

Richiami di analisi e introduzione all'algebra e al calcolo tensoriale

26 febbraio 2020

Copyright © 2020 Davide Montagnani

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

First edition, March 2013

Indice

1	Richiami di analisi	9
1.1	Teoremi della divergenza, del gradiente e del rotore	10
1.1.1	Lemma di Green	10
1.1.2	Due utili lemmi	12
1.1.3	Teorema della divergenza, del gradiente e del rotore	13
1.2	Campi vettoriali conservativi	16
1.3	Derivata temporale di integrali su domini dipendenti dal tempo: formule di Leibniz	21
1.4	Descrizione lagrangiana, euleriana e arbitraria	25
1.4.1	Descrizione locale nel problema differenziale	25
1.4.2	Descrizione globale nel problema integrale	27
1.5	Bilanci integrali	28
1.5.1	Bilancio di massa	29
1.5.2	Prima equazione cardinale e bilancio della quantità di moto	29
1.5.3	Seconda equazione cardinale e bilancio del momento della quantità di moto	29
1.5.4	Bilancio di energia totale	29
1.5.5	Bilanci integrali per volumi in moto arbitrario	30
2	Introduzione all'algebra tensoriale	31
2.1	Richiami di algebra lineare	33
2.1.1	Cambio di base e regole di trasformazione: covarianza e contravarianza.	34
2.1.2	Vettori e basi ortornomali	35
2.2	Algebra multilineare	36
2.2.1	Prodotto tensoriale tra vettori	36
2.2.2	Base prodotto e componenti di un tensore	37
2.2.3	Alcune operazioni tensoriali (I): somma e moltiplicazione per uno scalare.	38

2.2.4	Prodotto tensoriale tra tensori	38
2.2.5	Cambio di base e regola di trasformazione delle componenti: definizione "classica" di tensore.	38
2.2.6	Alcune operazioni tensoriali (II)	39
2.2.7	Alcuni esempi	41
2.2.8	Cosa non è stato detto	46
3	Introduzione al calcolo tensoriale	47
3.1	Calcolo vettoriale e tensoriale in coordinate curvilinee	47
3.1.1	Tensore metrico.	49
3.1.2	Simboli di Christoffel.	51
3.2	Operatori differenziali	52
3.2.1	Gradiente	52
3.2.2	Divergenza	55
3.2.3	Operatore di advezione	57
3.2.4	Rotore	58
3.2.5	Laplaciano	59
3.3	Coordinate curvilinee ortogonali	59
3.3.1	Esempio: coordinate cilindriche	60
A	Argomenti del corso – esercizi	65
A.1	Statica	65
A.2	Tensione superficiale	65
A.3	Cinematica	65
A.4	Bilanci	65
A.5	Teorema di Bernoulli	65
A.6	Soluzioni esatte	65
A.7	Similitudine	65
A.8	Aerodinamica	65
A.9	Strato limite	65
A.10	Stabilità fluidodinamica e turbolenza	65

Introduzione

- *Che cosa ti fa andare avanti, Oscar?*
- *Continuo come ho cominciato... per la bellezza del gesto.*
- *La bellezza... si dice che sia nell'occhio di chi guarda.*
- *E se non rimane più nessuno a guardare?*

Questi appunti nascono dalla necessità di fornire un inquadramento generale e gli strumenti matematici indispensabili per un approccio maturo e consapevole alla Fluidodinamica, alla Meccanica dei mezzi continui, e alla Fisica in generale.

Questi appunti sono in continua evoluzione. Questo significa che possono essere presenti sviste o errori, di qualsiasi natura, e che la loro segnalazione è molto apprezzata.

Un fenomeno fisico non dipende dal sistema di coordinate che viene utilizzato per descrivere il fenomeno. Le leggi della fisica hanno carattere **tensoriale** e i tensori sono gli oggetti matematici adatti alla formulazione delle leggi fisiche, garantendo l'invarianza delle equazioni rispetto alla base vettoriale o al sistema di coordinate usati per descrivere il fenomeno fisico.

Sotto opportune ipotesi spesso verificate, un fluido può essere rappresentato come un mezzo continuo, il cui stato (velocità, variabili termodinamiche) è funzione sia della coordinata spaziale, sia del tempo. I principi fisici fondamentali (conservazione della massa, bilancio della quantità di moto, bilancio di energia totale) devono valere *localmente* in ogni punto del continuo, e vengono rappresentati matematicamente da **equazioni differenziali alle derivate parziali** (PDE), con le condizioni iniziali e al contorno necessarie. Le incognite delle PDE che traducono i principi fisici fondamentali sono **campi** (di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, di pressione $P(\mathbf{r}, t), \dots$), cioè funzioni dello spazio e del tempo. Prima di affrontare lo studio della Fluidodinamica, sarà quindi necessario richiamare gli operatori gradiente, divergenza, rotore, laplaciano che compaiono nelle equazioni differenziali che descrivono il moto dei fluidi, ed estendere la loro applicazione a campi tensoriali di ordine arbitrario.

A differenza di un materiale solido, le particelle materiali (le particelle che si muovono insieme al mezzo continuo) sono soggette a grandi spostamenti. Verranno introdotte quindi la descrizione del fenomeno fisico dal **punto di vista lagrangiano** (adatta per i solidi, seguendo l'evoluzione dei singoli punti materiali) e dal punto di vista **euleriano** (maggiormente adatta per i fluidi, descrivendo l'evoluzione dei campi di velocità, pressione, ..., avendo fissato la coordinata spaziale, ad esempio introducendo il concetto di volume di controllo fisso). A seconda della convenienza, entrambe questi punti di vista verranno utilizzati durante il corso per descrivere la natura "sfuggente" di un fluido. Sarà quindi necessario comprendere entrambi gli approcci ed essere in grado di passare da uno all'altro. Verrà inoltre fornito un approccio generale che permetta di descrivere il problema fisico da un punto di vista **arbitrario**, che ha come casi particolari le descrizioni lagrangiana ed euleriana.

A complicare ulteriormente il problema, le equazioni alle derivate parziali che governano la dinamica dei fluidi sono **non lineari**.

Da un confronto diretto, si possono subito elencare alcune differenze con alcuni corsi universitari affrontati in precedenza:

- **Meccanica razionale:** l'oggetto principale del corso è stato lo studio dei corpi rigidi, per i quali è possibile riassumere la cinematica e la dinamica con grandezze "globali", che riguardano tutto il corpo, come ad esempio la velocità del baricentro, la velocità angolare del corpo, la sua massa, il suo tensore di inerzia. Viene utilizzata quasi esclusivamente una descrizione lagrangiana del problema, seguendo il moto del corpo nella sua evoluzione. I principi fisici che governano il moto di un sistema sono le equazioni cardinali della dinamica, ossia il bilancio della quantità di moto e del momento della quantità di moto. Le equazioni che governano la dinamica di un corpo solido sono equazioni differenziali ordinarie, nelle quali compaiono funzioni dipendenti dal tempo, ma non dallo spazio.
- **Fisica tecnica:** l'oggetto principale di studio della termodinamica è stato lo studio di sistemi in equilibrio, in uno stato stazionario, utilizzando a volte una descrizione euleriana del problema, basata sui bilanci di massa ed energia interna per un volume di controllo fisso.
- **Meccanica strutturale:** lo studio della statica strutturale durante il corso di Scienze delle Costruzioni è stato il primo approccio alla meccanica del continuo che riguardasse bilanci differenziali (validi localmente in tutto il solido) e che permettesse di ricavare localmente lo stato del sistema, in termini di deformazione. Per la prima volta è stata introdotta la natura tensoriale dello sforzo e un legame costitutivo (di natura tensoriale) che legasse lo stato di sforzo presente nel continuo allo stato del continuo stesso. Nell'ambito del corso di Scienze delle Costruzioni, ci si è limitati allo studio della statica del mezzo continuo solido. Le equazioni che governavano il problema erano quindi delle equazioni differenziali alle derivate parziali (derivate spaziali). L'ipotesi di piccoli spostamenti del solido ha permesso di confondere (e non prestare molta attenzione al) la descrizione lagrangiana ed euleriana, studiando il problema statico sulla configurazione indeformata.

Durante il corso di Fluidodinamica, uno dei primi obiettivi dovrebbe essere quello di utilizzare tutti i principi fisici presentati nei corsi precedenti per ottenere la forma più generale delle equazioni che governano il moto di un mezzo continuo deformabile, e in particolare di un fluido. I bilanci di massa, quantità di moto, momento della quantità di moto ed energia totale (somma di energia interna ed energia cinetica) per un volume arbitrario del mezzo continuo tradurranno il principio fisico della conservazione della

massa, le due leggi cardinali della dinamica, il bilancio di energia meccanica e il primo principio della termodinamica, come interpretabile come bilancio dell'energia interna. Poiché questi principi fisici dovranno essere validi in ogni punto del dominio, dai bilanci in forma integrale scritti per un volume arbitrario si otterranno i bilanci in forma differenziale, validi localmente punto per punto, nella forma di equazioni differenziali alle derivate parziali. Poiché la natura di un fluido è “sfuggente” se paragonata a quella di un solido, sarà necessario essere in grado di formulare il problema da un punto di vista arbitrario, che ha come casi particolari la descrizione lagrangiana ed euleriana, ed riuscire a passare agevolmente da un tipo di descrizione all'altro. Poiché non verrà fatta alcuna ipotesi di stazionarietà e si studierà la dinamica dei fluidi, i bilanci saranno scritti nella loro forma instazionaria, le equazioni differenziali che governano il problema conterranno derivate parziali in tempo e spazio, e avranno l'esigenza di condizioni iniziali e al contorno affinché il problema sia definito. In generale, le incognite del problema saranno campi (scalari, vettoriali, o in generale tensoriali), cioè funzioni dipendenti dallo spazio, oltre che dal tempo.

Mentre le equazioni di bilancio di un mezzo continuo saranno il punto di partenza per lo studio della Fluidodinamica, essi forniscono la forma generale dei principi fisici dalla quale partire per ricavare in maniera rigorosa i bilanci presentati nei corsi precedenti come caso particolare.

Nel capitolo §1 vengono riportati alcuni risultati di calcolo vettoriale, presentati nei corsi di Analisi e richiamati qui poiché necessari a una descrizione consapevole della dinamica di un mezzo continuo, prima di presentare alcuni risultati sulla calcolo della derivata temporale di integrali di linea, superficie e volume, necessari alla descrizione arbitraria dei principi fisici nella forma di bilanci integrali.

I capitoli §2 e §3 sono dedicati a un'introduzione all'algebra e al calcolo tensoriale rispettivamente. Nel capitolo §2 viene fornita la definizione classica di tensore, come lo strumento matematico adatto a descrivere la natura invariante delle leggi fisiche, insieme ad alcune operazioni tensoriali. Nel capitolo §3, vengono introdotti i campi tensoriali (tensori che dipendono dalla coordinata spaziale) e alcuni operatori differenziali che compaiono nelle equazioni della fisica.

La forma ridotta dei capitoli §2 e §3 è pensata per fornire un sostegno agli studenti per gli argomenti trattati in aula, nello spazio sempre più angusto dedicato a questa introduzione. Per motivi di sintesi, gli argomenti non potranno essere trattati nella maniera più generale possibile, puntando al miglior compromesso tra tempo a disposizione ed efficacia della presentazione. Verranno sottolineate le ipotesi fatte che pongono dei limiti di validità alla presente introduzione all'algebra e al calcolo tensoriale. All'interno delle ipotesi fatte, si cercherà nascondere il minor numero di dettagli allo scopo di rendere comprensibili e logicamente collegate tutte le sezioni dell'introduzione all'algebra e al calcolo tensoriale. A chi fosse interessato, è possibile fornire materiale più dettagliato e ulteriori riferimenti sull'argomento.

1. Richiami di analisi

Anche oggi ho vissuto qualcosa che spero di comprendere tra qualche giorno

1.1	Teoremi della divergenza, del gradiente e del rotore	10
1.1.1	Lemma di Green	10
1.1.2	Due utili lemmi	12
1.1.3	Teorema della divergenza, del gradiente e del rotore	13
1.2	Campi vettoriali conservativi	16
1.3	Derivata temporale di integrali su domini dipendenti dal tempo: formule di Leibniz	21
1.4	Descrizione lagrangiana, euleriana e arbitraria	25
1.4.1	Descrizione locale nel problema differenziale	25
1.4.2	Descrizione globale nel problema integrale	27
1.5	Bilanci integrali	28
1.5.1	Bilancio di massa	29
1.5.2	Prima equazione cardinale e bilancio della quantità di moto	29
1.5.3	Seconda equazione cardinale e bilancio del momento della quantità di moto	29
1.5.4	Bilancio di energia totale	29
1.5.5	Bilanci integrali per volumi in moto arbitrario	30

1.1 Teoremi della divergenza, del gradiente e del rotore

1.1.1 Lemma di Green

In questa sezione vengono richiamati i teoremi della divergenza e del rotore, già incontrati nei corsi di Analisi. Viene introdotto il teorema del gradiente. Questi teoremi vengono dimostrati a partire da due lemmi, che risultano utili nella scrittura delle equazioni di bilancio di un continuo (solido o fluido che sia). Il punto di partenza è il lemma di Green, necessario per la dimostrazione dei due lemmi. La sua dimostrazione viene riportata per motivi di completezza e per richiamare alcuni concetti già incontrati nei corsi di Analisi e per ricominciare ad utilizzarli.

Teorema .1.1.1 — Lemma di Green. Sia γ_R una curva chiusa semplice nel piano positivamente orientata regolare a tratti, e sia R la superficie di cui è frontiera. Se P e Q sono due funzioni reali di due variabili reali che hanno le derivate parziali continue su una regione aperta che contiene R .

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_{\gamma_R} P dx, \quad \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{\gamma_R} Q dy \quad (1.1)$$

La dimostrazione viene svolta prima per domini semplici, come il dominio R in figura 1.1, e poi generalizzata per domini non semplici e non semplicemente connessi.



Il verso positivo di percorrenza di una linea chiusa nel piano è quello antiorario, come indicato in figura 1.1: seguendo questa convenzione, la regione limitata del piano viene lasciata a sinistra della curva, se percorsa nel verso positivo.

Dimostrazione. Se R è un dominio semplice, è possibile dimostrare la prima delle due equazioni (1.1) scomponendo il contorno $\gamma_R = \partial R$ nelle due curve $\ell_1 : y = Y_1(x)$ e $\ell_2 : y = Y_2(x)$, come in figura 1.1. È possibile scrivere il contorno $\gamma_R = \ell_1 \cup \ell_2^-$ come unione delle due curve ℓ_1 ed ℓ_2 , dove l'apice $-$ su ℓ_2 indica che deve essere percorsa per x decrescenti affinché il contorno γ_R sia percorso in senso positivo.

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left(\int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b [P(x, Y_2(x)) - P(x, Y_1(x))] dx = - \oint_{\gamma_R} P dx \quad (1.2)$$

In maniera analoga, è possibile dimostrare la seconda delle (1.1), scomponendo il contorno in due curve $\ell_1 : x = X_1(y)$ e $\ell_2 : x = X_2(y)$, con $X_2(y) > X_1(y)$.

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_e^f \left(\int_{X_1(y)}^{X_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy = \int_e^f [P(X_2(y), y) - P(X_1(y), y)] dy = \oint_{\gamma_R} Q dy \quad (1.3)$$

■

Sottraendo le due equazioni del teorema 1.1.1, si ottiene la forma classica nella quale il teorema di Green viene presentato

$$\oint_{\gamma_R} [P dx + Q dy] = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (1.4)$$

Domini non semplici e non semplicemente connessi.

Il caso di domini non semplici e non semplicemente connessi si riconduce al caso di domini semplici, in seguito all'introduzione di un 'taglio' γ_c nel dominio, sfruttando la regolarità (per ipotesi) della funzione all'interno del dominio. Nel caso di dominio non semplice, ci si riconduce a due o più domini semplici a due a due disgiunti, la cui unione è l'insieme non semplice di partenza. Nel caso di dominio non semplicemente connesso, ci si riconduce al caso di dominio semplicemente connesso.

Nel caso di dominio non semplice, si ha:

$$\begin{aligned}
 \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= & (R = R_1 \cup R_2) \\
 &= \iint_{R_1} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy + \iint_{R_2} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = & (l_1 = \partial R_1, l_2 = \partial R_2) \\
 &= - \oint_{l_1} P dx - \oint_{l_2} P dx = & (l_1 = \gamma_1 \cup \gamma_c, l_2 = \gamma_2 \cup \gamma_c^-) \\
 &= - \int_{\gamma_1} P dx - \int_{\gamma_c} P dx - \int_{\gamma_c^-} P dx - \int_{\gamma_2} P dx = & \left(\int_{\gamma_c^-} P dx = - \int_{\gamma_c} P dx, \right. \\
 & & \left. \gamma_1 \cup \gamma_2 = \partial R = \gamma \right) \\
 &= - \oint_{\gamma} P dx & (1.5)
 \end{aligned}$$

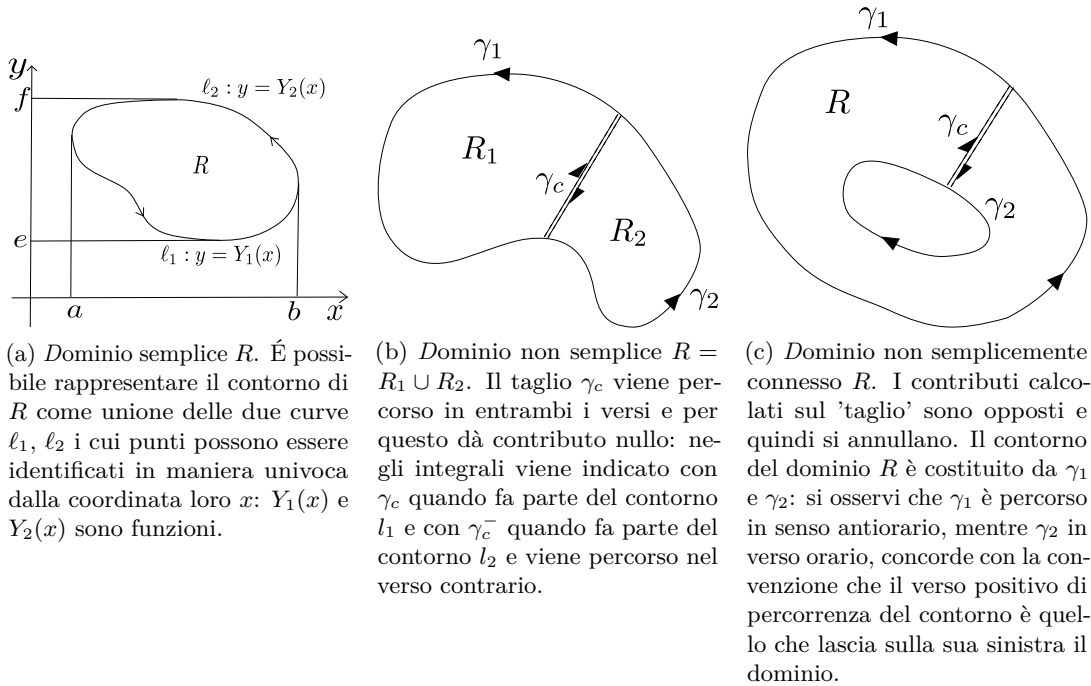


Figura 1.1: Dominio semplice, semplicemente connesso e non semplicemente connesso.

■ **Esempio 1.1** È possibile calcolare l'area di una superficie R tramite un integrale di linea, scegliendo le funzioni $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$ e $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$. Infatti,

$$A_R = \iint_R dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\gamma_R} [x dy - y dx]. \quad (1.6)$$

■

1.1.2 Due utili lemmi

Il prossimo lemma è alla base dei più rinomati teoremi della divergenza e del gradiente: la dimostrazione di questi due teoremi si basa su un facile uso ripetuto di questo lemma. Data la facilità di questo lemma e la sua frequente applicazione nella scrittura di bilanci e in generale di integrazione per parti, è molto conveniente ricordarsi questo semplice risultato.

Lemma .1.1.2 Sotto le ipotesi del teorema di Green nel piano.

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial x_i} = \oint_S A n_i \quad (1.7)$$

Dimostrazione. Si segue un ragionamento molto simile a quello utilizzato per la dimostrazione del lemma di Green nel piano. Per $\partial A / \partial z$:

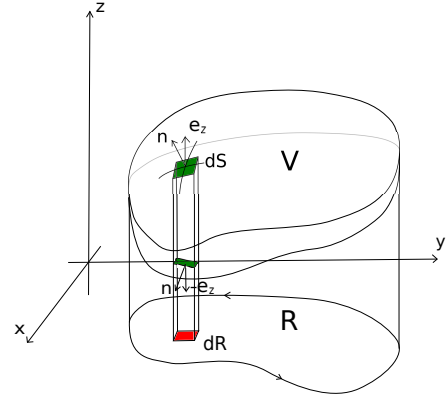
$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial A}{\partial z} &= \int_R \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} \frac{\partial A}{\partial z} dz dx dy = \\ &= \int_R [A(x, y, f_2(x, y)) - A(x, y, f_1(x, y))] dx dy \end{aligned} \quad (1.8)$$

Il passaggio più complicato è nel passare dall'integrale in $(x, y) \in R$ all'integrale sulla superficie S , bordo del volume V : l'elemento infinitesimo dR di area nel piano-xy è uguale a $dR = dx dy$; il disegno e la dimostrazione fanno riferimento a un volume *semplice* (come nel caso di lemma di Green nel piano, è possibile generalizzare i risultati ottenuti per domini di forma generica): è possibile suddividere la superficie S nelle due “semisuperfici” $S^+ : z = f_2(x, y)$ e $S^- : z = f_1(x, y)$ tali che $S^+ \cup S^- = S$ e che la normale, uscente dal volume, abbia componente in z positiva e negativa rispettivamente ($S^+ : \hat{n} \cdot \hat{z} > 0$, $S^- : \hat{n} \cdot \hat{z} < 0$). La superficie elementare dR è inoltre la proiezione dell'elemento di superficie dS sul piano-xy: in generale dS non sarà parallela al piano-xy e quindi sarà maggiore di dR . Non è difficile dimostrare che

$$dx dy = dR = \begin{cases} dS \hat{z} \cdot \hat{n} & \text{su } S^+ \\ -dS \hat{z} \cdot \hat{n} & \text{su } S^- \end{cases} \quad (1.9)$$

Si può quindi ora continuare nella dimostrazione

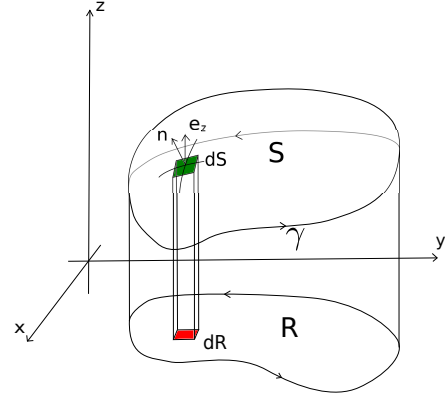
$$\begin{aligned} \int_R [A(x, y, f_2(x, y)) - A(x, y, f_1(x, y))] dx dy &= \\ &= \int_{S^+} A \hat{n} \cdot \hat{z} dS + \int_{S^-} A \hat{n} \cdot \hat{z} dS = \\ &= \oint_S A \hat{z} \cdot \hat{n} dS = \\ &= \oint_S A n_z dS \end{aligned} \quad (1.10)$$



Come il lemma precedente è alla base della dimostrazione dei teoremi di gradiente e divergenza, il lemma successivo è alla base della dimostrazione del teorema del rotore.

