

## A. Richiami di analisi

### A.1 Teoremi della divergenza e del rotore

In questa sezione vengono richiamati i teoremi della divergenza e del rotore, già incontrati nei corsi di Analisi. Viene introdotto il teorema del gradiente. Questi teoremi vengono dimostrati a partire da due lemmi, che risultano utili nella scrittura delle equazioni di bilancio di un continuo (solido o fluido che sia). Il punto di partenza è il lemma di Green, necessario per la dimostrazione dei due lemmi. La sua dimostrazione viene riportata per motivi di completezza e per richiamare alcuni concetti già incontrati nei corsi di Analisi e per ricominciare ad utilizzarli.

**Teorema A.1.1 — Lemma di Green.** Sia  $\gamma_R$  una curva chiusa semplice nel piano positivamente orientata regolare a tratti, e sia  $R$  la superficie di cui è frontiera. Se  $P$  e  $Q$  sono due funzioni reali di due variabili reali che hanno le derivate parziali continue su una regione aperta che contiene  $R$ .

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_{\gamma_R} P dx, \quad \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{\gamma_R} Q dy \quad (\text{A.1})$$

La dimostrazione viene svolta prima per domini semplici, come il dominio  $R$  in figura A.1, e poi generalizzata per domini non semplici e non semplicemente connessi.

**R** Il verso positivo di percorrenza di una linea chiusa nel piano è quello antiorario, come indicato in figura A.1: seguendo questa convenzione, la regione limitata del piano viene lasciata a sinistra della curva, se percorsa nel verso positivo.

*Dimostrazione.* Se  $R$  è un dominio semplice, è possibile dimostrare la prima delle due equazioni (A.1) scomponendo il contorno  $\gamma_R = \partial R$  nelle due curve  $\ell_1 : y = Y_1(x)$  e  $\ell_2 : y = Y_2(x)$ , come in figura A.1. É possibile scrivere il contorno  $\gamma_R = \ell_1 \cup \ell_2^-$  come unione delle due curve  $\ell_1$  ed  $\ell_2$ , dove l'apice  $-$  su  $\ell_2$  indica che deve essere percorsa per  $x$

decrecenti affinché il contorno  $\gamma_R$  sia percorso in senso positivo.

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left( \int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b [P(x, Y_2(x)) - P(x, Y_1(x))] dx = - \oint_{\gamma_R} P dx \quad (\text{A.2})$$

In maniera analoga, è possibile dimostrare la seconda delle (A.1), scomponendo il contorno in due curve  $\ell_1 : x = X_1(y)$  e  $\ell_2 : x = X_2(y)$ , con  $X_2(x) > X_1(x)$ .

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_e^f \left( \int_{X_1(y)}^{X_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy = \int_e^f [P(X_2(y), y) - P(X_1(y), y)] dy = \oint_{\gamma_R} Q dy \quad (\text{A.3})$$

■

Sottraendo le due equazioni del teorema A.1.1, si ottiene la forma classica nella quale il teorema di Green viene presentato

$$\oint_{\gamma_R} [P dx + Q dy] = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (\text{A.4})$$

#### Domini non semplici e non semplicemente connessi.

Il caso di domini non semplici e non semplicemente connessi si riconduce al caso di domini semplici, in seguito all'introduzione di un 'taglio'  $\gamma_c$  nel dominio, sfruttando la regolarità (per ipotesi) della funzione all'interno del dominio. Nel caso di dominio non semplice, ci si riconduce a due o più domini semplici a due a due disgiunti, la cui unione è l'insieme non semplice di partenza. Nel caso di dominio non semplicemente connesso, ci si riconduce al caso di dominio semplicemente connesso.

Nel caso di dominio non semplice, si ha:

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= & (R = R_1 \cup R_2) \\ &= \iint_{R_1} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy + \iint_{R_2} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = & (l_1 = \partial R_1, l_2 = \partial R_2) \\ &= - \oint_{l_1} P dx - \oint_{l_2} P dx = & (l_1 = \gamma_1 \cup \gamma_c, l_2 = \gamma_2 \cup \gamma_c^-) \\ &= - \int_{\gamma_1} P dx - \int_{\gamma_c} P dx - \int_{\gamma_c^-} P dx - \int_{\gamma_2} P dx = & \left( \int_{\gamma_c^-} P dx = - \int_{\gamma_c} P dx, \right. \\ & & \left. \gamma_1 \cup \gamma_2 = \partial R = \gamma \right) \\ &= - \oint_{\gamma} P dx & (\text{A.5}) \end{aligned}$$

■ **Esempio A.1** È possibile calcolare l'area di una superficie  $R$  tramite un integrale di linea, scegliendo le funzioni  $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$  e  $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$ . Infatti,

$$A_R = \iint_R dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\gamma_R} [x dy - y dx]. \quad (\text{A.6})$$

