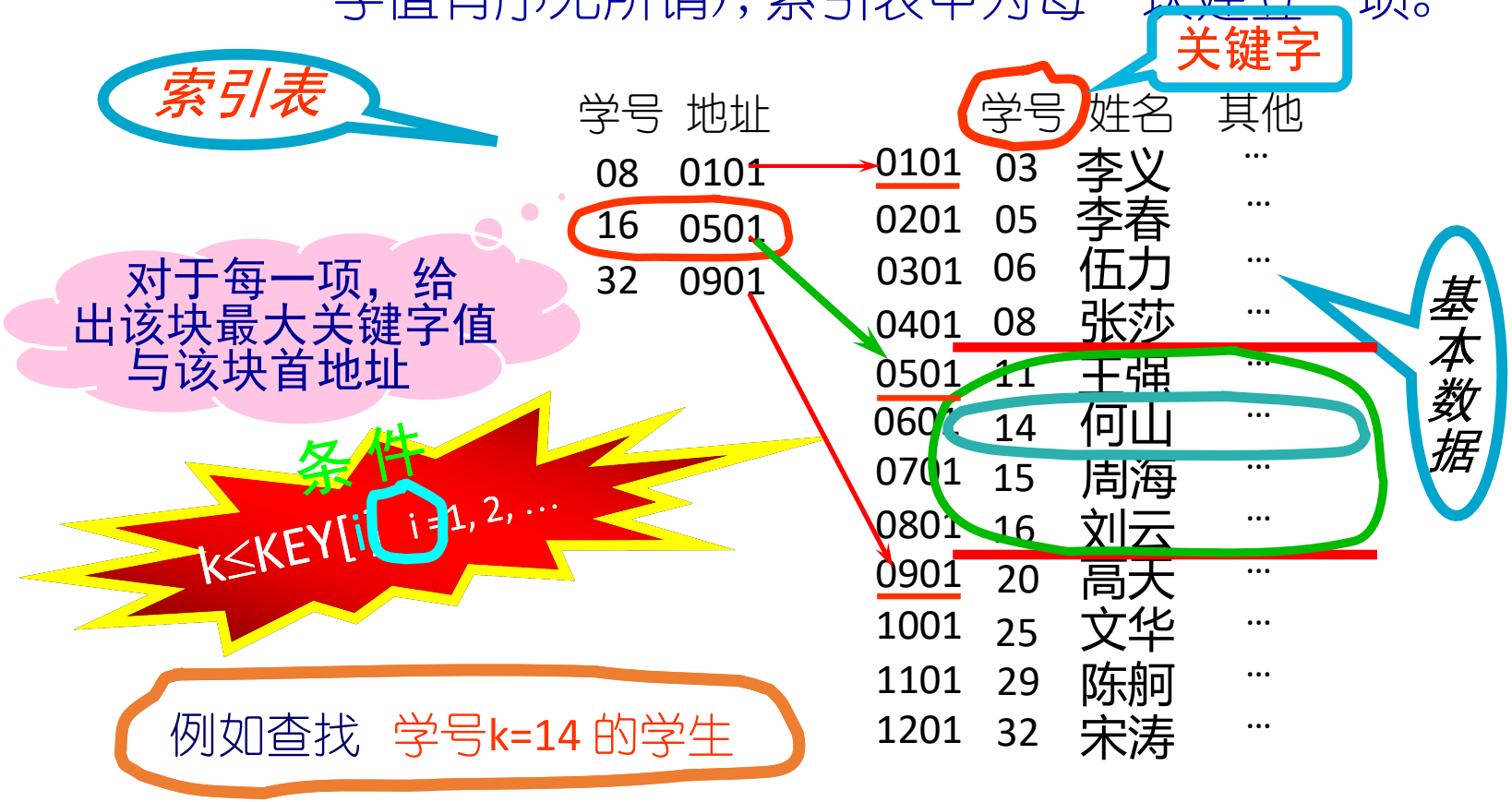
基本数据中的每一个记录在索引表中都占有一项。

结论

在稠密索引文件中查找一个记录存在与否的过程是直接查找索引表。

三. 非稠密索引-分块索引

特点 将文件的基本数据中记录分成若干块(块与块之间记录按关键字值有序，块内记录是否按关键字值有序无所谓)，索引表中为每一块建立一项。



结论

在非稠密索引(分块)文件中查找一个记录存在与否的过程是：

先查找索引表(确定被查找记录所在块)，然后在相应块中查找被查记录存在与否。

四. 多级索引

当索引文件的索引本身非常庞大时，可以把索引分块，建立索引的索引，形成*树形结构的多级索引*。

二叉排序树多级索引结构、
多分树索引结构

在查找数据过程中有时同时要做**插入**或**删除**操作（插入表中不存在的元素或删除找到的元素），这种表称为**动态查找表**（Dynamic Search Table），与此对应，只做查询操作的表称为**静态查找表**(Static Search Table)。对于**动态查找表**：

1）若表**无序**（无论是顺序存储还是链式存储），查找采用**顺序查找**方法，元素的**插入**和**删除**操作简单，但查找**效率低**；
2）若表**有序**，如果采用**顺序存储**，可用折半查找方法，**查找效率高**，但**插入和删除操作效率低**；若采用**链式存储**，**插入和删除操作效率高**，但**查找效率低**（只能用顺序查找方法）；

有没有一种针对动态查找表的数据的组织方式，能够兼顾查找和插入、删除操作的效率？

二叉树排序树（二叉搜索树，Binary Search Tree,BST）

7.4 二叉查找（排序）树（BST）

二叉查找（排序）树的构造原理及查找算法已在“第六讲 树与二叉树”中介绍，在此不再说明。

二叉查找（排序）树采用链式存储，元素插入与删除效率高，同时查找效率通常较高（平衡二叉排序树AVL的查找算法时间复杂度为$O(\log_2 n)$），特别适合动态查找表的数据组织（如单词词频统计中单词表的构造）。

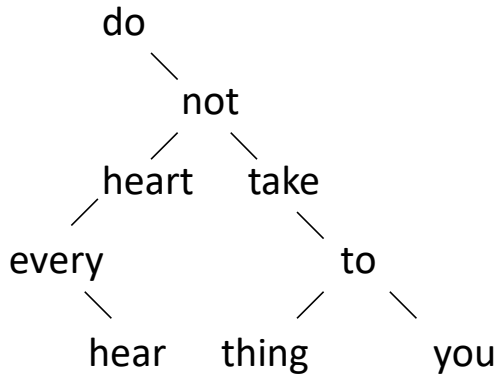
算法

功能：在一个二叉查找树中查找某个元素。若该元素不存在，则将节点插入到二叉查找树中的相应位置上。（特别适合动态查找表的构造和查找）

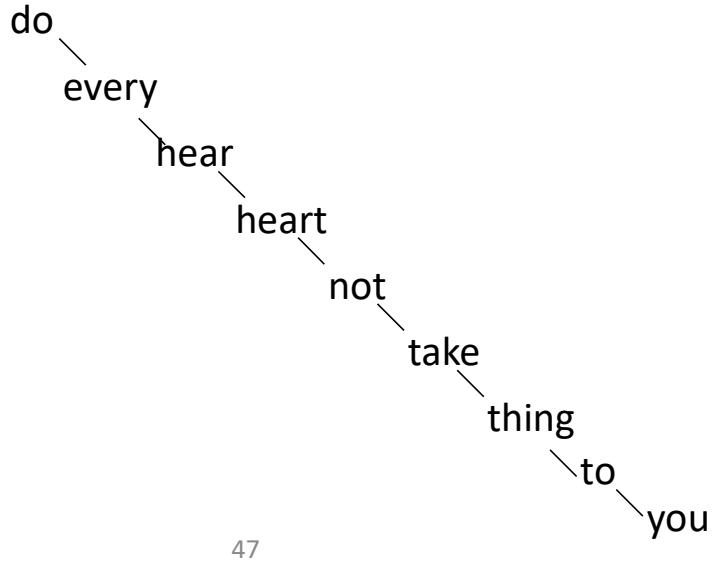
```
BTNodeptr  searchBST(BTNodeptr p, Datatype item)
{
   if(p == NULL){
      p = (BTNodeptr)malloc(sizeof(BTNode));
      p->data = item;
      p->lchild = p->rchild = NULL;
   }
   else if( item < p->data)
      p->lchild = insertBST(p->lchild, item);
   else if( item > p->data)
     p->rchild = insertBST(p->rchild,item);
   else
     do-something; //找到该元素
   return p;
}
```

BST通常不是一棵平衡树，它的树结构与输入数据的顺序有很大的关系，它很难达到理想的O(log2n)查找性能。对于像单词表（字典）这样的数据，有没有更好的数据结构呢？

输入：do not take to heart every thing you hear



输入：do every hear heart not take thing to you



Trie结构及查找*

- 在二叉树遍历中通常是通过比较整个键值来进行的，即每个节点包含一个键值，该键值与要查找的键值进行比较来在树中寻找正确的路径。而用键值的一部分来确定查找路径的树称为trie树（它来源于retrieval）。 *(为了在发音上区别tree，可读作try)*
- 主要应用
  - 信息检索（information retrieval）
  - 用来存储英文字符串，特别是大规模的英文词典（在自然语言理解软件中经常用到，如词频统计、拼写检查）