Lemma .1.1.3 Sotto le ipotesi del teorema di Green nel piano.

$$\int_S [\nabla \times (A\hat{e}_i)] \cdot \hat{n} = \oint_\gamma A dx_i \quad (1.11)$$



Dimostrazione. Per $A\hat{e}_x$, $\nabla \times (A\hat{e}_x) = \partial A/\partial z \hat{e}_y - \partial A/\partial y \hat{e}_z$. Si scrive la superficie S in forma parametrica come: $\mathbf{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z(x, y)\hat{e}_z$. Il vettore $\partial \mathbf{r}/\partial y \hat{e}_y + \partial z/\partial y \hat{e}_z$ è parallelo alla superficie S e quindi perpendicolare alla normale \hat{n} :

$$0 = \hat{n} \cdot \left(\hat{e}_y + \frac{\partial z}{\partial y} \hat{e}_z \right) \quad (1.12)$$

Scrivendo $[\nabla \times (A\hat{e}_x)] \cdot \hat{n}$:

$$[\nabla \times (A\hat{e}_x)] \cdot \hat{n} = \frac{\partial A}{\partial z} \hat{e}_y \cdot \hat{n} - \frac{\partial A}{\partial y} \hat{e}_z \cdot \hat{n} = - \left[\frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial y} \right] \hat{e}_z \cdot \hat{n} \quad (1.13)$$

Se si riconosce $\partial A(x, y, z(x, y))/\partial y = \partial A/\partial z \partial z/\partial y + \partial A/\partial y$, si può scrivere:

$$\int_S [\nabla \times (A\hat{e}_x)] \cdot \hat{n} = - \int_S \frac{\partial A}{\partial y} \underbrace{\hat{e}_z \cdot \hat{n} dS}_{dR = dx dy} = - \int_R \frac{\partial A}{\partial y} dx dy = \int_\gamma A dx \quad (1.14)$$

1.1.3 Teorema della divergenza, del gradiente e del rotore

Vengono ora enunciati i teoremi della divergenza, del rotore e del gradiente. Senza entrare nei dettagli delle ipotesi dei teoremi, affinché i loro enunciati siano validi, gli oggetti matematici coinvolti devono almeno esistere. L'ipotesi di "sufficiente regolarità" dei campi vettoriali viene tradotta volgarmente nel comportamento regolare della funzione all'interno del dominio, che esclude l'esistenza di poli (punti del dominio in cui funzione tende all'infinito) e comprende l'esistenza (e la continuità) delle derivate spaziali del campo.

Per far intuire l'utilità dei due lemmi presentati in precedenza, si riportano anche le dimostrazioni dei teoremi: una volta noti i due utili(ssimi) lemmi, queste dimostrazioni sono così immediate da occupare soltanto una riga.

Teorema .1.1.4 [Teorema della divergenza] Si consideri un insieme $V \subset R^n$ compatto delimitato da una superficie liscia $S = \partial V$. Se \mathbf{v} è un campo vettoriale differenziabile con continuità (di classe C^1) definito in un intorno di V, allora

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} = \oint_S \mathbf{v} \cdot \hat{n}, \quad (1.15)$$

essendo \hat{n} la normale alla superficie S uscente dal volume V.

Dimostrazione. Il teorema viene dimostrato scrivendo la divergenza in un sistema di coordinate cartesiane, $\nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$, e applicando il lemma 1.1.2 a ogni derivata parziale nella sommatoria,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} = \int_V \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \oint_S \sum_i v_i n_i = \oint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.16)$$

■

Teorema .1.1.5 — Teorema del gradiente. In maniera abbastanza generale, sotto le ipotesi dei teoremi precedenti, per un campo scalare f sufficientemente regolare vale

$$\int_V \nabla f = \oint_S f \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.17)$$

Dimostrazione. Il teorema viene dimostrato scrivendo il gradiente del campo scalare f in coordinate cartesiane, $\nabla f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i$, e applicando il lemma 1.1.2 a ogni derivata parziale nella sommatoria,

$$\int_V \nabla f = \int_V \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i = \oint_S \sum_i f n_i \hat{\mathbf{e}}_i = \oint_S f \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.18)$$

■

Teorema .1.1.6 — Teorema del rotore. In maniera abbastanza generale, sotto le ipotesi dei teoremi precedenti, vale

$$\int_S [\nabla \times \mathbf{v}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}}, \quad (1.19)$$

avendo omesso l'elemento di lunghezza $d\ell$ nell'integrale di linea e avendo indicato con $\hat{\mathbf{t}}$ il versore tangente alla curva γ .

Dimostrazione. Il teorema viene dimostrato utilizzando un sistema di coordinate cartesiane e applicando il lemma 1.1.3 a ogni componente del vettore $\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{e}}_x + v_y \hat{\mathbf{e}}_y + v_z \hat{\mathbf{e}}_z = \sum_i v_i \hat{\mathbf{e}}_i$,

$$\int_S [\nabla \times \mathbf{v}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_S \left[\nabla \times \left(\sum_i v_i \hat{\mathbf{e}}_i \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_\gamma \sum_i v_i dx_i = \int_\gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_\gamma \sum_i v_i dx_i = \int_\gamma \hat{\mathbf{t}}, \quad (1.20)$$

avendo utilizzato le coordinate cartesiane e la definizione di versore tangente per esprimere l'elemento di lunghezza, $d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{t}} ds$. ■

Prima di continuare i richiami di analisi, viene fatta un'osservazione sulla notazione usata.



Per indicare gli integrali di linea, superficie e volume verrà omesso l'elemento infinitesimo di linea, superficie e volume, indicando il dominio di integrazione di fianco al segno di integrale. In maniera esplicita l'integrale sulla linea ℓ , sulla superficie S e sul volume V di una quantità scalare f verranno indicati semplicemente con

$$\int_\ell f, \quad \int_S f, \quad \int_V f. \quad (1.21)$$

Il valore di un integrale è indipendente dalle coordinate utilizzate per svolgerlo. Per calcolare il valore dell'integrale è necessario introdurre un sistema di coordinate per parametrizzare in una maniera conveniente la funzione, il dominio e gli elementi infinitesimi di lunghezza, superficie o volume. Spesso questa scelta può essere dettata dalla geometria del dominio. Per completezza vengono riportate esplicitamente le espressioni degli elementi infinitesimi di:

- lunghezza (con versore tangente) della curva ℓ , descritta dalla parametrizzazione $\ell : \mathbf{r} = \mathbf{r}(l) = \mathbf{r}(l(s)) = \tilde{\mathbf{r}}(s)$,

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dl} dl = \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{ds}}_{\hat{\mathbf{t}}} ds = \hat{\mathbf{t}} ds, \quad (1.22)$$

avendo riconosciuto il versore $\hat{\mathbf{t}}$ tangente alla curva, introdotto l'ascissa curvilinea s , e indicato con $\mathbf{r}(l)$ la parametrizzazione in funzione di l e con $\tilde{\mathbf{r}}(s)$ la parametrizzazione in funzione di s .

- di superficie (con versore normale) della superficie bidimensionale S , descritta dalla parametrizzazione $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$,

$$\hat{\mathbf{n}} dS = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} du dv \quad (1.23)$$

- di volume del volume tridimensionale V , descritto dalla parametrizzazione dello spazio $V : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, w)$,

$$dV = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} du dv dw. \quad (1.24)$$

Si fanno quindi alcuni esempi.

■ **Esempio 1.2** Si vuole calcolare l'elemento infinitesimo di curva di una circonferenza C di raggio R . Si utilizza un sistema di riferimento cartesiano con origine nel centro della circonferenza e l'angolo θ che il vettore posizione \mathbf{r} forma con l'asse x per parametrizzare la curva

$$C : \mathbf{r}(\theta) = x(\theta)\hat{\mathbf{x}} + y(\theta)\hat{\mathbf{y}} = R \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + R \sin \theta \hat{\mathbf{y}}. \quad (1.25)$$

L'elemento di curva $d\mathbf{r}$ risulta

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = (-\sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \hat{\mathbf{y}}) R d\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}} R d\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}} ds, \quad (1.26)$$

avendo introdotto l'ascissa curvilinea $s = R\theta$ e il versore $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ tangente alla circonferenza.

■

■ **Esempio 1.3** Si vuole calcolare la superficie elementare (con versore normale) di una superficie sferica S parametrizzata con gli angoli φ e θ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\varphi, \theta) &= x(\varphi, \theta)\hat{\mathbf{x}} + y(\varphi, \theta)\hat{\mathbf{y}} + z(\varphi, \theta)\hat{\mathbf{z}} = \\ &= R \sin \varphi \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + R \sin \varphi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + R \cos \varphi \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Da un calcolo diretto, senza riportare tutti i passaggi, si ottiene

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} dS &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} d\varphi d\theta = \\ &= (\sin \varphi \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{z}}) R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = \\ &= \hat{\mathbf{R}} R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (1.28)$$

■

■ **Esempio 1.4** Si vuole calcolare il volume elementare di una volume V parametrizzato in coordinate sferiche, cioè con il raggio R e gli angoli φ e θ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\varphi, \theta) &= x(R, \varphi, \theta)\hat{\mathbf{x}} + y(R, \varphi, \theta)\hat{\mathbf{y}} + z(R, \varphi, \theta)\hat{\mathbf{z}} = \\ &= R \sin \varphi \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + R \sin \varphi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + R \cos \varphi \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Da un calcolo diretto, senza riportare tutti i passaggi, si ottiene

$$\begin{aligned}
 dV &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial R} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} dR d\varphi d\theta = \\
 &= \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}} R^2 \sin \varphi dR d\varphi d\theta = \\
 &= R^2 \sin \varphi dR d\varphi d\theta.
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

■

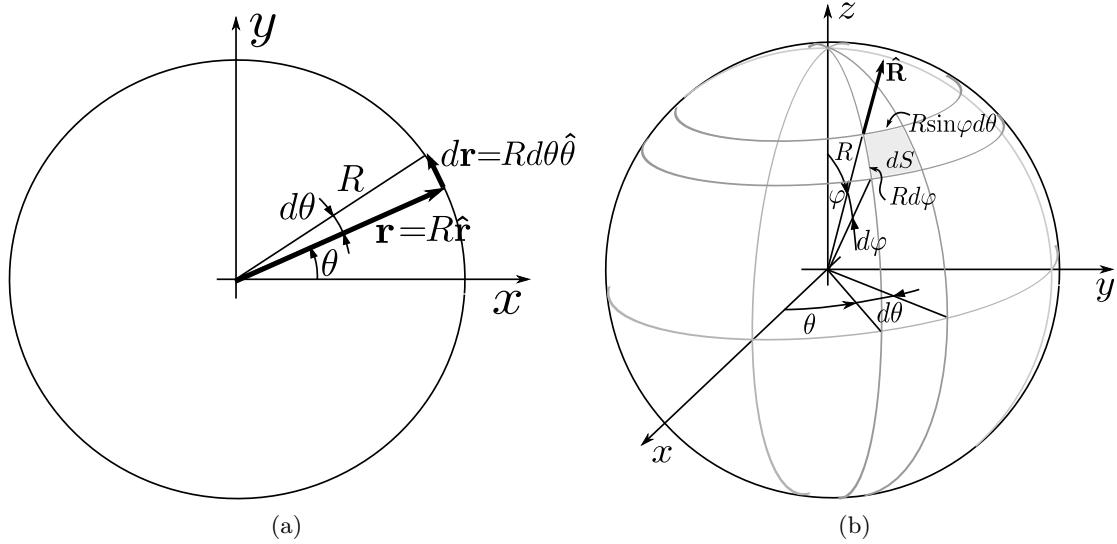


Figura 1.2: Sistemi di coordinate usati negli esempi 1.2-1.4. (a) Coordinate polari. (b) Coordinate sferiche.

1.2 Campi vettoriali conservativi

In alcuni casi l'integrale $I = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}}$ è indipendente dal percorso di integrazione γ . L'indipendenza del valore dell'integrale I da γ è strettamente collegata all'idea di differenziale esatto: quando I è indipendente da γ , ma dipende solo dai suoi estremi a, b , si può scrivere $I = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \int_a^b d\phi = \phi(b) - \phi(a)$. Se l'integrale di linea I su ogni curva nel dominio V dipende solo dagli estremi di integrazione, il campo vettoriale \mathbf{F} viene definito **conservativo**.

L'indipendenza del valore dell'integrale dal percorso di integrazione ha alcune conseguenze:

- l'integrale su ogni percorso chiuso è nullo: $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$;
- il campo \mathbf{F} può essere scritto come gradiente di una funzione scalare ϕ , che assume il significato di potenziale: $\mathbf{F} = \nabla \phi$;
- il rotore del campo vettoriale è nullo: $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ (infatti $\nabla \times \nabla \phi = 0$, per ogni funzione scalare ϕ).

Le condizioni elencate sono quindi **condizioni necessarie** per l'indipendenza dell'integrale dal percorso di integrazione. Se prese a se stanti, esse non sono anche condizioni sufficienti. Affinchè la seconda e la terza condizione siano anche sufficienti, è necessario che il dominio sia semplicemente connesso.

Si fa ora un esempio su due campi vettoriali definiti su un dominio non semplicemente connesso, cioè dove tutti i percorsi chiusi sono riducibili a un punto. Entrambi hanno rotore nullo all'interno del dominio, ma solo uno dei due è conservativo.

Esercizio .1.1 Dati i seguenti campi vettoriali

$$\mathbf{F}_1 = \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{y}} \quad , \quad \mathbf{F}_2 = -\frac{y}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{y}} \quad (1.31)$$

si chiede di

1. definire il dominio e 'disegnare' i campi vettoriali;
2. calcolare il rotore, la divergenza e (se esiste) la funzione ϕ t.c. $\mathbf{F} = \nabla\phi$;
3. calcolare la circuitazione ($\Gamma = \oint \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}}$) sulle circonferenze di raggio unitario C centrata in $(0,0)$ e C' centrata in $(2,1)$;
4. calcolare il flusso ($\Phi = \oint \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}$) uscente dalle curve C e C' ;
5. calcolare l'integrale $\int_\gamma \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}$ su una curva γ che avvolge due volte l'origine in senso antiorario.

1. Il dominio Ω dei due campi vettoriali è $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$: non è semplicemente connesso.

Osservazione. A differenza di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ è semplicemente connesso (perchè?).

Grafici...

2. • Rotore: all'interno del dominio Ω il rotore dei due campi vettoriali è nullo. Infatti, la componente lungo z è l'unica che può essere non nulla, poichè il campo è definito nel piano xy e dipende solo da x e y .

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial F_{1x}}{\partial y} &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \\ \frac{\partial F_{2y}}{\partial x} - \frac{\partial F_{2x}}{\partial y} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

- Divergenza: all'interno del dominio Ω la divergenza dei due campi vettoriali è nullo.

(...)

- ϕ : all'interno del dominio Ω , le funzioni ϕ , a meno di una costante (ininfluente) valgono

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \quad , \quad \phi_2 = \text{atan} \left(\frac{y}{x} \right) . \quad (1.33)$$

Ad esempio per il campo \mathbf{F}_1 , si può scrivere la relazione $\mathbf{F} = \nabla\phi$ in coordinate cartesiane

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} . \quad (1.34)$$

Integrando la prima in x e la seconda in y :

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \int \frac{x}{x^2 + y^2} dx = \int \frac{1}{x^2 + y^2} d(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + f(y) \\ \phi(x, y) &= \int \frac{y}{x^2 + y^2} dy = \int \frac{1}{x^2 + y^2} d(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + g(x) \end{aligned} \quad (1.35)$$

dove compaiono le funzioni $f(y)$ e $g(x)$, che tengono conto dell'arbitrarietà dell'integrale di una derivata parziale: si pensi di fare la derivata parziale delle relazioni appena trovate. Derivando la prima rispetto a x si ha:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right) + \frac{\partial f(y)}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} + 0 \quad (1.36)$$

La derivata $\frac{\partial f(y)}{\partial x}$ è identicamente nulla, poichè la funzione $f(y)$ non dipende da x . Da un confronto tra le due forme di ϕ , segue che $f(y)$ e $g(x)$ devono essere uguali e costanti: il valore di questa costante additiva è comunque ininfluente ai termini della definizione di un potenziale.

3. • Circuitazione su C' : entrambi gli integrali calcolati su C' sono nulli, poichè il percorso di integrazione è una linea chiusa che non circonda l'origine ma una regione semplicemente connessa nella quale il campo ammette potenziale. In altre parole, C' circonda una regione del dominio che è semplicemente connessa ed è possibile applicare direttamente il teorema del rotore, avendo definito R' come la parte del dominio interna a C' ,

$$\Phi = \oint_{C'} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \int_{R'} [\nabla \times \mathbf{F}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad (1.37)$$

poichè il rotore è nullo in tutto Ω e quindi anche in $R' \subset \Omega$.

- Circuitazione su C' : C invece circonda l'origine, causa della non semplice connessione del dominio; una diretta applicazione del teorema del rotore non è quindi possibile; gli integrali su C devono essere calcolati e valgono

$$I_1 = \oint_C \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad I_2 = \oint_C \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} = 2\pi \quad (1.38)$$

I due integrali possono essere calcolati facilmente in coordinate polari. L'elemento $d\mathbf{r}$ sulla circonferenza di raggio r è $d\mathbf{r} = r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$. I due campi possono essere scritti in coordinate polari come:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{r} \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{F}_2 = \frac{1}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (1.39)$$

Si può notare che il campo \mathbf{F}_1 , calcolato sul contorno, è sempre perpendicolare ad esso. Il primo integrale è quindi nullo.

$$\begin{aligned} I_{1C} &= \int_C \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} 0 d\theta = 0 \\ I_{2C} &= \int_C \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = 2\pi \end{aligned} \quad (1.40)$$

4. • Flussi su C' : Poichè R' (vedi sopra) è semplicemente connesso, si può applicare il teorema della divergenza. I flussi di entrambi i campi su C' sono nulli, poichè la divergenza dei due campi è nulla in tutto il dominio Ω .
- Flussi su C : C invece circonda l'origine, causa della non semplice connessione del dominio; una diretta applicazione del teorema della divergenza non è quindi possibile; gli integrali su C devono essere calcolati e valgono

$$\Phi_{C1} = \oint_C \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{n} = 2\pi, \quad \Phi_{C2} = \oint_C \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{n} = 0. \quad (1.41)$$

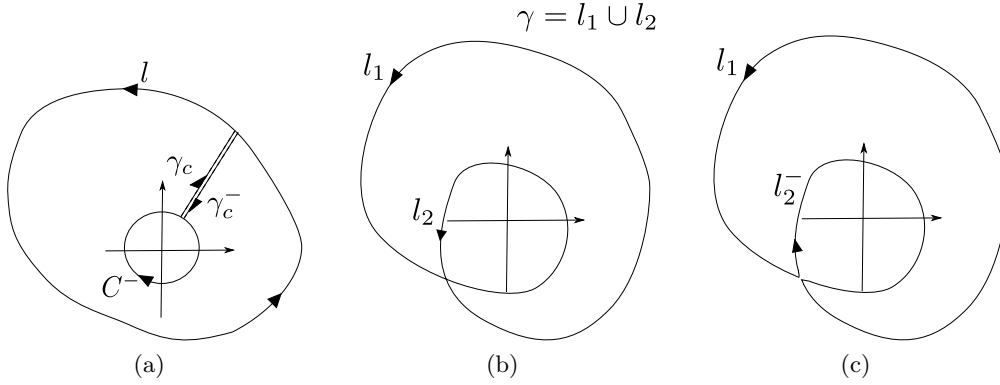
5. L'integrale di $\int_\gamma \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}$ vale 4π .

- Se la circuitazione calcolata sul contorno C vale Γ (2π nel caso dell'esercizio), la circuitazione calcolata su qualsiasi altra curva l che avvolge l'origine una sola volta avrà lo stesso valore. Infatti, se viene introdotto il 'taglio' γ_c (invalicabile), si ottiene che il dominio 'tagliato' è semplicemente connesso e la circuitazione sul suo contorno ($\partial \cup \gamma_c \cup C^- \cup \gamma_c^-$) è nulla, dove con C^- si è indicata la circonferenza percorsa in senso orario. Ricordando che i contributi su γ_c si annullano a vicenda

e che se si inverte il verso di percorrenza di una curva la circuitazione cambia segno

$$0 = \int_{l \cup \gamma_c \cup C^- \cup \gamma_c^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_c} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_c^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.42)$$

e quindi $\int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma$.

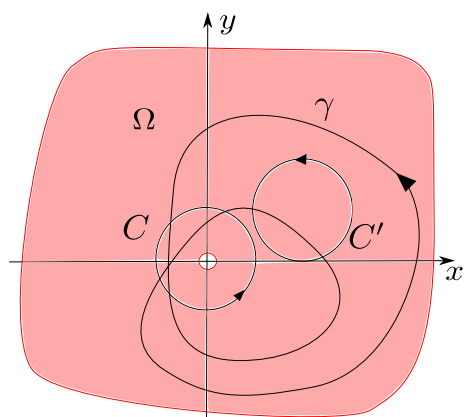


- Ora il percorso γ può essere 'suddiviso' nelle curve l_1, l_2 . Si può definire ora la curva composta da l_1 e l_2^- (il verso è importante!!). Con ragionamenti analoghi a quelli fatti in precedenza:

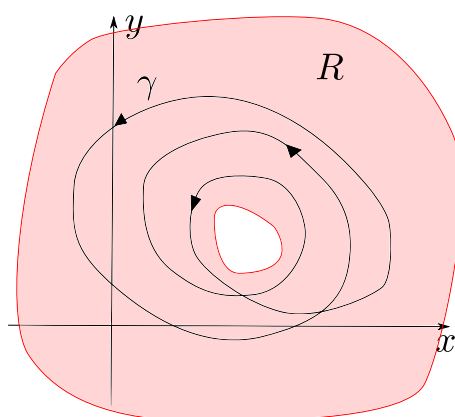
$$0 = \int_{l_1 \cup l_2^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.43)$$

Da questo si ricava che $\int_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma$. Poichè l'integrale su γ è la somma dei due integrali, si ottiene:

$$\int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{l_1 \cup l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\Gamma = 4\pi \quad (1.44)$$



(a) Percorsi di integrazione dell'esercizio. C avvolge una volta sola in 'buco' nel dominio, C' mai, γ due volte.



