Τεχνητή Νοημοσύνη 2021-2022

Εργαστηριακές Ασκήσεις - 2ο Σετ/Ομάδα Α

Ονοματεπώνυμο: Δούρου Βασιλική Ευαγγελία

Α.Μ.:1072633

Έτος: 3ο

Άσκηση 1:

Η μοντελοποίηση του συγκεκριμένου προβλήματος είναι η εξής:

α. Μεταβλητές: $\theta=[\theta_O,\theta_N,\theta_E,\theta_T,\theta_W,\theta_F,\theta_U,\theta_R,\theta_\alpha,\theta_\beta,\theta_\gamma]$.

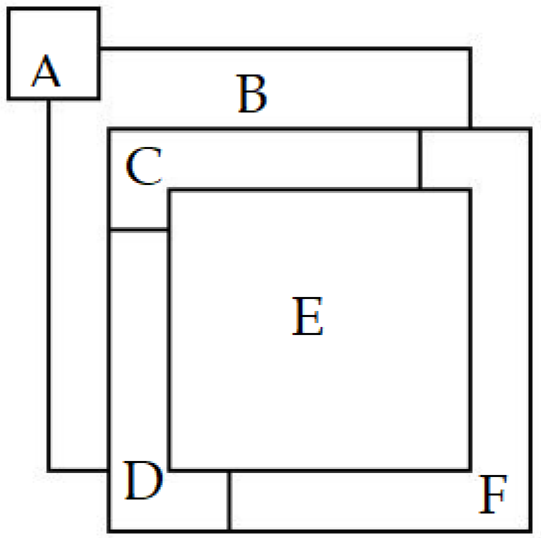
β. Πεδία τιμών της κάθε μεταβλητής: $D_{\theta_O}=D_{\theta_N}=D_{\theta_E}=D_{\theta_T}=D_{\theta_W}=D_{\theta_F}=D_{\theta_U}=D_{\theta_R}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ και $D_{\theta_\alpha}=D_{\theta_\beta}=D_{\theta_\gamma}=\{0,1\}$.

γ. Περιορισμοί: $\theta_O+\theta_E=\theta_R+10\cdot\theta_\alpha$, $\theta_\alpha+\theta_N+\theta_W=\theta_U+10\cdot\theta_\beta$, $\theta_\beta+\theta_O+\theta_T=\theta_O+10\cdot\theta_\gamma$, $\theta_\gamma=\theta_F$, όπου θ_α, θ_β και θ_γ βοηθητικές μεταβλητές που αναπαριστούν το κρατούμενο που περνάει στο επόμενο επίπεδο (0 ή 1).

Αν οι αριθμοί (0-9) αντιστοιχούν μοναδικά σε ένα γράμμα τότε ισχύει επιπλέον ο περιορισμός: $\theta_O\neq\theta_N\neq\theta_E\neq\theta_T\neq\theta_W\neq\theta_F\neq\theta_U\neq\theta_R$, αλλιώς οι περιορισμοί μας είναι μόνο οι παραπάνω.

<u>Άσκηση 2:</u>

1. Σύμφωνα με το θεώρημα των 4-χρωμάτων, κάθε 2Δ χάρτης μπορεί να χρωματιστεί με 4 χρώματα. Οπότε ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι μικρότερος ή ίσος του 4. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θέλουμε όλα τα γειτονικά κελιά να έχουν διαφορετικά χρώματα. Αν υποθέσουμε ότι τα 6 κελιά είναι τα A, B, C, D, E και F όπως φαίνεται παρακάτω:



Το A έχει μοναδικό γείτονα το B. Το B έχει 4 γείτονες: το A, το C, το F και το D. Το C έχει 4 γείτονες: το B, το E, το D και το F. Το D έχει 4 γείτονες: το B, το E, το C και το F. Το E έχει 3 γείτονες: το C, το D και το F. Το F έχει 3 γείτονες: το C, το D και το E. Άρα, συνολικά έχουμε μόνο μία τετράδα κελιών που είναι όλα γειτονικά μεταξύ τους (B, C, F, D), οπότε χρειαζόμαστε 4 χρώματα.