Trie结构的适用情况*

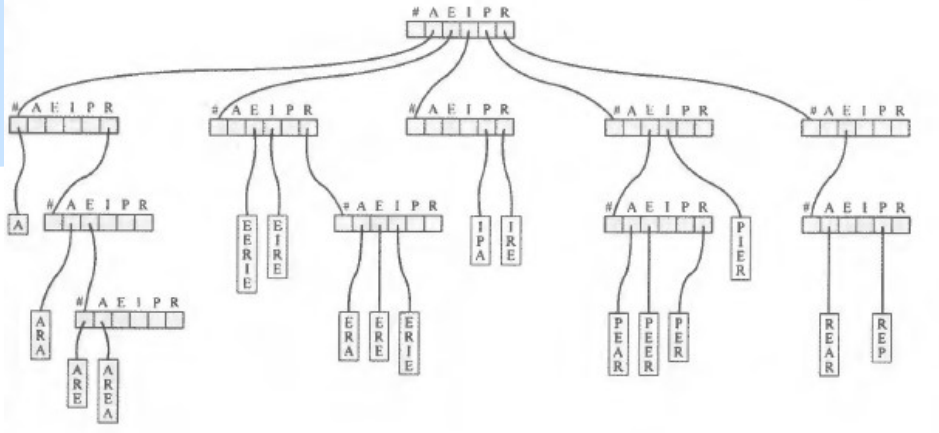
- Trie结构主要基于两个原则：
  - 键值由固定的字符序列组成（如数字或字母），如Huffman码(只由0,1组成)、英文单词（只由26个字母组成）；
  - 对应结点的分层标记；
- Trie结构典型应用“字典树”：英文单词仅由26个字母组成（不考虑大小写）
  - 字典树每个内部结点都有26个子结点 - 多叉树
  - 树的高度为最长单词长度

Tire实际上就是一个多叉树结构。

Trie结构的适用情况*

Tire实际上就是一个多叉树结构。

- Trie结构主要基于两个原则：
  - 键值由固定的字符序列组成（如数字或字母），如Huffman码、英文单词；
  - 对应结点的分层标记；
- Trie结构典型应用“字典树”：英文单词仅由26个字母组成（不考虑大小写）
  - 字典树每个内部结点都有26个子结点
  - 树的高度为最长单词长度



Trie结构构造示例*

一种用于描述单词的**trie**结构定义

```
struct tnode {          // word tree
   char isword;         // is or not a word
   char isleaf;         // is or not a leaf node
   struct tnode *ptr[26];
};
```

```
int main()
{
   char word[MAXWORD];
   struct tnode *root=NULL;
   FILE *dict;
   if((dict = fopen("dictionary.txt", "r")) == NULL){
      fprintf(stderr, "The dictionary don't exist!\n");
      return -1;
    }
   root = talloc();
   while(getWord(dict,word) != EOF)
      wordTree(root,word);
   ....
```

基于**trie**结构的单词树的构造

```
void wordTree(struct tnode *root,char *w)  /* install w
at or below p */
{
   struct tnode *p;
   for(p=root; *w != '\0'; w++){
      if(p->ptr[*w-'a'] == NULL) {
         p->ptr[*w-'a'] = talloc();
         p->isleaf = 0;
      }
      p = p->ptr[*w-'a'];
   }
   p->isword = 1;
}
struct tnode *talloc()
{  int i;
   struct tnode *p;
   p = (struct tnode *)malloc(sizeof(struct tnode));
   isword = 0; isleaf = 1;
   for(i=0; i<26; i++)
      ptr[i] = NULL;
   return p;
}
```

Trie结构性能分析*

- 采用Trie结构，对英文单词来说，树的高度取决于最长的单词长度。绝大多数常用单词通常都不是很长，一般访问几个节点（很可能是5~7个）就可以解决问题。
- 而采用（最理想的）平衡二叉查找树，假设有10000个单词，则树的高度为14（lg10000）。由于大多数的单词都存储在树的最低层，因此平均查找单词需要访问13个节点，是trie树的两倍。
- 此外，在BST树中，查找过程需要比较整个单词（串比较），而在trie结构中，每次比较只需要比较一个字母。
- 因此，在访问速度要求很高的系统中，如拼写检查、词频统计中，trie结构是一个非常好的选择。

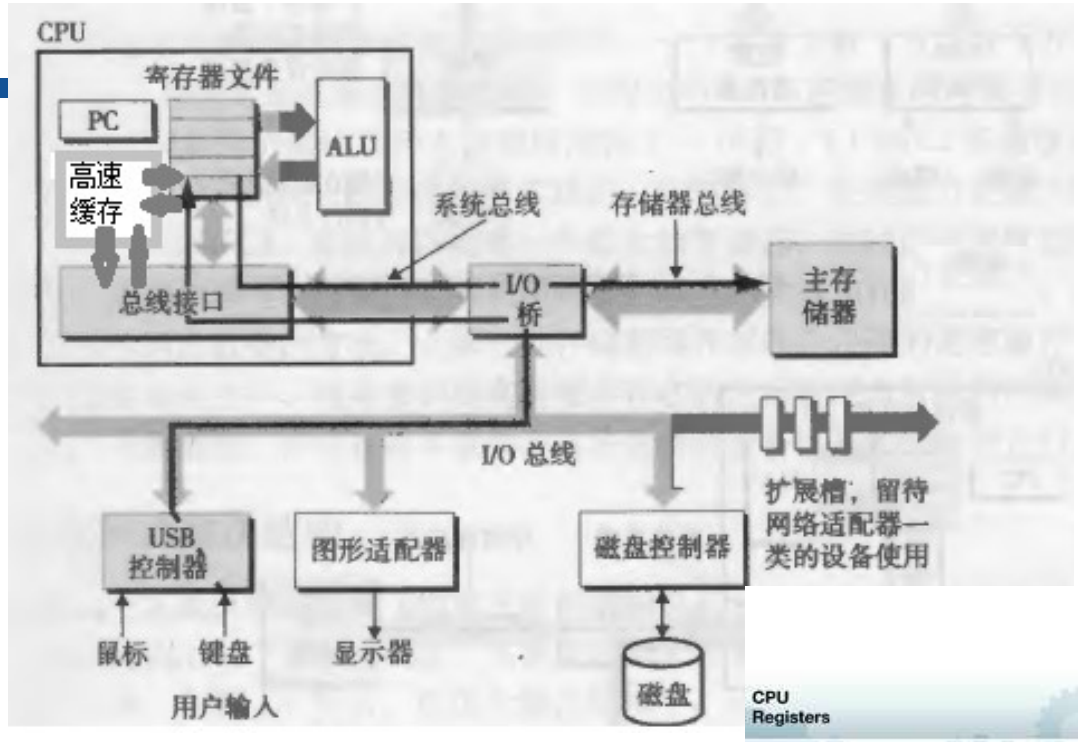
问题：词频统计 – Trie树实现*

Trie查找！

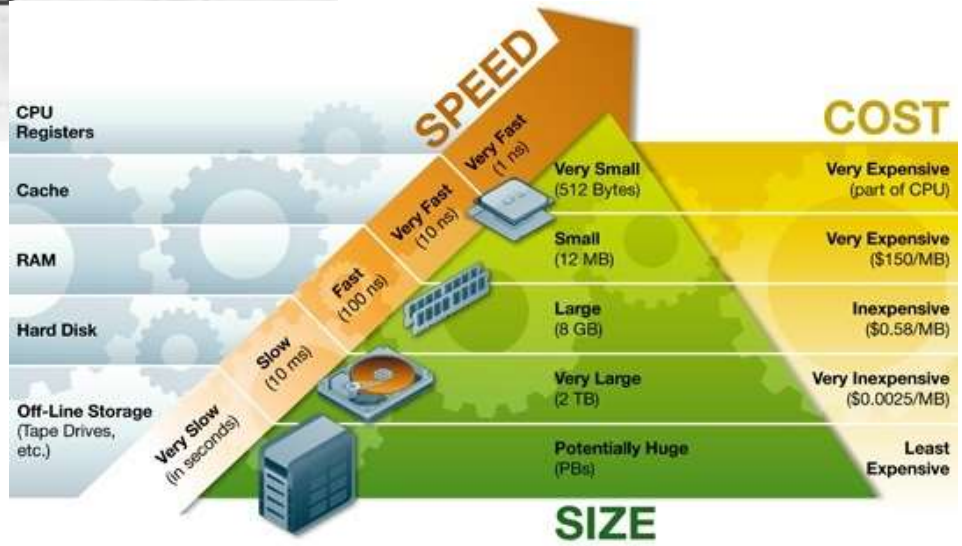
本问题有如下特点：
1. 问题规模不知（即需要统计的单词数量未知），有可很大，如对一本小说进行词频统计；
2. 单词表在查找时需要频繁的执行插入操作，是一种典型的动态查找表。

针对上述问题，在“线性表”一章采用了顺序表、链表来实现；在“树”一章中采用了二叉排序树（BST）来实现。

BST实现方式虽然查找效率较高，但由于树并不是理想的平衡树，查找效率不如折半查找。有没有更好的方法提高查找效率？


CPU
寄存器文件
PC
ALU
高速
缓存
系统总线
存储器总线
总线接口
I/O
桥
主存
储器
I/O 总线
扩展槽，留待
网络适配器一
类的设备使用
USB
控制器
图形适配器
磁盘控制器
鼠标
键盘
显示器
磁盘
用户输入