(b) Integrale su un percorso non riducibile. Il dominio R (in rosa) non è semplicemente connesso. Si può dimostrare che se l'integrale I_1 definito su un percorso 'che circonda' una sola volta 'il buco' all'interno del dominio $I_1 = \oint_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma$, allora l'integrale I definito su γ che circonda N (indice di avvolgimento) volte 'il buco' nello stesso verso di l_1 , vale $I_1 = \oint_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = N\Gamma$.

1.3 Derivata temporale di integrali su domini dipendenti dal tempo: formule di Leibniz

In questa sezione si enunciano e dimostrano i teoremi per la derivazione in tempo su domini mobili di integrali di volume, flussi e circuitazioni.

Teorema .1.3.1 — Integrale di volume (Teorema di Reynolds).

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \oint_{S(t)} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (1.45)$$

Dimostrazione. Il volume al tempo $t + \Delta t$ può essere pensato come la somma del volume al tempo t e della variazione di volume $v(t, \Delta t)$, che si riscontra nell'unione, con segno, dei volumi di integrazione: formalmente “ $V(t + \Delta t) = V(t) + v(t, \Delta t)$ ”. Il volume elementare dv può essere ricavato dal prodotto scalare tra la superficie elementare (con normale uscente) $\hat{\mathbf{n}} dS$ e lo spazio infinitesimo percorso dal punto della superficie $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{v} \Delta t$, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore: $dv = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \Delta t dS$, cfr. figura 1.3. Infine è possibile usare l'espansione di serie $f(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f(\mathbf{x}, t) + \partial f / \partial t(\mathbf{x}, t) \Delta t$. Si scrive l'incremento dell'integrale di volume:

$$\begin{aligned} \int_{V(t+\Delta t)} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) &= \\ &= \int_{V(t)} [f(\mathbf{x}, t + \Delta t) - f(\mathbf{x}, t)] + \int_{v(t)} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \\ &= \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \Delta t + \oint_{S(t)} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta t \end{aligned} \quad (1.46)$$

Dividendo per Δt , nel limite $\Delta t \rightarrow 0$ è possibile riconoscere a sinistra dell'uguale la derivata desiderata e scrivere:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \oint_{S(t)} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (1.47)$$

■

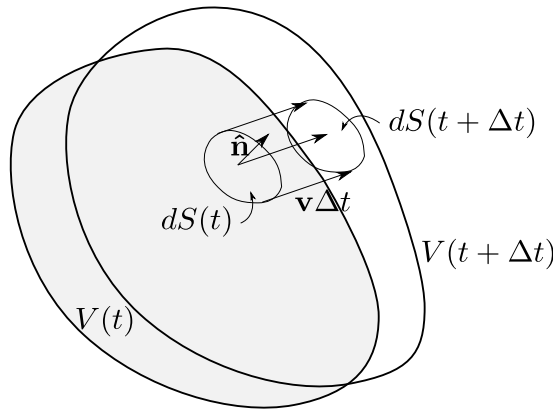


Figura 1.3: Schema che illustra il moto della volume V , tra gli istanti temporali t e $t + \Delta t$. Il volume V ha come frontiera la superficie esterna S . Viene messo in evidenza un elemento infinitesimo dS della superficie S e viene descritta la sua evoluzione. Si osservi la convenzione del versore normale $\hat{\mathbf{n}}$, uscente dalla superficie S . Il volume si muove all'interno di un dominio nel quale è definito il campo $f(\mathbf{x}, t)$, non rappresentato in figura.

Teorema .1.3.2 — Derivata temporale del flusso.

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{S(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{v} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\gamma(t)} \mathbf{f} \times \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad (1.48)$$

Dimostrazione. Si procede in maniera analoga a quanto fatto in precedenza per l'integrale di volume. Per ricavare l'identità è richiesta la “sufficiente regolarità” del campo, poichè viene utilizzato il teorema della divergenza. Si scrive l'incremento del flusso

$$\begin{aligned} \int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t + \Delta t) \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{S(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \\ &= \int_{S(t+\Delta t)} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{S(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (1.49)$$

Facendo riferimento alla figura 1.4, si applica il teorema della divergenza al volume (volume elementare $dv = dS(t) \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \Delta t$) delimitato dalle superfici $S(t + \Delta t)$, $S(t)$ e dalla superficie laterale S_{lat} , che ha per elemento di superficie $\hat{\mathbf{n}} dS_{lat} = d\mathbf{l} \times \mathbf{v} \Delta t$, da considerarsi con segno, e si ottiene

$$\int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{S(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\gamma(t)} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{t}} \times \mathbf{v} \Delta t = \int_{S(t)} (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta t \quad (1.50)$$

Si rielaborano i termini in (1.50) usando la proprietà ciclica del prodotto misto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ e le proprietà del prodotto vettoriale. Si sostituisce poi in (1.49), si divide per Δt e si riconosce la derivata cercata facendo tendere al limite $\Delta t \rightarrow 0$, concludendo così la dimostrazione:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{S(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{v} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\gamma(t)} \mathbf{f} \times \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad (1.51)$$

■

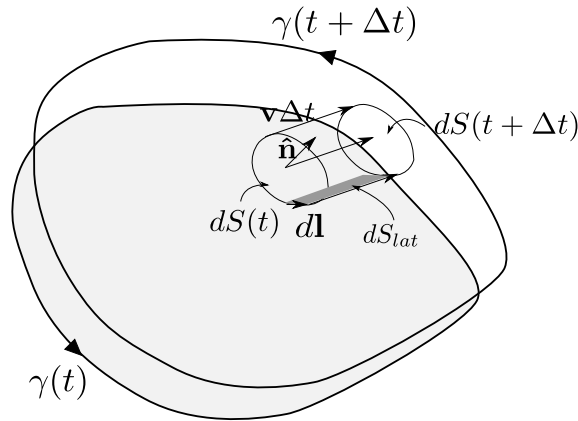


Figura 1.4: Schema che illustra il moto della superficie S , tra gli istanti temporali t e $t + \Delta t$. La superficie S ha come frontiera la curva γ . Vengono messi in evidenza l'elemento di superficie $\hat{\mathbf{n}} dS$, l'elemento di superficie laterale $\hat{\mathbf{n}}_{lat} dS_{lat} = d\mathbf{l} \times \mathbf{v} \Delta t$ del volumetto infinitesimo dv . Si osservi la convenzione che lega il verso di percorrenza della frontiera γ con la normale $\hat{\mathbf{n}}$ alla superficie tramite la regola della mano destra. La superficie si muove all'interno di un dominio nel quale è definito il campo $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, non rappresentato in figura.

Teorema .1.3.3 — Derivata temporale della circuitazione.

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma(t)} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \int_{\gamma(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{f}) \times \mathbf{v} \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \Big|_A^B \quad (1.52)$$

Dimostrazione. Seguendo un procedimento analogo a quello svolto finora si scrive l'incremento dell'integrale desiderato. Per ricavare l'identità è richiesta la “sufficiente regolarità” del campo, poichè viene utilizzato il teorema del rotore.

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma(t+\Delta t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t + \Delta t) \cdot \hat{\mathbf{t}} - \int_{\gamma(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{t}} = \\ &= \int_{\gamma(t+\Delta t)} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \int_{\gamma(t+\Delta t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{t}} - \int_{\gamma(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{t}} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Facendo riferimento alla figura 1.5, si applica il teorema della rotore alla superficie (superficie elementare $\hat{\mathbf{n}} dS = d\mathbf{l} \times \mathbf{v} \Delta t$) delimitata dalle curve $\gamma(t + \Delta t)$, $\gamma(t)$ e dalle curve “lateral” $\Delta \mathbf{x}_A = \mathbf{v}_A \Delta t$, $\Delta \mathbf{x}_B = \mathbf{v}_B \Delta t$, da considerarsi con segno, e si ottiene

$$- \int_{\gamma(t+\Delta t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{t}} + \int_{\gamma(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{t}} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_B, t) \cdot \mathbf{v}_B \Delta t - \mathbf{f}(\mathbf{x}_A, t) \cdot \mathbf{v}_A \Delta t = \int_{\gamma(t)} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \hat{\mathbf{t}} \times \mathbf{v} \Delta t \quad (1.54)$$

Si rielaborano i termini in (1.54) usando la proprietà ciclica del prodotto misto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ e le proprietà del prodotto vettoriale. Si sostituisce poi in (1.53), si divide per Δt e si riconosce la derivata cercata facendo tendere al limite $\Delta t \rightarrow 0$, concludendo così la dimostrazione:

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma(t)} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \int_{\gamma(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{f}) \times \mathbf{v} \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \Big|_A^B \quad (1.55)$$

Se il campo \mathbf{f} e la curva $\gamma(t)$ sono continui e la curva $\gamma(t)$ è chiusa, i termini di contorno si annullano. Si ottiene così la derivata della circuitazione

$$\frac{d}{dt} \oint_{\gamma(t)} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \oint_{\gamma(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{f}) \times \mathbf{v} \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad (1.56)$$

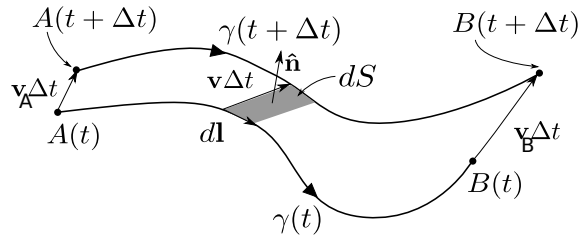


Figura 1.5: Schema che illustra il moto della curva γ , tra gli istanti temporali t e $t + \Delta t$. La curva γ ha come frontiera i punti $A(t)$ e $B(t)$. Vengono messi in evidenza l'elemento di lunghezza $d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{t}} dl$ e l'elemento di superficie tra le due curve $\hat{\mathbf{n}} dS = d\mathbf{l} \times \mathbf{v} \Delta t$. Si osservi che per applicare il teorema del rotore con la normale scelta in figura, è necessario invertire il verso di percorrenza (e di conseguenza i segni degli integrali, cfr. eq. 1.54) della curva $\gamma(t + \Delta t)$ e del segmento elementare $\mathbf{v}_A \Delta t$, al fine di rispettare la convenzione dettata dalla regola della mano destra che lega la normale a una superficie e il verso di percorrenza della sua frontiera (cfr. figura 1.4). La curva si muove all'interno di un dominio nel quale è definito il campo $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, non rappresentato in figura.

Esercizio .1.2 Convincersi della validità del teorema di Reynolds, calcolandone i termini ai due lati dell'uguale, dati il campo scalare

$$f(x, y, t) = x\hat{\mathbf{x}} + t\hat{\mathbf{y}} , \quad (1.57)$$

e il dominio rettangolare variabile nel tempo, $V(t) = [x_0(t), x_1(t)] \times [y_0(t), y_1(t)]$, con

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \bar{x}_0 + u_0 t & , & & x_1(t) &= \bar{x}_1 + u_1 t \\ y_0(t) &= \bar{y}_0 + v_0 t & , & & y_1(t) &= \bar{y}_1 + v_1 t . \end{aligned} \quad (1.58)$$

■

Esercizio .1.3 Dimostrare che la formula per la derivata di un integrale monodimensionale con estremi dipendenti dal tempo,

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx + f(b(t), t) \frac{db}{dt}(t) - f(a(t), t) \frac{da}{dt}(a) , \quad (1.59)$$

corrisponde alla versione monodimensionale del teorema di Reynolds.

■

1.4 Descrizione lagrangiana, euleriana e arbitraria

1.4.1 Descrizione locale nel problema differenziale

Nel problema differenziale, la descrizione lagrangiana del fenomeno fisico consiste nel valutare la variazione temporale delle grandezze fisiche associate alle singole *particelle materiali*, definite come i punti che si muovono in maniera solidale al mezzo continuo. La descrizione euleriana consiste nel valutare la variazione temporale delle grandezze fisiche in punti fissi nello spazio fisico. Una descrizione arbitraria consiste nella valutazione della variazione delle grandezze fisiche in un punto dello spazio fisico che ha una posizione arbitraria, indipendente dal movimento del mezzo continuo. Le descrizioni lagrangiana ed euleriana del problema possono essere considerate come dei casi particolari della descrizione arbitraria, in cui il punto dello spazio nel quale si valutano le grandezze fisiche si muove solidale al mezzo continuo o è fermo, rispettivamente.

Per passare agevolmente da una descrizione all'altra, sarà sufficiente un uso appropriato della regola di derivazione di funzioni composte.

Descrizione arbitraria

Sia \mathbf{r} la coordinata spaziale che identifica la posizione di un punto nel dominio, rispetto a un sistema di riferimento “in quiete”. Sia \mathbf{r}_i l’“etichetta” (coordinata) associata a un punto P_i che si muove nel dominio. La posizione \mathbf{r} di uno dei punti P_i “etichettati” con la coordinata \mathbf{r}_i sarà funzione dell’etichetta (ogni punto sarà in una posizione differente, in generale) e del tempo (ogni punto si muove nel dominio, in generale),

$$\mathbf{r}(t; P_i) = \mathbf{r}(\mathbf{r}_i, t) . \quad (1.60)$$

La velocità del punto P_i coinciderà con la derivata nel tempo della posizione nello spazio del punto P_i . La derivata temporale va svolta quindi a “etichetta” costante,

$$\mathbf{v}_i(t) := \mathbf{v}(t; P_i) = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}_i} (\mathbf{r}_i, t) . \quad (1.61)$$

Per trovare il legame tra le possibili differenti descrizioni del problema fisico, si vuole studiare l’evoluzione di una funzione f , che dipende sia dal tempo sia dallo spazio. Usando il legame (1.60) tra la coordinata \mathbf{r} di un punto e la sua “etichetta” \mathbf{r}_i , si può esplicitare la dipendenza del campo f da entrambe le coordinate,

$$f(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}(\mathbf{r}_i, t), t) = f_i(\mathbf{r}_i, t) = f_i(\mathbf{r}_i(\mathbf{r}, t), t) , \quad (1.62)$$

mettendo in evidenza la differenza tra le funzioni f e la f_i che rappresentano lo stesso campo, usando variabili indipendenti differenti. Usando la derivazione di funzioni composte, è possibile ricavare il legame tra le derivate temporali svolte a coordinata spaziale costante e svolte seguendo il punto P_i , a “etichetta”-coordinata \mathbf{r}_i costante,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}_i} (\mathbf{r}(\mathbf{r}_i, t), t) &= \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}_i} (\mathbf{r}_i, t) \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \right|_t (\mathbf{r}(\mathbf{r}_i, t), t) + \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} (\mathbf{r}(\mathbf{r}_i, t), t) \\ \rightarrow \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}_i} (\mathbf{r}(\mathbf{r}_i, t), t) &= \mathbf{v}(\mathbf{r}_i, t) \cdot \nabla f(\mathbf{r}, t) + \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} (\mathbf{r}, t) , \end{aligned} \quad (1.63)$$

dove le coordinate \mathbf{r} e \mathbf{r}_i del punto sono legate dalla relazione (1.60). Rimuovendo l’indicazione di derivata parziale svolta a coordinata spaziale \mathbf{r} costante e sottintendendo la dipendenza dalle variabili dipendenti, si può alleggerire la notazione,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla f . \quad (1.64)$$

La relazione (1.64) esprime la variazione della quantità f seguendo la traiettoria del punto P_i in funzione di:

- la derivata temporale del campo f , a coordinata spaziale \mathbf{r} fissa, nel punto occupato da P_i all'istante considerato $\mathbf{r}(\mathbf{r}_i, t)$;
- la velocità \mathbf{v}_i del punto P_i all'istante considerato
- il gradiente ∇f del campo considerato, nel punto del dominio considerato, di coordinata $\mathbf{r}(\mathbf{r}_i, t)$

In questa formula si possono distinguere due contributi differenti. Il primo contributo rappresenta la variazione della quantità f “vista” dal punto P_i a causa di una variazione temporale del campo f nel punto considerato. Il secondo contributo, rappresenta la variazione della quantità f “vista” dal punto P a causa del suo movimento in una diversa regione del dominio. Questo secondo termine assomiglia alla definizione di derivata direzionale, ma differisce da esso in quanto è il vettore velocità (che in generale non è unitario) ad essere moltiplicato scalarmente per il gradiente del campo f . Inoltre, poiché la velocità ha dimensioni fisiche L/t , il termine $\mathbf{v}_i \cdot \nabla f$ ha dimensioni fisiche $[f]/t$ e può quindi essere interpretato come una “derivata direzionale temporale”, che dipende dalla variazione spaziale del campo f tramite il suo gradiente e dalla direzione e dal modulo della velocità \mathbf{v}_i del punto P_i .

Descrizione lagrangiana ed euleriana

Se il punto P_i si muove seguendo il mezzo continuo, esso è associato a una *particella materiale*, etichettata come \mathbf{r}_i^0 . La velocità \mathbf{v}_i^0 del punto materiale P_i coincide con la velocità \mathbf{u} del mezzo continuo nel punto considerato $\mathbf{r}(\mathbf{r}_i^0, t)$,

$$\mathbf{v}_i^0(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}_i^0} (\mathbf{r}_i^0, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \quad (1.65)$$

e la variazione temporale di una quantità f “vista” dalla particella materiale può essere espressa come,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}_0} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f. \quad (1.66)$$

Una volta che si è compresa l'origine dell'espressione (1.66) e il suo legame con la regola di derivazione di funzioni composte, si può definire l'operatore di **derivata materiale**,

$$\frac{D}{Dt} := \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}_0} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (1.67)$$

che rappresenta la variazione temporale della quantità alla quale è applicato, seguendo il moto di una particella materiale. Mentre la definizione (1.67) di derivata materiale rappresenta il legame tra la descrizione lagrangiana e la descrizione euleriana, si può ottenere il legame con la descrizione arbitraria utilizzando la relazione (1.64) tra la descrizione arbitraria e quella euleriana,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}_0} &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}_i} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}_i) \cdot \nabla, \end{aligned} \quad (1.68)$$

avendo indicato con \mathbf{u} la velocità del mezzo continuo e con \mathbf{v}_i la velocità del punto P_i in moto arbitrario. È facile notare che la descrizione lagrangiana e quella euleriana siano

un caso particolare di quella arbitraria. Nella descrizione lagrangiana, il punto P_i è un punto materiale, le “etichette”-coordinate \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_0 coincidono, così come la velocità del punto P_i con la velocità del mezzo continuo nel punto P_i , $\mathbf{u}(\mathbf{r}_i, t) = \mathbf{v}_i(t)$. Nella descrizione euleriana, il punto P_i è fermo, la coordinata \mathbf{r}_i coincide con la coordinata \mathbf{r} del sistema “in quiete” e la sua velocità è quindi $\mathbf{v}_i = 0$.

1.4.2 Descrizione globale nel problema integrale

Nel problema integrale, la descrizione lagrangiana del fenomeno fisico consiste nel valutare la variazione temporale dell'integrale di una grandezza fisica contenuta all'interno di un *volume materiale*, definito come un volume costituito da particelle materiali. La descrizione euleriana consiste nel valutare la variazione temporale dell'integrale di una grandezza fisica contenuta all'interno di un *volume di controllo* fisso nello spazio. La descrizione arbitraria consiste nella valutazione della variazione temporale dell'integrale della grandezza fisica contenuta all'interno di un volume che si muove nel dominio con un moto arbitrario. Di nuovo, le descrizioni lagrangiana ed euleriana possono essere considerate come dei casi particolari della descrizione arbitraria, in cui il volume arbitrario è un volume materiale o un volume di controllo fisso, rispettivamente.

Per passare agevolmente da una descrizione all'altra, sarà sufficiente un uso appropriato del teorema del trasporto di Reynolds,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} f = \int_{v(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \oint_{\partial v(t)} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (1.69)$$

dove $v(t)$ è un volume mobile arbitrario, il cui contorno $\partial v(t)$ si muove con velocità \mathbf{v} . Ovviamente, sia la funzione f , sia la velocità \mathbf{v} dei punti del contorno, sia il versore $\hat{\mathbf{n}}$ normale alla superficie $\partial v(t)$ in generale dipendono dallo spazio e dal tempo. Se si applica il teorema di Reynolds a un volume materiale $V(t)$, si può scrivere

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \oint_{\partial V(t)} f \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (1.70)$$

avendo indicato con \mathbf{u} la velocità del mezzo continuo. Se si applica il teorema di Reynolds a un volume di controllo fisso V , si può scrivere

$$\frac{d}{dt} \int_V f = \int_V \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (1.71)$$

poichè la velocità del contorno del volume fisso è nulla.

Per ottenere il legame tra le diverse descrizioni del problema, occorre confrontare le espressioni ricavate in precedenza e applicarle a due volumi di “natura” diversa, coincidenti nell'istante considerato. Così facendo per la descrizione lagrangiana ed euleriana, si considerano un volume materiale $V(t)$ e un volume di controllo V coincidenti all'istante t considerato, $V(t) \equiv V$. Nonostante i due volumi coincidano all'istante considerato, in generale non coincidono negli istanti di tempo successivi, essendo $V(t)$ un volume materiale in moto con il mezzo continuo e V un volume di controllo fisso. Si può quindi scrivere il teorema di Reynolds (1.70) per il volume materiale $V(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t) \equiv V} f &= \int_{V(t) \equiv V} \frac{\partial f}{\partial t} + \oint_{\partial V(t) \equiv \partial V} f \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{V \equiv V(t)} f + \oint_{\partial V \equiv \partial V(t)} f \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \end{aligned} \quad (1.72)$$

avendo utilizzato il teorema di Reynolds (1.71) per il volume di controllo fisso V per manipolare il primo termine a destra dell'uguale. Utilizzando le espressioni (1.69) e (1.70) del teorema di Reynolds per un volume materiale $V(t)$ e un volume arbitrario $v(t)$ si ottiene il legame tra le due descrizioni,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t) \equiv v(t)} f &= \int_{V(t) \equiv v(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \oint_{\partial V(t) \equiv \partial v(t)} f \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{v(t) \equiv V(t)} f - \oint_{\partial v(t) \equiv \partial V(t)} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial v(t) \equiv \partial V(t)} f \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \quad (1.73) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{v(t) \equiv V(t)} f + \oint_{\partial v(t) \equiv \partial V(t)} f (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} . \end{aligned}$$

Osservando l'espressione (1.73) è immediato verificare che la descrizione lagrangiana e la descrizione euleriana sono ancora una volta un caso particolare della descrizione arbitraria. Nella descrizione lagrangiana, il volume arbitrario $v(t)$ è il volume materiale $V(t)$ e la velocità del suo contorno è uguale alla velocità del mezzo continuo, $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, annullando l'integrale di superficie e ottenendo l'identità

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} f . \quad (1.74)$$

Nella descrizione euleriana, il volume arbitrario $v(t)$ è un volume di controllo fisso V e la velocità del suo contorno è nulla, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ottenendo l'espressione (1.72). Le formule che permettono di passare da una descrizione all'altra sono quindi,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} f &= \frac{d}{dt} \int_{V \equiv V(t)} f + \oint_{\partial V \equiv \partial V(t)} f \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ &= \frac{d}{dt} \int_{v(t) \equiv V(t)} f + \oint_{\partial v(t) \equiv \partial V(t)} f (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} . \end{aligned} \quad (1.75)$$

1.5 Bilanci integrali

I bilanci integrali vengono scritti partendo da un volume materiale $V(t)$ qualsiasi, partendo dai principi della fisica classica

- conservazione della massa;
- prima e seconda equazione cardinale della dinamica;
- bilancio di energia totale, somma di meccanica ed interna, che include i termini di flusso di calore, e che può essere ricondotto al primo principio della termodinamica.