2. Αν υποθέσουμε ότι X_1, X_2, X_3, X_4 τα χρώματα που θα χρησιμοποιήσουμε, έχουμε την εξής μοντελοποίηση:
   Μεταβλητές: $\theta=[\theta_A,\theta_B,\theta_C,\theta_D,\theta_E,\theta_F]$
   Πεδία τιμών: $D_{\theta_A}=D_{\theta_B}=D_{\theta_C}=D_{\theta_D}=D_{\theta_E}=D_{\theta_F}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$
   Περιορισμοί: $\theta_A\neq\theta_B$, $\theta_B\neq\theta_C$, $\theta_B\neq\theta_D$, $\theta_B\neq\theta_F$, $\theta_C\neq\theta_E$, $\theta_C\neq\theta_F$, $\theta_C\neq\theta_D$, $\theta_D\neq\theta_E$, $\theta_D\neq\theta_F$, $\theta_E\neq\theta_F$.

3. Ας υποθέσουμε ότι η τυχαία επιλεγμένη κατάσταση είναι η εξής: $\theta_D=X_1$, $\theta_B=X_3$ και $\theta_F=X_2$.
   Όταν ισχύουν τα παραπάνω έχουμε τα εξής ενδεικτικά βήματα:
   1. Λόγω $\theta_F\neq\theta_C$, έχουμε $D_{\theta_C}=\{X_1,X_3,X_4\}$
   2. Λόγω $\theta_F\neq\theta_E$, έχουμε $D_{\theta_E}=\{X_1,X_3,X_4\}$
   3. Λόγω $\theta_B\neq\theta_A$, έχουμε $D_{\theta_A}=\{X_1,X_2,X_4\}$
   4. Λόγω $\theta_B\neq\theta_C$, έχουμε $D_{\theta_C}=\{X_1,X_4\}$
   5. Λόγω $\theta_D\neq\theta_E$, έχουμε $D_{\theta_E}=\{X_3,X_4\}$
   6. Λόγω $\theta_D\neq\theta_C$, έχουμε $D_{\theta_C}=\{X_4\}$
   7. Λόγω $\theta_C\neq\theta_E$, έχουμε $D_{\theta_E}=\{X_3\}$

   Τα τελικά πεδία τιμών για κάθε μεταβλητή είναι τα εξής: $D_{\theta_E}=\{X_3\}$, $D_{\theta_C}=\{X_4\}$, $D_{\theta_A}=\{X_1,X_2,X_4\}$.

Άσκηση 3:

Αρχικά ορίζουμε τις μεταβλητές μας. Έστω x ο συνολικός αριθμός τραπεζιών και y ο συνολικός αριθμός καρεκλών που φτιάχνει.

Ο ξυλοκόπος χρειάζεται 7 ώρες για ένα τραπέζι και 2 ώρες για μία καρέκλα, οπότε συνολικά θα χρειάζεται 7x ώρες για τα τραπέζια που θα φτιάξει και 2y ώρες για τις καρέκλες.

Κάθε καρέκλα έχει κέρδος 5 ευρώ, ενώ κάθε τραπέζι 20 ευρώ. Οπότε το συνολικό κέρδος για τα τραπέζια θα είναι 20x και για τις καρέκλες 5y.

Επίσης κάθε τραπέζι πιάνει 6 φορές μεγαλύτερο χώρο από τις καρέκλες, άρα 6x=y.

Επομένως, οι μεταβλητές μας είναι οι εξής: $\theta=[x,y]^T \in \mathbb{R}^{2x1}$.

Επιπλέον, έχουμε τους εξής περιορισμούς:

- x≤6y
- 7x+2y≤50
- 6x+y≤30

Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος του ξυλοκόπου, δηλαδή τη συνάρτηση P=20x+5y.

