ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

<u>2η Ομάδα Ασκήσεων</u>

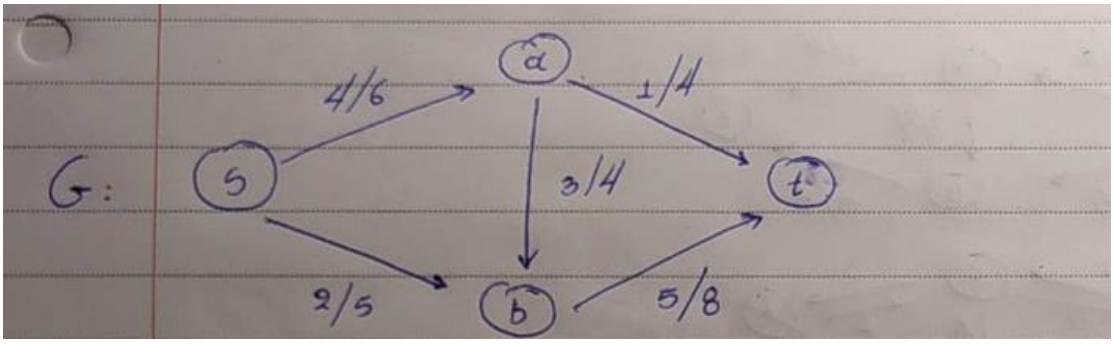
Ονοματεπώνυμο: Δούρου Βασιλική Ευαγγελία

