

# Aeroelasticità Applicata

Giampiero Bindolino, Paolo Mantegazza e Pierangelo Masarati

Copyright © 2000–2001  
 Giampiero Bindolino, Paolo Mantegazza e Pierangelo Masarati.  
 Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, Politecnico di Milano  
 via La Masa 34, 20156 Milano  
<http://www.aero.polimi.it>

Questo documento è soggetto alla legge sulla tutela dei diritti d'autore. Pertanto gli autori si riservano tutti i diritti, inclusi quelli economici. Viene però consentita la riproduzione per uso strettamente personale. In ogni caso questo documento non può essere nè modificato al di fuori o contro il parere degli autori nè privato di questo avviso.

Questo documento viene reso disponibile via web all'indirizzo <http://www.aero.polimi.it/~mante/>. L'indirizzo potrebbe cambiare, per cui, in caso di mancata reperibilità, si consiglia di ricercare la pagina del Prof. Mantegazza. L'avviso di copyright relativo alla versione su supporto elettronico è:

Tutti i diritti di testi e immagini contenuti nel presente lavoro sono riservati agli autori sopra indicati.

Non ne è consentito alcun uso a scopi commerciali se non previo accordo. Sono consentite la riproduzione e la circolazione in formato cartaceo o elettronico ad esclusivo uso scientifico, didattico o documentario, purché i documenti non vengano alterati in alcun modo sostanziale, ed in particolare mantengano le corrette indicazioni di data, paternità e fonte originale.

Link da altri siti web sono graditi, soprattutto se ne verrà data comunicazione alla redazione, per facilitare la tempestiva comunicazione di eventuali successive variazioni. Se appropriato, si consiglia l'uso di questa forma:

<A HREF="http://www.aero.polimi.it/~mante/">Aeroelasticita' Applicata</A>

Nota: per quanto riguarda la parte di rappresentazione agli stati dell'aerodinamica instazionaria, si rimanda il lettore interessato all'articolo:

“A Single Finite States Modeling of the Unsteady Aerodynamic Forces Related to Structural Motions and Gusts”,  
 G. Pasinetti, P. Mantegazza,  
*AIAA Journal*, May 1999, Vol. 37, No. 5, pp. 604–612.

Milano, 8 Giugno 2000.

Questo documento è stato scritto con L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

# Indice

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Aeroelasticità statica</b>  | <b>11</b> |
| 1.1      | Sezione tipica . . . . .   | 11        |
| 1.1.1    | Equilibrio alla rotazione: calcolo della risposta statica . . . . .                | 12        |
| 1.1.2    | Divergenza . . . . .   | 13        |
| 1.1.3    | Effetti aeroelastici dovuti alle superfici di controllo . . . . .                  | 19        |
| 1.1.4    | Prestazioni di manovra . . . . .   | 23        |
| 1.2      | Ala diritta . . . . .  | 32        |
| 1.2.1    | Principio dei Lavori Virtuali ed equazioni di equilibrio aeroelastico . . . . .    | 33        |
| 1.2.2    | Problema di risposta statica in volo rettilineo, orizzontale ed uniforme . . . . . | 35        |
| 1.2.3    | Divergenza torsionale . . . . .  | 40        |
| 1.2.4    | Manovra di rollio . . . . .  | 51        |
| 1.2.5    | Richiamata: soluzione esatta . . . . .   | 63        |
| 1.3      | Ala a freccia . . . . .  | 65        |
| 1.3.1    | Introduzione . . . . .   | 65        |
| 1.3.2    | Impostazione analitica . . . . .   | 65        |
| 1.3.3    | Aspetti qualitativi: confronto tra ala diritta ed ala a freccia . . . . .          | 69        |
| 1.3.4    | Soluzione del problema aeroelastico per l'ala a freccia . . . . .                  | 70        |
| 1.3.5    | Divergenza flesso-torsionale . . . . .   | 78        |
| 1.4      | Concetto generalizzato di aeroelasticità statica . . . . .                         | 79        |
| 1.4.1    | Introduzione . . . . .   | 79        |
| 1.4.2    | Risposta in coordinate modali . . . . .  | 80        |
| 1.4.3    | Residualizzazione statica del sistema aeroelastico . . . . .                       | 82        |
| 1.4.4    | Aeroelasticità statica generalizzata. . . . .                                      | 84        |
| <b>2</b> | <b>Metodo di <i>Morino</i></b>   | <b>89</b> |
| 2.1      | Le equazioni generali dei fluidi . . . . .   | 89        |
| 2.1.1    | Principio di conservazione della massa . . . . .                                   | 90        |
| 2.1.2    | Bilancio della quantità di moto . . . . .  | 90        |
| 2.1.3    | Equazione dell'energia . . . . .   | 92        |
| 2.1.4    | Relazione di stato . . . . .   | 94        |
| 2.2      | Equazione del potenziale . . . . .   | 95        |
| 2.2.1    | Equazione linearizzata del potenziale . . . . .                                    | 97        |
| 2.3      | Regime transonico . . . . .  | 100       |
| 2.4      | Metodi numerici . . . . .  | 101       |
| 2.4.1    | Metodo delle differenze finite . . . . .   | 101       |
| 2.4.2    | Metodo delle singolarità virtuali . . . . .  | 102       |
| 2.4.3    | Suddivisione del corpo in pannelli . . . . .                                       | 103       |
| 2.5      | Condizioni al contorno . . . . .   | 103       |
| 2.6      | Il metodo di <i>Morino</i> nel caso stazionario . . . . .                          | 108       |
| 2.7      | Il metodo di <i>Morino</i> nel caso instazionario . . . . .                        | 113       |
| 2.7.1    | Trasmissione delle perturbazioni . . . . .   | 114       |
| 2.7.2    | Corrente subsonica . . . . .   | 116       |
| 2.7.3    | Corrente supersonica . . . . .   | 116       |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 2.7.4    | Metodo di <i>Morino</i> : caso subsonico . . . . .                                    | 119        |
| 2.7.5    | Tipi di geometrie a cui è applicabile il metodo di <i>Morino</i> . . . . .            | 121        |
| 2.7.6    | Metodo di <i>Morino</i> : caso supersonico . . . . .                                  | 121        |
| 2.7.7    | La superficie portante con il metodo di <i>Morino</i> . . . . .                       | 123        |
| <b>3</b> | <b>Approssimazione quasi-stazionaria</b>  | <b>125</b> |
| 3.1      | Introduzione . . . . .  | 125        |
| 3.2      | Generica equazione aeroelastica . . . . .   | 125        |
| 3.3      | Risposta statica di un oscillatore armonico . . . . .                                 | 126        |
| 3.4      | Approssimazione stazionaria . . . . .   | 127        |
| 3.5      | Concetto di frequenza ridotta . . . . .   | 128        |
| 3.6      | Approssimazione quasi-stazionaria . . . . .   | 129        |
| 3.6.1    | Ipotesi di validità . . . . .   | 130        |
| 3.6.2    | Espressione formale . . . . .   | 131        |
| 3.6.3    | Differenze con l'approssimazione stazionaria . . . . .                                | 131        |
| 3.6.4    | Calcolo delle derivate . . . . .  | 133        |
| 3.6.5    | Giustificazione delle ipotesi di validità . . . . .                                   | 135        |
| <b>4</b> | <b>Flutter</b>  | <b>137</b> |
| 4.1      | Approssimazione quasi-stazionaria . . . . .   | 138        |
| 4.2      | Il problema del <i>flutter</i> . . . . .  | 143        |
| 4.3      | Metodo <i>p-k</i> . . . . .   | 144        |
| 4.4      | Risoluzione come sistema non lineare . . . . .  | 145        |
| 4.5      | Implementazione del calcolo . . . . .   | 147        |
| 4.6      | Metodo di continuazione ed equazioni del flutter . . . . .                            | 148        |
| 4.7      | Calcolo di sensitività del punto di flutter . . . . .                                 | 150        |
| 4.8      | Equazione di normalizzazione degli autovettori . . . . .                              | 151        |
| <b>5</b> | <b>Modi di accelerazione</b>  | <b>153</b> |
| 5.1      | Definizione del problema . . . . .  | 153        |
| 5.1.1    | Natura dei carichi . . . . .  | 153        |
| 5.1.2    | Relazione tra carichi e deformate . . . . .   | 154        |
| 5.2      | Condensazione del problema . . . . .  | 155        |
| 5.2.1    | Modi propri . . . . .   | 155        |
| 5.2.2    | Smorzamento . . . . .   | 157        |
| 5.2.3    | Interazioni tra i modi e la forzante . . . . .  | 158        |
| 5.2.4    | Riduzione della base modale . . . . .   | 160        |
| 5.3      | Modi di accelerazione . . . . .   | 163        |
| 5.3.1    | Residualizzazione . . . . .   | 163        |
| 5.3.2    | Recupero diretto di deformazioni e sforzi . . . . .                                   | 164        |
| 5.3.3    | Residualizzazione statica delle alte frequenze . . . . .                              | 165        |
| 5.3.4    | Smorzamento . . . . .   | 166        |
| 5.3.5    | Problema aeroelastico . . . . .   | 166        |
| <b>6</b> | <b>Risposta a forzanti non deterministiche</b>  | <b>169</b> |
| 6.1      | La formula di Rice . . . . .  | 176        |
| 6.2      | La densità spettrale di potenza . . . . .   | 179        |
| 6.3      | Estensione a sistemi multi ingressi/uscite . . . . .                                  | 181        |
| 6.4      | Filtro di forma . . . . .   | 187        |
| 6.5      | Definizione di probabilità . . . . .  | 193        |
| 6.6      | Regolarità statistica . . . . .   | 194        |
| 6.7      | Variabili casuali . . . . .   | 195        |
| 6.8      | Funzioni probabilità, distribuzione di probabilità e densità di probabilità . . . . . | 195        |
| 6.9      | Funzioni distribuzione e densità di probabilità . . . . .                             | 196        |
| 6.10     | Valore atteso . . . . .   | 197        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 6.11     | Momenti . . . . .  | 197        |
| 6.12     | Processi casuali o stocastici . . . . .                            | 197        |
| 6.13     | Sistemi lineari con forzanti stocastiche non ergodiche . . . . .   | 200        |
| 6.14     | Processi casuali stazionari (omogenei) . . . . .                   | 203        |
| 6.15     | Nota sui metodi di soluzione . . . . .                             | 206        |
| 6.16     | Nota su problemi di ottimizzazione . . . . .                       | 206        |
| 6.17     | Appendice: Sistemi lineari tempo invarianti . . . . .              | 207        |
| <b>7</b> | <b>Sperimentazione aeroelastica</b>                                | <b>209</b> |
| 7.1      | Introduzione . . . . .   | 209        |
| 7.2      | Cenni storici . . . . .  | 210        |
| 7.3      | Sperimentazione in volo . . . . .                                  | 210        |
| 7.3.1    | Procedura di prova . . . . .                                       | 213        |
| 7.3.2    | Sistemi di eccitazione . . . . .                                   | 215        |
| 7.3.3    | Strumentazione . . . . .   | 220        |
| 7.4      | Analisi nel dominio della frequenza . . . . .                      | 223        |
| 7.4.1    | Determinazione della funzione di risposta in frequenza . . . . .   | 223        |
| 7.4.2    | Effetto del rumore di misura . . . . .                             | 226        |
| 7.4.3    | Metodo dell'ampiezza di picco . . . . .                            | 227        |
| 7.4.4    | Metodo dell'eccitazione smorzata . . . . .                         | 228        |
| 7.4.5    | Metodo della pseudo-risposta impulsiva . . . . .                   | 229        |
| 7.4.6    | Metodo dell'approssimazione circolare . . . . .                    | 230        |
| 7.5      | Approssimazione a più gradi di libertà . . . . .                   | 231        |
| 7.5.1    | Approssimazione mediante fattorizzazione . . . . .                 | 231        |
| 7.5.2    | Approssimazione mediante funzione razionale . . . . .              | 233        |
| 7.6      | Identificazione parametrica nel dominio del tempo . . . . .        | 234        |
| 7.6.1    | Metodo dei minimi quadrati . . . . .                               | 234        |
| 7.7      | Estratti della normativa corrente . . . . .                        | 236        |
| 7.7.1    | MIL-A-8870C(AS) — General Requirement . . . . .                    | 236        |
| 7.7.2    | JAR 23.629 — Flutter . . . . .                                     | 236        |
| 7.7.3    | JAR 25.629 — Flutter, Deformation, and Failsafe Criteria . . . . . | 238        |
| 7.8      | Identificazione dei parametri modali . . . . .                     | 239        |
| 7.8.1    | Eccitazione armonica appropriata . . . . .                         | 239        |
| 7.8.2    | Eccitazione della struttura . . . . .                              | 242        |
| 7.9      | Richiami teorici . . . . .   | 243        |
| 7.9.1    | Sistema ad un grado di libertà . . . . .                           | 243        |
| 7.9.2    | Sistema a più gradi di libertà . . . . .                           | 244        |



# Elenco delle figure

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 1.1  | Modello della sezione tipica . . . . .   | 12  |
| 1.2  | Angolo di torsione in funzione della pressione dinamica. . . . .   | 15  |
| 1.3  | Incremento di portanza per deflessione alettone in funzione della pressione dinamica. . .  | 21  |
| 1.4  | Modello geometrico strutturale . . . . .   | 24  |
| 1.5  | Manovra di richiamata . . . . .  | 30  |
| 1.6  | Equilibrio alla traslazione . . . . .  | 31  |
| 1.7  | Equilibrio attorno all'asse di beccheggio . . . . .  | 31  |
| 1.8  | Convenzioni . . . . .  | 33  |
| 1.9  | Manovra di rollio . . . . .  | 52  |
| 1.10 | Distribuzione di portanza dovuta alla deformabilità . . . . .  | 55  |
| 1.11 | Inversione . . . . .   | 56  |
| 1.12 | Impostazione classica . . . . .  | 66  |
| 1.13 | Decomposizione della velocità relativa . . . . .   | 68  |
| 1.14 | Ala a freccia . . . . .  | 71  |
| 1.15 | Sistema aeroelastico . . . . .   | 84  |
| 2.1  | Zone di influenza del cono di <i>Mach</i> . . . . .  | 116 |
| 3.1  | Risposta in frequenza . . . . .  | 127 |
| 3.2  | Spettro ingresso . . . . .   | 127 |
| 3.3  | Risposta indiciale nel tempo . . . . .   | 128 |
| 3.4  | Moto del velivolo . . . . .  | 129 |
| 3.5  | Funz. di trasf. simm e antisimm. . . . .   | 134 |
| 3.6  | Diagrammi . . . . .  | 135 |
| 3.7  | Approssimazione . . . . .  | 135 |
| 4.1  | Corrispondenza tra differenza destra e centrata nel calcolo della derivata della parte<br>immaginaria di $H_{am}$ nell'origine . . . . . | 139 |
| 4.2  | Schema a blocchi . . . . .   | 143 |
| 4.3  | Diagramma $V-g$ . . . . .  | 143 |
| 4.4  | Diagramma $V-\omega$ parametrizzato in $S_m$ . . . . .   | 151 |
| 6.1  | Raffica . . . . .  | 170 |
| 6.2  | Raffica discreta . . . . .   | 170 |
| 6.3  | Istogramma . . . . .   | 170 |
| 6.4  | Funzione di Dirac nell'origine . . . . .   | 185 |
| 6.5  | Sistema molla-smorzatore . . . . .   | 191 |
| 6.6  | Densità di probabilità composta gaussiana in due dimensioni . . . . .  | 197 |
| 6.7  | Frequenze relative . . . . .   | 198 |
| 6.8  | Storie temporali . . . . .   | 199 |
| 7.1  | Analisi Aeroelastica. . . . .  | 209 |
| 7.2  | Inviluppo di volo ad 1 $g$ con limitazione corrente. . . . .   | 211 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 7.3  | Diagramma $V-g$ , ovvero frequenze e smorzamenti modali in funzione della velocità di volo. | 211 |
| 7.4  | Schema dell'analisi aeroelastica.   | 212 |
| 7.5  | Pianificazione dei punti di prova.  | 214 |
| 7.6  | Coalescenza di due modi all'aumentare della pressione dinamica.                             | 214 |
| 7.7  | Variazione dell'ampiezza della risposta in funzione della pressione dinamica.               | 215 |
| 7.8  | Estrapolazione dell'inverso dell'ampiezza dei picchi.                                       | 215 |
| 7.9  | Scansione in frequenza sinusoidale.   | 217 |
| 7.10 | Scansione in frequenza logaritmica $f = \sin((\ln(at) + b)t)$ .                             | 217 |
| 7.11 | Sollecitazione casuale assimilabile a rumore bianco o a larga banda.                        | 217 |
| 7.12 | Eccitatori pirotecnici.   | 218 |
| 7.13 | Eccitatore inerziale usato sul B1-B.  | 218 |
| 7.14 | Dispositivi di eccitazione aerodinamica.  | 219 |
| 7.15 | Esempio di installazione di cilindro rotante.   | 219 |
| 7.16 | Spettro di turbolenza di Dryden.  | 221 |



# Elenco delle tabelle

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Effetti aerodinamici e strutturali dell'ala a freccia . . . . . | 70 |
|-----|---|----|



# Capitolo 1

## Aeroelasticità statica

Questo capitolo presenta quella che viene comunemente definita “aeroelasticità statica”, ovvero quella parte dell’aeroelasticità che trascura la dinamica “veloce” della struttura e dell’aerodinamica per concentrarsi sugli effetti “lenti” dell’interazione tra aerodinamica e velivolo. Tutte le virgolette usate in precedenza non sono state messe a caso. Infatti, uno degli scopi principali di questo capitolo sta nel definire con maggiore rigore qual’è il significato degli aggettivi “lento” e “veloce”, e quindi nel consentire una chiara identificazione degli ambiti in cui l’aeroelasticità statica si applica. Secondo un’accezione moderna, la distinzione tra aeroelasticità “statica” e “dinamica” non è rigida e dogmatica; anzi, al giorno d’oggi si ritiene corretto parlare di aeroelasticità *tout court*, e ciò che una volta era dominio dell’aeroelasticità statica oggi viene descritto con i metodi standard dell’aeroelasticità attraverso opportune e giustificate semplificazioni basate sul concetto di separazione della dinamica veloce, che viene trascurata, da quella lenta, che viene mantenuta. Questo concetto verrà chiarito ed approfondito nei capitoli successivi; per ora basti la definizione intuitiva di “lento” e “veloce”. Ciò nonostante, quella che storicamente si è definita aeroelasticità statica conserva un grande valore propedeutico, in quanto consente di introdurre le tematiche fondamentali di questa disciplina senza doversi addentrare in aspetti specifici della dinamica strutturale e dell’aerodinamica instazionaria; anzi, dà modo di acquisire fin dall’inizio una certa sensibilità sull’influenza e l’importanza che le diverse sollecitazioni coinvolte nell’aeroelasticità (elastiche, inerziali ed aerodinamiche) hanno sui tipici problemi che si incontrano nel progetto di un velivolo.

### 1.1 Sezione tipica

I generici problemi aeroelastici, sia in ambito statico che dinamico, vengono generalmente introdotti attraverso una rappresentazione essenziale dell’ala sia dal punto di vista strutturale che aerodinamico. L’ala viene considerata una trave rigida, a sezione costante e ad asse rettilineo, perpendicolare alla direzione del vento relativo (ala dritta). La deformabilità strutturale è pensata concentrata nel vincolo e simulata da una molla torsionale di rigidezza  $K_T$ . Si consideri ad esempio un legame lineare fra il momento torcente applicato  $M_T$  e la rotazione  $\vartheta$  della sezione:

$$K_T \vartheta = M_T;$$

i carichi aerodinamici agenti sull’ala vengono espressi considerando i singoli profili isolati; ovvero non si tengono in alcun conto le reciproche influenze tra i profili stessi. In pratica, per ogni profilo si considera un flusso bidimensionale e si applica la teoria dell’ala di apertura infinita. Questa approssimazione prende il nome di *teoria delle strisce*. Le caratteristiche aerodinamiche di ogni profilo si suppongono costanti lungo l’apertura. In conclusione si introduce un legame puntuale tra l’incidenza  $\alpha$  e la portanza  $P$  ed il momento aerodinamico  $M$  prodotti dal singolo profilo:

$$\begin{aligned} P &= qc C_P(\alpha), \\ M &= qc^2 C_{MCA}(\alpha), \end{aligned}$$

## FIGURA DELLA SEZIONE TIPICA

Figura 1.1: Modello della sezione tipica

dove  $q$  è la pressione dinamica e  $c$  è la corda, da intendersi in senso più generale come lunghezza di riferimento rispetto alla quale si sono normalizzati i coefficienti aerodinamici di portanza,  $C_P$ , e di momento,  $C_{MCA}$ . Da queste due ipotesi l'analisi aeroelastica dell'ala può essere ricondotta a quella della generica sezione alare illustrata in figura 1.1, dove  $C.A.$  è il centro aerodinamico, definito come il punto rispetto al quale il momento aerodinamico è costante al variare dell'incidenza, mentre  $A.E.$  è l'intersezione della sezione con l'asse elastico, definito come la linea congiungente i centri di taglio<sup>1</sup> delle sezioni. Nel modello della sezione tipica esso è l'asse attorno al quale ruota l'intera ala;  $c$  è la corda alare, ed infine  $e$  è la distanza fra  $A.E.$  e  $C.A.$  Sotto l'ipotesi di piccole rotazioni sono ammissibili le seguenti approssimazioni: 1) la portanza  $P$ , applicata al centro aerodinamico, viene sempre considerata perpendicolare alla corda, con braccio costante rispetto ad  $A.E.$  e pari ad  $e$ ; 2) la resistenza aerodinamica  $R_A$  dà un contributo trascurabile all'equilibrio alla rotazione e quindi non viene considerata; 3) la deformabilità flessionale non viene considerata<sup>2</sup>. Le forze aerodinamiche, in questo modello, dipendono infatti solo dalla rotazione dei profili, e risulterà chiaro in seguito che il problema aeroelastico interessa in questo caso la sola torsione, mentre la flessione è un problema puramente strutturale, considerabile separatamente a posteriori. L'introduzione allo studio dell'aeroelasticità statica con questo modello ha motivazioni principalmente didattiche. In questo modo i problemi aeroelastici possono essere risolti con trattazioni analitiche estremamente semplici e soprattutto esatte, senza la necessità di ricorrere a metodi numerici che impediscono una visione chiara degli aspetti fisici dei problemi. Tale modello è riconducibile al concetto di sezione tipica il quale può rappresentare un'approssimazione valida anche dal punto di vista quantitativo: l'esperienza ha dimostrato che, attribuendo alla sezione tipica le caratteristiche relative ad una opportuna sezione dell'ala, che alcuni testi pongono in prossimità del 70–75% dell'apertura [1], è possibile determinare alcune caratteristiche aeroelastiche fondamentali, quali la pressione dinamica di divergenza, con accuratezza confrontabile a quella ottenibile da modelli più complessi.

## 1.1.1 Equilibrio alla rotazione: calcolo della risposta statica

Il primo problema da affrontare è il calcolo della posizione di equilibrio del sistema in funzione della pressione dinamica di volo e dell'angolo di incidenza. Grazie all'ipotesi di caratteristiche costanti in apertura, le forze agenti sull'ala vengono applicate direttamente alla sezione tipica. L'incidenza  $\alpha$ , dalla quale dipende la portanza, è somma di due contributi:

$$\alpha = \alpha_0 + \vartheta$$

dove  $\alpha_0$  è l'incidenza aerodinamica dell'ala supposta rigida, mentre  $\vartheta$  è la variazione di incidenza dovuta alla torsione elastica. L'equazione di equilibrio alla rotazione risulta:

$$eP + M_A = M_T$$

le forze vengono espresse in funzione dei parametri di spostamento:

$$\begin{aligned} P &= qSC_P(\alpha_0 + \vartheta) \\ M_A &= qScC_{MCA} \\ M_T &= K_T\vartheta \end{aligned}$$

ne risulta un'equazione nell'incognita  $\vartheta$ :

$$qSeC_P(\alpha_0 + \vartheta) + qScC_{MCA} = K_T\vartheta$$

<sup>1</sup>Si ricordi che il cosiddetto *centro di taglio* di una sezione di trave è il punto in cui l'applicazione di una forza di taglio non produce alcuna rotazione della sezione, e, di conseguenza, il punto attorno al quale la sezione ruota quando le viene applicato un puro momento torcente.

<sup>2</sup>ciò non significa che l'ala non si possa deformare a flessione; più semplicemente, la deformazione a flessione non altera le forze in gioco, quindi è influente al fine della determinazione dell'equilibrio.

che, linearizzata e ordinata in  $\vartheta$ , diventa:

$$(K_T - qeSC_{P/\alpha})\vartheta = qeSC_P(\alpha_0) + qcSC_{MCA} \quad (1.1)$$

Il modello della sezione tipica permette quindi di calcolare immediatamente la configurazione assunta dall'ala:

$$\vartheta = \frac{qeSC_P(\alpha_0) + qcSC_{MCA}}{K_T - qSeC_{P/\alpha}} \quad (1.2)$$

Il concetto fondamentale introdotto da questa equazione è la dipendenza delle forze aerodinamiche dalla deformazione a cui la struttura viene sottoposta. La dipendenza della portanza dall'angolo assunto dall'ala, e quindi dalla torsione  $\vartheta$ , introduce una retroazione nel sistema, ossia la variabile d'uscita  $\vartheta$  modifica le forze agenti sulla struttura. L'effetto aeroelastico ha importanza non solo dal punto di vista strutturale: le stesse forze aerodinamiche e la loro distribuzione in apertura variano rispetto ai valori assunti nell'ipotesi di ala rigida. Trascurando l'effetto di retroazione aerodinamico, la rotazione dell'ala risulterebbe:

$$\vartheta_R = \frac{qeSC_P(\alpha_0) + qcSC_{MCA}}{K_T} \quad (1.3)$$

Ha senso considerare il rapporto tra le due deformazioni:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_R} = \frac{K_T}{K_T - qSeC_{P/\alpha}} = \frac{1}{1 - qSeC_{P/\alpha}/K_T};$$

il rapporto tra la deformazione aeroelastica e quella di riferimento, calcolata nell'ipotesi di struttura infinitamente rigida, rappresenta spesso un indice di merito, che permette di quantificare l'influenza del fenomeno aeroelastico sul comportamento di un sistema. Si può quindi affermare che il fenomeno aeroelastico alteri la rigidità dell'ala, intesa come proprietà di opporsi alle deformazioni generando forze ad esse proporzionali. La rigidità del sistema aeroelastico viene diminuita, ovvero la rotazione  $\vartheta$  è maggiore, se:

$$qeSC_{P/\alpha} > 0$$

cioè, dato che la pressione dinamica, la superficie alare e la pendenza della curva di portanza sono positive per definizione, se  $e > 0$ , e quindi se il centro aerodinamico C.A. si trova davanti all'asse elastico A.E. Viceversa, la rigidità viene incrementata se  $e < 0$  (A.E. davanti a C.A.). Normalmente le strutture aeronautiche hanno inevitabilmente l'asse elastico dietro il centro aerodinamico, con la notevole eccezione delle pale di elicottero, in cui, proprio per considerazioni aeroelastiche, si cerca sempre di far coincidere i due assi. Si noti che, per ridurre l'effetto aeroelastico su di una struttura, si può in linea di principio agire su due fattori: 1) aumentare la rigidità  $K_T$ , e 2) diminuire la distanza  $e$ .

Il fattore correttivo della rigidità del sistema,  $qeSC_{P/\alpha}$ , viene qui definito *rigidità aerodinamica*, con terminologia non universalmente accettata, ed è indicato con il simbolo  $qK_A$ :

$$qK_A = qeSC_{P/\alpha}$$

La dipendenza dalla pressione dinamica,  $q$ , viene mantenuta esplicitamente in quanto rappresenta un tipico parametro che caratterizza condizioni di volo salienti, come verrà illustrato tra breve. La rigidità totale, differenza fra rigidità strutturale e rigidità aerodinamica, viene qui indicata come *rigidità aeroelastica*:

$$K_{AE} = K_T - qK_A$$

### 1.1.2 Divergenza

Una volta fissate le caratteristiche strutturali ed aerodinamiche dell'ala, la risposta statica  $\vartheta$  dipende dall'angolo di incidenza e dalla pressione dinamica di volo. L'esame dell'espressione dell'equazione (1.2) permette di affermare che, se  $e > 0$ , esiste un valore  $q_D$  positivo per cui:

$$K_T - q_D K_A = 0 \quad (1.4)$$

e quindi  $\vartheta \rightarrow \infty$ . Avvicinandosi a tale valore di pressione dinamica, l'ala diventa sempre meno rigida e per  $q = q_D$  la struttura crolla (in pratica crolla per valori di pressione dinamica decisamente inferiori a  $q_D$ , per i quali la deformazione  $\vartheta$  raggiunge un qualche limite strutturale). La pressione dinamica  $q_D$  è definita *pressione dinamica di divergenza*. Attualmente è molto raro che in pratica si presentino problemi di divergenza per velivoli di configurazione convenzionale, o che la divergenza diventi una condizione dimensionante per un velivolo<sup>3</sup>, dal momento che altri fenomeni aeroelastici distruttivi o compromettenti le prestazioni del velivolo si verificano a velocità più basse. Il calcolo della pressione dinamica di divergenza fornisce tuttavia un indice del livello generale di rigidità della struttura, o meglio del sistema aeroelastico, e quantifica l'incidenza dell'effetto aeroelastico sulle caratteristiche di risposta statica.

### La divergenza come problema di stabilità

La pressione dinamica di divergenza della sezione tipica,  $q_D$ , si ottiene imponendo l'annullarsi del denominatore dell'equazione (1.2):

$$q_D = \frac{K_T}{K_A}$$

Questo approccio è reso possibile dalla semplicità del modello in esame e non coglie completamente il significato fisico del fenomeno. Allo stesso risultato si può pervenire studiando la stabilità statica del sistema, ovvero considerando, a partire da una condizione di equilibrio, un incremento di incidenza  $\Delta\vartheta$  e ricercando la condizione di esistenza di configurazioni di equilibrio infinitamente vicine a quella di partenza. Se queste configurazioni esistono, il sistema sarà in condizione di equilibrio indifferente. L'equazione di equilibrio alla rotazione diventa:

$$K_T(\vartheta + \Delta\vartheta) = qeSC_P(\alpha_0 + \vartheta) + qeSC_{P/\alpha}\Delta\vartheta + qcSeC_{MCA}$$

Poiché  $\vartheta$  è per ipotesi una posizione di equilibrio, esso soddisfa l'equazione (1.1), quindi la precedente relazione si riduce a:

$$(K_T - qK_A)\Delta\vartheta = 0$$

Questa relazione rappresenta un problema agli autovalori, analogo alla determinazione dei modi propri di vibrare di un problema meccanico, che ammette soluzioni non banali solo se:

$$(K_T - qK_A) = 0 \quad \text{da cui} \quad q_D = \frac{K_T}{K_A} \quad (1.5)$$

e si osserva che:

- per  $K_T > qK_A$  il sistema è staticamente stabile
- per  $K_T < qK_A$  il sistema è staticamente instabile

Analogha conclusione si raggiunge confrontando il lavoro delle forze elastiche di richiamo con quello delle forze aerodinamiche:

- Lavoro elastico maggiore del lavoro delle forze aerodinamiche: in questo caso il sistema risulta essere staticamente stabile, ossia le forze elastiche tendono a riportare il sistema nella posizione iniziale.
- Lavoro elastico minore del lavoro delle forze aerodinamiche: in tal caso l'ala tende ad allontanarsi dalla condizione iniziale ed il sistema si dice staticamente instabile.
- Lavoro elastico uguale al lavoro delle forze aerodinamiche: condizione di equilibrio indifferente, che caratterizza la divergenza.

---

<sup>3</sup>Con la possibile eccezione degli alianti.

FIGURA DI THETA IN FUNZIONE DI  $q$ 

Figura 1.2: Angolo di torsione in funzione della pressione dinamica.

Si noti che, partendo dall'equazione di equilibrio:

$$f(\vartheta, q) = M_0$$

dove con  $M_0$  si indica il termine noto dell'equazione, con  $\vartheta$  l'incognita del problema e con  $q$  un parametro, lo studio della stabilità equivale alla ricerca delle soluzioni dell'equazione in funzione del parametro  $q_D$ :

$$\frac{\partial f(\vartheta, q_D)}{\partial \vartheta} \Delta \vartheta = 0$$

che rappresenta un problema agli autovalori, ovvero il calcolo del valore del parametro  $q_D$  da cui dipende l'equazione per cui l'equazione omogenea ammette soluzione non banale. Questo approccio è formalmente identico a quello che verrà utilizzato in presenza di modelli più raffinati e con più gradi di libertà, dove lo studio della stabilità statica condurrà ad un sistema omogeneo di equazioni lineari. Dall'equazione (1.5) si può definire la velocità di divergenza come:

$$V_D = \sqrt{\frac{K_T}{eSC_{P/\alpha}\rho/2}}$$

La velocità di divergenza risulta essere indipendente dall'angolo di incidenza e da  $C_{MCA}$ , mentre dipende da  $e$ . Minore è la distanza fra asse elastico e centro aerodinamico e maggiore risulta la velocità, a parità di quota di volo, alla quale il velivolo può volare senza incorrere in problemi di divergenza. Se  $e$  è nullo o negativo, il termine sotto radice perde significato: la struttura è sempre staticamente stabile per qualsiasi valore di  $q$ . Particolare interesse risulta avere il rapporto  $q/q_D$  che esprime l'importanza del fenomeno aeroelastico, fungendo da indicatore della rigidità aeroelastica: quanto più il rapporto è piccolo, tanto più si può trascurare il fenomeno aeroelastico. Infatti, ricordando l'equazione (1.2), che esprime il valore di  $\vartheta$ , e trascurando l'effetto di retroazione aeroelastica, come nell'equazione (1.3), il rapporto fra la rotazione effettiva  $\vartheta$  e la rotazione  $\vartheta_R$ , vale:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_R} = \frac{K_T}{K_T - qK_A} = \frac{1}{1 - q/q_D}$$

da questo rapporto si vede che  $q/q_D$  esprime l'errore che si compie trascurando gli effetti aeroelastici. L'andamento del rapporto tra gli angoli in funzione di  $q/q_D$  e di  $V/V_D$  è rappresentato in figura 1.2.

**Metodo iterativo**

Nel modello della sezione tipica il calcolo della risposta statica è immediato. Quando verranno adottati modelli più raffinati e diverrà necessario ricorrere a metodi numerici, la risoluzione del problema aeroelastico con un'unica formulazione comprendente sia la struttura che l'aerodinamica può risultare eccessivamente complessa. Si giustifica così l'introduzione di metodi che permettono di risolvere separatamente il problema strutturale e quello aerodinamico. Una soluzione semplice è costituita da un metodo iterativo che proceda nel seguente modo:

1. si calcolano i carichi aerodinamici del velivolo supposto rigido per un determinato assetto;
2. avendo i carichi agenti sull'ala, si determina la torsione elastica dell'ala, quindi la nuova configurazione deformata;
3. si ricalcolano i carichi aerodinamici nella nuova configurazione;
4. si ritorna al punto 2 e si ripete la procedura fino alla convergenza della soluzione.

Il procedimento può essere schematizzato come in figura 1.4. A titolo di esempio, il metodo iterativo viene applicato al modello semplificato in esame. Il punto di partenza è il calcolo delle forze aerodinamiche conseguenti alla sola incidenza rigida  $\alpha_0$ :

$$M_{A0} = qeSC_P(\alpha_0) + M_{CA}$$

la rotazione della sezione tipica causata da questi carichi è:

$$\vartheta(1) = \frac{M_{A0}}{K_T}$$

a questo punto si calcolano le forze aerodinamiche nella nuova configurazione:

$$M_{A1} = M_{A0} + qeSC_{P/\alpha}\vartheta(1) = M_{A0} + qK_A\vartheta(1)$$

si ripete, quindi, il ciclo calcolando  $\vartheta_2$ :

$$\vartheta(2) = \frac{M_{A1}}{K_T} = \frac{M_{A0} + qK_A\vartheta(1)}{K_T}$$

Il procedimento può essere formalizzato con la seguente espressione ricorsiva:

$$\vartheta(i+1) = \frac{M_{A0} + qK_A\vartheta(i)}{K_T} \quad (1.6)$$

Si tratta ora di dimostrare se, e sotto quali condizioni, il metodo converge alla soluzione esatta, espressa dall'equazione (1.2). Si possono dare due dimostrazioni, basate su due differenti approcci:

1. l'equazione (1.6) viene considerata un'equazione alle differenze;
2. la serie dei  $\vartheta_i$  viene esplicitata.

**1. Equazione alle differenze** L'equazione (1.6) viene riordinata, ottenendo

$$\vartheta(i+1) - q\frac{K_A}{K_T}\vartheta(i) = \frac{M_{A0}}{K_T}$$

si tratta di un'equazione alle differenze del primo ordine. Il procedimento di risoluzione ricalca quello usato per l'equazione differenziale del tipo:

$$\dot{x} + ax = b$$

La soluzione è data dalla somma della soluzione particolare e di una soluzione generale dell'omogenea associata:

$$\begin{aligned} \vartheta(i+1) - q\frac{K_A}{K_T}\vartheta(i) &= 0 && \text{omogenea associata} \\ \vartheta(i) &= A\rho^i \quad \forall \rho, A && \text{soluzione generale} \end{aligned}$$

sostituendo, si ottiene un'equazione caratteristica che permette la determinazione di  $\rho$ :

$$A\rho^{i+1} - Aq\frac{K_A}{K_T}\rho^i = 0$$

da cui

$$A\rho^i \left( \rho - q\frac{K_A}{K_T} \right) = 0$$

e

$$\rho = q\frac{K_A}{K_T}$$



La soluzione particolare è la soluzione di equilibrio, equazione (1.1), esprimibile come:

$$\vartheta_P = \frac{M_{A0}}{K_T - qK_A}$$

La soluzione dell'omogenea associata è

$$\vartheta_0 = A\rho^i$$

La soluzione generale è la somma  $\vartheta(i) = \vartheta_0(i) + \vartheta_P$ :

$$\vartheta(i) = A \left( q \frac{K_A}{K_T} \right)^i + \frac{M_{A0}}{K_T - qK_A}$$

La costante  $A$  viene determinata imponendo la condizione iniziale

$$\vartheta(0) = 0 \quad \text{da cui} \quad A = -\frac{M_{A0}}{K_T - qK_A}$$

quindi risulta:

$$\vartheta(i) = \frac{M_{A0}}{K_T} \frac{1}{1 - qK_A/K_T} \left( 1 - \left( q \frac{K_A}{K_T} \right)^i \right)$$

Ciò che importa, comunque, è stabilire la convergenza del metodo alla soluzione. Si consideri allora il limite della soluzione per  $i \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \vartheta(i) = \frac{M_{A0}}{K_T - qK_A} \quad \text{se} \quad \left| q \frac{K_A}{K_T} \right| < 1$$

il modulo della disuguaglianza può essere rimosso se si considera che la pressione dinamica è sempre positiva, mentre un valore negativo di pressione dinamica di divergenza indica che il sistema non è soggetto a divergenza. Poiché dalla (1.4)  $q_D = K_T/K_A$ , la condizione di convergenza può venire espressa come:

$$q/q_D < 1 \quad \text{da cui} \quad q < q_D$$

Per cui l'iterazione converge alla soluzione di equilibrio aeroelastico solo se ci si trova al di sotto della pressione dinamica di divergenza. La rapidità di convergenza è indice di quanto  $q$  sia minore di  $q_D$ ; per  $q$  maggiore di  $q_D$  la successione è divergente.

**2. Sviluppo in serie** Riprendendo l'equazione (1.6) e risolvendo per  $\vartheta(i+1)$  si ottiene:

$$\vartheta(i+1) = \frac{M_{A0}}{K_T} + q \frac{K_A}{K_T} \vartheta(i)$$

e, sviluppando, risulta la serie geometrica di ragione  $qK_A/K_T$ :

$$\vartheta(i) = \frac{M_{A0}}{K_T} \left( 1 + q \frac{K_A}{K_T} + \left( q \frac{K_A}{K_T} \right)^2 + \dots + \left( q \frac{K_A}{K_T} \right)^{i-1} \right)$$

Moltiplicando ambo i membri dell'equazione precedente per  $1 - qK_A/K_T$  si ottiene:

$$\left( 1 - q \frac{K_A}{K_T} \right) \vartheta(i) = \frac{M_{A0}}{K_T} \left( 1 + q \frac{K_A}{K_T} - q \frac{K_A}{K_T} + \dots - \left( q \frac{K_A}{K_T} \right)^i \right)$$

Semplificando e risolvendo si ottiene di nuovo la soluzione del caso 1:

$$\vartheta(i) = \frac{M_{A0}}{K_T - qK_A} \left( 1 - \left( q \frac{K_A}{K_T} \right)^i \right)$$

a condizione che sia  $|qK_A/K_T| < 1$ . Si tratta di un metodo pratico, di facile uso, per la soluzione di problemi aeroelastici generali.

### Approccio in flessibilità

Un altro modo con cui si può affrontare il problema aeroelastico è dato dall'approccio in flessibilità, che si può considerare come un metodo alle forze, in cui l'incognita principale è costituita dalla variazione di carico aerodinamico conseguente alla deformabilità strutturale. Per la risoluzione del problema occorre imporre quella che viene qui definita *congruenza aeroelastica*, ossia l'uguaglianza fra la variazione di angolo di incidenza corrispondente alla variazione di carico aerodinamico dovuta alla deformabilità e la deformata torsionale della struttura causata da tutti i carichi:

$$\alpha_e(y) = \vartheta(y)$$

La variazione di incidenza dovuta alla variazione del carico aerodinamico legato alla deformabilità strutturale si può esprimere come

$$\alpha_e(y) = \frac{P_e}{qSC_{P/\alpha}}$$

dove  $P_e$  è la variazione di carico aerodinamico dovuta alla deformabilità elastica. La deformata strutturale può essere espressa come:

$$\vartheta = C^{\vartheta\vartheta} M_T$$

in cui  $C^{\vartheta\vartheta}$  è un opportuno coefficiente di influenza che lega lo spostamento  $\vartheta$  alla sollecitazione unitaria generalizzata nella coordinata  $\vartheta$ , quindi è la rotazione dovuta ad un momento torcente unitario attorno all'asse elastico. Il momento torcente totale attorno all'asse elastico può essere espresso come:

$$M_T = eP_{A0} + M_{CA} + eP_e$$

avendo indicato con  $eP_{A0} + M_{CA}$  il momento corrispondente ai carichi aerodinamici dovuti all'incidenza di riferimento, ovvero all'incidenza relativa alla struttura considerata rigida. Imponendo la congruenza aeroelastica si ottiene:

$$\frac{P_e}{qSC_{P/\alpha}} = C^{\vartheta\vartheta} (eP_e + eP_{A0} + M_{CA})$$

$$\left( \frac{1}{qSC_{P/\alpha}} - eC^{\vartheta\vartheta} \right) P_e = C^{\vartheta\vartheta} (eP_{A0} + M_{CA})$$

$$P_e = C^{\vartheta\vartheta} \frac{eP_{A0} + M_{CA}}{\frac{1}{qSC_{P/\alpha}} - eC^{\vartheta\vartheta}}$$

Si può quindi calcolare la variazione di carico aerodinamico dovuto alla deformabilità, nota l'incidenza  $\alpha_0$  e la pressione dinamica di volo  $q$ . Analogamente a quanto visto nell'approccio agli spostamenti, l'annullamento del denominatore nell'espressione di  $P_e$ , che nell'approccio in flessibilità è l'incognita principale, porta ad una condizione di divergenza, che è la stessa che si troverebbe studiando la stabilità dell'equilibrio del sistema. La pressione dinamica di divergenza risulta:

$$q_D = \frac{1}{C^{\vartheta\vartheta} C_{P/\alpha} S e} = \frac{1}{C^{\vartheta\vartheta} K_A}$$

L'espressione è equivalente all'equazione (1.5), dal momento che nell'approssimazione strutturale usata si ha  $C^{\vartheta\vartheta} = 1/K_T$ , che rappresenta quindi la flessibilità della molla torsionale nel vincolo. È immediato notare come l'approccio alle forze sia il duale di quello agli spostamenti:

| Approccio in rigidezza<br>(agli spostamenti)  | Approccio in flessibilità<br>(alle forze)   |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Forze elastiche ed aerodinamiche in funzione degli spostamenti (deformazioni ed incidenze)</li> <li>• Equazione di equilibrio che lega forze elastiche ed aerodinamiche</li> <li>• Incognita: deformata</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Deformazioni ed incidenze in funzione delle variazioni delle forze aerodinamiche dovute alla deformabilità aeroelastica</li> <li>• Equazione di congruenza che impone l'uguaglianza fra deformazioni elastiche ed incidenze</li> <li>• Incognita: variazione delle forze aerodinamiche dovute alle deformazioni elastiche</li> </ul> |

Si osservi che, in questo caso molto semplice, non si riesce ad intuire l'utilità di questo approccio; tuttavia si gettano le basi di un procedimento generale che verrà impiegato successivamente.

### 1.1.3 Effetti aeroelastici dovuti alle superfici di controllo

Consideriamo il comportamento generale di un'ala rigida in cui sia presente una superficie di controllo, tipicamente un alettone. I fenomeni aeroelastici alterano il comportamento aerodinamico dell'ala rispetto all'ipotesi di ala rigida. In generale, per superfici di controllo poste sul bordo d'uscita e profili convenzionali, una deflessione verso il basso produce un aumento di portanza sull'ala e, contemporaneamente, provoca l'insorgere di un momento aerodinamico a picchiare. Si induce, così, una torsione dell'ala tale per cui l'incidenza dell'ala diminuisce e quindi diminuisce anche la portanza dell'ala. Si hanno così due effetti contrastanti, ma, mentre la rigidità dell'ala è costante rispetto alla velocità di volo, le forze aerodinamiche variano con il suo quadrato: può così esistere una velocità di volo tale per cui l'aumento di portanza indotto dalla deflessione della superficie di controllo viene annullato dalla diminuzione dovuta alla deformazione elastica. Questa velocità viene detta velocità critica di inversione.