■

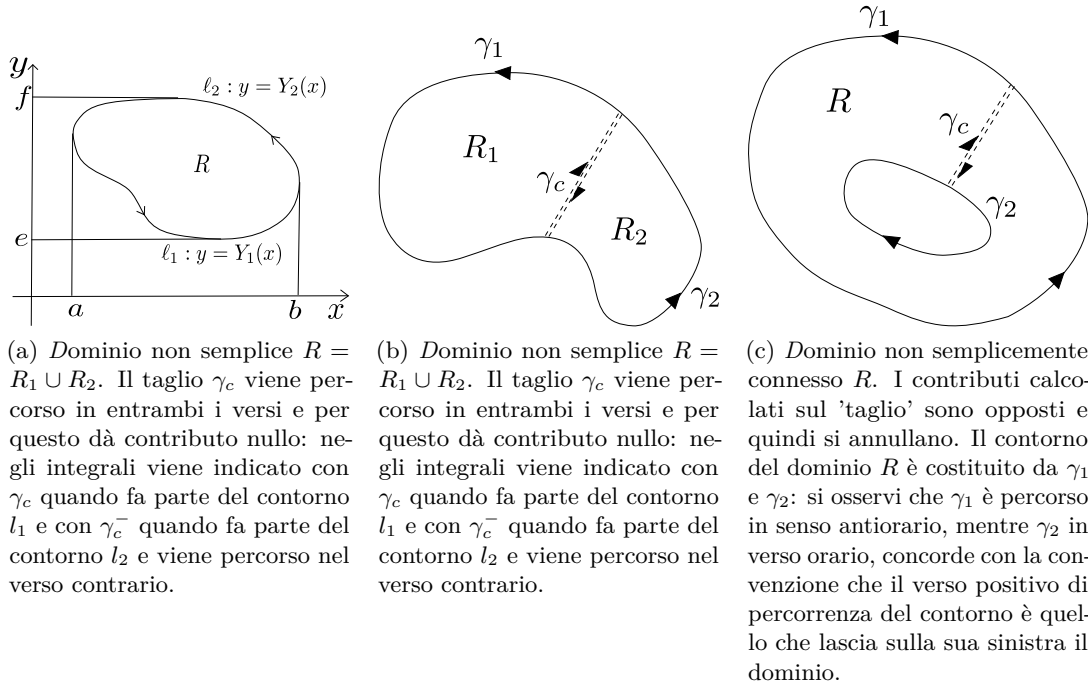


Figura A.1: Dominio semplice, semplicemente connesso e non semplicemente connesso.

## A.2 Due utili lemmi

Il prossimo lemma è alla base dei più rinomati teoremi della divergenza e del gradiente: la dimostrazione di questi due teoremi si basa su un facile uso ripetuto di questo lemma. Data la facilità di questo lemma e la sua frequente applicazione nella scrittura di bilanci e in generale di integrazione per parti, è molto conveniente ricordarsi questo semplice risultato.

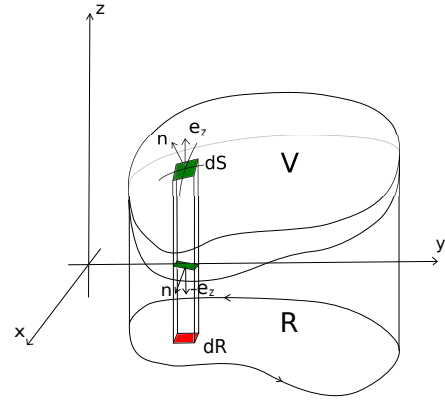
**Lemma A.2.1** Sotto le ipotesi del teorema di Green nel piano.

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial x_i} = \oint_S A n_i \quad (\text{A.7})$$

*Dimostrazione.* Si segue un ragionamento molto simile a quello utilizzato per la dimostrazione del lemma di Green nel piano. Per  $\partial A / \partial z$ :

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial A}{\partial z} &= \int_R \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} \frac{\partial A}{\partial z} dz dxdy = \\ &= \int_R [A(x, y, f_2(x, y)) - A(x, y, f_1(x, y))] dxdy \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Il passaggio più complicato è nel passare dall'integrale in  $(x, y) \in R$  all'integrale sulla superficie  $S$ , bordo del volume  $V$ : l'elemento infinitesimo  $dR$  di area nel piano- $xy$  è uguale a  $dR = dxdy$ ; il disegno e la dimostrazione fanno riferimento a un volume *semplice* (come nel caso di lemma di Green nel piano, è possibile generalizzare i risultati ottenuti per domini di forma generica): è possibile suddividere la superficie  $S$  nelle due "semisuperfici"



