Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο: Δούρου Βασιλική ΑΜ: Ευαγγελία	1072633 Έτος:	30
--	---------------	----

Ασκηση 1

Ερώτηση 1 Υπολογίστε την στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας.

Απάντηση:

Η στοχαστική μέση τιμή θεωρητικά υπολογίζεται όπως ακολούθως:

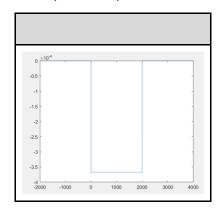
$$E\{X(n,\theta)\} = E\{A(\theta)\left(u(n) - u(n-1999)\right)\} = \left(u(n) - u(n-1999)\right) * E\{A(\theta)\} = \left(u(n) - u(n-1999)\right) * E\{A(\theta)\} = \left(u(n) - u(n-1999)\right) * \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} A * \frac{1}{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)} dA = \left(u(n) - u(n-1999)\right) * \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} A dA = \left(u(n) - u(n-1999)\right) * \left[\frac{A^2}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \left(u(n) - u(n-1999)\right) * \left(\frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{2}\right) = 0.$$

Ερώτηση 2 Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $rand(\cdot)$ της MATLAB δημιουργήστε Κ υλοποιήσεις της διαδικασίας και εκτιμήστε, υπολογίζοντας την αριθμητική μέση τιμή κάθε χρονική στιγμή, την στοχαστική μέση τιμή της. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της στοχαστικής μέσης τιμής; Απεικονίστε την μέση υλοποίηση στον παρακάτω πίνακα.

Απάντηση:

Παρατηρούμε πως με αύξηση του αριθμού υλοποιήσεων της διαδικασίας, δηλαδή του K, εκτιμάται καλύτερα η στοχαστική μέση τιμή από την αριθμητική μέση τιμή. Δηλαδή όσο το $K \rightarrow \infty$, τόσο η αριθμητική μέση τιμή τείνει στο 0, δηλαδή στη στοχαστική μέση τιμή. Αυτό μπορεί να παρατηρηθεί και ακολούθως για K=10000 και K=1000.

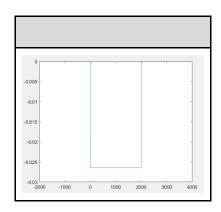
Η μέση υλοποίηση για Κ=10000 είναι η ακόλουθη:



Ενώ για Κ=100 είναι η εξής:

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

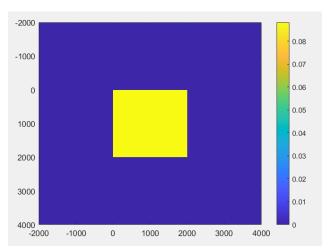
Ον/μο:	Δούρου Βασιλική Ευαγγελία	AM:	1072633	Έτος:	30	
--------	---------------------------------	-----	---------	-------	----	--



Ερώτηση 3 Υπολογίστε και απεικονίστε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας. Είναι η παραπάνω διαδικασία "λευκή"; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

Απάντηση:

Για K=100 η ακολουθία αυτοσυσχέτισης, όπως προκύπτει από τη Matlab, είναι η ακόλουθη:



Λευκή διαδικασία είναι μια τυχαία διαδικασία διακριτού χρόνου, της οποίας τα δείγματα συσχετίζονται μόνο με τον εαυτό τους στην ίδια χρονική στιγμή. Αποτελεί ασθενώς στάσιμο σήμα $2^{\eta\varsigma}$ τάξης, έχει παντού την ίδια ενέργεια και έχει μέση τιμή 0. Επίσης, για την ακολουθία αυτοσυσχέτισης πρέπει να ισχύει $R_W[n] = E[W[k+n]W[k]] \neq 0$ μόνο για n=0, δηλαδή $R_W[n] = \sigma^2 \delta[n]$.

Για την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να δούμε κατά πόσο είναι λευκή ελέγχοντας τις τιμές του μητρώου αυτοσυσχέτισης. Για να είναι λευκή πρέπει μόνο οι τιμές στην κύρια διαγώνιο του μητρώου να είναι μη μηδενικές, το οποίο στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν ισχύει. Άρα, η διαδικασία δεν είναι λευκή.