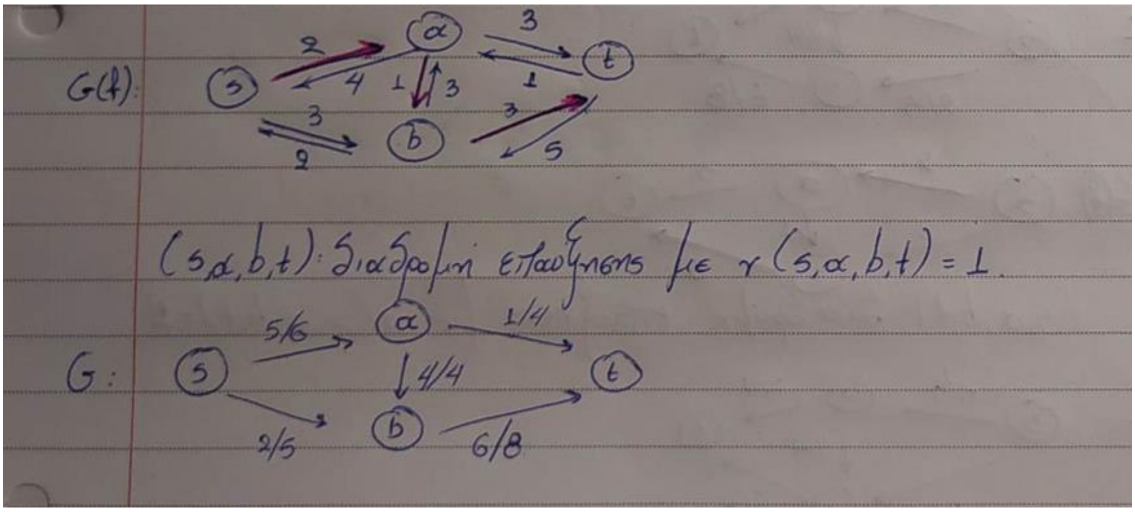
Α.Μ.: 1072633

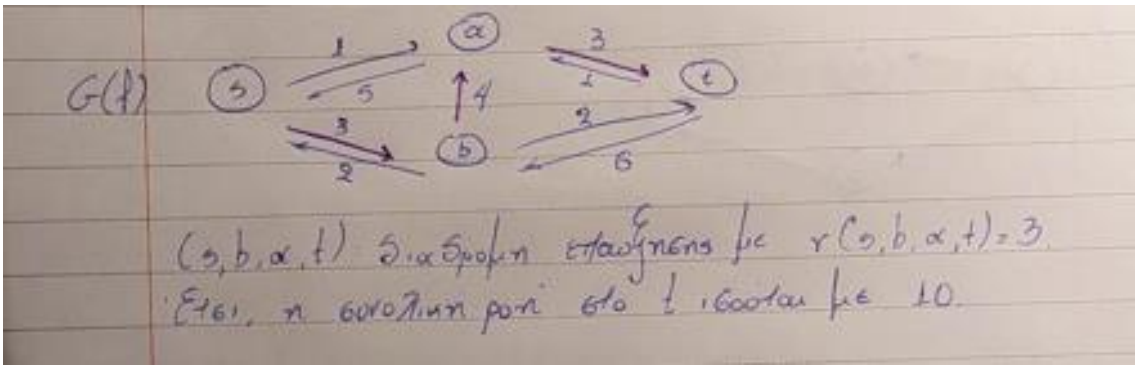
Έτος: 4ο

1. Η υπολειπόμενη χωρητικότητα σε ένα δίκτυο G ορίζεται ως η χωρητικότητα που απομένει σε μία ροή που υπάρχει ήδη. Αν σε μία ακμή (u,v) ωθήσουμε ροή f, τότε αυξάνουμε την δυνατότητα να ωθήσουμε ροή προς την αντίθετη ακμή (v,u) κατά f, όπου $f(v,u)=f'(u,v)=-f(u,v)$.

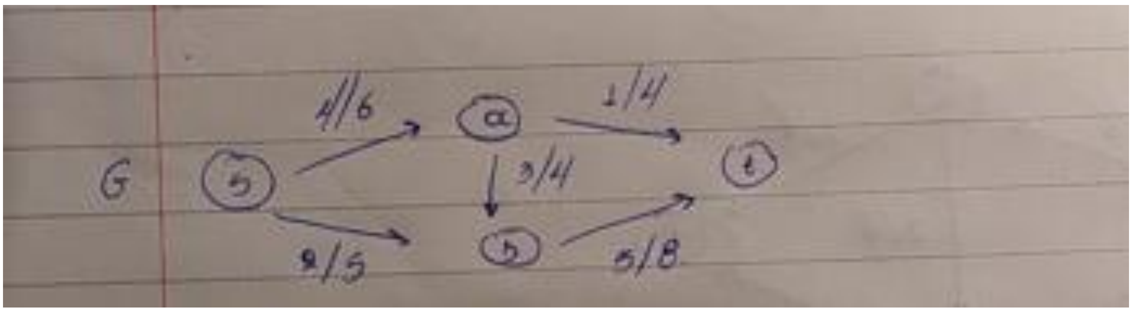
Η ροή στο ακόλουθο δίκτυο G που παράγεται με τη μέθοδο της διαδρομής επαύξησης, όπου $r(v,w)=c(v,w)-f(v,w)+f'(v,w)$ υπολογίζεται όπως ακολουθεί:

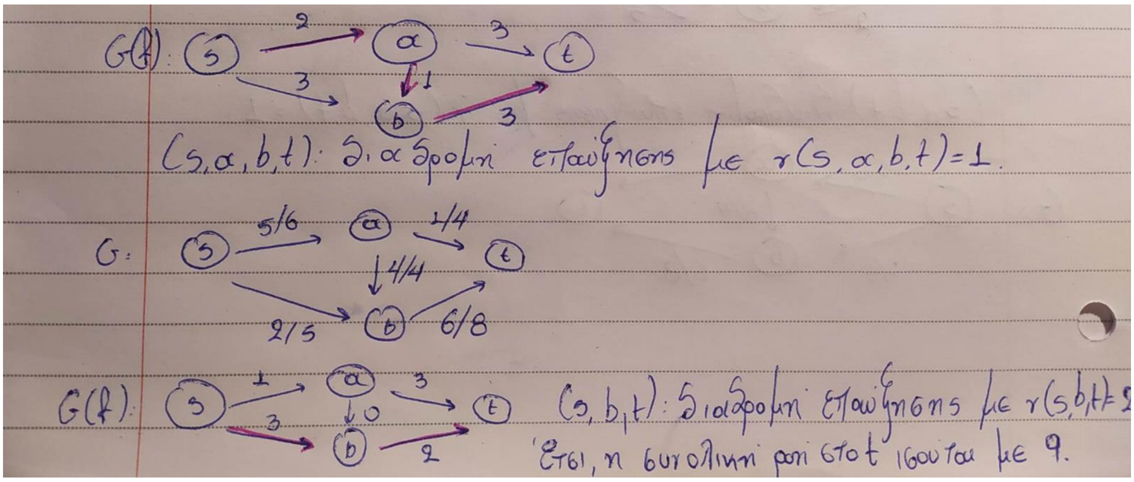






Αν η υπολειπόμενη χωρητικότητα οριστεί ως r(v,w)=c(v,w)-f(v,w) τότε η ροή που παράγεται από τη μέθοδο της διαδρομής επαύξησης υπολογίζεται όπως παρακάτω:





Παρατηρούμε, ότι ενώ με τον πρώτο ορισμό της υπολειπόμενης χωρητικότητας η ροή που παράχθηκε ήταν ίση με 10, με τον δεύτερο ορισμό είναι ίση με 9.

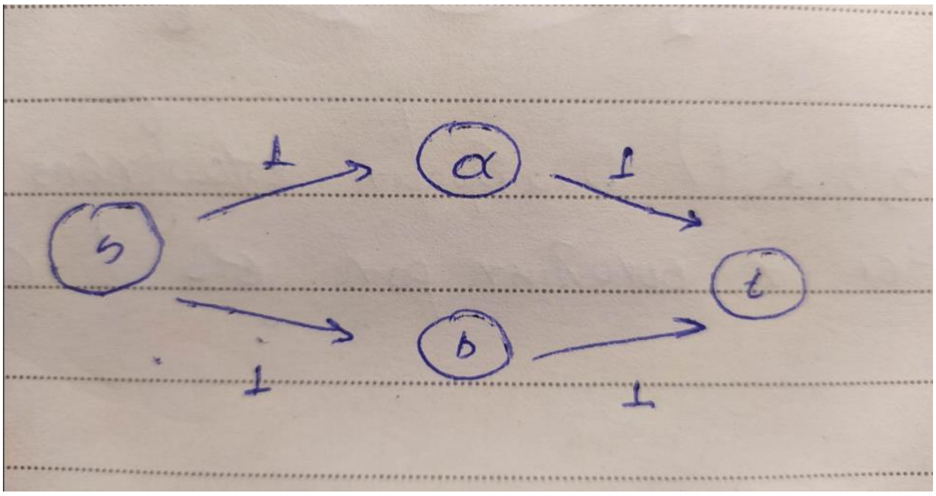
Άρα, αν η υπολειπόμενη χωρητικότητα οριστεί ως r(v,w)=c(v,w)-f(v,w) τότε η ροή που παράγεται από τη μέθοδο της διαδρομής επαύξησης μπορεί να μην είναι η μέγιστη.

2. (α) Ο ισχυρισμός είναι αληθής.