$S^+ : z = f_2(x, y)$  e  $S^- : z = f_1(x, y)$  tali che  $S^+ \cup S^- = S$  e che la normale, uscente dal volume, abbia componente in  $z$  positiva e negativa rispettivamente ( $S^+ : \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} > 0$ ,  $S^- : \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} < 0$ ). La superficie elementare  $dR$  è inoltre la proiezione dell'elemento di superficie  $dS$  sul piano- $xy$ : in generale  $dS$  non sarà parallela al piano- $xy$  e quindi sarà maggiore di  $dR$ . Non è difficile dimostrare che

$$dxdy = dR = \begin{cases} dS \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{n}} & \text{su } S^+ \\ -dS \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{n}} & \text{su } S^- \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Si può quindi ora continuare nella dimostrazione

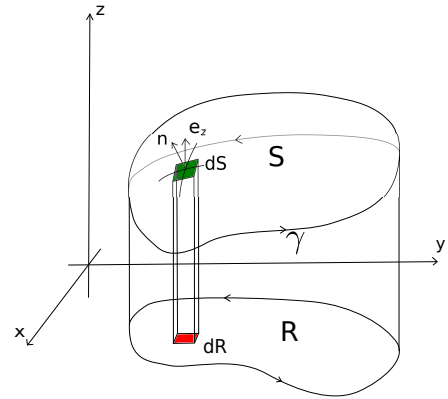
$$\begin{aligned} \int_R [A(x, y, f_2(x, y)) - A(x, y, f_1(x, y))] dxdy &= \\ &= \int_{S^+} A \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} dS + \int_{S^-} A \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = \\ &= \oint_S A \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \\ &= \oint_S A n_z dS \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

■

Come il lemma precedente è alla base della dimostrazione dei teoremi di gradiente e divergenza, il lemma successivo è alla base della dimostrazione del teorema del rotore.

**Lemma A.2.2** Sotto le ipotesi del teorema di Green nel piano.

$$\int_S [\nabla \times (A \hat{\mathbf{e}}_i)] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_\gamma A dx_i \quad (\text{A.11})$$



*Dimostrazione.* Per  $A \hat{\mathbf{e}}_x$ ,  $\nabla \times (A \hat{\mathbf{e}}_x) = \partial A / \partial z \hat{\mathbf{e}}_y - \partial A / \partial y \hat{\mathbf{e}}_z$ . Si scrive la superficie  $S$  in forma parametrica come:  $\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{e}}_x + y \hat{\mathbf{e}}_y + z(x, y) \hat{\mathbf{e}}_z$ . Il vettore  $\partial \mathbf{r} / \partial y \hat{\mathbf{e}}_y + \partial z / \partial y \hat{\mathbf{e}}_z$  è parallelo alla superficie  $S$  e quindi perpendicolare alla normale  $\hat{\mathbf{n}}$ :

$$0 = \hat{\mathbf{n}} \cdot \left( \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial z}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_z \right) \quad (\text{A.12})$$

Scrivendo  $[\nabla \times (A \hat{\mathbf{e}}_x)] \cdot \hat{\mathbf{n}}$ :

$$[\nabla \times (A \hat{\mathbf{e}}_x)] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\partial A}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_y \cdot \hat{\mathbf{n}} - \frac{\partial A}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \hat{\mathbf{n}} = - \left[ \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial y} \right] \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{A.13})$$

Se si riconosce  $\partial A(x, y, z(x, y)) / \partial y = \partial A / \partial z \partial z / \partial y + \partial A / \partial y$ , si può scrivere:

$$\int_S [\nabla \times (A \hat{\mathbf{e}}_x)] \cdot \hat{\mathbf{n}} = - \int_S \frac{\partial A}{\partial y} \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_{dR = dxdy} = - \int_R \frac{\partial A}{\partial y} dxdy = \int_\gamma A dx \quad (\text{A.14})$$

■

### A.3 Teorema della divergenza, del rotore e del gradiente

Vengono ora enunciati i teoremi della divergenza, del rotore e del gradiente. Senza entrare nei dettagli delle ipotesi dei teoremi, affinché i loro enunciati siano validi, gli oggetti matematici coinvolti devono almeno esistere. L'ipotesi di “sufficiente regolarità” dei campi vettoriali viene tradotta volgarmente nel comportamento regolare della funzione all'interno del dominio, che esclude l'esistenza di poli (punti del dominio in cui funzione tende all'infinito) e comprende l'esistenza (e la continuità) delle derivate spaziali del campo.

Per far intuire l'utilità dei due lemmi presentati in precedenza, si riportano anche le dimostrazioni dei teoremi: una volta noti i due utili(ssimi) lemmi, queste dimostrazioni sono così immediate da occupare soltanto una riga.

**Teorema A.3.1** [Teorema della divergenza] Si consideri un insieme  $V \subset R^n$  compatto delimitato da una superficie liscia  $S = \partial V$ . Se  $\mathbf{v}$  è un campo vettoriale differenziabile con continuità (di classe  $C^1$ ) definito in un intorno di  $V$ , allora

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} = \oint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (\text{A.15})$$

essendo  $\hat{\mathbf{n}}$  la normale alla superficie  $S$  uscente dal volume  $V$ .