计算机结构与存储性能


SPEED
COST
SIZE
CPU
Registers
Cache
RAM
Hard Disk
Off-Line Storage
(Tape Drives,
etc.)
Very Fast
(1 ns)
Very Fast
(10 ns)
Fast
(100 ns)
Slow
(10 ms)
Very Slow
(in seconds)
Very Small
(512 Bytes)
Small
(12 MB)
Large
(8 GB)
Very Large
(2 TB)
Potentially Huge
(PBs)
Very Expensive
(part of CPU)
Very Expensive
($150/MB)
Inexpensive
($0.58/MB)
Very Inexpensive
($0.0025/MB)
Least
Expensive

问题：

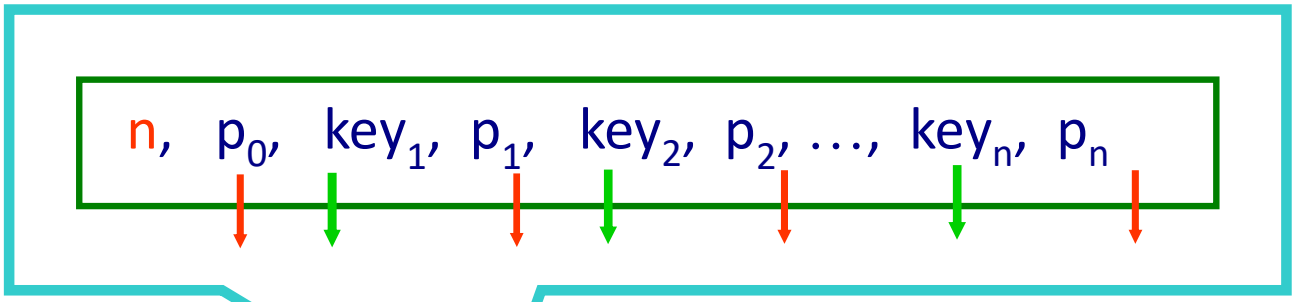
对于一次不能加载至内存中的大数据（如数据库、文件系统）（实际存储在硬盘上，访问速度慢），如何构造索引，使得以尽可能少的硬盘访问次数，找到所要的数据

B树

7.4 B-树和B+树 – 多路查找树

一. B-树的定义

一个m阶的B-树为满足下列条件的m叉树：



p_i指的结点中所有关键字值都大于key_i

(5) 所有分支结点中包含下列信息：

还含有n个指向记录的指针

n, p_0, key_1, p_1, key_2, p_2, …, key_n, p_n

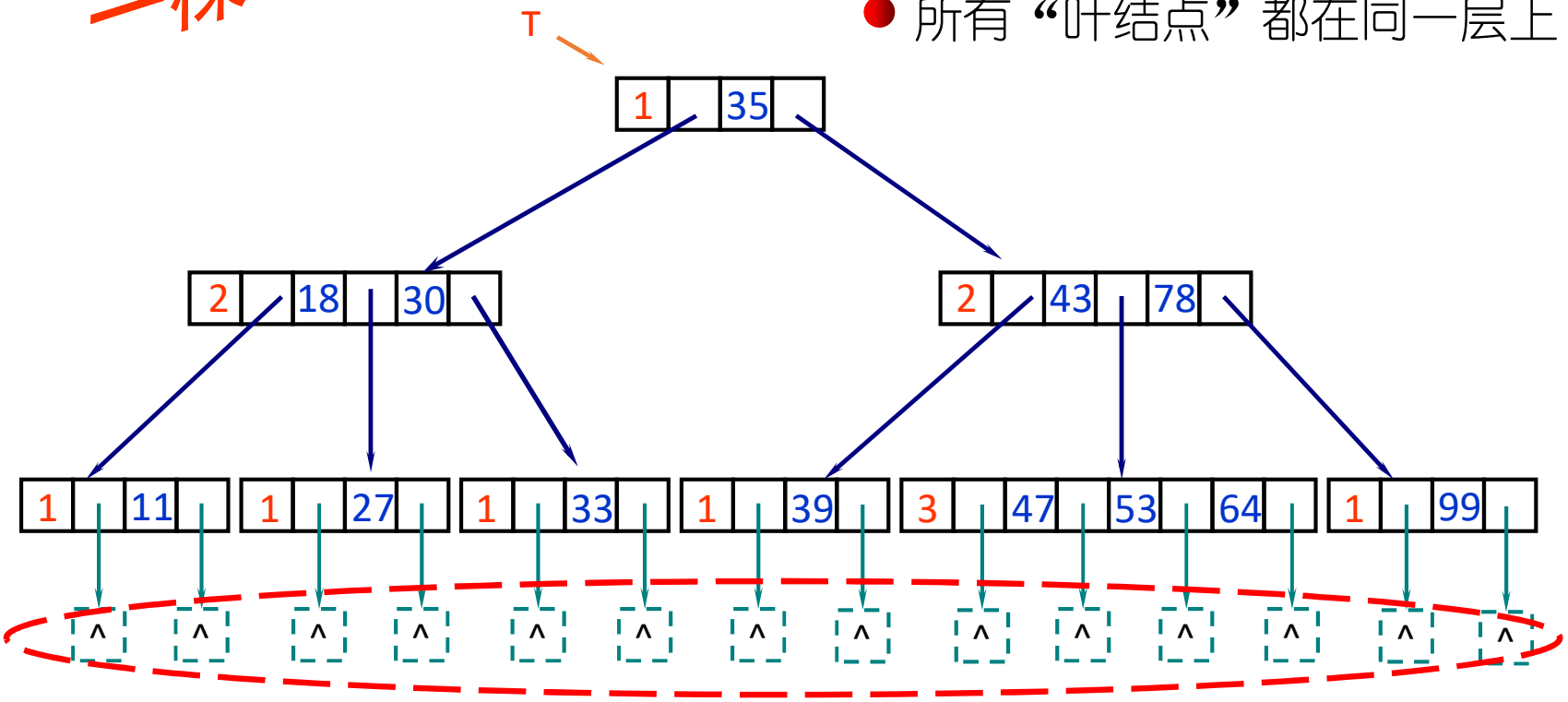
其中，n为结点中关键字值的个数，$n \le m-1$

key_i为关键字，且满足 $key_i < key_{i+1}$ $1 \le i < n$

p_i为指向该结点的第i+1棵子树的根的指针（$0 \le i \le n$）

一棵4阶B-树

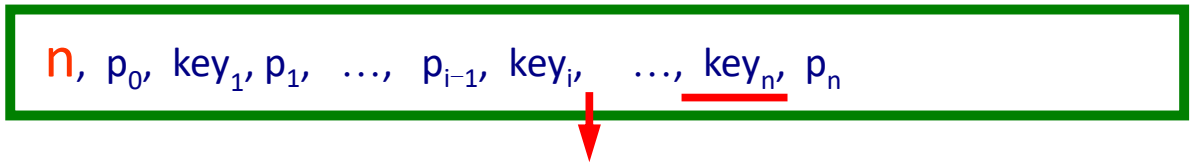
- 每个分支结点最多有4棵子树（即最多有m-1个关键字值）
- 每个分支结点最少有2棵子树
- 根结点最少有2棵子树
- 所有“叶结点”都在同一层上