I bilanci integrali devono essere validi per ogni volume materiale $V(t)$. Utilizzando i teoremi della divergenza e del gradiente, è possibile trasformare i termini di superfici in integrali di volume. Poiché i bilanci integrali traducono dei principi fisici che devono essere validi per ogni volume $V(t)$, da questi è possibile ricavare i bilanci in forma differenziale, che governano la dinamica locale del mezzo continuo. Prima di arrivare ai bilanci in forma differenziale, che descrivono la dinamica del mezzo continuo punto per punto, i bilanci integrali saranno utilizzati per valutare l'interazione tra un fluido e un corpo solido. Ad esempio, il bilancio della quantità di moto di un volume fluido verrà utilizzato per valutare la risultante delle forze esercitate dal fluido su un corpo solido, il bilancio del momento della quantità di moto verrà utilizzato per valutare la risultante dei momenti esercitati dal fluido sul solido, mentre il bilancio di energia totale verrà utilizzato per valutare la potenza o il lavoro delle forze (come risultato di un'integrazione in tempo) scambiato tra il fluido e un corpo solido.

1.5.1 Bilancio di massa

La massa di un volume materiale $V(t)$ è costante nel tempo, poichè il volume materiale è costituito sempre dalle stesse particelle del continuo.

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho = 0 \quad (1.76)$$

1.5.2 Prima equazione cardinale e bilancio della quantità di moto

La prima equazione cardinale della dinamica lega la quantità di moto \mathbf{Q} di un sistema alla risultante delle forze esterne \mathbf{R}^{ext} agenti su di esso.

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}^{ext} \quad (1.77)$$

Separando i contributi di forze di volume e di superficie, il bilancio di quantità di moto per un volume materiale $V(t)$ arbitrario

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} = \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n + \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} \quad (1.78)$$

avendo indicato con \mathbf{t}_n il vettore sforzo agente sulla superficie esterna $S(t)$ del volume materiale e \mathbf{g} le forze per unità di massa (come ad esempio l'accelerazione di gravità).

1.5.3 Seconda equazione cardinale e bilancio del momento della quantità di moto

La seconda equazione cardinale della dinamica lega il momento della quantità di moto Γ_H rispetto a un polo H con il momento risultante delle azioni esterne \mathbf{M}^{ext} (e con il moto del polo H)

$$\frac{d\Gamma_H}{dt} = -\dot{\mathbf{x}}_H \times \mathbf{Q} + \mathbf{M}^{ext} \quad (1.79)$$

Se si considera un polo H fisso e si indica con \mathbf{r} il raggio vettore dal polo H ai “punti fisici” del volume materiale, il bilancio integrale di momento angolare per un volume materiale (in assenza di coppie esterne) è

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{u} = \oint_{S(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n + \int_{V(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{g} \quad (1.80)$$

1.5.4 Bilancio di energia totale

L'energia totale di un sistema è la somma della sua energia interna e cinetica. La variazione di energia totale è dovuta al lavoro delle forze agenti sul sistema e ai flussi di calore attraverso la superficie del volume (in assenza di fonti di calore interne al volume).

$$\frac{dE^{tot}}{dt} = L - Q \quad (1.81)$$

dove con L si è indicato il lavoro svolto sul sistema e con Q i flussi di calore uscenti da esso. Per un volume materiale

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e^{tot} = \oint_{S(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_n + \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \oint_{S(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (1.82)$$

dove $\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ positivo indica un flusso di calore uscente. L'energia totale per unità di massa può essere scritta come somma del contributo interno e del contributo cinetico

$$e^t = e + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \quad (1.83)$$

Introducendo la definizione di entalpia $h = e + Pv = e + P/\rho$ ci si può ricondurre a molti casi analizzati durante il corso di Fisica Tecnica, partendo ora da unquadro generale sui bilanci integrali: partendo dai bilanci generali, si possono introdurre le ipotesi di sistema chiuso, adiabatico o isolato, annullando i termini di flusso di massa, di flusso di calore o i termini di energia e calore. Il bilancio di energia per un volume di controllo V_c fisso (vedi sezione successiva), dopo aver scritto il termine di sforzo separando il contributo di pressione da quello di sforzi viscosi $\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{s}_n$, diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho e^t &= - \oint_{S_c} \rho e^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_c} P \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{S_c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}_n + \int_{V_c} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \oint_{S_c} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = (\rho h^t = \rho(e^t + P/\rho)) \\ &= - \oint_{S_c} \rho h^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{S_c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}_n + \int_{V_c} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \oint_{S_c} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (1.84)$$

avendo messo in evidenza il flusso di entalpia totale h^t .

1.5.5 Bilanci integrali per volumi in moto arbitrario

I bilanci integrali per un volume $v(t)$ in moto generico con velocità \mathbf{w} possono essere ricavati partendo da quelli per un volume $V(t)$ materiale, ricavati nella sezione precedente, con l'utilizzo del teorema del trasporto di Reynolds per modificare il termine di derivata temporale. Per un volume $v(t)$, la cui superficie $\partial s(t)$ ha velocità \mathbf{w}

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho + \oint_{s(t)} \rho (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{u} + \oint_{s(t)} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{s(t)} \mathbf{t}_n + \int_{v(t)} \rho \mathbf{g} \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{u} + \oint_{s(t)} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{u}) (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{s(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n + \int_{v(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{g} \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^{tot} + \oint_{s(t)} \rho e^t (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{s(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_n + \int_{v(t)} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \oint_{s(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (1.85)$$

Per un volume di controllo V_c fisso, $\mathbf{w} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho + \oint_{S_c} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \mathbf{u} + \oint_{S_c} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{S_c} \mathbf{t}_n + \int_{V_c} \rho \mathbf{g} \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{u} + \oint_{S_c} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{S_c} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n + \int_{V_c} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{g} \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho e^t + \oint_{S_c} \rho e^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{S_c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_n + \int_{V_c} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \oint_{S_c} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (1.86)$$

2. Introduzione all'algebra tensoriale

- *Tutto è relativo!*
- *No, tutto è assoluto!*

2.1	Richiami di algebra lineare	33
2.1.1	Cambio di base e regole di trasformazione: covarianza e contravarianza.	34
2.1.2	Vettori e basi ortonormali	35
2.2	Algebra multilineare	36
2.2.1	Prodotto tensoriale tra vettori	36
2.2.2	Base prodotto e componenti di un tensore	37
2.2.3	Alcune operazioni tensoriali (I): somma e moltiplicazione per uno scalare.	38
2.2.4	Prodotto tensoriale tra tensori	38
2.2.5	Cambio di base e regola di trasformazione delle componenti: definizione "classica" di tensore.	38
2.2.6	Alcune operazioni tensoriali (II)	39
2.2.7	Alcuni esempi	41
2.2.8	Cosa non è stato detto	46

Le equazioni che descrivono i fenomeni fisici hanno carattere tensoriale, cioè sono indipendenti dal sistema di coordinate nelle quali vengono scritte. È importante capire la natura tensoriale delle leggi fisiche, capirne l'**invarianza** rispetto ai sistemi di coordinate ed essere in grado di scrivere correttamente le equazioni nei sistemi di coordinate più vantaggiosi per la descrizione del fenomeno fisico e per la soluzione dei problemi.

In questo capitolo verrà usata la notazione di Einstein: è sottintesa la sommatoria sugli indici ripetuti in una espressione. Per chiarezza,

$$a_k b_k = \sum_k a_k b_k. \quad (2.1)$$

Si considerano qui solo spazi vettoriali dotati di prodotto interno, per i quali è possibile evitare di introdurre concetti più generali, ma più astratti e del tutto inessenziali per una prima introduzione ai tensori e al calcolo tensoriale: ad esempio è possibile “schivare” le definizioni di spazio e base duale (parente di quella che qui verrà chiamata *base reciproca*), isomorfismi e altri concetti più “matematici”. Vengono comunque dati alcuni riferimenti per una trattazione esaustiva dell'argomento.

Nell'introduzione all'algebra tensoriale, si considerano spesso **basi ortonormali** dello spazio vettoriale. Si ricorda che i vettori di una base ortogonale hanno modulo unitario e sono tra di loro ortogonali. Si ricorda inoltre che il cambio di base tra due basi ortonormali avviene tramite una matrice di rotazione, matrici ortogonali per le quali l'inversa coincide con la trasposta. Questa ipotesi limita la validità della trattazione, rendendo non necessari i concetti di *covarianza* e *contravarianza* spesso introdotti nello studio dei tensori. Questa ipotesi verrà leggermente rilassata durante l'introduzione al calcolo tensoriale contenuta nel capitolo §3, estendendo la trattazione ai sistemi di riferimento ortogonali (senza la lunghezza unitaria nei vettori della base), che nascono *naturalmente* quando vengono utilizzati alcuni sistemi di coordinate “notevoli”, come le coordinate cilindriche e le coordinate sferiche. **Si cercherà di comunque di fornire una trattazione generale, evidenziando in blu le formule valide nel caso di basi ortonormali.**

Argomenti della sezione.

Le equazioni della fisica hanno un valore assoluto, indipendente dalla scelta dei sistemi del sistema di riferimento o dalle coordinate usate per descrivere il fenomeno fisico. Vettori e tensori sono gli oggetti matematici che rispecchiano questa invarianza del fenomeno fisico dalla base dello spazio fisico. L'introduzione ai tensori si svolgerà lungo il seguente percorso logico:

- si introduce il concetto di invarianza concentrandosi sui vettori:
 - un vettore fisico \mathbf{v} , inteso come oggetto invariante, può essere scritto come somma dei prodotti delle sue componenti per i vettori di una base dello spazio, $\mathbf{v} = v^k \mathbf{b}_k$;
 - vengono introdotti i concetti di *covarianza* e *contravarianza*, viene spiegato il significato della posizione degli indici (pedici o apici) di componenti o vettori di una base, e viene ricavato il legame tra oggetti covarianti e contravarianti;
- si introduce il concetto di tensore. In questa introduzione si utilizzeranno i concetti presentati in precedenza sui vettori:
 - viene definita la base prodotto, utilizzata per scrivere un tensore in componenti;
 - vengono introdotte le operazioni sui tensori di somma e moltiplicazione per uno scalare;
 - viene ripresa le regole per **la trasformazione delle componenti in seguito a un cambio di base**, che rappresenta l'invarianza dei tensori e coincide con la **definizione classica di tensore**;

- vengono introdotte altre operazioni sui tensori, invarianti anch'esse, il cui risultato è un nuovo tensore.

2.1 Richiami di algebra lineare

Definizione 2.1.1 — Base e componenti. Un vettore \mathbf{v} di uno spazio vettoriale \mathcal{V} può essere rappresentato in una **base**^a $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$ dello spazio come,

$$\mathbf{v} = v^k \mathbf{b}_k, \quad (2.2)$$

dove gli scalari v^k sono definiti componenti (contravarianti) del vettore \mathbf{v} rispetto alla base $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$.

^aUna base è un insieme minimale di vettori linearmente indipendenti. La dimensione dello spazio vettoriale coincide con il numero di elementi di una sua base.

Le componenti v^k vengono definite contravarianti, poiché variano seguendo delle trasformazioni “contrarie” rispetto a quelle dei vettori di una base \mathbf{b}_k per garantire l’invarianza del vettore in seguito a un cambio di base, come dettagliato in seguito nel paragrafo 2.1.1.

Durante una trattazione generale dell’algebra tensoriale bisogna prestare attenzione alla posizione degli indici usati, poiché questa indica la natura covariante o contravariante degli oggetti. Viene usata la seguente convenzione:

- gli oggetti **covarianti** sono indicati con i **pedici**;
- gli oggetti **contravarianti** sono indicati con gli **apici**.

I termini **covariante** e **contravariante** si riferiscono alla legge di trasformazione dell’oggetto (componenti o vettori della base) al quale sono riferiti, in seguito a un cambiamento della base. In particolare, gli oggetti covarianti sono quelli che seguono la stessa legge di trasformazione degli elementi della base $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$, mentre gli oggetti contravarianti seguono la trasformazione inversa, come si vedrà meglio paragrafo 2.1.1.

Un vettore e tutti gli **oggetti invarianti** al cambio di sistemi di riferimento (tensori), devono avere componenti contravarianti rispetto agli elementi della base.

Definizione 2.1.2 — Base duale e componenti covarianti. Data una base $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$, i vettori della sua base duale $\{\mathbf{b}^k\}_{k=1:N}$ sono quei vettori per i quali

$$\mathbf{b}^i \cdot \mathbf{b}_k = \delta_k^i = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (2.3)$$

Il vettore \mathbf{v} può essere espresso nella base covariante, tramite le sue componenti covarianti v_k ,

$$\mathbf{v} = v_k \mathbf{b}^k. \quad (2.4)$$

Definizione 2.1.3 — Simboli g_{ik} e g^{ik} . Si definiscono i simboli g_{ik} , g^{ik} come il prodotto scalare dei vettori della base,

$$g_{ik} := \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_k, \quad g^{ik} := \mathbf{b}^i \cdot \mathbf{b}^k. \quad (2.5)$$

I simboli g_{ik} , g^{ik} possono essere utilizzati per trasformare gli oggetti covarianti in quelli contravarianti e viceversa

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i &= g_{ik} \mathbf{b}^k & , & & v^i &= g^{ik} v_k \\ \mathbf{b}^i &= g^{ik} \mathbf{b}_k & , & & v_i &= g_{ik} v^k \end{aligned} \quad (2.6)$$

Come esempio, si dimostra la prima delle (2.6), moltiplicandola scalarmente per il vettore \mathbf{b}_q della base covariante,

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_q = g_{ik} \underbrace{\mathbf{b}^k \cdot \mathbf{b}_q}_{=\delta_q^k} \rightarrow \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_q = g_{iq} . \quad (2.7)$$

2.1.1 Cambio di base e regole di trasformazione: covarianza e contravarianza.

I termini “covariante” o “contravariante” sono riferiti alla legge di trasformazione di un oggetto (componente o elemento di una base), se confrontata con la legge di trasformazione degli elementi della base $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$ di \mathcal{V} . Gli apici sono riservati agli oggetti contravarianti (le componenti v^k del vettore \mathbf{v} e gli elementi della base reciproca $\{\mathbf{b}^k\}_{k=1:N}$), mentre i pedici sono riservati agli oggetti covarianti (le componenti v_k del vettore \mathbf{v} e gli elementi della base $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$ di \mathcal{V}).

Vettori della base. Due basi $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$ e $\{\hat{\mathbf{b}}_k\}_{k=1:N}$ dello spazio vettoriale \mathcal{V} sono legate dalla trasformazione lineare T ,

$$\mathbf{b}_k = \hat{T}_k^q \hat{\mathbf{b}}_q , \quad \hat{\mathbf{b}}_k = T_k^q \mathbf{b}_q , \quad (2.8)$$

dove con \hat{T} viene indicata la trasformazione inversa di T , $\hat{T} = T^{-1}$. Usando il formalismo matriciale, si può scrivere

$$\begin{aligned} [\mathbf{b}_1 | \dots | \mathbf{b}_N] &= [\hat{\mathbf{b}}_1 | \dots | \hat{\mathbf{b}}_N] [\hat{T}_k^q] = [\hat{\mathbf{b}}_1 | \dots | \hat{\mathbf{b}}_N] \hat{T} , \\ [\hat{\mathbf{b}}_1 | \dots | \hat{\mathbf{b}}_N] &= [\mathbf{b}_1 | \dots | \mathbf{b}_N] [T_k^q] = [\mathbf{b}_1 | \dots | \mathbf{b}_N] T \end{aligned} \rightarrow T = \hat{T}^{-1} . \quad (2.9)$$

avendo interpretato il pedice della trasformazione T come l'indice di colonna e l'apice come indice di riga.

Componenti contravarianti. Le componenti contravarianti v^k di \mathbf{v} variano secondo la trasformazione inversa degli elementi della base $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$ di \mathcal{V} ,

$$\hat{v}^k = \hat{T}_q^k v^q , \quad v^k = T_q^k \hat{v}^q . \quad (2.10)$$

È possibile verificare immediatamente le (2.10), inserendo la trasformazione (2.8) nella rappresentazione del vettore \mathbf{v} nella base covariante $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$,

$$\mathbf{v} = v^q \mathbf{b}_q = v^q \hat{T}_q^k \hat{\mathbf{b}}_k = \hat{v}^k \hat{\mathbf{b}}_k . \quad (2.11)$$

Trasformazione di cambio base. La trasformazione di cambio base \hat{T} e della sua inversa T che legano i vettori delle basi $\{\mathbf{b}_k\}$ e $\{\hat{\mathbf{b}}_k\}$ tramite le formule (2.8) hanno l'espressione,

$$\hat{T}_k^q = \hat{\mathbf{b}}^q \cdot \mathbf{b}_k , \quad T_k^q = \mathbf{b}^q \cdot \hat{\mathbf{b}}_k . \quad (2.12)$$

Non è difficile dimostrare queste espressioni. Ad esempio, moltiplicando scalarmente la prima delle (2.8) con il vettore $\hat{\mathbf{b}}^i$, si ottiene

$$\hat{\mathbf{b}}^i \cdot \mathbf{b}_k = \hat{\mathbf{b}}^i \cdot (\hat{T}_k^q \hat{\mathbf{b}}_q) \quad \rightarrow \quad \hat{\mathbf{b}}^i \cdot \mathbf{b}_k = \hat{T}_k^q \delta_q^i = \hat{T}_k^i . \quad (2.13)$$

2.1.2 Vettori e basi ortonormali

Una base ortonormale $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$ è una base per la quale i simboli g_{ik} valgono

$$g_{ik} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} . \quad (2.14)$$

Poiché i simboli g_{ik} sono le componenti di una matrice identità, la base reciproca coincide alla base di riferimento,

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{b}^k =: \hat{\mathbf{e}}_k , \quad (2.15)$$

così come le componenti covarianti corrispondono alle componenti contravarianti,

$$v^k = v_k = \hat{v}_k . \quad (2.16)$$

Nel caso di basi ortonormali, e solo in questo caso, non è indispensabile distinguere oggetti covarianti e contravarianti. Dal punto di vista della notazione, è possibile confondere pedici e apici.

Trasformazione dei vettori di due basi ortonormali

Le componenti delle trasformazione lineare \hat{T} e della sua inversa T che legano i vettori delle due basi ortonormali $\{\mathbf{b}_k\}$ e $\{\mathbf{b}^k\}$ tramite le formule (2.8) hanno l'espressione

$$\hat{T}_k^q = \hat{\mathbf{b}}_q \cdot \mathbf{b}_k \quad , \quad T_k^q = \mathbf{b}_q \cdot \hat{\mathbf{b}}_k . \quad (2.17)$$

Per verificare queste formule è sufficiente usare il prodotto scalare con i vettori della base reciproca. Infatti,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_k &= \hat{T}_k^i \hat{\mathbf{b}}_i \quad , \quad \hat{\mathbf{b}}_q \cdot \mathbf{b}_k = \hat{T}_k^i \underbrace{\hat{\mathbf{b}}_q \cdot \hat{\mathbf{b}}_i}_{=\delta_i^q} \quad \rightarrow \quad \hat{T}_k^q = \hat{\mathbf{b}}_q \cdot \mathbf{b}_k \\ \hat{\mathbf{b}}_k &= T_k^i \mathbf{b}_i \quad , \quad \mathbf{b}_q \cdot \hat{\mathbf{b}}_k = T_k^i \underbrace{\mathbf{b}_q \cdot \mathbf{b}_i}_{=\delta_i^q} \quad \rightarrow \quad T_k^q = \mathbf{b}_q \cdot \hat{\mathbf{b}}_k . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dal confronto diretto delle due espressioni di \hat{T}_k^q e T_k^q , si osserva che la trasformazione inversa $\hat{T} := T^{-1}$ è uguale alla matrice trasposta T^T della matrice di cambiamento di base T ,

$$\hat{T} := T^{-1} = T^T \quad , \quad \hat{T}_k^q = T_q^k . \quad (2.19)$$

2.2 Algebra multilineare

Le leggi di trasformazione degli elementi di basi differenti e delle relative componenti sono state introdotte per i vettori nella sezione precedente. In questa sezione verranno utilizzate per ottenere le leggi di trasformazione degli elementi della base e delle componenti dei tensori. In particolare, la definizione classica di tensore come oggetto invariante al cambio di sistema di riferimento, coinvolge direttamente la legge di trasformazione delle componenti, in seguito a un cambio di base. L'esempio ?? è stato pensato come un'occasione per riprendere dimestichezza con l'analisi lineare e prendere familiarità con le definizioni introdotte nel paragrafo.

Se l'algebra lineare è la branca della matematica che si occupa dello studio dei vettori, degli spazi vettoriali (o spazi lineari) e delle trasformazioni lineari, l'algebra multilineare si occupa dello studio dei tensori, degli spazi tensoriali e delle trasformazioni multilineari.

Un tensore può essere definito in maniera intrinseca come una funzione multi-lineare o in maniera classica come un oggetto matematico formato da un insieme di numeri, le sue componenti, che seguono delle precise leggi di trasformazione in seguito a un cambio di base, utilizzato per descrivere in maniera astratta e invariante le leggi della fisica. Viene solo riportata per completezza la definizione intrinseca, dopodiché si “ricaverà” la definizione classica di tensore, partendo dalla sua invarianza al cambio di base.