*Dimostrazione.* Il teorema viene dimostrato scrivendo la divergenza in un sistema di coordinate cartesiane,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ , e applicando il lemma A.2.1 a ogni derivata parziale nella sommatoria,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} = \int_V \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \oint_S \sum_i v_i n_i = \oint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (\text{A.16})$$

■

**Teorema A.3.2 — Teorema del rotore.** In maniera abbastanza generale, sotto le ipotesi dei teoremi precedenti, vale

$$\int_S [\nabla \times \mathbf{v}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}}, \quad (\text{A.17})$$

avendo omesso l'elemento di lunghezza  $d\ell$  nell'integrale di linea e avendo indicato con  $\hat{\mathbf{t}}$  il versore tangente alla curva  $\gamma$ .

*Dimostrazione.* Il teorema viene dimostrato utilizzando un sistema di coordinate cartesiane e applicando il lemma A.2.2 a ogni componente del vettore  $\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{e}}_x + v_y \hat{\mathbf{e}}_y + v_z \hat{\mathbf{e}}_z = \sum_i v_i \hat{\mathbf{e}}_i$ ,

$$\int_S [\nabla \times \mathbf{v}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_S \left[ \nabla \times \left( \sum_i v_i \hat{\mathbf{e}}_i \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_\gamma \sum_i v_i dx_i = \int_\gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_\gamma \sum_i v_i dx_i = \int_\gamma \hat{\mathbf{t}}, \quad (\text{A.18})$$

avendo utilizzato le coordinate cartesiane e la definizione di versore tangente per esprimere l'elemento di lunghezza,  $d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{t}} ds$ . ■

**Teorema A.3.3 — Teorema del gradiente.** In maniera abbastanza generale, sotto le ipotesi

dei teoremi precedenti, per un campo scalare  $f$  sufficientemente regolare vale

$$\int_V \nabla f = \oint_S f \hat{\mathbf{n}}. \quad (\text{A.19})$$

*Dimostrazione.* Il teorema viene dimostrato scrivendo il gradiente del campo scalare  $f$  in coordinate cartesiane,  $\nabla f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i$ , e applicando il lemma A.2.1 a ogni derivata parziale nella sommatoria,

$$\int_V \nabla f = \int_V \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i = \oint_S \sum_i f n_i \hat{\mathbf{e}}_i = \oint_S f \hat{\mathbf{n}}. \quad (\text{A.20})$$

■

Prima di continuare i richiami di analisi, viene fatta un'osservazione sulla notazione usata.

- R** Per indicare gli integrali di linea, superficie e volume verrà ommesso l'elemento infinitesimo di linea, superficie e volume, indicando il dominio di integrazione di fianco al segno di integrale. In maniera esplicita l'integrale sulla linea  $\ell$ , sulla superficie  $S$  e sul volume  $V$  di una quantità scalare  $f$  verranno indicati semplicemente con

$$\int_{\ell} f, \quad \int_S f, \quad \int_V f. \quad (\text{A.21})$$

Il valore di un integrale è indipendente dalle coordinate utilizzate per svolgerlo. Per calcolare il valore dell'integrale è necessario introdurre un sistema di coordinate per parametrizzare in una maniera conveniente la funzione, il dominio e gli elementi infinitesimi di lunghezza, superficie o volume. Spesso questa scelta può essere dettata dalla geometria del dominio. Per completezza vengono riportate esplicitamente le espressioni degli elementi infinitesimi di:

- lunghezza (con versore tangente) della curva  $\ell$ , descritta dalla parametrizzazione  $\ell : \mathbf{r} = \mathbf{r}(l) = \mathbf{r}(l(s)) = \tilde{\mathbf{r}}(s)$ ,

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dl} dl = \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{ds}}_{\hat{\mathbf{t}}} ds = \hat{\mathbf{t}} ds, \quad (\text{A.22})$$

avendo riconosciuto il versore  $\hat{\mathbf{t}}$  tangente alla curva, introdotto l'ascissa curvilinea  $s$ , e indicato con  $\mathbf{r}(l)$  la parametrizzazione in funzione di  $l$  e con  $\tilde{\mathbf{r}}(s)$  la parametrizzazione in funzione di  $s$ .

- di superficie (con versore normale) della superficie bidimensionale  $S$ , descritta dalla parametrizzazione  $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ,

$$\hat{\mathbf{n}} dS = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} du dv \quad (\text{A.23})$$

- di volume del volume tridimensionale  $V$ , descritto dalla parametrizzazione dello spazio  $V : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, w)$ ,

$$dV = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} du dv dw. \quad (\text{A.24})$$

Si fanno quindi alcuni esempi.