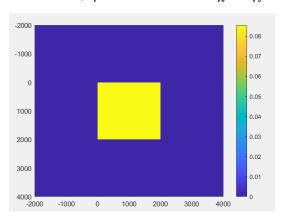
Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο: Βασιλική ΑΜ: 1072633 Έτος: 3ο	Ον/μο:	- A.	AM:	1072633	Έτος:	30
--------------------------------------	--------	------	-----	---------	-------	----

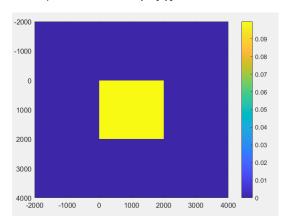
Ερώτηση 4 Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του Ερωτήματος 2, εκτιμήστε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός Κ των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης;

Απάντηση:

Για Κ=1000, η ακολουθία αυτοσυσχέτισης είναι η ακόλουθη:



Ενώ, για Κ=10 είναι η εξής:



Παρατηρούμε, μέσω του φάσματος, ότι όταν αλλάζει ο αριθμός Κ των υλοποιήσεων της διαδικασίας, αλλάζει και η ακολουθία αυτοσυσχέτισης. Γενικά, εκτελέστηκε ο κώδικας πολλές φορές για διαφορετικές τιμές του Κ και παρατηρήθηκε ότι όσο αυξανόταν το Κ οι αλλαγές στο φάσμα ήταν μικρότερες και έβγαινε το ίδιο αποτέλεσμα. Δηλαδή με αύξηση του Κ, η κατανομή γίνεται πιο ομοιόμορφη.

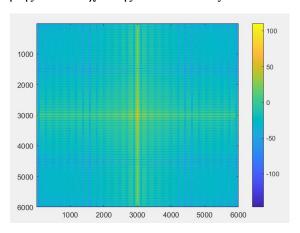
Ερώτηση 5 Υπολογίστε και απεικονίστε την Πυκνότητα Φάσματος (Spectral Density) της διαδικασίας. Πόσο κοντά στην ιδανική πυκνότητα είναι η εκτίμησή της από την ακολουθία αυτοσυσχέτισης του Ερωτήματος 4 και πως επηρεάζεται από το K;

Απάντηση:

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο: Δούρου Βασιλική ΑΜ: Ευαγγελία	1072633 Έτος:	30
--	---------------	----

Η πυκνότητα φάσματος της διαδικασίας προκύπτει από τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης και είναι όπως ακολουθεί:



Παρατηρούμε ότι η πυκνότητα φάσματος δεν επηρεάζεται από το Κ και παραμένει ίδια ανεξάρτητα των τιμών του Κ.

Ασκηση 2

Ερώτηση 1 Υπολογίστε την στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας.

Απάντηση:

Η στοχαστική μέση τιμή θεωρητικά υπολογίζεται όπως ακολούθως:

$$E\{X(n,\theta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X f_{x}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} X \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^{2}}} e^{\frac{-(x-\mu)^{2}}{2\sigma^{2}}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} X \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^{2}}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{\frac{-x^{2}}{2}} \right]_{-1}^{1} = \left(-e^{\frac{-1}{2}} + e^{\frac{-1}{2}} \right) = 0.$$

Αφού, όπως γνωρίζουμε, για μία τυχαία μεταβλητή x που ακολουθεί Gaussian κατανομή η pdf είναι $f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ και γνωρίζουμε ότι η διακριτού χρόνου στοχαστική διαδικασία $X(n,\theta)$ είναι Γκαουσιανή μέσης τιμής 0 και διασποράς 1.

Ερώτηση 2 Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $randn(\cdot)$ της MATLAB δημιουργήστε Κ υλοποιήσεις της διαδικασίας και εκτιμήστε, υπολογίζοντας την αριθμητική μέση τιμή κάθε χρονική στιγμή, την στοχαστική μέση τιμή της. Τι παρατηρήτε καθώς αυξάνει ο αριθμός των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της στοχαστικής μέσης τιμής; Απεικονίστε την μέση υλοποίηση στον παρακάτω πίνακα.

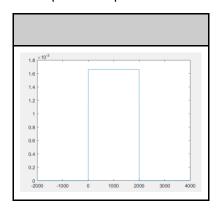
Απάντηση:

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

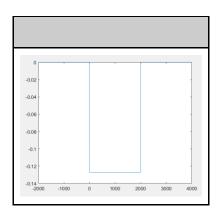
Ον/μο: Βασιλική ΑΜ: 1072633 Έτος: 3ο	Ον/μο:	- A.	AM:	1072633	Έτος:	30
--------------------------------------	--------	------	-----	---------	-------	----

Παρατηρούμε πως με αύξηση του αριθμού υλοποιήσεων της διαδικασίας, δηλαδή του K, εκτιμάται καλύτερα η στοχαστική μέση τιμή από την αριθμητική μέση τιμή. Δηλαδή όσο το $K \rightarrow \infty$, τόσο η αριθμητική μέση τιμή τείνει στο 0, δηλαδή στη στοχαστική μέση τιμή. Αυτό μπορεί να παρατηρηθεί και ακολούθως για K=10000 και K=1000.