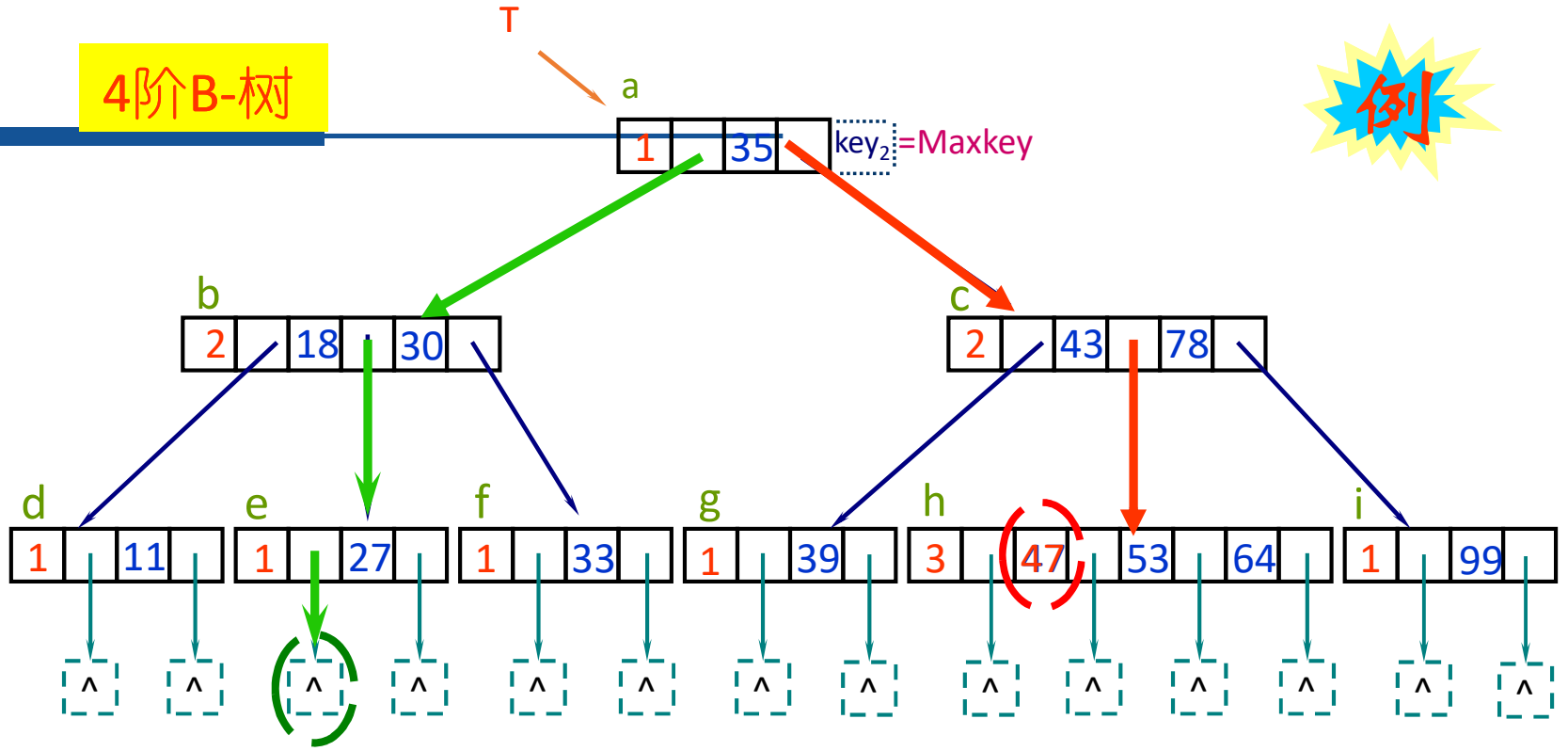
二.B-树的查找

类似于二叉排序树的查找

首先将给定的关键字k在B-树的根结点的关键字集合中采用 **顺序查找法**或者 **折半查找法**进行查找，若有$k=key_i$，则查找成功，根据相应的指针取得记录. 否则，若$k<key_i$，则在指针p_{i-1}所指的结点中重复上述查找过程，直到在某结点中查找成功，或者有$p_{i-1}=NULL$，查找失败。



4阶B-树



例如，查找关键字值k=47

例如，查找关键字值k=23

查找成功 ！

查找失败 ！

原则

(1) $k=key_i$ 查找成功

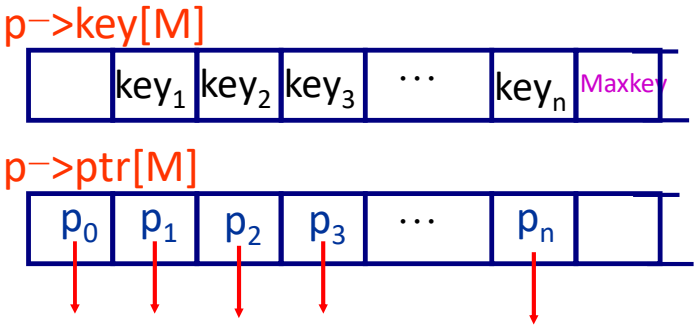
(2) $k<key_i$ 在p_{i-1}所指的结点中查找

类型定义

```
#define M     1000
typedef struct node {
      int  keynum;
      keytype  key[M+1];
      struct node  *ptr[M+1];
      rectype  *recptr[M+1];
} BNode;
```

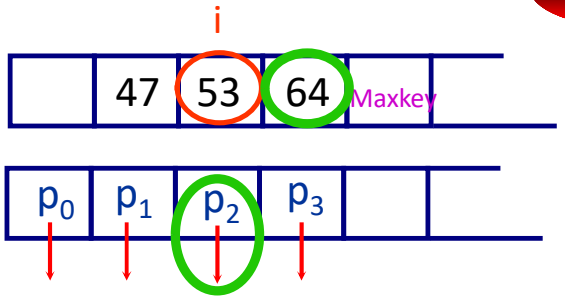
```
keytype  searchBTree(BNode *t,keytype k)
{
    int i,n;
    BNode *p=t;
    while(p!=NULL){
        n=p->keynum;
        p->key[n+1]=Maxkey;
        i=1;
        while(k>p->key[i])
            i++;
        if(p->key[i]==k)
            return  p->key[i];
        else
            p=p->ptr[i-1];
    }
    return  -1;
}
```

在p指结点的关键字集合中查找k



k=53

查找成功！



k=62

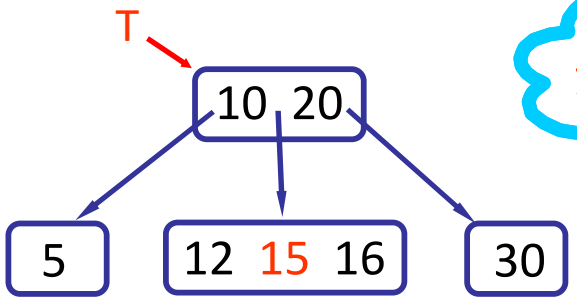
沿着新的指针p_2继续查找！

三.B-树的插入

B-树的生成从空树开始，即逐个在叶结点中插入结点(关键字)而得到

一棵3阶B-树

插入 k=15



一棵m阶B-树的结点中最多有m−1个关键字值

结点分裂

基本思想

若将k插入到某结点后使得该结点中关键字值数目超过m-1时，则要以该结点**位置居中**的那个关键字值为界将该结点**一分为二**，产生一个新结点，并把位置居中的那个关键字值插入到双亲结点中；如双亲结点也出现上述情况，则需要再次进行分裂. 最坏情况下，需要一直分裂到根结点，以致于使得B-树的深度加1。

一般情况下

若某结点已有m−1个关键字值，在该结点中插入一个新的关键字值，使得该结点内容为

q

m	key_1	key_2	key_3	…	key_i	key_{i+1}	…	key_{m-1}	key_m

则需要将该结点分解为两个结点q与q'，即

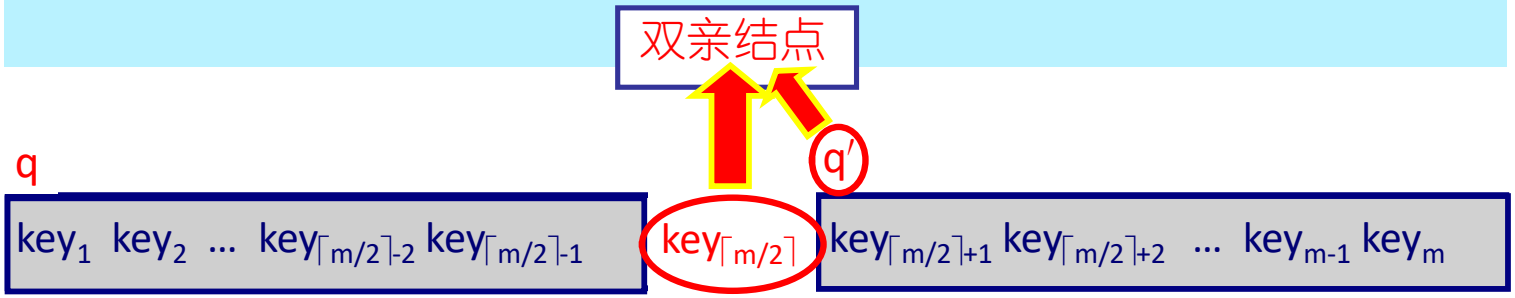
q

$\lceil m/2 \rceil - 1$	key_1	key_2	…	$key_{\lceil m/2 \rceil - 2}$	$key_{\lceil m/2 \rceil - 1}$

q'

$m - \lceil m/2 \rceil$	$key_{\lceil m/2 \rceil + 1}$	$key_{\lceil m/2 \rceil + 2}$	…	key_{m-1}	key_m