■ **Esempio A.2** Si vuole calcolare l'elemento infinitesimo di curva di una circonferenza  $C$  di raggio  $R$ . Si utilizza un sistema di riferimento cartesiano con origine nel centro della circonferenza e l'angolo  $\theta$  che il vettore posizione  $\mathbf{r}$  forma con l'asse  $x$  per parametrizzare la curva

$$C : \mathbf{r}(\theta) = x(\theta)\hat{\mathbf{x}} + y(\theta)\hat{\mathbf{y}} = R \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + R \sin \theta \hat{\mathbf{y}}. \quad (\text{A.25})$$

L'elemento di curva  $d\mathbf{r}$  risulta

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = (-\sin\theta\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\hat{\mathbf{y}})Rd\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}}Rd\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}}ds, \quad (\text{A.26})$$

avendo introdotto l'ascissa curvilinea  $s = R\theta$  e il versore  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  tangente alla circonferenza.

■

■ **Esempio A.3** Si vuole calcolare la superficie elementare (con versore normale) di una superficie sferica  $S$  parametrizzata con gli angoli  $\varphi$  e  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\varphi, \theta) &= x(\varphi, \theta)\hat{\mathbf{x}} + y(\varphi, \theta)\hat{\mathbf{y}} + z(\varphi, \theta)\hat{\mathbf{z}} = \\ &= R\sin\varphi\cos\theta\hat{\mathbf{x}} + R\sin\varphi\sin\theta\hat{\mathbf{y}} + R\cos\varphi\hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Da un calcolo diretto, senza riportare tutti i passaggi, si ottiene

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}dS &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} d\varphi d\theta = \\ &= (\sin\varphi\cos\theta\hat{\mathbf{x}} + \sin\varphi\sin\theta\hat{\mathbf{y}} + \cos\varphi\hat{\mathbf{z}})R^2\sin\varphi d\varphi d\theta = \\ &= \hat{\mathbf{R}}R^2\sin\varphi d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

■

■ **Esempio A.4** Si vuole calcolare il volume elementare di una volume  $V$  parametrizzato in coordinate sferiche, cioè con il raggio  $R$  e gli angoli  $\varphi$  e  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\varphi, \theta) &= x(R, \varphi, \theta)\hat{\mathbf{x}} + y(R, \varphi, \theta)\hat{\mathbf{y}} + z(R, \varphi, \theta)\hat{\mathbf{z}} = \\ &= R\sin\varphi\cos\theta\hat{\mathbf{x}} + R\sin\varphi\sin\theta\hat{\mathbf{y}} + R\cos\varphi\hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Da un calcolo diretto, senza riportare tutti i passaggi, si ottiene

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial R} \cdot \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} dR d\varphi d\theta = \\ &= \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}}R^2\sin\varphi dR d\varphi d\theta = \\ &= R^2\sin\varphi dR d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

■

## A.4 Campi vettoriali conservativi

In alcuni casi l'integrale  $I = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}}$  è indipendente dal percorso di integrazione  $\gamma$ . L'indipendenza del valore dell'integrale  $I$  da  $\gamma$  è strettamente collegata all'idea di differenziale esatto: quando  $I$  è indipendente da  $\gamma$ , ma dipende solo dai suoi estremi  $a$ ,  $b$ , si può scrivere  $I = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \int_a^b d\phi = \phi(b) - \phi(a)$ . Se l'integrale di linea  $I$  su ogni curva nel dominio  $V$  dipende solo dagli estremi di integrazione, il campo vettoriale  $\mathbf{F}$  viene definito **conservativo**.

L'indipendenza del valore dell'integrale dal percorso di integrazione ha alcune conseguenze:

- l'integrale su ogni percorso chiuso è nullo:  $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ ;
- il campo  $\mathbf{F}$  può essere scritto come gradiente di una funzione scalare  $\phi$ , che assume il significato di potenziale:  $\mathbf{F} = \nabla\phi$ ;
- il rotore del campo vettoriale è nullo:  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$  (infatti  $\nabla \times \nabla\phi = 0$ , per ogni funzione scalare  $\phi$ ).

Le condizioni elencate sono quindi **condizioni necessarie** per l'indipendenza dell'integrale dal percorso di integrazione. Se prese a se stanti, esse non sono anche condizioni sufficienti. Affinchè la seconda e la terza condizione siano anche sufficienti, è necessario che il dominio sia semplicemente connesso.