Η μέση υλοποίηση για Κ=10000 είναι η ακόλουθη:



Ενώ για Κ=100 είναι η εξής:



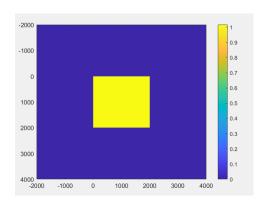
Ερώτηση 3 Υπολογίστε και απεικονίστε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας. Είναι η παραπάνω διαδικασία "λευκή"; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

Απάντηση:

Για K=100 η ακολουθία αυτοσυσχέτισης, όπως προκύπτει από τη Matlab, είναι η ακόλουθη:

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Δούρου Βασιλική	AM:	1072633	Έτος:	30
	Ευαγγελία				



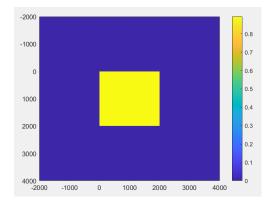
Λευκή διαδικασία είναι μια τυχαία διαδικασία διακριτού χρόνου, της οποίας τα δείγματα συσχετίζονται μόνο με τον εαυτό τους στην ίδια χρονική στιγμή. Αποτελεί ασθενώς στάσιμο σήμα $2^{\eta\varsigma}$ τάξης, έχει παντού την ίδια ενέργεια και έχει μέση τιμή 0. Επίσης, για την ακολουθία αυτοσυσχέτισης πρέπει να ισχύει $R_W[n] = E[W[k+n]W[k]] \neq 0$ μόνο για n=0, δηλαδή $R_W[n] = \sigma^2 \delta[n]$.

Και σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να δούμε κατά πόσο η παραπάνω διαδικασία είναι λευκή ελέγχοντας τις τιμές του μητρώου αυτοσυσχέτισης. Για να είναι λευκή πρέπει μόνο οι τιμές στην κύρια διαγώνιο του μητρώου να είναι μη μηδενικές, το οποίο στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν ισχύει. Άρα, η διαδικασία δεν είναι λευκή.

Ερώτηση 4 Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του Ερωτήματος 2, εκτιμήστε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης. Τι παρατηρήτε καθώς αυξάνει ο αριθμός Κ των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης;

Απάντηση:

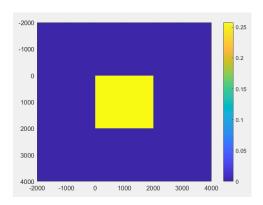
Για Κ=1000, η ακολουθία αυτοσυσχέτισης είναι η ακόλουθη:



Ενώ, για Κ=10 είναι η εξής:

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Δούρου Βασιλική	AM:	1072633	Έτος:	30
	Ευαγγελία				

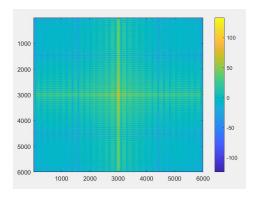


Παρατηρούμε, μέσω του φάσματος, ότι όταν αλλάζει ο αριθμός K των υλοποιήσεων της διαδικασίας, αλλάζει και η ακολουθία αυτοσυσχέτισης. Γενικά, εκτελέστηκε ο κώδικας πολλές φορές για διαφορετικές τιμές του K και παρατηρήθηκε ότι όσο αυξανόταν το K οι αλλαγές στο φάσμα ήταν μικρότερες και έβγαινε το ίδιο αποτέλεσμα. Δηλαδή με αύξηση του K, η κατανομή γίνεται πιο ομοιόμορφη.

Ερώτηση 5 Υπολογίστε και απεικονίστε την Πυκνότητα Φάσματος (Spectral Density) της διαδικασίας. Πόσο κοντά στην ιδανική πυκνότητα είναι η εκτίμησή της από την ακολουθία αυτοσυσχέτισης του Ερωτήματος 4 και πως επηρεάζεται από το K;

Απάντηση:

Η πυκνότητα φάσματος της διαδικασίας προκύπτει από τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης και είναι όπως ακολουθεί:



Παρατηρούμε ότι, και σε αυτή την περίπτωση, η πυκνότητα φάσματος δεν επηρεάζεται από το Κ και παραμένει ίδια ανεξάρτητα των τιμών του Κ.