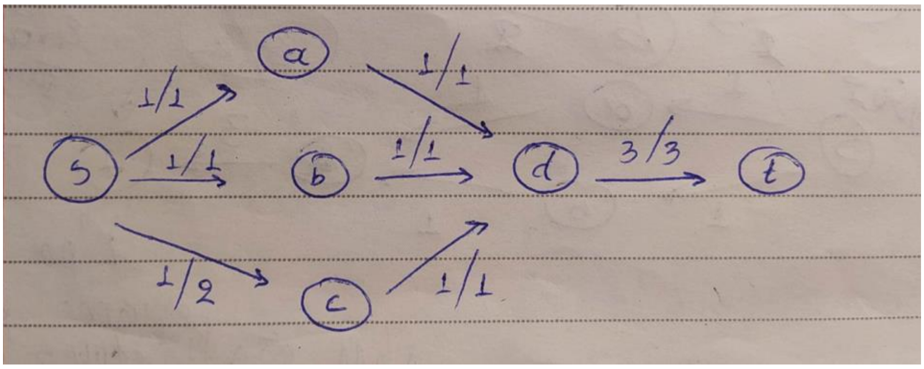
Αν διαιρέσουμε όλες τις χωρητικότητες με το 2, τότε έχουμε ένα δίκτυο με ακέραιες χωρητικότητες, αφού όλες οι χωρητικότητες είναι άρτιες. Σύμφωνα με το θεώρημα στη σελίδα 47 της ενότητας 3α των διαφανειών, αν όλες οι χωρητικότητες ακμών είναι ακέραιες, τότε η μέγιστη ροή έχει ακέραια τιμή. Αν πολλαπλασιάσουμε αυτή την τιμή με 2, προκύπτει μία άρτια μέγιστη ροή για το αρχικό δίκτυο.

(β) Ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

Αυτό προκύπτει από το ακόλουθο αντιπαράδειγμα, όπου ενώ όλες οι χωρητικότητες είναι περιττές, στο τέλος η μέγιστη ροή είναι άρτια:

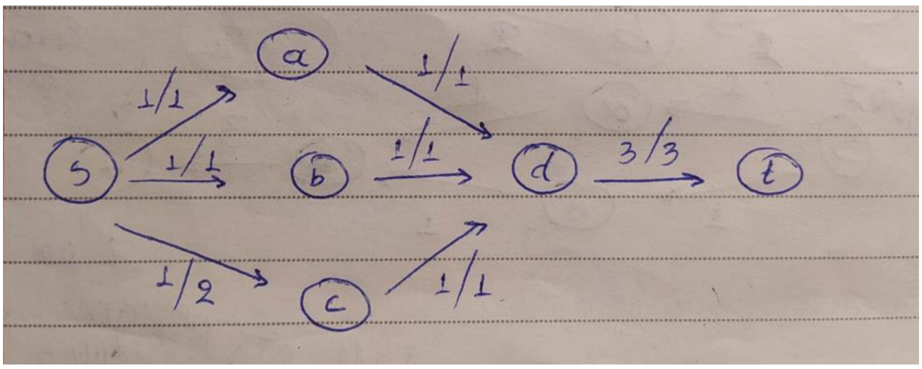


3. (α) Ο ισχυρισμός είναι ψευδής.



Όπως φαίνεται στο παραπάνω παράδειγμα, η μέγιστη ροή είναι ίση με 3. Αν διαγραφεί η ακμή (s,a) τότε η μέγιστη ροή μειώνεται σε 2. Η ακμή αυτή όμως δεν έχει τη μεγαλύτερη χωρητικότητα αφού έχει χωρητικότητα ίση με 1, ενώ η μέγιστη είναι ίση με 3.