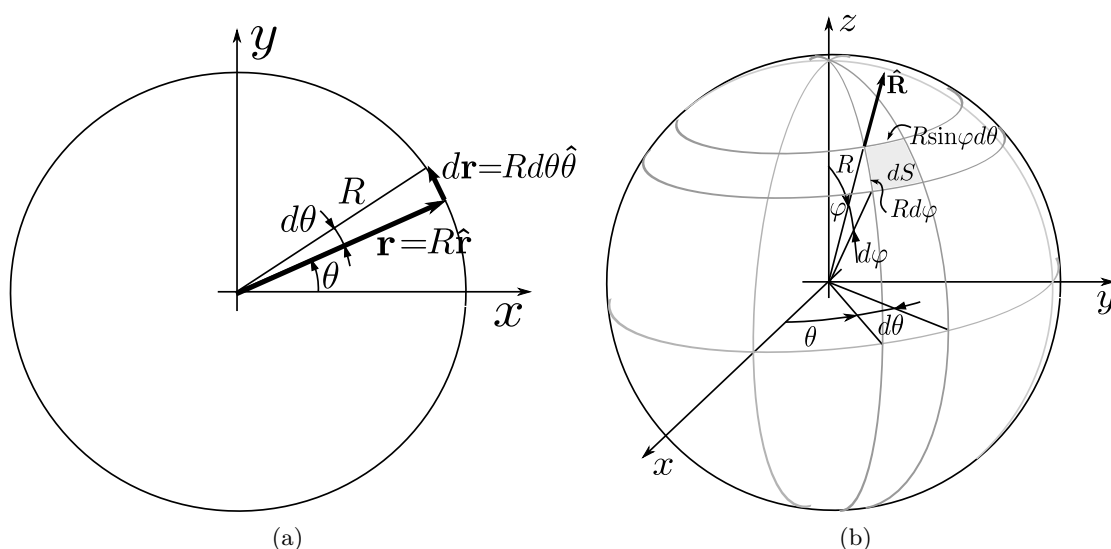


Figura A.2: Sistemi di coordinate usati negli esempi A.2-A.4. (a) Coordinate polari. (b) Coordinate sferiche.

Si fa ora un esempio su due campi vettoriali definiti su un dominio non semplicemente connesso, cioè dove tutti i percorsi chiusi sono riducibili a un punto. Entrambi hanno rotore nullo all'interno del dominio, ma solo uno dei due è conservativo.

■ **Esempio A.5** Dati i seguenti campi vettoriali

$$\mathbf{F}_1 = \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{y}} \quad , \quad \mathbf{F}_2 = -\frac{y}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{A.31})$$

si chiede di

1. definire il dominio e 'disegnare' i campi vettoriali;
  2. calcolare il rotore, la divergenza e (se esiste) la funzione  $\phi$  t.c.  $\mathbf{F} = \nabla \phi$ ;
  3. calcolare la circuitazione ( $\Gamma = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{t}$ ) sulle circonferenze di raggio unitario  $C$  centrata in  $(0,0)$  e  $C'$  centrata in  $(2,1)$ ;
  4. calcolare il flusso ( $\Phi = \oint \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ ) uscente dalle curve  $C$  e  $C'$ ;
  5. calcolare l'integrale  $\int_\gamma \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}$  su una curva  $\gamma$  che avvolge due volte l'origine in senso antiorario.
1. Il dominio  $\Omega$  dei due campi vettoriali è  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ : non è semplicemente connesso.  
*Osservazione.* A differenza di  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  è semplicemente connesso (perché?).  
*Grafici...*
2. • **Rotore:** all'interno del dominio  $\Omega$  il rotore dei due campi vettoriali è nullo. Infatti, la componente lungo  $z$  è l'unica che può essere non nulla, poichè il campo è definito nel piano  $xy$  e dipende solo da  $x$  e  $y$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial F_{1x}}{\partial y} &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \\ \frac{\partial F_{2y}}{\partial x} - \frac{\partial F_{2x}}{\partial y} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

- **Divergenza:** all'interno del dominio  $\Omega$  la divergenza dei due campi vettoriali è nullo.  
 (...)



- $\phi$ : all'interno del dominio  $\Omega$ , le funzioni  $\phi$ , a meno di una costante (ininfluente) valgono:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \quad , \quad \phi_2 = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{A.33})$$

Ad esempio per il campo  $\mathbf{F}_1$ , si può scrivere la relazione  $\mathbf{F} = \nabla\phi$  in coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{y}{x^2 + y^2} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Integrando la prima in  $x$  e la seconda in  $y$ :

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \int \frac{x}{x^2 + y^2} dx = \int \frac{1}{x^2 + y^2} d(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + f(y) \\ \phi(x, y) &= \int \frac{y}{x^2 + y^2} dy = \int \frac{1}{x^2 + y^2} d(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + g(x) \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

dove compaiono le funzioni  $f(y)$  e  $g(x)$ , che tengono conto dell'arbitrarietà dell'integrale di una derivata parziale: si pensi di fare la derivata parziale delle relazioni appena trovate. Derivando la prima rispetto a  $x$  si ha:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right) + \frac{\partial f(y)}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} + 0 \quad (\text{A.36})$$

La derivata  $\frac{\partial f(y)}{\partial x}$  è identicamente nulla, poichè la funzione  $f(y)$  non dipende da  $x$ .