Definizione 2.2.1 — Tensore (definizione intrinseca). Un tensore di ordine r su \mathcal{V} è una funzione r -lineare

$$T : \underbrace{\mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V}}_{r \text{ volte}} \rightarrow K \quad (2.20)$$

R La definizione di tensore data è riferita agli spazi dotati di prodotto interno. Per una prima introduzione all'algebra e al calcolo tensoriale, può essere considerata un buon compromesso tra comprensibilità e completezza della trattazione, per un corso di ingegneria. Senza voler entrare nei particolari, questa definizione evita di introdurre le definizioni di spazio duale e di isomorfismi necessarie a una trattazione generale dei tensori su spazi vettoriali qualsiasi.

Si indica con $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ l'insieme dei tensori di ordine r . Questo insieme è chiuso^a rispetto alle operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare definite in seguito, e quindi è definito lo spazio vettoriale dei tensori di ordine r . Un tensore di ordine 0 è uno scalare, un tensore di ordine 1 un vettore.

^aUn insieme \mathcal{V} è chiuso rispetto a un'operazione se l'operazione su ogni elemento di \mathcal{V} restituisce un elemento di \mathcal{V} .

2.2.1 Prodotto tensoriale tra vettori

Per arrivare alla definizione classica di un tensore senza introdurre complicazioni superflue per una prima introduzione all'algebra tensoriale, occorre introdurre l'operazione di prodotto tensoriale tra vettori. Questa operazione è la prima operazione incontrata che dà origine a tensori di ordine maggiore di uno (i vettori possono essere considerati tensori di ordine 1).

Definizione 2.2.2 — Prodotto tensoriale tra vettori. Dati r vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in \mathcal{V}$ si definisce il loro prodotto tensoriale come il tensore di ordine r , indicato con

$$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_r \quad \text{o come} \quad \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_r . \quad (2.21)$$

Se \mathcal{V} è uno spazio vettoriale di dimensione N , il prodotto tensoriale di r vettori appartenenti a \mathcal{V} ha dimensioni N^r .

La definizione di prodotto tensoriale tra vettori viene usata per definire una base dello spazio dei tensori di ordine r e ottenere una rappresentazione per componenti di un tensore. In seguito verrà definito anche il prodotto tensoriale tra tensori di ordine qualsiasi.

R Il prodotto tensoriale **non è commutativo**, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$.

2.2.2 Base prodotto e componenti di un tensore

Per rappresentare in componenti un tensore di ordine r è necessario definire una base dello spazio dei tensori $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$. Ad esempio, data una base $\{\mathbf{b}_k\}$ dello spazio \mathcal{V} , è possibile definire la base prodotto tramite il prodotto tensoriale degli elementi della base.

Definizione 2.2.3 — Base prodotto di $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$. La base $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$ di \mathcal{V} induce una base prodotto (covariante) di $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$, i cui elementi sono formati da tutti i possibili N^r prodotti tensoriali di ordine r dei vettori \mathbf{b}_k

$$\{\mathbf{b}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}_{i_r}\}_{i_1, \dots, i_r=1:N} , \quad (2.22)$$

dove tutti gli indici i_k possono variare in maniera indipendente da 1 a N .

■ **Esempio 2.1** La base prodotto dei tensori di ordine $r = 2$ nello spazio tridimensionale, $N = 3$, indotta dalla base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, è la base formata dai $N^r = 9$ prodotti tensoriali

$$\begin{aligned} &\{\mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_3, \\ &\mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{b}_3, \\ &\mathbf{b}_3 \otimes \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3 \otimes \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \otimes \mathbf{b}_3\} . \end{aligned} \quad (2.23)$$

■

Rispetto alla base prodotto, un tensore $\mathbf{A} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ viene scritto come

$$\mathbf{A} = A^{i_1 \dots i_r} \mathbf{b}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}_{i_r}, \quad (2.24)$$

dove $A^{i_1 \dots i_r}$ sono le componenti contravarianti del tensore \mathbf{A} rispetto alla base prodotto covariante.

Base covariante, mista e natura degli indici.

Come già visto per i vettori, è possibile utilizzare i simboli g_{ik} e g^{ik} per passare dai vettori di una base a quelli della sua duale, e trasformare le componenti contravarianti in quelle covarianti, e viceversa. Si può ripetere lo stesso procedimento per i vettori che formano una base prodotto e ottenere le componenti di un tensore con singoli indici di natura diversa,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A^{ijk} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}_k = & (\mathbf{b}_i = g_{il} \mathbf{b}^l) \\ &= \underbrace{A^{ijk} (g_{il} \mathbf{b}^l)}_{=: A_l^{jk}} \otimes \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}_k = A_l^{jk} \mathbf{b}^l \otimes \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}_k , \end{aligned} \quad (2.25)$$

avendo sostituito solo il primo vettore della base prodotto e, di conseguenza, cambiato la natura del primo indice delle componenti. Lo stesso procedimento può essere ripetuto per qualsiasi elemento della base prodotto, riassumendo la regola di trasformazione della natura delle componenti tramite l'uso di g_{ik} ,

$$A_l^{jk} = g_{il} A^{ijk} , \quad A_{jk}^l = g^{il} A_{ijk} . \quad (2.26)$$

R È fondamentale l'ordine degli indici che rappresentano le componenti del tensore. Variando il primo elemento della base prodotto, viene cambiata la natura del primo indice e quindi sarà il primo indice “ad alzarsi” o “ad abbassarsi” in seguito a questa operazione.

R Si possono ricordare facilmente queste regole, facendo un “bilancio degli indici” e ricordando che gli indici ripetuti vengono saturati da una somma. Gli indici che vengono saturati devono comparire uno come apice e uno come pedice. Dalle due parti dell'uguale devono essere presenti gli stessi indici non saturati nelle stesse posizioni, se non si scrivono esplicitamente gli elementi della base e quindi si sottointende di riferirsi alla stessa base.

2.2.3 Alcune operazioni tensoriali (I): somma e moltiplicazione per uno scalare.

Le due operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare e la chiusura dell'insieme \mathcal{T}^r rispetto ad esse sono condizioni necessarie alla struttura di spazio vettoriale. La somma di due tensori di ordine r $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ ha come risultato il tensore di ordine r che ha come componenti la somma delle componenti di \mathbf{A} e \mathbf{B} ,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A^{i_1 \dots i_r} + B^{i_1 \dots i_r}) \mathbf{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_{i_r} \quad (2.27)$$

e la moltiplicazione di \mathbf{A} per uno scalare $\alpha \in K$ ha come risultato un tensore dello stesso ordine, le cui componenti sono il prodotto di α per le componenti di \mathbf{A} ,

$$\alpha \mathbf{A} = \alpha A^{i_1 \dots i_r} \mathbf{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_{i_r} . \quad (2.28)$$

Definizione 2.2.4 — Spazio vettoriale $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ dei tensori di ordine r . Lo spazio vettoriale $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ dei tensori di ordine r sullo spazio \mathcal{V} è formato dall'insieme $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$, con le operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare definite in (2.27) e (2.28).

2.2.4 Prodotto tensoriale tra tensori

È possibile ora definire il prodotto tensoriale tra due (o più tensori) di qualsiasi ordine.

Definizione 2.2.5 — Prodotto tensoriale. Il prodotto tensoriale di due tensori $\mathbf{A} \in \mathcal{T}^p(\mathcal{V})$, $\mathbf{B} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ è il tensore di ordine $p + r$ definito come

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = A^{i_1 \dots i_p} B^{j_1 \dots j_r} \mathbf{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_{i_p} \otimes \mathbf{b}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_{j_r} . \quad (2.29)$$

R Il prodotto tensoriale **non è commutativo**: $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$.

2.2.5 Cambio di base e regola di trasformazione delle componenti: definizione “classica” di tensore.

Aiutandosi con la legge di trasformazione (2.8) degli elementi della base $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$ di \mathcal{V} e della base reciproca $\{\mathbf{b}^k\}_{k=1:N}$ di \mathcal{V}^* , si può verificare che la base prodotto (covariante) dello spazio $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ si trasforma secondo

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{b}}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{b}}_{i_r} &= T_{i_1}^{k_1} \cdots T_{i_r}^{k_r} \mathbf{b}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}_{k_r} \\ \mathbf{b}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}_{i_r} &= \hat{T}_{i_1}^{k_1} \cdots \hat{T}_{i_r}^{k_r} \hat{\mathbf{b}}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{b}}_{k_r}.\end{aligned}\quad (2.30)$$

Per ricavare la regola di trasformazione della base prodotto (2.30) è sufficiente applicare la (2.8) a tutti i vettori \mathbf{b}_{i_α} della base prodotto. Usando la multilinearità del prodotto tensoriale

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{b}}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{b}}_{i_r} &= (T_{i_1}^{k_1} \mathbf{b}_{k_1}) \otimes \cdots \otimes (T_{i_r}^{k_r} \mathbf{b}_{k_r}) = \\ &= T_{i_1}^{k_1} \cdots T_{i_r}^{k_r} \mathbf{b}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}_{k_r}.\end{aligned}\quad (2.31)$$

La regola di trasformazione delle componenti di un tensore $\mathbf{A} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$, $\mathbf{A} = A^{i_1 \dots i_r} \mathbf{b}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}_{i_r} = \hat{A}^{i_1 \dots i_r} \hat{\mathbf{b}}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{b}}_{i_r}$ al variare dei sistemi di riferimento è

$$\begin{aligned}\hat{A}^{k_1 \dots k_r} &= \hat{T}_{i_1}^{k_1} \cdots \hat{T}_{i_r}^{k_r} A^{i_1 \dots i_r} \\ A^{i_1 \dots i_r} &= T_{k_1}^{i_1} \cdots T_{k_r}^{i_r} \hat{A}^{k_1 \dots k_r}.\end{aligned}\quad (2.32)$$

La legge di trasformazione delle componenti (2.32) si ricava grazie alla legge di trasformazione della base prodotto

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A^{i_1 \dots i_r} \mathbf{b}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}_{i_r} = \\ &= A^{i_1 \dots i_r} \hat{T}_{i_1}^{k_1} \cdots \hat{T}_{i_r}^{k_r} \hat{\mathbf{b}}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{b}}_{k_r} = \\ &= \hat{A}^{k_1 \dots k_r} \hat{\mathbf{b}}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{b}}_{k_r}.\end{aligned}\quad (2.33)$$

Partendo dalla definizione intrinseca di un tensore come applicazione multilineare 2.2.1, grazie all'introduzione di una base dello spazio vettoriale e alla rappresentazione in coordinate, è stato possibile arrivare alla definizione classica di tensore.

Definizione 2.2.6 — Tensore (definizione classica). Un tensore \mathbf{A} di ordine r su uno spazio \mathcal{V} di dimensione N è un oggetto matematico formato da N^r componenti $A^{i_1 \dots i_r}$ che si trasformano secondo la (2.32), in seguito al cambio di base $\mathbf{b}_j = \hat{T}_j^i \hat{\mathbf{b}}_i$.

2.2.6 Alcune operazioni tensoriali (II)

Come le operazioni introdotte nel paragrafo 2.2.3, anche le operazioni descritte in questo paragrafo operano su tensori e restituiscono tensori.

R Queste operazioni vengono definite in maniera naturale (invariante, senza far comparire i simboli g_{ij}) facendo uso di una rappresentazione dei tensori in una base “mista”, usando alcuni vettori della base $\{\mathbf{b}_k\}$ e alcuni della sua duale \mathbf{b}^k , con componenti di natura “mista” di conseguenza. Viene fornita la definizione generale, riservando il colore blu alle espressioni valide nel caso si utilizzino di basi ortonormali (per le quali una base coincide con la sua duale e le componenti covarianti coincidono con quelle contravarianti).

Contrazione.

L'operazione di contrazione C_l^k agente su un tensore \mathbf{A} di ordine r ha come risultato un tensore di ordine $r - 2$. Le componenti del tensore ottenuto tramite la contrazione di due

indici si ottengono saturando con la somma gli indici di tutte le componenti indicati da C_l^k

$$\begin{aligned}
 C_l^k \mathbf{A} &= C_l^k (A^{i_1 \dots i_r} \mathbf{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_{i_r}) \\
 &= C_l^k (A^{i_1 \dots i_k \dots i_{l-1} \dots i_{l+1} \dots i_r} \mathbf{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_{i_k} \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_{i_{l-1}} \otimes \mathbf{b}^{i_l} \otimes \mathbf{b}_{i_{l+1}} \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_{i_r}) \\
 &= A^{i_1 \dots i_{k-1} n i_{k+1} \dots i_{l-1} \dots i_{l+1} \dots i_r} \mathbf{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_{i_{k-1}} \otimes \mathbf{b}_{i_{k+1}} \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_{i_{l-1}} \otimes \mathbf{b}_{i_{l+1}} \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_{i_r}.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Si fornisce un esempio dell'operazione di contrazione (2.34) su un tensore di ordine 3, $\mathbf{A} = A^{ijk} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}_k$, espresso in una base $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$ ortonormale. Si vuole svolgere la contrazione del primo e del terzo indice di \mathbf{A} . In componenti si ottiene

$$\begin{aligned}
 C_3^1 \mathbf{A} &= C_3^1 (A^{ijk} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}_k) = \\
 &= C_3^1 (A_i^{jk} \mathbf{b}^i \otimes \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}_k) = A_i^{ji} \mathbf{b}_j = g_{il} A^{lji} \mathbf{b}_j = \\
 &= A^{iji} \mathbf{b}_j,
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

essendo sottintese le sommatorie sugli indici i, j ripetuti e avendo potuto confondere gli indici contravarianti con gli indici covarianti, poiché è stata utilizzata una base ortonormale.

“Dot” product.

Siano $\mathbf{A} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$, $\mathbf{B} \in \mathcal{T}^s(\mathcal{V})$, il prodotto “dot” $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ è un tensore di ordine $r + s - 2$, definito tramite il prodotto tensoriale e la contrazione di una coppia di indici. In particolare si definisce

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = C_{r+1}^r (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}). \tag{2.36}$$

Si fa un esempio di prodotto “punto” tra due tensori $\mathbf{A} \in \mathcal{T}^3$, $\mathbf{B} \in \mathcal{T}^2$, espressi in componenti rispetto alla base ortonormale $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A^{ijk} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}_k) \cdot (B_{mn} \mathbf{b}^m \otimes \mathbf{b}^n) = \\
 &= A^{ijk} B_{mn} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j \otimes \underbrace{\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}^m}_{=\delta_k^m} \otimes \mathbf{b}^n = \\
 &= A^{ijl} B_{ln} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}^n \\
 &= A^{ijl} B^{ln} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}_n.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$



Il prodotto “dot” **non** è commutativo ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$). Il prodotto “dot” **non** è un prodotto interno (in generale non ha nemmeno come risultato uno scalare).

Doppio “Dot” product.

Siano $\mathbf{A} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$, $\mathbf{B} \in \mathcal{T}^s(\mathcal{V})$, il doppio prodotto “dot” $\mathbf{A} : \mathbf{B}$ è un tensore di ordine $r + s - 4$ definito tramite il prodotto tensoriale e una doppia contrazione. In particolare si definisce

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = C_{r+1, r+2}^{r-1, r} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \tag{2.38}$$

Per esempio con $\mathbf{A} \in \mathcal{T}^4$, $\mathbf{B} \in \mathcal{T}^3$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} : \mathbf{B} &= (A^{ijkl} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}_k \otimes \mathbf{b}_l) : (B_{mnp} \mathbf{b}^m \otimes \mathbf{b}^n \otimes \mathbf{b}^p) = \\
 &= A^{iju} B_{uvp} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}^p = \\
 &= A^{iju} B^{uvp} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}_p
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Si presti attenzione all'ordine con il quale avviene la doppia contrazione: il penultimo indice di \mathbf{A} si contrae con il primo di \mathbf{B} , l'ultimo di \mathbf{A} con il secondo di \mathbf{B} . É possibile dare definizioni alternative (non equivalenti) che prevedono la contrazione di coppie di indici diverse. É possibile definire “dot product” multipli estendendo la contrazione a un numero maggiore di indici.

2.2.7 Alcuni esempi

I primi tensori che vengono incontrati durante un corso di studi in ingegneria sono il tensore di inerzia per i corpi rigidi in Meccanica Razionale e il tensore degli sforzi, il tensore delle deformazioni e il tensore di elasticità nei corsi di Meccanica Strutturale. I tensori di inerzia, il tensore delle deformazioni e degli sforzi sono tensori del secondo ordine. Un tensore del secondo ordine può essere utilizzato insieme al prodotto “punto” per definire la relazione lineare più generale tra due vettori fisici: il tensore degli sforzi lega il vettore sforzo \mathbf{t}_n agente su una faccia del materiale alla normale $\hat{\mathbf{n}}$ della faccia,

$$\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T} , \quad (2.40)$$

mentre il tensore di inerzia \mathbb{I}_G ¹ lega la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di un corpo alla suo momento angolare $\boldsymbol{\Gamma}_G$,

$$\boldsymbol{\Gamma}_G = \mathbb{I}_G \cdot \boldsymbol{\omega} . \quad (2.41)$$

Il tensore di elasticità \mathbb{C} è il tensore del quarto ordine utilizzato per esprimere il legame lineare più generale tra il tensore degli sforzi \mathbb{T} e il tensore delle deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}$ tramite il “doppio prodotto punto”,

$$\mathbb{T} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} . \quad (2.42)$$

Altri tensori incontrati nei corsi di Fisica Tecnica ed Elettrotecnica si sono “mimetizzati da scalare” grazie all'ipotesi di isotropia dello spazio, cioè di invarianza delle proprietà fisiche alla direzione nello spazio. Durante il corso di Fisica Tecnica, la legge di Fourier della conduzione lega il flusso di calore \mathbf{q} al gradiente di temperatura ∇T , tramite il coefficiente di conduzione k ,

$$\mathbf{q} = -k \nabla T , \quad (2.43)$$

legame valido per materiali isotropi. Per materiali non isotropi, la legge costitutiva lineare più generale viene espressa tramite un tensore di conduzione \mathbb{K} ²,

$$\mathbf{q} = -\mathbb{K} \cdot \nabla T . \quad (2.44)$$

Nel caso di materiale isotropo, il tensore di conduzione assume la forma $\mathbb{K}^{iso} = -k \mathbb{I}$.³ In maniera analoga, in Elettrotecnica sono stati introdotti solo i legami isotropi tra il campo magnetico \mathbf{h} e il campo di induzione magnetica \mathbf{b} , e tra il campo elettrico \mathbf{e} e il campo di induzione elettrica \mathbf{d} , rispettivamente tramite la permeabilità magnetica μ e la permeabilità elettrica ε ,

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h} , \quad \mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e} , \quad (2.45)$$

¹Per semplicità si è scelto il baricentro G del corpo come punto di riferimento.

²Per ragioni fisiche, questo tensore deve essere simmetrico definito positivo.

³Si dimostra che gli unici tensori isotropi del secondo ordine sono il tensore unità e i suoi multipli, vedi esercizio 2.1.

e non i casi generali in cui il legame tra le coppie di campi viene espresso tramite i rispettivi tensori

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{h} \quad , \quad \mathbf{d} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e} . \quad (2.46)$$

Esercizio .2.1 — Isotropia del tensore identità. Le componenti del tensore identità possono essere espresse in un sistema di riferimento ortonormale utilizzando la delta di Kronecker. Si dimostri che le sue componenti in un altro sistema di riferimento ortonormale (ottenuto tramite rotazione dal sistema di riferimento originario) non cambiano. ■

■ **Esempio 2.2 — Tensore degli sforzi.** Viene qui ricavato velocemente il legame tra vettore sforzo \mathbf{t}_n e la normale $\hat{\mathbf{n}}$ della giacitura considerata in un mezzo continuo non polare, tramite l'equilibrio del tetraedro di Cauchy. Siano $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$ i versori di un sistema di riferimento cartesiano centrato nel punto del continuo considerato e \mathbf{t}_x , \mathbf{t}_y e \mathbf{t}_z i vettori sforzo agenti sulle facce del tetraedro di area dS_x , dS_y e dS_z con le normali orientate come i rispettivi versori della base, come rappresentato in figura 2.1. Sia \mathbf{t}_n il vettore sforzo agente sulla faccia “inclinata” di area dS del tetraedro di Cauchy, con normale $\hat{\mathbf{n}}$. Il legame tra le aree delle facce del tetraedro è

$$dS = -\frac{dS_x}{n_x} = -\frac{dS_y}{n_y} = -\frac{dS_z}{n_z}, \quad (2.47)$$

avendo indicato con n_i le componenti cartesiane del versore normale $\hat{\mathbf{n}}$, tutte negative per come è stato definito il tetraedro. Si scrive l'equilibrio del tetraedro, ricordando che i contributi di volume sono di un ordine inferiore rispetto a quelli di superficie, quando le dimensioni del tetraedro tendono a zero,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{t}_n dS + \mathbf{t}_x dS_x + \mathbf{t}_y dS_y + \mathbf{t}_z dS_z = \\ &= (\mathbf{t}_n - \mathbf{t}_x n_x - \mathbf{t}_y n_y - \mathbf{t}_z n_z) dS \quad \rightarrow \quad \mathbf{t}_n = \mathbf{t}_x n_x + \mathbf{t}_y n_y + \mathbf{t}_z n_z \end{aligned} \quad (2.48)$$

Esprimendo questa ultima espressione nella base cartesiana ortonormale, si può scrivere il legame tensoriale tra normale della superficie e vettore sforzo, tramite il tensore degli sforzi,

$$\begin{aligned} t_x \hat{\mathbf{x}} + t_y \hat{\mathbf{y}} + t_z \hat{\mathbf{z}} &= n_x (t_{xx} \hat{\mathbf{x}} + t_{xy} \hat{\mathbf{y}} + t_{xz} \hat{\mathbf{z}}) + \\ &\quad + n_y (t_{yx} \hat{\mathbf{x}} + t_{yy} \hat{\mathbf{y}} + t_{yz} \hat{\mathbf{z}}) + \\ &\quad + n_z (t_{zx} \hat{\mathbf{x}} + t_{zy} \hat{\mathbf{y}} + t_{zz} \hat{\mathbf{z}}) = \\ &= (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{t}_x + (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{y}}) \mathbf{t}_y + (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{z}}) \mathbf{t}_z = \\ &= \mathbf{n} \cdot (t_{xx} \hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{x}} + t_{xy} \hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{y}} + t_{xz} \hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{z}} + \\ &\quad + t_{yx} \hat{\mathbf{y}} \otimes \hat{\mathbf{x}} + t_{yy} \hat{\mathbf{y}} \otimes \hat{\mathbf{y}} + t_{yz} \hat{\mathbf{y}} \otimes \hat{\mathbf{z}} + \\ &\quad + t_{zx} \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\mathbf{x}} + t_{zy} \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\mathbf{y}} + t_{zz} \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\mathbf{z}}) = \\ &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} . \end{aligned} \quad (2.49)$$