#### Correzione delle derivate aerodinamiche, efficienza del comando e inversione per una semiala

Si consideri un'ala semplificata dotata di una superficie di controllo sul bordo d'uscita lungo tutta la sua apertura. Questo semplice schema permetterà di introdurre i problemi aeroelastici in presenza di superfici di controllo. La deflessione del comando provoca una variazione delle forze aerodinamiche rispetto a quelle che garantiscono l'equilibrio aeroelastico. In conseguenza l'ala assumerà una nuova configurazione d'equilibrio con una variazione dei parametri di spostamento. Se si assume un modello matematico lineare, gli incrementi di forze e spostamenti conseguenti alla deflessione  $\beta$  del comando si possono considerare sovrapposti alla condizione di equilibrio aeroelastico. Applicando il principio della sovrapposizione degli effetti si può quindi scrivere l'equazione di equilibrio per i soli incrementi:

$$e\Delta P + \Delta M_A = K_T \Delta \vartheta \quad (1.7)$$

L'incremento di portanza conseguente alla deflessione dell'alettone è dato da due contributi:

- $\Delta P_\beta = qSC_{P/\beta}\beta$  variazione di portanza dovuta alla deflessione della superficie mobile
- $\Delta P_\vartheta = qSC_{P/\alpha}\Delta \vartheta$  variazione di portanza dovuta alla deformabilità dell'ala

$\Delta M_A$  è l'incremento del momento rispetto al centro aerodinamico, provocato dalla deflessione dell'alettone. Risulta, nell'ipotesi che tale incremento vari linearmente con  $\beta$ :

$$\Delta M_A = qcSC_{MCA/\beta}\beta$$

Esplicitando i termini, l'equazione di equilibrio incrementale (1.7) diventa:

$$qeSC_{P/\beta}\beta + qeSC_{P/\alpha}\Delta \vartheta + qcSC_{MCA/\beta}\beta = K_T \Delta \vartheta \quad (1.8)$$

Dato  $\beta$ , l'equazione di equilibrio consente il calcolo dell'incremento di deformazione elastica  $\Delta\vartheta$ :

$$\Delta\vartheta = qS \frac{eC_{P/\beta} + cC_{MCA/\beta}}{K_T - qeSC_{P/\alpha}} \beta \quad (1.9)$$

Si noti che, in generale,  $\Delta\vartheta/\beta < 0$ . L'incremento di momento aerodinamico dovuto alla deflessione del comando è, infatti, a picchiare:  $C_{MCA/\beta} < 0$ . Tale incremento prevale sul termine  $qeSC_{P/\beta}$ , dovuto all'aumento della portanza, il quale ha il segno di  $e$  e tipicamente è positivo. Il denominatore dell'espressione (1.9) è la rigidezza aeroelastica del sistema, che diminuisce al crescere della velocità. L'equazione precedente può essere riscritta come:

$$\Delta\vartheta = S \frac{eC_{P/\beta} + cC_{MCA/\beta}}{K_T/q - eSC_{P/\alpha}} \beta$$

la deformazione  $\Delta\vartheta$ , a parità di angolo di deflessione  $\beta$ , aumenta dunque, in valore assoluto, con l'aumentare della pressione dinamica di volo. L'alterazione delle prestazioni aerodinamiche dell'ala, rispetto all'ipotesi di ala rigida, è rappresentabile esprimendo l'incremento di portanza che viene effettivamente prodotto per una deflessione  $\beta$ :

$$\Delta P_e = qS (C_{P/\beta}\beta + C_{P/\alpha}\Delta\vartheta)$$

Sostituendo l'espressione di  $\Delta\vartheta$  precedentemente calcolata dall'equazione di equilibrio si ottiene:

$$\Delta P_e = qS \left( C_{P/\beta} + C_{P/\alpha} qS \frac{eC_{P/\beta} + cC_{MCA/\beta}}{K_T - qeSC_{P/\alpha}} \right) \beta \quad (1.10)$$

Si confronti questo incremento con quello relativo all'ala rigida:

$$\Delta P_r = qSC_{P/\beta}\beta$$

per quanto affermato in precedenza è:

$$\Delta P_r > \Delta P_e \quad (1.11)$$

in quanto il secondo termine fra parentesi nella (1.10) è negativo e diventa sempre più negativo con l'aumentare della pressione dinamica. Ne consegue che l'effetto aeroelastico, ovvero la dipendenza delle forze aerodinamiche dalla deformazione della struttura, modifica le derivate di stabilità del velivolo, nel caso specifico la relazione tra la variazione di forza aerodinamica e la deflessione dei comandi di volo. In particolare, quando la variazione di forza dovuta ad un comando si annulla, ci si trova davanti ad un fenomeno di *inversione dei comandi*. Esiste dunque una pressione dinamica  $q_i$  per cui  $\Delta P_e = 0$ ; in corrispondenza di  $q_i$ , la deflessione della superficie di controllo non produce alcun incremento di portanza sulla semiala. Tale valore di pressione dinamica viene definito pressione dinamica di inversione. L'espressione di  $q_i$  si ottiene facilmente rielaborando l'equazione (1.10), nella forma:

$$\Delta P_e = qSC_{P/\beta} \frac{K_T + qcSC_{MCA/\beta} \frac{C_{P/\alpha}}{C_{P/\beta}}}{K_T - qeSC_{P/\alpha}} \quad (1.12)$$

ed imponendo che, in condizione di inversione,  $\Delta P_e = 0$  si ottiene quindi:

$$q_i = - \frac{K_T}{cSC_{MCA/\beta} \frac{C_{P/\alpha}}{C_{P/\beta}}} \quad (1.13)$$

La velocità di inversione si ottiene in modo immediato dalla pressione dinamica nota la densità. Si noti che nella precedente equazione non compare la distanza fra asse elastico e centro aerodinamico,  $e$ , per cui la velocità di inversione risulta indipendente dalla posizione reciproca fra i due punti. Per velocità inferiori alla velocità di inversione l'effetto aeroelastico riduce comunque la portanza prodotta

## PE/PR vs. QI/QD

Figura 1.3: Incremento di portanza per deflessione alettone in funzione della pressione dinamica.

dal comando. Confrontando l'espressione (1.12) con la (1.11), si può interpretare il fenomeno come una correzione della derivata aerodinamica  $C_{P/\beta}$ . Il rapporto  $\Delta P_e/\Delta P_r$  permette di valutare il peso di tale correzione sul sistema e può venire espresso in forma particolarmente semplice:

$$\frac{\Delta P_e}{\Delta P_r} = \frac{K_T + qcSC_{MCA/\beta}C_{P/\alpha}/C_{P/\beta}}{K_T - qcSC_{P/\alpha}} = \frac{1 - q/q_i}{1 - q/q_D} \quad (1.14)$$

$\Delta P_e/\Delta P_r$  è un indice delle prestazioni del sistema e valuta, in questo esempio, l'efficacia del comando. Si noti che il valore della pressione dinamica di divergenza influenza anche l'efficienza dei comandi: un basso valore di  $q_D$  implica un elevato valore del denominatore della (1.14) e quindi un più veloce decadimento dell'efficienza. L'andamento del rapporto  $\Delta P_e/\Delta P_r$  in funzione di  $q/q_i$  e del parametro  $R = q_D/q_i$  è rappresentato in figura 1.3.

**L'inversione come problema agli autovalori**

Il problema dell'inversione può essere espresso in forma matriciale. Sebbene in questo ambito sia inutile passare ad una trattazione matriciale, si vogliono gettare le basi per una formulazione i cui caratteri generali rimarranno inalterati anche adottando modelli più raffinati e complessi. Le due equazioni fondamentali sono:

- equilibrio alla rotazione attorno all'asse elastico

$$K_T \Delta \vartheta = e \Delta P_e + qcSC_{MCA/\beta} \beta$$

- espressione dell'incremento di portanza totale dovuto alla deflessione dell'alettone e alla controreazione aeroelastica

$$\Delta P_e = qSC_{P/\alpha} \Delta \vartheta + qSC_{P/\beta} \beta$$

Considerando  $\Delta \vartheta$  e  $\Delta P_e$  come incognite del problema e  $\beta$  come un parametro si ha un sistema lineare di due equazioni in due incognite, dipendente dal parametro  $\beta$ , che in forma matriciale diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -qSC_{P/\alpha} \\ -e & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta P_e \\ \Delta \vartheta \end{Bmatrix} = qS \begin{Bmatrix} C_{P/\beta} \\ cC_{MCA/\beta} \end{Bmatrix} \beta \quad (1.15)$$

Il problema così impostato consente di ottenere l'incremento di portanza e la deformazione per ogni  $\beta$  assegnato. La pressione dinamica di inversione si ottiene quando  $\Delta P_e = 0$  qualunque sia  $\beta$ . Quindi, all'inversione:

$$\begin{bmatrix} 1 & -qSC_{P/\alpha} \\ -e & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta \vartheta \end{Bmatrix} = qS \begin{Bmatrix} C_{P/\beta} \\ cC_{MCA/\beta} \end{Bmatrix} \beta$$

questo consente di riformulare le matrici eliminando la prima colonna della matrice quadrata a primo membro:

$$\begin{Bmatrix} -qSC_{P/\alpha} \\ K_T \end{Bmatrix} \Delta \vartheta = qS \begin{Bmatrix} C_{P/\beta} \\ cC_{MCA/\beta} \end{Bmatrix} \beta$$

Le due equazioni rappresentano un sistema lineare, omogeneo, nelle incognite  $\Delta \vartheta$  e  $\beta$ :

$$\left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} - qS \begin{bmatrix} C_{P/\beta} & C_{P/\alpha} \\ cC_{MCA/\beta} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \beta \\ \Delta \vartheta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.16)$$

Si noti che l'equazione (1.16) si può ottenere direttamente dall'equazione (1.15) sostituendo la prima colonna della matrice a primo membro con il vettore dei termini noti e sostituendo  $\beta$  al posto di  $\Delta P_e$

nel vettore delle incognite. Il sistema ammette soluzioni non banali solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo: si tratta di un problema agli autovalori. Imponendo

$$\det \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} - qS \begin{bmatrix} C_{P/\beta} & C_{P/\alpha} \\ cC_{MCA/\beta} & 0 \end{bmatrix} \right) = -qS (K_T C_{P/\beta} + qS C_{MCA/\beta} C_{P/\alpha}) = 0$$

si trovano due autovalori:

1.  $q_i = 0$  valore banale che tuttavia risponde anch'esso alla definizione data di pressione dinamica di inversione
2.  $q_i = -K_T / (cS C_{MCA/\beta} C_{P/\alpha} / C_{P/\beta})$  che è l'effettiva pressione dinamica di inversione corrispondente al valore ricavato nell'equazione (1.13).

### Approccio in flessibilità al problema dell'inversione

Un altro modo per affrontare il problema è quello di considerare un approccio in flessibilità. In questo caso l'angolo di torsione elastica dipende dal momento torcente applicato secondo la relazione:

$$\vartheta = C^{\vartheta\vartheta} M_T \quad (1.17)$$

dove:

- $\vartheta$  angolo di torsione
- $C^{\vartheta\vartheta}$  coefficiente di influenza
- $M_T$  momento torcente attorno all'asse elastico

Come per l'approccio agli spostamenti si considerino solo gli incrementi dei carichi aerodinamici conseguenti alla deflessione della superficie di controllo. In questo caso la variazione di momento torcente rispetto all'asse elastico, dovuta ad una deflessione  $\beta$ , è data da:

$$M_T = e\Delta P + \Delta M_A = qS (eC_P + cC_{MCA}) \quad (1.18)$$

dove:

$$\begin{aligned} C_P &= C_{P/\beta}\beta + C_{Pe} \\ C_{MCA} &= C_{MCA/\beta}\beta \end{aligned} \quad (1.19)$$

essendo  $C_{Pe}$  la variazione di coefficiente di portanza conseguente alla deformabilità strutturale, che nell'approccio in flessibilità assume il significato di incognita. Le espressioni (1.19) sostituite nell'equazione (1.18) permettono di ottenere:

$$M_T = qS (e (C_{P/\beta}\beta + eC_{Pe}) + cC_{MCA/\beta}\beta)$$

che a sua volta, sostituita nell'equazione (1.17), dà luogo a

$$\vartheta = C^{\vartheta\vartheta} qS (e (C_{P/\beta}\beta + C_{Pe}) + cC_{MCA/\beta}\beta)$$

Per poter impostare l'equazione di congruenza aeroelastica occorre esprimere la variazione di incidenza dovuta alla variazione di carico aerodinamico conseguente alla deformabilità strutturale:

$$\alpha_e = \frac{\Delta P_e}{qS C_{P/\alpha}} = \frac{C_{Pe}}{C_{P/\alpha}}$$

la congruenza aeroelastica,  $\alpha_e = \vartheta$ , dà luogo, dunque, alla seguente equazione:

$$\frac{C_{Pe}}{C_{P/\alpha}} = C^{\vartheta\vartheta} qS (e (C_{P/\beta}\beta + C_{Pe}) + cC_{MCA/\beta}\beta)$$

che, risolta rispetto all'incognita principale  $C_{Pe}$ , permette di ottenere:

$$C_{Pe} = \frac{C_{P/\beta} + \frac{c}{e}C_{MCA/\beta}}{\frac{1}{C^{\vartheta\vartheta}qeSC_{P/\alpha}} - 1}\beta$$

Analogamente all'equazione di equilibrio (1.8), l'equazione di congruenza permette di calcolare l'incognita del problema aeroelastico, nota la deflessione  $\beta$ . Le prestazioni aerodinamiche vengono valutate sostituendo l'espressione di  $C_{Pe}$  nella prima delle (1.19). Si ottiene così il coefficiente di portanza effettivo, che tiene conto dei fenomeni aeroelastici:

$$C_P = C_{P/\beta}\beta + C_{Pe} = \frac{\frac{C_{P/\beta}}{C_{P/\alpha}}\frac{1}{qeSC^{\vartheta\vartheta}} + \frac{c}{e}C_{MCA/\beta}}{\frac{1}{C^{\vartheta\vartheta}qeSC_{P/\alpha}} - 1}\beta \quad (1.20)$$

La superficie di controllo diventa completamente inefficace se la variazione totale di coefficiente di portanza si annulla per qualunque  $\beta$ , cioè se il numeratore della (1.20) si annulla:

$$\frac{C_{P/\beta}}{C_{P/\alpha}}\frac{1}{qeSC^{\vartheta\vartheta}} + \frac{c}{e}C_{MCA/\beta} = 0$$

dalla quale si può ricavare sia la pressione dinamica che la velocità di inversione:

$$q_i = -\frac{C_{P/\beta}/C_{P/\alpha}}{cSC_{MCA/\beta}C^{\vartheta\vartheta}}$$

L'espressione di  $q_i$  è identica a quella ottenuta con l'approccio agli spostamenti considerando  $C^{\vartheta\vartheta} = 1/K_T$ . L'indice di prestazione del sistema anche in questo caso è:

$$\frac{C_{Pe}}{C_{Pr}} = \frac{\frac{1}{qeSC_{P/\alpha}C^{\vartheta\vartheta}} + \frac{c}{e}\frac{C_{MCA/\beta}}{C_{P/\beta}}}{\frac{1}{C^{\vartheta\vartheta}qeSC_{P/\alpha}} - 1} = 1 - \frac{q}{q_i} \left( \frac{1 - q_i/q_D}{1 - q/q_D} \right) = \frac{1 - q/q_i}{1 - q/q_D}$$

#### 1.1.4 Prestazioni di manovra

Nei paragrafi precedenti il problema dell'inversione del comando è stato trattato limitatamente alla singola semiala. L'effetto del comando sull'intero velivolo non è stato considerato e, di conseguenza, non è stato possibile valutare gli effetti aeroelastici di una particolare manovra indotta dal comando. Applicando le medesime approssimazioni strutturali è possibile estendere il problema ad un modello che rappresenti l'intero velivolo e che consideri la dinamica del moto rigido indotto dal comando; il problema assume così una struttura più realistica, anche se rimane semplificato. In particolare verranno esaminate la manovra di rollio e di richiamata simmetrica. Il modello geometrico strutturale è rappresentato in figura 1.4. Dal punto di vista strutturale la flessibilità dell'ala viene sempre concentrata nel vincolo; viene tuttavia meno, per la manovra di rollio, il vantaggio di considerare le caratteristiche geometriche ed aerodinamiche costanti in apertura: si vedrà, infatti, che una parte dell'incidenza, quella dipendente dal moto di rollio, varia necessariamente con l'apertura, eliminando la possibilità di riferirsi ad un'unica sezione tipica. Le forze agenti sul sistema verranno ottenute integrando lungo l'apertura le caratteristiche dei singoli profili. Si introducono, in questo schema, i moti rigidi del velivolo, dei quali verrà considerata la dinamica. In effetti il problema della risposta ad un comando è un problema dinamico: si tratta di studiare la risposta del sistema ad una forzante, rappresentata dalla legge di comando  $\beta(t)$ , che varia nel tempo. Il moto del sistema può essere rappresentato come la sovrapposizione di due diversi tipi di moto:

- il moto rigido

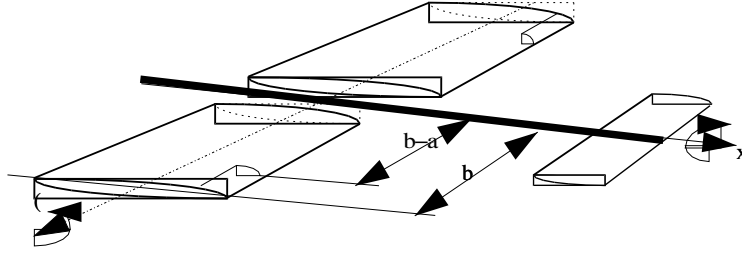


Figura 1.4: Modello geometrico strutturale

- il moto dovuto alla deformazione della struttura

In seguito si giustificherà l'ipotesi che il contenuto in frequenza della forzante sia tale da non eccitare dinamicamente il moto dovuto alla deformazione della struttura (si veda la parte relativa alla residualizzazione della dinamica). La struttura si deforma come se la forzante fosse applicata staticamente: la risposta è statica. Questa approssimazione è applicabile per tutti i sistemi dinamici quando il contenuto in frequenza della forzante è molto inferiore alle frequenze proprie del sistema. Nello schema in esame questa approssimazione porta, in concreto, a considerare l'equilibrio statico per quanto riguarda la deformazione elastica (la rotazione delle semiali attorno all'asse elastico, dove la rigidità strutturale è simulata dalla molla torsionale), mentre si considererà l'equilibrio dinamico relativamente ai moti rigidi. Quindi le uniche forze di inerzia considerate saranno relative ai moti rigidi. Un'approssimazione di questo tipo prende il nome di residualizzazione della dinamica del velivolo. Attraverso di essa è possibile, indipendentemente dalla complessità dei modelli strutturali ed aerodinamici considerati, trattare staticamente la deformazione e dinamicamente il moto rigido.

### Manovra di rollio: forze agenti sul sistema

Come affermato in precedenza, la linearità consente di sovrapporre alla configurazione in equilibrio aeroelastico gli effetti (spostamenti e forze) dovuti alla deflessione dell'alettone. I termini noti  $P(\alpha_0)$ ,  $M(\alpha_0)$  e quelli dovuti alla deformazione a loro conseguente  $P(\vartheta)$  possono venire eliminati. Le forze dovute alla deflessione dell'alettone possono essere espresse come:

- Portanza per unità di apertura

L'incidenza  $\alpha(y)$  è composta da due termini:

1. rotazione  $\Delta\vartheta$ , dovuta alla deformabilità della struttura sotto l'azione degli incrementi di carico conseguenti alla deflessione degli alettoni
2. incidenza cinematica dovuta al moto di rollio, esprimibile come:

$$\alpha_c(y) = -y \frac{p}{V_\infty}$$

dove  $p$  è la velocità angolare di rollio. Quindi:

$$\alpha(y) = \Delta\vartheta - y \frac{p}{V_\infty}$$

L'espressione vale per entrambe le semiali considerando che, con il sistema di riferimento adottato,  $y > 0$  per la semiala che si alza e  $y < 0$  per quella che si abbassa quando  $p > 0$ . L'espressione della portanza per unità di apertura è quindi:

$$\begin{aligned} \Delta P &= qc(y) \left( C_{P/\alpha} \Delta\vartheta - C_{P/\alpha} y \frac{p}{V_\infty} \right) \quad \text{per } 0 < y < b-a \\ \Delta P &= qc(y) \left( C_{P/\alpha} \Delta\vartheta - C_{P/\alpha} y \frac{p}{V_\infty} + C_{P/\beta} \beta \right) \quad \text{per } b-a < y < b \end{aligned}$$



- Momento aerodinamico

La deflessione dell'alettone provoca una variazione del momento rispetto al centro aerodinamico che, per unità di apertura, si esprime con

$$\begin{aligned} \Delta M_A &= 0 \quad \text{per} \quad 0 < y < b - a \\ \Delta M_A &= qc^2(y) C_{MCA/\beta} \beta \quad \text{per} \quad b - a < y < b \end{aligned}$$

- Forze d'inerzia

Si considerano solo quelle relative al moto di rollio. La forza d'inerzia per unità d'apertura, applicata al centro di gravità C.G. di ogni sezione, è:

$$f_i = -m\dot{p}y$$

dove con  $m = m(y)$  si è indicata la massa per unità di apertura. Il momento originato da  $f_i$  rispetto all'asse elastico è positivo nell'ipotesi di C.G. posto posteriormente ad A.E. e vale:

$$m_i = m\dot{p}yd$$

### Manovra di rollio: scrittura delle equazioni

Il problema viene ritenuto simmetrico rispetto all'asse di rollio; affinché la simmetria del problema sia rispettata occorre non solo che il sistema sia simmetrico dal punto di vista geometrico, ma anche che le derivate aerodinamiche non varino per incidenze positive e negative. Inoltre è necessario che la deflessione dell'alettone sia tale che  $\beta_{DX} = -\beta_{SX}$ . Sfruttando la simmetria è possibile scrivere le equazioni di equilibrio riferendosi ad una singola semiala ed a metà velivolo; nel modello semplificato in esame le equazioni sono due:

1. equilibrio dinamico attorno all'asse di rollio
2. equilibrio aeroelastico attorno all'asse elastico (compaiono solo le forze di inerzia dovute al rollio).

- Equilibrio attorno all'asse di rollio

Il momento delle forze aerodinamiche attorno all'asse di rollio è dato da:

$$\begin{aligned} M_p &= q \int_0^b c(y) y C_{P/\alpha} \Delta\vartheta dy \\ &\quad - q \int_0^b c(y) y C_{P/\alpha} y \frac{p}{V_\infty} dy + q \int_{b-a}^b c(y) y C_{P/\beta} \beta dy \end{aligned}$$

che deve uguagliare la derivata del momento della quantità di moto rispetto all'asse di rollio:

$$\begin{aligned} J\dot{p} &= q \left( \int_0^b c(y) y C_{P/\alpha} dy \right) \Delta\vartheta \\ &\quad - q \left( \int_0^b c(y) y^2 C_{P/\alpha} dy \right) \frac{p}{V_\infty} + q \left( \int_{b-a}^b c(y) y C_{P/\beta} dy \right) \beta \end{aligned}$$

Il tutto può essere riscritto in forma compatta:

$$J\dot{p} = qK_{p\vartheta}\Delta\vartheta - qK_{pp}\frac{p}{V_\infty} + qK_{p\beta}\beta \quad (1.21)$$

- Equilibrio attorno all'asse elastico

$$e\Delta P_e + \Delta M_A + M_i = 0$$

Esplicitando i termini, si ha:

$$\begin{aligned} & q \int_0^b c(y) eC_{P/\alpha} \Delta\vartheta \, dy - q \int_0^b c(y) eC_{P/\alpha} y \frac{p}{V_\infty} \, dy \\ & + q \int_{b-a}^b c(y) eC_{P/\beta} \beta \, dy + q \int_{b-a}^b c^2(y) C_{MCA/\beta} \beta \, dy \\ & + \int_0^b m dy \dot{p} \, dy - K_T \Delta\vartheta = 0 \end{aligned}$$

e riordinandoli risulta:

$$\begin{aligned} & q \left( \int_0^b c(y) eC_{P/\alpha} \, dy \right) \Delta\vartheta - q \left( \int_0^b c(y) e y C_{P/\alpha} \, dy \right) \frac{p}{V_\infty} \\ & + q \left( \int_{b-a}^b c(y) eC_{P/\beta} \, dy + \int_{b-a}^b c^2(y) C_{MCA/\beta} \, dy \right) \beta \\ & + \left( \int_0^b m dy \, dy \right) \dot{p} - K_T \Delta\vartheta = 0 \end{aligned}$$

Il tutto può essere scritto in forma compatta come:

$$qK_{\vartheta\vartheta} \Delta\vartheta - qK_{\vartheta p} \frac{p}{V_\infty} + qK_{\vartheta\beta} \beta + K_{\vartheta\dot{p}} \dot{p} = K_T \Delta\vartheta \quad (1.22)$$

Le equazioni (1.21) e (1.22) possono essere raggruppate in un unico sistema:

$$\begin{aligned} J\dot{p} &= qK_{p\vartheta} \Delta\vartheta - qK_{pp} \frac{p}{V_\infty} + qK_{p\beta} \beta \\ K_T \Delta\vartheta &= qK_{\vartheta\vartheta} \Delta\vartheta - qK_{\vartheta p} \frac{p}{V_\infty} + qK_{\vartheta\beta} \beta + K_{\vartheta\dot{p}} \dot{p} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Normalmente il termine  $K_{\vartheta\dot{p}}$  è trascurabile rispetto agli altri, questo equivale a supporre che centro di taglio e baricentro coincidano.

### Manovra di rollio: correzione delle derivate aerodinamiche

La soluzione del sistema (1.23) può essere affrontata calcolando il valore di  $\Delta\vartheta$  in funzione degli altri parametri dalla seconda equazione e sostituendo tale risultato nell'equazione del rollio:

$$\Delta\vartheta = -\frac{qK_{\vartheta p}}{K_T - qK_{\vartheta\vartheta}} \frac{p}{V_\infty} + \frac{qK_{\vartheta\beta}}{K_T - qK_{\vartheta\vartheta}} \beta \quad (1.24)$$

La deformazione  $\Delta\vartheta$  è calcolabile solo se:

$$K_T - qK_{\vartheta\vartheta} \neq 0$$

cioè se non si è in condizioni di divergenza torsionale. Questa grandezza è la rigidità aeroelastica. Sostituendo l'equazione (1.24) nell'equazione (1.21) si ottiene:

$$J\dot{p} = -q \left( K_{pp} + \frac{qK_{p\vartheta}K_{\vartheta p}}{K_T - qK_{\vartheta\vartheta}} \right) \frac{p}{V_\infty} + q \left( K_{p\beta} + \frac{qK_{p\vartheta}K_{\vartheta\beta}}{K_T - qK_{\vartheta\vartheta}} \right) \beta \quad (1.25)$$

Confrontando con la soluzione rigida:

$$J\dot{p} = -qK_{pp} \frac{p}{V_\infty} + qK_{p\beta} \beta$$

si può notare come la struttura dell'equazione sia rimasta la stessa a meno della variazione dei coefficienti di  $p/V_\infty$  e di  $\beta$ . In conclusione si osserva che:

1. l'equazione della meccanica del volo viene corretta dall'effetto aeroelastico mediante una modifica delle derivate aerodinamiche;
2. la correzione è tanto maggiore quanto più la pressione dinamica  $q$  si avvicina al valore  $q_D$ . Si giustifica anche per il caso della manovra il fatto che il rapporto  $q/q_D$  è indice dell'errore che si compie trascurando gli effetti aeroelastici non tanto nel calcolo della deformata quanto nel calcolo delle prestazioni.

### Manovra di rollio: problemi consistenti

Il sistema (1.23) è costituito da due equazioni, di cui una differenziale: si tratta di un sistema algebrico-differenziale<sup>4</sup>. Al di là delle implicazioni matematiche legate alla risoluzione di tali sistemi, il significato intrinseco è che una parte del sistema contiene informazioni dinamiche, mentre un'altra contiene solo informazioni statiche, o meglio, informazioni la cui dinamica è trascurabile nell'ambito del problema che viene analizzato. Il trascurare o meno la parte dinamica di un sistema si basa essenzialmente sull'identificazione di che cosa è "lento" e "veloce", quindi richiede la definizione di una scala dei tempi. Nell'aeroelasticità statica, tipicamente si considera "lenta" la dinamica legata al moto complessivo del velivolo, quindi alle manovre e alla meccanica del volo in genere; di conseguenza vengono mantenute le derivate dei gradi di libertà che descrivono il moto globale. Al contrario, si considera "veloce" la dinamica legata alla deformabilità del velivolo; quindi si trascura l'inerzia dei termini di deformazione strutturale. Questo discorso verrà approfondito ed ampliato nel paragrafo 1.4.

La manovra di rollio è descritta da un sistema lineare in 5 incognite:

$$p, \dot{p}, \Delta\vartheta, \beta, q$$

Un problema consistente si ottiene riducendo il numero di incognite a quello delle equazioni disponibili nel sistema in analisi, fissando opportunamente il valore delle incognite eliminate in modo da determinare univocamente una condizione stazionaria del sistema. Esempi di problemi consistenti sono:

- **Calcolo della velocità a regime**

Fissata la velocità angolare attorno all'asse di rollio, è possibile determinare la deflessione dell'alettone in grado di produrla. Dall'equazione (1.25) si ricava:

$$\beta = \frac{K_{pp} + \frac{qK_{p\vartheta}K_{\vartheta p}}{K_T - qK_{\vartheta\vartheta}}}{K_{p\beta} + \frac{qK_{p\vartheta}K_{\vartheta\beta}}{K_T - qK_{\vartheta\vartheta}}} \frac{p}{V_\infty}$$

essendo:  $p = \bar{p}$ ,  $\dot{p} = 0$ ,  $q = \bar{q}$ .

- **Moto incipiente**

È possibile determinare l'accelerazione di rollio iniziale per una data deflessione dell'alettone:

$$\dot{p} = \frac{K_{p\beta} + \frac{qK_{p\vartheta}K_{\vartheta\beta}}{K_T - qK_{\vartheta\vartheta}}}{\frac{J}{q} - \frac{K_{p\vartheta}K_{\vartheta\dot{p}}}{K_T - qK_{\vartheta\vartheta}}} \beta$$

ponendo  $p = 0$ ,  $q = \bar{q}$ .

- **Inversione del comando**

Il problema dell'inversione comporta la ricerca della pressione dinamica per la quale  $\dot{p} = p = 0$  per ogni deflessione  $\beta$ . Il problema assume la forma:

$$q \left( K_{p\beta} + \frac{qK_{p\vartheta}K_{\vartheta\beta}}{K_T - qK_{\vartheta\vartheta}} \right) \beta = 0$$

<sup>4</sup>Un sistema di equazioni si dice algebrico-differenziale quando contiene sia equazioni algebriche che differenziali; se si considera ad esempio il caso di un sistema lineare del tipo  $[M]\{\dot{y}\} + [N]\{y\} = \{f\}$ , esso è algebrico-differenziale quando la matrice  $[M]$  è strutturalmente singolare.

e ammette soluzioni non banali se e solo se:

$$K_{p\beta} + \frac{qK_{p\vartheta}K_{\vartheta\beta}}{K_T - qK_{\vartheta\vartheta}}$$

La pressione dinamica di inversione è quindi il valore  $q_i$  che annulla il coefficiente di  $\beta$  nell'equazione del moto di rollio corretta per l'effetto aeroelastico. Esplicitando l'ultima equazione rispetto alla pressione dinamica d'inversione,  $q_i$ , si ha:

$$q_i = -\frac{K_T K_{p\beta}}{K_{p\vartheta} K_{\vartheta\beta} - k_{p\beta} K_{\vartheta\vartheta}}$$

e ricordando le espressioni dei coefficienti  $K$ :

$$\begin{aligned} K_{p\beta} &= \int_{b-a}^b c(y) y C_{P/\beta} dy \\ K_{p\vartheta} &= \int_0^b c(y) y C_{P/\alpha} dy \\ K_{\vartheta\beta} &= \int_{b-a}^b (c(y) e C_{P/\beta} + c^2(y) C_{MCA/\beta}) dy \\ K_{\vartheta\vartheta} &= \int_0^b c(y) e C_{P/\alpha} dy \end{aligned}$$

In analogia con il problema del paragrafo 1.1.3 si consideri un'ala semplificata con caratteristiche costanti in apertura ed un alettone esteso su tutta la semiala, per cui i coefficienti risultano:

$$\begin{aligned} K_{p\beta} &= Sa C_{P/\beta} \left(1 - \frac{a}{2b}\right) \\ K_{p\vartheta} &= S \frac{b}{2} C_{P/\alpha} \\ K_{\vartheta\beta} &= ac (e C_{P/\beta} + c C_{MCA/\beta}) \\ K_{\vartheta\vartheta} &= Se C_{P/\alpha} \end{aligned}$$

Quindi la pressione dinamica d'inversione può essere scritta come:

$$q_i = \frac{K_T C_{P/\beta} \left(1 - \frac{a}{2b}\right)}{\frac{S}{2} C_{P/\alpha} \left(c C_{MCA/\beta} - e C_{P/\beta} \left(1 - \frac{a}{b}\right)\right)}$$

che coincide con l'equazione (1.13) determinata per la semiala vincolata ad un riferimento fisso, a patto di integrare correttamente i coefficienti aerodinamici. Si deduce quindi che l'inversione dei comandi è un fenomeno che non dipende dalla manovra considerata ma riguarda la singola semiala.

### Manovra di rollio: metodo matriciale

Il problema viene impostato senza tenere in alcun conto che una delle due equazioni è differenziale. L'interesse è concentrato sui problemi consistenti. In forma generale si descrive il sistema mediante una matrice dei coefficienti delle coordinate libere e più vettori dei termini noti, ciascuno dipendente da un parametro. Inizialmente le coordinate libere,  $\{q\}$ , sono l'angolo di rollio  $\varphi$  e la deformazione torsionale  $\Delta\vartheta$ . L'angolo di rollio  $\varphi$  viene considerato solo formalmente una coordinata libera, poiché nessuna forza dipende da esso. Il sistema (1.23) può essere quindi riscritto come:

$$([K_S] - q[K_A]) \{q\} = \{I\} \dot{p} + q \{C_A\} \frac{p}{V_\infty} + q \{B\} \beta \quad (1.26)$$

dove i singoli termini hanno le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} [K_S] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \\ [K_A] &= \begin{bmatrix} 0 & K_{p\vartheta} \\ 0 & K_{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix} \\ \{I\} &= \begin{bmatrix} -J \\ 0 \end{bmatrix} \\ \{C_A\} &= \begin{bmatrix} -K_{pp} \\ -K_{\vartheta p} \end{bmatrix} \\ \{B\} &= \begin{bmatrix} K_{p\beta} \\ K_{\vartheta\beta} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

I problemi consistenti vengono costruiti modificando il vettore delle coordinate libere, o meglio modificandone solo il primo elemento, visto che  $\Delta\vartheta$ , il grado di libertà aeroelastico, rimane sempre come incognita.

- **Calcolo della velocità a regime**

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} p/V_\infty \\ \Delta\vartheta \end{Bmatrix} \quad \dot{p} = 0 \quad \beta = \bar{\beta} \quad q = \bar{q}$$

Per cui, posto

$$\{K_{A\vartheta}\} = \begin{Bmatrix} K_{p\vartheta} \\ K_{\vartheta\vartheta} \end{Bmatrix}$$

il sistema (1.26) viene riscritto come:

$$([K_S] - q[\{C_A\}, \{K_{A\vartheta}\}])\{q\} = q\{B\}\beta$$

- **Moto incipiente**

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \Delta\vartheta \end{Bmatrix} \quad p = 0 \quad \beta = \bar{\beta} \quad q = \bar{q}$$

$$([K_S] - q[\{I\}, \{K_{A\vartheta}\}])\{q\} = q\{B\}\beta$$

- **Inversione del comando**

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \beta \\ \Delta\vartheta \end{Bmatrix} \quad \dot{p} = p = 0$$

$$([K_S] - q[\{B\}, \{K_{A\vartheta}\}])\{q\} = \{0\}$$

Il problema diviene omogeneo e si risolve come problema agli autovalori. Il vantaggio della formulazione matriciale è quello di mantenere inalterata la struttura del problema con l'aumentare dei gradi di libertà attribuiti al sistema.

## Manovra di richiamata

Sfruttando ancora l'estrema semplicità del modello in esame è possibile sviluppare la trattazione degli effetti aeroelastici sulla manovra di richiamata. Le linee generali dell'impostazione rimarranno inalterate nel passaggio a schemi strutturali ed aerodinamici più complessi. La richiamata è una manovra simmetrica, caratterizzata da un fattore di carico  $N$ , tale che:

$$P_T = Nm_T g$$

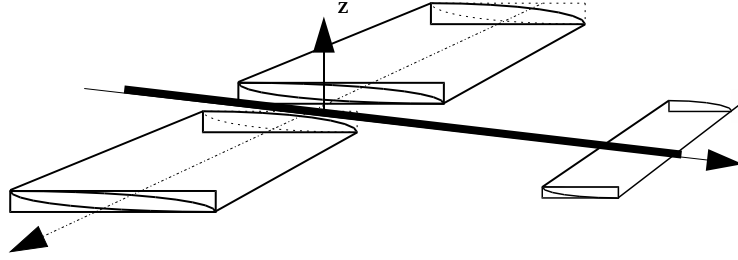


Figura 1.5: Manovra di richiamata

dove

$P_T$  portanza prodotta da tutte le superfici aerodinamiche del velivolo  
 $m_T$  massa totale del velivolo

Per realizzare la richiamata è necessario ottenere, rispetto alla condizione di volo rettilineo orizzontale uniforme, un aumento di portanza  $\Delta P_T$ , in conseguenza di una variazione di incidenza  $\Delta\alpha$ , tale per cui:

$$\Delta P_T = \Delta N m_T g$$

Come per il rollio, entrano in gioco i movimenti rigidi del velivolo. Analogamente al caso precedente si deve operare una residualizzazione della dinamica del sistema: i movimenti rigidi vengono considerati dal punto di vista dinamico e compaiono le corrispondenti forze d'inerzia, mentre la deformazione strutturale viene trattata in modo statico. L'ipotesi è che le forzanti, in questo caso le forze aerodinamiche originate dai piani di coda che modificano l'assetto del velivolo, varino così lentamente da non eccitare dinamicamente la deformabilità della struttura. Inoltre, per semplicità, viene trattata una manovra di richiamata stabilizzata in condizione istantaneamente "congelata", dove la velocità di rotazione del velivolo rispetto all'asse di beccheggio, in un riferimento assoluto, è costante, mentre la direzione della forza di gravità è perpendicolare al piano di riferimento del velivolo. Vengono considerati due gradi di libertà relativi al movimento rigido del velivolo: la traslazione verticale del baricentro  $h$  e l'angolo di beccheggio  $\alpha$ . Per poter collegare queste coordinate alle incidenze aerodinamiche sull'ala occorre, tuttavia, che esse siano riferite ad una terna di assi il cui asse  $X$  sia sempre parallelo alla tangente alla traiettoria del velivolo. In questo modo la variazione  $\Delta\alpha$  risulta essere effettivamente un'incidenza. L'ipotesi di manovra stabilizzata permette di non considerare alcuna coppia d'inerzia agente sul velivolo, mentre va considerata la forza d'inerzia  $\Delta N m_T g$ , distribuita secondo la distribuzione di massa del sistema. A differenza del caso del rollio, la variazione di incidenza dovuta alla manovra è la stessa per tutti i profili dell'ala; è possibile, pertanto, riferirsi ad un'ala semplificata con caratteristiche costanti in apertura. Il problema è simmetrico: ci si riferisce alla singola semiala ed a metà velivolo, per i quali si impostano tre equazioni:

1. Equazione di equilibrio alla rotazione attorno all'asse elastico della semiala semplificata
  2. Equazione di equilibrio alla traslazione verticale del semi-velivolo
  3. Equazione di equilibrio alla rotazione attorno all'asse di beccheggio del semi-velivolo.
- Equilibrio attorno all'asse elastico  
 Sovrapponendo le variazioni di forze e di spostamenti alla condizione di volo rettilineo uniforme orizzontale, le forze agenti sulla semiala risultano:

1. Variazione di portanza dovuta alla variazione di incidenza conseguente alla manovra ed alla deformabilità strutturale:

$$\Delta P = \Delta P_r + \Delta P_e = q S C_{P/\alpha} \Delta\alpha + q S C_{P/\alpha} \Delta\vartheta$$

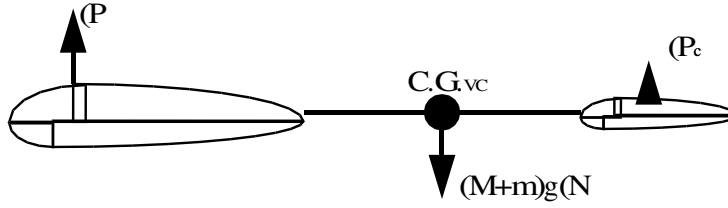


Figura 1.6: Equilibrio alla traslazione

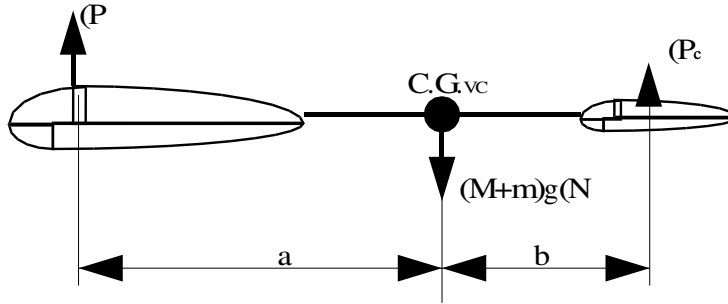


Figura 1.7: Equilibrio attorno all'asse di beccheggio

2. Forze d'inerzia conseguenti alla manovra:

$$\Delta F_i = \Delta N m g$$

dove  $m$  è la massa della semiala

3. Momento di richiamo elastico:

$$M_T = K_T \Delta \vartheta$$

L'equazione di equilibrio alla rotazione attorno all'asse elastico risulta:

$$K_T \Delta \vartheta - q e S C_{P/\alpha} \Delta \vartheta = q e S C_{P/\alpha} \Delta \alpha + d \Delta N m g$$

- Equilibrio alla traslazione

Con riferimento alla figura 1.4, dove:

|              |  |
|--------------|--|
| $C.G.VC$     | baricentro del velivolo completo         |
| $M$          | massa di metà velivolo (ali escluse)     |
| $\Delta P_c$ | variazione di portanza del piano di coda |

si ottiene:

$$\Delta P + \Delta P_c - (M + m) g \Delta N = 0$$

ovvero

$$q S C_{P/\alpha} \Delta \vartheta + q S C_{P/\alpha} \Delta \alpha + \Delta P_c - (M + m) g \Delta N = 0$$

- Equilibrio attorno all'asse di beccheggio

Si scelga, come polo di riduzione per i momenti, il baricentro del velivolo completo; si introducano inoltre le distanze:

|     |   |
|-----|---|
| $a$ | distanza fra il baricentro ed il C.A. dell'ala semplificata |
| $b$ | distanza fra il baricentro ed il C.A. del piano di coda     |

si ottiene:

$$a\Delta P = b\Delta P_c$$

da cui

$$qaSC_{P/\alpha}\Delta\vartheta + qaSC_{P/\alpha}\Delta\alpha - b\Delta P_c = 0$$

Le tre equazioni relative all'equilibrio costituiscono un sistema:

$$\begin{cases} (K_T - qeSC_{P/\alpha})\Delta\vartheta = qeSC_{P/\alpha}\Delta\alpha + dmg\Delta N \\ qSC_{P/\alpha}\Delta\vartheta + qSC_{P/\alpha}\Delta\alpha + \Delta P_c - (M + m)g\Delta N = 0 \\ qaSC_{P/\alpha}\Delta\vartheta + qaSC_{P/\alpha}\Delta\alpha - b\Delta P_c = 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

che è lineare, di tre equazioni nelle quattro incognite  $\Delta\vartheta$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta N$  e  $\Delta P_c$ . Il riferimento alla manovra stabilizzata evita la comparsa di un'equazione differenziale, come nel caso del rollio: in questo caso si considera direttamente solo una situazione a regime. Per creare dei problemi consistenti si deve fissare uno dei quattro parametri. Risolvendo la prima equazione del sistema (1.27), nell'incognita  $\Delta\vartheta$ , si ottiene l'espressione della "deformata" in funzione delle variazioni di incidenza e di fattore di carico relative alla manovra:

$$\Delta\vartheta = \frac{qeSC_{P/\alpha}\Delta\alpha + dmg\Delta N}{K_T - qeSC_{P/\alpha}} \quad (1.28)$$

la cui soluzione è possibile solo se  $K_T \neq qeSC_{P/\alpha}$ , ovvero se la pressione dinamica è diversa da quella di divergenza. La prima equazione rappresenta, infatti, l'equazione di equilibrio attorno all'asse elastico e si è visto che per  $q > q_D$  questo equilibrio è instabile, indipendentemente dai termini in  $\Delta N$  e  $\Delta\alpha$  che, per la prima equazione, rappresentano dei termini noti. Le stesse considerazioni sono valide anche nel caso del rollio: il problema della divergenza è quindi indipendente dalla manovra considerata e riguarda la singola semiala. Per tale motivo esso può venire studiato separatamente, considerando la singola semiala vincolata ad un riferimento fisso: i movimenti rigidi del velivolo non influenzano il problema relativo alla divergenza. Concettualmente si tratta di un discorso analogo a quello fatto per la pressione dinamica d'inversione nel paragrafo 1.1.3. Sostituendo la soluzione (1.28) nella seconda e terza equazione del sistema (1.27) si ottengono le equazioni di equilibrio alla traslazione ed al beccheggio relative alla manovra di richiamata stabilizzata, corrette dagli effetti aeroelastici. Ciò è concettualmente analogo alla correzione delle derivate di stabilità viste nel caso della manovra di rollio. Nella pratica interessano due specifici problemi consistenti: determinazione della deformata torsionale  $\Delta\vartheta$  conseguente ad un valore fissato di  $\Delta N$ ; determinazione del fattore di carico  $\Delta N$  conseguente ad una variazione assegnata di incidenza  $\Delta\alpha$ .

## 1.2 Ala dritta

Nella trattazione seguente, relativa all'ala dritta, l'ala viene considerata rigida in corda, avente asse elastico perpendicolare al piano di simmetria della fusoliera; inoltre, per ora, si ritiene quest'ultima vincolata nello spazio. È possibile schematizzare la struttura precedente con una trave avente asse parallelo all'asse elastico dell'ala ed una estremità incastrata. Il modello strutturale adottato è quindi lo schema a trave, in cui gli spostamenti dei punti della struttura vengono espressi in funzione degli spostamenti dei punti dell'asse elastico. Ai fini della trattazione dei problemi aeroelastici vengono considerate solo due variabili:

- $w(x)$  spostamento nella direzione di applicazione della portanza ( $z$ );
- $\vartheta(x)$  rotazione della generica sezione normale all'asse elastico.

Non vengono presi in considerazione gli spostamenti assiali e, analogamente al modello adottato nel caso precedente, gli spostamenti orizzontali, in direzione  $y$ , per l'elevata rigidezza strutturale in questa



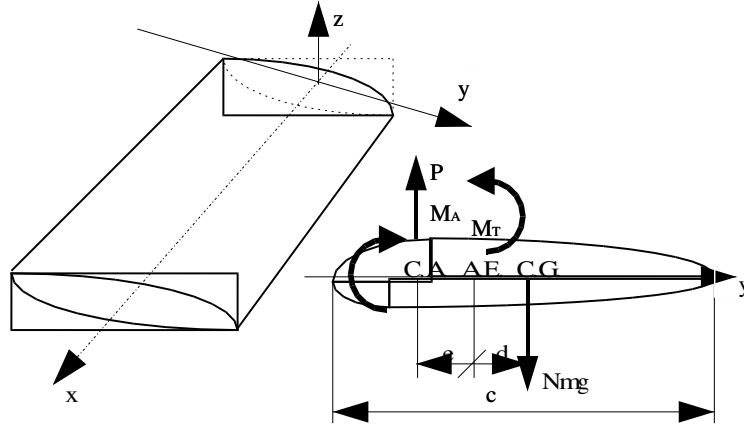


Figura 1.8: Convenzioni

direzione e per la trascurabilità della resistenza aerodinamica  $R$ . Come ulteriore semplificazione si ritengono gli assi coordinati coincidenti con gli assi principali di inerzia delle sezioni. Gli spostamenti vengono correlati alle azioni interne dalle due relazioni costitutive:

$$\begin{aligned} w'' &= \frac{M_f}{EJ} \\ \vartheta' &= \frac{M_t}{GJ} \end{aligned} \quad (1.29)$$

dove  $EJ$  e  $GJ$  sono, rispettivamente, le rigidezze flessionali e torsionali equivalenti della sezione. È opportuno notare che i parametri  $EJ$  e  $GJ$ , sebbene richiamino le definizioni convenzionali delle rigidezze di travi isotrope, date dal prodotto di un parametro costitutivo del materiale ( $E$  o  $G$ ) e di una caratteristica geometrica della sezione di trave ( $J$ , che nel caso della flessione rappresenta il momento di second'ordine attorno all'asse di flessione, mentre nel caso della torsione rappresenta il momento polare), rappresentano in realtà dei coefficienti costitutivi a sé. Infatti le relazioni costitutive espresse dalle (1.29) valgono anche per sezioni di travi più complesse, ad esempio costituite da materiali diversi e quindi non omogenee, o da materiali anisotropi, come ad esempio i compositi. Viene implicitamente assunta l'approssimazione ingegneristica per cui le deformazioni a scorrimento sono trascurabili, e quindi il taglio viene ricavato dall'equazione di equilibrio come derivata del momento flettente  $M_f$ . Lo schema strutturale a trave può essere adottato con buoni risultati nel caso di ali ad elevato allungamento. Per quanto riguarda invece l'aerodinamica, si assume che sia applicabile la teoria delle strisce, considerando i singoli profili isolati. Si può comunque passare ad un modello più raffinato e realistico, che consideri gli effetti di mutua influenza fra i profili, adottando la teoria della linea portante (di *Prandtl*).

### 1.2.1 Principio dei Lavori Virtuali ed equazioni di equilibrio aeroelastico

Viene affrontato inizialmente il problema del calcolo della risposta statica in condizioni simmetriche di volo. Il problema viene formulato con un approccio agli spostamenti, utilizzando direttamente il Principio dei Lavori Virtuali (PLV). La simmetria del problema consente di riferirsi alla singola semiala, a patto di considerare un sistema di vincolo alla radice coerente con le condizioni di volo simmetrico; non considerando, per ora, il moto rigido del velivolo, l'ala viene pensata incastrata alla radice. Per completezza si considera una generica condizione di volo simmetrico caratterizzata da un fattore di carico  $N$ . I problemi consistenti relativi alla manovra simmetrica verranno analizzati in seguito.