Ασκηση 3

Ερώτηση 1 Χρησιμοποιήστε αποδοτικά τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών και αποκαλύψτε την εικόνα που κρύβεται στην ακολουθία. Εκτιμήστε την διασπορά του θορύβου καθώς και την κατανομή του.

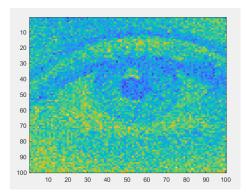
Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο: Βασιλική ΑΜ: 1072633 Έτος: 3ο	Ον/μο:	- A.	AM:	1072633	Έτος:	30
--------------------------------------	--------	------	-----	---------	-------	----

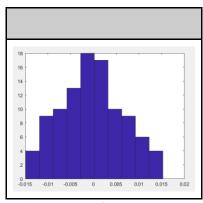
Απάντηση:

Ο νόμος των μεγάλων αριθμών λέει πως ο αριθμητικός μέσος όρος μίας ακολουθίας η ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με ίδια κατανομή και μέση τιμή συγκεντρώνεται γύρω από τη μέση τιμή όσο το η τείνει στο άπειρο, δηλαδή ισχύει ότι $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x(m,\theta_n)\to \mu(m)$.

Η εικόνα που προέκυψε στη Matlab είναι η ακόλουθη:



Και η διασπορά του θορύβου είναι η εξής:



Παρατηρούμε ότι η κατανομή θυμίζει Gaussian κατανομή.

Ερώτηση 2 Χρησιμοποιώντας την εικόνα που αποκαλύψατε, επιβεβαιώστε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Απάντηση:

Το κεντρικό οριακό θεώρημα λέει πως οποιοδήποτε άθροισμα στοχαστικά ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών τείνει στην κανονική κατανομή, δηλαδή αν υπολογίσουμε τους αριθμητικούς μέσους όρους όλων των δυνατών τυχαίων δειγμάτων μεγέθους η, για μεγάλα μεγέθη η κατανομή των μέσων προσεγγίζει την Gaussian. Παρατηρούμε, ότι οι εικόνες παραπάνω επιβεβαιώνουν το κεντρικό οριακό θεώρημα.

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Δούρου Βασιλική Ευαγγελία	AM:	1072633	Έτος:	30
--------	---------------------------------	-----	---------	-------	----

Ασκηση 4

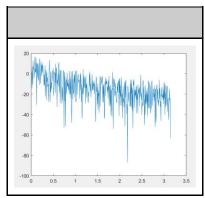
Ερώτηση 1 Τι είδους διαδικασία περιγράφει η Σχέση (2); Χρησιμοποιώντας $\omega_0=0.25\,$ και τη συνάρτηση $randn(\cdot)$, δημιουργήστε μερικές υλοποιήσεις της. Υπολογίστε τα φασματικά χαρακτηριστικά του χρωματισμένου θορύβου. Συμφωνούν με τα θεωρητικά αναμενόμενα;

Απάντηση:

Η διαδικασία που περιγράφεται από τη σχέση (2) είναι μία ασθενώς στάσιμη $2^{\eta\varsigma}$ τάξης στοχαστική διαδικασία. Αυτό συμβαίνει καθώς ο θόρυβος είναι μία ασθενώς στάσιμη $2^{\eta\varsigma}$ τάξης στοχαστική διαδικασία, λόγω της κατανομής, και επειδή η έξοδος u(n) συσχετίζεται με την είσοδο u(n-1), αφού διαφέρουν κατά μία χρονική στιγμή.

Η φασματική πυκνότητα ισχύος και τη μέση ισχύς είναι κάποια από τα φασματικά χαρακτηριστικά του χρωματισμένου θορύβου.

Η πυκνότητα ισχύος, που είναι ο μετασχηματισμός Fourier του μητρώου αυτοσυσχέτισης είναι η ακόλουθη:



Τα αποτελέσματα δεν συμφωνούν πλήρως με τα θεωρητικά αναμενόμενα, αλλά αποτελούν μία καλή προσέγγιση.

Ερώτηση 2 Ποιά η λειτουργία του Συστήματος Λεύκανσης; Καταγράψτε την απάντησή σας.

Απάντηση:

Το σύστημα λεύκανσης παίρνει ως είσοδο χρωματισμένο θόρυβο και τον βγάζει στην έξοδο λευκό. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αλλάζει και το φάσμα ισχύος, αφού του λευκού θορύβου είναι μία ευθεία γραμμή, ενώ του χρωματισμένου είναι διαφορετικό σε κάθε συχνότητα ανάλογα με το χρώμα του.