(β) Ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

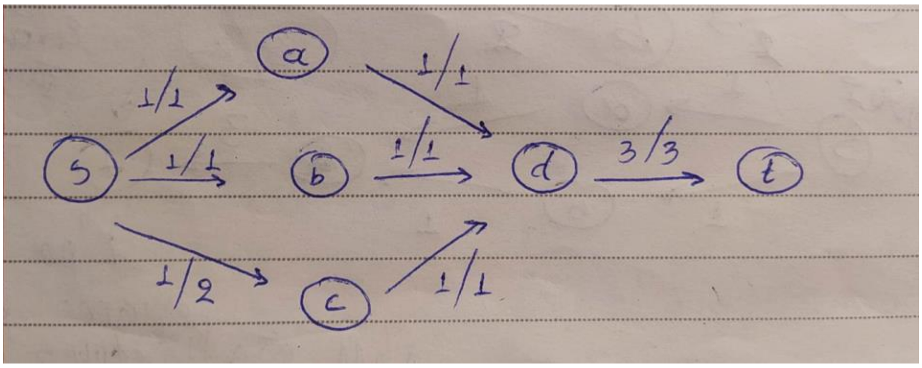


Όπως φαίνεται στο παραπάνω παράδειγμα, η μέγιστη ροή είναι ίση με 3. Αν διαγραφεί η ακμή (s,b) τότε η μέγιστη ροή μειώνεται σε 2. Η ακμή αυτή όμως δεν έχει τη μεγαλύτερη τιμή ροής αφού η τιμή ροής της είναι ίση με 1, ενώ η μέγιστη είναι ίση με 3.

(γ) Ο ισχυρισμός είναι αληθής.

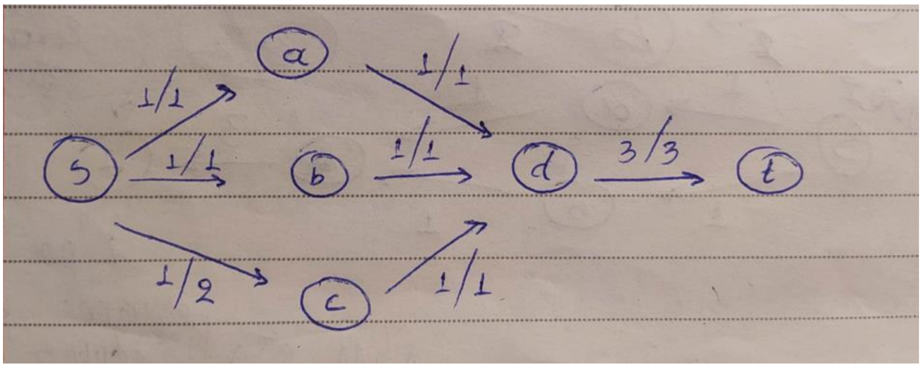
Η μέγιστη ροή είναι ίση με τη τιμή της ροής κάθε ελάχιστης αποκοπής. Αν αφαιρέσουμε μία ακμή από την ελάχιστη αποκοπή, τότε και η τιμή της ροής της ελάχιστης αποκοπής και η τιμή της συνολικής μέγιστης ροής θα μειωθεί κατά όσο ήταν η τιμή της ροής αυτής της ακμής. Για αυτό, η ζωτικότερη ακμή πρέπει να έχει μεγαλύτερη τιμή ροής από όλες τις υπόλοιπες ακμές της ίδια ελάχιστης αποκοπής, γιατί αν υπήρχε άλλη ακμή με μεγαλύτερη τιμή ροής, τότε η δικιά της διαγραφή θα επηρέαζε περισσότερο τη μέγιστη ροή και έτσι αυτή θα ήταν η ζωτικότερη ακμή.

(δ) Ο ισχυρισμός είναι λάθος.



Όπως φαίνεται στο παραπάνω παράδειγμα, η μέγιστη ροή είναι ίση με 3. Η ακμή (s,c) δεν ανήκει σε ελάχιστη αποκοπή, αλλά αν διαγραφεί τότε η μέγιστη ροή μειώνεται σε 2. Άρα, είναι ζωτικότερη ακμή.

(ε) Ο ισχυρισμός είναι αληθής.



Όπως φαίνεται στο παραπάνω παράδειγμα, η μέγιστη ροή είναι ίση με 3. Αν διαγραφεί η ακμή (s,a) ή η (s,b) ή η (s,c) τότε η μέγιστη ροή μειώνεται σε 2. Άρα, είναι όλες τους ζωτικότερες ακμές.