**Forma completa del Principio dei Lavori Virtuali per l'ala dritta**

Considerando l'ala dritta di Figura 1.8, i carichi aerodinamici per unità di apertura dipendono solo dalla variabile  $\vartheta$ :

$$\begin{aligned} P &= qc(C_{Pr} + C_{Pe}) = qc(C_{P0} + C_{P/\alpha}\alpha) + qcC_{P/\alpha}\vartheta \\ M_{CA} &= qc^2C_{MCA} \end{aligned}$$

Si noti come il momento attorno al centro aerodinamico non dipenda dalla deformazione. Per poter valutare la variazione dei carichi aerodinamici dovuti alla deformabilità strutturale dell'ala si può utilizzare il PLV comprendendo tutte le componenti dello stato di sforzo e di deformazione e tutte le sollecitazioni esterne.

- **Lavoro interno**

$$\delta L_i = \int_0^L EJw''\delta w'' dx + \int_0^L GJ\vartheta'\delta\vartheta' dx$$

- **Lavoro esterno**

Va scritto tenendo conto dei punti di applicazione dei carichi:

$$\delta L_e = \int_0^L M_{CA}\delta\vartheta dx + \int_0^L P\delta w_{CA} dx - \int_0^L Nmg\delta w_{CG} dx$$

È possibile riferirsi alle sole coordinate  $w$  e  $\vartheta$  utilizzando le seguenti relazioni di trasformazione:

$$\begin{aligned} w_{CA} &= w + e\vartheta \\ w_{CG} &= w - d\vartheta \end{aligned}$$

le cui variazioni virtuali sono

$$\begin{aligned} \delta w_{CA} &= \delta w + e\delta\vartheta \\ \delta w_{CG} &= \delta w - d\delta\vartheta \end{aligned}$$

La trasformazione è equivalente ad una riduzione del sistema di forze rispetto all'asse elastico:

$$\delta L_e = \int_0^L (P - Nmg)\delta w dx + \int_0^L (M_{CA} + eP + dNmg)\delta\vartheta dx$$

Alla fine si ottiene:

$$\begin{aligned} &\int_0^L EJw''\delta w'' dx + \int_0^L GJ\vartheta'\delta\vartheta' dx \\ &= \int_0^L (P - Nmg)\delta w dx + \int_0^L (M_{CA} + eP + dNmg)\delta\vartheta dx \end{aligned}$$

L'arbitrarietà dello spostamento virtuale consente di separare i termini flessionali da quelli torsionali. Il PLV si può dividere in due equazioni:

$$\int_0^L EJw''\delta w'' dx = \int_0^L (P - Nmg)\delta w dx \quad (1.30)$$

$$\int_0^L GJ\vartheta'\delta\vartheta' dx = \int_0^L (M_{CA} + eP + dNmg)\delta\vartheta dx \quad (1.31)$$

A questo punto si pone il problema se le due equazioni possono essere disaccoppiate o meno. La parte relativa al lavoro interno è sicuramente disaccoppiata; si devono esaminare i termini che rappresentano il lavoro esterno. L'accoppiamento si verifica quando i carichi esterni correlati ad una coordinata libera del modello risultano dipendenti dall'altra. Nell'ala dritta questo si verifica solo per i termini flessionali (1.30):  $P$  che lavora per  $\delta w$  dipende da  $\vartheta$ . L'equazione della torsione (1.31) non dipende da  $w$ . Di

conseguenza si possono studiare separatamente torsione e flessione: si tratta inizialmente la torsione e, determinata  $\vartheta = \vartheta(x)$ , si studia la flessione. Si noti che nello schema dell'ala diritta l'effetto aeroelastico è presente solo nella torsione, perché i carichi aerodinamici dipendono solo da essa, per cui solo per la torsione si può parlare di retroazione aeroelastica, di rigidità aerodinamiche ed aeroelastiche e, in definitiva, di pressione dinamica di divergenza.

### Equivalenza fra PLV ed equazioni differenziali di equilibrio

Da quanto detto in precedenza, per le ali diritte solo la torsione dà luogo ad effetti aeroelastici e può essere trattata separatamente; quindi si scrivono, anche se impropriamente, solo le equazioni riferite alla torsione (1.31). Da questa equazione, che esprime il lavoro compiuto da forze e momenti per la torsione, è possibile ricavare l'equazione differenziale di equilibrio alla torsione integrando per parti e ponendo come condizioni al contorno:

$$\begin{aligned}\vartheta(x=0) &= 0 && \text{condizione di congruenza alla radice alare} \\ GJ\vartheta'(x=L) &= 0 && \text{condizione naturale di ala scarica all'estremità}\end{aligned}$$

per cui, mediante integrazione per parti, si può scrivere:

$$\begin{aligned}\int_0^L GJ\vartheta'\delta\vartheta' dx &= GJ\vartheta'\delta\vartheta|_0^L - \int_0^L (GJ\vartheta')'\delta\vartheta dx \\ &= GJ\vartheta'(L)\delta\vartheta(L) - GJ\vartheta'(0)\delta\vartheta(0) - \int_0^L (GJ\vartheta')'\delta\vartheta dx\end{aligned}$$

Poiché lo spostamento virtuale deve essere congruente, deve necessariamente valere la condizione:

$$\delta\vartheta(0) = 0$$

Essa può considerarsi verificata a priori in quanto gli spostamenti virtuali sono arbitrari e quindi è sufficiente sceglierli in modo opportuno. A convergenza anche il secondo termine di contorno, che esprime una condizione naturale, si annulla. I termini fuori dal segno di integrale sono dunque nulli; imponendo l'uguaglianza dei termini sotto integrale si ottiene:

$$\frac{d}{dx}(GJ\vartheta') + qecC_{P/\alpha}\vartheta = -q(c^2C_{MCA} + ecC_P(\alpha_0)) - dNmg$$

Si è così verificato che il PLV equivale alle equazioni differenziali di equilibrio e contiene inoltre automaticamente le condizioni al contorno.

### 1.2.2 Problema di risposta statica in volo rettilineo, orizzontale ed uniforme

Le equazioni precedenti, riferite alla generica condizione simmetrica di volo, verranno utilizzate per la determinazione della configurazione di equilibrio e delle azioni interne agenti nella struttura in condizioni di volo rettilineo, orizzontale ed uniforme. Il coefficiente di carico va quindi considerato unitario.

#### Soluzione approssimata: applicazione del metodo di Ritz

Il PLV permette di applicare metodi approssimati di risoluzione, indispensabili quando le caratteristiche geometriche ed elastiche della sezione non sono costanti in apertura. In questi casi, infatti, le equazioni differenziali di equilibrio non sono più a coefficienti costanti, per cui l'integrazione per via analitica non è in generale agevole. Un metodo semplice per risolvere per via approssimata un'equazione scritta con il Principio dei Lavori Virtuali è il metodo di Ritz. Le funzioni di spostamento, incognite del problema, vengono sostituite da una combinazione lineare di opportune funzioni di forma, ciascuna delle quali deve singolarmente rispettare le condizioni geometriche al contorno; non è invece richiesto che siano rispettate le condizioni naturali. Lo sviluppo deve inoltre essere completo, ovvero il limite dell'errore compiuto nell'approssimare la soluzione effettiva con uno sviluppo all' $i$ -esimo termine deve tendere a zero per  $i \rightarrow \infty$ . Tipici esempi di funzioni approssimanti, chiamate anche funzioni di forma, sono

i polinomi e le serie trigonometriche. I criteri per la scelta delle funzioni di forma differiscono caso per caso. Indipendentemente dalla tecnica di approssimazione scelta, il punto di partenza è comunque l'approssimazione delle spostate flessionali e torsionali con uno sviluppo mediante funzioni di forma:

$$\begin{aligned} w(x) &= [N_w(x)] \{q_w\} \\ \vartheta(x) &= [N_\vartheta(x)] \{q_\vartheta\} \end{aligned}$$

I coefficienti moltiplicativi delle funzioni vengono separati dalle funzioni stesse mediante la notazione matriciale. I coefficienti dei vettori  $\{q\}$  rappresentano i gradi di libertà del sistema nel modello approssimato. Si noti che in questo caso le matrici  $[N]$  sono vettori riga di ordine  $n$ , dove  $n$  è l'ordine al quale lo sviluppo viene arrestato. Le variazioni prime di  $w$  e  $\vartheta$  diventano:

$$\begin{aligned} \delta w(x) &= [N_w(x)] \{\delta q_w\} \\ \delta \vartheta(x) &= [N_\vartheta(x)] \{\delta q_\vartheta\} \end{aligned}$$

ovvero l'operazione di variazione virtuale si applica alle incognite e non alle funzioni di forma. Quindi anche gli spostamenti virtuali vengono approssimati mediante le stesse funzioni di forma.

**Lavoro interno** Il lavoro interno richiede le derivate delle funzioni che descrivono spostamento e rotazione. Per come sono state definite le loro approssimazioni, l'operazione di derivazione si applica alle funzioni di forma e non ai gradi di libertà del sistema. Il lavoro interno è dato da:

$$\delta L_i = \int_0^L \delta w'' E J w'' dx + \int_0^L \delta \vartheta' G J \vartheta' dx$$

le coordinate  $w$  e  $\vartheta$  possono essere poste in un unico vettore spostamento:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} w \\ \vartheta \end{Bmatrix}$$

si introduce quindi l'operatore differenziale matriciale  $[\mathcal{D}(\cdot, *)]$ :

$$[\mathcal{D}(\cdot, *)] = \begin{bmatrix} \partial^2(\cdot)/\partial x^2 & 0 \\ 0 & \partial(\cdot)/\partial x \end{bmatrix}$$

tale per cui:

$$\begin{Bmatrix} w'' \\ \vartheta' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial^2/\partial x^2 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \vartheta \end{Bmatrix} = [\mathcal{D}] \{u\}$$

Analogamente al legame sforzi-deformazioni si introduce la matrice di rigidezza  $[D]$ , che lega le azioni interne alle derivate dello spostamento ed esprime in forma matriciale le (1.29):

$$\begin{Bmatrix} M_f \\ M_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EJ & 0 \\ 0 & GJ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w'' \\ \vartheta' \end{Bmatrix} = [D] [\mathcal{D}] \{u\}$$

Il lavoro interno viene quindi espresso in forma matriciale come:

$$\delta L_i = \int_0^L \delta \begin{Bmatrix} w'' \\ \vartheta' \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} EJ & 0 \\ 0 & GJ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w'' \\ \vartheta' \end{Bmatrix} dx$$

ossia come:

$$\delta L_i = \int_0^L \delta ([\mathcal{D}] \{u\})^T [D] ([\mathcal{D}] \{u\}) dx$$

si sostituisce, quindi,  $\{u\}$  con lo sviluppo in serie di funzioni:

$$\{u\} = \begin{bmatrix} [N_w] & 0 \\ 0 & [N_\vartheta] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_w \\ q_\vartheta \end{Bmatrix}$$

per cui:

$$[\mathcal{D}]\{u\} = \begin{bmatrix} \partial^2/\partial x^2 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [N_w] & 0 \\ 0 & [N_\vartheta] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_w \\ q_\vartheta \end{Bmatrix} = [\mathcal{D}][N]\{q\}$$

e ponendo, come d'uso nella formulazione del metodo degli Elementi Finiti:

$$[\mathcal{D}][N] = [B]$$

risulta alla fine:

$$\delta L_i = \delta\{q\}^T \int_0^L [B]^T [D] [B] dx \{q\}$$

Si definisce la matrice di rigidità strutturale:

$$[K_S] = \int_0^L [B]^T [D] [B] dx = \begin{bmatrix} K_{Sw} & 0 \\ 0 & K_{S\vartheta} \end{bmatrix}$$

In essa i blocchi relativi a flessione e a torsione sono disaccoppiati grazie alla scelta dell'asse elastico come riferimento per gli spostamenti trasversali.

**Lavoro esterno** Il lavoro esterno viene posto in forma matriciale in modo da adattarsi alla parte relativa al lavoro interno. Il PLV per la parte esterna viene riscritto riferendosi ai lavori come prodotto delle forze per gli spostamenti dei punti di applicazione:

$$\delta L_e = \delta L_{ea} + \delta L_{eg} = \int_0^L \delta \begin{Bmatrix} w_{CA} \\ \vartheta \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} P \\ M_{CA} \end{Bmatrix} dx - Ng \int_0^L \delta w_{CG}^T m dx$$

Le forze aerodinamiche dipendono inoltre dalla configurazione del sistema, in particolare dalla rotazione  $\vartheta$ . Il lavoro esterno aerodinamico viene suddiviso in una parte costante, il vettore  $\{F_{A0}\}$  ed in una variabile, dipendente dal vettore degli spostamenti, caratterizzato dalla matrice di rigidità aerodinamica per unità di lunghezza  $q[D_A]$ :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} P \\ M_{CA} \end{Bmatrix} &= q \begin{bmatrix} 0 & cC_{P/\alpha} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{CA} \\ \vartheta \end{Bmatrix} + q \begin{Bmatrix} (cC_{P0} + cC_{P/\alpha}\alpha) \\ c^2 C_{MCA} \end{Bmatrix} \\ &= q[D_A] \begin{Bmatrix} w_{CA} \\ \vartheta \end{Bmatrix} + q\{F_{A0}\} \end{aligned}$$

quindi il lavoro esterno dovuto ai carichi aerodinamici viene scritto come:

$$\delta L_{ea} = \int_0^L \delta \begin{Bmatrix} w_{CA} \\ \vartheta \end{Bmatrix}^T q[D_A] \begin{Bmatrix} w_{CA} \\ \vartheta \end{Bmatrix} dx + \int_0^L \delta \begin{Bmatrix} w_{CA} \\ \vartheta \end{Bmatrix}^T q\{F_{A0}\} dx$$

Le coordinate riferite ai punti di applicazione delle forze,  $w_{CA}$  e  $w_{CG}$ , vanno espresse in funzione delle due coordinate scelte per esprimere il lavoro interno. La trasformazione viene effettuata con due opportune matrici:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} w_{CA} \\ \vartheta \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \vartheta \end{Bmatrix} = [T_a]\{u\} \\ w_{CG} &= \begin{bmatrix} 1 & -d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \vartheta \end{Bmatrix} = [T_g]\{u\} \end{aligned}$$

L'espressione del lavoro esterno totale, riferito alle coordinate  $w$  e  $\vartheta$ , è quindi:

$$\begin{aligned} \delta L_e &= \int_0^L \delta\{u\}^T [T_a]^T q[D_A] [T_a] \{u\} dx + \int_0^L \delta\{u\}^T [T_a]^T q\{F_{A0}\} dx \\ &\quad - Ng \int_0^L \delta\{u\}^T [T_g]^T m dx \end{aligned}$$

Il lavoro virtuale, dopo aver eseguito le sostituzioni, può essere scritto come:

$$\begin{aligned}\delta L_e = & \delta \{q\}^T q \int_0^L \begin{bmatrix} 0 & [N_w]^T cC_{P/\alpha} [N_\vartheta] \\ 0 & [N_\vartheta]^T e cC_{P/\alpha} [N_\vartheta] \end{bmatrix} dx \{q\} \\ & + \delta \{q\}^T q \int_0^L \left\{ \begin{array}{c} [N_w]^T (cC_{P0} + cC_{P/\alpha} \alpha) \\ [N_\vartheta]^T (e (cC_{P0} + cC_{P/\alpha} \alpha) + c^2 C_{MCA}) \end{array} \right\} dx \\ & - \delta \{q\}^T Ng \int_0^L \left\{ \begin{array}{c} [N_w]^T m \\ -[N_\vartheta]^T md \end{array} \right\} dx\end{aligned}$$

Definendo la matrice di rigidezza aerodinamica:

$$[K_A] = \int_0^L \begin{bmatrix} 0 & [N_w]^T cC_{P/\alpha} [N_\vartheta] \\ 0 & [N_\vartheta]^T e cC_{P/\alpha} [N_\vartheta] \end{bmatrix} dx$$

il vettore delle forze aerodinamiche generalizzate riferite alla struttura considerata rigida:

$$\{Q_A\} = \int_0^L \left\{ \begin{array}{c} [N_w]^T (cC_{P0} + cC_{P/\alpha} \alpha) \\ [N_\vartheta]^T (e (cC_{P0} + cC_{P/\alpha} \alpha) + c^2 C_{MCA}) \end{array} \right\} dx$$

e il vettore delle forze di massa generalizzate:

$$\{Q_g\} = - \int_0^L \left\{ \begin{array}{c} [N_w]^T m \\ -[N_\vartheta]^T md \end{array} \right\} dx$$

l'espressione del lavoro virtuale esterno diventa:

$$\delta L_e = \delta \{q\}^T q [K_A] \{q\} + \delta \{q\}^T q \{Q_A\} + \delta \{q\}^T Ng \{Q_g\}$$

L'arbitrarietà dei termini  $\delta \{q\}$  fa sì che l'equazione di equilibrio sia data dal sistema lineare di ordine  $2n$  (ammettendo che  $[N_w]$  e  $[N_\vartheta]$  siano entrambi vettori riga di ordine  $n$ ):

$$([K_S] - q [K_A]) \{q\} = q \{Q_A\} + \{Q_g\} \quad (1.32)$$

L'esame della struttura a blocchi della matrice dei coefficienti  $([K_S] - q [K_A])$  consente di rilevare il disaccoppiamento fra flessione e torsione, già previsto nella discussione teorica del PLV:

$$\left( \left[ \begin{array}{cc} [K_{Sw}] & 0 \\ 0 & [K_{S\vartheta\vartheta}] \end{array} \right] - q \left[ \begin{array}{cc} 0 & [K_{Aw\vartheta}] \\ 0 & [K_{A\vartheta\vartheta}] \end{array} \right] \right) \left\{ \begin{array}{c} \{q_w\} \\ \{q_\vartheta\} \end{array} \right\} = (q \{Q_A\} + \{Q_g\})$$

Il problema aeroelastico può venir quindi risolto separando i due sistemi e risolvendo separatamente prima la torsione e poi la flessione, per la quale la soluzione della parte di torsione va a completare il termine noto:

$$\begin{aligned}([K_{S\vartheta\vartheta}] - q [K_{A\vartheta\vartheta}]) \{q_\vartheta\} &= q \{Q_{a\vartheta}\} + \{Q_{g\vartheta}\} \\ [K_{Sw}] \{q_w\} &= -q [K_{Aw\vartheta}] \{q_\vartheta\} + q \{Q_{Aw}\} + \{Q_{gw}\}\end{aligned}$$

Il sistema (1.32) ammette soluzione se il determinante  $([K_S] - q [K_A])$  risulta essere diverso da zero. L'annullarsi di tale determinante definisce, come si vedrà, la condizione di divergenza. Dal sistema (1.32) è possibile determinare la soluzione del problema strutturale in due modi:

1. calcolando le deformate flessionali e torsionali attraverso l'equazione:

$$\left\{ \begin{array}{c} w'' \\ \vartheta' \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} [N_w''(x)] & 0 \\ 0 & [N_\vartheta'(x)] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{q_w\} \\ \{q_\vartheta\} \end{array} \right\}$$

e risalendo ai momenti flettenti e torcenti utilizzando le leggi costitutive:

$$\begin{aligned} M_f &= EJw'' \\ M_t &= GJ\vartheta' \end{aligned}$$

Le azioni interne e, quindi, lo stato di sforzo e deformazione nella struttura, vengono calcolate dalle derivate delle spostate.

2. calcolando le spostate  $w(x)$  e  $\vartheta(x)$  usando le relazioni:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \vartheta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_w(x)] & 0 \\ 0 & [N_\vartheta(x)] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_w\} \\ \{q_\vartheta\} \end{Bmatrix}$$

e quindi risalendo alla distribuzione del carico aerodinamico lungo l'apertura alare attraverso le equazioni:

$$\begin{aligned} P(x) &= qcC_{P/\alpha}(\alpha(x) + \vartheta(x)) + qcC_{P0}(x) \\ M_{AE}(x) &= M_{CA}(x) + e(x)P(x) \\ &= qc^2C_{MCA}(x) + qe(x)cC_{P/\alpha}(\alpha(x) + \vartheta(x)) + qe(x)cC_{P0}(x) \end{aligned}$$

nota la distribuzione di carico sulla trave è possibile determinare le azioni interne e quindi lo stato di sforzo e di deformazione. In questo approccio alternativo non vengono utilizzate le derivate, ma si determinano le forze agenti dalle spostate stesse e si procede al calcolo delle azioni interne sulla trave caricata da una distribuzione di forze nota.

Il primo approccio può fornire risultati insoddisfacenti se l'approssimazione della soluzione fornita dalle funzioni di forma scelte non è sufficientemente dettagliata; il secondo approccio, al contrario, sebbene più accurato, è possibile solo nel caso del modello di trave e in caso un estremo sia libero. Nel capitolo 5 verrà illustrata una procedura, detta dei "modi di accelerazione", che generalizza il secondo approccio in ambito dinamico e lo rende applicabile ad un qualsivoglia problema.

### Soluzione esatta: integrazione delle equazioni di equilibrio

La soluzione esatta del problema di risposta è calcolabile solo in casi particolari. Si tratterà solo quello, più semplice, in cui le caratteristiche geometriche, strutturali ed aerodinamiche dell'ala risultano costanti in apertura. L'equazione differenziale di equilibrio per una trave soggetta a momento torcente  $M_t$  è:

$$\frac{d}{dx} \left( GJ \frac{d\vartheta}{dx} \right) = -M_t$$

che, nel caso di caratteristiche strutturali costanti, diviene:

$$GJ\vartheta'' = -M_t$$

Considerando il momento torcente agente sull'ala in volo rettilineo, orizzontale ed uniforme si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$GJ\vartheta'' = -qecC_{P/\alpha}\vartheta - qecC_{P/\alpha}\alpha - qecC_{P0} - qc^2C_{MCA} - Nmgd$$

Nelle ipotesi assunte l'equazione è a coefficienti costanti e può venire espressa nella forma:

$$\vartheta'' + \lambda^2\vartheta = K$$

dove:

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{qecC_{P/\alpha}}{GJ} \\ K &= -\frac{Nmgd}{GJ} - \frac{q}{GJ} (ecC_{P/\alpha}\alpha + ecC_{P0} + c^2C_{MCA}) \end{aligned}$$

L'integrale sarà dato dalla somma dell'integrale generale dell'omogenea associata e di un integrale particolare:

- integrale generale dell'equazione omogenea associata:

$$\vartheta_o(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)$$

- integrale particolare:

$$\vartheta_p(x) = \frac{K}{\lambda^2}$$

Imponendo alla soluzione  $\vartheta(x) = \vartheta_o(x) + \vartheta_p(x)$  di soddisfare le due condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \vartheta(0) &= 0 && \text{condizione di congruenza alla radice alare} \\ GJ\vartheta'(L) &= 0 && \text{condizione naturale di ala scarica all'estremità} \end{aligned}$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} B &= \frac{K}{\lambda^2} \\ A &= -\frac{K}{\lambda^2} \tan(\lambda L) \end{aligned}$$

L'espressione della risposta,  $\vartheta$ , è pertanto:

$$\vartheta(x) = \frac{K}{\lambda^2} (1 - \tan(\lambda L) \sin(\lambda x) - \cos(\lambda x)) \quad (1.33)$$

### 1.2.3 Divergenza torsionale

Il concetto di divergenza associato alla stabilità dell'equilibrio, le caratteristiche dello schema a trave ed il disaccoppiamento fra flessione e torsione proprio dell'ala dritta permettono di impostare la ricerca della pressione dinamica di divergenza basandosi su tre punti fondamentali:

1. Si tratta di un problema di stabilità dell'equilibrio statico, dello stesso tipo di quello di un'asta caricata di punta; si devono calcolare i valori del parametro  $q$  per i quali il sistema ammette come soluzioni delle configurazioni infinitamente prossime a quella di equilibrio. Non si deve risolvere il problema strutturale (calcolo della configurazione di equilibrio):

$$\begin{aligned} F_z(\vartheta, w) &= \bar{F}_z \\ F_\vartheta(\vartheta) &= \bar{F}_\vartheta \end{aligned}$$

vanno invece cercate soluzioni infinitamente prossime ad una soluzione di equilibrio:

$$\begin{aligned} F_z(\bar{\vartheta} + d\vartheta, \bar{w} + dw) &= \bar{F}_z \\ F_\vartheta(\bar{\vartheta} + d\vartheta) &= \bar{F}_\vartheta \end{aligned}$$

2. Nell'ala dritta il disaccoppiamento flessione-torsione consente di studiare i soli termini torsionali. Inoltre la pressione dinamica di divergenza è solo torsionale; gli effetti aeroelastici sono limitati alla torsione.
3. Lo schema a trave e la teoria delle strisce conducono ad equazioni di equilibrio del secondo ordine in  $\vartheta(x)$ . La stabilità dell'equilibrio viene esaminata ricercando le soluzioni di una equazione omogenea del secondo ordine, che è l'omogenea associata di quella vista in precedenza per il calcolo della deformata.



**Soluzione esatta e confronto con il metodo di Ritz**

In caso di equazioni a coefficienti costanti, la loro integrazione analitica è agevole; è possibile calcolare la soluzione esatta (chiaramente nei limiti delle approssimazioni insite nel modello). Per il calcolo della pressione dinamica di divergenza si operano le assunzioni di: 1) rigidezze torsionali equivalenti, 2) corde aerodinamiche, 3) distanze e 4) derivate aerodinamiche  $C_{P/\alpha}$  costanti in apertura. L'equazione omogenea nelle variazioni attorno alla posizione di equilibrio è data da:

$$GJ\vartheta'' + qecC_{P/\alpha}\vartheta = 0 \quad (1.34)$$

con le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \vartheta(0) &= 0 && \text{geometrica} \\ GJ\vartheta'(L) &= 0 && \text{naturale} \end{aligned}$$

Le condizioni al contorno vanno dunque applicate: non si tratta di stabilire l'integrale dell'omogenea associata, ma se esistono effettivamente soluzioni per il sistema. L'equazione (1.34) può essere riscritta come:

$$\vartheta'' + \lambda^2\vartheta = 0$$

con

$$\lambda^2 = q \frac{ecC_{P/\alpha}}{GJ}$$

che ammette come soluzione generale:

$$\vartheta(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)$$

le costanti  $A$  e  $B$  si determinano dall'imposizione delle condizioni al contorno; dalla prima si ottiene banalmente  $B \cos(0) = 0$ , ovvero

$$B = 0$$

mentre dalla seconda,  $A\lambda \cos(\lambda L) = 0$ , si ottiene

$$\begin{aligned} A &= 0, \\ \lambda L &= \frac{\pi}{2} + n\pi. \end{aligned}$$

Si noti che  $A = 0$ , poiché  $B = 0$  in virtù della prima condizione, è la soluzione banale:

$$\vartheta(x) = 0$$

mentre, per  $\lambda L = \pi/2 + n\pi$ , l'equazione ammette soluzione diversa da quella identicamente nulla. Considerando il caso  $n = 0$ , in quanto per questo valore si avrà il valore minimo della pressione dinamica di divergenza, la condizione su  $\lambda$  impone una condizione su  $q$ :

$$q_D = \lambda^2 \frac{GJ}{ecC_{P/\alpha}} = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \frac{GJ}{ecC_{P/\alpha}}$$

in cui  $q_D$  è la pressione dinamica di divergenza esatta. Si noti che la pressione dinamica di divergenza è sempre interpretabile come rapporto fra una rigidezza strutturale (torsionale, in questo caso) ed una rigidezza aerodinamica<sup>5</sup>. Riferendosi alla superficie alare, la rigidezza aerodinamica risulta:

$$K_A = eLcC_{P/\alpha} = eSC_{P/\alpha}$$

---

<sup>5</sup>Si ricordi che la definizione di *rigidezza aerodinamica* è usata in questo testo per analogia con la rigidezza strutturale, ma non si tratta di nomenclatura di uso comune.

mentre il termine relativo alla rigidezza strutturale è dunque:

$$K_S = \frac{GJ}{\pi^2 L/4}$$

Poiché  $GJ/L$  è la rigidezza torsionale tra radice ed estremità di una molla equivalente all'ala, è lecito scrivere che  $\vartheta' = M_t/GJ$  e quindi, essendo le proprietà elastiche costanti in apertura, se si suppone il carico concentrato all'estremità, si ottiene  $\vartheta = M_t L/GJ$ ; da queste considerazioni si può concludere che, nel caso di caratteristiche geometriche, elastiche ed aerodinamiche costanti in apertura, la pressione dinamica di divergenza può essere calcolata come il rapporto fra la rigidezza torsionale presa a circa il 40% dell'apertura alare<sup>6</sup>, dato che  $4/\pi^2 \cong 0.4$ , e la rigidezza aerodinamica  $K_a$ . Si passa ora ad alcuni esempi di soluzione approssimata con il metodo di Ritz, per poi confrontarli con la soluzione esatta e quindi valutare la bontà delle approssimazioni. Per prima cosa si scrive l'equazione relativa alla parte torsionale ottenuta dal PLV, per lo studio della stabilità:

$$\int_0^L \delta \vartheta'^T GJ \vartheta' dx = q_D \int_0^L \delta \vartheta^T ec C_{P/\alpha} \vartheta dx$$

Si noti che anche quando il problema è scalare conviene introdurre la notazione  $\delta \vartheta^T (\cdot)$  per sottolineare il fatto che la variazione virtuale dell'incognita moltiplica *da sinistra* l'equazione che si desidera scrivere in forma debole. In questo modo si instaura un meccanismo automatico di scrittura delle equazioni in forma matriciale che aiuta ad evitare errori banali e dà un'impressione visiva delle dimensioni delle entità usate nelle espressioni. In particolare, un tipico problema è generalmente rappresentato da un vettore di equazioni (ad esempio  $\{f\}$  per indicare una forza, o  $[K] \{x\}$  per indicare forze dipendenti dalla configurazione e risultanti da un prodotto matrice-vettore), quindi il lavoro si ottiene moltiplicando a sinistra per il vettore riga che contiene la variazione virtuale delle incognite:  $\{\delta x\}^T \{f\}$  o  $\{\delta x\}^T [K] \{x\}$ . Si introducono poi le funzioni di forma:

$$\begin{aligned} \vartheta &= [N] \{q\} \\ \delta \vartheta &= [N] \delta \{q\} \\ \vartheta' &= [N'] \{q\} \\ \delta \vartheta' &= [N'] \delta \{q\} \end{aligned}$$

per cui l'equazione precedente viene trasformata in:

$$\delta \{q\}^T \int_0^L [N']^T GJ [N'] dx \{q\} = q_D \delta \{q\}^T \int_0^L [N]^T ec C_{P/\alpha} [N] dx \{q\}$$

che, semplificando, diventa:

$$\left( \int_0^L [N']^T [N'] dx - \frac{q_D ec C_{P/\alpha}}{GJ} \int_0^L [N]^T [N] dx \right) \{q\} = \{0\}$$

ovvero

$$([K_S] - \lambda^2 [K_A]) \{q\} = \{0\}$$

per cui ci si è ricondotti ad un problema agli autovalori. La bontà dell'approssimazione dipende dalla scelta delle funzioni di forma e dall'ordine a cui viene arrestato lo sviluppo. Nel caso in esame, a coefficienti costanti, la scelta più opportuna sarebbe quella della serie trigonometrica: in questo caso si perverrebbe alla soluzione esatta con un solo termine di seno. Si confronta ora la soluzione esatta con i risultati ottenuti applicando sviluppi polinomiali di ordine crescente.

<sup>6</sup>Si ricordi che alcuni testi consigliano invece di utilizzare le caratteristiche strutturali dell'ala a circa il 70% dell'apertura [1]; questo presumibilmente per includere gli effetti legati alla rastremazione sia geometrica (riduzione della corda) che strutturale (riduzione della sezione dei correnti e dello spessore dei pannelli) di un'ala tipica.

- 1.
- $[N] = [x]$
- :
- $\vartheta = xq_1$

Si ricordi che le funzioni di forma devono necessariamente soddisfare le condizioni geometriche al contorno, mentre possono non soddisfare le condizioni naturali. La scelta di  $\vartheta = xq_1$  impedisce il soddisfacimento delle condizioni naturali; ciò non è concettualmente errato, tuttavia, come si vedrà, può condurre a risultati scadenti:

$$\begin{aligned} [K_A] &= \int_0^L [N]^T [N] dx = \int_0^L x^2 dx = \frac{L^3}{3} \\ [N'] &= [1] \\ [K_S] &= \int_0^L [N']^T [N'] dx = \int_0^L 1 dx = L \\ \det \left( L - \lambda^2 \frac{L^3}{3} \right) &= 0 \rightarrow \lambda^2 = \frac{3}{L^2} \end{aligned}$$

Confrontando questo risultato con quello esatto si nota che l'errore commesso con questa approssimazione è pari al 17.8%.

- 2.
- $[N] = \begin{bmatrix} x & x^2 \end{bmatrix}$
- :
- $\vartheta = xq_1 + x^2q_2$

Ripetendo il ragionamento fatto nel caso precedente si ha:

$$\begin{aligned} [K_A] &= \int_0^L [N]^T [N] dx = \int_0^L \begin{bmatrix} x^2 & x^3 \\ x^3 & x^4 \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} L^3/3 & L^4/4 \\ L^4/4 & L^5/5 \end{bmatrix} \\ [N'] &= \begin{bmatrix} 1 & 2x \end{bmatrix} \\ [K_S] &= \int_0^L [N']^T [N'] dx = \int_0^L \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 2x & 4x^2 \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} L & L^2 \\ L^2 & 4/3 L^3 \end{bmatrix} \\ \det \left( \begin{bmatrix} L & L^2 \\ L^2 & 4/3 L^3 \end{bmatrix} - \lambda^2 \begin{bmatrix} L^3/3 & L^4/4 \\ L^4/4 & L^5/5 \end{bmatrix} \right) &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \lambda_1^2 = \frac{2.486}{L^2} \end{aligned}$$

Per cui si compie un errore dello 0.8%. La scelta della funzione di forma parabolica consente un ottimo livello di approssimazione. Il miglioramento rispetto allo sviluppo ad un solo termine è in buona parte giustificato dalla possibilità di soddisfare le condizioni naturali al contorno in modo automatico. Si noti infatti che, mentre nel primo caso  $\vartheta'(x) = q_1$  e quindi è impossibile annullare la derivata all'estremo libero, come vuole la condizione naturale, in questo caso  $\vartheta'(x) = q_1 + 2xq_2$ , per cui la condizione può essere soddisfatta.

3. Il fatto che la condizione naturale possa essere soddisfatta non implica che lo sia. In effetti, dal momento che in un approccio agli spostamenti tale condizione è *naturale*, essa verrà soddisfatta solo a convergenza, ovvero qualora si usi lo sviluppo completo. Ciò nonostante, si può verificare che nel caso precedente con due termini ci si è avvicinati notevolmente al suo soddisfacimento:  $L\vartheta'(L) = 0.086$  per  $\sqrt{q_1^2 + (q_2L)^2} = 1$  (norma unitaria). Si provi ora ad imporre che la condizione sia soddisfatta *a priori*. Questo si ottiene imponendo alla soluzione del caso precedente la relazione  $q_1 = -2Lq_2$ , riducendo così l'interpolazione ad una funzione parabolica ad una sola incognita, da cui risulta

$$\lambda^2 = \frac{2.5}{L^2}$$

Questo valore rappresenta un errore dell'1.32%: un risultato peggiore rispetto a quello ottenuto in precedenza, legato al costo che comporta l'imporre anche la condizione al contorno naturale.

- 4.
- $[N] = \begin{bmatrix} x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}$
- :
- $\vartheta = xq_1 + x^2q_2 + x^3q_3$

In questo caso, sviluppando i calcoli, si ottiene:

$$\lambda^2 = \frac{2.4677}{L^2}$$

commettendo quindi un errore, rispetto alla soluzione esatta, dello 0.01%.

### Approccio energetico

È possibile determinare la condizione di divergenza utilizzando un approccio energetico: è necessario valutare l'energia elastica associata ad un'arbitraria variazione di angolo di torsione e confrontarla con il lavoro fatto, per una eguale variazione di angolo, dalle forze aerodinamiche. Esprimendo quanto detto in termini matematici, si ha:

$$\int_0^L \frac{GJ}{2} \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} q_D \int_0^L ecC_{Pe} \vartheta dx$$

dalla quale si ricava:

$$q_D = \frac{\int_0^L GJ (d\vartheta/dx)^2 dx}{\int_0^L ecC_{Pe} \vartheta dx} \quad (1.35)$$

dove si è supposta assegnata la funzione  $\vartheta(x)$  che fornisce l'arbitraria variazione di angolo di torsione. Si noti come l'equazione alla quale si è giunti per il calcolo della pressione dinamica di divergenza sia simile all'espressione del quoziente di Rayleigh che viene definito per sistemi meccanici come rapporto tra energia elastica ed energia cinetica espresse in funzione delle coordinate libere. Considerando l'equazione (1.35), essa fornisce proprio il valore della pressione dinamica di divergenza se l'espressione di  $\vartheta(x)$  introdotta corrisponde al modo proprio di divergenza della struttura. Inoltre, si nota che, nel caso in cui si ritenga valida l'approssimazione fornita dalla teoria delle strisce, l'espressione (1.35) diventa:

$$q_D = \frac{\int_0^L GJ (d\vartheta/dx)^2 dx}{\int_0^L ecC_{P/\alpha} \vartheta^2 dx} \quad (1.36)$$

Introducendo un'approssimazione singola della deformata torsionale, il metodo energetico consente di ricavare la pressione dinamica di divergenza con elevata precisione, grazie alla stazionarietà del coefficiente di Rayleigh nell'intorno di un autovalore. Prima di affrontare un esempio si determina la distribuzione di  $\vartheta$  nel caso di un'ala con caratteristiche strutturali costanti in apertura per una distribuzione costante di momento torcente; in seguito la distribuzione così ottenuta verrà utilizzata come approssimazione da usare per il calcolo della pressione dinamica di divergenza con il coefficiente di Rayleigh:

$$\frac{d}{dx} \left( GJ \frac{d\vartheta}{dx} \right) = -t$$

e, assumendo  $t$  e  $GJ$  costanti, con le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \vartheta(0) &= 0 \\ \vartheta'(L) &= 0 \end{aligned}$$

ed integrando l'equazione differenziale si ha:

$$\begin{aligned} GJ \frac{d\vartheta}{dx} &= -tx + A \\ GJ \vartheta &= -t \frac{x^2}{2} + Ax + B \end{aligned}$$

infine, imponendo le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} A &= tL \\ B &= 0 \end{aligned}$$

e di conseguenza:

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dx} &= -\frac{t}{GJ} (x - L) \\ \vartheta &= -\frac{t}{GJ} \left( \frac{x^2}{2} - Lx \right) \end{aligned}$$

A partire da questa soluzione, si consideri il seguente:

**Esempio 1.1** Si vuole calcolare la pressione dinamica di divergenza per un'ala con caratteristiche strutturali, geometriche ed aerodinamiche costanti lungo l'apertura alare utilizzando il coefficiente di Rayleigh; per l'aerodinamica si utilizzi la teoria delle strisce. La stima della pressione dinamica è data da:

$$q_D = \frac{GJ}{ecC_{P/\alpha}} \frac{\int_0^L (d\vartheta/dx)^2 dx}{\int_0^L \vartheta^2 dx}$$

Per risolvere questa equazione si adopera lo sviluppo di  $\vartheta$  e della sua derivata calcolati in precedenza,  $\vartheta = x^2/L^2 - 2x/L$ :

$$\begin{aligned} q_D &= \frac{GJ}{ecC_{P/\alpha}} \frac{\int_0^L 4(x^2/L^2 - 2x/L + 1) dx}{\int_0^L (x^4/L^4 - 4x^3/L^3 + 4x^2/L^2) dx} \\ &= \frac{GJ}{ecC_{P/\alpha} L^2} \frac{4/3}{8/15} \\ &= 2.5 \frac{GJ/L}{eLcC_{P/\alpha}} \end{aligned}$$

L'errore che si commette, rispetto alla soluzione esatta, è dell'1.32%. Infatti, si è ritrovata la soluzione ottenuta applicando sia la condizione al contorno cinematica che quella naturale allo sviluppo in serie parabolico usato nell'applicazione del PLV.

**Esempio 1.2** Si consideri sempre il caso dell'ala con caratteristiche costanti ed a cui si possa applicare la teoria delle strisce, però si utilizzi ora un generico sviluppo polinomiale di  $\vartheta(x)$ :

$$\begin{aligned} \vartheta &= a + bx + cx^2 \\ \vartheta' &= b + 2cx \end{aligned}$$

imponendo le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \vartheta(0) &= 0 \\ \vartheta'(L) &= 0 \end{aligned}$$

si determinano i valori delle costanti:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= -2cL \end{aligned}$$

per cui le equazioni precedenti diventano:

$$\begin{aligned} \vartheta &= c(x^2 - 2Lx) \\ \vartheta' &= 2c(x - L) \end{aligned}$$

sostituendo queste equazioni nell'espressione del PLV si ha:

$$4 \int_0^L (L^2 - 2Lx + x^2) dx = \lambda^2 \int_0^L (x^4 - 4Lx^3 + L^2x^2) dx$$

dove si è posto:

$$\lambda^2 = q_D \frac{ecC_{P/\alpha}}{GJ}$$

da cui si ottiene:

$$\lambda^2 = \frac{4 \int_0^L (L^2 - 2Lx + x^2) dx}{\int_0^L (x^4 - 4Lx^3 + L^2x^2) dx} = \frac{4/3L^3}{15/8L^5} = \frac{5}{2L^2}$$

per cui la pressione dinamica di divergenza risulta di nuovo:

$$q_D = 2.5 \frac{GJ/L}{eLcC_{P/\alpha}}$$

e, come nel caso precedente, l'errore che si compie rispetto alla soluzione esatta è ancora dell' 1.32%.

**Esempio 1.3** Si prenda in considerazione come sviluppo della deformata torsionale l'espressione:

$$\vartheta = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Imponendo le condizioni riportate in precedenza, si ottengono le seguenti relazioni fra i coefficienti che compaiono nello sviluppo:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= -2cL - 3dL^2 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda lo sviluppo di  $\vartheta$ , si può scrivere:

$$\begin{aligned} \vartheta &= -(2cL + 3dL^2)x + cx^2 + dx^3 \\ &= (x^2 - 2xL)c + (x^3 - 3xL^2)d \end{aligned}$$

Passando in notazione matriciale, si ottiene:

$$\vartheta = [N] \{q\} = \begin{bmatrix} (x^2 - 2xL) & (x^3 - 3xL^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c \\ d \end{Bmatrix}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} \vartheta' &= \begin{bmatrix} 2(x - L) & 3(x^2 - L^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c \\ d \end{Bmatrix} \\ \delta\vartheta &= \begin{bmatrix} (x^2 - 2xL) & (x^3 - 3xL^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta c \\ \delta d \end{Bmatrix} \\ \delta\vartheta' &= \begin{bmatrix} 2(x - L) & 3(x^2 - L^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta c \\ \delta d \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

che, sostituite nell'equazione del PLV, permettono di scrivere:

$$\begin{aligned} &\delta \begin{Bmatrix} c \\ d \end{Bmatrix}^T \int_0^L \begin{bmatrix} 4(x - L)^2 & 6(x - L)(x^2 - L^2) \\ 6(x - L)(x^2 - L^2) & 9(x^2 - L^2)^2 \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} c \\ d \end{Bmatrix} \\ &= \lambda^2 \delta \begin{Bmatrix} c \\ d \end{Bmatrix}^T \int_0^L \begin{bmatrix} (x^2 - 2xL)^2 & (x^2 - 2xL)(x^3 - 3xL^2) \\ (x^2 - 2xL)(x^3 - 3xL^2) & (x^3 - 3xL^2)^2 \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} c \\ d \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Sviluppando i calcoli si perviene al seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3}L^3 - \lambda^2 \frac{8}{15}L^5 & \frac{5}{2}L^4 - \lambda^2 \frac{61}{60}L^6 \\ \frac{5}{2}L^4 - \lambda^2 \frac{61}{60}L^6 & \frac{24}{5}L^5 - \lambda^2 \frac{68}{35}L^7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c \\ d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Affinché esista una soluzione diversa da quella banale, deve essere:

$$\det \left( \begin{bmatrix} \frac{4}{3}L^3 - \lambda^2 \frac{8}{15}L^5 & \frac{5}{2}L^4 - \lambda^2 \frac{61}{60}L^6 \\ \frac{5}{2}L^4 - \lambda^2 \frac{61}{60}L^6 & \frac{24}{5}L^5 - \lambda^2 \frac{68}{35}L^7 \end{bmatrix} \right) = 0$$

il più piccolo autovalore risulta essere:

$$\lambda^2 = 2.468 \frac{1}{L^2}$$

Questa soluzione differisce da quella esatta per un errore pari allo 0,03%.

**Approccio in flessibilità: soluzione esatta**

I problemi studiati con il metodo variazionale possono essere anche trattati con un approccio alle forze, attraverso equazioni di congruenza aeroelastica espresse in funzione dei carichi. Il meccanismo è sostanzialmente identico a quello visto nel caso dell'ala semplificata:

- si scrive un'espressione della variazione della deformata in funzione dei carichi applicati;
- si scrive un'espressione della variazione della deformata in funzione delle forze aerodinamiche da essa generate;
- si uguagliano le due espressioni imponendo quella che è stata definita *congruenza aeroelastica*<sup>7</sup>.

Le incognite sono le variazioni dei carichi aerodinamici conseguenti alla deformabilità strutturale. A questo scopo si definisce un'opportuna funzione di influenza  $C^{\vartheta\vartheta}(x, \xi)$  che rappresenta la torsione nel punto di coordinata  $x$  causata da un momento torcente unitario applicato nel punto di coordinata  $\xi$ . Nello studio del generico problema di risposta, vanno considerati tutti i carichi agenti sull'ala. La deformata torsionale in questo caso risulta uguale a:

$$\vartheta(x) = \int_0^L C^{\vartheta\vartheta}(x, \xi) \left( q \left( c^2 C_{MCA}(\xi) + ec C_{Pr}(\xi) + ec C_{Pe}(\xi) \right) + Nmgd(\xi) \right) d\xi$$

dove le incognite<sup>8</sup> sono sia  $\vartheta$  che  $cC_{Pe}$  per cui è necessario trovare un'ulteriore relazione che leghi queste due funzioni. Il legame tra l'incidenza e la distribuzione di portanza può essere espresso nel seguente modo:

$$\alpha(x) = \mathcal{Q}(cC_P)$$

dove con  $\mathcal{Q}$  si è indicato un operatore lineare che, data la distribuzione di portanza  $cC_P$ , permette di ricavare la distribuzione di incidenza corrispondente. Nell'ipotesi di validità della teoria delle strisce, questo operatore assume una forma particolarmente semplice:

$$\mathcal{Q}(\cdot) = \frac{(\cdot)}{cC_{P/\alpha}}$$

L'equazione di congruenza aeroelastica assume dunque la forma:

$$\frac{cC_{Pe}}{cC_{P/\alpha}} = \int_0^L C^{\vartheta\vartheta}(x, \xi) \left( q \left( c^2 C_{MCA} + ec C_{Pr} + ec C_{Pe} \right) + Nmgd \right) d\xi \quad (1.37)$$

che è la forma generale del problema aeroelastico (per distribuzioni di carico simmetriche) descritto in flessibilità in cui l'incognita principale è  $cC_{Pe}$  e compare sotto integrale. Si tratta dunque di un'equazione integrale. Si passa dal problema di risposta statica al calcolo della divergenza eliminando i termini noti dall'equazione (1.37). Anche con l'approccio in flessibilità questo equivale a studiare la stabilità dell'equilibrio aeroelastico. Quindi si tratta ora di ricercare soluzioni non banali dell'equazione:

$$\frac{cC_{Pe}}{cC_{P/\alpha}} = q \int_0^L C^{\vartheta\vartheta}(x, \xi) ec C_{Pe} d\xi \quad (1.38)$$

Per poter sviluppare questa equazione è necessario trovare l'espressione della funzione di influenza. Per la stessa definizione di funzione di influenza,  $C^{\vartheta\vartheta}$  soddisfa l'equazione:

$$\frac{d}{dx} \left( GJ \frac{dC^{\vartheta\vartheta}}{dx} \right) = -\delta(x - \xi)$$

<sup>7</sup>Si ricorda che la definizione di *congruenza aeroelastica* non è universalmente accettata.

