9. Strato limite

Esercizio 9.1 — Spessori di strato limite: strato limite laminare. Dato il profilo di velocità, determinare il rapporto di forma H.

$$u(x,y) = \begin{cases} U(x)\left(2\dfrac{y}{\delta(x)} - \dfrac{y^2}{\delta^2(x)}\right) & y \le \delta(x) \\ U(x) & y > \delta(x) \end{cases} \tag{9.1}$$

$(H = 5/2)$

Soluzione

Concetti. Spessori di strato limite. Rapporto di forma $H = \delta_1/\delta_2$.

$$\begin{aligned} \delta_1(x) &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy \\ \delta_2(x) &= \int_0^\infty \frac{u(x,y)}{U(x)}\left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy \end{aligned} \tag{9.2}$$

Svolgimento. L'esercizio viene risolto calcolando prima gli integrali nelle definizioni degli spessori di strato limite e poi il loro rapporto.

Lo spessore di spostamento:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy = \\ &= \int_0^{\delta(x)} \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy + \underbrace{\int_{\delta(x)}^\infty \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy}_{=0} = \\ &= \int_0^{\delta(x)} \left(1 - 2\frac{y}{\delta(x)} + \frac{y^2}{\delta^2(x)}\right) dy = \\ &= \frac{1}{3}\delta(x) \end{aligned} \tag{9.3}$$

Lo spessore di quantità di moto:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \int_0^\infty \frac{u(x,y)}{U(x)}\left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy \\ &= \int_0^{\delta(x)} \frac{u(x,y)}{U(x)}\left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy + \underbrace{\int_{\delta(x)}^\infty \frac{u(x,y)}{U(x)}\left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy}_{=0} = \\ &= \frac{2}{15}\delta(x) \end{aligned} \tag{9.4}$$

Il rapporto di forma vale quindi $H = 5/2$.

Esercizio 9.2 — Spessori di strato limite: strato limite turbolento. Dato il profilo di velocità, determinare il rapporto di forma H.

$$\frac{u(x,y)}{U(x)} = \begin{cases} \left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^{\frac{1}{7}} & y \leq \delta(x) \\ 1 & y > \delta(x) \end{cases} \tag{9.5}$$

$(H = 9/7)$

Soluzione

Concetti. Spessori di strato limite. Rapporto di forma $H = \delta_1/\delta_2$.

$$\begin{aligned} \delta_1(x) &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy \\ \delta_2(x) &= \int_0^\infty \frac{u(x,y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy \end{aligned} \tag{9.6}$$

Svolgimento. L'esercizio viene risolto calcolando prima gli integrali nelle definizioni degli spessori di strato limite e poi il loro rapporto.

Lo spessore di spostamento:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy = \\ &= \int_0^{\delta(x)} \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy + \underbrace{\int_{\delta(x)}^\infty \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy}_{=0} = \\ &= \frac{1}{8}\delta(x) \end{aligned} \tag{9.7}$$

Lo spessore di quantità di moto:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \int_0^\infty \frac{u(x,y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy \\ &= \int_0^{\delta(x)} \frac{u(x,y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy + \underbrace{\int_{\delta(x)}^\infty \frac{u(x,y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy}_{=0} = \\ &= \frac{7}{72}\delta(x) \end{aligned} \tag{9.8}$$

Il rapporto di forma vale quindi $H = 9/7$.

Osservazione. Questo profilo di velocità viene usato come approssimazione del profilo di strato limite turbolento. Questo profilo ha $\frac{\partial u}{\partial y}\big|_{y=0}$ infinita, che implica sforzo a parete infinito. Una formula per lo sforzo di parete, associata a questo profilo di velocità è:

$$\tau_w = 0.0225\rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{9.9}$$

Esercizio 9.3 — Equazione integrale di Von Karman. Dati $\rho = 1.225kg/m^3$, $\nu = 10^{-5}m^2/s$ e velocità esterna $U(x) = 1.45m/s$, utilizzando le formule per il profilo di velocità e sforzo a parete per lo strato limite turbolento, calcolare lo spessore $\delta(x)$ dello strato limite.

$$\frac{u(x,y)}{U(x)} = \begin{cases} \left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^{\frac{1}{7}} & y \leq \delta(x) \\ 1 & y > \delta(x) \end{cases} \tag{9.10}$$

$$\tau_w = 0.0225\rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{9.11}$$

Soluzione

Concetti. Spessori di strato limite. Rapporto di forma. Coefficiente di attrito. Equazione integrale di Von Karman.

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} \tag{9.12}$$

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\delta_2}{U(x)}\frac{dU(x)}{dx}(2 + H) = \frac{c_f}{2} \tag{9.13}$$

Svolgimento. Si calcolano gli spessori di strato limite δ_1 e δ_2, il raporto di forma H e il coefficiente di attrico c_f; poi si inseriscono nell'equazione integrale di Von Karman. Poichè la velocità esterna non varia in x, il secondo termine si annulla.

Gli spessori di strato limite e il rapporto di forma hanno valore $\delta_1 = \frac{1}{8}\delta$, $\delta_2 = \frac{7}{72}\delta$, $H = \frac{9}{7}$.