■ **Esempio 2.3 — Tensore di inerzia.** Durante il corso di Meccanica Razionale si è visto che le componenti del tensore di inerzia espresse in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale possono essere raccolte nella matrice simmetrica,

$$\int_V \rho \begin{bmatrix} (y^2 + z^2) & -xy & -xz \\ -xy & (x^2 + z^2) & -yz \\ -xz & -yz & (x^2 + y^2) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

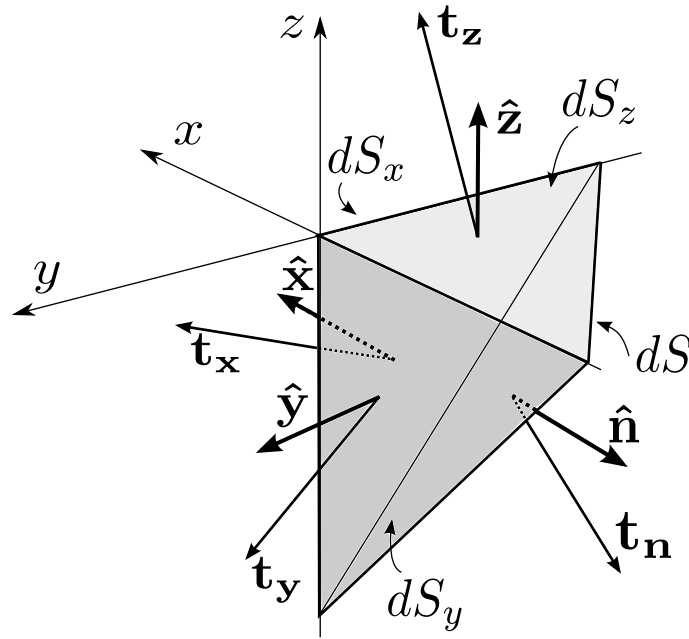


Figura 2.1: tetraedro di Cauchy

Esercizio .2.2 — Espressione tensoriale del tensore di inerzia. Aiutandosi con un sistema di riferimento cartesiano, si dimostri che l'espressione tensoriale del tensore di inerzia è

$$\mathbb{I}_G = \int_V \rho \left[|\mathbf{r}|^2 \mathbb{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \right] , \quad (2.51)$$

essendo \mathbb{I} il tensore identità del secondo ordine, \mathbf{r} il raggio vettore tra un punto del corpo considerato e il punto G rispetto al quale si sta calcolando il tensore di inerzia e l'integrale viene svolto su tutto il volume V del corpo. ■

Esercizio .2.3 Dato il tensore simmetrico del secondo ordine definito nella base ortonormale $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}\}$ dello spazio bidimensionale,

$$\mathbb{A} = A_{xx} \hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{x}} + A_{xy} \hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{y}} + A_{xy} \hat{\mathbf{y}} \otimes \hat{\mathbf{x}} + A_{yy} \hat{\mathbf{y}} \otimes \hat{\mathbf{y}} , \quad (2.52)$$

si chiede di determinare la base ortonormale $\{\hat{\boldsymbol{\xi}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}\}$, che consente di esprimere il tensore \mathbb{A} come

$$\mathbb{A} = A_{\xi\xi} \hat{\boldsymbol{\xi}} \otimes \hat{\boldsymbol{\xi}} + A_{\eta\eta} \hat{\boldsymbol{\eta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\eta}} , \quad (2.53)$$

cioè in forma diagonale. ■

Dati i due sistemi di riferimento raffigurati in figura 2.2, la legge di trasformazione tra i vettori delle due basi è

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\xi}} = \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\eta}} = -\sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \hat{\mathbf{y}} \end{cases} \quad \rightarrow \quad [\hat{\boldsymbol{\xi}} | \hat{\boldsymbol{\eta}}] = [\hat{\mathbf{x}} | \hat{\mathbf{y}}] T \quad (2.54)$$

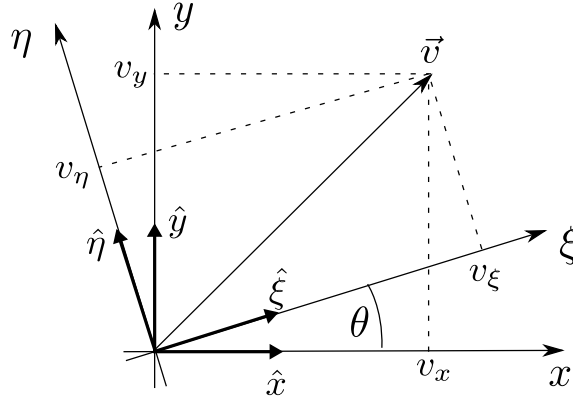


Figura 2.2: Cambio di base: basi ortonormali.

avendo indicato con T la trasformazione lineare

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

e definendo $\tilde{T} = T^{-1} = T^T$, la sua inversa. Utilizzando la formula (2.32), la trasformazione delle componenti di un tensore del secondo ordine diventa

$$\tilde{A}_{ik} = \tilde{T}_{il} \tilde{T}_{km} A_{lm}, \quad \tilde{A} = \tilde{T} A \tilde{T}^T, \quad (2.56)$$

non avendo fatto distinzione tra pedici e indici poiché si usano due basi ortonormali. Si può quindi esplicitare l'ultima espressione per ricavare l'espressione delle componenti del tensore \mathbb{A} nel nuovo sistema di riferimento,

$$\begin{bmatrix} A_{\xi\xi} & A_{\xi\eta} \\ A_{\eta\xi} & A_{\eta\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Svolgendo i conti e sfruttando la simmetria del tensore \mathbb{A} , $A_{xy} = A_{yx}$, si ottiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{\xi\xi} & A_{\xi\eta} \\ A_{\eta\xi} & A_{\eta\eta} \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} A_{xx} \cos^2 \theta + A_{yy} \sin^2 \theta + 2A_{xy} \cos \theta \sin \theta & (-A_{xx} + A_{yy}) \cos \theta \sin \theta + A_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ (-A_{xx} + A_{yy}) \cos \theta \sin \theta + A_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) & A_{xx} \sin^2 \theta + A_{yy} \cos^2 \theta - 2A_{xy} \cos \theta \sin \theta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Si osservi che la proprietà di simmetria del tensore è indipendente dalla base ortonormale utilizzata per esprimerne le componenti, $A_{\xi\eta} = A_{\eta\xi}$. Per trovare l'angolo θ del quale bisogna ruotare il sistema di riferimento $\{\hat{\xi}, \hat{\eta}\}$ affinché la componente $A_{\xi\eta}$ sia nulla, si impone

$$A_{\xi\eta} = 0, \quad (2.59)$$

ottenendo

$$0 = A_{xy} \cos 2\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} (A_{xx} - A_{yy}) \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2A_{xy}}{A_{xx} - A_{yy}}. \quad (2.60)$$

Il problema oggetto di questo esercizio è equivalente alla ricerca degli **assi principali di sforzo** per uno stato di sforzo piano, coincidenti con gli **autovettori** del tensore.⁴ Il risultato ricavato tramite le trasformazioni delle componenti dei tensori coincide con quello già ottenuto nei corsi precedenti tramite l'equilibrio di un elementino di materiale, riassumibile nel diagramma del cerchio di Mohr. Avere in mente entrambi gli approcci può essere utile per non perdere il significato fisico di quello che si sta facendo.

La trasformazione delle componenti di un tensore in seguito al cambio di base può trovare molte altre applicazioni: un'altra applicazione “da strutturista” un po' più avanzato, consiste la determinazione delle caratteristiche meccaniche di elementi strutturali in materiale in composito, partendo dalle proprietà delle lamine che vengono usate per costruirlo. Ogni lamina ha caratteristiche meccaniche facilmente descrivibili nel proprio sistema di riferimento, la cui orientazione è determinata dalla direzione delle fibre, ad esempio, e che in generale è diversa da lamina a lamina. Le caratteristiche meccaniche del elemento strutturale vengono infine espresse in un suo sistema di riferimento globale, definito ad esempio dalla geometria del componente.

Queste poche righe non hanno pretese di completezza, ma vogliono attirare l'interesse su quanto abbiamo visto nelle ultime ore, anche da parte di quelli che diventeranno “strutturisti” ma non solo.

⁴ Gli autovettori di un tensore del secondo ordine \mathbb{A} possono essere definiti come quei vettori \mathbf{v} per i quali vale $\mathbb{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ (autovettori “destri”) oppure $\mathbf{v} \cdot \mathbb{A} = \lambda \mathbf{v}$ (autovettori “sinistri”). Si ricorda che gli autovettori destri e sinistri coincidono nel caso in cui il tensore sia simmetrico. Infatti le due espressioni

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbb{A} &= v_i \mathbf{b}^i \cdot A^{jk} \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}_k = v_i A^{ik} \mathbf{b}_k \\ \mathbb{A} \cdot \mathbf{v} &= A^{ij} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j \cdot v_k \mathbf{b}^k = A^{ij} v_j \mathbf{b}_i = A^{ki} v_i \mathbf{b}_k, \end{aligned} \quad (2.61)$$

coincidono quando $A^{ij} = A^{ji}$. Nell'ultimo passaggio sono state modificate le lettere che identificano gli indici ripetuti per rendere più evidente il confronto tra le due espressioni. Si ricorda inoltre che gli autovettori (opportunamente normalizzati) di un tensore simmetrico formano una base ortonormale $\{\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(N)}\}$, che può essere utilizzata per scrivere il tensore tramite la sua decomposizione spettrale

$$\mathbb{A} = \lambda^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \otimes \mathbf{v}^{(1)} + \dots + \lambda^{(N)} \mathbf{v}^{(N)} \otimes \mathbf{v}^{(N)}, \quad (2.62)$$

essendo $\lambda^{(i)}$ gli autovalori associati agli autovettori. Per convincersi della validità di tale decomposizione, è sufficiente moltiplicare con il “prodotto punto” il tensore \mathbb{A} per uno dei vettori della base. Moltiplicandolo ad esempio per $\mathbf{v}^{(i)}$ e sfruttando l'ortogonalità dei vettori della base, si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \cdot \mathbf{v}^{(i)} &= \sum_{k=1}^N (\lambda^{(k)} \mathbf{v}^{(k)} \otimes \mathbf{v}^{(k)}) \cdot \mathbf{v}^{(i)} = \\ &= \sum_{k=1}^N (\lambda^{(k)} \mathbf{v}^{(k)} \delta^{ik}) = \lambda^{(i)} \mathbf{v}^{(i)}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

2.2.8 Cosa non è stato detto

Molte cose non sono state dette. Innanzitutto si è scelto di limitarsi alla rappresentazione di vettori e tensori utilizzando basi ortonormali dello spazio. Inoltre, è stato scelto di trattare i tensori su spazi forniti di prodotto interno e di non introdurre concetti di *algebra esterna*, che permetterebbero di generalizzare l'operazione di prodotto vettoriale e l'operatore rotore incontrato nel calcolo vettoriale e ricavare il teorema di Stokes,

$$\oint_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega, \quad (2.64)$$

di cui viene solo riportata l'espressione matematica senza fornire alcun dettaglio. Il teorema del rotore e della divergenza sono casi particolari del teorema di Stokes, nel cui enunciato compaiono i concetti di forma differenziale ω e di derivata esterna $d\omega$.

Il materiale fornito rappresenta un compromesso tra il vuoto totale sul calcolo tensoriale (del quale l'affermazione “un tensore è una matrice” è la regina indiscussa) e un corso intero dedicato all'algebra e al calcolo tensoriale. Lo scopo dei cenni veloci ad argomenti non trattati qui è quello di “mettere una pulce nell'orecchio” di chi legge, di mettere a conoscenza il lettore dell'esistenza di alcuni argomenti che permettono di generalizzare le operazioni vettoriali presentate nei primi corsi di Algebra e di spiegare in maniera rigorosa alcuni comportamenti strani o inaspettati (come quelli che si possono osservare con il prodotto vettoriale e il rotore), senza scoperchiare dei vasi di Pandora che porterebbero questa introduzione lontana dal suo scopo.

Per i più curiosi, viene messo a disposizione del materiale un più completo, che introduce concetti che non sono stati presentati qui e che generalizzano la trattazione, ma che la renderebbero inadatta ad essere svolta in poche ore per un pubblico formato da studenti del terzo anno di ingegneria, senza aggiungere particolari fondamentali per un utilizzo “cosciente” dei tensori durante questo corso e in quelli successivi.

Riferimenti.

Il testo di Bowen e Wang, *Introduction to vectors and tensors. Linear and multilinear algebra* può essere considerato un valido e completo riferimento, anche per il futuro. La lettura di questo testo non è sempre agevole e contiene sicuramente molto più di quanto sia indispensabile presentare in una prima e breve introduzione ai tensori, come è questa. Oltre alla sua qualità, è da apprezzare la disponibilità in rete dei due volumi, seguendo i seguenti collegamenti (sperando che siano ancora validi):

Vol. 1: [Linear and Multilinear Algebra](#)

Vol. 2: [Vector and Tensor Analysis](#)

Cosa è utile ripassare.

Questa può essere una buona occasione per ripassare alcuni concetti di algebra lineare, tra i quali quello di spazio vettoriale (definizione e proprietà, dimensione e base, ...), prodotto interno, linearità (e la differenza con l'essere “affine”), alla luce di quanto visto in questi paragrafi introduttivi sui tensori e del fatto che le equazioni della fisica hanno carattere tensoriale.

3. Introduzione al calcolo tensoriale

*Le origini dell'approccio scientifico alla fisica risalgono
alla comprensione del calcolo differenziale
(Bernhard Riemann)*

3.1	Calcolo vettoriale e tensoriale in coordinate curvilinee	47
3.1.1	Tensore metrico.	49
3.1.2	Simboli di Christoffel.	51
3.2	Operatori differenziali	52
3.2.1	Gradiente	52
3.2.2	Divergenza	55
3.2.3	Operatore di advezione	57
3.2.4	Rotore	58
3.2.5	Laplaciano	59
3.3	Coordinate curvilinee ortogonali	59
3.3.1	Esempio: coordinate cilindriche	60

3.1 Calcolo vettoriale e tensoriale in coordinate curvilinee

Dopo aver introdotto alcuni concetti di algebra tensoriale nella sezione precedente, viene fatta una breve introduzione al calcolo tensoriale. In questa sezione vengono introdotte alcune definizioni e operatori differenziali necessari per descrivere campi (funzioni dipendenti dallo spazio) tensoriali. Si ricavano le espressioni in coordinate degli operatori rispetto a sistemi di coordinate curvilinee generali. Si introducono poi i sistemi di coordinate curvilinee ortogonali. Infine, si scrivono le espressioni di alcuni operatori differenziali e, come utile esempio per un corso di fluidodinamica, le equazioni di Navier-Stokes in un

sistema di coordinate cilindriche. Per aiutare la comprensione dell'argomento, i concetti generali verranno specializzati ad alcuni sistemi coordinate particolari, come le coordinate cartesiane o cilindriche.

Lavoriamo per semplicità in uno spazio tridimensionale, descritto completamente dalle tre coordinate $\{q^1, q^2, q^3\}$: il vettore posizione \mathbf{x} sarà quindi una funzione delle tre coordinate q^i :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(q^1, q^2, q^3) \quad (3.1)$$

Si suppone che la trasformazione di coordinate da \mathbf{x} a $\{q^1, q^2, q^3\}$ sia biunivoca. Vengono fornite ora le definizioni di curve coordinate, superfici coordinate e base naturale indotta dalla parametrizzazione dello spazio.

Definizione 3.1.1 — Curve coordinate. Le curve coordinate passanti per il punto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(q_0^1, q_0^2, q_0^3)$ sono le curve ottenute al variare di una coordinata, tenendo fisse le altre due

$$\begin{cases} \ell_1 : & \mathbf{x} = \mathbf{x}(q^1, q_0^2, q_0^3) \\ \ell_2 : & \mathbf{x} = \mathbf{x}(q_0^1, q^2, q_0^3) \\ \ell_3 : & \mathbf{x} = \mathbf{x}(q_0^1, q_0^2, q^3). \end{cases} \quad (3.2)$$

Definizione 3.1.2 — Superfici coordinate. Le superfici coordinate passanti per il punto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(q_0^1, q_0^2, q_0^3)$ sono le superficie descritte da due coordinate, tenendo fissa l'altra

$$\begin{cases} S_1 : & \mathbf{x} = \mathbf{x}(q_0^1, q^2, q^3) \\ S_2 : & \mathbf{x} = \mathbf{x}(q^1, q_0^2, q^3) \\ S_3 : & \mathbf{x} = \mathbf{x}(q^1, q^2, q_0^3). \end{cases} \quad (3.3)$$

Definizione 3.1.3 — Base naturale. Per ogni punto dello spazio tridimensionale $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q^1, q^2, q^3)$, viene definita la base naturale $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1:3}$, i cui elementi sono le derivate parziali del vettore posizione rispetto alle coordinate q^i ,

$$\mathbf{b}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i}. \quad (3.4)$$

La base reciproca $\{\mathbf{b}^i\}_{i=1:3}$ della base naturale viene definita tramite la definizione (??), cioè $\mathbf{b}^i \cdot \mathbf{b}_j = \delta_j^i$.

■ **Esempio 3.1 — Coordinate cartesiane.** La posizione di un punto nello spazio tridimensionale viene definito dalle tre componenti $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$ nel sistema di coordinate cartesiane. Le curve coordinate sono rette parallele agli assi, mentre le superfici coordinate sono dei piani perpendicolari agli assi. I vettori della base naturale sono i tre versori $\hat{\mathbf{b}}_x = \hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{b}_y = \hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{b}_z = \hat{\mathbf{z}}$ allineati con le linee coordinate, costanti in tutto lo spazio. ■

■ **Esempio 3.2 — Coordinate cilindriche.** La posizione di un punto nello spazio tridimensionale viene definito dalle tre componenti $(q^1, q^2, q^3) = (r, \theta, z)$ nel sistema di coordinate cilindriche, come raffigurato in figura 3.1. Le curve coordinate $\mathbf{x}(r_0, \theta_0, z)$ sono delle linee parallele all'asse z , le curve coordinate $\mathbf{x}(r_0, \theta, z_0)$ sono delle circonferenze con centro sull'asse z , mentre le curve coordinate $\mathbf{x}(r, \theta_0, z_0)$ sono dei raggi (semirette) perpendicolari all'asse z . Le superfici coordinate $S_3 = S_z$ sono dei piani perpendicolari all'asse z , le superfici coordinate $S_2 = S_\theta$ sono dei cilindri con asse coincidente con l'asse z , le superfici coordinate $S_1 = S_r$ sono dei semipiani delimitati dall'asse z , come raffigurato in figura 3.1(a). I vettori della base naturale non sono costanti in spazio. É possibile calcolarli,

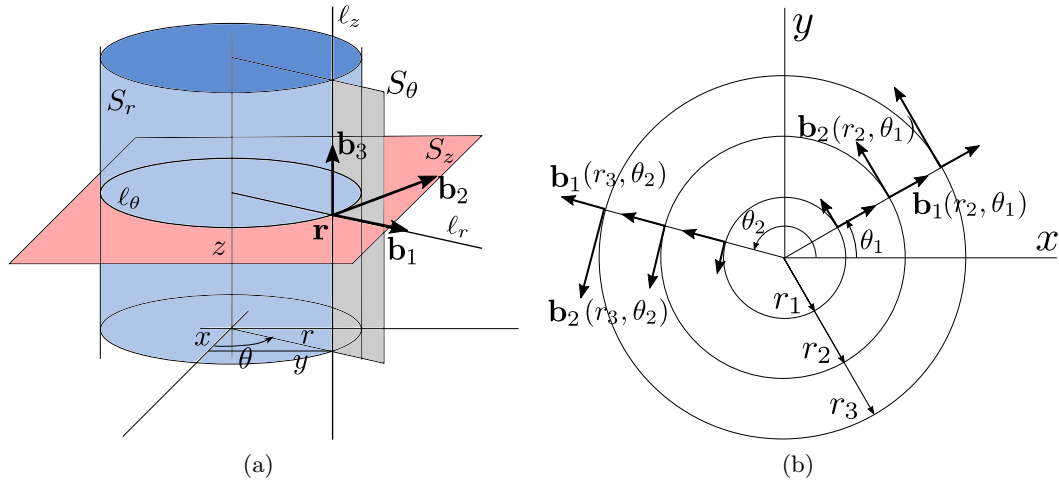


Figura 3.1: Sistema di coordinate cilindriche. (a) Curve e superfici coordinate per un sistema di coordinate cilindriche. (b) Rappresentazione bidimensionale della base naturale - coordinate polari.

esprimendo il vettore posizione in coordinate cartesiane e in coordinate cilindriche. In particolare $\mathbf{x} = x\mathbf{b}_x + y\mathbf{b}_y + z\mathbf{b}_z$, con

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z. \end{cases} \quad (3.5)$$

I vettori della base naturale possono essere calcolati inserendo queste espressioni nella formula che descrive la posizione nella base cartesiana, costante in spazio e quindi con derivate spaziali nulle. In figura 3.1(b) sono rappresentati i vettori della base naturale

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_r = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = \cos \theta \mathbf{b}_x + \sin \theta \mathbf{b}_y = \hat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_\theta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = -r \sin \theta \mathbf{b}_x + r \cos \theta \mathbf{b}_y = r \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_z = \hat{\mathbf{z}}, \end{cases} \quad (3.6)$$

avendo introdotto i versori $\hat{\mathbf{r}} = \cos \theta \mathbf{b}_x + \sin \theta \mathbf{b}_y$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin \theta \mathbf{b}_x + \cos \theta \mathbf{b}_y$, comunemente utilizzati per descrivere i problemi in geometria cilindrica.

R I vettori della base naturale indotta dalle coordinate cilindriche **non** è costante nello spazio, è ortogonale (come vedremo nella prossima sezione) ma **non** è ortonormale e non ha dimensioni fisiche omogenee: mentre i vettori \mathbf{b}_r e \mathbf{b}_z hanno modulo 1, il vettore \mathbf{b}_θ ha modulo r ed ha le dimensioni fisiche di una lunghezza.