<sup>8</sup>Si noti che come l'incognita viene assunta la *portanza per unità di apertura e di pressione dinamica*  $cC_{Pe}$ , che ha come unità di misura una lunghezza; in questo modo si vuole sottolineare che tale incognita è definita su un dominio unidimensionale, un non meglio precisato asse dell'ala.

Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{aligned} C^{\vartheta\vartheta}(0, \xi) &= 0 \\ \frac{dC^{\vartheta\vartheta}(L, \xi)}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

Supponendo  $GJ$  costante in apertura, integrando in  $dx$  si ottiene:

$$GJ \frac{dC^{\vartheta\vartheta}(x, \xi)}{dx} \Big|_0^{x_1} = GJ \frac{dC^{\vartheta\vartheta}(x_1, \xi)}{dx} - GJ \frac{dC^{\vartheta\vartheta}(0, \xi)}{dx} = \begin{cases} -1 & x_1 > \xi \\ 0 & x_1 < \xi \end{cases}$$

e, integrando ulteriormente:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dC^{\vartheta\vartheta}(x_1, \xi)}{dx} dx_1 - \frac{dC^{\vartheta\vartheta}(0, \xi)}{dx} \int_0^x dx_1 \\ = C^{\vartheta\vartheta}(x, \xi) - C^{\vartheta\vartheta}(0, \xi) - \frac{1}{GJ} \int_0^x dx_1 = \begin{cases} -(x - \xi)/GJ & x_1 > \xi \\ 0 & x_1 < \xi \end{cases} \end{aligned}$$

essendo  $dC^{\vartheta\vartheta}(0, \xi)/dx = 1/GJ$ ; quindi, avendo assunto  $C^{\vartheta\vartheta}(0, \xi) = 0$  come condizione al contorno:

$$C^{\vartheta\vartheta}(x, \xi) = \begin{cases} \xi/GJ & x > \xi \\ x/GJ & x < \xi \end{cases}$$

l'equazione integrale, dopo aver esplicitato la funzione di influenza strutturale, diventa:

$$C_{Pe} = \frac{C_{P/\alpha}}{GJ} qe \left( \int_0^x \xi c_{Pe}(\xi) d\xi + x \int_x^L c_{Pe}(\xi) d\xi \right)$$

si cerca la soluzione nella forma:

$$C_{Pe} = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)$$

considerando la definizione della lunghezza caratteristica  $\lambda^2$  usata in precedenza e sostituendo si ottiene:

$$\begin{aligned} & A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) \\ &= \lambda^2 \left( \int_0^x \xi A \sin(\lambda \xi) + \xi B \cos(\lambda \xi) d\xi + x \int_x^L A \sin(\lambda \xi) + B \cos(\lambda \xi) d\xi \right) \\ &= \lambda^2 \left( \left[ A \frac{\sin(\lambda \xi)}{\lambda^2} - A \xi \frac{\cos(\lambda \xi)}{\lambda} + B \frac{\cos(\lambda \xi)}{\lambda^2} + B \xi \frac{\sin(\lambda \xi)}{\lambda} \right]_0^x \right. \\ & \quad \left. + \left[ -A x \frac{\cos(\lambda \xi)}{\lambda} + B x \frac{\sin(\lambda \xi)}{\lambda} \right]_x^L \right) \\ &= A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) - B - A \lambda L \cos(\lambda L) + B \lambda L \sin(\lambda L) \end{aligned}$$

quindi, alla fine, si ottiene:

$$B + A \lambda L \cos(\lambda L) - B \lambda L \sin(\lambda L) = 0$$

Questa condizione si realizza per

$$\begin{aligned} B &= 0 \\ \lambda L &= \pi/2 + k\pi \\ \forall A &\neq 0 \end{aligned}$$

Dal momento che la pressione dinamica di divergenza corrisponde al più piccolo valore positivo, si ha:

$$\lambda = \frac{\pi}{2L} \rightarrow q_D = \frac{\pi^2}{4} \frac{GJ/L}{eLc_{P/\alpha}}$$

che coincide con il valore ricavato con l'approccio agli spostamenti.



### Approccio in flessibilità: metodo a parametri concentrati

Nel caso in cui le caratteristiche geometriche ed aerodinamiche non siano più costanti in apertura si deve ricorrere ad una soluzione approssimata dell'equazione integrale (1.38). Uno dei metodi utilizzabili consiste invece nell'effettuare una discretizzazione del modello fisico del sistema, a monte della scrittura delle equazioni. La semiala viene suddivisa in  $n$  strisce in apertura. Per ciascuna striscia si considera una variazione di momento torcente attorno all'asse elastico,  $M_{Ti}$ , ed una rotazione  $\vartheta_i$ . I momenti torcenti e le rotazioni vengono riuniti nei vettori  $\{\vartheta\}$  e  $\{M_T\}$ , correlati da una matrice di flessibilità  $[F]$ :

$$\{\vartheta\} = [F] \{M_T\}$$

Il coefficiente  $F_{ik}$  indica la rotazione della striscia  $i$ -esima in seguito all'applicazione di un momento torcente unitario alla striscia  $j$ -esima<sup>9</sup>. I coefficienti della matrice  $[F]$  sono quindi equivalenti, in questo modello discreto, alla funzione di influenza vista per i modelli continui, e sono determinabili dallo studio, eventualmente con metodi approssimati o sperimentali, della deformabilità statica della struttura. Limitandosi alla trattazione della divergenza va considerato il solo momento torcente dovuto alla variazione di carico aerodinamico legata alla deformabilità strutturale. Quindi, su ciascuna striscia, si ha un momento torcente per unità di lunghezza:

$$m_T = qecC_{Pe}$$

Il momento risultante su ogni striscia è quindi:

$$M_{Ti} = \Delta x_i q e_i c C_{Pei}$$

La discretizzazione consiste nel ritenere costanti su ogni striscia le caratteristiche geometriche ed aerodinamiche. Riunendo in una scrittura matriciale le espressioni per tutte le strisce, si ottiene:

$$\{M_T\} = q [\text{diag}(\Delta x_i e_i)] \{c C_{Pe}\}$$

L'espressione degli spostamenti in funzione dei carichi è:

$$\{\vartheta\} = [F] q [\text{diag}(\Delta x_i e_i)] \{c C_{Pe}\}$$

Va ora imposta la congruenza aeroelastica. Dal punto di vista aerodinamico le rotazioni  $\{\vartheta\}$  rappresentano le incidenze dei singoli profili, correlabili alle variazioni di carico con una relazione del tipo:

$$\{c C_{Pe}\} = [A] \{\vartheta\}$$

da cui

$$\{\vartheta\} = [A]^{-1} \{c C_{Pe}\}$$

la matrice  $[A]$  prende il nome di matrice di flessibilità aerodinamica. Utilizzando la teoria delle strisce risulta:

$$[A] = [\text{diag}(c C_{P/\alpha_i})]$$

Eguagliando le due espressioni si ottiene:

$$[A]^{-1} \{c C_{Pe}\} = [F] q [\text{diag}(\Delta x_i e_i)] \{c C_{Pe}\}$$

che, riordinando, assume la forma:

$$([A]^{-1} - [F] q [\text{diag}(\Delta x_i e_i)]) \{c C_{Pe}\} = \{0\}$$

---

<sup>9</sup>Siccome l'applicazione di una sollecitazione in un punto  $k$  in genere provoca uno spostamento o una rotazione in numerosi punti della struttura (al limite in tutti), la matrice  $[F]$  rischia di essere praticamente piena. Questo è uno dei motivi per cui il metodo degli spostamenti, che può portare a matrici sparse con un coefficiente di riempimento molto basso, ha avuto maggiore successo nell'analisi strutturale

Si è ottenuto un sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti di ordine  $n$ , quindi ci si è ricondotti ad un problema agli autovalori, nel parametro  $q$ . Il più basso valore di  $q$  positivo per il quale il sistema ammette soluzioni non banali rappresenta la pressione dinamica di divergenza. Si è sviluppato questo metodo partendo da una discretizzazione del modello fisico del sistema in esame; è corretto quindi considerarlo un metodo a parametri concentrati. Al medesimo risultato si poteva giungere, tuttavia, applicando un metodo di approssimazione numerica all'equazione integrale (1.38): è sufficiente imporre che l'equazione sia soddisfatta in  $n$  stazioni  $x_i$  lungo l'apertura. Questa tecnica è nota come collocazione semplice. La corrispondenza fra questi due approcci in questo caso è completa, in quanto ci si basa comunque sulla teoria delle strisce ed è possibile esprimere l'incidenza dell' $i$ -esima stazione in funzione del solo carico aerodinamico applicato ad essa.

**Esempio 1.4** *Calcolo della pressione di divergenza di un'ala rettangolare a caratteristiche costanti lungo l'apertura, discretizzata mediante due tronchi. Si calcola la matrice di flessibilità, costituita dai coefficienti di influenza che danno la rotazione nei punti 1 e 2 per un momento unitario applicato, utilizzando il PLV; è necessario calcolare la rotazione nel punto  $i$  per effetto di una coppia torcente concentrata applicata nel punto  $j$ ; allora la coppia concentrata dà momento torcente costante dall'incastro al punto  $j$ , quindi la derivata della rotazione in tale tratto è:*

$$\vartheta' = \frac{M_T}{GJ} = \frac{1}{GJ}$$

per cui la rotazione varia linearmente dall'incastro al punto di applicazione della coppia, mentre poi rimane costante. Quindi l'angolo di rotazione nel punto  $i$  si ottiene integrando l'espressione di  $\vartheta'$  dall'incastro al primo tra i punti  $i$  e  $j$ , perché se  $i$  viene prima di  $j$  si ha direttamente la rotazione nel punto corretto, mentre, se  $j$  viene prima di  $i$ , dopo il punto  $j$  la rotazione rimane costante perché non c'è più coppia applicata. Si ottiene:

$$1 \cdot F_{ij} = \int_0^{\min(x_i, x_j)} 1 \cdot \frac{1}{GJ} dx$$

Nel caso in esame, dove le stazioni 1 e 2 si trovano al centro dei due tronchi e, quindi, rispettivamente, a distanza  $L_1 = L/4$  e  $L_2 = 3/4L$ , si ha:

$$\begin{aligned} F_{11} &= \int_0^{L_1} 1 \cdot \frac{1}{GJ} dx = \frac{1}{4} \frac{L}{GJ} \\ F_{12} &= \int_0^{L_1} 1 \cdot \frac{1}{GJ} dx = \frac{1}{4} \frac{L}{GJ} \\ F_{21} &= F_{12} \\ F_{22} &= \int_0^{L_2} 1 \cdot \frac{1}{GJ} dx = \frac{3}{4} \frac{L}{GJ} \end{aligned}$$

Questo porta a scrivere:

$$[F] = \frac{L}{4GJ} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Si noti che la formulazione è così semplice perché il modello in effetti è semplice; di solito non è possibile scrivere questa matrice in forma così comoda. Ora si scrive la matrice dei carichi esterni:

$$\{M\} = qe \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} cC_{Pe1} \\ cC_{Pe2} \end{Bmatrix}$$

Questa matrice correla il momento torcente applicato alle stazioni 1 e 2 al carico aerodinamico, dovuto alla deformabilità, agente sui profili. La variazione di angolo di incidenza dovuta alla deformabilità elastica della struttura è:

$$\{\alpha_e\} = \frac{1}{cC_{P/\alpha}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} cC_{Pe1} \\ cC_{Pe2} \end{Bmatrix}$$

Imponendo la congruenza aeroelastica:

$$\{\alpha_e\} = \{\vartheta\}$$

si può scrivere:

$$\frac{1}{cC_{P/\alpha}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} cC_{Pe1} \\ cC_{Pe2} \end{Bmatrix} = qe \frac{L^2}{8GJ} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} cC_{Pe1} \\ cC_{Pe2} \end{Bmatrix}$$

ponendo per comodità:

$$\lambda = cC_{P/\alpha} qe \frac{L^2}{8GJ}$$

l'equazione precedente diventa:

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} cC_{Pe1} \\ cC_{Pe2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Si tratta di un problema agli autovalori, che si ottengono dalla soluzione dell'equazione:

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -\lambda \\ -\lambda & 1 - 3\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

ovvero

$$2\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

che ammette come soluzioni:

$$\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Entrambe le soluzioni sono positive, quindi si considera solo la più piccola, alla quale corrisponde la pressione dinamica di divergenza:

$$q_D = 8\lambda \frac{GJ}{eSC_{P/\alpha}}$$

il confronto con la soluzione esatta trovata in precedenza (§ 2.4.1) va fatto tra i termini  $4/\pi^2$  e  $1/(8\lambda)$ : il primo vale 0.4053, mentre il secondo vale 0.4268; si può notare come, nonostante la “rozzezza” della discretizzazione, l'approssimazione sia più che buona, risultando in un errore del 5%.

#### 1.2.4 Manovra di rollio

La deflessione degli alettoni, nella manovra di rollio, provoca una distribuzione di carico alare antisimmetrica. Conseguenza di questa manovra è la nascita di una velocità e di un'accelerazione attorno all'asse di rollio e di una distribuzione di angolo dovuta alla deformazione torsionale. Si consideri la Figura 1.9, dove:

- $\beta$  è l'angolo di deflessione dell'alettone, positivo verso il basso, ossia quando produce un incremento di portanza,
- $p$  è la velocità angolare di rollio,
- $\dot{p}$  è l'accelerazione angolare di rollio

La distribuzione dell'angolo di incidenza lungo l'apertura alare prodotta dal carico antisimmetrico è:

$$\alpha(y) = \tau\beta - \frac{py}{V_\infty} + \vartheta(y)$$

in cui:

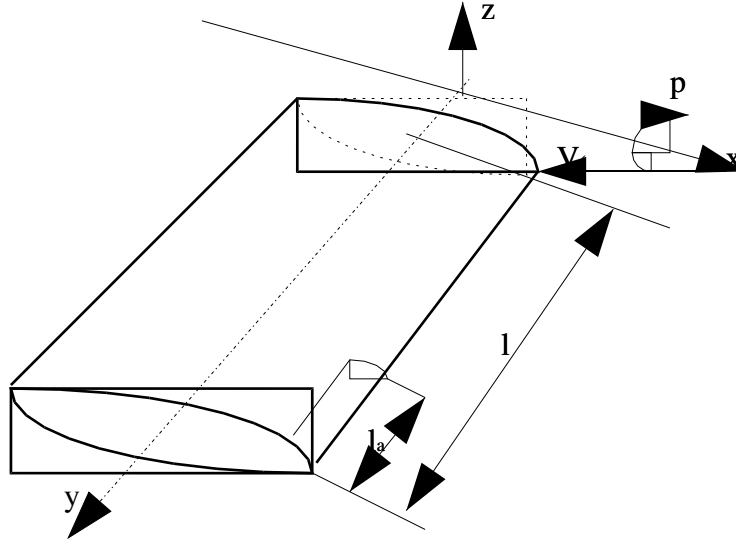


Figura 1.9: Manovra di rollio

- $\tau$  è l'angolo di incidenza equivalente dell'ala causata da una deflessione unitaria dell'alettone;
- $py/V_\infty$  è l'angolo di incidenza indotto dalla velocità angolare  $p$ ;
- $\vartheta(y)$  è la deformazione torsionale.

Inoltre si definiscono:

$$\Delta C_{MCA} = \frac{\partial C_{MCA}}{\partial \beta} \beta$$

la variazione del coefficiente di momento aerodinamico conseguente alla sola deflessione degli alettoni. Si ricorda che questo coefficiente è indipendente dalle variazioni dell'angolo di incidenza;

$$\Delta C_{Pr} = \frac{\partial C_{Pr}}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial C_{Pr}}{\partial (pl/V_\infty)} (pl/V_\infty)$$

la variazione del coefficiente di portanza dato dalla variazione di  $\beta$  e dall'angolo di incidenza dell'estremità alare. Si noti che  $\partial C_{Pr} / \partial (pl/V_\infty) < 0$ .

$$N(y) = \frac{\dot{p}y}{g}$$

il fattore locale di carico normale.

### Equazioni di equilibrio e correzione delle derivate aerodinamiche (soluzione esatta)

Di seguito viene riportata la soluzione relativa al problema della manovra di rollio nel caso semplice di ala diritta con rigidità uniforme lungo l'apertura. Si fa l'ipotesi semplificatrice che l'incremento di portanza e di momento aerodinamico dovuti alla deflessione dell'alettone siano localizzati nella zona dell'alettone stesso. Per risolvere il problema si ritiene valida la teoria delle strisce, per cui si può scrivere:

$$cC_P = cC_{P/\alpha} \alpha$$

Per le notazioni si faccia riferimento alla figura XX: L'equazione di equilibrio attorno all'asse elastico può essere scritta come:

$$GJ\vartheta'' + qecC_{P/\alpha}\vartheta = -qc(cC_{MCA/\beta} + eC_{P/\beta})\beta s_\alpha(y - L_\beta) - qecC_{P/\alpha}\frac{py}{V_\infty} + m\dot{p}y$$

che può essere espressa nella forma:

$$\vartheta'' + \lambda^2 \vartheta = \left( \lambda^2 \frac{p}{V_\infty} + k_1 \dot{p} \right) + k_2 \lambda^2 \beta_{\text{sca}} (y - L_1)$$

avendo indicato con:

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= q \frac{e c C_{P/\alpha}}{GJ} \\ k_1 &= \frac{m d}{GJ} \\ k_2 &= \frac{1}{e C_{P/\alpha}} \left( e \frac{\partial C_{Pr}}{\partial \beta} + \frac{\partial C_{MCA}}{\partial \beta} \right) \end{aligned}$$

Un'espressione di  $\vartheta(y)$  che soddisfi l'equazione precedente è data da:

$$\vartheta(y) = A \sin(\lambda y) + B \cos(\lambda y) + \frac{K^r}{\lambda^2}$$

dove con  $K^r$  si sono indicate le generiche forze che agiscono sul tratto considerato. Per semplificare la soluzione del problema si considerano due coordinate, ed in seguito si impone, fra le condizioni al contorno, la congruenza tra le due sezioni:

- Tratto 1:  $0 \leq y_1 \leq L_1$

$$\vartheta(y_1) = A_1 \sin(\lambda y_1) + B_1 \cos(\lambda y_1) + \left( \lambda^2 \frac{p}{V_\infty} + k_1 \dot{p} \right) \frac{y_1}{\lambda^2}$$

- Tratto 2:  $0 \leq y_2 \leq L - L_1$

$$\vartheta(y_2) = A_2 \sin(\lambda y_2) + B_2 \cos(\lambda y_2) + \left( \lambda^2 \frac{p}{V_\infty} + k_1 \dot{p} \right) \frac{y_2 + L_1}{\lambda^2} - k_2 \beta$$

Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{aligned} \vartheta(y_1 = 0) &= 0 \\ GJ\vartheta'(y_2 = L - L_1) &= 0 \\ \vartheta(y_1 = L_1) &= \vartheta(y_2 = 0) \\ GJ\vartheta'(y_1 = L_1) &= GJ\vartheta'(y_2 = 0) \end{aligned}$$

che sostituite nell'equazione di equilibrio permettono di determinare le costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} A_1 &= k_2 \frac{\sin(\lambda(L - L_1))}{\cos(\lambda L)} \beta - \frac{1}{\lambda^3 \cos(\lambda L)} \left( \lambda^2 \frac{p}{V_\infty} + k_1 \dot{p} \right) \\ B_1 &= 0 \\ A_2 &= k_2 \frac{\cos(\lambda L_1) \sin(\lambda(L - L_1))}{\cos(\lambda L)} \beta - \frac{\cos(\lambda L_1)}{\lambda^3 \cos(\lambda L)} \left( \lambda^2 \frac{p}{V_\infty} + k_1 \dot{p} \right) \\ B_2 &= k_2 \left( \frac{\sin(\lambda L_1) \sin(\lambda(L - L_1))}{\cos(\lambda L)} + 1 \right) \beta - \frac{\sin(\lambda L_1)}{\lambda^3 \cos(\lambda L)} \left( \lambda^2 \frac{p}{V_\infty} + k_1 \dot{p} \right) \end{aligned}$$

sostituendo questi valori nelle equazioni relative ai due tratti si ha:

- Tratto 1:  $0 \leq y_1 \leq L_1$

$$\vartheta(y_1) = k_2 \frac{\sin(\lambda(L - L_1))}{\cos(\lambda L)} \sin(\lambda y_1) + \left( \frac{p}{V_\infty} + \frac{k_1 \dot{p}}{\lambda^2} \right) \left( y_1 - \frac{\sin(\lambda y_1)}{\lambda \cos(\lambda L)} \right)$$

- Tratto 2:  $0 \leq y_2 \leq L - L_1$

$$\begin{aligned} \vartheta(y_2) &= k_2 \left( \frac{\sin(\lambda(L - L_1))}{\cos(\lambda L)} \sin(\lambda(y_2 + L_1)) - (1 - \cos(\lambda y_2)) \beta \right) \\ &\quad + \left( \frac{p}{V_\infty} + \frac{k_1 \dot{p}}{\lambda^2} \right) \left( y_2 + L_1 - \frac{\sin(\lambda(y_2 + L_1))}{\lambda \cos(\lambda L)} \right) \end{aligned}$$

ponendo  $y_1 = y$  e  $y_2 = y + L_1$ , ed introducendo l'operatore scalino

$$\text{sca}(y - y_0) = \begin{cases} 0 & \text{per } y < y_0 \\ 1 & \text{per } y > y_0 \end{cases}$$

(senza precisare ulteriormente<sup>10</sup> il suo valore per  $y = y_0$ ) si possono riunire le due soluzioni in una unica equazione:

$$\begin{aligned} \vartheta(y) &= k_2 \left( \frac{\sin(\lambda(L - L_1))}{\cos(\lambda L)} \sin(\lambda y) - (1 - \cos(\lambda(y - L_1))) \text{sca}(y - L_1) \beta \right) \\ &\quad + \left( \frac{p}{V_\infty} + \frac{k_1 \dot{p}}{\lambda^2} \right) \left( y - \frac{\sin(\lambda y)}{\lambda \cos(\lambda L)} \right) \end{aligned}$$

che può essere scritta sinteticamente come:

$$\vartheta(y) = C_1(y) \beta + C_2(y) \frac{p}{V_\infty} + C_3(y) \dot{p}$$

dove si sono definiti i seguenti coefficienti:

$$\begin{aligned} C_1(y) &= -k_2 \left( \text{sca}(y - L_1) (1 - \cos(\lambda(y - L_1))) - \frac{\sin(\lambda(L - L_1))}{\cos(\lambda L)} \sin(\lambda y) \right) \\ C_2(y) &= k_1 \left( \frac{y}{L} - \frac{\sin(\lambda y)}{\lambda L \cos(\lambda L)} \right) \\ C_3(y) &= \frac{k_1}{\lambda^2} \left( y - \frac{\sin(\lambda y)}{\lambda \cos(\lambda L)} \right) \end{aligned}$$

mentre la distribuzione di portanza dovuta alla deformabilità diventa:

$$cC_{Pe} = C_1(y) cC_{P/\alpha} \beta + C_2(y) cC_{P/\alpha} \frac{pL}{V_\infty} + C_3(y) cC_{P/\alpha} \dot{p}$$

a questa equazione si aggiunge l'equazione relativa all'equilibrio del momento attorno all'asse di rollio:

$$J_x \dot{p} = q \left( 2 \int_0^L cC_{Pe} y \, dy + 2 \int_0^L c \frac{\partial C_{Pr}}{\partial \beta} \text{sca}(y - L_1) \, dy \beta + 2 \int_0^L \frac{\partial C_{Pr}}{\partial (pL/V_\infty)} y \, dy \frac{pL}{V_\infty} \right)$$

e sostituendo in questa l'espressione di  $cC_{Pe}$  soprascritta, ed ordinando i termini, si ha:

$$\begin{aligned} J_x \dot{p} &= 2q \left( \int_0^L cC_{P/\alpha} C_1(y) y \, dy + SLC_{P/\beta} \right) \beta + 2q \left( \int_0^L cC_{P/\alpha} C_2(y) y \, dy + SLC_{P/p} \right) \frac{Lp}{V_\infty} \\ &\quad + 2q \left( \int_0^L cC_{P/\alpha} C_3(y) y \, dy \right) SL\dot{p} \end{aligned}$$

Si passa ora allo studio dei casi particolari visti in precedenza.

<sup>10</sup>In seguito verrà comodo dare a tale operatore un valore convenzionale pari a 1/2 nel punto di discontinuità, in modo da garantire alcune proprietà agli integrali in cui l'operatore compare, senza addentrarsi troppo nella teoria delle distribuzioni.

## LAMBDA-L

Figura 1.10: Distribuzione di portanza dovuta alla deformabilità

**Moto incipiente** Si suppone di dover calcolare la distribuzione di portanza all'inizio della manovra di rollio, fissato l'angolo  $\beta$  di deflessione degli alettoni. Usando i risultati dell'analisi precedente, l'accelerazione angolare risulta essere:

$$\dot{p} = \frac{SLC_{P/\beta} + \int_0^L cC_{P/\alpha}C_1(y)y dy}{\frac{J_x}{2q} - \int_0^L cC_{P/\alpha}C_3(y)y dy}\beta$$

ed esplicitando i termini si ottiene:

$$\dot{p} = \frac{\frac{\partial C_{Pr}}{\partial \beta} \left( \frac{\cos(\lambda L_1)}{\cos(\lambda L)} - 1 \right) + \frac{c}{e} \frac{\partial C_{MCA}}{\partial \beta} \left( \frac{\cos(\lambda L_1)}{\cos(\lambda L)} - 1 - \lambda^2 \frac{L^2 - L_1^2}{2} \right)}{\frac{eC_{P/\alpha}}{2GJ} \left( J_x - 2m \frac{d}{e} \left( \frac{L^3}{3} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{\tan(\lambda L)}{\lambda^3} \right) \right)}\beta$$

ponendo il valore di  $\beta$  e di  $\dot{p}$  così determinati nell'equazione relativa alla distribuzione di portanza dovuta alla deformabilità si ottiene il valore di  $cC_{Pe}$ . La distribuzione complessiva di portanza è data dalla sovrapposizione della distribuzione elastica e di quella rigida:

$$cC_P(y) = cC_{Pr}(y) + cC_{Pe}(y) = \left( \frac{\partial cC_{Pr}(y)}{\partial \beta} \text{sca}(y - L_1) \right) \beta + cC_{Pe}(y)$$

**Moto uniforme** La distribuzione di portanza nel caso di moto uniforme, fissato  $\beta$  e tenendo conto dei risultati precedenti, è data da:

$$\frac{Lp}{V_\infty} = \frac{\frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} \left( \frac{\cos(\lambda L_1)}{\cos(\lambda L)} - 1 \right) + \frac{c}{e} \frac{\partial cC_{MCA}}{\partial \beta} \left( \frac{\cos(\lambda L_1)}{\cos(\lambda L)} - 1 - \lambda^2 \frac{L^2 - L_1^2}{2} \right)}{cC_{P/\alpha} \left( \frac{\tan(\lambda L)}{\lambda L} - 1 \right)}\beta$$

Il grafico di figura 1.10 mostra la distribuzione di portanza dovuta alla deformabilità per diversi valori di  $\lambda L$ .

**Efficienza** L'espressione dell'efficienza risulta essere:

$$\frac{L}{V_\infty} \frac{\partial p}{\partial \beta} = - \frac{C_{P/\beta} + \int_0^L cC_{P/\alpha}C_1(y)y dy}{C_{P/p} + \int_0^L cC_{P/\alpha}C_2(y)y dy}$$

inserendovi i risultati precedenti si ottiene:

$$\frac{L}{V_\infty} \frac{\partial p}{\partial \beta} = \frac{\frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} \left( \frac{\cos(\lambda L_1)}{\cos(\lambda L)} - 1 \right) + \frac{c}{e} \frac{\partial cC_{MCA}}{\partial \beta} \left( \frac{\cos(\lambda L_1)}{\cos(\lambda L)} - 1 - \lambda^2 \frac{L^2 - L_1^2}{2} \right)}{cC_{P/\alpha} \left( \frac{\tan(\lambda L)}{\lambda L} - 1 \right)}$$

## INVERSIONE

Figura 1.11: Inversione

Nel caso di ala rigida, per cui  $GJ \rightarrow \infty$  e quindi  $\lambda L \rightarrow 0$ , l'efficienza risulta essere:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda L \rightarrow 0} \frac{L}{V_\infty} \frac{\partial p}{\partial \beta} &= \frac{3}{2} \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} \frac{1}{cC_{P/\alpha}} \left(1 - \frac{L_1^2}{L^2}\right) \\ &= - \left( \frac{cC_{P/\beta}}{cC_{P/p}} \right)_r \\ &= \frac{\frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} \int_0^L y \, dy}{cC_{P/\alpha} \int_0^L y \frac{y}{L} \, dy} \end{aligned}$$

All'aumentare di  $\lambda L$  il momento di rollio, negativo, aumenta fino ad uguagliare il momento di rollio positivo dato dalla deflessione degli alettoni. Per determinare il valore di  $\lambda L$  e quindi la velocità di inversione, si deve annullare il numeratore dell'equazione che dà l'efficienza del comando:

$$\begin{aligned} (\cos(\lambda L_1) - \cos(\lambda L)) \left( \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} + \frac{c}{e} \frac{\partial cC_{MCA}}{\partial \beta} \right) \left( \frac{\cos \lambda L_1}{\cos \lambda L} - 1 \right) \\ + \cos \lambda L \left( \lambda^2 \frac{L^2 - L_1^2}{2} \frac{c}{e} \right) \frac{\partial cC_{MCA}}{\partial \beta} = 0 \end{aligned}$$

Quanto scritto può essere rappresentato nel diagramma di figura 1.11.

In questa analisi si è assunto che la velocità di inversione sia minore della velocità di divergenza. Confrontando l'ultima equazione con l'equazione che fornisce la velocità di divergenza, si nota che la pressione dinamica di divergenza eguaglia quella di inversione,  $q_D = q_i$ , quando

$$\frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} = - \frac{c}{e} \frac{\partial cC_{MCA}}{\partial \beta}$$

espressione simile a quella determinata nel caso più semplice del modello della sezione tipica.

**Schema a trave: formulazione del Principio dei Lavori Virtuali (soluzione approssimata)**

Si affronta ora il problema della manovra di rollio con un approccio variazionale utilizzando il PLV. Innanzi tutto si definiscono le coordinate libere che verranno utilizzate:

- $w$  deformata flessionale dell'asse elastico
- $\vartheta$  deformata torsionale
- $\varphi$  angolo di rollio

La forma completa del PLV può essere scritta come:

$$\int_0^L \delta \vartheta'^T G J \vartheta' \, dy + \int_0^L \delta w_T''^T E J w_T'' \, dy = \int_0^L \delta \vartheta^T m_t \, dy + \int_0^L \delta w_T^T f_z \, dy$$

avendo indicato con:

- $m_t$  momento torcente risultante rispetto all'asse elastico
- $f_z$  risultante delle forze in direzione  $z$ , applicate all'asse elastico

Rispetto al problema aeroelastico relativo all'equilibrio in moto rettilineo orizzontale uniforme si deve considerare, nello spostamento virtuale  $\delta w_T$ , la possibilità del moto di rotazione rigida. Lo spostamento  $\delta w_T$  può essere considerato costituito da due termini:



- la freccia  $w$  che l'asse elastico, nella configurazione deformata, assume rispetto all'asse elastico indeformato (riferimento che ruota solidalmente con il velivolo);
- lo spostamento dovuto al moto rotatorio rigido:

$$\delta w_T = \delta w + y\delta\varphi$$

Per quanto riguarda il lavoro interno ciò non comporta alcuna modifica, essendo  $\delta\varphi$  indipendente da  $y$ :

$$\delta w_T'' = \delta w''$$

mentre, per quanto riguarda il lavoro esterno, se ne deve tener conto. La formulazione del PLV diventa quindi:

$$\int_0^L \delta\vartheta'^T GJ\vartheta' dy + \int_0^L \delta w''^T EJw'' dy = \int_0^L \delta\vartheta^T m_t dy + \int_0^L \delta w^T f_z dy + \int_0^L y\delta\varphi^T f_z dy$$

Il disaccoppiamento fra flessione e torsione, nelle ipotesi generali dell'ala dritta, permette di risolvere separatamente il PLV per quanto riguarda la torsione e la flessione. Infatti, mentre la deformazione torsionale modifica le forze aerodinamiche che determinano le condizioni al contorno del problema aeroelastico, la deformazione flessionale non ha alcun effetto su di loro. Quindi il problema della torsione può essere risolto direttamente, mentre la sua soluzione è richiesta per la successiva soluzione del problema della flessione. I termini relativi a  $\delta\varphi$  sono anch'essi disaccoppiati (nessuna forza dipende da  $\varphi$ ), ma sono essenziali nel problema del rollio: da essi, infatti, deriverà l'equazione di equilibrio attorno all'asse di rollio. Ci si basa, pertanto, su un formulazione del PLV scritta nel seguente modo:

$$\int_0^L \delta\vartheta'^T GJ\vartheta' dy = \int_0^L m_t \delta\vartheta dy + \int_0^L f_z y \delta\varphi dy$$

fermo restando che la soluzione completa comprende anche i termini legati alla flessione, dati dalla relazione

$$\int_0^L \delta w''^T EJw'' dy = \int_0^L f_z \delta w dy$$

**Coordinate libere** Ai fini della formulazione matriciale si considerano come coordinate libere  $\vartheta$  e  $\varphi$ , mentre le altre variabili,  $p$ ,  $\dot{p}$  e  $\beta$ , vengono considerate dei parametri. Il vettore spostamento comprende solo  $\vartheta$  e  $\varphi$ :

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

Il lavoro interno si può esprimere definendo l'operatore differenziale:

$$\mathcal{D}(\cdot) = \begin{bmatrix} \partial(\cdot)/\partial y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e la matrice di rigidezza della sezione come

$$[D] = \begin{bmatrix} GJ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove la rigidezza associata alla rotazione di rollio è chiaramente nulla. Il lavoro interno può quindi essere scritto come:

$$\delta L_i = \int_0^L \mathcal{D}(\{u\})^T [D] \mathcal{D}(\{u\}) dy$$

La sostituzione di  $\vartheta$  con uno sviluppo di funzioni di forma viene espressa in forma matriciale come:

$$\{u\} = \begin{bmatrix} [N_\vartheta] & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_\vartheta\} \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

dove con  $[N_\vartheta]$  si è indicato un vettore riga contenente le  $n$  funzioni di forma scelte per lo sviluppo.

**Lavoro interno** Il lavoro interno viene quindi riscritto come:

$$\begin{aligned}
 \delta L_i &= \left\{ \begin{array}{c} \delta \{q_\vartheta\} \\ \delta \varphi \end{array} \right\}^T \int_0^L \left[ \begin{array}{cc} [N'_\vartheta] & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{cc} GJ & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} [N'_\vartheta] & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] dy \left\{ \begin{array}{c} \{q_\vartheta\} \\ \varphi \end{array} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} \delta \{q_\vartheta\} \\ \delta \varphi \end{array} \right\}^T \int_0^L \left[ \begin{array}{cc} [N'_\vartheta]^T GJ [N'_\vartheta] & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] dy \left\{ \begin{array}{c} \{q_\vartheta\} \\ \varphi \end{array} \right\} \\
 &= \delta \{q\}^T [K_s] \{q\}
 \end{aligned}$$

**Lavoro esterno** Si esplicitano  $m_t$  e  $f_z$ :

$$\begin{aligned}
 m_t &= qecC_{P/\alpha}\vartheta - qecC_{P/\alpha}\frac{yp}{V_\infty} + q(ecC_{P/\beta} + c^2C_{MCA/\beta})\beta \\
 f_z &= qcC_{P/\alpha}\vartheta - qcC_{P/\alpha}\frac{yp}{V_\infty} + qcC_{P/\beta}\beta - my\ddot{\varphi}
 \end{aligned}$$

si noti che viene trascurato, nell'espressione del momento torcente rispetto all'asse elastico, il contributo delle forze di inerzia,  $my\ddot{\varphi}d$ . Ciò è accettabile nella maggior parte dei casi, nell'ipotesi che la distanza tra asse elastico e centro di massa della sezione,  $d$ , sia piccolo, e che l'accelerazione angolare  $\ddot{\varphi}$  sia limitata. Il lavoro esterno risulta quindi:

$$\begin{aligned}
 \delta L_e &= q \int_0^L \delta\vartheta^T ecC_{P/\alpha}\vartheta dy - q \int_0^L \delta\vartheta^T ecC_{P/\alpha}y\frac{p}{V_\infty} dy + q \int_{L_1}^L \delta\vartheta^T (ecC_{P/\beta} + c^2C_{MCA/\beta})\beta dy \\
 &\quad + q \int_0^L \delta\varphi^T cC_{P/\alpha}y\vartheta dy - q \int_0^L \delta\varphi^T cC_{P/\alpha}y^2\frac{p}{V_\infty} dy + q \int_{L_1}^L \delta\varphi^T cC_{P/\beta}y\beta dy - \int_0^L \delta\varphi^T m\ddot{\varphi} dy
 \end{aligned}$$

La formulazione matriciale comprime i termini dipendenti dalla stessa coordinata libera o parametro in un unico termine:

$$\begin{aligned}
 \delta L_e &= q \int_0^L \left\{ \begin{array}{c} \delta\vartheta \\ \delta\varphi \end{array} \right\}^T \left[ \begin{array}{cc} ecC_{P/\alpha} & 0 \\ ycC_{P/\alpha} & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \vartheta \\ \varphi \end{array} \right\} dy + q \int_0^L \left\{ \begin{array}{c} \delta\vartheta \\ \delta\varphi \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{c} -yecC_{P/\alpha} \\ -y^2cC_{P/\alpha} \end{array} \right\} \frac{p}{V_\infty} dy \\
 &\quad + q \int_{L_1}^L \left\{ \begin{array}{c} \delta\vartheta \\ \delta\varphi \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{c} ecC_{P/\beta} + c^2C_{MCA/\beta} \\ ycC_{P/\beta} \end{array} \right\} \beta dy + \int_0^L \left\{ \begin{array}{c} \delta\vartheta \\ \delta\varphi \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -my^2c \end{array} \right\} \ddot{\varphi} dy
 \end{aligned}$$

si sostituiscono quindi le incognite di rotazione con la loro espressione approssimata mediante le funzioni di forma, per cui si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 \delta L_e &= \left\{ \begin{array}{c} \delta \{q_\vartheta\} \\ \delta \varphi \end{array} \right\}^T q \int_0^L \left[ \begin{array}{cc} [N_\vartheta]^T ecC_{P/\alpha} [N_\vartheta] & 0 \\ ycC_{P/\alpha} [N_\vartheta] & 0 \end{array} \right] dy \left\{ \begin{array}{c} \{q_\vartheta\} \\ \varphi \end{array} \right\} \\
 &\quad + \left\{ \begin{array}{c} \delta \{q_\vartheta\} \\ \delta \varphi \end{array} \right\}^T q \int_0^L \left\{ \begin{array}{c} -[N_\vartheta]^T yecC_{P/\alpha} \\ -y^2cC_{P/\alpha} \end{array} \right\} dy \frac{p}{V_\infty} \\
 &\quad + \left\{ \begin{array}{c} \delta \{q_\vartheta\} \\ \delta \varphi \end{array} \right\}^T q \int_{L_1}^L \left\{ \begin{array}{c} [N_\vartheta]^T (ecC_{P/\beta} + c^2C_{MCA/\beta}) \\ -ycC_{P/\beta} \end{array} \right\} dy \beta \\
 &\quad + \left\{ \begin{array}{c} \delta \{q_\vartheta\} \\ \delta \varphi \end{array} \right\}^T \int_0^L \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -my^2c \end{array} \right\} dy \ddot{\varphi}
 \end{aligned}$$

che, in forma sintetica, può essere riscritta come:

$$\delta L_e = \delta \{q\}^T q [K_a] \{q\} + \delta \{q\}^T q \{C_a\} \frac{Lp}{V_\infty} + \delta \{q\}^T q \{B\} \beta + \delta \{q\}^T \{I\} \ddot{\varphi}$$

dove si è scelto di normalizzare i coefficienti che moltiplicano la velocità di rollio in modo che quest'ultima sia definita in forma adimensionale come  $Lp/V_\infty$ . Formalmente, dunque, eliminando i  $\delta \{q\}$  per l'arbitrarietà dello spostamento virtuale, l'equazione che si ottiene dal PLV è:

$$([K_s] - q[K_a]) \{q\} = q \{C_a\} \frac{Lp}{V_\infty} + q \{B\} \beta + \{I\} \ddot{\varphi} \quad (1.39)$$

questo sistema è lo stesso che si è ottenuto nel modello semplificato, in cui si consideravano solo due gradi di libertà. La differenza consiste nella sostituzione della singola riga relativa a  $\vartheta$  con un blocco di righe relative alle coordinate  $\{q_\vartheta\}$ . Tenendo conto che per l'ala dritta la variazione di carico è legata solamente alla deformazione torsionale, si può considerare il sistema (1.39) scisso in due equazioni:

- equilibrio attorno all'asse elastico:

$$([K_{s\vartheta\vartheta}] - q[K_{a\vartheta\vartheta}])\{q_\vartheta\} = -q\{K_{\vartheta p}\} \frac{Lp}{V_\infty} + q\{K_{\vartheta\beta}\}\beta - \{K_{\vartheta\dot{p}}\}\dot{p} \quad (1.40)$$

- moto attorno all'asse di rollio:

$$-q[K_{a\varphi\vartheta}]\{q_\vartheta\} = -qK_{\varphi p} \frac{Lp}{V_\infty} + qK_{\varphi\beta}\beta - J_x\dot{p} \quad (1.41)$$

essendo:

$$\begin{aligned} [K_s] &= \begin{bmatrix} [K_{s\vartheta\vartheta}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} && \text{la rigidezza strutturale} \\ [K_a] &= \begin{bmatrix} [K_{a\vartheta\vartheta}] & 0 \\ [K_{a\varphi\vartheta}] & 0 \end{bmatrix} && \text{la rigidezza aerodinamica} \\ \{K_{\vartheta p}\}, K_{\varphi p} &&& \text{il momento torcente e di rollio dovuti ad un angolo di elica unitario} \\ \{K_{\vartheta\beta}\}, K_{\varphi\beta} &&& \text{il momento torcente e di rollio dovuti a deflessione unitaria dell'alettone} \\ \{K_{\vartheta\dot{p}}\} &&& \text{il momento torcente dovuto ad un'accelerazione angolare unitaria} \\ J_x &&& \text{il momento d'inerzia dell'ala} \end{aligned}$$

Si ricordi che  $p = \dot{\varphi}$  e quindi  $\dot{p} = \ddot{\varphi}$ . Posto

$$[K_{s\vartheta\vartheta}] - q[K_{a\vartheta\vartheta}] = [K_{AE}],$$

se si è lontani dalla divergenza, e quindi la matrice  $[K_{AE}]$  è invertibile, dalla (1.40) si ha:

$$\{q_\vartheta\} = -q[K_{AE}]^{-1}\{K_{\vartheta p}\} \frac{Lp}{V_\infty} + q[K_{AE}]^{-1}\{K_{\vartheta\beta}\}\beta - [K_{AE}]^{-1}\{K_{\vartheta\dot{p}}\}\dot{p}$$

che, sostituita nella (1.41), dà:

$$\begin{aligned} &\left( J_x + 2q[K_{a\varphi\vartheta}][K_{AE}]^{-1}\{K_{\vartheta\dot{p}}\} \right) \dot{p} \\ &= -2q \left( K_{\varphi p} + q[K_{a\varphi\vartheta}][K_{AE}]^{-1}\{K_{\vartheta p}\} \right) \frac{Lp}{V_\infty} + 2q \left( K_{\varphi\beta} + q[K_{a\varphi\vartheta}][K_{AE}]^{-1}\{K_{\vartheta\beta}\} \right) \beta \end{aligned}$$

si ottiene un'equazione simile a quella ricavata direttamente dall'equazione di equilibrio. In base a questa formulazione le condizioni di moto incipiente ed uniforme e l'efficacia aerodinamica si esprimono come segue:

- Moto incipiente

$$\dot{p} = \frac{K_{\varphi\beta} + q[K_{a\varphi\vartheta}][K_{AE}]^{-1}\{K_{\vartheta\beta}\}}{\frac{J}{2q} + [K_{a\varphi\vartheta}][K_{AE}]^{-1}\{K_{\vartheta\dot{p}}\}} \beta$$

- Moto uniforme

$$\frac{Lp}{V_\infty} = \frac{K_{\varphi\beta} + q[K_{a\varphi\vartheta}][K_{AE}]^{-1}\{K_{\vartheta\beta}\}}{K_{\varphi p} + q[K_{a\varphi\vartheta}][K_{AE}]^{-1}\{K_{\vartheta p}\}} \beta$$

- Efficienza

$$\frac{L}{V_\infty} \frac{\partial p}{\partial \beta} = \frac{K_{\varphi\beta} + q [K_{a\varphi\vartheta}] [K_{AE}]^{-1} \{K_{\vartheta\beta}\}}{K_{\varphi p} + q [K_{a\varphi\vartheta}] [K_{AE}]^{-1} \{K_{\vartheta p}\}}$$

Di conseguenza, la condizione di inversione diventa:

$$K_{\varphi\beta} + q [K_{a\varphi\vartheta}] [K_{AE}]^{-1} \{K_{\vartheta\beta}\} = 0$$

L'inversione, come già discusso, può essere determinata dalle equazioni di equilibrio imponendo che  $p = 0$  e  $\dot{p} = 0$ ; quindi dall'equazione di equilibrio di rollio (1.41) si ricava:

$$\beta = -K_{\varphi\beta}^{-1} [K_{\varphi\vartheta}] \{q_{\vartheta}\}$$

per cui dall'equazione di equilibrio di torsione (1.40) si ottiene:

$$\left( [K_{AE}] + q_i \{K_{\vartheta\beta}\} K_{\varphi\beta}^{-1} [K_{\varphi\vartheta}] \right) \{q_{\vartheta}\} = 0$$

ovvero, dalla definizione di  $[K_{AE}]$ :

$$\left( [K_s] - q_i \left( [K_a] - \{K_{\vartheta\beta}\} K_{\varphi\beta}^{-1} [K_{\varphi\vartheta}] \right) \right) \{q_{\vartheta}\} = 0$$

che rappresenta un problema agli autovalori in  $q_i$ .