Da un confronto tra le due forme di  $\phi$ , segue che  $f(y)$  e  $g(x)$  devono essere uguali e costanti: il valore di questa costante additiva è comunque ininfluente ai termini della definizione di un potenziale

3. • Circuitazione su  $C'$ : entrambi gli integrali calcolati su  $C'$  sono nulli, poichè il percorso di integrazione è una linea chiusa che non circonda l'origine ma una regione semplicemente connessa nella quale il campo ammette potenziale. In altre parole,  $C'$  circonda una regione del dominio che è semplicemente connessa ed è possibile applicare direttamente il teorema del rotore, avendo definito  $R'$  come la parte del dominio interna a  $C'$ .

$$\Phi = \oint_{C'} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \int_{R'} [\nabla \times \mathbf{F}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (\text{A.37})$$

poichè il rotore è nullo in tutto  $\Omega$  e quindi anche in  $R' \subset \Omega$ .

- Circuitazione su  $C'$ :  $C$  invece circonda l'origine, causa della non semplice connessione del dominio; una diretta applicazione del teorema del rotore non è quindi possibile; gli integrali su  $C$  devono essere calcolati e valgono:

$$I_1 = \oint_C \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad , \quad I_2 = \oint_C \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} = 2\pi \quad (\text{A.38})$$

I due integrali possono essere calcolati facilmente in coordinate polari. L'elemento  $d\mathbf{r}$  sulla circonferenza di raggio  $r$  è:

$$d\mathbf{r} = r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.39})$$

I due campi possono essere scritti in coordinate polari come:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{r} \hat{\mathbf{r}} \quad , \quad \mathbf{F}_2 = \frac{1}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.40})$$

Si può notare che il campo  $\mathbf{F}_1$ , calcolato sul contorno, è sempre perpendicolare ad esso. Il primo integrale è quindi nullo.

$$\begin{aligned} I_{1C} &= \int_C \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} 0 d\theta = 0 \\ I_{2C} &= \int_C \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = 2\pi \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

4. • Flussi su  $C'$ : Poichè  $R'$  (vedi sopra) è semplicemente connesso, si può applicare il teorema della divergenza. I flussi di entrambi i campi su  $C'$  sono nulli, poichè la divergenza dei due campi è nulla in tutto il dominio  $\Omega$ .
- Flussi su  $C$ :  $C$  invece circonda l'origine, causa della non semplice connessione del dominio; una diretta applicazione del teorema della divergenza non è quindi possibile; gli integrali su  $C$  devono essere calcolati e valgono:

$$\Phi_{C1} = \oint_C \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{n} = 2\pi \quad , \quad \Phi_{C2} = \oint_C \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{n} = 0 \quad (\text{A.42})$$

5. L'integrale di  $\int_\gamma \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}$  vale  $4\pi$ .

- Se la circuitazione calcolata sul contorno  $C$  vale  $\Gamma$  ( $2\pi$  nel caso dell'esercizio), la circuitazione calcolata su qualsiasi altra curva  $l$  che avvolge l'origine una sola volta avrà lo stesso valore. Infatti, se viene introdotto il 'taglio'  $\gamma_c$  (invalidabile), si ottiene che il dominio 'tagliato' è semplicemente connesso e la circuitazione sul suo contorno ( $\partial \cup \gamma_c \cup C^- \cup \gamma_c^-$ ) è nulla, dove con  $C^-$  si è indicata la circonferenza percorsa in senso orario. Ricordando che i contributi su  $\gamma_c$  si annullano a vicenda e che se si inverte il verso di percorrenza di una curva la circuitazione cambia segno:

$$0 = \int_{l \cup \gamma_c \cup C^- \cup \gamma_c^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_c} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_c^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{A.43})$$

E quindi:  $\int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma$ .