并且将关键字值$key_{\lceil m/2 \rceil}$与一个指向q 的指针插入到q的双亲结点中。

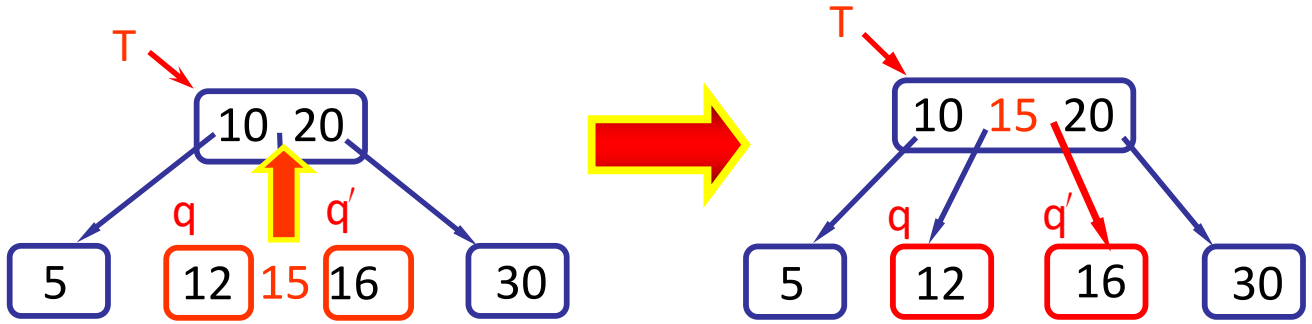


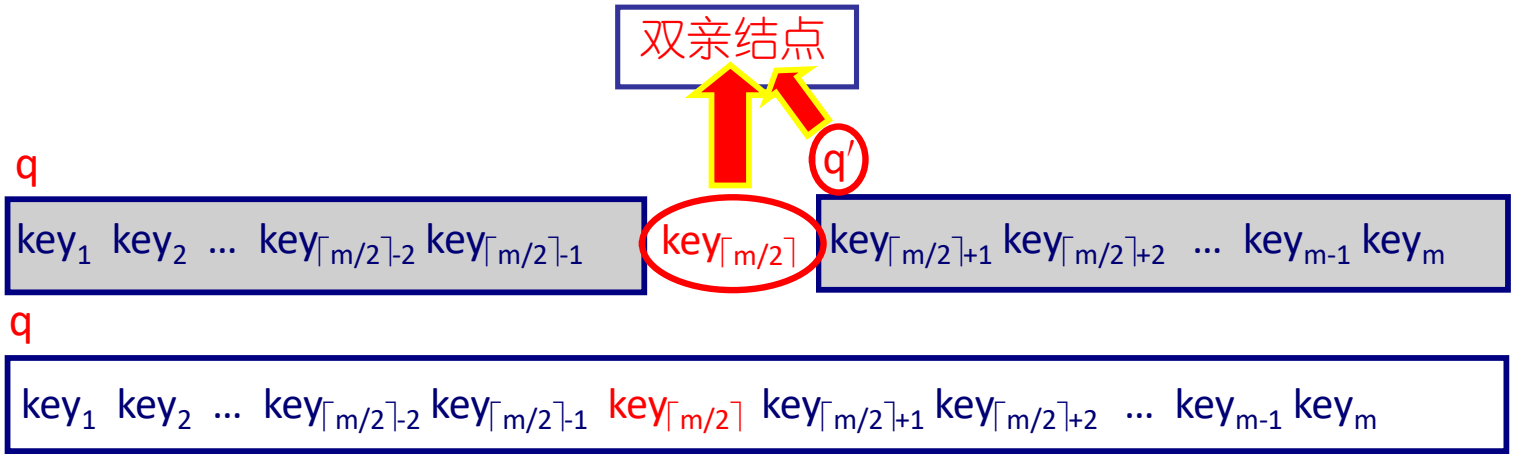
每个分支结点中
关键字个数< 3

3阶B-树

插入15

例





练习

请画出依次插入关键字序列(5,6,9,13,8,1,12,4,3,10)中各关键字值以后的4阶B-树。

B-树的生成从空树开始，即逐个在叶结点中插入结点(关键字)而得到

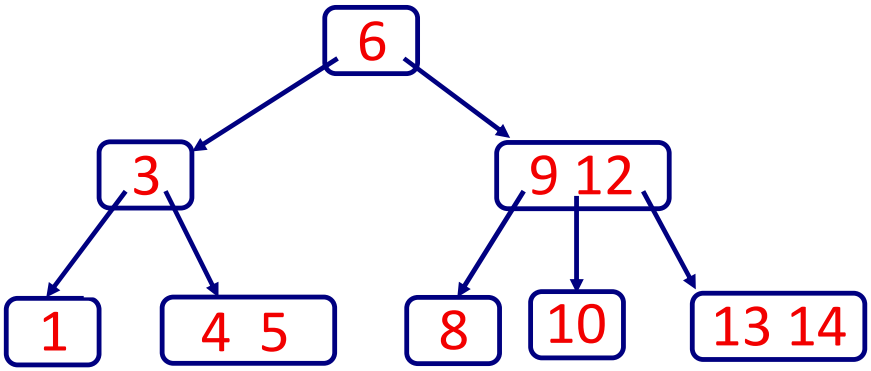
原则

1. 4阶B-树的每个分支结点中关键字个数不能超过3；
2. 生成B-树从空树开始，逐个插入关键字而得到的；
3. 每次在最下面一层的某个分支结点中添加一个关键字;若添加后该分支结点中关键字个数不超过3，则本次插入成功，否则，进行结点分裂。