### Approccio in flessibilità (collocazione)

Per affrontare il problema di un'ala con caratteristiche geometriche, strutturali ed aerodinamiche variabili in apertura, si può utilizzare un approccio in flessibilità, che porta a scrivere l'equazione di congruenza aeroelastica nella forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(cC_{Pe}) &= q \int_0^L C^{\vartheta\vartheta}(y, \eta) e c C_{Pe} d\eta \\ &+ q \int_0^L C^{\vartheta\vartheta}(y, \eta) \left( \left( e \frac{\partial c C_{Pr}}{\partial \beta} + c \frac{\partial c C_{MCA}}{\partial \beta} \right) \beta + e \frac{y}{L} \frac{\partial c C_{Pr}}{\partial (Lp/V_\infty)} \frac{Lp}{V_\infty} \right) d\eta \\ &- \int_0^L C^{\vartheta\vartheta}(y, \eta) m d\eta \dot{p} d\eta \end{aligned} \quad (1.42)$$

Questa equazione integrale va risolta, in generale, per via numerica. È possibile riferirsi al metodo a parametri concentrati, introdotto in precedenza. Il carico aeroelastico  $cC_{Pe}$ , in un tratto di ala  $[L_i, L_{i+1}]$ , viene ritenuto costante, e la forza che ne risulta è pari a  $W_i cC_{Pei}$ , dove  $W_i$  è la lunghezza del tratto di ala. L'equazione integrale viene valutata in un numero discreto di punti; quindi la deformazione della struttura è data da:

$$\{\vartheta\} = q [F_e] \{cC_{Pe}\} + q ([F_e] \{cC_{P/\beta}\} + [F_c] \{cC_{MCA/\beta}\}) \beta + q [F_y] \{cC_{P/p}\} \frac{Lp}{V_\infty} + q [F_{\dot{p}}] \{m\} \dot{p}$$

dove i coefficienti delle matrici sono:

$$\begin{aligned} F_{eij} &= \int_{L_j}^{L_{j+1}} C^{\vartheta\vartheta}(y_i, \eta) e(\eta) d\eta \\ F_{cij} &= \int_{L_j}^{L_{j+1}} C^{\vartheta\vartheta}(y_i, \eta) c(\eta) d\eta \\ F_{yij} &= \int_{L_j}^{L_{j+1}} C^{\vartheta\vartheta}(y_i, \eta) e(\eta) \frac{\eta}{L} d\eta \\ F_{\dot{p}ij} &= \int_{L_j}^{L_{j+1}} C^{\vartheta\vartheta}(y_i, \eta) d(\eta) \eta d\eta \end{aligned}$$

È possibile operare una discretizzazione a priori: le funzioni di influenza vengano sostituite da coefficienti di influenza, che si supporranno noti, e che, in generale danno la rotazione della striscia  $i$ -esima dovuta ad un momento torcente unitario, applicato sulla striscia  $j$ -esima. In questo caso, detta  $[C^{\theta\theta}]$  la matrice di influenza ottenuta per collocazione della funzione di influenza  $C^{\theta\theta}$ , le matrici assumono la forma:

$$\begin{aligned} [F_e] &= [C^{\theta\theta}] [\text{diag}(e)] [\text{diag}(W)] \\ [F_c] &= [C^{\theta\theta}] [\text{diag}(c)] [\text{diag}(W)] \\ [F_y] &= [C^{\theta\theta}] [\text{diag}(e)] [\text{diag}(y/L)] [\text{diag}(W)] \\ [F_{\dot{p}}] &= [C^{\theta\theta}] [\text{diag}(d)] [\text{diag}(y)] [\text{diag}(W)] \end{aligned}$$

Anche l'operatore aerodinamico può essere espresso in forma matriciale; nel caso in cui si utilizzi la teoria delle strisce, risulta:

$$A_{ij} = \delta_{ij} \frac{1}{cC_{P/\alpha_i}}$$

ovvero

$$[A] = \left[ \text{diag} \left( \frac{1}{cC_{P/\alpha}} \right) \right]$$

L'equazione integrale (1.42), che impone la congruenza aeroelastica, si trasforma in un sistema lineare, ogni riga del quale esprime l'uguaglianza fra l'incidenza relativa alla variazione di carico dovuta alla deformabilità sulla striscia  $i$ -esima e la torsione della striscia stessa conseguente ai carichi applicati sull'intera ala:

$$\begin{aligned} [A] \{cC_{Pe}\} &= q [F_e] \{cC_{Pe}\} + q \left( [F_e] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} \right\} + [F_c] \left\{ \frac{\partial cC_{MCA}}{\partial \beta} \right\} \right) \beta \\ &\quad + q [F_y] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial (Lp/V_\infty)} \right\} \frac{Lp}{V_\infty} + [F_{\dot{p}}] \{m\} \dot{p} \end{aligned}$$

che, riordinata, diventa:

$$\begin{aligned} ([A] - q [F_e]) \{cC_{Pe}\} &= q \left( [F_e] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} \right\} + [F_c] \left\{ \frac{\partial cC_{MCA}}{\partial \beta} \right\} \right) \beta \\ &\quad + q [F_y] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial (Lp/V_\infty)} \right\} \frac{Lp}{V_\infty} + [F_{\dot{p}}] \{m\} \dot{p} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Utilizzando la medesima discretizzazione, si scrive l'equazione di equilibrio del momento di rollio:

$$J_x \dot{p} = 2q \int_0^L y cC_{Pe} dy + 2q \int_{L_1}^L y \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} dy \beta + 2q \int_0^L \frac{y^2}{L} \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial (Lp/V_\infty)} dy \frac{Lp}{V_\infty}$$

che diventa:

$$J_x \dot{p} = 2q [H] \{cC_{Pe}\} + 2q [H] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} \right\} \beta + 2q [H] [\text{diag}(y/L)] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial (Lp/V_\infty)} \right\} \frac{Lp}{V_\infty} \quad (1.44)$$

avendo posto:

$$[H] = \{y\}^T [\text{diag}(W)]$$

Da questa formulazione in flessibilità si passa all'analisi dei tre problemi discussi in precedenza.

**Moto incipiente** Si supponga di voler determinare la distribuzione di portanza, fissato l'angolo di deflessione degli alettoni, all'inizio della manovra di rollio. Si impone la condizione  $p = 0$  e dall'equazione (1.43) si determina la distribuzione di portanza in funzione dell'angolo di deflessione e dell'accelerazione angolare  $\dot{p}$  che risulta incognita:

$$\{cC_{Pe}\} = ([A] - q[F_e])^{-1} \left( q \left( [F_e] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} \right\} + [F_c] \left\{ \frac{\partial cC_{MCA}}{\partial \beta} \right\} \right) \beta - [F_p] \{m\} \dot{p} \right)$$

e sostituendo questa equazione nella (1.44) si ha:

$$\dot{p} = \frac{[H] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} \right\} + q[H]([A] - q[F_e])^{-1} \left( [F_e] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} \right\} + [F_c] \left\{ \frac{\partial cC_{MCA}}{\partial \beta} \right\} \right) \beta}{\frac{J_x}{2q} + [H]([A] - q[F_e])^{-1} [F_p] \{m\}}$$

**Moto uniforme** Imponendo la condizione di moto uniforme, l'equazione del momento di rollio diventa:

$$[H] \left( \{cC_{Pe}\} + \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} \right\} \beta + [\text{diag}(y/L)] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial (Lp/V_\infty)} \right\} \frac{Lp}{V_\infty} \right) = 0$$

introducendo l'espressione:

$$\{cC_{Pe}\} = \left\{ \frac{\partial cC_{Pe}}{\partial \beta} \right\} \beta + [\text{diag}(y/L)] \left\{ \frac{\partial cC_{Pe}}{\partial (Lp/V_\infty)} \right\} \frac{Lp}{V_\infty}$$

essa diventa quindi:

$$[H] \left( \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} \right\} + \left\{ \frac{\partial cC_{Pe}}{\partial \beta} \right\} \right) \beta = [H] [\text{diag}(y/L)] \left( \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial (Lp/V_\infty)} \right\} + \left\{ \frac{\partial cC_{Pe}}{\partial (Lp/V_\infty)} \right\} \right) \frac{Lp}{V_\infty}$$

Quest'ultima, combinata con l'equazione (1.44) in modo da determinare

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial cC_{Pe}}{\partial \beta} \right\} &= ([A] - q[F_e])^{-1} q \left( [F_e] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} \right\} + [F_c] \left\{ \frac{\partial cC_{MCA}}{\partial \beta} \right\} \right) \\ \left\{ \frac{\partial cC_{Pe}}{\partial (Lp/V_\infty)} \right\} &= ([A] - q[F_e])^{-1} q[F_y] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial (Lp/V_\infty)} \right\} \end{aligned}$$

consente di determinare alternativamente la velocità angolare di rollio  $p$  o l'angolo di deflessione  $\beta$  quando l'una o l'altro sono fissati.

**Efficienza** È possibile utilizzare l'equazione del momento di rollio, determinata nel caso precedente, per ricavare la distribuzione di portanza legata alla deformabilità alare e quindi sostituirla nell'equazione (1.44). In questo modo è possibile determinare l'espressione dell'efficienza della superficie di comando:

$$\frac{L}{V_\infty} \frac{\partial p}{\partial \beta} = - \frac{cC_{P/\beta} + \frac{q}{SL} [H] ([A] - q[F_e])^{-1} \left( [F_e] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} \right\} + [F_c] \left\{ \frac{\partial cC_{MCA}}{\partial \beta} \right\} \right)}{cC_{P/p} + \frac{q}{SL} [H] ([A] - q[F_e])^{-1} [F_y] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial (Lp/V_\infty)} \right\}}$$

dove:

$$cC_{P/\beta} = \frac{1}{SL} [H] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} \right\}$$

è la variazione del momento di rollio del velivolo rigido dovuta a deflessione unitaria dell'alettone, e

$$cC_{P/p} = \frac{1}{SL} [H] [\text{diag}(y/L)] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial (Lp/V_\infty)} \right\}$$

è la variazione del momento di rollio del velivolo rigido dovuta ad una variazione unitaria dell'angolo di elica dell'estremità alare. I termini:

$$\frac{q}{SL} [H] ([A] - q [F_e])^{-1} \left( [F_e] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} \right\} + [F_c] \left\{ \frac{\partial cC_{MCA}}{\partial \beta} \right\} \right) \\ \frac{q}{SL} [H] ([A] - q [F_e])^{-1} [F_y] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial (Lp/V_\infty)} \right\}$$

sono funzione della pressione dinamica di volo. Essi comportano una variazione delle derivate aerodinamiche dell'ala stessa. L'annullarsi della derivata del coefficiente di momento di rollio rispetto a  $\beta$  individua la condizione di inversione del comando:

$$cC_{P/\beta} + \frac{q_i}{SL} [H] ([A] - q_i [F_e])^{-1} \left( [F_e] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} \right\} + [F_c] \left\{ \frac{\partial cC_{MCA}}{\partial \beta} \right\} \right)$$

La condizione di inversione del comando può essere determinata anche imponendo le condizioni che la caratterizzano:  $p = 0$  e  $\dot{p} = 0$ ; in questo caso le equazioni (1.43) e (1.44) diventano rispettivamente:

$$([A] - q_i [F_e]) \{cC_{Pe}\} - q_i \left( [F_e] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} \right\} + [F_c] \left\{ \frac{\partial cC_{MCA}}{\partial \beta} \right\} \right) \beta = 0 \\ 2q_i [H] \{cC_{Pe}\} + 2q_i [H] \{cC_{P/\beta}\} \beta = 0$$

dovendo essere la pressione dinamica diversa da zero, si può semplificare quest'ultima equazione, mentre dall'altra equazione è possibile ricavare l'espressione del carico aerodinamico legato alla deformabilità della struttura. Alla fine si ha:

$$\{cC_{Pe}\} = q_i ([A] - q_i [F_e])^{-1} \left( [F_e] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} \right\} + [F_c] \left\{ \frac{\partial cC_{MCA}}{\partial \beta} \right\} \right) \beta$$

e quindi

$$\left( q_i [H] ([A] - q_i [F_e])^{-1} \left( [F_e] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} \right\} + [F_c] \left\{ \frac{\partial cC_{MCA}}{\partial \beta} \right\} \right) + [H] \left\{ \frac{\partial cC_{Pr}}{\partial \beta} \right\} \right) \beta = 0$$

che sinteticamente può essere scritta come:

$$(cC_{P/\beta} + q_i cC_{Pe/\beta}) \beta = 0$$

dove il termine  $cC_{Pe/\beta}$  rappresenta la variazione del momento di rollio del velivolo a causa della deformabilità strutturale. L'equazione così ottenuta mostra che il calcolo della condizione di inversione è un problema agli autovalori anche se, come nel caso in cui si parte dalle equazioni di equilibrio, in forma non canonica in quanto la pressione dinamica di inversione compare nel coefficiente  $cC_{Pe/\beta}$ . La forma canonica verrà recuperata mediante la generalizzazione dell'aeroelasticità statica nel paragrafo 1.4.

### 1.2.5 Richiamata: soluzione esatta

La manovra di richiamata rientra nel caso più generale dello studio aeroelastico per condizioni di volo simmetriche, con un generico fattore di carico  $N$ . La simmetria consente di riferirsi alla singola semiala ed a metà velivolo. Nei paragrafi precedenti si sono già introdotte le forze agenti sulla sezione alare durante questa manovra:

$$P_A = q (cC_{P0} + cC_{P/\alpha} \alpha) + qcC_{P/\alpha} \vartheta \\ M_{CA} = qc^2 C_{MCA} \\ F_i = Nmg$$

Volendo sovrapporre le variazioni di forze e spostamenti conseguenti alla manovra di richiamata a quelle relative alla condizione di volo rettilineo, uniforme ed orizzontale si considerino:

$$\begin{aligned}\Delta P_A &= qcC_{P/\alpha}\Delta\alpha + qcC_{P/\alpha}\vartheta \\ \Delta M_{CA} &= 0 \\ \Delta F_i &= \Delta Nmg\end{aligned}$$

Come nella trattazione eseguita per l'ala semplificata,  $\Delta\alpha$  è la variazione di incidenza necessaria a produrre l'aumento di portanza che fornisce l'accelerazione centripeta nella manovra.  $\Delta\alpha$  è misurato rispetto ad una terna il cui asse  $X$  rimane tangente alla traiettoria del velivolo. Si consideri, anche qui, una manovra stabilizzata dove il velivolo ruoti a velocità costante rispetto al riferimento assoluto. Senza ledere la generalità della trattazione, a differenza di quanto fatto nel caso dell'ala semplificata non si considera il piano di coda e la portanza da esso prodotta. Non è quindi necessario ricorrere ad un'equazione di equilibrio alla rotazione attorno all'asse di beccheggio. L'intera portanza è prodotta dall'ala e l'equazione di equilibrio alla traslazione del velivolo, nella terna mobile considerata, è data da:

$$q \int_0^L cC_P(y) dy = \Delta N m_T g$$

dove  $m_T$  è la semimassa del velivolo. Nel caso in cui l'ala abbia caratteristiche geometriche, aerodinamiche ed inerziali costanti in apertura è possibile calcolare la soluzione esatta dell'equazione differenziale di equilibrio alla rotazione attorno all'asse elastico. Quest'ultima è data da:

$$GJ\vartheta''(y) = -m_t$$

dove  $m_t$ , nella condizione in esame, è dato da:

$$m_t = qecC_{P/\alpha}\Delta\alpha + qecC_{P/\alpha}\vartheta + \Delta Nmg$$

per cui l'equazione differenziale esplicitata risulta:

$$GJ\vartheta'' + qecC_{P/\alpha}\vartheta = -qecC_{P/\alpha}\Delta\alpha - \Delta Nmg$$

che è esprimibile anche come:

$$\vartheta'' + \lambda^2\vartheta = K$$

Questo tipo di equazione è già stato trattato nel paragrafo 1.2.2, parlando del problema di risposta statica in volo rettilineo, uniforme ed orizzontale. Come si è già affermato, la condizione di volo rettilineo, uniforme ed orizzontale e la richiamata ricadono, infatti, nel caso generale delle condizioni di volo simmetriche. Le condizioni al contorno sono anch'esse identiche a quelle del paragrafo 1.2.2, pertanto, si riporta la soluzione (1.33):

$$\vartheta(y) = \frac{K}{\lambda^2} (1 - \tan(\lambda l) \sin(\lambda y) - \cos(\lambda y))$$

dove  $\lambda$ , come nel caso precedente, è dato dall'espressione:

$$\lambda = \sqrt{\frac{qecC_{P/\alpha}}{GJ}}$$

mentre per quanto riguarda  $K$ , si ha:

$$K = -\frac{qecC_{P/\alpha}}{GJ}\Delta\alpha - \frac{mgd}{GJ}\Delta N$$

In questo caso, dunque,  $K$  non è un termine noto a meno di conoscere i valori  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta N$ . I due parametri sono tuttavia legati dall'equazione di equilibrio alla traslazione, che, ricordando che si sta esaminando un'ala con caratteristiche costanti in apertura, è esprimibile come:

$$q \int_0^L cC_{P/\alpha}\vartheta(y) dy = \Delta N m_T g$$



dove il termine sinistro esprime la portanza prodotta dalla singola semiala. Sostituendo la soluzione (1.33) in questa equazione, si ottiene l'equazione di equilibrio alla traslazione corretta per gli effetti aeroelastici. Si tratta di un'equazione omogenea in  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta N$  (si ricordi che  $K$  dipende da entrambi i parametri). È possibile risolverla calcolando  $\Delta\alpha$  per  $\Delta N$  assegnato o viceversa. Si ritrovano così i due problemi consistenti enunciati nella trattazione per l'ala semplificata (paragrafo ??). Calcolati  $\Delta\alpha$  e  $\Delta N$  è noto  $K$  ed è quindi possibile tornare alla (1.33) per determinare l'effettiva deformata torsionale.

## 1.3 Ala a freccia

### 1.3.1 Introduzione

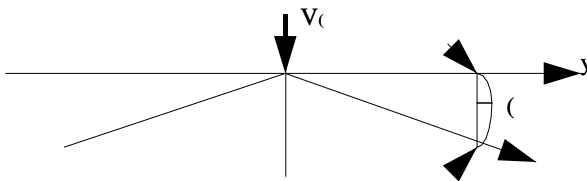
Nella trattazione svolta finora si è sempre considerata un'ala diritta, cioè avente asse elastico perpendicolare al piano di simmetria del velivolo. Questo ha permesso di ritenere la variazione di incidenza legata alla deformabilità pari alla deformata torsionale della struttura:

$$\alpha_e(y) = \vartheta(y)$$

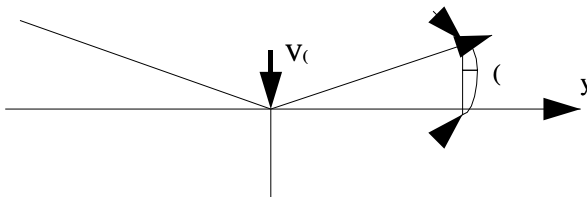
in quanto gli effetti dovuti alla flessione dell'ala stessa non influiscono sulla variazione di incidenza. Passando alla trattazione dell'ala a freccia, ossia con asse elastico inclinato rispetto al piano di simmetria del velivolo, non si può più affermare questo. L'angolo fra la perpendicolare al vento relativo (perpendicolare quindi anche all'asse di rollio del velivolo) e l'asse elastico della semiala è chiamato angolo di freccia (*sweep angle*):  $\Lambda$ .

Le configurazioni di ala a freccia possono essere due:

- Ala a freccia positiva ( $\Lambda > 0$ )



- Ala a freccia negativa ( $\Lambda < 0$ )



che portano a variazioni differenti dei fenomeni aeroelastici. Tuttavia è scorretto affermare che per l'ala a freccia si verifichi un effetto di accoppiamento fra flessione e torsione, le quali, come previsto nello schema a trave, rimangono strutturalmente disaccoppiate. Il problema è essenzialmente aerodinamico: l'accoppiamento esiste fra flessione e variazione di incidenza. La flessione, quindi, varia le condizioni al contorno dell'aerodinamica. Gli effetti della torsione e della flessione sull'incidenza del profilo possono esser esaminati separatamente.

### 1.3.2 Impostazione analitica

Per quanto riguarda i problemi aeroelastici relativi all'ala a freccia si deve innanzitutto definire la sezione a cui si fa riferimento. Infatti, si possono seguire due procedimenti diversi:

1. si riferiscono tutte le grandezze in gioco ad una direzione parallela al vento relativo (impostazione classica)
2. si riferiscono tutte le grandezze in gioco all'asse elastico e alla direzione ad esso perpendicolare.

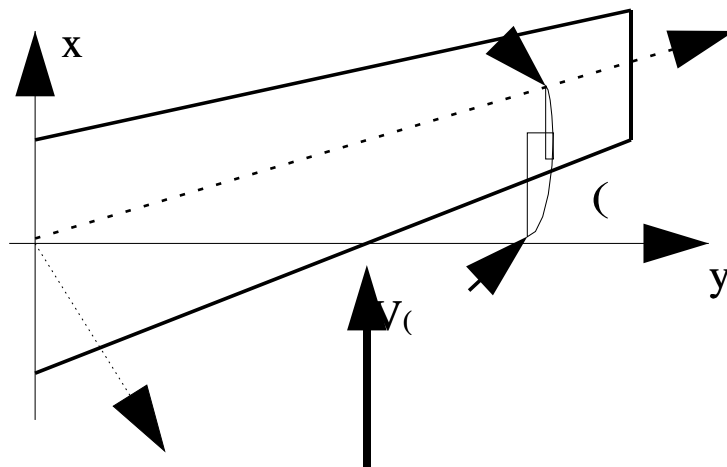
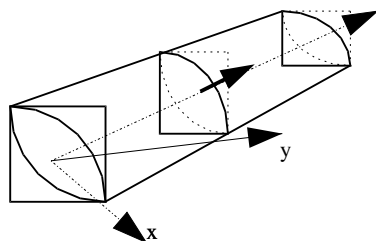


Figura 1.12: Impostazione classica

### Impostazione classica

Nell'impostazione classica il profilo alare è definito come la sezione della semiala parallela al vento relativo; a questa sezione vanno riferite le caratteristiche aerodinamiche, in particolare il  $C_{P/\alpha}$  e l'incidenza  $\Delta\alpha$ , e quelle geometriche, come la corda alare  $c$ . Si trattano separatamente la torsione e la flessione.

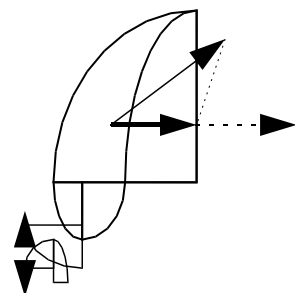
**Torsione** Considerando il profilo alare come la sezione parallela al vento relativo, una torsione  $\vartheta$ , che indica una rotazione delle sezioni perpendicolari all'asse elastico, nel loro piano, non si traduce in una variazione  $\vartheta$  di incidenza.



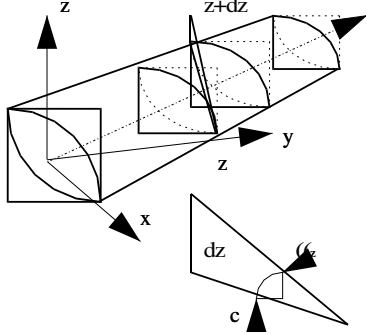
Al profilo viene applicato un vettore rotazione che non è perpendicolare al piano del profilo stesso. La componente del vettore rotazione sulla normale al profilo è:

$$\Delta\alpha_\vartheta = \vartheta \cos \Lambda$$

L'altra componente,  $\vartheta \sin \Lambda$ , inclina il profilo alare: l'effetto sarebbe quello di modificare la direzione della forza aerodinamica, ma normalmente non se ne tiene conto.



**Flessione** L'ala si flette mantenendo piane le sezioni perpendicolari all'asse elastico. Gli estremi (bordo d'attacco e d'uscita) del profilo si trovano su due diverse sezioni della trave. La freccia  $z$  relativa ai due estremi è quindi diversa: questo provoca una variazione di incidenza del profilo intesa come variazione dell'angolo che la corda forma con la direzione del vento relativo.



Si trascura la modifica della forma del profilo che è sempre considerato rigido in corda. Si può quindi scrivere:

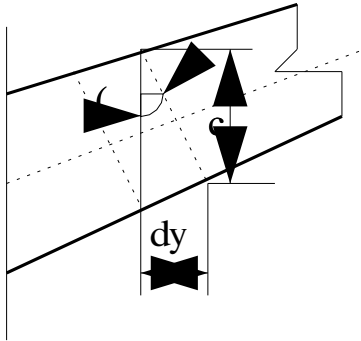
$$\Delta\alpha_z = -\frac{dz}{c}$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned} dz &= z' d\bar{y} \\ c &= \frac{d\bar{y}}{\sin \Lambda} \end{aligned}$$

e quindi

$$\Delta\alpha_z = -z' \sin \Lambda$$



La variazione di incidenza totale, correlata ai parametri di spostamento strutturale, ha perciò la seguente espressione:

$$\Delta\alpha = \vartheta \cos \Lambda - z' \sin \Lambda$$

### Impostazione alternativa

L'impostazione alternativa considera le sezioni perpendicolari all'asse elastico. Varieranno le caratteristiche geometriche ed aerodinamiche, inoltre la portanza andrà espressa in funzione della velocità che investe il profilo:

$$\Delta P = \frac{1}{2} \rho (V \cos \Lambda)^2 \bar{c} \bar{C}_P = q (\cos \Lambda)^2 \bar{c} \bar{C}_P$$

dove  $\bar{c}$  e  $\bar{C}_P$  sono rispettivamente la corda e il coefficiente di portanza del nuovo profilo. L'applicazione della teoria delle strisce con questo nuovo riferimento è giustificata. La portanza, infatti, è prodotta dai

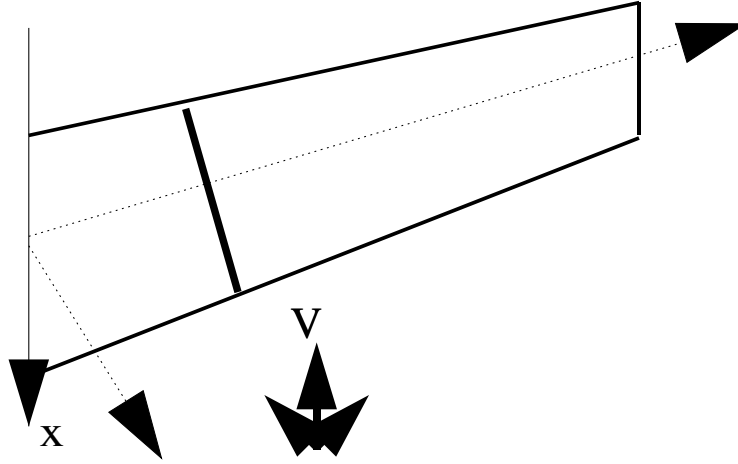


Figura 1.13: Decomposizione della velocità relativa

gradienti di pressione e questi esistono in direzione perpendicolare all'asse elastico, ma non in direzione parallela. Nel caso in cui al profilo sia applicabile la teoria dei profili sottili:  $\bar{C}_{P/\alpha} = 2\pi$ . Come nel caso precedente consideriamo gli effetti della torsione e della flessione separatamente.

**Torsione** L'incidenza che i nuovi profili assumono per la torsione dell'ala è direttamente  $\vartheta$ . Sembrerebbe dunque aggirato il problema dell'accoppiamento fra flessione ed incidenza.

**Flessione** In realtà la componente  $V \sin \Lambda$  della velocità, pur non contribuendo alla portanza, influenza l'incidenza in presenza di una freccia  $z$  non nulla. Si ricordi, infatti, che per definizione l'incidenza, sotto l'ipotesi di angoli piccoli, è pari al rapporto fra la componente normale della velocità e la velocità che investe il profilo. Quest'ultima è sempre  $V \cos \Lambda$ , ma la sua componente normale al profilo è alterata dalla componente parallela quando la normale al profilo cambia in seguito alla flessione. Quando la trave si inflette,  $V \sin \Lambda$  non risulta più parallela all'asse elastico. Indicando con  $\beta$  l'angolo fra la vecchia normale (ala non inflessa) e la nuova normale (ala inflessa):

$$\beta = \frac{dz}{dy} = z'$$

nell'ipotesi che le sezioni della trave rimangano piane, esattamente si ha:

$$z' = \tan \beta \cong \beta$$

Considerando la nuova direzione dell'asse elastico,  $V \sin \Lambda$  può essere scomposta in due nuove componenti indicate in figura.  $V \sin \Lambda \sin \beta$  è ora normale al profilo ed influenza quindi l'incidenza. Occorre, tuttavia, linearizzare l'espressione dell'incidenza: tutto viene attribuito alla direzione normale contenuta nel piano del profilo indeformato; non vi sono componenti laterali della portanza. Ciò equivale a proiettare la nuova componente portandola nella direzione della vecchia normale al profilo, quella relativa all'ala indeformata. La componente proiettata ha ora valore:

$$V_{nz} = V \sin \Lambda \tan \beta = V \sin \Lambda z'$$

Per lo stesso motivo non viene alterata la componente normale della parte  $V \cos \Lambda$  che rimane sempre pari a:

$$V_{n\vartheta} = V \cos \Lambda \vartheta$$

La componente totale normale al profilo è quindi:

$$V_n = V \cos \Lambda \vartheta - V \sin \Lambda z'$$

che permette quindi di determinare il valore dell'incidenza:

$$\Delta\bar{\alpha} = \frac{V \cos \Lambda \vartheta - V \sin \Lambda z'}{V \cos \Lambda} = \vartheta - z' \tan \Lambda$$

Nella nuova impostazione dunque, più che parlare di incidenza dovuta alla flessione è corretto parlare di modifica della componente normale di velocità dovuta alla flessione: l'effetto è assolutamente analogo a quanto accade con l'effetto diedro nelle ali dritte. In pratica la flessione fa comparire una nuova componente di velocità normale che modifica l'incidenza effettiva. Con questa nuova impostazione, pur non impedendo l'accoppiamento flessione-incidenza, si ha il vantaggio di operare con l'unica coordinata  $\bar{y}$ .

### Caratteristiche geometriche ed aerodinamiche

Rimane ora da vedere il problema di riferire le caratteristiche geometriche ed aerodinamiche ai nuovi profili. Questi valori sono univocamente determinati dall'uguaglianza fra le portanze prodotte da una porzione di ala in entrambe le impostazioni. In entrambi i casi deve essere:

$$\Delta P dy = \Delta \bar{P} d\bar{y}$$

si noti che fra le due incidenze si ha il seguente legame:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \vartheta \cos \Lambda - z' \sin \Lambda \\ \Delta\bar{\alpha} &= \vartheta - z' \tan \Lambda \end{aligned}$$

per cui:

$$\Delta\bar{\alpha} = \frac{\Delta\alpha}{\cos \Lambda}$$

essendo:

$$dy = d\bar{y} \cos \Lambda$$

da cui risulta

$$\Delta \bar{P} = \Delta P \cos \Lambda$$

Esplicitando le portanze:

$$q \cos^2 \Lambda \bar{C}_{P/\alpha} \Delta\bar{\alpha} = q C_{P/\alpha} \Delta\alpha \cos \Lambda$$

e, tenendo conto di quanto già scritto, diventa:

$$\bar{C}_{P/\alpha} = \frac{C_{P/\alpha}}{\cos \Lambda}$$

Per applicare la teoria delle strisce utilizzando i profili perpendicolari all'asse elastico occorre correggere i  $C_{P/\alpha}$  con il fattore  $1/\cos \Lambda$ .

### 1.3.3 Aspetti qualitativi: confronto tra ala dritta ed ala a freccia

L'influenza dell'angolo di freccia sugli aspetti aeroelastici statici riguarda sia la divergenza che la controllabilità in rollio. La freccia, in realtà, è stata introdotta storicamente per permettere maggiori velocità, limitando il numero di *Mach* a cui operano i profili. Il numero di *Mach*, da cui dipendono gli effetti della comprimibilità sul funzionamento del profilo, e quindi l'insorgere di resistenze addizionali e di pericoli di separazione dovuti ad eventuali onde d'urto, è misurato relativamente alla velocità normale all'ala, cioè a  $V \cos \Lambda$ . L'incremento di  $\Lambda$  diminuisce tale componente di velocità ed allontana la formazione di onde d'urto. L'ala a freccia ha tuttavia notevoli implicazioni strutturali ed aeroelastiche. Per quanto riguarda la divergenza, l'effetto della freccia positiva migliora le prestazioni della struttura. Nell'ala

Tabella 1.1: Effetti aerodinamici e strutturali dell'ala a freccia

| Freccia positiva                    |   |
|-------------------------------------|---|
| Comprimibilità                      | Diminuisce la componente normale di velocità          |
| Divergenza e rigidezza aeroelastica | Scarica le estremità, diminuisce il momento flettente |
| Efficacia alettoni                  | Aumenta l'incidenza a picchiare all'estremità         |
| Controllabilità ad alte incidenze   | Stallano prima le estremità                           |
| Freccia negativa                    |   |
| Comprimibilità                      | Diminuisce la componente normale di velocità          |
| Divergenza e rigidezza aeroelastica | Carica le estremità, aumenta il momento flettente     |
| Efficacia alettoni                  | Diminuisce l'incidenza a picchiare all'estremità      |
| Controllabilità ad alte incidenze   | Stalla prima la parte centrale                        |

diritta, infatti, sono le estremità alari a torcersi maggiormente e quindi a trovarsi ad incidenze maggiori: il carico si sposta verso le estremità aumentando il momento flettente nell'ala. La presenza della freccia fa invece sì che, dove è maggiore la rotazione flessionale, ancora all'estremità, diminuisca l'incidenza. Questo è vero solo per la freccia positiva, mentre avviene l'inverso per la freccia negativa. Come si è visto, inoltre, viene diminuito il braccio della portanza rispetto all'asse elastico: diminuisce la rigidezza aerodinamica e di conseguenza aumenta quella aeroelastica. Quindi, mentre ai fini aerodinamici freccia positiva e negativa sarebbero equivalenti, la freccia positiva diminuisce i problemi strutturali relativi alla divergenza, mentre quella negativa ha effetto contrario. Diversa è l'influenza sull'efficacia degli alettoni. La deflessione dell'alettone tende a diminuire l'incidenza dell'estremità alare a causa della forte variazione del coefficiente di momento aerodinamico a picchiare, che prevale sull'aumento di portanza. Proprio l'aumento di portanza aumenta invece la flessione dell'ala e, con freccia positiva, conduce ad un'ulteriore diminuzione di incidenza. L'efficacia degli alettoni è dunque sensibilmente diminuita dalla freccia positiva ed è invece esaltata dalla freccia negativa. Per questo motivo i velivoli da alte velocità, che possiedono una forte freccia positiva, hanno spesso due tipi di alettoni: all'esterno gli alettoni classici, utilizzati per basse velocità, e all'interno, degli alettoni 'split', che conservano la loro efficacia alle alte velocità. Occorre, inoltre, tener presente un ulteriore effetto, non strutturale ma puramente aerodinamico, della freccia positiva: il flusso che scorre verso l'esterno dell'ala tende a far stallare prima le estremità. Il fenomeno viene contrastato costruendo delle piccole paratie in senso trasversale sulla superficie alare, che incanalano il flusso. La Tabella 1.1 riassume gli effetti aerodinamici e strutturali dell'ala a freccia:

### 1.3.4 Soluzione del problema aeroelastico per l'ala a freccia

Per poter affrontare i problemi aeroelastici legati all'ala a freccia è innanzitutto necessario scrivere le equazioni di equilibrio, che possono presentarsi in forma differenziale, limitatamente al caso di ala snella con asse elastico coincidente con l'asse di riferimento, o in forma integrale, applicabili in questo caso ad ali di caratteristiche generiche.

#### Equazioni di equilibrio in forma differenziale

Per poter scrivere l'equazione di equilibrio dei momenti è necessario specificare il posizionamento delle forze che verranno considerate. Si tratterà all'inizio il caso in cui le forze stesse sono calcolate basandosi sulle proprietà dei profili considerati paralleli alla direzione del vento relativo, dove:

*C.A.*: asse dei centri aerodinamici

*C.G.*: asse dei baricentri

*A.E.*: asse elastico: coincidente con l'asse di riferimento  $\hat{y}$

*d*: distanza dall'asse elastico dei baricentri, positiva se *C.G.* anteriore a *A.E.*

*e*: distanza dall'*A.E.* del *C.A.*, positiva se *C.A.* anteriore ad *A.E.*

La forza totale, per unità di lunghezza, agente su di una superficie infinitesima presa a cavallo del

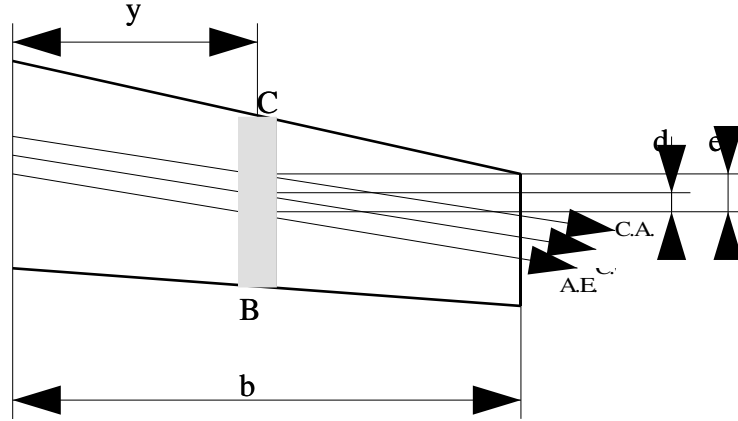


Figura 1.14: Ala a freccia

segmento BC, cioè nella direzione della velocità della corrente che investe l'ala, è data da:

$$f_z(y) = \frac{dF_z(y)}{dy} = qcC_P - Nmg$$

Il momento per unità di apertura può essere scritto nel seguente modo:

$$t(y) = \frac{dT(y)}{dy} = qecC_P + qc^2C_{MCA} - Nmgd$$

e risulta applicato nel punto di intersezione fra l'asse  $\hat{y}$  e il segmento BC che si trova ad una distanza  $y$  dall'asse di simmetria del velivolo ed a una distanza  $x = y \tan \Lambda$  dal punto C del segmento BC stesso. Volendo riscrivere le equazioni precedenti con riferimento alla direzione di  $\hat{y}$  è sufficiente proiettarle lungo tale asse, considerando che  $y = \hat{y} \cos \Lambda$ , da cui:

$$\frac{dF_z(y)}{d\hat{y}} = \frac{dF_z(y)}{dy} \cos \Lambda$$

e quindi:

$$\begin{aligned} f_z(\hat{y}) &= f_z(y) \cos \Lambda = (qcC_P - Nmg) \cos \Lambda \\ t(\hat{y}) &= t(y) \cos \Lambda = (qecC_P + qc^2C_{MCA} - Nmgd) \cos \Lambda \end{aligned}$$

Si noti che il momento distribuito  $t(\hat{y})$  deve essere scomposto in due componenti, una in grado di fornire il momento torcente distribuito attorno all'asse elastico, l'altro che dà invece il momento flettente distribuito attorno all'asse perpendicolare all'asse elastico:

$$\begin{aligned} \hat{t}(\hat{y}) &= t(\hat{y}) \cos \Lambda \\ \hat{m}(\hat{y}) &= -t(\hat{y}) \sin \Lambda \end{aligned}$$

Questa scomposizione permette di osservare che il momento flettente agente sull'ala sarà dovuto in parte al momento distribuito appena determinato ed in parte all'azione della forza  $f_z(\hat{y})$ . L'equazione differenziale di equilibrio, relativa alla flessione, si può ottenere differenziando due volte la seguente legge costitutiva:

$$\begin{aligned} EJ \frac{d^2 w(\hat{y})}{d\hat{y}^2} &= \int_0^L f_z(\hat{y}) \hat{y} d\hat{y} - \int_0^L \hat{m}(\hat{y}) d\hat{y} \\ \frac{d}{d\hat{y}} \left( EJ \frac{d^2 w(\hat{y})}{d\hat{y}^2} \right) &= f_z(\hat{y}) \hat{y} - \hat{m}(\hat{y}) \\ \frac{d^2}{d\hat{y}^2} \left( EJ \frac{d^2 w(\hat{y})}{d\hat{y}^2} \right) &= f_z(\hat{y}) - \frac{d}{d\hat{y}} \hat{m}(\hat{y}) \end{aligned}$$

che, ricordando l'equazione precedente, diventa:

$$\frac{d^2}{d\hat{y}^2} \left( EJ \frac{d^2 w(\hat{y})}{d\hat{y}^2} \right) = f_z(\hat{y}) - \frac{d}{d\hat{y}} t(\hat{y}) \sin \Lambda$$

e, sostituendo le espressioni di  $f_z(\hat{y})$  e di  $t(\hat{y})$ , si può scrivere:

$$\frac{1}{\cos \Lambda} \frac{d^2}{d\hat{y}^2} \left( EJ \frac{d^2 w(\hat{y})}{d\hat{y}^2} \right) = qcC_P - Nmg + \frac{d}{d\hat{y}} (qecC_P + qc^2C_{MCA} - Nmgd) \sin \Lambda$$

Ritenendo il coefficiente di portanza somma di una parte elastica e di una rigida, ossia:

$$C_P = C_{Pe} + C_{Pr}$$

si può scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \Lambda} \frac{d^2}{d\hat{y}^2} \left( EJ \frac{d^2 w(\hat{y})}{d\hat{y}^2} \right) - qcC_{Pe} - \frac{d}{d\hat{y}} (qecC_{Pe}) \sin \Lambda \\ = qcC_{Pr} - Nmg + \frac{d}{d\hat{y}} (qecC_{Pr} + qc^2C_{MCA} - Nmgd) \sin \Lambda \end{aligned}$$

È possibile seguire un ragionamento analogo al precedente per determinare l'equazione differenziale di equilibrio relativa alla torsione sull'ala, differenziando una volta la seguente legge costitutiva:

$$\begin{aligned} GJ \frac{d\hat{\vartheta}}{d\hat{y}} &= - \int_0^L \hat{t}(\hat{y}) d\hat{y} \\ \frac{d}{d\hat{y}} \left( GJ \frac{d\hat{\vartheta}}{d\hat{y}} \right) &= -\hat{t}(\hat{y}) = -t(\hat{y}) \cos \Lambda \end{aligned}$$

e sostituendo in questa l'espressione di  $t(\hat{y})$  si ricava:

$$\frac{d}{d\hat{y}} \left( GJ \frac{d\hat{\vartheta}}{d\hat{y}} \right) = - (qecC_P + qc^2C_{MCA} - Nmgd) \cos^2 \Lambda$$

e, ponendo anche in questo caso  $C_P = C_{Pe} + C_{Pr}$ , si ricava:

$$\frac{d}{d\hat{y}} \left( GJ \frac{d\hat{\vartheta}}{d\hat{y}} \right) + qecC_{Pe} \cos^2 \Lambda = - (qecC_{Pr} + qc^2C_{MCA} - Nmgd) \cos^2 \Lambda$$

Ricordando l'espressione relativa alla variazione dell'angolo di incidenza del profilo considerato, parallelo alla direzione del vento:

$$\Delta \alpha = \vartheta \cos \Lambda - z' \sin \Lambda$$

ed ipotizzando un legame lineare tra incidenza e distribuzione di portanza, per quanto riguarda l'aerodinamica si può scrivere:

$$\vartheta \cos \Lambda - z' \sin \Lambda = Q(cC_{Pe})$$

dove  $Q$  è un operatore lineare che assume forme diverse a seconda della teoria aerodinamica considerata. Nel caso particolarmente semplice in cui si ritengano valide le ipotesi della teoria delle strisce, l'operatore  $Q$  assume la forma:

$$Q(\cdot) = \frac{(\cdot)}{cC_{P/\alpha}} = \frac{(\cdot)}{\hat{C}_{P/\alpha} \cos \Lambda}$$

Ordinando le equazioni precedenti si arriva a scrivere un sistema, che per essere risolto necessita delle condizioni al contorno che traducono il vincolo di incastro alla radice alare e l'assenza di forze e momenti all'estremità. Per quanto riguarda quest'ultime, in forma analitica si ha:



Incastro

$$\begin{aligned} \text{Posizione nulla} & \quad w(0) = 0 \\ \text{Flessione nulla} & \quad \frac{dw(0)}{d\hat{y}} = 0 \\ \text{Torsione nulla} & \quad \hat{\vartheta}(0) = 0 \end{aligned}$$

Estremità

$$\begin{aligned} \text{Taglio nullo} & \quad \frac{d}{d\hat{y}} \left( EJ \frac{d^2 w(L)}{d\hat{y}^2} \right) = 0 \\ \text{Momento flettente nullo} & \quad EJ \frac{d^2 w(L)}{d\hat{y}^2} = 0 \\ \text{Momento torcente nullo} & \quad GJ \frac{d\hat{\vartheta}(L)}{d\hat{y}} = 0 \end{aligned}$$

Le equazioni precedenti possono essere scritte anche scegliendo di esprimere la forza totale agente su una superficie infinitesima presa a cavallo del segmento AB, perpendicolare all'asse elastico, per cui si dovranno considerare le caratteristiche dei profili perpendicolari all'asse elastico:

$$\begin{aligned} f_z(\hat{y}) &= \hat{q}\hat{c}\hat{C}_P - N\hat{m}g \\ t(\hat{y}) &= \hat{q}\hat{e}\hat{c}\hat{C}_P + \hat{q}\hat{c}^2\hat{C}_{MCA} - N\hat{m}g\hat{d} \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \cos^2 \Lambda & \text{pressione dinamica nella direzione normale all'asse elastico} \\ \hat{C}_P &= \frac{C_P}{\cos \Lambda} & \text{coefficiente di portanza locale riferito alla normale all'asse elastico} \\ \hat{C}_{MCA} &= \frac{C_{MCA}}{\cos^2 \Lambda} & \text{coefficiente di momento aerodinamico riferito alla normale all'asse elastico} \end{aligned}$$

Allo stesso modo vengono modificate le espressioni che forniscono il momento flettente, il momento torcente ed la relazione relativa all'aerodinamica, per cui il sistema (??XXX) viene riscritto nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\bar{y}^2} \left( EJ \frac{d^2 w}{d\bar{y}^2} \right) - q\bar{c}\bar{C}_{Pe} \cos^2 \Lambda &= q\bar{c}\bar{C}_{Pr} \cos^2 \Lambda - \bar{m}Ng \\ \frac{d}{d\bar{y}} \left( GJ \frac{d\bar{\vartheta}}{d\bar{y}} \right) + q\bar{e}\bar{c}\bar{C}_{Pe} \cos^2 \Lambda &= - (q\bar{e}\bar{c}\bar{C}_{Pr} + q\bar{c}^2\bar{C}_{MCA} - \bar{m}Ng\bar{d}) \cos^2 \Lambda \\ \vartheta - z' \tan \Lambda &= Q (\bar{c}\bar{C}_{Pe}) \end{aligned}$$

al quale si devono aggiungere le condizioni al contorno che traducono il vincolo di incastro alla radice dell'ala e l'assenza di forze e momenti all'estremità viste in precedenza.