Ερώτηση 3 Η πηγή του σήματος της Σχέσης (1) είναι ντετερμινιστική ή στοχαστική; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Αν η πηγή του σήματος είναι στοχαστική, είναι ασθενώς ή ισχυρώς στάσιμη πρώτης ή δεύτερης τάξης; Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση rand(·), δημιουργείστε υλοποιήσεις της και προσπαθήστε να επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις σας και πειραματικά. Καταγράψτε τα πειράματα που κάνατε και τα αποτελέσματα σας.

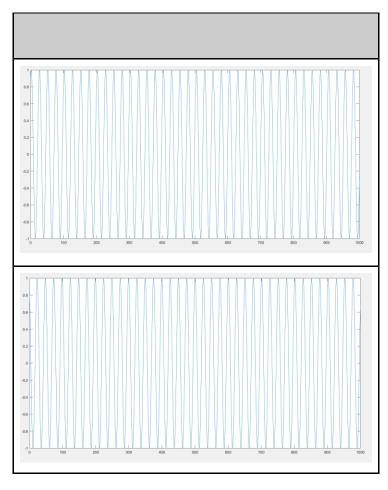
Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο: Βασιλική ΑΜ: 1072633 Έτος: 3ο Ευαγγελία	Ον/μο:
---	--------

Απάντηση:

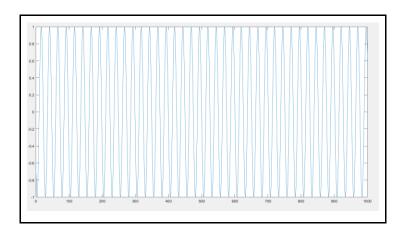
Ένα ντετερμινιστικό σύστημα δεν περιλαμβάνει καμία τυχαιότητα στον υπολογισμό των επόμενων καταστάσεων, ενώ ένα στοχαστικό σύστημα έχει κάποια κατανομή που ακολουθεί. Επομένως, η πηγή του σήματος της σχέσης (1) είναι στοχαστική, αφού το φ που υπάρχει στον τύπο ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή. Η πηγή του σήματος δεν είναι ισχυρώς στάσιμη, αφού η συνάρτηση εξαρτάται από το χρόνο. Η πηγή του σήματος είναι ασθενώς στάσιμη $2^{η_{\varsigma}}$ τάξης.

Παρακάτω υπάρχουν τρία διαφορετικά παραδείγματα από υλοποιήσεις της πηγής του σήματος. Παρατηρούμε πως κάθε φορά, αφού η φάση ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή, υπάρχει αλλαγή στην αρχική φάση.



Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Δούρου Βασιλική	AM:	1072633	Έτος:	30
	Ευαγγελία				



Ερώτηση 4 Εκφράστε την έξοδο του FIR φίλτρου Wiener μήκους M συναρτήσει των συντελεστών της κρουστικής του απόκρισης και του χρωματισμένου θορύβου.

Απάντηση:

Το φίλτρο Wiener αποθορυβοποιεί στοχαστικές διαδικασίες, επιτρέποντας τη διέλευση ελαφρώς αλλοιωμένων δειγμάτων, όταν ο λόγος SNR είναι μεγάλος, και κόβοντας τις συχνότητες όταν το SNR είναι μικρό.



Ερώτηση 5 Σχεδιάστε το βέλτιστο FIR φίλτρο Wiener μήκους 2 και υπολογίστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

Απάντηση:

Υπολογίζουμε τη μερική παράγωγο του μέσου τετραγωνικού σφάλματος $E\{(s_n(\theta)-\hat{s}_n)^2\}$ και τη θέτουμε ίση με μηδέν. Μετά το σύστημα γράφεται με τη μορφή $E\{x_n(\theta)s_n(\theta)\}=E\{x_n(\theta)x_n^T(\theta)\}H_L^T$ και λύνοντας το υπολογίζονται οι βέλτιστοι παράμετροι του αιτιατού φίλτρου Wiener.

Ερώτηση 6 Επαναλάβετε την Ερώτηση 5 για φίλτρα μήκους 3, 4, 5, 6, υπολογίστε τα αντίστοιχα μέσα τετραγωνικά σφάλματα. Τι παρατηρείτε;

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Δούρου Βασιλική	AM:	1072633	Έτος:	30
	Ευαγγελία				

M = 3	M =4	M = 5	M = 6
	J. Co. T.		C TI