（5, 6, 9, 13, 8, 1, 12, 14, 10, 4, 3）

4阶B-树

结点分裂



四.B+树的定义

一个m阶的B+树为满足下列条件的m叉树：

同B−树

(1) 每个分支结点最多有m 棵子树；

(2) 除根结点外，每个分支结点最少有⌈m/2⌉棵子树；

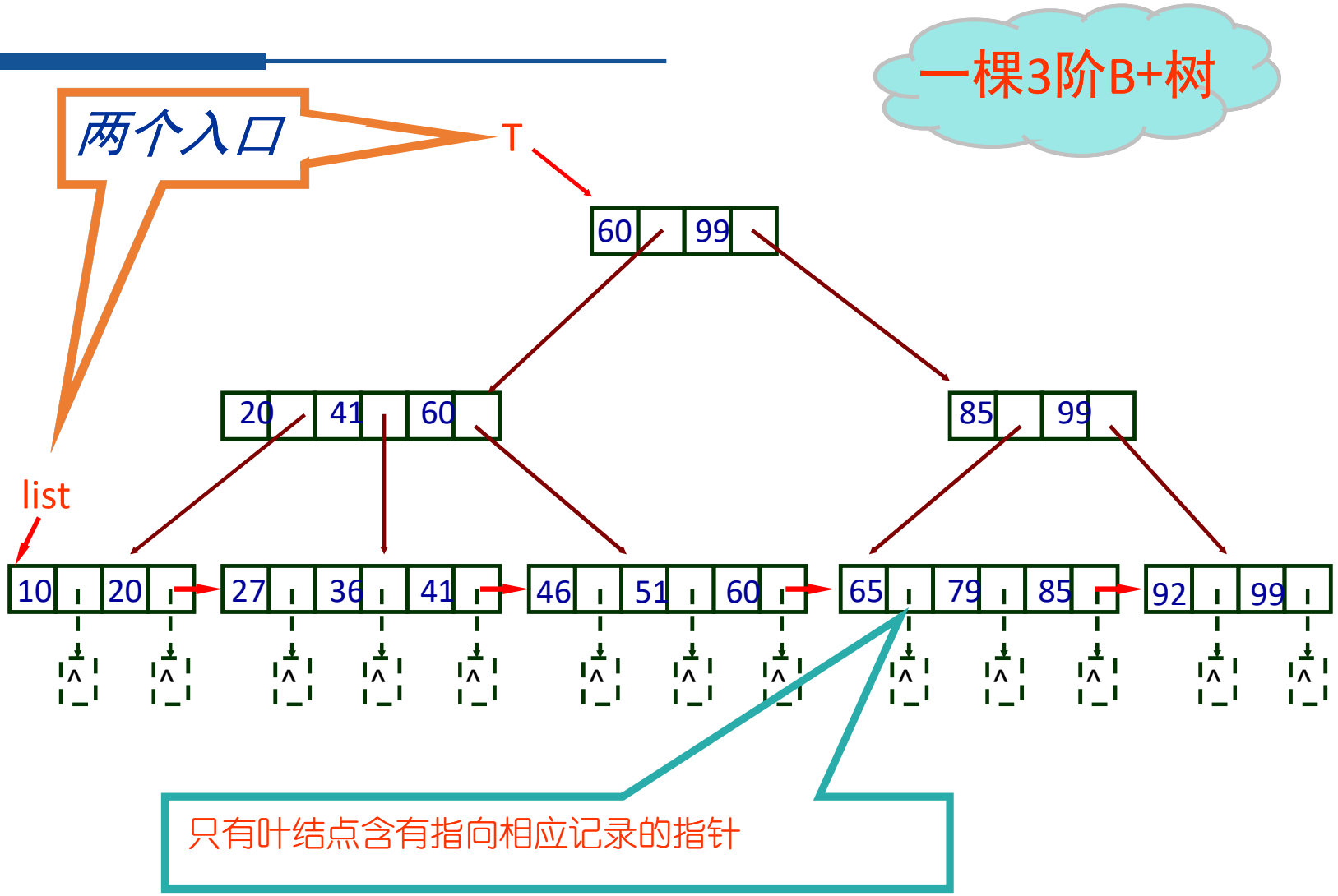
(3) 根结点最少有两棵子树(除非根为叶结点结点，此时B+树只有一个结点)；

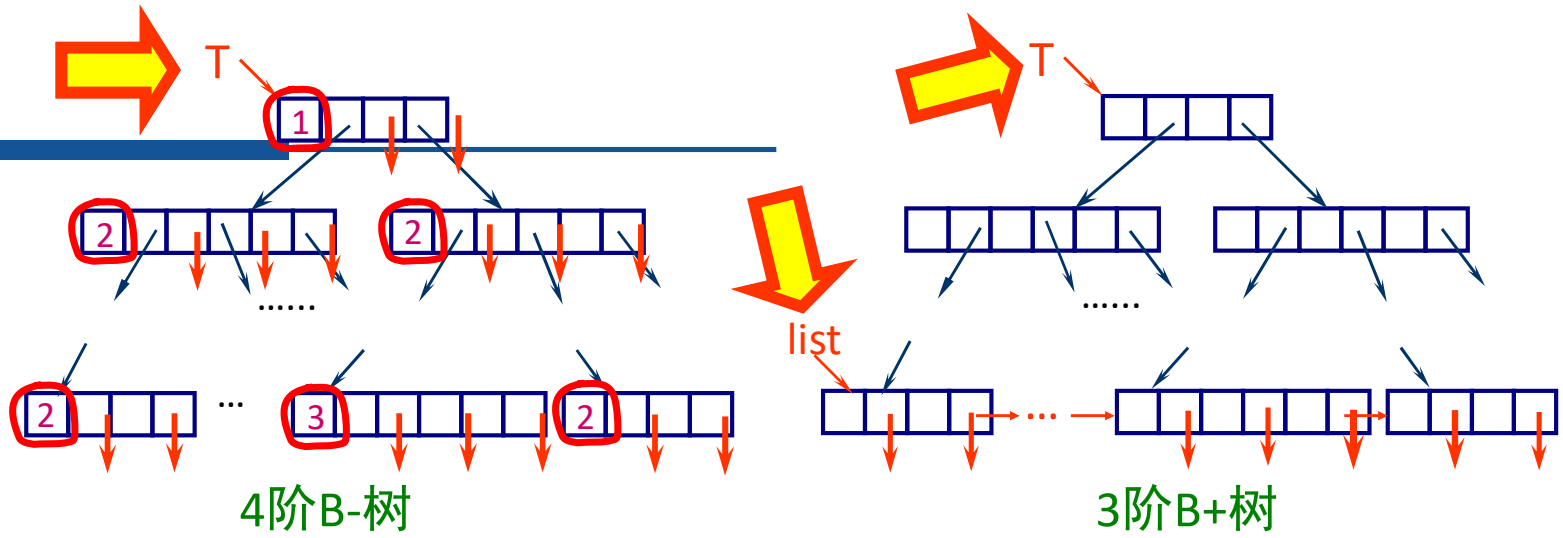
(4) 具有n 棵子树的结点中一定有n 个关键字；

(5) 叶结点中存放记录的关键字以及指向记录的指针，或者数据分块后每块的最大关键字值及指向该块的指针，并且叶结点按关键字值的大小顺序链接成线性链表。

key_1	p_1	key_2	p_2	……	key_n	p_n

(6) 所有分支结点可以看成是索引的索引，结点中仅包含它的各个孩子结点中最大(或最小)关键字值和指向孩子结点的指针。


一棵3阶B+树
两个入口
T
list
60
99
20
41
60
85
99
10
20
27
36
41
46
51
60
65
79
85
92
99
只有叶结点含有指向相应记录的指针



B-树与B+树的区别 （从结构上看）

1. B-树的每个分支结点中含有该结点中关键字值的个数，B+树没有；
2. B-树的每个分支结点中含有指向关键字值对应记录的指针，而B+树只有叶结点有指向关键字值对应记录的指针；
3. B-树只有一个指向根结点的入口，而B+树的叶结点被链接成为一个不等长的链表，因此，B+树有两个入口，一个指向根结点，另一个指向最左边的叶结点(即最小关键字所在的叶结点)。

背景*：B-树是1970年由R.Bayer和E.MacCreight提出的，是一种平衡的多路树。为什么叫B-树，有人认为是由“平衡(Balanced)”而来，而更多认为是因为他们是在Boeing科学研究实验发明的此概念并以此命名的。

B-树多用于文件系统或数据库系统的索引结构。

7.5 散列(Hash)查找

一. 散列查找的基本概念

顺序存储的顺序查找法和折半查找法 、索引查找法以及基于树的（BST树、Trie树、B-树B+树）的查找方法。

学号	姓名	年龄	…
99001	王　亮	17	…
99002	张　云	18	…
99003	李海民	20	…
99004	刘志军	19	…
…	…		
99049	周　颖	18	…
99050	罗　杰	16	…

基于关键字值比较的查找方法

查找的时间效率主要取决于查找过程中进行的比较次数

散列表是计算机科学里的一个伟大发明，它是由数组、链表和一些数学方法相结合，构造起来的一种能够高效支持动态数据的存储和查找的结构，在程序设计中经常使用。

能否有一种不经过任何关键字值的比较或者经过很少次的关键字值的比较就能够达到目的方法

答案是肯定的。需要建立记录的关键字与记录的存储位置之间的关系。

1. 基本概念

$$A = H(k)$$

其中，k 为记录的关键字，H(k)称为散列函数，或哈希(Hash)函数，或杂凑函数。函数值A为k对应的记录在查找表中位置。

例1

关键字

学号	姓名	性别	…
99001	张 云	女	…
99002	王 民	男	…
99003	李 军	男	…
99004	汪 敏	女	…
……	… …	…	
99030	刘小春	男	…

1	张 云 …
2	王 民 …
3	李 军 …
4	汪 敏 …
:	……
:	
30	刘小春 …

地址范围: [1..30]

散列函数: H(k)=k–99000

例2

关键字

学 号	姓名	性别	…
99001	张 云	女	…
99002	王 民	男	…
99003	李 军	男	…
99004	汪 敏	女	…
……	… …	…	
99030	刘小春	男	…

1	李 军 …
2	张 云 …
3	
4	王民 …
:	…
:	
30	

汪敏

地址冲突

地址范围：[1..30]

散列函数：

H(k)=“将组成关键字k的串转换为一个1—30之间的代码”

一个处理过程

H(张云)=2
H(王民)=4
H(李军)=1
H(汪敏)=4

选择一种处理冲突的方法

2. 散列冲突

对于不同的关键字k_i与k_j，经过散列得到相同的散列地址，即有

$$H(k_i) = H(k_j)$$

这种现象称为**散列冲突**。

称k_i与k_j为“同义词”

3. 什么是散列表

根据构造的散列函数与处理冲突的方法将一组关键字映射到一个有限的连续地址集合上，并以关键字在该集合中的“象”作为记录的存储位置，按照这种方法组织起来表称为**散列表**，或**哈希表**，或称**杂凑表**；建立表的过程称为哈希造表或者散列，得到的存储位置称为散列地址或者杂凑地址。

二. 散列函数的构造

1. 原 则

- 散列函数的定义域必须包括将要存储的全部关键字；若散列表允许有m个位置时，则函数的值域为[0 .. m–1]（地址空间）。
- 利用散列函数计算出来的地址应能尽可能均匀分布在整个地址空间中。
- 散列函数应该尽可能简单，应该在较短的时间内计算出结果。

一个“好”的散列函数

2. 建立散列表的步骤

- 确定散列的地址空间(地址范围)；
- 构造合适的散列函数；
- 选择处理冲突的方法。

详见相关参考书

3. 散列函数的构造方法

1. 直接定址法
2. 数字分析法
3. 平方取中法
4. 叠加法
5. 基数转换法
6. 除留余数法

一般形式

$H(k)=ak+b$

$H(k)=k-99000$

除留余数法

$$H(k) = k \ \text{MOD} \ p$$

其中，若m为地址范围大小(或称表长)，
则p可为小于等于m的素数。

散列地址范围[0..m−1]

三. 冲突的处理方法

所谓处理冲突，是在发生冲突时，为冲突的元素找到另一个散列地址以存放该元素。如果找到的地址仍然发生冲突，则继续为发生冲突的这个元素寻找另一个地址，直到不再发生冲突。