### Forma completa del P.L.V. per l'ala a freccia

Per ovviare alle difficoltà di risoluzione delle equazioni differenziali di equilibrio è possibile risolvere il problema relativo all'ala a freccia utilizzando il Principio dei Lavori Virtuali:

$$\delta L_i = \delta L_e$$

Indicando con:

$w$ : flessione dell'asse elastico  
 $\vartheta$ : torsione dell'asse elastico

il lavoro interno assume l'espressione:

$$\delta L_i = \int_0^{\bar{L}} \delta \vartheta' GJ \vartheta' d\bar{y} + \int_0^{\bar{L}} \delta w'' EJ w'' d\bar{y}$$

mentre, per quanto riguarda il lavoro esterno, si ha:

$$\delta L_e = \int_0^{\bar{L}} \delta \bar{w}_{CA} \bar{P} d\bar{y} - \int_0^{\bar{L}} \delta \bar{w}_{CG} E J N m g d\bar{y} + \int_0^{\bar{L}} \delta \vartheta \bar{M}_A d\bar{y}$$

dove si sono presi come assi di riferimento l'asse elastico dell'ala e la corda ad esso perpendicolare. Le grandezze che compaiono nell'espressione del lavoro esterno hanno il seguente significato:

$$\begin{aligned} \bar{w}_{CA} &= w + \bar{e}\vartheta \\ \bar{w}_{CG} &= w + \bar{d}\vartheta \\ \Delta\bar{\alpha} &= \vartheta - w' \tan \Lambda \\ \bar{P} &= \bar{q}\bar{c}\bar{C}_{P/\alpha}\Delta\bar{\alpha} \\ \bar{M}_A &= \bar{q}\bar{c}^2\bar{C}_{MCA} \end{aligned}$$

per cui l'espressione completa del P.L.V. diventa:

$$\int_0^{\bar{L}} \delta \vartheta' G J \vartheta' d\bar{y} + \int_0^{\bar{L}} \delta w'' E J w'' d\bar{y} = \int_0^{\bar{L}} \delta w (\bar{P} - N m g) d\bar{y} + \int_0^{\bar{L}} \delta \vartheta (\bar{e}\bar{P} + \bar{M}_A - \bar{d}N m g) d\bar{y}$$

Introducendo delle opportune funzioni di forma che soddisfino le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \vartheta(0) &= 0 \\ \vartheta'(\bar{L}) &= 0 \\ w(0) &= 0 \\ w'(0) &= 0 \end{aligned}$$

nella forma:

$$\begin{aligned} \vartheta &= [N_\vartheta] \{q_\vartheta\} \\ w &= [N_w] \{q_w\} \end{aligned}$$

l'equazione precedente diventa:

$$\begin{aligned} &\delta \{q_\vartheta\}^T \int_0^{\bar{L}} [N'_\vartheta]^T G J [N'_\vartheta] d\bar{y} \{q_\vartheta\} + \delta \{q_w\}^T \int_0^{\bar{L}} [N''_w]^T E J [N''_w] d\bar{y} \{q_w\} \\ &= \delta \{q_w\}^T \int_0^{\bar{L}} [N_w]^T \bar{P} d\bar{y} + \delta \{q_\vartheta\}^T \int_0^{\bar{L}} [N_\vartheta]^T \bar{e}\bar{P} d\bar{y} \\ &\quad + \delta \{q_\vartheta\}^T \int_0^{\bar{L}} [N_\vartheta]^T \bar{M}_A d\bar{y} \\ &\quad - \delta \{q_w\}^T \int_0^{\bar{L}} [N_w]^T N m g d\bar{y} - \delta \{q_\vartheta\}^T \int_0^{\bar{L}} [N_\vartheta]^T \bar{d}N m g d\bar{y} \end{aligned}$$

Separando la parte dipendente da  $\delta \{q_\vartheta\}$  da quella dipendente da  $\delta \{q_w\}$  si ottengono le due equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{L}} [N'_\vartheta]^T G J [N'_\vartheta] d\bar{y} \{q_\vartheta\} &= \int_0^{\bar{L}} [N_\vartheta]^T \bar{e}\bar{P} d\bar{y} + \int_0^{\bar{L}} [N_\vartheta]^T \bar{M}_A d\bar{y} - \int_0^{\bar{L}} [N_\vartheta]^T \bar{d}N m g d\bar{y} \\ \int_0^{\bar{L}} [N''_w]^T E J [N''_w] d\bar{y} \{q_w\} &= \int_0^{\bar{L}} [N_w]^T \bar{P} d\bar{y} - \int_0^{\bar{L}} [N_w]^T N m g d\bar{y} \end{aligned}$$

e sostituendo in queste le espressioni della portanza e del momento aerodinamico viste in precedenza, si ha:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\bar{L}} [N'_\vartheta]^T GJ [N'_\vartheta] d\bar{y} \{q_\vartheta\} &= \bar{q} \int_0^{\bar{L}} [N_\vartheta]^T \bar{e}\bar{c}\bar{C}_{P/\alpha} [N_\vartheta] d\bar{y} \{q_\vartheta\} \\
&\quad - \bar{q} \int_0^{\bar{L}} [N_\vartheta]^T \bar{e}\bar{c}\bar{C}_{P/\alpha} \tan \Lambda [N'_w] d\bar{y} \{q_w\} \\
&\quad + \bar{q} \int_0^{\bar{L}} [N_\vartheta]^T \bar{c}^2 \bar{C}_{MCA} d\bar{y} - \int_0^{\bar{L}} [N_\vartheta]^T \bar{d} Nmg d\bar{y} \\
\int_0^{\bar{L}} [N''_w]^T EJ [N''_w] d\bar{y} \{q_w\} &= \bar{q} \int_0^{\bar{L}} [N_w]^T \bar{c}\bar{C}_{P/\alpha} [N_\vartheta] d\bar{y} \{q_\vartheta\} \\
&\quad - \bar{q} \int_0^{\bar{L}} [N_w]^T \bar{c}\bar{C}_{P/\alpha} \tan \Lambda [N'_w] d\bar{y} \{q_w\} \\
&\quad - \int_0^{\bar{L}} [N_w]^T Nmg d\bar{y}
\end{aligned}$$

Questo sistema può essere riscritto adottando una formulazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} [K_{\vartheta\vartheta}] & [K_{\vartheta w}] \\ [K_{w\vartheta}] & [K_{ww}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_\vartheta\} \\ \{q_w\} \end{Bmatrix} = \bar{q} \begin{Bmatrix} \{B_{\vartheta A}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{B_{\vartheta I}\} \\ \{B_{wI}\} \end{Bmatrix}$$

dove:

$$\begin{aligned}
[K_{\vartheta\vartheta}] &= \int_0^{\bar{L}} [N'_\vartheta]^T GJ [N'_\vartheta] d\bar{y} - \bar{q} \int_0^{\bar{L}} [N_\vartheta]^T \bar{e}\bar{c}\bar{C}_{P/\alpha} [N_\vartheta] d\bar{y} \\
[K_{\vartheta w}] &= \bar{q} \int_0^{\bar{L}} [N_\vartheta]^T \bar{e}\bar{c}\bar{C}_{P/\alpha} \tan \Lambda [N'_w] d\bar{y} \\
[K_{w\vartheta}] &= \bar{q} \int_0^{\bar{L}} [N_w]^T \bar{c}\bar{C}_{P/\alpha} [N_\vartheta] d\bar{y} \\
[K_{ww}] &= \bar{q} \int_0^{\bar{L}} [N_w]^T \bar{c}\bar{C}_{P/\alpha} \tan \Lambda [N'_w] d\bar{y} \\
\{B_{\vartheta A}\} &= \int_0^{\bar{L}} [N_\vartheta]^T \bar{c}^2 \bar{C}_{MCA} d\bar{y} \\
\{B_{\vartheta I}\} &= \int_0^{\bar{L}} [N_\vartheta]^T \bar{d} Nmg d\bar{y} \\
\{B_{wI}\} &= \int_0^{\bar{L}} [N_w]^T Nmg d\bar{y}
\end{aligned}$$

Si può notare, da quest'ultima matrice, che la torsione non è più disaccoppiata dalla flessione, per cui non è possibile risolvere il problema aeroelastico prendendo in considerazione la sola equazione di equilibrio alla torsione, ma si deve studiare il sistema completo.

### Approccio in flessibilità: equazione integrale

Il problema relativo all'ala a freccia può essere affrontato anche utilizzando un approccio in flessibilità, cioè ricorrendo all'equazione di equilibrio scritta in forma integrale. Questo approccio ha anche il vantaggio di poter estendere lo studio ad un'ala di pianta generica. Si prende in esame un'ala a freccia positiva, rigida in corda. La condizione di congruenza aeroelastica, considerando un profilo parallelo alla direzione del vento relativo (segmento  $BC$  di Figura 1.13), risulta essere:

$$\alpha_e(y) = \vartheta \cos \Lambda - \frac{\partial w}{\partial \bar{y}} \sin \Lambda$$

Le coordinate libere del problema vengono espresse tramite opportune funzioni di influenza:

$$\begin{aligned}\vartheta &= \int_0^L C^{\vartheta\vartheta}(y, \eta) t(\eta) d\eta \\ \frac{\partial w}{\partial \bar{y}} &= \int_0^L C^{w'\vartheta}(y, \eta) t(\eta) d\eta + \int_0^L C^{w'z}(y, \eta) f_z(\eta) d\eta\end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}f_z(y) &= \frac{dF_z(y)}{dy} = qcC_P - Nmg && \text{forza totale per unità di apertura} \\ t(y) &= \frac{dT(y)}{dy} = qecC_P + qc^2C_{MCA} - Nmgd && \text{momento totale per unità di apertura}\end{aligned}$$

mentre le funzioni di influenza hanno il seguente significato:

$$\begin{aligned}C^{\vartheta\vartheta}(y, \eta) & \text{ torsione nel punto } y \text{ per momento torcente unitario in } \eta; \\ C^{w'\vartheta}(y, \eta) & \text{ valore di } \partial w / \partial y \text{ nel punto } y \text{ per momento torcente unitario in } \eta; \\ C^{w'z}(y, \eta) & \text{ valore di } \partial w / \partial y \text{ nel punto } y \text{ per forza unitaria in } \eta.\end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni di  $\vartheta$  e  $\partial w / \partial y$  nell'equazione di congruenza aeroelastica si ottiene:

$$\alpha_e(y) = \int_0^L C^{\vartheta\vartheta}(y, \eta) t(\eta) d\eta \cos \Lambda - \int_0^L C^{w'\vartheta}(y, \eta) t(\eta) d\eta \sin \Lambda - \int_0^L C^{w'z}(y, \eta) f_z(\eta) d\eta \sin \Lambda$$

Definendo:

$$\begin{aligned}C^{\alpha\vartheta}(y, \eta) &= C^{\vartheta\vartheta}(y, \eta) \cos \Lambda - C^{w'\vartheta}(y, \eta) \sin \Lambda \\ C^{\alpha z}(y, \eta) &= C^{w'z}(y, \eta) \sin \Lambda\end{aligned}$$

e sostituendo nell'equazione precedente le espressioni di  $t(y)$  e  $f_z(y)$  si ottiene:

$$\alpha_e(y) = \int_0^L C^{\alpha\vartheta}(y, \eta) (qecC_P + qc^2C_{MCA} - Nmgd) d\eta - \int_0^L C^{\alpha z}(y, \eta) (qcC_P - Nmg) d\eta$$

Ritenendo il coefficiente di portanza somma di una parte elastica e di una rigida, cioè:

$$cC_P = cC_{Pe} + cC_{Pr}$$

l'equazione precedente diventa:

$$\begin{aligned}\alpha_e(y) &= \int_0^L C^{\alpha\vartheta}(y, \eta) (qe(cC_{Pe} + cC_{Pr}) + qc^2C_{MCA} - Nmgd) d\eta \\ &\quad - \int_0^L C^{\alpha z}(y, \eta) (q(cC_{Pe} + cC_{Pr}) - Nmg) d\eta\end{aligned}$$

che, ponendo:

$$C^*(y, \eta) = eC^{\alpha\vartheta}(y, \eta) - C^{\alpha z}(y, \eta)$$

può essere riscritta come:

$$\begin{aligned}\alpha_e(y) &= q \int_0^L C^*(y, \eta) cC_{Pe} d\eta + q \int_0^L C^*(y, \eta) cC_{Pr} d\eta \\ &\quad + q \int_0^L C^{\alpha z}(y, \eta) c^2C_{MCA} d\eta - \int_0^L (dC^{\alpha\vartheta}(y, \eta) - C^{\alpha z}(y, \eta)) Nmg d\eta\end{aligned} \quad (1.45)$$

Cambiando riferimento, ossia considerando un profilo perpendicolare all'asse elastico (segmento  $AB$  di Figura 1.14), l'espressione dell'incidenza è la seguente:

$$\alpha_e(\bar{y}) = \vartheta - \frac{\partial w}{\partial \bar{y}} \tan \Lambda$$

Anche in questo caso le coordinate libere del problema possono essere espresse tramite opportune funzioni di influenza:

$$\begin{aligned}\vartheta &= \int_0^{\bar{L}} \bar{C}^{\vartheta\vartheta}(\bar{y}, \bar{\eta}) t(\bar{y}) d\bar{\eta} \\ \frac{\partial w}{\partial \bar{y}} &= \int_0^{\bar{L}} \bar{C}^{w'z}(\bar{y}, \bar{\eta}) f_z(\bar{y}) d\bar{\eta}\end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}f_z(\bar{y}) &= \bar{q}\bar{c}\bar{C}_P - N\bar{m}g && \text{forza totale per unità di apertura} \\ t(\bar{y}) &= \bar{q}\bar{e}\bar{c}\bar{C}_P + \bar{q}\bar{c}^2\bar{C}_{MCA} - N\bar{m}g\bar{d} && \text{momento totale per unità di apertura}\end{aligned}$$

mentre le funzioni di influenza hanno il seguente significato:

$$\begin{aligned}\bar{C}^{\vartheta\vartheta}(\bar{y}, \bar{\eta}) & \text{ torsione in } y \text{ per momento torcente unitario in } \eta \\ \bar{C}^{w'z}(\bar{y}, \bar{\eta}) & \text{ valore di } \partial w / \partial \bar{y} \text{ in } y \text{ per forza unitaria in } \eta.\end{aligned}$$

Si noti che le funzioni di influenza che compaiono nei due casi sono differenti in quanto si riferiscono a sistemi di carico diversi applicati in punti di coordinate diverse. Per quanto riguarda la loro espressione si faccia riferimento all'appendice relativa ai coefficienti di influenza (??). Inoltre si può osservare che scompare l'accoppiamento fra flessione e momento applicato sul profilo poiché, in questo caso, il momento è solo torcente. Sostituendo le espressioni di  $\alpha$  e  $\partial w / \partial \bar{y}$  nell'equazione di congruenza aeroelastica, si ottiene:

$$\alpha_e(y) = \int_0^{\bar{L}} \bar{C}^{\vartheta\vartheta}(\bar{y}, \bar{\eta}) t(\bar{y}) d\bar{\eta} - \int_0^{\bar{L}} \bar{C}^{w'z}(\bar{y}, \bar{\eta}) f_z(\bar{y}) d\bar{\eta} \tan \Lambda$$

Definendo:

$$\begin{aligned}\bar{C}^{\alpha\vartheta}(\bar{y}, \bar{\eta}) &= \bar{C}^{\vartheta\vartheta}(\bar{y}, \bar{\eta}) \\ \bar{C}^{\alpha z}(\bar{y}, \bar{\eta}) &= \bar{C}^{w'z}(\bar{y}, \bar{\eta}) \tan \Lambda\end{aligned}$$

e sostituendo nell'equazione precedente le espressioni di  $t(\bar{y})$  e  $f_z(\bar{y})$  si ottiene:

$$\alpha_e(\bar{y}) = \int_0^{\bar{L}} \bar{C}^{\alpha\vartheta}(\bar{y}, \bar{\eta}) (\bar{q}\bar{e}\bar{c}\bar{C}_P + \bar{q}\bar{c}^2\bar{C}_{MCA} - N\bar{m}g\bar{d}) d\bar{\eta} - \int_0^{\bar{L}} \bar{C}^{\alpha z}(\bar{y}, \bar{\eta}) (\bar{q}\bar{c}\bar{C}_P - N\bar{m}g) d\bar{\eta}$$

Ritenendo il coefficiente di portanza somma di una parte elastica e di una rigida, cioè:

$$\bar{c}\bar{C}_P = \bar{c}\bar{C}_{Pe} + \bar{c}\bar{C}_{Pr}$$

l'equazione precedente, ordinata rispetto ai coefficienti di portanza e ponendo:

$$\bar{C}^*(\bar{y}, \bar{\eta}) = \bar{e}\bar{C}^{\alpha\vartheta}(\bar{y}, \bar{\eta}) - \bar{C}^{\alpha z}(\bar{y}, \bar{\eta})$$

può essere riscritta come:

$$\begin{aligned}\alpha_e(\bar{y}) &= \bar{q} \int_0^{\bar{L}} \bar{C}^*(\bar{y}, \bar{\eta}) \bar{c}\bar{C}_{Pe} d\bar{\eta} + \bar{q} \int_0^{\bar{L}} \bar{C}^*(\bar{y}, \bar{\eta}) \bar{c}\bar{C}_{Pr} d\bar{\eta} \\ &\quad + \bar{q} \int_0^{\bar{L}} \bar{C}^{\alpha z}(\bar{y}, \bar{\eta}) \bar{c}^2\bar{C}_{MCA} d\bar{\eta} - \int_0^{\bar{L}} (\bar{d}\bar{C}^{\alpha\vartheta}(\bar{y}, \bar{\eta}) - \bar{C}^{\alpha z}(\bar{y}, \bar{\eta})) N\bar{m}g d\bar{\eta}\end{aligned}\quad (1.46)$$

Per poter arrivare ad una soluzione, sia che si prenda come profilo di riferimento quello parallelo alla direzione del vento relativo che quello in direzione normale rispetto all'asse elastico, si deve introdurre un'equazione aerodinamica che lega l'incidenza aerodinamica con la distribuzione di portanza, come si è fatto nello studio dell'ala a freccia con le equazioni differenziali di equilibrio. La soluzione dell'equazione (1.45XXX) o della (1.46XXX) per via analitica non è possibile, per cui si ricorre ad un'opportuna discretizzazione degli integrali che porta ad una riscrittura matriciale delle equazioni stesse:

$$[A] \{cC_{Pe}\} = q [\bar{E}] \{cC_{Pe}\} + q [\bar{E}] \{cC_{Pr}\} + q [\bar{F}] \{c^2C_{MCA}\} - Ng [\bar{G}] \{m\}$$

Nel caso dell'ala a freccia, non essendoci più il disaccoppiamento fra flessione e torsione, le matrici  $[\bar{E}]$  e  $[\bar{F}]$  non sono diagonali e, in generale, nemmeno simmetriche.

### 1.3.5 Divergenza flesso-torsionale

Per quanto riguarda l'ala a freccia si parla di divergenza flesso-torsionale e non più di divergenza puramente torsionale, come fatto nel caso dell'ala dritta, in quanto le deformazioni di torsione e di flessione sono accoppiate. Il problema del calcolo della pressione dinamica di divergenza, anche nello studio dell'ala a freccia, è riconducibile ad un problema agli autovalori: ricerca del più piccolo autovalore positivo dell'equazione omogenea associata all'equazione differenziale o integrale di equilibrio.

#### Soluzione esatta

Si consideri un'ala a freccia con caratteristiche costanti in apertura, con l'asse elastico che coincide con l'asse dei centri aerodinamici; quest'ultima ipotesi è necessaria per poter ottenere una soluzione in forma chiusa. Se  $C.A.$  coincide con  $A.E.$  la variazione di portanza dovuta alla deformabilità non provoca momento torcente, per cui non si hanno effetti di retroazione aeroelastica sulla torsione. Si studierà solo l'equazione differenziale di equilibrio relativa alla flessione, ricercando, come al solito soluzioni infinitamente vicine a quelle di equilibrio e quindi analizzando la stabilità dell'equilibrio flessionale. Come sistema di riferimento viene assunto quello che considera i profili paralleli al vento relativo. Si consideri, quindi, l'omogenea associata alla prima delle (??XXX):

$$\frac{d^2}{d\bar{y}^2} \left( EJ \frac{d^2 w(\bar{y})}{d\bar{y}^2} \right) - qcC_{Pe} = 0 \quad (1.47)$$

e ricordando l'espressione dell'operatore aerodinamico della teoria delle strisce, ponendo  $\bar{\vartheta} = 0$ :

$$C_{Pe} = -\bar{C}_{P/\alpha} \cos \Lambda \frac{dw}{d\bar{y}} \sin \Lambda$$

che, sostituita nella (1.47XXX) e considerando  $EJ$  costante, permette di scrivere:

$$EJ \frac{d^4 w(\bar{y})}{d\bar{y}^4} + qc\bar{C}_{P/\alpha} \cos^2 \Lambda \sin \Lambda \frac{dw}{d\bar{y}} = 0$$

da cui:

$$\frac{d^4 w(\bar{y})}{d\bar{y}^4} + \frac{qc\bar{C}_{P/\alpha}}{EJ} \cos^2 \Lambda \sin \Lambda \frac{dw}{d\bar{y}} = 0$$

È conveniente trasformare quest'ultima equazione nella forma:

$$\frac{d^3 \Gamma}{d\xi^3} - b\Gamma = 0 \quad (1.48)$$

dove:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{dw}{d\bar{y}} \\ \xi &= 1 - \frac{\bar{y}}{L} \\ b &= \frac{qc\bar{C}_{P/\alpha}}{EJ} \cos^2 \Lambda \sin \Lambda \end{aligned}$$

Le condizioni al contorno che permettono la risoluzione dell'equazione (1.48XX) sono:

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 0 \\ \frac{d\Gamma(0)}{d\xi} &= 0 \\ \frac{d^2 \Gamma(0)}{d\xi^2} &= 0 \end{aligned}$$

La (1.48XX) è un'equazione differenziale del terzo ordine a coefficienti costanti, il cui integrale generale può essere espresso come:

$$\Gamma = \sum_{i=1}^3 A_i e^{\lambda_i \xi}$$

dove  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sono le radici dell'equazione caratteristica:

$$\lambda^3 - b = 0$$

Le tre condizioni al contorno danno origine ad un sistema lineare omogeneo nelle incognite  $A_i$ , che in forma matriciale diventa:

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & e^{\lambda_2} & e^{\lambda_3} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.49)$$

è necessario che il determinante della matrice dei coefficienti si annulli perché si abbiano soluzioni diverse da quella banale. L'espressione del determinante della (1.49XXX) è data da:

$$1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left( \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} \right) e^{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \left( \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} \right) e^{\lambda_3 - \lambda_1} = 0$$

Supponendo che l'ala sia a freccia negativa, poiché questo è il caso più interessante relativamente ad un problema di divergenza. In questo caso  $b < 0$ , per cui l'equazione caratteristica viene riscritta come:

$$\lambda^3 + |b| = 0$$

che ammette le seguenti radici:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\sqrt[3]{|b|} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} (1 + i\sqrt{3}) \sqrt[3]{|b|} \end{aligned}$$

Sostituendo queste radici nell'equazione (3.34), si ottiene un'equazione in  $|b|$ , come segue:

$$e^{\frac{3}{2} \sqrt[3]{|b|}} + 2 \cos \left( \frac{[3]}{2} \sqrt[3]{|b|} \right) = 0$$

Una soluzione approssimata della precedente equazione non lineare consente di calcolare il minimo valore di  $b$  per cui essa è verificata come, pari a  $b = 6.33$ . Questo valore corrisponde ad una pressione dinamica di divergenza pari a:

$$q_D = 6.33 \frac{EJ}{\bar{L}^3 c \bar{C}_{P/\alpha} |\sin \Lambda| \cos^2 \Lambda}$$

Questo risultato indica che, al diminuire dell'angolo di freccia negativo dell'ala, cioè al tendere di  $\Lambda$  a 0 da valori negativi, la pressione dinamica di divergenza aumenta. Ciò significa che un'ala a freccia negativa ha valori della pressione dinamica di divergenza minori rispetto ad un'ala dritta. Per quanto riguarda la freccia positiva i risultati precedenti non sono applicabili; basta tuttavia considerare che, per la freccia positiva, una flessione positiva produce un'incidenza negativa, per concludere che un'ala a freccia positiva, con asse elastico coincidente con l'asse dei centri aerodinamici, ha una pressione dinamica di divergenza infinita.

## 1.4 Concetto generalizzato di aeroelasticità statica

### 1.4.1 Introduzione

Lo studio dei problemi aeroelastici di risposta a forzanti deterministiche rientra, concettualmente, nell'ambito dei problemi dinamici. Sotto opportune ipotesi è possibile ricondursi ad una impostazione di

tipo statico, che è stata già applicata nei problemi riguardanti il rollio e la richiamata, nei precedenti paragrafi. Si parla allora, in questo senso, di aeroelasticità statica generalizzata. Un passaggio fondamentale è rappresentato dall'adozione di una approssimazione quasi-stazionaria per l'aerodinamica. Le forze aerodinamiche agenti come forzanti vanno espresse applicando un determinato modello aerodinamico. Nei problemi di risposta deterministica questo tipo di forze è originato dai movimenti delle superfici di comando.

Le leggi temporali di movimento che il pilota impone alle superfici di comando, nell'esecuzione della manovra, hanno sempre un contenuto in frequenza sufficientemente limitato da permettere di calcolare le corrispondenti forze aerodinamiche con una approssimazione quasi-stazionaria. Per quanto riguarda le forze aerodinamiche dovute al moto strutturale, è necessario analizzare il contenuto in frequenza della risposta del sistema aeroelastico in rapporto al contenuto in frequenza delle forzanti. Per questo scopo si supporrà di conoscere il modello modale (modi e frequenze proprie) della struttura, in assenza di aerodinamica, e di lavorare con un modello aeroelastico condensato.

### 1.4.2 Risposta in coordinate modali

L'equazione del moto libero della struttura, derivata, ad esempio, dall'applicazione di un metodo ad elementi finiti, è:

$$[\bar{M}] \{\ddot{u}(t)\} + [\bar{C}] \{\dot{u}(t)\} + [\bar{K}] \{u(t)\} = \{0\} \quad (1.50)$$

Da questa equazione sono determinabili i modi e le frequenze proprie della struttura. I modi descrivono esattamente la risposta dinamica in assenza di aerodinamica: non solo il moto libero del sistema, ma qualunque moto forzato può essere espresso come combinazione lineare di tutti i modi. L'analisi in frequenza del moto forzato del sistema permette di affermare che ciascuno di essi risponde con un'ampiezza ed uno sfasamento pari, rispettivamente, al modulo e all'argomento della risposta in frequenza che gli è propria. Questo è immediatamente dimostrabile, in quanto i modi, in assenza dei termini aerodinamici, permettono di diagonalizzare le matrici di massa, rigidità e smorzamento (se si considera uno "smorzamento alla Rayleigh") e quindi disaccoppiano le equazioni di moto del sistema. Si introduca la matrice modale  $[U]$ , le cui colonne sono costituite dagli autovettori del problema agli autovalori derivato dalla (1.50) e si effettui la trasformazione di coordinate:

$$\{u(t)\} = [U] \{q(t)\} \quad (1.51)$$

Applicando tale trasformazione alla generica equazione di moto forzato del sistema,

$$[\bar{M}] \{\ddot{u}(t)\} + [\bar{C}] \{\dot{u}(t)\} + [\bar{K}] \{u(t)\} = \{F(t)\} \quad (1.52)$$

e premoltiplicando per la trasposta della matrice modale, si ottiene:

$$[U]^T [\bar{M}] [U] \{\ddot{q}(t)\} + [U]^T [\bar{C}] [U] \{\dot{q}(t)\} + [U]^T [\bar{K}] [U] \{q(t)\} = [U]^T \{F(t)\}$$

da cui:

$$[M] \{\ddot{q}(t)\} + [C] \{\dot{q}(t)\} + [K] \{q(t)\} = \{Q(t)\} \quad (1.53)$$

dove le nuove matrici di massa, smorzamento e rigidità sono diagonali. Il sistema è dunque disaccoppiato e la generica equazione di moto è esprimibile come:

$$m_i \ddot{q}_i(t) + c_i \dot{q}_i(t) + k_i q_i(t) = Q_i(t) \quad (1.54)$$

che in frequenza permette di scrivere:

$$q_i(\omega) = \frac{Q_i(\omega)/m_i}{-\omega^2 + 2\xi\omega_0 j\omega + \omega_0^2} \quad (1.55)$$

dove:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{k_i}{m_i}} \\ \xi_i &= \frac{c_i}{2\sqrt{k_i m_i}} \end{aligned}$$



Ciascun modo, quindi, risponde in funzione della risposta in frequenza corrispondente:

$$q_i(\omega) = G_i(j\omega) Q_i(\omega)$$

con

$$G_i(j\omega) = \frac{1/m_i}{-\omega^2 + 2\xi\omega_0 j\omega + \omega_0^2}$$

La presenza della controreazione aerodinamica modifica il sistema: i modi non diagonalizzano più tutte le matrici, gli autovalori non sono più complessi coniugati, i modi risultano complessi. Le equazioni non sono più, dunque, disaccoppiabili. La modifica indotta dall'aerodinamica, seppure qualitativamente importante, non introduce alterazioni tali da impedire di approssimare il moto della struttura con una combinazione lineare di modi propri. Ciò che importa non è dare una descrizione modale del moto, ma ottenere una approssimazione quantitativamente accettabile della legge di moto:

$$\{u(t)\} = [U] \{q(t)\}$$

Applicando la trasformazione di coordinate alle equazioni aeroelastiche complete si ottiene:

$$\left( -\omega^2 [U]^T [\bar{M}] [U] + j\omega [U]^T [\bar{C}] [U] + [U]^T [\bar{K}] [U] - q [H_{am}(k, M)] \right) \{q(\omega)\} = [U]^T \{F(\omega)\}$$

da cui:

$$(-\omega^2 [M] + j\omega [C] + [K] - q [H_{am}(k, M)]) \{q(\omega)\} = \{Q(\omega)\}$$

Si tenga presente che la matrice aerodinamica  $[H_{am}(k, M)]$ , per ragioni di opportunità, viene calcolata già in coordinate modali (o, in generale, in coordinate già condensate). I problemi di risposta aeroelastica, nell'ambito di quella che si definisce "aeroelasticità classica", vengono studiati nel dominio di *Fourier*. In queste espressioni ogni modo mantiene la sua identità, ovvero dà un contributo più o meno importante a seconda del rapporto fra il contenuto in frequenza della forzante e la frequenza propria cui il modo si riferisce:

$$\omega_n = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

Questo non è più vero formalmente, poiché, in presenza dell'aerodinamica, la risposta non è più una combinazione lineare dei modi propri, ma è un'approssimazione soddisfacente dal punto di vista quantitativo. Ha allora senso distinguere fra modi bassi (con basse  $\omega_n$ ) e modi alti (con alte  $\omega_n$ ) ed affermare che se la forzante ha un contenuto in frequenza genericamente limitato, cioè se esiste  $\omega_{max}$  tale che  $Q(\omega) \cong 0$  per  $\omega > \omega_{max}$  allora la risposta dei modi con  $\omega_n \gg \omega_{max}$  (i modi alti) è trascurabile. Per un modo normalizzato a massa modale unitaria si ha:

$$\begin{aligned} q_i(\omega) &= \frac{Q_i(\omega)/m_i}{-\omega^2 + 2\xi\omega_0(j\omega) + \omega_0^2} \\ &= \frac{Q_i(\omega)}{m_i\omega_0^2} \frac{1}{\left(1 - (\omega/\omega_0)^2 + j2\xi(\omega/\omega_0)\right)} \end{aligned}$$

per cui, se  $\omega_{max} \ll \omega_0$ , allora, per tutti gli  $\omega$  per cui  $Q_i(\omega)$  è significativa:

$$q_i(\omega) \cong \frac{Q_i(\omega)}{m_i\omega_0^2} = \frac{Q_i(\omega)}{k_i}$$

La risposta dei modi alti rispetto al contenuto in frequenza della forzante è statica e immediata. Inoltre, più il modo è alto e più la rigidità modale  $m_i\omega_0 = k_i$  è elevata, quindi  $q_i(\omega)$  è trascurabile. Le forzanti dovute ai comandi hanno in genere un contenuto in frequenza molto limitato rispetto alle frequenze proprie della struttura<sup>11</sup>. Ciò giustifica l'assunzione che bastino pochi modi, appartenenti alla banda più

<sup>11</sup>Ovviamente ci sono notevoli eccezioni, per le quali queste considerazioni decadono o comunque richiedono maggiore attenzione. Un esempio importante è dato dai grandi velivoli, con frequenze strutturali molto basse, asserviti a sistemi di controllo del volo con banda passante decisamente più elevata di una ipotetica "banda passante" del pilota. In questo caso i comandi di volo possono interagire con la deformabilità strutturale e può non avere senso parlare di aeroelasticità statica.

bassa, per descrivere il moto della struttura. Questo significa, fra l'altro, che il contenuto in frequenza del moto strutturale è limitato e che quindi anche per le forze aerodinamiche, dovute al movimento strutturale, è applicabile l'approssimazione quasi-stazionaria. Non verranno quindi utilizzati tutti i modi derivanti dal problema agli autovalori originato dallo studio della (1.50), ma solo un numero molto limitato di essi, rispetto ai gradi di libertà originari del problema. La matrice di trasformazione  $[U]$  conterrà soltanto i modi ritenuti significativi nella descrizione della risposta del sistema. Allo stesso modo, la matrice aerodinamica  $[H_{am}(k, M)]$ , spesso ottenuta mediante processi lunghi e laboriosi, verrà calcolata direttamente per i soli modi necessari. Questa procedura abbassa drasticamente il numero di gradi di libertà ed i tempi di risoluzione del problema aeroelastico: il problema scritto in coordinate modali è, dunque, un modello condensato del sistema. In definitiva, nel modello modale condensato sono significativi solo i movimenti a frequenze relativamente basse. Quanto siano basse queste frequenze dipende dal contenuto in frequenza della forzante ma, se la forzante è un comando, esse saranno comunque sempre tali da giustificare l'adozione di una approssimazione quasi-stazionaria per l'aerodinamica.

### 1.4.3 Residualizzazione statica del sistema aeroelastico

L'ipotesi che le frequenze delle forzanti, nella risposta al comando, siano tali da permettere l'utilizzo dell'aerodinamica quasi-stazionaria nel modello analitico non è l'unica semplificazione adottabile. Il modello in esame descrive infatti il comportamento del velivolo libero e, indipendentemente dal modello strutturale dal quale è partita la modellazione, la condensazione modale permette di utilizzare come coordinate le ampiezze dei modi, il che garantisce che il movimento del velivolo libero sia descritto in una terna di assi medi. La principale caratteristica della descrizione del moto in assi medi è la separabilità fra *modi rigidi* e *modi di vibrare* della struttura. Nel modello in esame, nel dominio del tempo si può scrivere:

$$[M_S] \{\ddot{q}(t)\} + \left( [C_S] - \frac{qc}{V_\infty} [C_A] \right) \{\dot{q}(t)\} + ([K_S] - q[K_A]) \{q(t)\} = \{Q(t)\}$$

sono allora separabili le coordinate relative ai modi rigidi e quelle relative ai modi di vibrare:

$$\{q(t)\} = \begin{Bmatrix} \{q_r(t)\} \\ \{q_e(t)\} \end{Bmatrix}$$

per cui, seguendo questa separazione, ogni matrice potrà essere partizionata nel seguente modo:

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{rr}] & [A_{re}] \\ [A_{er}] & [A_{ee}] \end{bmatrix}$$

Dalla partizione delle matrici e del vettore delle coordinate libere si ottengono due equazioni:

$$\begin{aligned} & [M_{Srr}] \{\ddot{q}_r(t)\} + [M_{Sre}] \{\ddot{q}_e(t)\} \\ & + \left( [C_{Srr}] - \frac{qc}{V_\infty} [C_{Arr}] \right) \{\dot{q}_r(t)\} + \left( [C_{Sre}] - \frac{qc}{V_\infty} [C_{Are}] \right) \{\dot{q}_e(t)\} \\ & + ([K_{Srr}] - q[K_{Arr}]) \{q_r(t)\} + ([K_{Sre}] - q[K_{Are}]) \{q_e(t)\} = \{Q_r(t)\} \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} & [M_{Ser}] \{\ddot{q}_r(t)\} + [M_{See}] \{\ddot{q}_e(t)\} \\ & + \left( [C_{Ser}] - \frac{qc}{V_\infty} [C_{Aer}] \right) \{\dot{q}_r(t)\} + \left( [C_{See}] - \frac{qc}{V_\infty} [C_{Aee}] \right) \{\dot{q}_e(t)\} \\ & + ([K_{Ser}] - q[K_{Aer}]) \{q_r(t)\} + ([K_{See}] - q[K_{Aee}]) \{q_e(t)\} = \{Q_e(t)\} \end{aligned} \quad (1.57)$$

Occorre tuttavia ragionare sul modello modale, che disaccoppia le equazioni. In particolare, come è implicito nel concetto di assi medi, i modi rigidi e quelli elastici risulteranno inerzialmente disaccoppiati; inoltre nessuna rigidità strutturale, né smorzamento, saranno presenti nei modi rigidi. Ne segue quindi

che

$$\begin{aligned} [M_{Sre}] &= [M_{Ser}] = [0] \\ [K_{Srr}] &= [C_{Srr}] = [0] \\ [K_{Sre}] &= [K_{Ser}] = [0] \\ [C_{Sre}] &= [C_{Ser}] = [0] \end{aligned}$$

per cui le equazioni (1.56) e (1.57) si riducono a:

$$\begin{aligned} [M_{Srr}] \{\ddot{q}_r(t)\} - \frac{qc}{V_\infty} [C_{Arr}] \{\dot{q}_r(t)\} - \frac{qc}{V_\infty} [C_{Are}] \{\dot{q}_e(t)\} \\ - q [K_{Arr}] \{q_r(t)\} - q [K_{Are}] \{q_e(t)\} &= \{Q_r(t)\} \\ [M_{See}] \{\ddot{q}_e(t)\} - \frac{qc}{V_\infty} [C_{Aer}] \{\dot{q}_r(t)\} + \left( [C_{See}] - \frac{qc}{V_\infty} [C_{Aee}] \right) \{\dot{q}_e(t)\} \\ - q [K_{Aer}] \{q_r(t)\} + ([K_{See}] - q [K_{Aee}]) \{q_e(t)\} &= \{Q_e(t)\} \end{aligned}$$

Quindi, in coordinate modali, i modi rigidi ed elastici risultano:

- inerzialmente ed elasticamente disaccoppiati;
- accoppiati dall'aerodinamica.

Su questa separazione si innesta la residualizzazione della dinamica del sistema che condurrà al concetto di aeroelasticità statica generalizzata e giustificherà i metodi adottati nella prima parte di questo capitolo. Si è già affermato che, sebbene il modello modale non consenta più l'ideale disaccoppiamento dei gradi di libertà del sistema, a causa della presenza dell'aerodinamica che comporta il passaggio dai modi propri ai modi aeroelastici, tuttavia, qualitativamente, i modi conservano la capacità di sintetizzare la dinamica del sistema secondo un criterio spettrale, ovvero in base al campo di frequenze a cui sono legati. Ogni modo sarà più o meno eccitato a seconda di quanto sia elevato il contenuto in frequenza della forzante in prossimità della frequenza propria associata al modo stesso. Se la forzante ha un contenuto in frequenza basso in corrispondenza della frequenza propria del modo, quest'ultimo, come si è visto in precedenza, risponde in modo statico. Questo significa che la coordinata  $\tilde{q}(t)$ , relativa al modo in esame, assume istantaneamente i valori corrispondenti alla condizione di regime, dando luogo a forze d'inerzia e smorzamenti assolutamente trascurabili. Da un punto di vista fisico, infatti, più che parlare di trascurabilità di  $\ddot{\tilde{q}}(t)$  e  $\dot{\tilde{q}}(t)$  è più corretto affermare che relative forze,  $\tilde{m}\ddot{\tilde{q}}(t)$  e  $\tilde{c}\dot{\tilde{q}}(t)$ , sono trascurabili. Anche le forze aerodinamiche dipendenti dal movimento  $\tilde{q}(t)$  possono essere ritenute nulle: l'aerodinamica, relativamente al modo la cui ampiezza è descritta da  $\tilde{q}(t)$ , diventa stazionaria. Questo procedimento è noto come residualizzazione della dinamica del sistema. Poiché il contenuto in frequenza di una forzante che abbia significato fisico decade sempre per  $\omega \rightarrow \infty$ , la residualizzazione viene applicata a tutti i modi la cui frequenza propria sia superiore ad una data  $\omega$ , oltre la quale il contenuto in frequenza della forzante sia molto piccolo (rispetto a quello a frequenze inferiori). Nella maggioranza dei casi, quando la forzante è un comando, il suo contenuto in frequenza è tale da non eccitare dinamicamente nessuno dei modi elastici, per cui tutta la parte elastica del moto può venire trattata in maniera statica. Le equazioni del modello aeroelastico si semplificano e possono essere riscritte come:

$$\begin{aligned} [M_{Srr}] \{\ddot{q}_r(t)\} - \frac{qc}{V_\infty} [C_{Arr}] \{\dot{q}_r(t)\} \\ - q [K_{Arr}] \{q_r(t)\} - q [K_{Are}] \{q_e(t)\} &= \{Q_r(t)\} \\ - \frac{qc}{V_\infty} [C_{Aer}] \{\dot{q}_r(t)\} - q [K_{Aer}] \{q_r(t)\} + ([K_{See}] - q [K_{Aee}]) \{q_e(t)\} &= \{Q_e(t)\} \end{aligned} \quad (1.58)$$

il problema descritto da questo sistema è algebrico-differenziale:

- algebrico nelle incognite  $\{q_e(t)\}$ ,
- differenziale nelle incognite  $\{q_r(t)\}$ .

L'aeroelasticità trattata con questa approssimazione è l'aeroelasticità statica. In effetti questa separazione è analoga a quella imposta nella prima parte del capitolo, anche se in quel caso la deformazione non era descritta in assi medi.

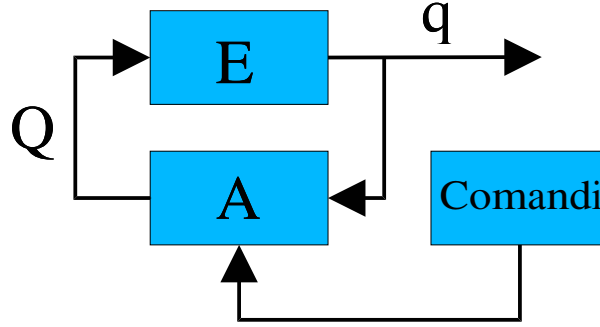


Figura 1.15: Sistema aeroelastico

#### 1.4.4 Aeroelasticità statica generalizzata.

Si è stabilito che, visto il contenuto in frequenza delle forzanti rappresentate dai comandi, è giustificato lo studio della risposta deterministica al comando stesso nell'ambito dell'aeroelasticità statica. Per aeroelasticità statica si intende un modello aeroelastico con le seguenti caratteristiche:

- descrizione del moto rigido del velivolo separato dalla deformabilità;
- aerodinamica stazionaria per la parte correlata alla deformabilità, approssimazione quasi-stazionaria o stazionaria per la parte correlata al moto rigido;
- deformabilità considerata staticamente, moto rigido trattato dinamicamente.

Concettualmente l'approssimazione dell'aerodinamica precede la residualizzazione della dinamica del sistema. In uno schema a blocchi il sistema aeroelastico è descritto nel seguente modo: La legge di comando, ovvero la legge di movimento della superficie di controllo, influisce direttamente sul blocco aerodinamico, producendo le forzanti che agiscono sul sistema. Queste forzanti dipendono dalla legge di comando attraverso il modello aerodinamico che può venire approssimato con l'aerodinamica quasi-stazionaria, quindi le forzanti vanno ad eccitare la struttura; il movimento produce a sua volta le forze aerodinamiche rappresentate da  $[H_{am}(k, M)]$ : si introduce, dunque, la residualizzazione che, vista la frequenza delle forzanti, permette di considerare staticamente la deformabilità. Tornando al modello aeroelastico specificato con le ipotesi dell'aeroelasticità statica, il modello rappresentato nelle equazioni (1.58) descrive completamente il moto del velivolo in assi medi. La seconda equazione è l'equazione di equilibrio dinamico (residualizzata) relativamente alle coordinate che descrivono la deformazione. Le coordinate di deformazione sono esprimibili in funzione delle coordinate di moto rigido risolvendo il sistema (1.58) rispetto a  $\{q_e(t)\}$ :

$$\{q_e(t)\} = ([K_{See}] - q[K_{Aee}])^{-1} \left( \frac{qc}{V_\infty} [C_{Aer}] \{\dot{q}_r(t)\} + q[K_{Aer}] \{q_r(t)\} + \{Q_e(t)\} \right)$$

queste vengono sostituite nella prima equazione ottenendo l'equazione di moto rigido corretta per gli effetti aeroelastici. L'operazione ha senso solo al di sotto della pressione dinamica di divergenza. Come è noto, per  $q > q_D$ , l'equilibrio aeroelastico relativo alle coordinate di deformazione è instabile. Il significato della divergenza rimane quello introdotto all'inizio del capitolo. Si possono fare due considerazioni:

1. La descrizione del movimento è in assi medi, tuttavia il problema della divergenza riguarda solo le coordinate elastiche ed è indipendente dalla manovra. Il problema della divergenza è interpretabile come un confronto fra il lavoro delle forze elastiche e quello delle forze aerodinamiche dipendenti dalla posizione (le  $[K_{Aee}] \{q_e(t)\}$ ), compiuti per una variazione seconda della coordinata di posizione:

$$\{\delta q_e(t)\}^T ([K_{See}] - q[K_{Aee}]) \{\Delta q_e(t)\} = 0$$

Poiché le forze elastiche sono determinate dallo spostamento dei punti della struttura, a meno di un moto rigido, e poiché la variazione di deformazione è indipendente dalla posizione assoluta, si può

concludere che la ricerca della divergenza può venire eseguita considerando le sole coordinate di deformazione in qualsiasi sistema di riferimento la deformazione sia descritta. Quindi la pressione dinamica di divergenza si può calcolare considerando la singola semiala vincolata ad un riferimento fisso (il che corrisponde a descrivere la deformazione in assi attaccati).

2. Per completezza occorre considerare che tutte le matrici aerodinamiche, anche nell'approssimazione stazionaria, dipendono dal numero di *Mach*, per cui:

$$[K_{Aee}] = [K_{Aee}(M)] = [K_{Aee}(V_\infty/c_s)]$$

e per definire la matrice aerodinamica occorre fissare il numero di *Mach*:  $M = \bar{M}$ , quindi il problema diventa

$$\det([K_{See}] - q[K_{Aee}(\bar{M})]) = 0$$

da cui si determina la pressione dinamica di divergenza. In questo caso il problema della divergenza è un problema agli autovalori di tipo standard. Qualora, invece, come è più logico, si fissi la quota di volo e si voglia calcolare la pressione dinamica, e quindi la velocità di divergenza a quella quota, il problema non è più di tipo standard:

$$\det\left([K_{See}] - \frac{1}{2}\bar{\rho}V_\infty^2\left[K_{Aee}\left(\frac{V_\infty}{\sqrt{\bar{\rho}RT}}\right)\right]\right) = 0$$

La dipendenza dal parametro  $V_\infty$  non è esplicita. Si ricorrerà ad un metodo iterativo, fissando  $M$ , quindi calcolando  $[K_{Aee}]$ , risolvendo il problema agli autovalori ed ottenendo un valore di  $V_\infty$  che permetterà di calcolare il numero di *Mach*, che va confrontato con quello fissato all'inizio.

Risolto il problema relativo alla divergenza si possono considerare due possibilità:

1. l'introduzione dell'espressione delle  $\{q_e(t)\}$ , ricavata dalla seconda equazione in funzione di  $\{q_r(t)\}$  e  $\{\dot{q}_r(t)\}$ , nella prima equazione, ottenendo così l'equazione della dinamica del moto rigido corretta dagli effetti aeroelastici,
2. La ricerca di soluzioni a problemi consistenti, nei quali, cioè, alcuni parametri vengono fissati, e la prima equazione diventa anch'essa algebrica, per calcolare il valore dei parametri rimasti incogniti.

Per creare un problema consistente, che è un problema algebrico e non differenziale, ma sempre lineare, occorre che il numero delle incognite pareggi il numero delle equazioni. Fra le incognite figurerà sempre la deformata, rappresentata dall'ampiezza delle funzioni di forma (i modi  $\{q_e(t)\}$ ) che la descrivono. Di seguito vengono analizzati i due problemi appena esposti.

### Dinamica corretta del moto rigido

L'equazione che si ottiene dalla sostituzione di  $\{q_e(t)\}$  nella prima equazione del sistema (1.58) è la seguente:

$$\begin{aligned} [M_{Srr}]\{\ddot{q}_r(t)\} + \left(-\frac{qc}{V_\infty}[C_{Arr}] + q[K_{Are}][K_{AE}(q)]^{-1}\frac{qc}{V_\infty}[C_{Aer}]\right)\{\dot{q}_r(t)\} \\ + \left(-q[K_{Arr}] + q[K_{Are}][K_{AE}(q)]^{-1}q[K_{Aer}]\right)\{q_r(t)\} \\ = \{Q_r(t)\} - q[K_{Are}][K_{AE}(q)]^{-1}\{Q_e(t)\} \end{aligned}$$

avendo definito la matrice di rigidezza aeroelastica del sistema:

$$[K_{AE}(q)] = [K_{See}] - q[K_{Aee}]$$

Si può osservare che tutte le correzioni dovute alla deformabilità della struttura dipendono dall'inversa della matrice appena definita. Per i sistemi ad un grado di libertà, nella trattazione relativa all'ala semplificata, si era dimostrato che, essendo  $K_{AE} = K_T - qK_A$ , si otteneva

$$K_{AE}^{-1} = \frac{1}{K_T - qK_A} = \frac{1/K_T}{1 - qK_A/K_T}$$

ed essendo la pressione dinamica di divergenza  $q_D = K_T/K_A$ :

$$K_{AE}^{-1} = \frac{1/K_T}{1 - q/q_D}$$

Le correzioni dovute all'effetto di retroazione aeroelastica dipendono dal parametro  $q/q_D$ , ovvero il sistema è tanto più sensibile alla correzione aeroelastica quanto più la pressione dinamica di volo si avvicina a quella di divergenza. Questo è vero anche per un sistema a più gradi di libertà, ma, per dimostrarlo, occorre ricorrere alla decomposizione spettrale della matrice di rigidezza aeroelastica. Nelle seguenti equazioni, per brevità di scrittura, si ometterà il pedice 'ee':

$$[K_{AE}] = ([K_S] - q[K_A]) = [K_S] \left( [I] - q[K_S]^{-1}[K_A] \right)$$

Gli autovalori del problema:

$$([K_S] - q[K_A]) \{q(t)\} = \{0\}$$

ovvero i valori del parametro  $q$  per i quali:

$$\det([K_S] - q[K_A]) = 0$$

sono gli stessi valori per cui:

$$\det([I] - q[K_S]^{-1}[K_A]) = 0$$

La precedente, per inciso, è la scrittura cui si perviene formulando il problema della divergenza in forma canonica. L'equazione caratteristica sopra descritta prevede, se l'ordine delle matrici è  $n$ ,  $n$  autovalori  $q_j$ , dei quali il più basso positivo è la pressione dinamica di divergenza. In corrispondenza di ciascun autovalore il problema ammette un autovettore,  $\{q\}$ , che rappresenta il modo di divergenza (e che non ha interesse pratico). Si supponga che gli  $n$  autovettori  $\{q\}_j$  siano linearmente indipendenti; allora la matrice  $[K_S]^{-1}[K_A]$ , di cui si ricercano gli autovalori del problema in forma canonica, ammette la seguente decomposizione spettrale:

$$[K_S]^{-1}[K_A] = [X] [\text{diag}(1/q_j)] [X]^{-1}$$

dove  $[X]$  è la matrice dei modi di divergenza (gli autovettori del problema). Ne segue che:

$$\begin{aligned} [K_S] \left( [I] - q[K_S]^{-1}[K_A] \right) &= [K_S] \left( [I] - q[X] [\text{diag}(1/q_j)] [X]^{-1} \right) \\ &= [K_S] \left( [X] [X]^{-1} - q[X] [\text{diag}(1/q_j)] [X]^{-1} \right) \\ &= [K_S] \left( [X] [\text{diag}(1 - q/q_j)] [X]^{-1} \right) \\ &= [K_S] \left( [X] [\text{diag}((q_j - q)/q_j)] [X]^{-1} \right) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'inversa della matrice di rigidezza aeroelastica, si ha:

$$\begin{aligned} [K_{AE}]^{-1} &= \left( [X] [\text{diag}((q_j - q)/q_j)] [X]^{-1} \right) [K_S]^{-1} \\ &= \left( [X] \left[ \text{diag} \left( \frac{1}{1 - q/q_j} \right) \right] [X]^{-1} \right) [K_S]^{-1} \end{aligned}$$

Ricordando che  $[X]^{-1}$  è uguale alla trasposta della matrice degli autovettori sinistri, ovvero  $[X]^{-1} = [Y]^T$ , l'espressione precedente può essere riformulata come:

$$[K_{AE}]^{-1} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{1 - q/q_j} \{X\}_j \{Y\}_j^T [K_S]^{-1}$$

Questo è dunque il termine che moltiplica tutte le correzioni nell'equazione dinamica del moto rigido corretta dagli effetti aeroelastici. Il calcolo aeroelastico viene eseguito solo al disotto di  $q_D$ , che è il più piccolo autovalore positivo del problema. All'avvicinarsi di  $q$  a  $q_D$  il primo termine della sommatoria di matrici in cui è stata decomposta  $[K_{AE}]$  tende all'infinito. Questo comporta che il peso della correzione aeroelastica aumenti al tendere di  $q$  a  $q_D$ . Il risultato è concettualmente identico a quello ottenuto per i sistemi ad un grado di libertà: la pressione dinamica di divergenza è un indice del livello generale di rigidità del sistema aeroelastico ed il parametro  $q/q_D$  indica l'errore compiuto nella scrittura delle equazioni di moto del velivolo quando si trascurino gli effetti aeroelastici. L'equazione differenziale di moto rigido corretta dagli effetti aeroelastici è, in realtà, un sistema di equazioni differenziali lineari, con tante equazioni quanti sono i gradi di libertà rigidi del velivolo, che può essere risolta anche in forma chiusa, in quanto il sistema è lineare e completamente determinato. Generalmente si distingue la manovra simmetrica, dove le forzanti sono rappresentate dalle forze aerodinamiche provocate dai piani di coda, per esempio la richiamata, dalla manovra antisimmetrica, o manovra alettoni, con conseguente moto di rollio. Le equazioni relative a questi due moti sono, in generale, disaccoppiate. Invece di ricostruire la legge di moto, le prestazioni del velivolo possono essere individuate dal valore di particolari parametri in particolari condizioni, come descritto nel paragrafo seguente.