Οπότε το πρόβλημα μας έχει την ακόλουθη μορφή:

$$max_{\theta} 20x + 5y$$

$$\begin{aligned} \text{subject to } \; & 7x+2y \leq 50 \\ & 6x+y \leq 30 \\ & x \leq 6y \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Θα μετατρέψουμε το παραπάνω πρόβλημα στην κανονική μορφή του γραμμικού προγραμματισμού, δηλαδή στη μορφή:

$$\theta^* = min_{\theta} c^T \theta$$

$$\text{subject to } A\theta \leq b$$

$$\theta \geq 0$$

Πρέπει να εφαρμόσουμε τα παρακάτω:

1. Μετατροπή της αντικειμενικής συνάρτησης για ελαχιστοποίηση
2. Εύρεση του διανύσματος c
3. Εύρεση του μητρώου A
4. Εύρεση του διανύσματος b

Ορίζουμε την αντικειμενική μας συνάρτηση ως J(θ)=-20x-5y. Αυτή η συνάρτηση αντιστοιχεί σε $c=[-20,-5]^T \in \mathbb{R}^{2x1}$.

Το μητρώο $A \in \mathbb{R}^{3x2}$ που προκύπτει έχει την ακόλουθη μορφή:

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Το διάνυσμα b που προκύπτει είναι το εξής:

$b=[50,30,0]^T \in \mathbb{R}^{3x1}$.

Άσκηση 4:

1. Το πρόβλημα του τετραγωνικού προγραμματισμού έχει την εξής μοντελοποίηση:

$$\theta^* = min_\theta \frac{1}{2} \theta^T Q \theta + c^T \theta$$

subject to $A\theta \leq b$

Αρχικά, οι μεταβλητές μας είναι οι $\theta=[x,y]^T \in \mathbb{R}^{2x1}$ και J(θ)=$x^2 + 5x - 20y - 12$.

Οι περιορισμοί μας είναι οι εξής: -3≤x≤1 και -1≤y≤1. Η σωστή μορφή του -3≤x είναι η -x≤3 και του -1≤y είναι η -y≤1. Επίσης, $x^2 + 5x - 20y = 12$, οπότε προκύπτουν επιπλέον δύο περιορισμοί $x^2 + 5x - 20y \leq 12$ και $-x^2 - 5x + 20y \leq -12$

Οπότε έχουμε το ακόλουθο μητρώο $A \in \mathbb{R}^{6x2}$:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 6 & -20 \\ -6 & 20 \end{pmatrix}$$

Ενώ, το διάνυσμα b προκύπτει ως εξής:

$b=[1,3,1,1,12,-12]^T \in \mathbb{R}^{6x1}$.

Έπειτα, χωρίζουμε την αντικειμενική συνάρτηση στους όρους που έχουν μονές μεταβλητές και στους όρους που έχουν τετράγωνα και πολλαπλασιασμούς μεταξύ μεταβλητών. Τους όρους με μονές μεταβλητές τους βάζουμε στο διάνυσμα c, άρα το διάνυσμα c είναι το εξής: $c=[5,-20]^T \in \mathbb{R}^{2x1}$.

Το μητρώο Q που προκύπτει είναι το ακόλουθο:

$$Q=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Το πρόβλημα του τετραγωνικού προγραμματισμού έχει την εξής μοντελοποίηση:

$$\theta^* = min_\theta \frac{1}{2} \theta^T Q \theta + c^T \theta$$

subject to Αθ≤b

Αρχικά, οι μεταβλητές μας είναι οι $\theta=[x_1,x_2,x_3]^T \in \mathbb{R}^{3x1}$ και $J(\theta)=6x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_1^2 + 6x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3$.

Οι περιορισμοί μας είναι οι εξής:

- $x_1 \leq 5$
- $-x_1 \leq 1$
- $x_2 \leq 3$
- $-x_2 \leq 0$
- $x_3 \leq 5$
- $-x_3 \leq 1$

Οπότε έχουμε το ακόλουθο μητρώο $A \in \mathbb{R}^{6x3}$:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ενώ, το διάνυσμα b προκύπτει ως εξής: $b=[5,1,3,0,5,1]^T \in \mathbb{R}^{6x1}$.

Έπειτα, χωρίζουμε την αντικειμενική συνάρτηση στους όρους που έχουν μονές μεταβλητές και στους όρους που έχουν τετράγωνα και πολλαπλασιασμούς μεταξύ μεταβλητών. Τους όρους με μονές μεταβλητές τους βάζουμε στο διάνυσμα c, άρα το διάνυσμα c είναι το εξής: $c=[6,-2,5]^T \in \mathbb{R}^{3x1}$.

Το μητρώο Q που προκύπτει είναι το ακόλουθο:

$$Q=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$