1.开放地址法

闭散列方法

所谓开放地址法是在散列表中的“空”地址向处理冲突开放。即当散列表未满时，处理冲突需要的“下一个”地址在该散列表中解决。

$$D_i = (H(k) + d_i) \text{ MOD } m \qquad i=1, 2, 3, \ldots$$

其中，H(k)为哈希函数，m为表长，d_i为地址增量，有：

(1) $d_i=1, 2, 3, \ldots, m-1$ 称为线性探测再散列

(2) $d_i=1^2, -1^2, 2^2, -2^2, \ldots,$ 称为二次探测再散列

(3) d_i=伪随机数序列 称为伪随机再散列

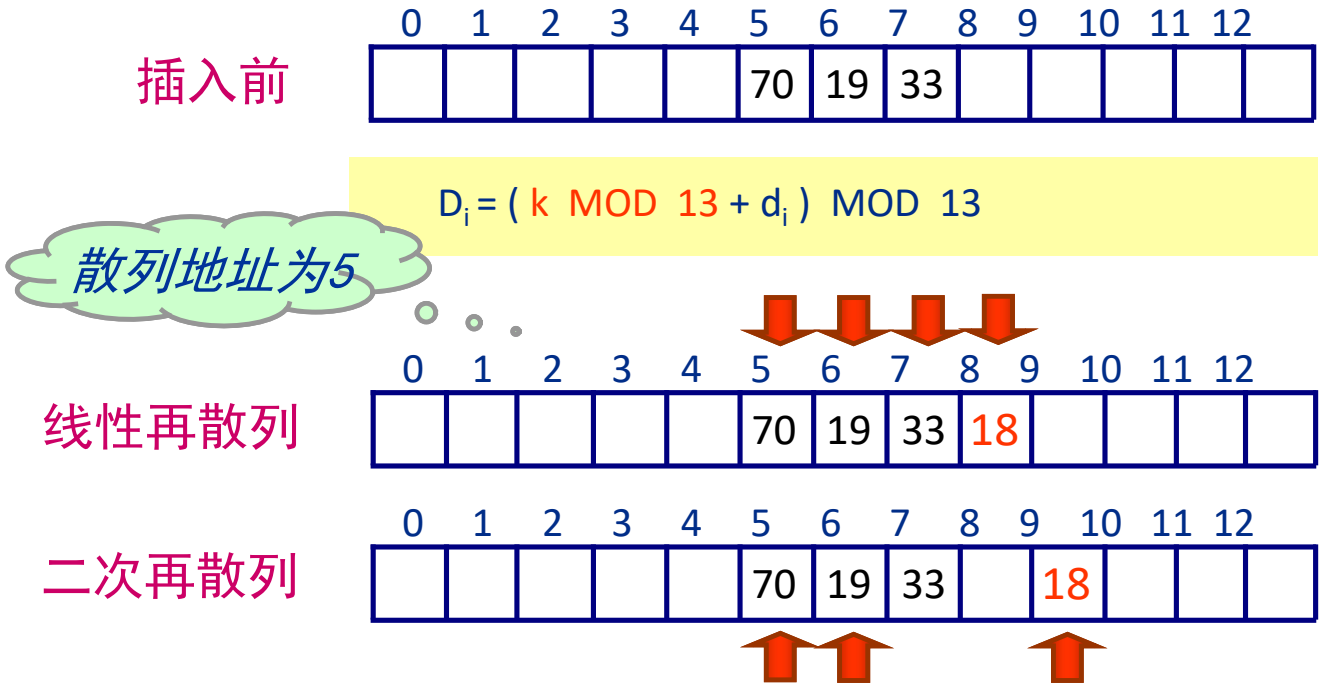
例3

设散列函数为

$$H(k) = k \ \ MOD \ \ 13$$

除留余数法

散列表为[0..12],表中已分别有关键字为19,70,33的记录，现将第四个记录(关键字值为18)插入散列表中。



(查找)

采用线性探测再
散列方法处理冲突

散列函数：

$H(k)=k \ MOD \ 13$

$D_i = (k \ MOD \ 13 + d_i) \ MOD \ 13$

HT:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	38				70	19	33	18				25

key=70　key=18　key=38　key=20

例4

查找

已知有长度为M的散列表HT[0..M–1]，散列函数为H(k)，并且采用线性探测再散列方法处理冲突。请写出在该散列表中查找关键字值为key的元素存在与否的算法。若存在，则给出它在表中的位置，否则，给出相应信息。

例

$H(k)=k \ MOD \ 13$

$D_i = (k \ MOD \ 13 + d_i) \ MOD \ 13$

HT:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	38				70	19	33	18				25

key=70　key=18　key=38　key=20

聚集 —— 散列地址不同的元素争夺同一个后继散列地址的现象。

产生聚集的主要原因

1. 散列函数选择得不合适；
2. 负载因子过大。

装填因子

负载因子 —— 衡量散列表的 **饱满程度**

$$\alpha = \frac{\text{散列表中实际存入的元素数}}{\text{散列表中基本区的最大容量}}$$

一般情况下，$\alpha<1$，α越大，散列表越满

特点

- “线性探测法”容易产生元素“聚集”的问题。
- “二次探测法”可以较好地避免元素“聚集”的问题，但不能探测到表中的所有元素(至少可以探测到表中的一半元素)。
- 只能对表项进行逻辑删除(如做删除标记)，而不能进行物理删除。使得表面上看起来很满的散列表实际上存在许多未用位置。

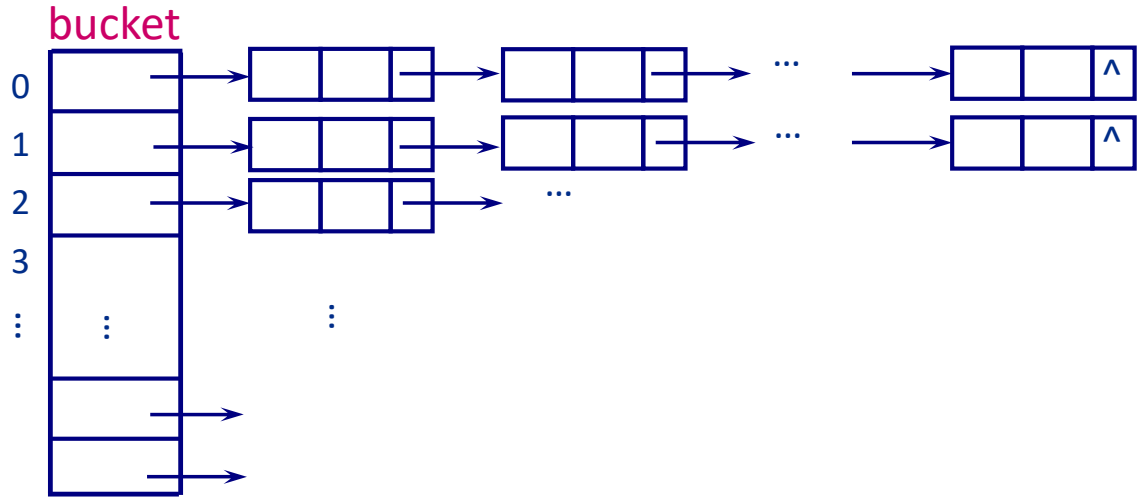
2.再散列法

$D_i = H_i(k)$　　i=1, 2, 3, …

其中，D_i为散列地址，$H_i(k)$为不同的散列函数。

3.链地址法

将所有散列地址相同的记录链接成一个线性链表。若散列范围为[0..m−1], 则定义指针数组bucket[0..m−1]分别存放m个链表的头指针。

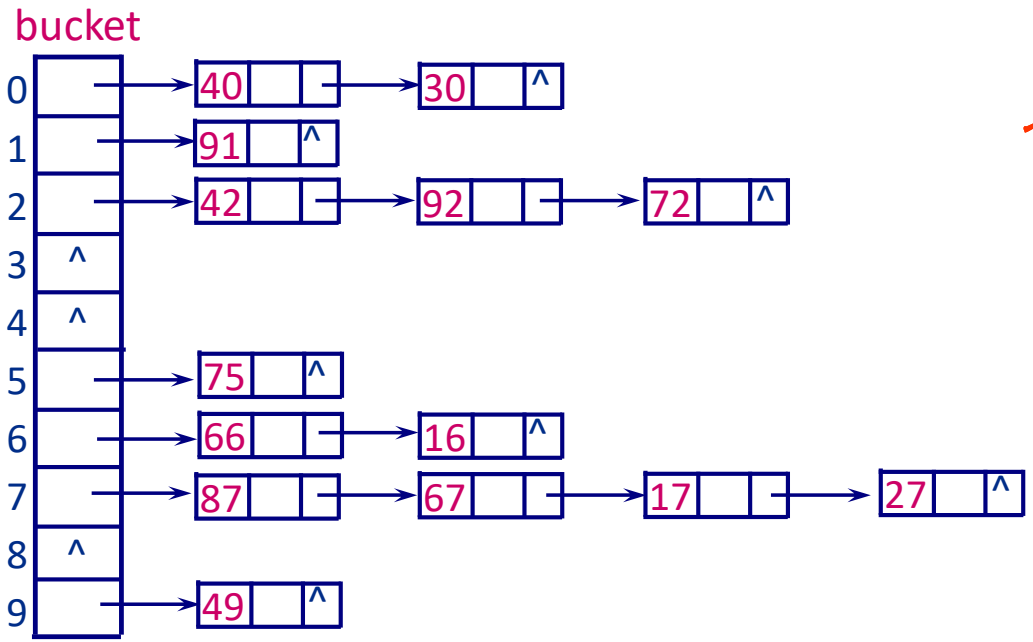


例5

设散列函数为

$$H(k) = k \ \ MOD \ \ 10$$

散列表为[0..9],采用链地址法处理冲突, 画出关键字序列{75,66,42,192,91,40,49,87,67,16,17,30,72,27}对应的记录插入散列表后的散列文件。



散列表

（链地址法）散列表的查找与创建*

算法*

散列表定义

```
struct node {
        ElemType   data;
        struct node   *next;
} ; //list
struct node * Hashtab[NHASH];
```

散列表的查找和创建函数：

```
/*lookup: find key in Hashtab */
struct node *lookup(ElemType key, int create)
{
   unsigned int h;
   strcut node *p;

   h = hash(key);
   for(p=Hashtab[h]; p!=NULL; p=p->next)
      if(p->data == key)
         return p;
   if(create) {
      p = (struct node *)malloc(sizeof(struct node));
      p->data = key; p->next = Hashtab[h];  Hashtab[h] = p;
   }
   return p;
}
```

说明：

1. 当散列出现冲突时，新插入的元素放在链表的**头部**，这样算法简洁，效率更高；
2. 由于链表查找效率低，可使用一棵**二叉查找树**或另一个**散列表**来代替链表解决冲突。