### Problemi consistenti

I problemi consistenti vengono creati fissando alcuni parametri da cui il sistema dipende:

- la pressione dinamica (velocità e quota di volo) è, in generale, sempre determinata, ma è comunque un parametro da cui dipende fortemente la risposta;
- la velocità alla quale avviene il moto rigido può venire ritenuta nulla (moto incipiente), oppure costante (moto a regime);
- l'accelerazione può essere ritenuta nulla (moto a regime), oppure può interessare l'accelerazione a velocità nulla (moto incipiente);
- le forzanti dipendono dalla legge di comando:

$$\begin{aligned}\{Q_r(t)\} &= \{\bar{Q}_r\} \beta(t) \\ \{Q_e(t)\} &= \{\bar{Q}_e\} \beta(t)\end{aligned}$$

Si suppone di esaminare la risposta ad un singolo comando, ovvero al movimento, simmetrico o antisimmetrico, di un solo tipo di superficie di controllo. Nel caso tipico la legge di comando è rappresentata da uno scalino<sup>12</sup>, di ampiezza  $\bar{\beta}$ . L'ampiezza  $\bar{\beta}$  può essere assegnata (problema diretto) oppure incognita (problema inverso, ad esempio la manovra scontrata);

- Per quanto riguarda lo spostamento rigido, il termine da esso dipendente non esiste nel caso del rollio, mentre esiste nel caso di richiamata, dove rappresenta la variazione di incidenza necessaria a produrre l'incremento di portanza che equilibra il fattore di carico. Come si è visto nello studio della richiamata  $\Delta\alpha$  può essere fissato od incognito;
- Il fattore di carico  $N$  (in richiamata o in virata). Se si tratta di un moto a regime, o manovra stabilizzata,  $N$  è una costante che può essere fissata o incognita. In realtà, nel modello assolutamente generale in esame,  $N$  rientra nelle forze originate dall'accelerazione legata al moto rigido.

Si sono così individuati un certo numero di parametri che descrivono le prestazioni di manovra del velivolo. Occorre fissare un numero di parametri tale da ottenere un problema algebrico nelle incognite rimaste, di cui fanno sempre parte le coordinate elastiche, con numero delle incognite pari al numero delle equazioni. Nell'impostazione classica, il primo passo nella soluzione è il medesimo eseguito nel caso della divergenza, ossia il calcolo di  $\{q_e(t)\}$  dalla seconda equazione del sistema (1.58) e la sua sostituzione nella

<sup>12</sup>Usare uno scalino, ovvero una forzante discontinua con spettro infinito (sia pure decadente con  $1/\omega$ ), in un'analisi statica può sembrare un paradosso. In realtà significa che non ha importanza la legge con cui la forzante viene applicata proprio perché la dinamica del sistema viene trascurata adottando un modello statico; conta solo il valore a regime.

prima. Nella trattazione presente, la differenza è che l'equazione così ottenuta non viene trattata come un'equazione differenziale, ma trasformata in un problema algebrico. Una alternativa è rappresentata dalla formulazione matriciale, vista per l'ala semplificata e l'ala diritta, nello studio della manovra di rollio. Un quadro sufficientemente completo dei problemi consistenti che rivestono interesse comprende:

#### Moto incipiente

parametri fissati:  $\{\dot{q}_r\} = \{0\}, \beta = \bar{\beta}, q = \bar{q}, \Delta\alpha = 0$

parametri incogniti:  $\{\ddot{q}_r\}$

#### Moto a regime

parametri fissati:  $\{\ddot{q}_r\} = \{0\}, \beta = \bar{\beta}, q = \bar{q}$

parametri incogniti:  $\{\dot{q}_r\}, \Delta\alpha$

#### Manovra scontrata

parametri fissati:  $\{\dot{q}_r\} = \{\dot{\bar{q}}_r\}, \{\ddot{q}_r\} = \{\ddot{\bar{q}}_r\}, q = \bar{q}$

parametri incogniti:  $\beta, \Delta\alpha$

Il caso della manovra scontrata è particolarmente utile nella situazione in cui il velivolo, nella manovra, non può raggiungere la velocità a regime. Si impongono allora una certa velocità ed una certa accelerazione e si calcola quale sia l'ampiezza del comando necessaria per scontrare la manovra. Ovviamente si possono ottenere valori di  $\bar{\beta}$  inammissibili: in tal caso il velivolo non è in grado di scontrare la manovra. Per ciascun problema consistente si innestano due ulteriori problemi:

1. un problema di “divergenza dinamica” che si verifica quando, per particolari valori del parametro  $q$ , il problema consistente non è risolubile (la matrice dei coefficienti del sistema diventa singolare). La “divergenza dinamica”, a differenza della “divergenza statica”, è sempre associata ad una particolare manovra, e rappresenta una condizione in cui la manovra non può essere eseguita, ma che di per sé non rappresenta un pericolo per l'integrità strutturale del velivolo;
2. un problema di efficienza. Qualunque sia la prestazione in esame è possibile confrontare il risultato ottenuto con quello relativo allo studio del velivolo supposto rigido. Il rapporto:

$$\frac{\text{Valore “elastico”}}{\text{Valore “rigido”}}$$

definisce l'efficienza aeroelastica del velivolo, relativamente a quel particolare problema consistente. Si tratta di una misura della variazione di prestazione indotta dagli effetti aeroelastici.

Il concetto di efficienza conduce, all'estremo, ai problemi di inversione. Un problema di inversione è, genericamente, la ricerca di quella condizione di volo per cui una determinata relazione di efficienza si annulla. Il problema dell'inversione è, in generale, associato al moto incipiente. Si suppone  $\{\dot{q}_r\} = \{0\}$  e si vuole ricercare per quale valore della pressione dinamica  $q$  l'accelerazione incipiente  $\{\ddot{q}_r\}$  si annulla qualunque sia il comando  $\beta$ . Dal punto di vista analitico, anche il problema dell'inversione può essere visto come un problema agli autovalori.



## Capitolo 2

# Metodo di *Morino*

Il cosiddetto “Metodo di *Morino*” è un’elegante formulazione agli *elementi di contorno*, dovuta al Professor *Luigi Morino* ed ai suoi collaboratori, che consente di determinare le matrici aerodinamiche instazionarie nel dominio delle frequenze in modo semplice ed efficace. Viene qui presentato come uno dei possibili modi per modellare in forma il più possibile generale la parte aerodinamica del modello aeroelastico.

### 2.1 Le equazioni generali dei fluidi

Prima d’introdurre il metodo di *Morino* conviene fare un breve richiamo delle equazioni che permettono di descrivere il comportamento di un fluido.

Consideriamo un volume di controllo finito: le equazioni che si ottengono sono in forma integrale, ed opportunamente manipolate possono essere trasformate in equazioni differenziali. Le prime sono valide in un ambito maggiore rispetto alle seconde perché derivano da bilanci integrali e quindi non è necessario che la quantità di cui si fa il bilancio sia regolare (nel senso di continua e differenziabile) all’interno del volume di controllo, cosa invece necessaria in caso di equazioni in forma differenziale. Le equazioni necessarie sono le seguenti:

1. conservazione della massa;
2. bilancio della quantità di moto;
3. conservazione dell’energia;
4. termodinamica di stato del fluido.

Il movimento di un fluido può essere descritto da due diversi punti di vista: quello *Lagrangiano* e quello *Euleriano*. Nel primo caso il volume di controllo è definito dallo spazio occupato da alcune ben determinate particelle di cui si costruisce la storia energetica, ed è quindi in moto con esse. Per questo è detto anche punto di vista storico, e si dice che il sistema è “chiuso”. Dal punto di vista euleriano, invece, il volume di controllo è fisso nello spazio ed al suo interno transitano le particelle del fluido in moto. Il sistema è detto “aperto” e le equazioni che si scrivono sono bilanci totali. Per compiere il passaggio da lagrangiano ad euleriano si fa uso del *teorema di trasformazione*; per una generica grandezza integrale  $B$ , che nella forma per unità di volume sia detta  $b$ , si scrive:

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x_i} V_i = \frac{\partial b}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla b,$$

dove l’operatore  $\nabla(\cdot)$  calcola il gradiente, mentre sul volume si ottiene

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\tau} b \, d\tau = \int_{\tau} \frac{\partial b}{\partial \tau} \, d\tau + \int_{\sigma} b \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

dove si vede che, nel caso euleriano, è presente un termine di tipo convettivo che esprime il flusso della grandezza attraverso la superficie del volume di controllo. Nel seguito le equazioni verranno impostate nel caso *Lagrangiano* per essere poi trasformate.

### 2.1.1 Principio di conservazione della massa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \, d\tau &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho \, d\tau + \int_{\sigma} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\sigma &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

dove

$\tau$  è il volume dell'elemento di controllo,  
 $\sigma$  è la sua superficie,  
 $\rho$  è la densità del fluido,  
 $\vec{V}$  è il suo vettore velocità,  
 $\vec{n}$  è il versore normale (vedi Figura ??), e  
 $\partial/\partial t$  è la derivata parziale rispetto al tempo.

Se all'interno del volume  $\rho \vec{V}$  è differenziabile, ovvero la corrente è regolare, risulta valido il *teorema della divergenza*:

$$\int_{\sigma} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{\tau} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \, d\tau\tag{2.2}$$

dove l'operatore  $\nabla \cdot (\cdot)$ , applicato ad un vettore, ne calcola la divergenza:

$$\nabla \cdot (\vec{v}) = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = v_{x/x} + v_{y/y} + v_{z/z}$$

Tenendo presente che il volume  $\tau$  è fisso (punto di vista euleriano) è possibile portare la derivata sotto il segno di integrale e, considerando le relazioni (2.2) e (2.1), ottenere la seguente espressione:

$$\int_{\tau} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right) d\tau = 0$$

Poiché il volume  $\tau$  è del tutto generico, affinché sia nullo l'integrale è necessario che l'argomento si annulli in ogni punto del volume stesso e di conseguenza si giunge all'equazione differenziale normalmente usata:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0\tag{2.3}$$

### 2.1.2 Bilancio della quantità di moto

Facendo sempre riferimento alla figura precedente è possibile scrivere il bilancio della quantità di moto come:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}$$

dove

$\vec{Q}$  è la quantità di moto,  
 $\vec{F}$  è la risultante delle forze esterne, e  
 $d/dt$  è la derivata totale (sostanziale) rispetto al tempo.

Utilizzando il Secondo Principio della Dinamica e supponendo, a differenza di prima, di seguire il movimento del fluido (punto di vista lagrangiano) possiamo scrivere:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \vec{V} \, d\tau = \int_{\tau} \vec{f} \, d\tau + \int_{\sigma} \vec{P}(\vec{n}) \, d\sigma\tag{2.4}$$

Si deve osservare che ora si è utilizzato, per ricavare il bilancio della quantità di moto, non più il volume fisso, come prima, ma uno mobile, così da avvicinarci di più a quanto visto nel corso di Aerodinamica. È

comunque possibile utilizzare un volume fisso: si dovrebbe fare il bilancio dei flussi entranti e dei flussi uscenti, e si arriverebbe alla medesima espressione. Per completezza della formulazione si sono messe anche le forze di volume  $\vec{f}$ , mentre per  $\vec{P}(\vec{n})$  si intendono le forze per unità di superficie che dipendono dall'orientamento della normale. Usualmente le forze di volume vengono trascurate, e di conseguenza l'equazione (2.4) si semplifica. Ora ricordiamo che:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \vec{V} d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho \vec{V} d\tau + \int_{\sigma} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma$$

inoltre vi è la possibilità di scambiare la derivata con l'integrale e, ricordando la relazione di *Cauchy* per il tensore degli sforzi  $\vec{P}(\vec{n}) = \sum_{i=1}^3 \vec{P}_i n_i$  ed il seguente lemma di *Gauss*, teorema della divergenza, valido sia per un volume fisso che mobile:

$$\int_{\sigma} g n_i d\sigma = \int_{\tau} g_{/i} d\tau$$

dove

$g$  è una quantità scalare, e  
 $g_{/i} = \partial g / \partial x_i$  con  $i = 1, 2, 3$  ed  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ .

si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \vec{P}_i n_i d\sigma &= - \int_{\tau} \vec{P}_{i/i} d\tau \\ \int_{\sigma} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot n_i) d\sigma &= - \int_{\tau} (\rho \vec{V} V_i)_{/i} d\tau \end{aligned}$$

Allora l'equazione (2.4) si può scrivere nel seguente modo:

$$\int_{\tau} \left( \frac{\partial (\rho \vec{V})}{\partial t} - (\rho \vec{V} V_i)_{/i} + \vec{P}_{i/i} \right) d\tau = 0 \quad (2.5)$$

Come al solito, se si tiene presente che la (2.5) deve essere valida per un volume generico, ci si riduce all'equazione differenziale:

$$\frac{\partial (\rho \vec{V})}{\partial t} - (\rho \vec{V} V_i)_{/i} + \vec{P}_{i/i} = 0$$

Sviluppando le derivate e raccogliendo i termini che moltiplicano la velocità si ottiene:

$$\underbrace{\vec{V} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho V_i)_{/i} \right)}_{\text{conservazione della massa}} + \rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + V_i \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i} \right) + \vec{P}_{i/i} = 0$$

ed utilizzando la derivata sostanziale si può scrivere l'equazione nel seguente modo:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{P}_{i/i} = 0$$

Il tensore  $\vec{P}$  degli sforzi in un fluido in movimento è esprimibile come somma di un tensore isotropo che tiene conto della pressione termodinamica  $\vec{p}$ , e di un altro tensore  $\vec{q}$ , il deviatore degli sforzi. Assumendo le cosiddette ipotesi di fluido “*Newtoniano*”  $\vec{q}$  è legato da una legge lineare omogenea al tensore di deformazione tramite i due coefficienti di viscosità  $\lambda$  e  $\mu$ . Tenendo presente tutto ciò, aggiungendo l'ipotesi di Stokes  $\lambda = -2/3\mu$  (valida rigorosamente solo per un gas monoatomico, ma soddisfacente anche per i biatomici rarefatti quali l'aria), e ricordando che:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \nabla (\vec{V}) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 \right) - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})$$

è possibile giungere alla seguente espressione del bilancio della quantità di moto:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) + \nabla \left( \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 \right) \right) = -\nabla(p) + \mu \nabla^2 (\vec{V}) + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot (\vec{V}))$$

### 2.1.3 Equazione dell'energia

Per ricavare l'equazione dell'energia si fa uso del Primo Principio della Termodinamica che esprime la variazione dell'energia interna di un sistema in funzione del lavoro compiuto sullo stesso (per la convenzione adottata si veda oltre) e del calore scambiato con l'esterno:

$$dE = d^*W + d^*Q$$

Questo è un risultato empirico confermato dall'esperienza.  $dE$  è un differenziale esatto, dipendendo l'energia interna soltanto dagli stati iniziale e finale del sistema, contrariamente a  $d^*W$  e  $d^*Q$  che dipendono dal processo che conduce allo stato finale. Per una data  $dE$  vi sono infiniti processi possibili in cui vi è trasferimento di calore o lavoro fatto sul sistema; a noi interessano principalmente tre tipi di processi:

- *adiabatici*, in cui non vi è scambio di calore;
- *reversibili*, in cui non ci sono fenomeni dissipativi come viscosità, conduzione termica e diffusione;
- *isoentropici*, che sono contemporaneamente adiabatici e reversibili.

Nel caso di processo reversibile può essere facilmente dimostrato che vale la relazione

$$d^*W = -pdv$$

dove  $dv$  è un incremento di volume dovuto allo spostamento del contorno. Allora l'espressione del Primo Principio della Termodinamica diviene:

$$dE = d^*Q - pdv$$

Volendo dare una connotazione prettamente dinamica ai bilanci energetici si scrive anche

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d^*W}{dt} + \frac{d^*Q}{dt}$$

L'energia cinetica per unità di massa è pari a  $1/2\rho\|\vec{V}\|^2 d\tau$ ; quella interna a  $\rho ed\tau$  e la forza per unità di volume è  $\vec{f}$ . Allora

$$\begin{aligned} \frac{d^*W}{dt} &= \int_{\tau} \rho \vec{f} \cdot \vec{V} d\tau + \int_{\sigma} \vec{P}(\vec{n}) \cdot \vec{V} d\sigma \\ \frac{d^*Q}{dt} &= \int_{\sigma} \vec{q}(\vec{n}) d\sigma + \int_{\tau} \rho Q_R d\tau \end{aligned}$$

dove

$\vec{q}(\vec{n})$  è il calore scambiato attraverso la superficie  $\sigma$  per unità di tempo e di superficie, e  
 $Q_R$  è il calore scambiato per irraggiamento per unità di tempo e di massa (importante per le alte temperature).  
 Dunque l'equazione risulta

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \left( e + \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 \right) d\tau = \int_{\tau} \rho \vec{f} \cdot \vec{V} d\tau + \int_{\sigma} \vec{P}(\vec{n}) \cdot \vec{V} d\sigma + \int_{\sigma} \vec{q}(\vec{n}) d\sigma + \int_{\tau} \rho Q_R d\tau$$

Nel caso si sia in presenza di forze di volume di tipo conservativo si ha:

$$\vec{f} = \nabla(U(x, y, z))$$

e quindi

$$\int_{\tau} \rho \vec{f} \cdot \vec{V} d\tau = - \int_{\tau} \rho \nabla(U) \cdot \vec{V} d\tau = - \int_{\tau} \rho \frac{dU}{dt} d\tau = - \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho U d\tau$$

non essendo necessario il termine dipendente dal tempo per avere la derivata totale, e ricordando che per la conservazione della massa vale la relazione  $d/dt(\rho d\tau) = 0$ .

Per passare dall'equazione integrale a quella indefinita si ricorre al lemma di *Gauss*, trasformando i seguenti termini (ricordando che sia per  $\vec{P}$  che per  $\vec{q}$  vale la relazione di *Cauchy*):

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} \vec{P}(\vec{n}) \cdot \vec{V} d\sigma &= \int_{\sigma} \vec{P}_i n_i \cdot \vec{V} d\sigma = - \int_{\tau} (\vec{P} \cdot \vec{V})_{/i} d\tau \\ \int_{\sigma} \vec{q}(\vec{n}) d\sigma &= \int_{\sigma} \vec{q}_i n_i d\sigma = - \int_{\tau} \vec{q}_{i/i} d\tau \\ \int_{\sigma} \rho \left( e + \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 \right) V_i n_i d\sigma &= - \int_{\tau} \left( \rho \left( e + \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 \right) V_i \right)_{/i} d\tau\end{aligned}$$

Sostituendo si ottiene l'equazione indefinita dell'energia totale in forma conservativa (derivata direttamente dall'equazione integrale):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \left( e + \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 \right) \right) + \left( \vec{P}_i \cdot \vec{V} + \vec{q}_i + \rho \left( e + \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 \right) V_i \right)_{/i} = \rho \vec{f} \cdot \vec{V}$$

Per ottenere l'equazione in forma non conservativa bisogna sostituire le derivate parziali con quelle totali (equivale a passare dal punto di vista euleriano a quello lagrangiano):

$$\left( e + \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( e + \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 \right) + \left( e + \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 \right) (\rho V_i)_{/i} + \rho V_i \left( e + \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 \right)_{/i} + (\vec{P}_i \cdot \vec{V} + \vec{q}_i)_{/i} = \rho \vec{f} \cdot \vec{V}$$

ovvero

$$\left( e + \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 \right) \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right) + \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( e + \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 \right) + \vec{V} \cdot \nabla \left( e + \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 \right) \right) + (\vec{P}_i \cdot \vec{V} + \vec{q}_i)_{/i} = \rho \vec{f} \cdot \vec{V}$$

dove il primo termine è nullo per la conservazione della massa e la parentesi del secondo è pari alla derivata sostanziale. Risulta dunque l'espressione finale dell'equazione dell'energia totale:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( e + \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 \right) + (\vec{P}_i \cdot \vec{V} + \vec{q}_i)_{/i} = \rho \vec{f} \cdot \vec{V} \quad (2.6)$$

Sottraendo a quest'ultima il contributo dell'energia meccanica (cinetica), ottenuto moltiplicando scalarmente l'equazione della quantità di moto per  $\vec{V}$ , si ottiene l'equazione per la sola energia interna:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} = \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 \right) = -\vec{P}_{i/i} \cdot \vec{V} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V}$$

e sapendo che

$$(\vec{P}_i \cdot \vec{V})_{/i} = \vec{P}_{i/i} \cdot \vec{V} + \vec{P}_i \cdot \vec{V}_{/i}$$

la differenza della (2.6) con la precedente risulta

$$\rho \frac{de}{dt} = -\vec{P}_i \cdot \vec{V}_{/i} - \nabla \cdot \vec{q}$$

L'energia totale è la somma di quelle interna e meccanica.

Ora cerchiamo di vedere come entra nell'equazione il discorso dell'entropia. Oltre al Primo Principio della Termodinamica, la natura impone una condizione che determina la "direzione" nella quale i processi evolvono. La variabile di stato entropia è definita come

$$ds = \frac{d^* Q_{rev}}{T} \quad (2.7)$$

dove  $d^* Q_{rev}$  è una quantità di calore fornita reversibilmente al sistema; essa è un artificio poiché un valore può sempre esserle assegnato per legare gli stati iniziale e finale di un processo irreversibile. Una definizione più coerente può allora essere

$$ds = \frac{d^* Q}{T} + ds_{irrev}$$

che ha una maggiore generalità. Essa afferma che la variazione di entropia durante un processo ha un contributo derivante dai fenomeni dissipativi viscosi, di conduzione del calore e di diffusione dentro il sistema. Questi fenomeni incrementano sempre l'entropia:

$$ds_{irrev} \geq 0$$

ed il segno di uguaglianza denota un processo reversibile, nel cui caso i precedenti fenomeni dissipativi sono assenti per definizione e si ha che

$$ds \geq \frac{d^*Q}{T}$$

Se il processo è anche adiabatico  $d^*Q = 0$  e l'equazione precedente diviene la nota

$$ds \geq 0$$

Esplicitando  $d^*Q_{rev}$  nella (2.7) e sostituendolo nell'espressione del Primo Principio della Termodinamica otteniamo l'equazione dell'entropia:

$$Tds = dE + pdv$$

Possiamo far diventare la seguente equazione (XXX)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_v \rho s \, dv + \int_S \rho s \vec{V} \, dS - \int_S \frac{\vec{q}}{T} \, dS \geq 0$$

un'uguaglianza definendo i termini di produzione di entropia. Definiamo la funzione di dissipazione

$$\Phi = -q_{ij}\varepsilon_{ij}$$

prodotto del deviatore degli sforzi per il tensore velocità di deformazione  $\varepsilon_{ij} = 1/2 (V_{i/j} + V_{j/i})$ , che rappresenta il calore emesso per gli effetti viscosi (a cui consegue un incremento di entropia) per unità di volume e di tempo, presente quindi solo quando il fluido esplica la sua viscosità. Si definisce altresì la quantità

$$\Psi = -\frac{\vec{q} \cdot \nabla T}{T}$$

che esprime l'aumento di entropia dovuto alla degradazione dell'energia per la conduzione di calore. Allora la somma di queste due quantità indica la velocità di produzione dell'entropia per unità di volume in funzione delle irreversibilità concorrenti di dissipazione viscosa e portata di calore. Eseguendo alcuni passaggi algebrici si giunge ad ottenere una nuova formulazione dell'equazione dell'entropia:

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) + \frac{\Phi + \Psi}{T} \quad (2.8)$$

Dunque la variazione di entropia in un sistema chiuso (punto di vista *Lagrangiano*) è regolata da due contributi: il primo è della parte reversibile che può essere positivo o negativo a seconda che si fornisca o si sottragga calore al sistema; il secondo è della parte irreversibile che esprime la velocità di produzione dell'entropia per unità di volume, che si può verificare essere sempre positiva esplicitando i termini (ricordando la legge di *Fourier*,  $\vec{q}(T) = -k(T) \nabla T$ , linearizzazione di una più generale legge di conduzione del calore, la quale sostanzialmente descrive il fatto che il calore si propaga comunque in opposizione al gradiente della temperatura).

### 2.1.4 Relazione di stato

L'ultima equazione che manca da esaminare per avere un quadro completo è la relazione di stato che lega le grandezze termodinamiche del fluido e che possiamo pensare scritta nel seguente modo:

$$F(p, \rho, T) = 0$$

e, nell'ipotesi di gas perfetto, si riduce alla:

$$p = \rho RT$$

## 2.2 Equazione del potenziale

La risoluzione delle equazioni di Navier-Stokes complete del fluido è complessa; al fine progettuale è necessario eseguire l'analisi di molte configurazioni: è chiaro che nel caso di utilizzo delle equazioni complete il tempo di calcolo diventa notevole. Perciò per la modellazione dell'aerodinamica si ricorre spesso ad una forma semplificata delle equazioni. La validità di tali formulazioni è limitata ad alcuni campi di moto. Faremo perciò delle ipotesi semplificative che, se da un lato inficiano la riproduzione esatta di alcuni fenomeni fluidodinamici, dall'altro permettono uno studio abbastanza veloce e con calcolatori non troppo sofisticati. L'approssimazione è sufficientemente adeguata per lo studio di alcuni fenomeni aeroelastici. Prenderemo in esame le *correnti ideali* nelle quali sono trascurabili la viscosità e la conduzione del calore (quindi  $\mu = q = 0$ ). Queste due proprietà implicano l'importante conseguenza che in una corrente ideale l'entropia di un elemento di fluido non varî durante il moto; infatti l'equazione (2.8) dell'entropia afferma che  $ds/dt = 0$ , ovvero che l'entropia è costante, purché si sia in condizioni di regolarità (non devono essere discontinue le grandezze velocità, densità, pressione e temperatura, come invece avviene, ad esempio, attraverso le onde d'urto). Facendo queste ipotesi le equazioni del fluido si riducono a quella di continuità, a quella della quantità di moto e alla legge di stato in forma finita  $p/\rho^\gamma = A$  (è l'equazione di trasformazione per i gas perfetti, che in un caso isoentropico, quale il nostro, non è altro che l'equazione dell'energia per il gas) sotto riportate:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) &= -\nabla p \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = A \quad (2.10)$$

Le incognite sono cinque: la densità, la pressione e le tre componenti della velocità; altrettante sono le equazioni: una vettoriale e due scalari. Questo modello è tanto più valido quanto più sono trascurabili la viscosità, e quindi maggiore è il numero di *Reynolds*, e la conduzione del calore. Esso non è soddisfacente per le correnti supersoniche con forti onde d'urto poiché è pesantemente violata l'ipotesi di isoentropicità, ma fornisce una buona approssimazione per le correnti subsoniche non soggette a riscaldamento e per le correnti supersoniche (con  $M < 2.5$ ) con onde d'urto deboli, quali quelle attorno a corpi sottili (ali, ad esempio), che costituiscono l'interesse principale in campo aeroelastico. L'equazione (2.9) contiene in sé un'ulteriore semplificazione: infatti per il teorema di *Crocco*, valido nel caso stazionario, la quantità di calore scambiata  $T \nabla s$  è data dal gradiente dell'entalpia  $\nabla h_0$  e dalla parte di trasporto vorticoso della quantità di moto:

$$T \nabla s = \nabla h_0 + \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})$$

Avendo supposto una corrente uniforme (quindi isoenergetica) con entropia costante, il termine di trasporto vorticoso della quantità di moto

$$\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})$$

è nullo, e quindi forzatamente  $\nabla \times \vec{V} = 0$ . Allora la corrente è irrotazionale; l'equazione della quantità di moto (2.9) diventa:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \|\vec{V}\|^2 \right) = -\nabla p$$

e la velocità è esprimibile come il gradiente di uno scalare  $\phi$  funzione dello spazio e del tempo:

$$\vec{V}(x, y, z, t) = \nabla \phi(x, y, z, t)$$

Così procedendo l'equazione della quantità di moto si trasforma nella nota equazione di *Bernoulli* e dall'equazione di continuità si ricava l'equazione differenziale del potenziale. Infatti dall'equazione della

quantità di moto:

$$\nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

e moltiplicando per un generico spostamento infinitesimo  $d\vec{s}$ :

$$\nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 \right) d\vec{s} = -\frac{1}{\rho} \nabla p d\vec{s}$$

l'equazione della quantità di moto può essere espressa in forma differenziale:

$$d \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 \right) = -\frac{dp}{\rho}$$

Dall'equazione complementare (2.10) si ricava l'espressione del differenziale della pressione  $dp$  in funzione della densità:

$$dp = \gamma \rho^{\gamma-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} d\rho$$

che, sostituita nell'equazione della quantità di moto dà:

$$d \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 \right) = -\gamma \rho^{\gamma-2} \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} d\rho$$

Integrando l'espressione tra un punto a distanza asintotica dal corpo ed un punto generico del campo di moto si ottiene:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 - \frac{1}{2} V_\infty^2 = \left[ -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \rho^{\gamma-1} \right]_\infty^\rho$$

Ricordando l'espressione della celerità del suono,  $c^2 = \gamma p / \rho$ , riscriviamo la relazione separando i termini asintotici da quelli puntuali:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 + \frac{c^2}{\gamma-1} = \frac{1}{2} V_\infty^2 + \frac{c_\infty^2}{\gamma-1} \quad (2.11)$$

Quest'espressione rappresenta il teorema di *Bernoulli* nel caso comprimibile instazionario. Per ricavare l'equazione completa del potenziale partiamo dall'equazione della massa così riscritta:

$$\frac{dp}{dt} + \rho c^2 \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.12)$$

(ricordiamo che in condizioni isoentropiche vale la relazione  $dp/dt = c^2 d\rho/dt$ , in quanto  $p/\rho^\gamma = \text{cost}$ , quindi  $dp/\rho^\gamma - (\gamma p/\rho^{\gamma+1}) d\rho = 0$  e quindi  $dp = (\gamma p/\rho) d\rho = c^2 d\rho$ ). Cerchiamo di esprimere  $dp/dt$  in funzione del potenziale  $\phi$ . Come primo passo osserviamo che  $dp/dt = \partial p/\partial t + \vec{V} \cdot \nabla(p)$  e che moltiplicando scalarmente la (2.9) per  $\vec{V}$  si ha:

$$\vec{V} \cdot \nabla p = -\rho \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \rho \vec{V} \cdot \frac{1}{2} \nabla \|\vec{V}\|^2$$

Deriviamo poi l'equazione di *Bernoulli* (2.11) e la relazione termodinamica fondamentale rispetto al tempo; da quest'ultima si ha:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho \frac{\partial H}{\partial t}$$

(l'entropia non varia perché la corrente è stata assunta come isoentropica), mentre dalla prima si ottiene:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$



Sostituendo nella (2.12) otteniamo l'equazione del potenziale, seppure in una forma ibrida:

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - 2\vec{V} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V} \frac{1}{2} \nabla \|\vec{V}\|^2 + c^2 \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

L'equazione può essere espressa in funzione del solo potenziale facendo uso, per semplicità, dell'operatore nabla  $\nabla(\cdot)$ :

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi^2) + \nabla \phi \cdot \frac{1}{2} \nabla \|\nabla \phi\|^2 \right) = 0 \quad (2.13)$$

Notiamo, per inciso, che nel caso di fluido incomprimibile  $c \rightarrow \infty$  e l'equazione del potenziale si riduce all'equazione di *Laplace*  $\nabla^2 \phi = 0$ .

Il nostro principale interesse consiste nel determinare i carichi aerodinamici a cui è sottoposta la struttura e quindi dobbiamo scrivere il coefficiente di pressione  $c_p$  in funzione del potenziale  $\phi$ . L'espressione da cui partiamo è la seguente:

$$c_p = \frac{\frac{p}{p_\infty} - 1}{\gamma \frac{M_\infty^2}{2}} \quad (2.14)$$

$p/p_\infty$  si può scrivere in funzione di  $c/c_\infty$  e questi può essere espresso in funzione del potenziale attraverso l'equazione di *Bernoulli*. Infatti

$$\frac{p}{p_\infty} = \left( \frac{c^2}{c_\infty^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

e

$$\frac{c^2}{c_\infty^2} = 1 - \frac{\gamma-1}{c_\infty^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\|\vec{V}\|^2 - V_\infty^2}{2} \right)$$

per cui il coefficiente di pressione nel caso irrotazionale instazionario completo è:

$$c_p = \frac{\left( 1 - \frac{\gamma-1}{c_\infty^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\|\nabla \phi\|^2 - V_\infty^2}{2} \right) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1}{\gamma \frac{M_\infty^2}{2}} \quad (2.15)$$

### 2.2.1 Equazione linearizzata del potenziale

Per utilizzare l'equazione del potenziale è opportuno operarne la linearizzazione. Per una generica corrente si assume come soluzione quella data dalla sovrapposizione di una corrente uniforme diretta secondo un asse e di un potenziale di perturbazione, nullo all'infinito:

$$\phi = V_\infty (x + \varphi) \quad (2.16)$$

dove:

$V_\infty x$  è il potenziale della corrente uniforme, e

$V_\infty \varphi$  è la perturbazione di potenziale, in cui  $\varphi$  è una lunghezza e può avere grado arbitrario.

Per proseguire ed arrivare all'espressione voluta, oltre all'assunzione del potenziale fatta con la (2.16), occorre effettuare la linearizzazione delle equazioni (2.3), (2.9), (2.10). Si assume ora:

$$\rho = \rho_\infty + \Delta \rho \quad (2.17)$$

$$\vec{V} = V_\infty \vec{i} + V_\infty \nabla \varphi \quad (2.18)$$

dove:

$\Delta\rho$  è la variazione di densità, e

$V_\infty$  è la velocità asintotica, supposta parallela all'asse  $x$ ;

l'equazione (2.18) deriva dalla (2.16). Iniziamo a linearizzare l'equazione della conservazione della massa, partendo dall'espressione già vista in precedenza (2.3):

$$\frac{\partial\Delta\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.19)$$

Determiniamo ora l'espressione di  $\Delta\rho$ : ricordando che  $\rho/\rho_\infty = (c^2/c_\infty^2)^{1/(\gamma-1)}$ , esplicitando scriviamo:

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \left( 1 - \frac{\gamma-1}{c_\infty^2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\|\vec{V}\|^2 - V_\infty^2}{2} \right) \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (2.20)$$

Tenendo presente che dalla (2.18) si ha:

$$\|\vec{V}\|^2 = \left( (1 + \varphi_{/x})^2 + \varphi_{/y}^2 + \varphi_{/z}^2 \right) V_\infty^2$$

e che trascurando i termini di ordine superiore si trasforma in:

$$\|\vec{V}\|^2 = \left( 1 + 2\varphi_{/x} + o(\varphi_{/i}^2) \right) V_\infty^2$$

usando quest'ultima nella (2.20) è possibile esprimere il rapporto tra le densità in funzione del potenziale di perturbazione, e quindi si ha:

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} \cong \left( 1 - \frac{\gamma-1}{c_\infty^2} (V_\infty \varphi_{/t} + V_\infty^2 \varphi_{/x}) \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Raccogliendo la velocità asintotica è possibile far comparire il numero di *Mach* asintotico:

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} \cong \left( 1 - (\gamma-1) M_\infty^2 \left( \frac{1}{V_\infty} \varphi_{/t} + \varphi_{/x} \right) \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

e, ricordando che se  $\Delta \ll 1$  l'approssimazione  $(1 - \Delta)^\alpha \cong 1 - \alpha\Delta$  è lecita, la si può espandere in serie di Taylor:

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} \cong 1 - M_\infty^2 \left( \frac{1}{V_\infty} \varphi_{/t} + \varphi_{/x} \right)$$

Ricordando la (2.17):

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_\infty} = \frac{\rho - \rho_\infty}{\rho_\infty} \cong -M_\infty^2 \left( \frac{1}{V_\infty} \varphi_{/t} + \varphi_{/x} \right) \quad (2.21)$$

ovvero

$$\Delta\rho \cong -\rho_\infty M_\infty^2 \left( \frac{1}{V_\infty} \varphi_{/t} + \varphi_{/x} \right)$$

Per linearizzare completamente l'equazione della massa (2.19) occorre per prima cosa trovare  $\partial\Delta\rho/\partial t$  dalla (2.21) e ricavare la quantità  $\rho\vec{V}$ ; sostituendo nella (2.19) e semplificando si ottiene l'equazione del potenziale per le piccole perturbazioni:

$$\frac{\partial\Delta\rho}{\partial t} = -\rho_\infty M_\infty^2 \left( \frac{1}{V_\infty} \varphi_{/tt} + \varphi_{/xt} \right)$$

Mentre il prodotto  $\rho \vec{V}$  è:

$$\rho \vec{V} = (\rho + \Delta\rho) \left( \vec{i} + \nabla\varphi \right) V_\infty$$

e sostituendovi l'espressione corrispondente al  $\Delta\rho$  si ottiene:

$$\rho \vec{V} = \left( \vec{i} + \nabla\varphi \right) \left( 1 - M_\infty^2 \left( \frac{1}{V_\infty} \varphi_{/t} + \varphi_{/x} \right) \right) \rho_\infty V_\infty \quad (2.22)$$

Trascurando i termini quadratici nelle derivate di  $\varphi$ , infinitesimi di secondo ordine, essa diventa:

$$\rho \vec{V} = \left( \vec{i} + \nabla\varphi - M_\infty^2 \left( \frac{1}{V_\infty} \varphi_{/t} + \varphi_{/x} \right) \vec{i} \right) \rho_\infty V_\infty$$

Allora l'equazione di conservazione della massa per piccole perturbazioni instazionarie risulta:

$$-\rho_\infty M_\infty^2 \left( \frac{1}{V_\infty} \varphi_{/tt} + \varphi_{/xt} \right) + \rho_\infty V_\infty \nabla \cdot \left( \vec{i} + \nabla\varphi - M_\infty^2 \left( \frac{1}{V_\infty} \varphi_{/t} + \varphi_{/x} \right) \vec{i} \right) = 0 \quad (2.23)$$

Tenendo presente che:

$$\nabla^2 \varphi = \varphi_{/xx} + \varphi_{/yy} + \varphi_{/zz}$$

trascurando gli infinitesimi di ordine superiore e semplificando, l'equazione diventa:

$$(1 - M_\infty^2) \varphi_{/xx} + \varphi_{/yy} + \varphi_{/zz} = M_\infty^2 \left( \frac{1}{V_\infty^2} \varphi_{/tt} + \frac{2}{V_\infty} \varphi_{/xt} \right) \quad (2.24)$$

Volendola scrivere in forma più compatta utilizziamo la seguente simbologia:

$$\frac{d}{dt}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + V_\infty \frac{\partial}{\partial x}(\cdot)$$

da cui:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\cdot) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\cdot) + 2V_\infty \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}(\cdot) + V_\infty^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\cdot) \quad (2.25)$$

Spostando la derivata seconda di  $\varphi$  rispetto a  $x$  moltiplicata per  $M_\infty^2$  della (2.24) a destra dell'uguale otteniamo:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{M_\infty^2}{V_\infty^2} (\varphi_{/tt} + 2V_\infty \varphi_{/tx} + V_\infty^2 \varphi_{/xx})$$

ed in forma compatta, usando la (2.25):

$$\nabla^2(\varphi) = \frac{1}{c_\infty^2} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad (2.26)$$

In quest'ultima l'incognita è la sola  $\varphi$  di perturbazione. È da notare che a queste ultime equazioni è possibile arrivare anche partendo dalla linearizzazione della (2.13) mediante la (2.16). Poiché dal punto di vista aeroelastico ci interessa determinare i carichi sulla struttura partendo dalla distribuzione di pressione, dobbiamo considerare la (2.15) nella forma

$$c_p = \frac{\left( \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^\gamma - 1}{\gamma \frac{M_\infty^2}{2}}$$

e linearizzarla, tenendo presente che:

$$\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^\gamma = \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_\infty}\right)^\gamma \cong 1 + \gamma \frac{\Delta\rho}{\rho_\infty} \quad (2.27)$$

Allora la (2.13) diventa:

$$c_p = \frac{\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^\gamma - 1}{\gamma \frac{M_\infty^2}{2}} \cong \frac{2 \frac{\Delta\rho}{\rho_\infty}}{M_\infty^2}$$

e sostituendovi la (2.21), per esplicitare la  $\Delta\rho$ , si ha:

$$c_p = -\frac{2}{V_\infty} \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.28)$$

Le equazioni scritte ci permettono di determinare, una volta ricavata la perturbazione di potenziale  $\varphi$ , il coefficiente di pressione e di conseguenza i carichi sul velivolo. Dobbiamo inoltre considerare che si ha a che fare con delle equazioni alle derivate e sono perciò necessarie le condizioni al contorno ed iniziali per risolvere le (2.26) e (2.28). La linearizzazione effettuata ha buona validità per correnti ad alti numeri di *Reynolds*, con strato limite abbastanza sottile, con una zona di separazione di estensione limitata e per  $0.8 < M < 1.5$ , eccettuato  $M \gg 1$ , nel cui caso nella (2.23) è necessario considerare anche il termine che porta ad avere un'equazione non lineare (vedi oltre). Le limitazioni date sul valore di  $M$  sono da considerarsi non in termini assoluti ma indicativi, poiché questi valori dipendono da numerosi parametri, ad esempio da come è fatto il corpo, dall'incidenza, e così via. Le equazioni linearizzate sono valide anche in presenza di onde d'urto purché:

- non si abbiano onde d'urto staccate dal corpo a valle delle quali la rotazionalità della corrente non è trascurabile, cioè si possono avere solo onde d'urto deboli perché altrimenti verrebbe violata troppo pesantemente l'ipotesi di entropia costante;
- si operi quindi con corpi sottili che perturbano poco la corrente (almeno alle basse incidenze per cui vale l'approssimazione lineare) e producono generalmente onde d'urto deboli ed attaccate dietro cui la rotazionalità è trascurabile.

## 2.3 Regime transonico

In questo paragrafo giustificheremo succintamente il fatto che in regime transonico, per  $0.8 < M < 1.2$ , l'equazione linearizzata del potenziale non è più valida; infatti è necessario aggiungere almeno un termine del tipo  $\varphi_{/x}\varphi_{/xx}$  che rende l'equazione stessa non lineare anche nel caso delle piccole perturbazioni. Consideriamo l'equazione linearizzata del potenziale (2.24):

$$(1 - M_\infty^2) \varphi_{/xx} + \varphi_{/yy} + \varphi_{/zz} = M_\infty^2 \left( \frac{1}{V_\infty^2} \varphi_{/tt} + \frac{2}{V_\infty} \varphi_{/xt} \right)$$

e notiamo che quando  $M$  è prossimo ad 1 il coefficiente di  $\varphi_{/xx}$  tende a zero; potremmo allora affermare un po' euristicamente che il termine  $(1 - M_\infty^2) \varphi_{/xx}$  si comporta come un infinitesimo di ordine superiore ( $(1 - M_\infty^2)$  è un infinitesimo del primo ordine quando  $M \rightarrow 1$ ,  $\varphi_{/xx}$  è anch'esso del primo ordine ed il loro prodotto è del secondo ordine). A questo punto due sono le strade possibili:

1. si lascia invariata l'equazione del potenziale e quindi si trascura implicitamente  $(1 - M_\infty^2) \varphi_{/xx}$  (perdendo, tra l'altro, uno dei termini che contengono l'informazione sul numero di *Mach* della corrente);
2. si considerano altri infinitesimi di ordine superiore eliminati con la linearizzazione.

Al fine di scegliere la giusta via scriviamo l'equazione completa del potenziale per le piccole perturbazioni. Ricordiamo la (2.16):  $\phi = V_\infty(x + \varphi)$ . Riprendendo la (2.13) ricaviamo  $c^2$  in funzione del potenziale stesso tramite il teorema di *Bernoulli*. Utilizzando già la (2.14) risulta:

$$c^2 = c_\infty^2 - (\gamma - 1) V_\infty \left( \varphi_{/t} + V_\infty \varphi_{/x} + \frac{1}{2} (\varphi_{/xx} + \varphi_{/yy} + \varphi_{/zz}) \right)$$

Sostituendo nell'equazione completa del potenziale (2.13) e semplificando si ottiene:

$$\begin{aligned} c_\infty^2 \nabla^2 \varphi - (\gamma - 1) V_\infty \left( \varphi_{/t} + V_\infty \varphi_{/x} + \frac{1}{2} (\varphi_{/xx} + \varphi_{/yy} + \varphi_{/zz}) \right) \nabla^2 \varphi \\ - 2V_\infty (\varphi_{/xt} + \varphi_{/x} \varphi_{/xt} + \varphi_{/y} \varphi_{/yt} + \varphi_{/z} \varphi_{/zt}) - \varphi_{/tt} \\ - V_\infty^2 \left( \varphi_{/xx} + 2\varphi_{/x} \varphi_{/xx} + 2\varphi_{/y} \varphi_{/xy} + 2\varphi_{/z} \varphi_{/xz} + \varphi_{/x}^2 \varphi_{/xx} \right. \\ \left. + 2\varphi_{/x} \varphi_{/y} \varphi_{/xy} + 2\varphi_{/x} \varphi_{/z} \varphi_{/xz} + \varphi_{/y}^2 \varphi_{/yy} + 2\varphi_{/y} \varphi_{/z} \varphi_{/yz} + \varphi_{/z}^2 \varphi_{/zz} \right) = 0 \end{aligned}$$

Trascuriamo gli infinitesimi di ordine superiore al secondo e separiamo i termini lineari dai non lineari:

$$\begin{aligned} (c_\infty^2 - V_\infty^2) \varphi_{/xx} + c_\infty^2 \varphi_{/yy} + c_\infty^2 \varphi_{/zz} - \varphi_{/tt} - 2V_\infty \varphi_{/xt} = (\gamma + 1) V_\infty^2 \varphi_{/x} \varphi_{/xx} \\ + (\gamma - 1) V_\infty^2 \varphi_{/x} (\varphi_{/yy} + \varphi_{/zz}) + 2V_\infty^2 (\varphi_{/y} \varphi_{/xy} + \varphi_{/z} \varphi_{/xz}) \\ + (\gamma - 1) V_\infty \varphi_{/t} (\varphi_{/xx} + \varphi_{/yy} + \varphi_{/zz}) + 2V_\infty (\varphi_{/x} \varphi_{/xt} + \varphi_{/y} \varphi_{/yt} + \varphi_{/z} \varphi_{/zt}) \end{aligned}$$

Dividiamo inoltre per  $c_\infty^2$  e mettiamo in evidenza il numero di *Mach*. Quando  $M$  tende ad 1 il coefficiente di  $\varphi_{/xx}$  tende a zero e quindi non è più trascurabile il termine  $(\gamma - 1) M_\infty^2 \varphi_{/x} \varphi_{/xx}$ ; tutti gli altri sono invece trascurabili poiché i coefficienti dei corrispondenti termini lineari mantengono invariato l'ordine di grandezza. L'equazione delle piccole perturbazioni in regime transonico è allora non lineare e diviene:

$$(1 - M_\infty^2) \varphi_{/xx} + \varphi_{/yy} + \varphi_{/zz} - \frac{1}{c_\infty^2} (\varphi_{/tt} + V_\infty \varphi_{/xt}) = (\gamma + 1) M_\infty^2 \varphi_{/x} \varphi_{/xx}$$

## 2.4 Metodi numerici

Ora che le equazioni di moto del fluido sono state scritte in una forma semplificata che ne rende possibile la trattazione, esse vanno risolte per ottenere i carichi sulla struttura, che è poi ciò che interessa in aeroelasticità. Vengono presentati ora alcuni cenni ai metodi numerici per la loro soluzione. Trattandosi di equazioni differenziali è essenziale l'imposizione delle condizioni iniziali ed al contorno, che in questo caso sono che il potenziale  $\varphi$  si annulli all'infinito e che sul corpo le velocità normali del fluido e del corpo stesso coincidano; il prossimo paragrafo è dedicato a quest'argomento.