Il coefficiente di attrito vale:

$$\begin{aligned} c_f &= \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \\ &= \frac{2}{\rho U^2} 0.0225\rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} = \\ &= 0.045 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \tag{9.14}$$

Inserendo nell'equazione di Von Karman:

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{c_f}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{7}{72}\frac{d\delta(x)}{dx} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{9.15}$$

Integrando tra 0 e x, avendo imposto $\delta(0) = 0$, si ottiene:

$$\delta(x) = 0.0225\frac{90}{7}\left(\frac{\nu}{U}\right)^{\frac{1}{4}} x^{\frac{4}{5}} \tag{9.16}$$

Dalle equazioni di Prandtl per lo strato limite all'equazione integrale di VK.
L'equazione integrale di VK (9.13) viene ricavata integrando in y tra 0 e ∞ la componente x della quantità di moto delle equazioni di Prandtl per lo strato limite

$$\underbrace{\int_{y=0}^{\infty} u\frac{\partial u}{\partial x}dy}_{(a)} + \underbrace{\int_{y=0}^{\infty} v\frac{\partial u}{\partial y}dy}_{(b)} - \underbrace{\int_{y=0}^{\infty} \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy}_{(c)} - \underbrace{\int_{y=0}^{\infty} UU'(x)dy}_{(d)} = 0 \tag{9.17}$$

dove è stata indicata con $U(x)$ la velocità della corrente esterna allo strato limite. Si calcolano ora i termini (c), (b). Da (c) si ricava un termine nel quale compare lo sforzo tangenziale a parete τ_w

$$-\int_{y=0}^{\infty} \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)dy = -\nu\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]\Bigg|_{y=0}^{\infty} = \nu\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \frac{\tau_w(x)}{\rho} \tag{9.18}$$

Il termine (b) richiede un po' di lavoro e attenzione in più (IxP indica l'integrazione per parti).

$$\begin{aligned}
&\int_{y=0}^{\infty} v(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)dy = && \left(\text{IxP}: \int_0^{\infty} v\frac{\partial u}{\partial y} = [vu]\Bigg|_{y=0}^{\infty} - \int_0^{\infty}\frac{\partial v}{\partial y}u\right)\\
&= v(x,\infty)u(x,\infty) - \underbrace{v(x,0)u(x,0)}_{=0} - \int_0^{\infty}\frac{\partial v}{\partial y}u = && \left(u(x,\infty) = U(x); \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\
&= v(x,\infty)U(x) + \int_{y=0}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}u = && \left(v(x,\infty) = \int_{y=0}^{\infty}\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)dy = -\int_{y=0}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)dy\right)\\
&= -\int_{y=0}^{\infty} U(x)\frac{\partial u}{\partial x}dy + \int_{y=0}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)u(x,y)dy
\end{aligned} \tag{9.19}$$

Inserendo le espressioni (9.18), (9.19) nell'equazione (9.17), si ottiene:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{\infty}\left[2u\frac{\partial u}{\partial x} - U\frac{\partial u}{\partial x} - U\frac{dU}{dx}\right]dy + \frac{\tau_w}{\rho} =\\
&= \int_0^{\infty}\left[\frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial(Uu)}{\partial x} + u\frac{dU}{dx} - u\frac{dU}{dx}\right]dy + \frac{\tau_w}{\rho} =\\
&= \int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left[u^2 - Uu\right]dy - \frac{dU}{dx}\int_0^{\infty}[U-u]\,dy + \frac{\tau_w}{\rho} =\\
&= \frac{d}{dx}\int_0^{\infty}\left[u^2 - Uu\right]dy - \frac{dU}{dx}\int_0^{\infty}[U-u]\,dy + \frac{\tau_w}{\rho} =\\
&= -\frac{d}{dx}\left(U^2(x)\int_0^{\infty}\frac{u}{U}\left[1-\frac{u}{U}\right]dy\right) - \frac{dU}{dx}U\int_0^{\infty}\left[1-\frac{u}{U}\right]dy + \frac{\tau_w}{\rho} =\\
&= -\frac{d}{dx}\left[U^2(x)\delta_2(x)\right] - U(x)U'(x)\delta_1(x) + \frac{\tau_w(x)}{\rho}
\end{aligned} \tag{9.20}$$

Riassumendo,

$$\frac{d}{dx}\left[U^2(x)\delta_2(x)\right] + U(x)U'(x)\delta_1(x) = \frac{\tau_w(x)}{\rho} \tag{9.21}$$

Infine espandendo i termini, ricordando la definizione di rapporto di forma $H = \delta_1/\delta_2$, coefficiente di attrito $c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2}$

$$\begin{aligned}
&2UU'\delta_2 + U^2\delta_2' + UU'\delta_1(x) = \frac{\tau_w(x)}{\rho}\\
&[2\delta_2 + \delta_1]UU' + U^2\delta_2' = \frac{\tau_w(x)}{\rho}\\
&[2+H]\delta_2\frac{U'}{U} + \delta_2' = \frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{c_f}{2}
\end{aligned} \tag{9.22}$$