■

3.1.1 Tensore metrico.

Definizione 3.1.4 — Tensore metrico. Il tensore metrico è un tensore del secondo ordine (o meglio un campo tensoriale, poiché in generale è funzione della coordinata spaziale) definito come il tensore le cui componenti covarianti g_{ik} e contravarianti g^{ik} sono rispettivamente i prodotti scalari dei vettori \mathbf{b}_i della base naturale e dei vettori della base reciproca \mathbf{b}^i . Il tensore metrico \mathbf{g} viene scritto nella base prodotto naturale e nella sua reciproca come

$$\mathbf{g} = g_{ij} \mathbf{b}^i \otimes \mathbf{b}^j = g^{ij} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j, \quad (3.7)$$

con le componenti definite come

$$g_{ij} = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j, \quad g^{ij} = \mathbf{b}^i \cdot \mathbf{b}^j. \quad (3.8)$$

R Il tensore metrico è simmetrico.

Il tensore metrico caratterizza la geometria dello spazio (o meglio della varietà $\mathbf{x}(q^i)$ descritta dai parametri q^i). I concetti quali distanza, angolo, lunghezza di una curva possono essere espressi in funzione del tensore metrico \mathbf{g} . Ad esempio, è possibile scrivere la lunghezza ds dell'elemento elementare $d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i} dq^i = \mathbf{b}_i dq^i$ come

$$ds^2 = |d\mathbf{x}|^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{b}_i dq^i) \cdot (\mathbf{b}_j dq^j) = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j dq^i dq^j = g_{ij} dq^i dq^j, \quad (3.9)$$

dove, come sempre, sono sottintese le sommatorie sugli indici ripetuti. Come già visto in precedenza, il tensore metrico risulta utile nel passaggio dalla componenti contravarianti a quelle covarianti e viceversa, consentendo di esprimere un vettore della base $\{\mathbf{b}_k\}$ nella base $\{\mathbf{b}^k\}$ e viceversa tramite le (2.6)

$$\mathbf{b}_i = g_{ik} \mathbf{b}^k, \quad \mathbf{b}^i = g^{ik} \mathbf{b}_k, \quad (3.10)$$

con $g_{ij} = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j$ e $g^{ij} = \mathbf{b}^i \cdot \mathbf{b}^j$. In maniera analoga è possibile passare dalle coordinate contravarianti a quelle covarianti e viceversa tramite le (2.6). Ad esempio, per un vettore $\mathbf{v} = v^i \mathbf{b}_i = v_i \mathbf{b}^i$,

$$v^i = g^{ik} v_k, \quad v_i = g_{ik} v^k. \quad (3.11)$$

Sempre secondo le (2.6), per un tensore del secondo ordine $\mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j = S^i_j \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}^j = S_i^j \mathbf{b}^i \otimes \mathbf{b}_j = S_{ij} \mathbf{b}^i \otimes \mathbf{b}^j$ si ottiene

$$S^{ij} = g^{jk} S^i_k = g^{ik} S_k^j = g^{ik} g^{jl} S_{kl}. \quad (3.12)$$

■ **Esempio 3.3 — Coordinate cartesiane.** Poiché i vettori della base naturale sono costanti e ortonormali in tutto lo spazio, dalla definizione (3.8) segue che il tensore metrico g_{ik} è uguale all'identità. La lunghezza dell'elemento di linea infinitesimo è uguale a

$$ds^2 = |d\mathbf{x}|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (3.13)$$

■

■ **Esempio 3.4 — Coordinate cilindriche.** Svolgendo i prodotti scalari tra i vettori della base del sistema di coordinate cilindriche, le componenti g_{ik} del tensore metrico possono essere raccolte nella matrice.

$$\begin{bmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} & g_{rz} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta z} \\ g_{zr} & g_{z\theta} & g_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Il tensore metrico è diagonale, poichè la base è ortogonale. Le componenti covarianti g^{ik} del tensore metrico si ottengono dall'inversione dei simboli g_{ik}

$$\begin{bmatrix} g^{rr} & g^{r\theta} & g^{rz} \\ g^{\theta r} & g^{\theta\theta} & g^{\theta z} \\ g^{zr} & g^{z\theta} & g^{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

La base reciproca è $\mathbf{b}^r = \mathbf{b}_r$, $\mathbf{b}^\theta = r^{-2}\mathbf{b}_\theta = r^{-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\mathbf{b}^z = \mathbf{b}_z$. La lunghezza dell'elemento di linea infinitesimo è uguale a

$$ds^2 = |d\mathbf{x}|^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2. \quad (3.16)$$

■

3.1.2 Simboli di Christoffel.

I vettori della base naturale \mathbf{b}_i sono definiti come le derivate parziali del vettore posizione \mathbf{x} rispetto alle coordinate q^i utilizzate per descrivere lo spazio. In generale, quindi anche i vettori della base naturale non sono costanti nello spazio, ma sono funzioni delle coordinate q^i . Se i vettori della base variano dello spazio, le loro derivate rispetto ai parametri q^i non sono nulle e possono essere espresse nella base naturale e nella base reciproca come

$$\frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial q^j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{b}_k, \quad (3.17)$$

dove stati introdotti i simboli di Christoffel di secondo tipo Γ_{ij}^k . In particolare, dalla (3.17), i simboli di Christoffel di secondo tipo Γ_{ij}^k possono essere definiti come la k -esima componente contravariante della derivata $\partial \mathbf{b}_i / \partial q^j$. Sfruttando la definizione di base reciproca, è possibile calcolare i simboli di Christoffel dalle (3.17) come

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial q^j} \cdot \mathbf{b}^k. \quad (3.18)$$

Essendo le componenti delle derivate prime dei vettori della base naturale, a sua volta derivate prime del vettore posizione, i simboli di Christoffel rappresentano le componenti delle derivate seconde del vettore posizione \mathbf{x} rispetto alle coordinate q^i ,

$$\Gamma_{ji}^k \mathbf{b}_k = \frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial q^i} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q^j \partial q^i} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q^i \partial q^j} = \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial q^j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{b}_k, \quad (3.19)$$

dove l'uguaglianza delle derivate seconde miste è verificata sotto le ipotesi del *teorema di Schwarz*. Uguagliando le componenti alle estremità dell'uguaglianza precedente, si ottengono le condizioni di simmetria per i simboli di Christoffel,

$$\Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k. \quad (3.20)$$



I simboli di Christoffel **non** costituiscono le componenti di un tensore, poichè non seguono la (2.32) nel cambio di sistemi di coordinate.

■ **Esempio 3.5 — Coordinate cartesiane.** Poichè i vettori della base naturale sono costanti in tutto lo spazio, i simboli di Christoffel per il sistema di coordinate cartesiane sono identicamente nulli. ■

■ **Esempio 3.6 — Coordinate cilindriche.** Vengono calcolati i simboli di Christoffel di secondo tipo, che verranno poi utilizzati in seguito). Da un calcolo diretto dei simboli di Christoffel di secondo tipo, si ottiene che gli unici simboli di Christoffel diversi da zero sono

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = r^{-1}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r, \quad (3.21)$$

dove l'indice 1 è associato alla coordinata r , l'indice 2 alla coordinata θ . Infatti

$$\begin{aligned} \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 &= \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial q^2} \cdot \mathbf{b}^2 = \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} \cdot (r^{-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot (r^{-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}) = r^{-1} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial q^2} \cdot \mathbf{b}^1 = \frac{\partial (r \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \theta} \cdot \hat{\mathbf{r}} = -r \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = -r. \end{aligned} \quad (3.22)$$

■

3.2 Operatori differenziali

In questo paragrafo vengono definiti alcuni operatori differenziali sui campi tensoriali, cioè tensori che sono funzioni dello spazio. Un operatore è una funzione che prende come argomento l'oggetto al quale viene applicato, per restituirne un altro. In termini generali, un operatore $P : U \rightarrow V$, prende un elemento di U e ne restituisce uno di V ,

$$\mathbf{v} = P(\mathbf{u}), \quad (3.23)$$

con $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{v} \in V$. Per ottenere un vettore di $\mathbf{v} \in V$, l'operatore P deve avere come argomento (deve essere applicato a) un elemento $\mathbf{u} \in U$. Se P è un operatore lineare spesso si possono omettere le parentesi e indicare semplicemente $\mathbf{v} = P\mathbf{u}$. L'ordine di un operatore coincide con il massimo ordine delle derivate (in questo caso spaziali) contenute nella definizione dell'operatore. Inizialmente vengono introdotti gli operatori di primo ordine che non richiedono l'introduzione di prodotti esterni (parenti dei prodotti vettoriali): gradiente, divergenza e operatore di advezione. Viene poi introdotto l'operatore di rotore di un campo vettoriale, limitandosi a sistemi di coordinate cartesiane. Infine viene introdotto il laplaciano, un operatore del secondo ordine definito come la divergenza del gradiente.

R Diversi autori usano convenzioni diverse per la definizione degli operatori differenziali, come ad esempio la divergenza di un tensore di secondo ordine. Nel caso di tensori simmetrici (come sono i tensori degli sforzi per materiali non polari), le due diverse definizioni di divergenza di un tensore portano allo stesso risultato, grazie alla simmetria del tensore.

3.2.1 Gradiente

L'operatore di gradiente è connesso alla derivata direzionale di un campo tensoriale. L'operatore di gradiente alza di 1 l'ordine del tensore al quale viene applicato.

Operatore 3.2.1 — Gradiente. In particolare, nel punto \mathbf{x} la derivata direzionale di un tensore \mathbf{T} in una qualsiasi direzione \mathbf{c} di un campo tensoriale è il prodotto scalare tra il gradiente del tensore e il vettore \mathbf{c} ,

$$\mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{d\alpha} \mathbf{T}(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{c}) \right|_{\alpha=0}. \quad (3.24)$$

Il gradiente del tensore \mathbf{T} può essere scritto sfruttando la definizione della base naturale e della sua reciproca come

$$\nabla \mathbf{T} = \mathbf{b}^i \otimes \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial q^i}, \quad (3.25)$$

dove i vettori \mathbf{b}^i sono quelli della base reciproca della base naturale e, come al solito, è sottintesa la sommatoria sugli indici ripetuti. Il gradiente di un tensore di ordine r ha ordine $r + 1$. Per esempio, il gradiente di un campo scalare f è il vettore ∇f

$$\nabla f = \mathbf{b}^i \frac{\partial f}{\partial q^i} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \mathbf{b}^i = \frac{\partial f}{\partial q^k} g^{ik} \mathbf{b}_i, \quad (3.26)$$

avendo utilizzato la relazione $\mathbf{b}^i = g^{ik} \mathbf{b}_k$ tra i vettori di una base e quelli della sua reciproca (e avendo “invertito” gli indici ripetuti, che vengono saturati dalle sommatorie). Il gradiente di un campo vettoriale è il campo tensoriale del secondo ordine che viene scritto nella base naturale come

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{b}^i \otimes \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^i} = \left[\frac{\partial v^i}{\partial q^k} + \Gamma_{lk}^i v^l \right] \mathbf{b}^k \otimes \mathbf{b}_i, \quad (3.27)$$

dove sono sottintese le sommatorie sugli indici ripetuti.

Esercizio .3.1 — Gradiente di un campo vettoriale. Ricavare l'espressione (3.27) del gradiente di un campo scalare.

Soluzione. É possibile ricavare questa espressione tramite calcolo diretto delle derivate parziali di \mathbf{v} , ricordandosi la definizione dei simboli di Christoffel e, alla fine, ricordandosi che è possibile scambiare gli indici che vengono saturati da sommatoria,

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= \mathbf{b}^k \otimes \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^k} = \mathbf{b}^k \otimes \frac{\partial (v^i \mathbf{b}_i)}{\partial q^k} = \\ &= \mathbf{b}^k \otimes \left[\frac{\partial v^i}{\partial q^k} \mathbf{b}_i + v^i \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial q^k} \right] = \mathbf{b}^k \otimes \left[\frac{\partial v^i}{\partial q^k} \mathbf{b}_i + v^i \Gamma_{ik}^l \mathbf{b}_l \right] = \\ &= \left[\frac{\partial v^i}{\partial q^k} + v^l \Gamma_{lk}^i \right] \mathbf{b}^k \otimes \mathbf{b}_i = \nabla_k v^i \mathbf{b}^k \otimes \mathbf{b}_i, \end{aligned} \quad (3.28)$$

dove è stata introdotta la derivata covariante $\nabla_k v^i$ della componente v^i del vettore, rispetto alla coordinata q^k . ■

Il gradiente di un campo tensoriale del secondo ordine \mathbf{S} è il campo tensoriale del terzo ordine

$$\nabla \mathbf{S} = \left[\frac{\partial S^{ij}}{\partial q^k} + \Gamma_{kl}^i S^{lj} + \Gamma_{kl}^j S^{il} \right] \mathbf{b}^k \otimes \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j =: \nabla_k S^{ij} \mathbf{b}^k \otimes \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j, \quad (3.29)$$

dove è stata introdotta la definizione di **derivata covariante** $\nabla_k S^{ij}$ della componente S^{ij} rispetto alla coordinata q^k , come generalizzazione delle derivate parziali. Un campo tensoriale è costante nello spazio se sono nulle tutte le sue derivate covarianti.

Esercizio .3.2 — Gradiente di un campo tensoriale del secondo ordine. Aiutandosi con la dimostrazione data per il gradiente di un campo vettoriale, dimostrare che il gradiente di un campo tensoriale del secondo ordine ha l'espressione (3.29) utilizzando la base

naturale e la sua reciproca. ■

■ **Esempio 3.7 — Coordinate cartesiane.** Poichè la base naturale e la sua reciproca coincidono con la base ortonormale $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ e tutti i simboli di Christoffel per le coordinate cartesiane sono nulli, dalla (3.26) si ottiene la forma già nota del gradiente di un campo scalare f

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}. \quad (3.30)$$

Il gradiente di un vettore $\mathbf{v} = v^1 \mathbf{b}_1 + v^2 \mathbf{b}_2 + v^3 \mathbf{b}_3 = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$ è

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} = & \frac{\partial v_x}{\partial x} \hat{x} \otimes \hat{x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \hat{x} \otimes \hat{y} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \hat{x} \otimes \hat{z} + \\ & + \frac{\partial v_x}{\partial y} \hat{y} \otimes \hat{x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \hat{y} \otimes \hat{y} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \hat{y} \otimes \hat{z} + \\ & + \frac{\partial v_x}{\partial z} \hat{z} \otimes \hat{x} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \hat{z} \otimes \hat{y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \hat{z} \otimes \hat{z}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

le cui componenti possono essere raccolte nella matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

avendo associato l'indice di riga al primo vettore della base prodotto e l'indice di colonna al secondo vettore della base prodotto. ■

■ **Esempio 3.8 — Coordinate cilindriche.** Il gradiente in coordinate cilindriche di un campo scalare f può essere scritto nella base ortonormale $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z}\}$ come

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}, \quad (3.33)$$

avendo utilizzato la (3.26) ed essendosi ricordati che $\hat{\mathbf{b}}_2 = \hat{\theta}/r$. Da quest'ultima relazione tra i vettori delle basi naturale e ortonormale si ottiene il legame $v^2 = r v_\theta$ tra le componenti del vettore $\mathbf{v} = v^1 \hat{\mathbf{b}}_1 + v^2 \hat{\mathbf{b}}_2 + v^3 \hat{\mathbf{b}}_3 = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_z \hat{z}$ espresse in queste basi. Utilizzando queste relazioni nella formula (3.27) del gradiente di un campo vettoriale, è possibile scrivere

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} = & \left[\frac{\partial v^i}{\partial q^k} + \Gamma_{lk}^i v^l \right] \mathbf{b}^k \otimes \mathbf{b}_i = \\ = & \frac{\partial v^1}{\partial q^1} \mathbf{b}^1 \otimes \mathbf{b}_1 + \left(\frac{\partial v^1}{\partial q^2} + \Gamma_{22}^1 v^2 \right) \mathbf{b}^2 \otimes \mathbf{b}_1 + \frac{\partial v^1}{\partial q^3} \mathbf{b}^3 \otimes \mathbf{b}_1 + \\ & + \left(\frac{\partial v^2}{\partial q^1} + \Gamma_{21}^2 v^2 \right) \mathbf{b}^1 \otimes \mathbf{b}_2 + \left(\frac{\partial v^2}{\partial q^2} + \Gamma_{12}^2 v^1 \right) \mathbf{b}^2 \otimes \mathbf{b}_2 + \frac{\partial v^2}{\partial q^3} \mathbf{b}^3 \otimes \mathbf{b}_2 + \\ & + \frac{\partial v^3}{\partial q^1} \mathbf{b}^1 \otimes \mathbf{b}_3 + \frac{\partial v^3}{\partial q^2} \mathbf{b}^2 \otimes \mathbf{b}_3 + \frac{\partial v^3}{\partial q^3} \mathbf{b}^3 \otimes \mathbf{b}_3 = \\ = & \frac{\partial v_r}{\partial r} \hat{r} \otimes \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \hat{\theta} \otimes \hat{r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \hat{z} \otimes \hat{r} + \\ & + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \hat{r} \otimes \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \hat{\theta} \otimes \hat{\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \hat{z} \otimes \hat{\theta} + \\ & + \frac{\partial v_z}{\partial r} \hat{r} \otimes \hat{z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \hat{\theta} \otimes \hat{z} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \hat{z} \otimes \hat{z}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

avendo utilizzato i valori dei simboli di Christoffel ricavati in precedenza. Si noti come l'annullarsi delle derivate parziali delle componenti del vettore non implichi l'uniformità (costanza in spazio e quindi gradiente nullo) del campo vettoriale: devono annullarsi le derivate covarianti poichè un campo vettoriale uniforme espresso in coordinate cilindriche (come in ogni altro sistema di coordinate diverso da quello cartesiano) non ha componenti costanti in spazio. ■

3.2.2 Divergenza

L'operatore divergenza è associato all'idea di densità di flusso¹ e può essere definito come contrazione del gradiente del campo al quale viene applicata. L'operatore di divergenza quindi abbassa di 1 (il gradiente alza di 1 l'ordine, la contrazione di due indici lo abbassa di 2) l'ordine del campo tensoriale al quale è applicata. Non può quindi essere applicata a un campo scalare (tensore di ordine 0).

Operatore 3.2.2 — Divergenza. La divergenza di un campo tensoriale è definito dalla contrazione degli ultimi due indici del gradiente del campo tensoriale stesso.

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = C_2^1(\nabla \mathbf{T}) . \quad (3.35)$$

La divergenza di un campo vettoriale espresso nella base naturale è

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v^i}{\partial q^i} + \Gamma_{il}^i v^l = \nabla_i v^i . \quad (3.36)$$

La divergenza di un tensore \mathbf{S} del secondo ordine è il campo vettoriale $\nabla \cdot \mathbf{S}$ che viene scritto nella base naturale come

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \left[\frac{\partial S^{ij}}{\partial q^i} + \Gamma_{il}^i S^{lj} + \Gamma_{il}^j S^{il} \right] \mathbf{b}_j . \quad (3.37)$$

Questo operatore può essere espresso tramite la derivata covariante come

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \nabla_i S^{ij} \mathbf{b}^j , \quad (3.38)$$

e può essere pensato come il prodotto “dot” tra il “vettore formale” $\nabla = \nabla_k \mathbf{b}^k$ e il tensore $S^{ij} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j$,

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = (\nabla_k \mathbf{b}^k) \cdot (S^{ij} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j) = \nabla_k S^{ij} \underbrace{\mathbf{b}^k \cdot \mathbf{b}_i}_{\delta_i^k} \otimes \mathbf{b}_j = \nabla_i S^{ij} \mathbf{b}_j . \quad (3.39)$$

Esercizio .3.3 Utilizzando la definizione di divergenza e l'espressione (3.27) del gradiente di un campo vettoriale, ricavare l'espressione (3.36) di un campo vettoriale. ■

Esercizio .3.4 Utilizzando la definizione di divergenza e l'espressione (3.29) del gradiente di un campo vettoriale, ricavare l'espressione (3.37) di un campo vettoriale. ■

■ **Esempio 3.9 — Coordinate cartesiane.** Poichè i simboli di Christoffel sono identicamente nulli e i vettori della base naturale coincidono con la terna ortonormale $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$ nei sistemi di coordinate cartesiane, dalla (3.36) si ottiene la forma già nota della divergenza di un campo vettoriale \mathbf{v}

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} . \quad (3.40)$$

¹Si può ricavare questa interpretazione dal teorema della divergenza.

■ **Esempio 3.10 — Coordinate cilindriche.** In coordinate cilindriche gli unici simboli di Christoffel non nulli sono $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = r^{-1}$, $\Gamma_{22}^1 = -r$. Utilizzando la (3.36), la divergenza di un campo vettoriale $\mathbf{v} = v^1 \hat{\mathbf{b}}_1 + v^2 \hat{\mathbf{b}}_2 + v^3 \hat{\mathbf{b}}_3 = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + v_z \hat{\mathbf{z}}$ viene scritta in coordinate cilindriche come

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v^1}{\partial q^1} + \frac{\partial v^2}{\partial q^2} + \Gamma_{12}^2 v^1 + \frac{\partial v^3}{\partial q^3} = \\ &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial (v_\theta/r)}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

■

R Utilizzando il lemma 1.1.3 e l'espressione del vettore sforzo (2.40) in componenti cartesiane (per le quali la base reciproca coincide con la base ortonormale naturale e le componenti contravarianti e covarianti coincidono con le variabili fisiche, vedere §3.3), è possibile trasformare il contributo degli sforzi di superficie \mathbf{t}_n in un integrale di volume,

$$\oint_S \mathbf{t}_n = \oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} = \oint_S n_i T_{ij} = \int_V \partial_i T_{ij} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (3.42)$$

avendo indicato la superficie chiusa del volume V con $S = \partial V$ e riconosciuto l'espressione in componenti cartesiane (per le quali le derivate covarianti coincidono con le derivate parziali) dell'operatore $\nabla \cdot$ applicato al tensore degli sforzi \mathbf{T} . Poiché il tensore degli sforzi per continui non polari è simmetrico, la confusione generata dalle due definizioni diverse di divergenza usate da alcuni autori è solo apparente quando applicata al tensore degli sforzi.

R Le equazioni vettoriali (o tensoriali) e le identità vettoriali (o tensoriali) possono essere scritte nel sistema di riferimento più conveniente. Durante il corso di Fluidodinamica si incontreranno alcune **identità vettoriali** utili all'elaborazione delle equazioni. Per chi volesse provare a dimostrarle, o dimostrarne almeno qualcuna, può usare le coordinate cartesiane, per le quali i simboli di Christoffel sono nulli e le derivate covarianti si riducono alle derivate parziali. **La validità di un'identità vettoriale non dipende dal sistema di riferimento in cui viene scritta.** Per fornire un primo esempio, si dimostra che

$$\nabla \cdot (a\mathbf{v}) = \nabla a \cdot \mathbf{v} + a \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (3.43)$$

dove a e \mathbf{v} sono rispettivamente un campo scalare e vettoriale definiti nello spazio \mathbb{R}^2 . Il campo vettoriale viene scritto in coordinate cartesiane come $\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}}$. Da un calcolo diretto, si ottiene

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (a\mathbf{v}) &= \frac{\partial (av_x)}{\partial x} + \frac{\partial (av_y)}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial a}{\partial x} v_x + a \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} v_y + a \frac{\partial v_y}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial a}{\partial x} v_x + \frac{\partial a}{\partial y} v_y + a \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \nabla a \cdot \mathbf{v} + a \nabla \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

3.2.3 Operatore di advezione

L'operatore di advezione comparirà nelle equazioni per rappresentare il trasporto del tensore \mathbf{T} al quale viene applicato, da parte di un "campo di velocità" \mathbf{u} . L'operatore advezione lascia inalterato l'ordine del tensore al quale è applicato.