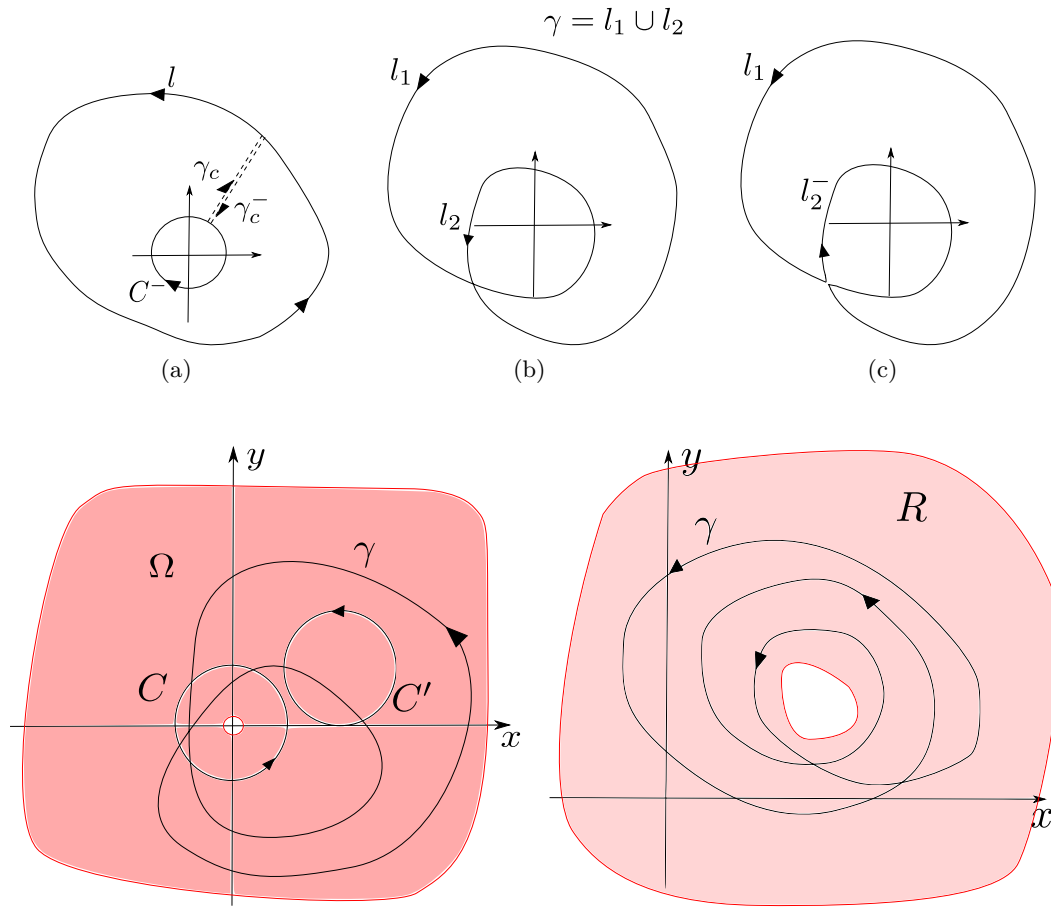
- Ora il percorso  $\gamma$  può essere 'suddiviso' nelle curve  $l_1, l_2$ . Si può definire ora la curva composta da  $l_1$  e  $l_2^-$  (il verso è importante!!). Con ragionamenti analoghi a quelli fatti in precedenza:

$$0 = \int_{l_1 \cup l_2^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{A.44})$$

Da questo si ricava che  $\int_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma$ . Poichè l'integrale su  $\gamma$  è la somma dei due integrali, si ottiene:

$$\int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{l_1 \cup l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\Gamma = 4\pi \quad (\text{A.45})$$

■



(a) Percorsi di integrazione dell'esercizio.  $C$  avvolge una volta sola in 'buco' nel dominio,  $C'$  mai,  $\gamma$  due volte.

(b) Integrale su un percorso non riducibile. Il dominio  $R$  (in rosa) non è semplicemente connesso. Si può dimostrare che se l'integrale  $I_1$  definito su un percorso 'che circonda' una sola volta 'il buco' all'interno del dominio  $I_1 = \oint_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma$ , allora l'integrale  $I$  definito su  $\gamma$  che circonda  $N$  (indice di avvolgimento) volte 'il buco' nello stesso verso di  $l_1$ , vale  $I_1 = \oint_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = N\Gamma$ .

## A.5 Descrizione lagrangiana e descrizione euleriana

La dinamica dei mezzi continui, ad esempio i solidi o i fluidi, può essere descritta con un approccio lagrangiano o euleriano. La **descrizione lagrangiana**, utilizzata spesso in meccanica dei solidi, consiste nel seguire il moto nello spazio delle singole particelle del mezzo continuo. La **descrizione euleriana**, utilizzata spesso in meccanica dei fluidi, consiste nel fissare un volume di controllo e descrivere la variazione delle quantità meccaniche al suo interno, tenendo in considerazione i flussi della quantità meccanica attraverso le pareti fisse del volume di controllo. È possibile descrivere l'evoluzione delle quantità meccaniche di particelle e volumi in moto arbitrario, come si vedrà in §.

Si introducono due sistemi di coordinate: uno è solidale con il mezzo continuo che occupa il volume  $V(t)$  dipendente dal tempo, mentre l'altro è fisso. Si può pensare al sistema di riferimento solidale con il continuo come un' "etichetta" che viene applicata a ogni **punto materiale** del mezzo continuo che occupa il volume  $V(t)$ . Un sistema di riferimento fisso è indipendente dal moto del mezzo continuo, come ad esempio il sistema di coordinate cartesiane, la cui origine e i cui assi sono fissi nel tempo. Mentre il volume  $V(t)$