4. Αν ένα δίκτυο περιέχει κορυφή χωρίς εισερχόμενες ακμές χωρίς να είναι η αρχική, ή περιέχει μία κορυφή χωρίς εξερχόμενες χωρίς να είναι τελική, τότε μπορούν να διαγραφούν χωρίς να επηρεάζεται η μέγιστη ροή στο δίκτυο.

Σύμφωνα με τη διατήρηση της ροής, σε ένα δίκτυο για όλες τις κορυφές εκτός της αρχικής και της τελικής πρέπει να ισχύει ότι

$$\sum_{(u,v)\epsilon E} f(u,v) - \sum_{(v,u)\epsilon E} f(v,u) = 0.$$

Δηλαδή, όση ροή μπαίνει σε μία κορυφή πρέπει να βγαίνει και από αυτή. Άρα, αν δεν έχει εισερχόμενες ακμές μία κορυφή τότε θα βγάζει ροή ίση με το μηδέν, άρα η διαγραφή της δεν επηρεάζει τη συνολική μέγιστη ροή. Παρόμοια, αν δεν έχει εξερχόμενες ακμές μία κορυφή τότε θα περνάει σε αυτή ροή ίση με το μηδέν, άρα η διαγραφή της δεν θα επηρεάζει τη συνολική μέγιστη ροή.

5. (α) Στην περίπτωση που το δίκτυο μας έχει πολλές αρχικές και τελικές κορυφές, μπορούμε να προσθέσουμε μία επιπλέον κορυφή, η οποία θα έχει εξερχόμενες ακμές προς όλες τις αρχικές κορυφές και δεν θα έχει εισερχόμενες, την οποία θα θεωρήσουμε τη νέα αρχική μας κορυφή, και μία κορυφή που θα έχει εισερχόμενες από όλες τις τελικές κορυφές και δεν θα έχει εξερχόμενες, την οποία θα θεωρήσουμε τη νέα τελική μας κορυφή. Η χωρητικότητα κάθε νέας ακμής που θα προστεθεί στο δίκτυο θα είναι ίση με το άθροισμα της χωρητικότητας των ακμών που έφευγαν από κάθε αρχική κορυφή ή που κατέληγαν σε κάθε τελική κορυφή, με την οποία ενώνεται. Έτσι, αν βρούμε τη μέγιστη ροή σε αυτό το δίκτυο, θα έχουμε βρει τη λύση και για το αρχικό μας.

Όσων αφορά την πολυπλοκότητα αυτού του μετασχηματισμού, απλά θα προστεθούν δύο κορυφές σε χρόνο O(1), και θα προστεθούν ακμές όσες είναι οι αρχικές και οι τελικές κορυφές, όπου στη χειρότερη περίπτωση θα χρειαστεί να προστεθούν n ακμές. Άρα, όλες θα έχουν προστεθεί σε χρόνο O(n). Αν η μέγιστη ροή υπολογιστεί με τον αλγόριθμο Ford-Fulkerson η συνολική πολυπλοκότητα του μετασχηματισμού θα είναι O(nmC+n)=O(n(mC+1))=O(nmC) και δεν θα διαφέρει από την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου.

(β) Στην περίπτωση που σε ένα δίκτυο G, εκτός από τις ακμές έχουν χωρητικότητα και οι κορυφές, μπορούμε να χωρίσουμε κάθε κορυφή v σε δύο διαφορετικές κορυφές $v_{εισόδου}$, $v_{εξόδου}$ όπου η ακμή ($v_{εισόδου}$, $v_{εξόδου}$) θα έχει χωρητικότητα ίση με τη χωρητικότητα της κορυφής v και κάθε εισερχόμενη ακμή (u,v) θα γίνεται (u, $v_{εισόδου}$) και κάθε εξερχόμενη ακμή (v,w) θα γίνεται ($v_{εξόδου}$,w). Έτσι, αν βρούμε τη μέγιστη ροή σε αυτό το δίκτυο, θα έχουμε βρει τη λύση και για το αρχικό μας.