Operatore 3.2.3 — Operatore di advezione. L'operatore di advezione $(\mathbf{u} \cdot \nabla)_-$, da parte del campo vettoriale \mathbf{u} , applicato a una quantità tensoriale \mathbf{T} può essere definito come il prodotto scalare del campo vettoriale \mathbf{u} con il tensore $\nabla \mathbf{T}$,

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{T} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{T}. \quad (3.45)$$

R L'operatore di advezione è diverso dall'operatore $\nabla \cdot$ applicato al vettore \mathbf{u} . Il prodotto scalare formale tra un vettore, \mathbf{u} , e un vettore formale, ∇ , non è commutativo. L'operatore $\nabla \cdot$ è la divergenza e, quando viene applicato a un campo vettoriale \mathbf{u} restituisce un campo scalare, $d = \nabla \cdot \mathbf{u}$. L'operatore $(\mathbf{u} \cdot \nabla)_-$, deve essere applicato a un campo vettoriale \mathbf{v} per restituire un vettore e non rimanere soltanto un operatore.

L'operatore di advezione applicato a un campo scalare f viene espresso nella base naturale come

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) f = \left(u^i \underbrace{\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}^k}_{\delta_i^k} \nabla_k \right) f = (u^i \nabla_i)_- f = u^i \nabla_i f. \quad (3.46)$$

L'operatore di advezione applicato a un campo vettoriale \mathbf{v} viene espresso nella base naturale come

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (u^i \mathbf{b}_i) \cdot (\nabla_j v^k \mathbf{b}^j \otimes \mathbf{b}_k) = u^i \nabla_j v^k \underbrace{\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}^j}_{\delta_i^j} \otimes \mathbf{b}_k = u^i \left[\frac{\partial v^k}{\partial q^j} + \Gamma_{jl}^k v^l \right] \mathbf{b}_k. \quad (3.47)$$

L'operatore di advezione applicato a un campo tensoriale del secondo ordine \mathbf{S} viene espresso nella base naturale come

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{S} = u^k \nabla_k S^{ij} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j = u^k \left[\frac{\partial S^{ij}}{\partial q^k} + \Gamma_{kl}^i S^{lj} + \Gamma_{kl}^j S^{il} \right] \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j \quad (3.48)$$

■ **Esempio 3.11 — Coordinate cartesiane.** L'espressione in coordinate cartesiane dell'operatore di advezione applicato al campo scalare f è

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) f = u_x \frac{\partial f}{\partial x} + u_y \frac{\partial f}{\partial y} + u_z \frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{u} \cdot \nabla f. \quad (3.49)$$

L'espressione in coordinate cartesiane dell'operatore di advezione applicato al campo vettoriale \mathbf{v} è

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\mathbf{u} \cdot \nabla v_x) \hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla v_y) \hat{\mathbf{y}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla v_z) \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.50)$$

avendo utilizzato il risultato dell'operatore di advezione applicato a un campo scalare, appena ricavata. ■

■ **Esempio 3.12 — Coordinate cilindriche.** L'espressione in coordinate cilindriche dell'operatore di advezione applicato a un campo vettoriale viene fornita in §3.3.1. ■

3.2.4 Rotore

Mentre è stato possibile introdurre gli operatori gradiente e divergenza utilizzando gli strumenti del calcolo tensoriale, sarebbe necessario introdurre dei concetti di *Algebra Esterna* per introdurre l'operazione di *prodotto esterno* della quale il rotore di un campo vettoriale è un caso particolare. Essendo questa una prima introduzione al calcolo tensoriale, la trattazione generale di questa operazione (e di molto altro, come ad esempio delle forme differenziali) va ben oltre lo scopo di questo documento. Per quanto ci serve, è sufficiente saper operare con il rotore su campi vettoriali e saper esprimere le componenti fisiche del rotore in sistemi di coordinate cartesiane (per le quali la base naturale e la sua base reciproca coincidono con la base ortonormale $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ e le componenti contravarianti e covarianti coincidono con quelle fisiche).

Operatore 3.2.4 — Rotore. Il rotore di un campo vettoriale \mathbf{v} può essere scritto in coordinate cartesiane tramite l'utilizzo dei simboli ϵ_{ijk} come

$$\text{rot} \mathbf{v} = \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{v}, \quad a_i = \epsilon_{ijk} \partial_j v_k, \quad (3.51)$$

dove la derivata parziale $\partial/\partial x_j$ rispetto alla coordinata x_j è stata indicata con ∂_j per brevità. I simboli ϵ_{ijk} assumono valore 1 se gli indici $\{ijk\}$ formano una permutazione pari di $\{1, 2, 3\}$, -1 se gli indici $\{ijk\}$ formano una permutazione dispari di $\{1, 2, 3\}$, 0 se ci sono degli indici ripetuti.

Identificando con 1 la coordinata x , con 2 la coordinata y , con 3 la coordinata z , i simboli ϵ_{ijk} diversi da zero sono

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} &= 1, & \epsilon_{132} &= -1 \\ \epsilon_{231} &= 1, & \epsilon_{213} &= -1 \\ \epsilon_{321} &= 1, & \epsilon_{312} &= -1. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Le componenti cartesiane del rotore $\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{v}$ sono

$$\begin{cases} a_x = \epsilon_{xyz} \partial_y v_z + \epsilon_{xzy} \partial_z v_y = \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ a_y = \epsilon_{yzx} \partial_z v_x + \epsilon_{yxz} \partial_x v_z = \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ a_z = \epsilon_{zxy} \partial_x v_y + \epsilon_{zyx} \partial_y v_x = \partial_x v_y - \partial_y v_x. \end{cases} \quad (3.53)$$

Si osservi che si è ottenuto lo stesso risultato che si ottiene usando il determinante simbolico

$$\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}. \quad (3.54)$$

R I simboli ϵ_{ijk} possono essere usati anche per esprimere il prodotto vettoriale tra due vettori, caso particolare del prodotto esterno tra tensori. Le componenti cartesiane del prodotto vettoriale $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ sono $a_i = \epsilon_{ijk} b_j c_k$.

R I simboli ϵ_{ijk} rappresentano le componenti dello pseudo-tensore di Levi-Civita, o di Ricci. Solo per curiosità, uno pseudo-tensore si trasforma come un tensore per cambi di coordinate che preservano l'orientazione dello spazio, mentre deve essere aggiunto un segno meno alle componenti se la trasformazione di coordinate cambia

l'orientazione dello spazio. Un esempio di trasformazione di coordinate che non conserva l'orientamento dello spazio è una riflessione rispetto a un piano. Ad esempio, date le coordinate cartesiane (x, y, z) , la riflessione rispetto al piano $x = 0$ è definita le nuove coordinate come $(q^1, q^2, q^3) = (-x, y, z)$. Se la base $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ è destrorsa (regola della mano destra), la base naturale nelle coordinate (q^1, q^2, q^3) è sinistrorsa: poiché l'orientazione dello spazio è invertita, bisogna prestare attenzione a svolgere un prodotto vettoriale in questo sistema di coordinate.

3.2.5 Laplaciano

L'operatore laplaciano è un operatore del secondo ordine, poiché contiene le derivate seconde come derivate di ordine massimo. Questo operatore compare nell'equazione della conduzione del calore e nelle equazioni di Navier–Stokes per rappresentare fenomeni diffusivi². Il laplaciano lascia inalterato l'ordine del tensore al quale è applicato.

Operatore 3.2.5 — Laplaciano. L'operatore laplaciano è un operatore del secondo ordine definito come la divergenza del gradiente,

$$\Delta T = \nabla \cdot (\nabla T) . \quad (3.55)$$

■ **Esempio 3.13 — Coordinate cartesiane.** Il laplaciano di un campo scalare f può essere espresso in un sistema di coordinate cartesiane come

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} . \quad (3.56)$$

■ **Esempio 3.14 — Coordinate cilindriche.** L'espressione in coordinate cilindriche del laplaciano applicato a campi scalari e vettoriali viene fornita in §3.3.1. ■

3.3 Coordinate curvilinee ortogonali

Le coordinate curvilinee ortogonali sono un caso particolare di coordinate curvilinee, caratterizzate dalla condizione di ortogonalità tra gli elementi della base $\{\mathbf{b}_k\}$. Gli elementi del tensore metrico fuori dalla diagonale (quelli con indici diversi) sono quindi nulli,

$$\begin{cases} \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_i = g_{ii} \\ \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = 0, \quad i \neq j. \end{cases} \quad (3.57)$$

Anche la trasformazione dagli elementi di $\{\mathbf{b}_i\}$ a quelli di $\{\mathbf{b}^k\}$ si semplifica, diventando

$$\mathbf{b}_i = g_{ii} \mathbf{b}^i, \quad \mathbf{b}^i = g^{ii} \mathbf{b}_i, \quad (3.58)$$

dove, in questo caso, non è sottintesa nessuna sommatoria sugli indici ripetuti. Essendo il tensore metrico diagonale, le componenti covarianti sono uguali all'inverso delle componenti contravarianti,

$$g^{ii} = g_{ii}^{-1}, \quad (3.59)$$

dove non è sottintesa nessuna sommatoria sugli indici ripetuti.

²Poiché queste PDE hanno come la derivata prima nel tempo come derivata temporale di ordine massimo. Non è così nell'equazione delle onde, ma non si può parlare di tutto qui. . .

Componenti contravarianti, covarianti e fisiche.

In generale, le componenti espresse nella base naturale non hanno le dimensioni fisiche della quantità tensoriale, poichè è possibile che gli elementi della base abbiano una dimensione fisica, come già osservato in precedenza per le coordinate cilindriche. Si pensi al caso di un sistema di coordinate polare $(q^1, q^2) = (r, \theta)$

$$\begin{aligned} [\mathbf{b}_1] &= \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \right] = \frac{L}{L} = 1 \\ [\mathbf{b}_2] &= \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \right] = \frac{L}{1} = L. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Mentre il primo elemento della base naturale non ha dimensione fisica, poichè è il risultato di un rapporto (derivata) tra lunghezze, il secondo elemento della base ha la dimensione di una lunghezza, poichè è la derivata di una lunghezza rispetto a un angolo (e l'angolo non ha dimensioni fisiche!).

Questa situazione è “scomoda”: è sensato desiderare una base formata da vettori privi di “unità fisiche”. Inoltre è lecito desiderare una base ortonormale. I due problemi vengono risolti definendo i versori della **base fisica** come

$$\hat{\mathbf{b}}_i = \frac{\mathbf{b}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (\text{no sum}). \quad (3.61)$$

È immediato verificare che questi vettori hanno lunghezza unitaria ricordando che $g_{ii} = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_i = |\mathbf{b}_i|^2$. Facendo lo stesso procedimento sulla base contravariante $\{\mathbf{b}^i\}$, si scopre che la base fisica contravariante coincide con quella covariante (e quindi non ha senso fare questa distinzione). Infatti

$$\hat{\mathbf{b}}^i = \frac{\mathbf{b}^i}{\sqrt{g^{ii}}} = \sqrt{g_{ii}} \mathbf{b}^i = \frac{\mathbf{b}_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \hat{\mathbf{b}}_i. \quad (3.62)$$

Poichè per coordinate curvilinee ortogonali le basi fisiche coincidono, anche le componenti fisiche ottenute partendo dalle componenti contravarianti coincidono con le componenti fisiche ottenute partendo dalle componenti covarianti: ha quindi senso parlare di componenti fisiche, senza fare riferimento a covarianza e contravarianza. Le **componenti fisiche** \hat{v}_k di un vettore \mathbf{v} vengono ricavate dalle componenti controvarianti e dalle componenti covarianti tramite la radice quadrata degli elementi non nulli della tensore metrico,

$$\mathbf{v} = \hat{v}_k \hat{\mathbf{b}}^k = \begin{cases} v^k \mathbf{b}_k = v^k \sqrt{g_{kk}} \hat{\mathbf{b}}_k \\ v_k \mathbf{b}^k = v_k \sqrt{g^{kk}} \hat{\mathbf{b}}^k \end{cases} \Rightarrow \hat{v}_k = \begin{cases} v^k \sqrt{g_{kk}} = v^k / \sqrt{g^{kk}} \\ v_k \sqrt{g^{kk}} = v_k / \sqrt{g_{kk}}. \end{cases} \quad (3.63)$$



Ora che sono state introdotte le componenti fisiche in sistemi di coordinate curvilinee ortogonali, **e solo ora**, è possibile confondere i pedici con gli apici nelle componenti dei tensori.

3.3.1 Esempio: coordinate cilindriche

Questo paragrafo viene dedicato alle coordinate cilindriche, un sistema di coordinate ortogonali. Vengono calcolate le espressioni delle coordinate degli operatori applicati a campi tensoriali che verranno incontrati nella scrittura delle equazioni di bilancio, come ad esempio le equazioni di Navier–Stokes per fluidi incomprimibili introdotte alla fine del paragrafo.

Lo spazio tridimensionale viene descritto in coordinate cilindriche dalle tre coordinate $(q^1, q^2, q^3) = (r, \theta, z)$. L'elemento di lunghezza ds ha la forma

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \quad (3.64)$$

Tensore metrico.

Il sistema di coordinate cilindriche è ortogonale. Il tensore metrico è diagonale $g_{ij} = 0$, $i \neq j$. In particolare, dall'elemento di lunghezza si ricavano le componenti del tensore metrico

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1, & g_{22} &= q^{(1)^2}, & g_{33} &= 1 & \text{(componenti covarianti)} \\ g^{11} &= 1, & g^{22} &= 1/q^{(1)^2}, & g^{33} &= 1 & \text{(componenti contravarianti)} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Vettore posizione e base naturale.

Rispetto alla base cartesiana $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, il vettore posizione \mathbf{x} è

$$\mathbf{x} = q^1 \cos(q^2) \hat{x} + q^1 \sin(q^2) \hat{y} + q^3 \hat{z} \quad (3.66)$$

I vettori della base naturale sono definiti $\mathbf{b}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i}$. La base reciproca si ottiene da $\mathbf{b}^i = g^{ik} \mathbf{b}_k$

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = \cos q^2 \hat{x} + \sin q^2 \hat{y} \\ \mathbf{b}_2 = -q^1 \sin q^2 \hat{x} + q^1 \cos q^2 \hat{y} \\ \mathbf{b}_3 = \hat{z} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{b}^1 = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}^2 = g^{22} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}^3 = \mathbf{b}_3 \end{cases} \quad (3.67)$$

Componenti contravarianti, covarianti e fisiche.

I vettori $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}^1, \mathbf{b}^3$ delle basi naturale e reciproca sono privi di dimensioni fisiche, mentre il vettore \mathbf{b}_2 ha la dimensione di una lunghezza (la coordinata q^1 coincide con il raggio r) e il vettore \mathbf{b}^2 ha la dimensione dell'inverso di una lunghezza. È quindi necessario definire la base fisica e le componenti fisiche di un vettore (in maniera analoga si definiranno le componenti fisiche di un tensore di ordine qualsiasi). Utilizzando il valore delle componenti del tensore metrico trovate e la (3.62), la base fisica nel sistema di coordinate cilindriche è

$$\begin{cases} \hat{r} = \hat{\mathbf{b}}^1 & = \mathbf{b}^1 & = \cos q^2 \hat{x} + \sin q^2 \hat{y} \\ \hat{\theta} = \hat{\mathbf{b}}^2 & = \mathbf{b}^2 / \sqrt{g^{22}} & = -\sin q^2 \hat{x} + \cos q^2 \hat{y} \\ \hat{z} = \hat{\mathbf{b}}^3 & = \mathbf{b}^3 & = \hat{z}. \end{cases} \quad (3.68)$$

Simboli di Christoffel.

Si può verificare tramite calcolo diretto che gli unici simboli di Christoffel del secondo tipo diversi da zero sono

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = 1/q^1, \quad \Gamma_{22}^1 = -q^1. \quad (3.69)$$

Gradiente di uno scalare.

Utilizzando la forma in componenti del gradiente, il legame tra componenti contravarianti, covarianti e fisiche, si può scrivere il gradiente di un campo scalare in componenti contravarianti, covarianti e fisiche.

$$\begin{aligned} \text{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{b}^1 + \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{b}^2 + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{b}^3 = \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{b}_1 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{b}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{b}_3 = \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Divergenza di un vettore.

Si riporta qui l'espressione della divergenza di un campo vettoriale, già calcolata in §3.2

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{\partial v^i}{\partial q^i} + \Gamma_{il}^i v^l = \\
 &= \frac{\partial v^1}{\partial q^1} + \frac{\partial v^2}{\partial q^2} + \frac{\partial v^3}{\partial q^3} + \Gamma_{12}^2 v^1 = \\
 &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} v_r \\
 &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

Gradiente di un vettore.

Si riporta qui l'espressione della gradiente di un campo vettoriale, già calcolata in §3.2

$$\begin{aligned}
 \nabla \mathbf{v} &= \left[\frac{\partial v^i}{\partial q^k} + \Gamma_{lk}^i v^l \right] \mathbf{b}^k \otimes \mathbf{b}_i = \\
 &= \frac{\partial v^1}{\partial q^1} \mathbf{b}^1 \otimes \mathbf{b}_1 + \left(\frac{\partial v^1}{\partial q^2} + \Gamma_{22}^1 v^2 \right) \mathbf{b}^2 \otimes \mathbf{b}_1 + \frac{\partial v^1}{\partial q^3} \mathbf{b}^3 \otimes \mathbf{b}_1 + \\
 &+ \left(\frac{\partial v^2}{\partial q^1} + \Gamma_{21}^2 v^1 \right) \mathbf{b}^1 \otimes \mathbf{b}_2 + \left(\frac{\partial v^2}{\partial q^2} + \Gamma_{12}^2 v^1 \right) \mathbf{b}^2 \otimes \mathbf{b}_2 + \frac{\partial v^2}{\partial q^3} \mathbf{b}^3 \otimes \mathbf{b}_2 + \\
 &+ \frac{\partial v^3}{\partial q^1} \mathbf{b}^1 \otimes \mathbf{b}_3 + \frac{\partial v^3}{\partial q^2} \mathbf{b}^2 \otimes \mathbf{b}_3 + \frac{\partial v^3}{\partial q^3} \mathbf{b}^3 \otimes \mathbf{b}_3 = \\
 &= \frac{\partial v_r}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \\
 &+ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + \\
 &+ \frac{\partial v_z}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{z}} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\mathbf{z}} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\mathbf{z}},
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Laplaciano.

La forma in componenti dell'operatore laplaciano di un vettore si ottiene partendo dalla definizione $\Delta \mathbf{v} = \text{div}(\text{grad } \mathbf{v})$. Il gradiente è stato appena scritto in componenti miste; per poter utilizzare la formula in componenti contravarianti di un tensore, è quindi necessario prima trasformare (tramite il tensore metrico) le componenti miste in contravarianti: viene scritto esplicitamente solo il termine g^{22} poiché è l'unico elemento diagonale diverso da uno e viene eseguito il calcolo solo per la prima componente, per motivi di sintesi

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{v} &= \mathbf{b}_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial q^1} \frac{\partial v^1}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^2} \left[g^{22} \left(\frac{\partial v^1}{\partial q^2} + \Gamma_{22}^1 v^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial q^3} \frac{\partial v^1}{\partial q^3} + g^{22} \Gamma_{22}^1 \left(\frac{\partial v^2}{\partial q^2} + \Gamma_{12}^2 v^1 \right) + \Gamma_{21}^2 \frac{\partial v^1}{\partial q^2} \right\} \\
 &+ \mathbf{b}_2 \{ \dots \} + \mathbf{b}_3 \{ \dots \} = \\
 &= \dots = \\
 &= \left[\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] \hat{\mathbf{r}} + \\
 &+ \left[\Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \\
 &+ [\Delta u_z] \hat{\mathbf{z}}
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

dove con Δf è stato indicato il laplaciano di uno scalare

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (3.74)$$

Termine advettivo.

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \left[\frac{\partial v^i}{\partial q^j} + \Gamma_{lj}^i v^l \right] a^j \mathbf{b}_i = \\ &= \left[a^k \frac{\partial v^1}{\partial q^k} + a^2 \Gamma_{22}^1 v^2 \right] \mathbf{b}_1 + \left[a^k \frac{\partial v^2}{\partial q^k} + a^1 \Gamma_{12}^1 v^2 + a^2 \Gamma_{21}^1 v^1 \right] \mathbf{b}_2 + \left[a^k \frac{\partial v^3}{\partial q^k} \right] \mathbf{b}_3 = \\ &= \dots = \\ &= \left[a_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + a_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{a_\theta v_\theta}{r} \right] \hat{\mathbf{r}} + \\ &\quad + \left[a_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + a_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{a_\theta v_r}{r} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \\ &\quad + \left[a_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + a_r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (3.75)$$

Equazioni di Navier-Stokes

Utilizzando l'espressione in coordinate cilindriche degli operatori ricavate nel paragrafo precedente, è ora possibile scrivere le equazioni di Navier-Stokes in coordinate cilindriche.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (3.76)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) - \frac{1}{Re} \left[\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial p}{\partial r} = f_r \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \left(u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) - \frac{1}{Re} \left[\Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = f_\theta \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + \left(u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - \frac{1}{Re} \Delta u_z + \frac{\partial p}{\partial z} = f_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (3.77)$$

dove si è usato il laplaciano di un campo scalare, definito in precedenza. Per inciso, si ricorda che le equazioni hanno bisogno di condizioni iniziali (poichè sono evolutive nel tempo), di condizioni al contorno (poichè compaiono derivate spaziali) e, quando necessario, di condizioni di compatibilità, tra condizioni iniziali e al contorno.

A. Argomenti del corso – esercizi

- A.1** Statica
- A.2** Tensione superficiale
- A.3** Cinematica
- A.4** Bilanci
- A.5** Teorema di Bernoulli
- A.6** Soluzioni esatte
- A.7** Similitudine
- A.8** Aerodinamica
- A.9** Strato limite
- A.10** Stabilità fluidodinamica e turbolenza