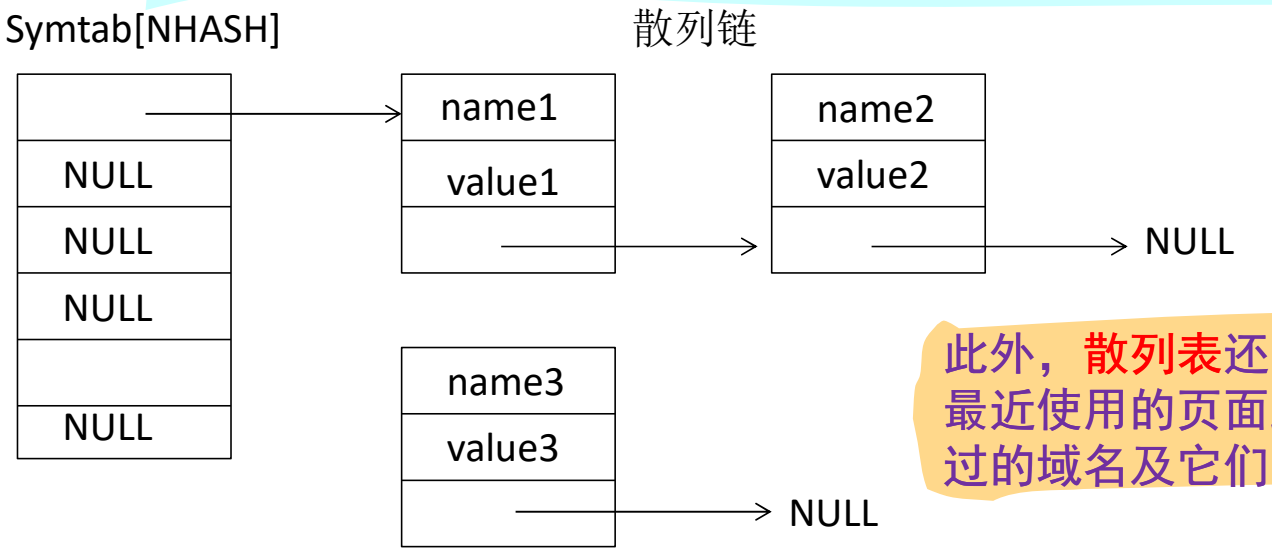
特点

- 处理冲突简单，不会产生元素“聚集”现象，平均查找长度较小。
- 适合建立散列表之前难以确定表长的情况。
- 建立的散列表中进行删除操作简单。
- 由于指针域需占用额外空间，当规模较小时，不如“开放地址法”节省空间。

散列表的典型应用*

散列表的一个典型应用是**符号表（symbol）**，用于在数据值和动态符号（如变量名，关键码）集的成员间建立一种关联。符号表是**编译系统**中主要的数据结构，用于管理用户程序中各个变量的信息，通常编程系统使用散列表来组织符号表。

散列表的思想就是把关键码送给一个散列函数，以产生一个散列值，这种值通常平均分布在一个适当的整数区间中，用作存储信息的表的下标。常见做法是为每一个散列值关联一个数据项的链表，这此项共有同一个散列值（散列冲突）。



此外，**散列表**还常用于浏览器中维持最近使用的页面踪迹、缓存最近使用过的域名及它们的IP地址。

符号表定义与使用*

```
struct  val { //符号散列表义：
   char *name;
   int value;
   struct val *next;
};
struct  val  *symtab[NHASH];
```

```
符号查找和创建函数：
/*lookup: find name in symtab */
struct val *lookup(char  *name, int create)
{
   int h;
   strcut val *p;
   h = hash(name);
   for(p=symtab[h]; p!=NULL; p=p->next)
      if(strcmp(name, p->name) == 0)
         return p;
   if(create) {
      p = (struct val *)malloc(sizeof(struct val));
      p->name = name; p->next = symtab[h];  symtab[h] = p;
   }
   return p;
}
```

```
Hash函数：
/*hash: compute hash value of string */
enum  { MULTIPLIER = 31 }; //根据经验，对于ASCII串31,37很好
unsigned int hash(char *str)
{
   unsigned int h=0;
   char *s;
   for(s=str; *s!= '\0'; s++)
      h = MULTIPLIER * h + *s;
   return h%NHASH;
}
```

一个针对字符串好的Hash函数：

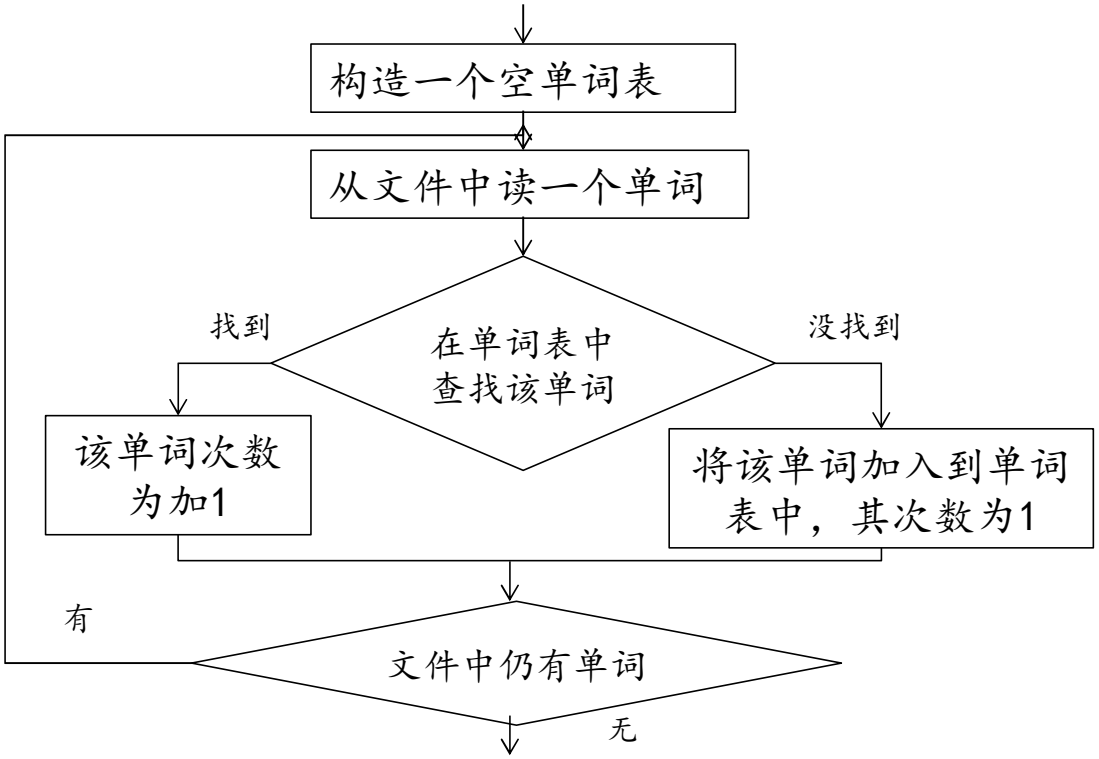
*(**from Data Structures and Algorithm Analysis in C** – Mark Allen Weiss)*

```
/*hash: compute hash value of string */
unsigned int hash(char *str)
{
    unsigned int h=0;

    while(*str != '\0')
        h = (h<<5) + *str++;
    return h%TableSize;
}
```

问题2.1：词频统计 – Hash表*

- 问题：编写程序统计一个文件中每个单词的出现次数（词频统计），并按字典序输出每个单词及出现次数。
- 算法分析：本问题算法很简单，基本上只有查找和插入操作。



问题：词频统计 – Hash实现*

散列（Hash）查找！

本问题有如下特点：
1. 问题规模不知（即需要统计的单词数量未知），有可很大，如对一本小说进行词频统计；
2. 单词表在查找时需要频繁的执行插入操作，是一种典型的动态查找表。

针对上述问题，在“线性表”一章采用了顺序表、链表来实现；在“树”一章中采用了二叉排序树（BST）来实现。

BST实现方式虽然查找效率较高，但由于树并不是理想的平衡树，查找效率不如折半查找。有没有更好的方法提高查找效率？

问题：词频统计 - 查找性能分析

查找与存储方式	比较次数	运行时间	说明
折半查找 + 顺序表			需要移动数据，查找性能为$O(\log_2 N)$
顺序查找+链表			不需要移动数据，但查找效率低，查找性能为O(N)
BST树			理想情况下（平衡树）查找性能为$O(\log_2 N)$
字典树（Trie）			查找性能与单词规模无关，只与单词平均长度有关
Hash查找			查找性能与单词规模无关，只与Hash冲突数有关

数据说明：文本大小1.9M，单词数，单词总数

本章内容小结

表及查找

一、查找表的基本概念

1. ~~基本名称术语~~
2. 表的逻辑结构与物理结构
3. 表的基本操作　　(查找、排序)

二、顺序表及其查找

1. 顺序文件的基本概念
   - 一般顺序表、排序顺序表
   - 连续顺序表、链接顺序表
   - 排序连续顺序表
2. 连续顺序表的查找
   - 顺序查找法
   - 折半查找法

   } (递归和非递归过程)
   - 时间复杂度分析　(判定树)
3. 链接顺序表的查找

三、索引表及其查找

1. 索引表的基本概念
   - 索引与索引表
   - 索引表的特点
2. 索引表的查找

   稠密索引与非稠密索引表的查找

四、B-树与B+树

1. B-树的结构
2. B-树的查找
3. B-树的插入（结点的分解原则）
4. B+树的结构
5. B-树与B+树的异同

五、散列(Hash)表及其查找

1. 散列的基本概念

- 散列函数及其构造方法(原则)
- 散列冲突

2. 散列冲突的处理方法

- 开放地址法
- 再散列法
- 链地址法

一个结论

在各种查找方法中，

只有 *散列查找法*

的平均查找长度ASL与

元素的个数n无关

为什么？

在散列函数与散列地址范围都分别相同的前提下，为什么说采用链地址法处理冲突比采用开放地址法的时间效率高？

为什么？

顺序查找法、折半查找法、树型查找法和散列查找法四种查找方法中，只能在顺序存储结构上进行的查找方法是哪一种？

结束！