Η πολυπλοκότητα αυτού του μετασχηματισμού θα είναι ίση με την αρχική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου Ford-Fulkerson συν O(1), για την προσθήκη 2n κορυφών και n ακμών. Έτσι, συνολικά δεν θα διαφέρει από την αρχική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου Ford-Fulkerson, που είναι ίση με O(nmC).

6. Έστω ότι συμβολίζουμε την ένωση των ελάχιστων αποκοπών S_1 και S_2 ως $T_1 = S_1 \cup S_2$, τότε έχουμε

$$\overline{T_1} = V - T_1 = V - (S_1 \cup S_2) = V - S_1 \cap V - S_2 = \overline{S_1} \cap \overline{S_2}.$$

Όλες οι ακμές e=(a,b) στην αποκοπή $(T_1, \overline{T_1})$ είναι πλήρεις επειδή ανήκουν είτε στην αποκοπή $(S_1, \overline{S_1})$ είτε στη $(S_2, \overline{S_2})$, γιατί το a θα ανήκει στο $S_1 \cup S_2$, δηλαδή θα ανήκει είτε στο S_1 είτε στο S_2 και το b θα ανήκει στο $\overline{S_1} \cap \overline{S_2}$. Άρα, για a$\in S_1$ θα έχουμε (a,b) $\in(S_1, \overline{S_1})$ και για a$\in S_2$ θα έχουμε (a,b) $\in(S_2, \overline{S_2})$, οπότε αυτή η ακμή θα είναι πλήρης στη μέγιστη ροή. Παρόμοια, όλες οι ακμές e=(b,a) στην αποκοπή $(\overline{T_1}, T_1)$ πρέπει να έχουν μηδενική ροή, γιατί a$\in(S_1 \cup S_2)$ και b$\in(\overline{S_1} \cap \overline{S_2})$, οπότε ανάλογα με το αν το α ανήκει στο S_1 ή στο S_2 έχουμε το (b,a) να ανήκει στην αποκοπή $(\overline{S_1}, S_1)$ ή στην $(\overline{S_2}, S_2)$ αντίστοιχα, και επομένως δεν έχει ροή αφού αυτές οι αποκοπές είναι ελάχιστες. Άρα και η αποκοπή $(T_1, \overline{T_1})$ είναι ελάχιστη.

Με παρόμοιο τρόπο, ορίζουμε την τομή των ελάχιστων αποκοπών S_1 και S_2 ως $T_2 = S_1 \cap S_2$ και έχουμε

$$\overline{T_2} = V - T_2 = V - (S_1 \cap S_2) = V - S_1 \cup V - S_2 = \overline{S_1} \cup \overline{S_2}.$$

Άρα, για κάθε ακμή (b,a) $\in (T_2, \overline{T_2})$ θα ισχύει ότι b$\in S_1$ και b$\in S_2$ και αν a$\in \overline{S_1}$ θα έχουμε ότι (b,a) ανήκει στην ελάχιστη αποκοπή $(S_1, \overline{S_1})$ και αν a$\in \overline{S_2}$ θα έχουμε ότι (b,a) ανήκει στην ελάχιστη αποκοπή $(S_2, \overline{S_2})$. Άρα, η ακμή (b,a) είναι πλήρης στη μέγιστη ροή, αφού θα ανήκει σε μία από τις δύο γνωστές ελάχιστες αποκοπές του δικτύου. Παρόμοια, όλες οι ακμές (a,b) στην αποκοπή $(\overline{T_2}, T_2)$ θα έχουν μηδενική ροή, αφού αν a$\in \overline{S_1}$ το (a,b) θα ανήκει στην αποκοπή $(\overline{S_1}, S_1)$ και αν a$\in \overline{S_2}$ το (a,b) θα ανήκει στην αποκοπή $(\overline{S_2}, S_2)$, όπου και οι δύο είναι ελάχιστες αποκοπές.