### 2.4.1 Metodo delle differenze finite

Un possibile metodo di soluzione è quello delle differenze finite, che consiste nel discretizzare il dominio d'integrazione con un'opportuna griglia ed assumere come incognite i valori del potenziale ai nodi della stessa. Le derivate sono espresse in funzione dei valori nodali come loro rapporto incrementale; ad esempio, se consideriamo il potenziale al nodo  $(i, k)$ , possiamo scrivere che

$$\frac{\partial \varphi_{i,k}}{\partial x} \cong \frac{\varphi_{i+1,k} - \varphi_{i-1,k}}{\Delta x}$$

e parimenti per la derivata nelle direzioni  $y$  e  $z$  e per quelle di ordine superiore. Così l'equazione differenziale si trasforma in un sistema di equazioni algebriche lineari o non lineari a seconda della natura lineare o meno dell'equazione originale. Ovviamente anche le condizioni al contorno vanno soddisfatte in forma discretizzata. Questo metodo presenta due svantaggi:

- è necessaria la capacità di generare una corretta griglia di calcolo, che dev'essere sufficientemente fitta dove i gradienti sono più forti onde non perdere in precisione;

- il problema deve essere risolto in tutto il dominio che, se può essere utile quando si voglia studiare accuratamente il moto del fluido, è causa di ridondanza e richiede un numero eccessivo di operazioni se si è interessati solo ai carichi sul corpo.

Sarebbe opportuno allora restringere il dominio d'integrazione alla sola superficie del corpo ed ivi determinare il potenziale in funzione delle opportune condizioni al contorno (tipicamente quelle sulla velocità normale): è ciò che si fa col metodo seguente.

### 2.4.2 Metodo delle singolarità virtuali

Questo metodo trova applicazione principalmente nel caso di correnti incompressibili ed irrotazionali, ovvero che soddisfano l'equazione di *Laplace*  $\nabla^2 \varphi = 0$ . Esso consiste nel rappresentare il corpo tramite una distribuzione di singolarità d'intensità incognita, da determinarsi con l'imposizione delle condizioni al contorno sulla velocità normale alla superficie e di chiusura del corpo. Soluzioni fondamentali sono:

- la sorgente d'intensità unitaria

$$\varphi_s = -\frac{1}{4\pi r_{PQ}}$$

dove  $P$  è il punto in cui si calcola il potenziale e  $Q$  è quello in cui è posta la sorgente;

- la doppietta, anch'essa d'intensità unitaria

$$\varphi_d = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_Q} \left( \frac{1}{r_{PQ}} \right)$$

in questo caso  $\partial/\partial n_Q$  indica la derivata fatta lungo una generica direzione  $n$ ;

- il vortice.

Poiché l'equazione di *Laplace* è lineare, anche un'opportuna combinazione lineare delle soluzioni fondamentali è soluzione. Si consideri una distribuzione di sorgenti di intensità  $\sigma(Q)$  incognita; soluzioni dell'equazione sono anche:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi} \int_l \frac{\sigma(Q)}{r_{PQ}} dl \\ \varphi &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\sigma(Q)}{r_{PQ}} dS \\ \varphi &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\sigma(Q)}{r_{PQ}} dV \end{aligned}$$

cioè distribuzioni su una linea  $l$ , su una superficie  $S$  ed in un volume  $V$ . Le medesime osservazioni possono essere fatte per una distribuzione di doppiette di intensità  $\mu(Q)$ . Per rappresentare un corpo portante è necessario imporre che le velocità sul dorso e sul ventre in corrispondenza del bordo d'uscita siano uguali (condizione di *Kutta*), e per fare questo bisogna introdurre una vorticità sul profilo; ciò si realizza tramite un vortice. Poiché la vorticità totale nel campo di moto dev'essere nulla, essendoci sicuramente stata quiete in un qualche tempo precedente al moto del corpo, deve esistere tra il corpo stesso e l'infinito a valle una vorticità d'intensità uguale e contraria a quella presente sul corpo: essa costituisce la scia. In questo modo il campo di moto non è più irrotazionale, e quindi a rigore non vale il modello a potenziale. D'altronde, nel caso non si sia in presenza di consistente separazione dello strato limite, cosa usualmente verificata per angoli d'incidenza contenuti, la vorticosità è confinata in una ristretta zona del campo di moto: la scia a valle del corpo e lo strato limite appunto, il che non inficia la validità della soluzione a potenziale al di fuori di essa. La velocità indotta da un vortice può essere calcolata con la legge di Biot-Savart:

$$\vec{V}(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{\xi} \times \vec{r}_{PQ}}{\|\vec{r}_{PQ}\|^3} dV$$

dove  $\xi$  è la vorticità; i casi di distribuzione su una linea o su una superficie si particolarizzano facilmente. Il concetto è che si può costruire una qualsiasi soluzione dell'equazione di *Laplace* combinando le soluzioni fondamentali ed imponendo il soddisfacimento delle condizioni al contorno. Ad esempio possiamo costruire la corrente attorno ad un'ala distribuendo sulla stessa delle sorgenti per simulare lo spessore e delle doppiette per chiudere il corpo, di intensità incognita, che determineremo imponendo che la velocità del fluido sia tangente all'ala, cioè che la velocità normale sia nulla. Nel caso di geometrie complesse come quelle di un velivolo reale è impossibile trovare una soluzione in forma chiusa e si deve pertanto cercare una soluzione approssimata per via numerica. Per ottenerla si ricorre tipicamente al metodo *a pannelli*: la superficie viene divisa in tanti pannelli, piani o curvilinei, e su ognuno di essi si assume un andamento semplificato delle incognite, ad esempio costante, del primo ordine, del secondo, ecc. Così procedendo ci si riduce ad un numero finito  $N$  d'incognite che sono determinate, secondo la tecnica più utilizzata, imponendo il soddisfacimento delle condizioni al contorno ed eventualmente di quella di Kutta in opportuni punti di collocazione. Come vedremo nei prossimi paragrafi, il metodo di *Morino* esprime il potenziale  $\varphi$  in ogni punto del campo di moto, superficie del corpo compresa, direttamente in funzione dei valori di  $\varphi$  e di  $\partial\varphi/\partial n$  sul corpo e sulla scia.

### 2.4.3 Suddivisione del corpo in pannelli

Per eseguire la suddivisione in pannelli si può procedere con una delle seguenti tecniche. Tracciare sulla superficie dei quadrilateri, aventi eventualmente due lati allineati con il vento relativo, e sostituirli con pannelli equivalenti che possono mantenere o meno la continuità della superficie stessa. Il tipo più semplice di pannello equivalente è quello piano, ed un modo possibile per ottenerlo è il seguente. Riferiamoci alla figura a lato. In generale il quadrilatero  $ABCD$  non è piano; si traccino le diagonali  $BD$  ed  $AC$  e se ne consideri il prodotto vettore: si individua così la normale  $\vec{n}$ ; si proiettino i vertici  $A, B, C, D$  nella direzione individuata da  $\vec{n}$ : la media delle loro ascisse individua sulla normale un punto  $P$ . Il pannello piano equivalente è individuato proiettando i vertici sul piano passante per  $P$  e perpendicolare alla normale. Con questa tecnica si può suddividere una qualunque superficie in pannelli piani equivalenti, anche se non è possibile mantenerne la continuità: tra pannello e pannello vi sono delle fessure che possono falsare i risultati, particolarmente in campo supersonico. Il metodo ha comunque il vantaggio che è conosciuta l'espressione analitica degli integrali di  $1/r$  e di  $\partial r/\partial n$  sul pannello, e quindi è numericamente semplice. Se si vuole mantenere la continuità della superficie si può sostituire ogni quadrilatero, ad esempio, con una superficie iperboloidale definita dai quattro vertici del quadrilatero stesso. In questo modo la continuità della superficie del corpo è preservata benché vi siano delle discontinuità nelle pendenze; ovviamente l'onere di calcolo è maggiore, e le integrazioni devono essere svolte per via numerica. Per una trattazione più approfondita di questo metodo si rimanda al riferimento [2] in cui sono riportate anche le espressioni analitiche degli integrali di  $1/r$  e  $\partial r/\partial n$ . Per completare questa introduzione non resta che descrivere le condizioni al contorno, cosa che sarà svolta nel prossimo paragrafo.

## 2.5 Condizioni al contorno

Per scrivere le condizioni al contorno si consideri un sistema di riferimento solidale con la configurazione indeformata del corpo; ciò è in accordo con quanto si è fatto precedentemente nel ricavare l'equazione del potenziale. La condizione al contorno si esprime dicendo che, nel riferimento descritto in precedenza, le componenti di velocità del vento e del corpo normali al corpo stesso coincidono. Facendo l'ulteriore ipotesi, comunque facilmente rimovibile, che la velocità asintotica  $V_\infty$  sia allineata con il versore  $\vec{i}$ , la componente di velocità normale al profilo,  $V_n$ , del vento relativo è data dalla seguente espressione:

$$V_n = \vec{V} \cdot \vec{n} = V_\infty (\vec{i} \cdot \vec{n} + \nabla\varphi \cdot \vec{n}) \quad (2.29)$$

mentre quella del corpo è data dalla:

$$V_{Bn} = \vec{V}_B \cdot \vec{n} \quad (2.30)$$

Eguagliando la (2.29) con la (2.30) si ottiene:

$$V_\infty (\vec{i} \cdot \vec{n} + \nabla\varphi \cdot \vec{n}) = \vec{V}_B \cdot \vec{n} \quad (2.31)$$

Verranno ora chiariti i vari termini. Per completare l'espressione occorre esprimere in funzione del movimento della struttura la velocità normale del corpo e la normale stessa del corpo. Per far questo si assuma un sistema di riferimento superficiale di coordinate  $\{\xi, \eta\}$ ; allora vettorialmente possiamo esprimere la posizione di un generico punto della superficie come:

$$\vec{x} = \vec{x}(\xi, \eta)$$

se riteniamo la superficie invariante nel tempo. Altrimenti:

$$\vec{x} = \vec{x}(\xi, \eta, t)$$

che è l'espressione più generale, a cui ci riferiremo per la trattazione seguente. Notiamo che vi è una certa differenza con quanto fatto su molti testi che esprimono l'equazione del corpo in funzione delle coordinate assolute e quindi assumono un'espressione del tipo:

$$S(x, y, z, t) = 0$$

In questo caso la condizione al contorno si esprime dicendo che la derivata totale della superficie  $S$  calcolata sulla  $S = 0$  è nulla (cfr. rif. [3], pag. 172 e segg.). Avendo linearizzato possiamo pensare che la posizione di un punto sulla superficie sia data dalla composizione di due termini:

- uno che si ottiene pensando la struttura rigida, usando una terna solidale col corpo, e che indichiamo con:

$$\vec{x}_a = \vec{x}_a(\xi, \eta)$$

- un altro dato dalla deformabilità del corpo e variabile nel tempo che risulta:

$$\vec{u} = \vec{u}(\xi, \eta, t)$$

In questo modo la posizione di un punto sulla superficie rispetto a un sistema fisso è dato da:

$$\vec{x}(\xi, \eta, t) = \vec{x}_a(\xi, \eta) + \vec{u}(\xi, \eta, t) \quad (2.32)$$

Volendo determinare la componente di velocità normale della struttura occorre derivare rispetto al tempo e proiettare lungo la normale, cioè:

$$V_{Bn} = \dot{\vec{x}} \cdot \vec{n} = \dot{\vec{u}} \cdot \vec{n}$$

Ora il maggiore problema sta nel determinare l'espressione del versore normale; lo calcoliamo sapendo che esso è dato dal rapporto del vettore normale alla superficie

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \eta}$$

col suo modulo:

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \eta}}{\left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \eta} \right\|}$$

Ora, sostituendovi l'espressione (2.32) del vettore posizione  $\vec{x}$  si ottiene:

$$\vec{n} = \frac{(\vec{x}_{a/\xi} + \vec{u}_{/\xi}) \times (\vec{x}_{a/\eta} + \vec{u}_{/\eta})}{\|(\vec{x}_{a/\xi} + \vec{u}_{/\xi}) \times (\vec{x}_{a/\eta} + \vec{u}_{/\eta})\|}$$



Sviluppando i prodotti ed usando la proprietà distributiva del prodotto vettoriale rispetto alla somma abbiamo:

$$\vec{n} = \frac{\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta} + \vec{x}_{a/\xi} \times \vec{u}_\eta + \vec{u}_\xi \times \vec{x}_{a/\eta} + \vec{u}_\xi \times \vec{u}_\eta}{\|\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta} + \vec{x}_{a/\xi} \times \vec{u}_\eta + \vec{u}_\xi \times \vec{x}_{a/\eta} + \vec{u}_\xi \times \vec{u}_\eta\|} \quad (2.33)$$

Teniamo sempre presente che supponiamo gli spostamenti piccoli rispetto alle dimensioni caratteristiche del corpo (al limite infinitesimi); allora possiamo ritenere trascurabili i termini quadratici in  $\vec{u}$ . Dalla (2.33) eliminiamo quindi il prodotto  $\vec{u}_\xi \times \vec{u}_\eta$ . Determiniamo ora l'espressione effettiva del versore normale alla superficie: per far questo seguiamo per passi successivi cercando di esprimere i singoli termini dell'espressione (2.33). Si consideri innanzitutto il denominatore, esplicitandolo e trascurando i termini quadratici negli spostamenti, per la già citata assunzione di piccole perturbazioni, diventa:

$$\text{den}(\vec{n}) = \left( \|\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}\|^2 + 2(\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}) \cdot (\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{u}_\eta) + 2(\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}) \cdot (\vec{u}_\xi \times \vec{x}_{a/\eta}) \right)^{1/2} \quad (2.34)$$

dove si è fatto uso della proprietà  $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$ . Ricordiamo ora che, per  $|\varepsilon| \ll 1$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} = (1+\varepsilon)^{-1/2} \cong 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.35)$$

Per poter applicare quest'espressione occorre raccogliere nella (2.34) il termine  $\|\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}\|^2$ , per cui si ottiene:

$$\text{den}(\vec{n}) = \|\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}\| \sqrt{1 + \frac{2(\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}) \cdot (\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{u}_\eta) + 2(\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}) \cdot (\vec{u}_\xi \times \vec{x}_{a/\eta})}{\|\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}\|^2}}$$

Usando la (2.35) si giunge a:

$$\text{den}(\vec{n})^{-1} \cong \frac{1}{\|\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}\|} \left( 1 - \frac{(\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}) \cdot (\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{u}_\eta) + (\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}) \cdot (\vec{u}_\xi \times \vec{x}_{a/\eta})}{\|\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}\|^2} \right) \quad (2.36)$$

Si definisca quindi il rapporto:

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}}{\|\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}\|}$$

che sostituito nella (2.36) dà:

$$\text{den}(\vec{n})^{-1} = \frac{1}{\|\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}\|} \left( 1 - \vec{n}_0 \cdot \frac{\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{u}_\eta}{\|\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}\|} - \vec{n}_0 \cdot \frac{\vec{u}_\xi \times \vec{x}_{a/\eta}}{\|\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}\|} \right)$$

Allora, ricordando la (2.33), il versore normale è dato dall'espressione:

$$\vec{n} = \left( \frac{\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta} + \vec{x}_{a/\xi} \times \vec{u}_\eta + \vec{u}_\xi \times \vec{x}_{a/\eta}}{\|\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}\|} \right) \left( 1 - \vec{n}_0 \cdot \frac{\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{u}_\eta}{\|\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}\|} - \vec{n}_0 \cdot \frac{\vec{u}_\xi \times \vec{x}_{a/\eta}}{\|\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}\|} \right)$$

e, ricordando che  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ , si ottiene:

$$\vec{n} = \left( \vec{n}_0 - \frac{\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{u}_\eta + \vec{u}_\xi \times \vec{x}_{a/\eta}}{\|\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}\|} \right) \left( 1 + \vec{n}_0 \cdot \frac{\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{u}_\eta + \vec{u}_\xi \times \vec{x}_{a/\eta}}{\|\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}\|} \right) \quad (2.37)$$

Per maggior semplicità si indichi con  $\Delta\vec{n}$  il termine:

$$\Delta\vec{n} = \frac{\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{u}_\eta + \vec{u}_\xi \times \vec{x}_{a/\eta}}{\|\vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta}\|}$$

Così facendo la (2.37) si riscrive come:

$$\vec{n} = (\vec{n}_0 - \Delta\vec{n})(1 + \vec{n}_0 \cdot \Delta\vec{n})$$

da cui si ricava:

$$\vec{n} = \vec{n}_0 + \vec{n}_0 (\vec{n}_0 \cdot \Delta\vec{n}) - \Delta\vec{n} - \Delta\vec{n} (\vec{n}_0 \cdot \Delta\vec{n})$$

dove l'ultimo termine può essere trascurato poiché è quadratico in  $\Delta\vec{n}$ ; allora la normale  $\vec{n}$  risulta essere pari a:

$$\vec{n} = \vec{n}_0 (1 + \vec{n}_0 \cdot \Delta\vec{n}) - \Delta\vec{n}$$

Ora che abbiamo determinato l'espressione della normale  $\vec{n}$  possiamo scrivere le condizioni al contorno servendoci della (2.31). Prima di procedere ricordiamo che noi consideriamo la variazione rispetto ad una condizione di riferimento che, ad esempio, può essere quella di volo rettilineo orizzontale uniforme; inoltre questa variazione è piccola, al limite infinitesima. Ciò significa, ad esempio, che gli spostamenti della struttura sono piccoli rispetto alle dimensioni caratteristiche della stessa, oppure che la velocità di perturbazione del fluido è piccola rispetto a quella asintotica (e così via). Sulla base di queste considerazioni possiamo pensare di esprimere il potenziale  $\varphi$  come somma di una parte stazionaria (funzione delle sole coordinate) e di una instazionaria (funzione delle coordinate e del tempo) il cui gradiente è da riguardarsi come infinitesimo:

$$\varphi = \varphi_s(\vec{x}) + \varphi_i(\vec{x}, t)$$

Sostituendo nella (2.31) la condizione al contorno diventa:

$$V_\infty \left( \vec{i} + \nabla\varphi_s + \nabla\varphi_i \right) \cdot \vec{n} = \vec{V}_B \cdot \vec{n} \quad (2.38)$$

Ora ricordiamo che:

$$\begin{aligned} \vec{n}(\xi, \eta, t) &= \vec{n}_0(\xi, \eta) (1 + \vec{n}_0(\xi, \eta) \cdot \Delta\vec{n}(\xi, \eta, t)) - \Delta\vec{n}(\xi, \eta, t) \\ \vec{V}_B(\xi, \eta, t) &= \vec{u}(\xi, \eta, t) \end{aligned}$$

Rammentiamo, a scanso di equivoci, (vedi la figura all'inizio del capitolo) che il potenziale dipende dalle coordinate cartesiane  $\vec{x} = \{x, y, z\}$ , mentre la superficie dipende dalle coordinate  $\{\xi, \eta\}$ . Se si sviluppano i vari passaggi e si raccolgono i vari termini, la condizione di uguaglianza alla parete della componente normale della velocità di fluido e corpo diventa:

$$\begin{aligned} V_\infty \left( \vec{i} + \nabla\varphi_s \right) + V_\infty \left( \vec{i} + \nabla\varphi_s \right) (\vec{n}_0 (\vec{n}_0 \cdot \Delta\vec{n}) - \Delta\vec{n}) \\ + V_\infty \nabla\varphi_i \cdot \vec{n}_0 + V_\infty \nabla\varphi_i \cdot (\vec{n}_0 (\vec{n}_0 \cdot \Delta\vec{n}) - \Delta\vec{n}) = \vec{u} \cdot \vec{n}_0 + \vec{u} \cdot (\vec{n}_0 (\vec{n}_0 \cdot \Delta\vec{n}) - \Delta\vec{n}) \end{aligned}$$

Si trascurino gli infinitesimi di ordine superiore nel tempo e si distingua tra termini stazionari ed instazionari:

$$\begin{aligned} V_\infty \left( \vec{i} + \nabla\varphi_s \right) \cdot \vec{n}_0 &= 0 \\ V_\infty \left( \nabla\varphi_i \cdot \vec{n}_0 + \left( \vec{i} + \nabla\varphi_s \right) \cdot (\vec{n}_0 (\vec{n}_0 \cdot \Delta\vec{n}) - \Delta\vec{n}) \right) &= \vec{u} \cdot \vec{n}_0 \end{aligned}$$

La prima esprime le condizioni al contorno in regime stazionario; infatti il corpo non ha spostamenti rispetto al riferimento, la normale è quella della configurazione indeformata, e si ottiene l'usuale condizione che la componente di velocità del fluido normale al corpo è nulla. Si noti che tale equazione, in realtà, non dipende dal valore della velocità asintotica. La seconda è l'espressione maggiormente interessante, poiché esprime le condizioni al contorno in presenza d'instazionarietà. In questo caso è significativo il rapporto di scala tra il primo ed il secondo membro, ovvero la velocità caratteristica della deformazione del corpo rispetto alla velocità asintotica della corrente. Esplicitiamola rispetto al potenziale instazionario:

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial n} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}_0}{V_\infty} - \left( \vec{i} + \nabla(\varphi_s) \right) \cdot (\vec{n}_0 (\vec{n}_0 \cdot \Delta\vec{n}) - \Delta\vec{n}) \quad (2.39)$$

dove si è usata la relazione  $\partial\varphi_i/\partial n = \nabla\varphi_i \cdot \vec{n}_0$ . Notiamo che la derivata normale del potenziale instazionario dipende da due termini: uno dinamico contenente la  $\vec{u}$ , ovvero la velocità di oscillazione attorno all'equilibrio, ed uno geometrico, contenente la  $\Delta\vec{n}$ , che esiste anche quando la  $u$  non dipende dal tempo. La (2.39) si semplifica ulteriormente nel caso di lamina piana (leggasi superficie portante) in cui si trascura  $\nabla\varphi_s$  e  $\vec{n}_0 \cdot \Delta\vec{n}$  è nullo poiché i due sono ortogonali fra loro. Per dimostrarlo consideriamo le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= z(x, y, t) \vec{k} \\ \vec{x}_a &= x\vec{i} + y\vec{j}\end{aligned}$$

Utilizzando le equazioni viste la  $\Delta\vec{n}$  e la  $\vec{n}_0$  risultano:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{n} &= \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} \\ \vec{n}_0 &= \vec{k}\end{aligned}$$

Da cui deduciamo semplicemente che  $\vec{n}_0 \cdot \Delta\vec{n}$  è nullo. Nel caso di lamina piana, o di un'ala sufficientemente sottile per essere approssimata con una lamina piana, la (2.39) diviene:

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial n} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}_0}{V_\infty} + \vec{i} \cdot \Delta\vec{n} \quad (2.40)$$

e poiché risulta  $\vec{u} = \partial z / \partial t \vec{k}$ , essa assume la nota espressione (valida anche nel caso di un profilo):

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial n} = \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x}$$

Ora si può pensare di sviluppare la superficie del corpo considerato con delle superfici elementari e di esprimere gli spostamenti dei punti corrispondenti ai vertici di tali superfici mediante delle funzioni di forma, contenute nella matrice  $[N]$  dipendente dallo spazio, che siano uno sviluppo completo ed efficiente, moltiplicate per un certo vettore di ampiezze dipendenti dal tempo, che indichiamo con  $\{q\}$ , per cui:

$$\{u\} = [N(\xi, \eta)] \{q(t)\}$$

Quest'approssimazione può essere sostituita nella (2.39) o nella (2.40); essendo i due casi del tutto analoghi ci limitiamo, per semplicità di scrittura, a sostituire nella (2.40):

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial n} = \underbrace{\{n_0\}^T [N]}_{[f(\xi, \eta)]} \frac{\{\dot{q}\}}{V_\infty} + \underbrace{\frac{\{i\}^T \left( [\vec{x}_{a/\xi} \times] [N]_{/\eta} - [\vec{x}_{a/\eta} \times] [N]_{/\xi} \right)}{\| \vec{x}_{a/\xi} \times \vec{x}_{a/\eta} \|}}_{[g(\xi, \eta)]} \{q\}$$

dove  $[a \times]$  è la scrittura in forma matriciale dell'operazione di prodotto vettore, ove  $[a \times] \{b\} = \vec{a} \times \vec{b}$ . Le matrici  $[f]$  e  $[g]$  rappresentano i contributi dell'intera struttura, attraverso le sue coordinate libere  $\{q\}$ , alla derivata normale del potenziale nel generico punto  $\{\xi, \eta\}$ . Ora collocando l'espressione della derivata normale del potenziale nel centro delle superfici elementari si giunge alla seguente espressione per la derivata normale del potenziale:

$$\left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right\} = \frac{1}{V_\infty} [F] \{\dot{q}\} + [G] \{q\} \quad (2.41)$$

in cui le matrici  $[F]$  e  $[G]$  rappresentano i contributi alla derivata normale del potenziale in ogni punto di collocazione, e sono ottenute impilando le matrici  $[f]$  e  $[g]$  valutate in ogni punto:

$$\begin{aligned}[F] &= \begin{bmatrix} [f(\xi_1, \eta_1)] \\ \vdots \\ [f(\xi_N, \eta_N)] \end{bmatrix} \\ [G] &= \begin{bmatrix} [g(\xi_1, \eta_1)] \\ \vdots \\ [g(\xi_N, \eta_N)] \end{bmatrix}\end{aligned}$$

In definitiva la derivata normale del potenziale risulta proporzionale ad un termine dipendente dal vettore  $\{q\}$  e ad un altro dipendente dalla sua derivata. Può tornare utile esprimere la (2.41) in frequenza mediante la trasformata di *Fourier* che risulta:

$$\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} = \left[ \frac{j\omega}{V_\infty} [F] + [G] \right] \{q\} \quad (2.42)$$

Un'espressione del tutto analoga, a parte una maggior complicazione della  $[G]$ , si ha nel caso generale dato dalla (2.39).

## 2.6 Il metodo di *Morino* nel caso stazionario

Nel primo paragrafo si è vista l'espressione (2.27) per il calcolo del coefficiente di pressione su un generico corpo mediante il metodo a potenziale; tuttavia si deve premettere qualche osservazione per passare dal generico corpo considerato ad un corpo portante, che è poi l'oggetto del nostro interesse. Infatti, per ottenere un corpo portante e non andare incontro al paradosso di *d'Alembert*, è necessario, in accordo con il teorema di *Kutta-Joukowski*, che la circolazione  $\Gamma$  della corrente sia diversa da zero, e ciò si può ottenere introducendo delle opportune singolarità quali i vortici. Nel caso bidimensionale otteniamo la nota corrente traslocircolatoria attorno ad un profilo, mentre nel caso tridimensionale (ala di apertura finita), poiché i vortici non possono svanire ai limiti dell'ala, si disperdono nella corrente dando origine alla scia di *Prandtl*, superficie vorticosa giacente nel letto del vento, che è quindi diretta conseguenza della presenza della portanza. Quest'ultimo caso è rappresentato nella figura accanto, dove la zona circoscritta è quella dove si può ritenere valida la descrizione a potenziale. In seguito la circolazione si calcolerà sul contorno del corpo e della scia stessa. In base a questo si fanno le seguenti ipotesi:

- la velocità normale alla scia è nulla su di essa, cioè  $V_n|_s = 0$ . Questo comporta che, nel caso si consideri come dominio lo spazio tridimensionale, la scia è una superficie di flusso;
- deve essere soddisfatta la condizione di scia scarica:  $\Delta c_{p_s} = 0$ ;
- per semplificare la trattazione, si considerino innanzitutto condizioni stazionarie; il caso instazionario si vedrà in seguito.

Utilizzando la (2.28) per il calcolo del  $\Delta c_{p_s} = 0$  si ha:

$$\Delta c_{p_s} = -2 \frac{\partial \Delta \varphi_s}{\partial x} = 0$$

dato che nel caso stazionario  $d(\cdot)/dt = V_\infty \partial(\cdot)/\partial x$ , il che comporta che, dovendo essere nullo il salto di pressione sulla scia, sia:

$$\Delta \varphi_s = \text{cost}$$

e quindi la variazione del potenziale sulla scia è costante lungo  $x$ , e resta da determinarne il valore. Poiché si è nel caso stazionario la cosa risulta semplice: la costante risulta uguale alla variazione del potenziale sul bordo d'uscita, cioè:

$$\Delta \varphi_s = \Delta \varphi_{BU} \quad (2.43)$$

Vediamo però che, per come è definita  $\Gamma$ , la  $\Delta \varphi_{BU}$  è pari alla circolazione:

$$\Gamma = \oint_S V_T dS = \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial S} dS = \oint d\varphi = \Delta \varphi_{BU}$$

Quello appena descritto è anche un metodo operativo per verificare la correttezza dei calcoli: si determina  $\Delta \varphi_{BU}$  e poi si verifica se è uguale alla circolazione  $\Gamma$ , calcolando l'integrale della velocità tangente lungo il profilo. Ipotizziamo ora di essere anche in caso incomprimibile, oltre che stazionario; questo implica che

$$c_\infty \cong \infty$$

e quindi

$$M_\infty \cong 0$$

per cui la (2.25) diventa l'equazione di *Laplace*:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (2.44)$$

Questa è sempre un'equazione lineare nel potenziale, tuttavia sembrerebbe non rappresentare mai un caso instazionario; in realtà l'instazionarietà è nascosta:

- nelle condizioni al contorno, e
- nell'espressione del coefficiente di pressione.

Logicamente nel caso totalmente stazionario il problema di dove sia l'instazionarietà non si pone, poiché sia le condizioni al contorno che l'espressione del coefficiente di pressione sono stazionarie. Per risolvere il problema dal punto di vista aeroelastico, che consiste nella determinazione dei carichi sulla superficie del corpo considerato, occorre riportare tutto quanto conosciamo, cioè quanto finora visto, sulla superficie del corpo: per far questo ricorriamo alla funzione di Green. Prima di applicare questa tecnica al caso aerodinamico è conveniente fare un esempio in campo strutturale. Tenendo presente che la formulazione che si vuole usare è quella integrale pensiamo al caso della torsione di una barra. Rifacendoci all'approccio in flessibilità possiamo scrivere:

$$\vartheta(x) = \int_L C^{\vartheta\vartheta}(x, \xi) m_t(\xi) d\xi \quad (2.45)$$

dove  $C^{\vartheta\vartheta}(x, \xi)$  è la funzione di influenza che equivale ad una rotazione in  $x$  dovuta ad un momento unitario in  $\xi$ . La funzione  $C^{\vartheta\vartheta}$  preserva la congruenza fra gli elementi e soddisfa le condizioni al contorno, così come le soddisfa anche  $\vartheta$ . Formalmente possiamo scrivere la (2.45) come:

$$(GJ\vartheta'(x))' = m_t(x) \quad (2.46)$$

ed usando la definizione di  $C^{\vartheta\vartheta}$ :

$$\left(GJC^{\vartheta\vartheta'}(x, \xi)\right)' = \delta(x - \xi) \quad (2.47)$$

dove:

- $\delta(x - \xi)$  è la funzione delta di Dirac, e
- $GJ$  è la rigidezza torsionale.

La (2.47) esprime la relazione tra un carico concentrato in  $(x - \xi)$  e  $C^{\vartheta\vartheta}$ ; per dimostrare la (2.45) possiamo moltiplicare la (2.46) per una generica rotazione  $\vartheta(x)$  e la (2.47) per  $C^{\vartheta\vartheta}$ :

$$\begin{aligned} C^{\vartheta\vartheta}(x, \xi) (GJ\vartheta'(\xi))' &= C^{\vartheta\vartheta}(x, \xi) m_t(\xi) \\ \vartheta(\xi) \left(GJC^{\vartheta\vartheta'}(x, \xi)\right)' &= \vartheta(\xi) \delta(x - \xi) \end{aligned}$$

Sottraendo la prima dalla seconda ed integrando si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_L C^{\vartheta\vartheta}(x, \xi) (GJ\vartheta'(\xi))' d\xi - \int_L \vartheta(\xi) \left(GJC^{\vartheta\vartheta'}(x, \xi)\right)' d\xi &= \\ = \int_L C^{\vartheta\vartheta}(x, \xi) m_t(\xi) d\xi - \int_L \vartheta(\xi) \delta(x - \xi) d\xi \end{aligned}$$

dove  $L$  è la lunghezza della trave. Integrando per parti:

$$\underbrace{[C^{\vartheta\vartheta} GJ\vartheta']_0^L}_A - \int_L C^{\vartheta\vartheta'} GJ\vartheta' d\xi - \underbrace{[\vartheta GJC^{\vartheta\vartheta'}]_0^L}_B + \int_L \vartheta' GJC^{\vartheta\vartheta'} d\xi = \int_L C^{\vartheta\vartheta} m_t d\xi - \vartheta(x)$$

I termini finiti  $A$  e  $B$  valutati agli estremi sono nulli per rispetto delle condizioni al contorno:

$$\begin{aligned}\vartheta(0) &= C^{\vartheta\vartheta}(0, \xi) = 0 \\ \vartheta'(L) &= C^{\vartheta\vartheta'}(L, \xi) = 0\end{aligned}$$

qualunque sia  $\xi \in [0, L]$  ed eliminando i termini uguali e di segno opposto otteniamo la (2.45), come volevasi dimostrare:

$$\vartheta(x) = \int_L C^{\vartheta\vartheta}(x, \xi) m_t(\xi) d\xi$$

Quest'espressione è l'equazione di *Green* e  $C^{\vartheta\vartheta}$  è la funzione di *Green*.

Ora possiamo pensare di applicare quanto visto all'aerodinamica che stiamo trattando. D'ora in poi supporremo di essere nel caso stazionario; ci si limita a questo caso poiché altrimenti la  $\delta$  di Dirac dovrebbe dare una rappresentazione non solo nello spazio ma anche nel tempo, e ciò porterebbe ad un'ulteriore complicazione. Allora, come detto, l'equazione del potenziale è l'equazione, armonica, di *Laplace* (2.44),  $\nabla^2 \varphi = 0$ . Nel caso stazionario comprimibile subsonico l'equazione (2.22) è:

$$(1 - M_\infty^2) \varphi_{/xx} + \varphi_{/yy} + \varphi_{/zz} = 0$$

ma se si prende l'opportuna trasformazione di *Prandtl-Glauert*:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x}{\sqrt{1 - M^2}} \\ \bar{y} &= y \\ \bar{z} &= z\end{aligned}$$

ci si riconduce ancora all'equazione del potenziale armonico, valida ora anche per il caso comprimibile. Analogamente a quanto visto per il caso della torsione nell'approccio in flessibilità, si può introdurre la funzione di *Green*,  $G$ , tale che:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi &= 0 \\ \nabla^2 G &= \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)\end{aligned}$$

Con lo stesso procedimento di prima, sottraendo la seconda moltiplicata per  $\varphi$  alla prima moltiplicata per  $G$ , ed integrando sul volume, si ha:

$$\begin{aligned}G \nabla^2 \varphi &= 0 \\ \varphi \nabla^2 G &= \varphi \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)\end{aligned}$$

e

$$\int_v E (G \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 G) dv = - \int_v E \varphi \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) dv \quad (2.48)$$

Volendo determinare il coefficiente d'influenza della (2.48) occorre, come già visto, integrare per parti, tenendo conto che:

$$\nabla \cdot (G \nabla \varphi) = \nabla G \cdot \nabla \varphi + G \nabla^2 \varphi$$

allora

$$\int_v (\nabla \cdot (G \nabla \varphi) - \nabla G \cdot \nabla \varphi - \nabla \cdot (\varphi \nabla G) + \nabla \varphi \cdot \nabla G) dv = \int_v \varphi \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) dv$$

Eliminando i termini uguali ed integrandola sfruttando il teorema della divergenza si ottiene:

$$E \varphi(\vec{x}_0) = \int_S \varphi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \quad (2.49)$$

dove:

$S$  è la superficie corpo,  
 $E$  è una funzione che vale 0 dentro il corpo,  
 1 fuori dal corpo,  
 1/2 sul contorno del corpo.

(Per ulteriori chiarimenti su  $E$  consultare il report NASA CR-2464). Ora occorre determinare l'espressione della funzione di *Green*, e lo si può fare trovando la soluzione della seguente equazione con la condizione al contorno di  $G$  nulla all'infinito:

$$\nabla^2 (G) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

che è:

$$G = -\frac{1}{4\pi R} \quad (2.50)$$

dove

$$R = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^{1/2}$$

Sostituendo la (2.50) nella (2.49) si ottiene:

$$E4\pi\varphi = \int_S \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS$$

Poiché ci interessa determinare cosa accade sul corpo assumeremo  $E = 1/2$ . L'equazione sopra ricavata non risulta ancora completa: occorre distinguere nella superficie  $S$  tra la superficie del corpo  $S_B$  e quella della scia  $S_W$ ; di conseguenza si trasforma nel seguente modo:

$$2\pi\varphi = \int_{S_B} \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS + \int_{S_W} \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS \quad (2.51)$$

Tenendo presente la figura accanto si vede che le normali alla scia risultano uguali ma di verso opposto mentre la  $\partial\varphi/\partial n$  è la medesima su entrambe le facce, superiore ed inferiore; allora si determina che:

$$\int_{S_W} \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_{S_{Wu}} \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - \int_{S_{Wl}} \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0 \quad (2.52)$$

e quindi nell'espressione (2.51) questo termine si elide. Si noti che i pedici  $u$  e  $l$  che compaiono indicano rispettivamente che ci si riferisce alla parte superiore o a quella inferiore della scia. Per quanto riguarda l'altro termine di scia si ha:

$$\int_{S_W} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) dS = \int_{S_{Wu}} \varphi_u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) dS - \int_{S_{Wl}} \varphi_l \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) dS = \int_{S_W} (\varphi_u - \varphi_l) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) dS$$

e quindi:

$$\int_{S_W} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) dS = \int_{S_W} \Delta\varphi_s \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) dS$$

Ricordandoci delle ipotesi fatte sulla scia a inizio paragrafo e della relazione (2.43) si può riscrivere la (2.51) nel seguente modo:

$$2\pi\varphi = \int_{S_B} \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS + \int_{S_W} \Delta\varphi_{BU} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) dS \quad (2.53)$$

avendo quindi esplicitato i termini dipendenti dalla scia e dal corpo. Questa è un'equazione integro-differenziale poiché l'incognita  $\varphi$  si trova sia fuori che entro il segno di integrale: essa si risolve per via numerica. Come prima cosa si approssima la geometria del corpo (di sicuro la superficie, per il motivo già detto, avrà delle singolarità sul bordo d'uscita); una approssimazione che si può ipotizzare è

la suddivisione del corpo in tanti pannelli. I pannelli usati possono essere piani oppure qualcosa di più complesso, come superfici rigate con lati rettilinei come ad esempio paraboloidi iperbolici. Così facendo l'equazione diventa una sommatoria di integrali, su ogni pannello:

$$2\pi\varphi_i = \sum_k \left( \int_{S_{B_k}} \left( \varphi_k \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right) dS + \int_{S_{W_k}} \Delta\varphi_{BUk} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) dS \right)$$

Ora si approssimano il potenziale e la sua derivata normale su ogni pannello: se le dimensioni dei pannelli sono abbastanza piccole rispetto a quelle del corpo ed i gradienti non sono troppo elevati, li si può prendere costanti e pari al valore nel centro del pannello stesso senza commettere un grosso errore (ricordiamo che questa semplice approssimazione non è valida per correnti supersoniche):

$$\begin{aligned} \varphi|_{x,y,z \in P_k} &= \varphi_k \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{x,y,z \in P_k} &= \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \end{aligned}$$

Quindi per l' $i$ -esimo pannello l'espressione diventa:

$$2\pi\varphi_i = \sum_k \varphi_k \int_{S_{B_k}} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) dS - \sum_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \int_{S_{B_k}} \frac{1}{R} dS + \sum_k \Delta\varphi_{BUk} \int_{S_{W_k}} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) dS$$

Ora pensando di collocare nel punto centrale di ogni pannello si ottiene la seguente espressione:

$$2\pi \{ \varphi \} = \underbrace{[D]}_{\text{doppiette}} \{ \varphi \} + \underbrace{[Z]}_{\text{sorgenti}} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} \quad (2.54)$$

e raccogliendo a fattor comune  $\{ \varphi \}$  si ottiene:

$$[Y] \{ \varphi \} = [Z] \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} \quad (2.55)$$

dove le incognite sono le  $\{ \varphi \}$  nel centro dei pannelli, mentre le altre matrici risultano note; di conseguenza si può scrivere:

$$\{ \varphi \} = [Y]^{-1} [Z] \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} \quad (2.56)$$

A questo punto, ricavate le incognite, siamo in grado di calcolare il carico nel centro di ogni pannello. Poiché ci interessa determinare l'andamento del carico e non solo il valore nel centro dei pannelli, possiamo pensare di introdurre una matrice costituita da funzioni interpolanti che, usata con la matrice colonna delle  $\{ \varphi \}$  nel centro dei pannelli, dia l'andamento della  $\varphi$  su tutta la superficie  $\sigma$ , cioè avremo che:

$$\varphi_\sigma(\xi, \eta) = [N_\sigma(\xi, \eta)] \{ \varphi \} \quad (2.57)$$

dove:

$\{ \varphi \}$  è la matrice che si ricava dalla (2.56),

$\varphi_\sigma$  è la matrice delle  $\varphi$  in un punto generico della superficie  $\sigma$ ,

$[N_\sigma]$  è la matrice delle funzioni interpolanti, in genere distinte da quelle dello spostamento strutturale.

Tramite la (2.57) è possibile ricavare la variazione del coefficiente di pressione sulla superficie:

$$\Delta c_p = -2 \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x} = -2 [N_{\sigma/x}] [Y]^{-1} [Z] \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\}$$

e quindi determinare il carico sulla superficie stessa, in caso stazionario. Possiamo ora esaminare in dettaglio l'espressione dei generici elementi delle matrici che compaiono nella (2.54). Partiamo dalla matrice  $[D]$ : essa è data da una parte dipendente dal corpo e da una parte dipendente dalla scia:

$$[D] = [D_B] + [D_W]$$



Un generico elemento della matrice del corpo è dato da:

$$D_{B_{ik}} = \int_{S_{B_k}} \frac{\partial}{\partial n_k} \left( \frac{1}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}} \right) dS$$

dove il punto  $i$ -esimo è il punto di collocazione del pannello considerato mentre  $k$  è quello degli altri pannelli. Abbiamo già detto che  $\Delta\varphi_s = \Delta\varphi_{BU}$ , e non varia lungo l'asse  $x$  ma lungo l'apertura; ciò comporta che è possibile fare una pannellizzazione della scia del tipo rappresentato in figura. Per ogni pannello dovremo dare il contributo della scia, che assumiamo positivo per il pannello superiore e negativo per quello inferiore; vediamo la vista laterale. Nella matrice  $[D]$  il contributo dovuto alla scia finisce solo negli ultimi pannelli, cioè in quelli corrispondenti al bordo d'uscita. Un generico elemento della matrice  $[D_W]$  è dato da:

$$D_{W_{ik}} = \int_{S_{W_k}} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}} \right) dS$$

Da non dimenticare che il termine va moltiplicato per  $\Delta\varphi_{BU}$ , che a sua volta è dato dalla differenza tra il potenziale sul pannello superiore e quello sul pannello inferiore. Una volta trovata la matrice  $[D]$  si è in grado di calcolare la matrice  $[Y]$ , che è data da:

$$[Y] = 2\pi [I] - [D]$$

Per quanto riguarda il generico elemento della matrice  $[S]$ , risulta:

$$S_{ik} = \int_{S_{W_k}} \left( \frac{1}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}} \right) dS$$

Una cosa interessante da notare è che il metodo di *Morino* sia nel caso stazionario, che è quello finora visto, che nel caso instazionario contiene anche il contributo dello spessore che, ad esempio, nel caso della teoria della superficie portante non entra in gioco. Anzi, nel caso in cui lo spessore del corpo tenda a zero, il termine integrale che contiene la  $\partial\varphi/\partial n$  (cioè le condizioni al contorno) svanisce, analogamente a quanto abbiamo visto per la scia, e la (2.53) diviene un'equazione singolare. Quindi possiamo affermare che il metodo di *Morino* “funziona” correttamente solo per corpi di spessore finito mentre presenta un comportamento singolare per corpi di spessore nullo come, ad esempio, una superficie portante. Tuttavia simulazioni numeriche eseguite su ali di spessore relativo assai piccolo (dell'ordine di 1/1000) hanno fornito risultati in ottimo accordo con la teoria della superficie portante. Allora è possibile simulare la superficie portante pur di utilizzare uno spessore fittizio abbastanza sottile.

## 2.7 Il metodo di *Morino* nel caso instazionario

In questa sezione estenderemo il metodo di *Morino* al caso più generale di corrente a potenziale instazionaria, subsonica o supersonica. L'instazionarietà è legata principalmente a tre cause:

1. il ritardo di tempo nella propagazione dei segnali, dovuto al fatto che per un fluido comprimibile la velocità del suono è finita;
2. le condizioni al contorno variabili nel tempo;
3. la scia, che costituisce la “memoria” di tutta la storia passata della circolazione, dato che l'intensità dei vortici della scia è legata direttamente alla circolazione sull'ala.

### 2.7.1 Trasmissione delle perturbazioni

Coerentemente con quanto visto in precedenza ipotizzeremo che la corrente sia linearizzata, e che le condizioni al contorno siano espresse dalla sovrapposizione di una configurazione di base tempo-invariante e di una perturbazione, tempo variante, infinitesima rispetto a questa. L'equazione del potenziale (2.25), ricordiamolo, è la seguente:

$$\nabla^2(\varphi) - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \quad (2.58)$$

Volendo applicare il metodo di *Morino* a quest'equazione, ovvero esprimere il potenziale  $\varphi$  in tutto il dominio in dipendenza dal suo valore e dal valore di  $\partial\varphi/\partial n$  sul corpo e sulla scia, dobbiamo trovare la funzione di *Green*. Ricordiamo che la funzione di *Green*,  $G$ , è per definizione la soluzione del problema non omogeneo (e quindi in generale non lineare) (cfr. ??):

$$\nabla^2(G) - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{d^2G}{dt^2} = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (2.59)$$

con  $G = 0$  all'infinito. Essa è quindi la risposta ad una  $\delta$  di Dirac spazio-temporale d'intensità unitaria; non si tratta altro che di una naturale estensione di quanto visto nel paragrafo precedente in cui la  $\delta$  era puramente spaziale, poiché si era nel caso stazionario. Per ottenere la funzione di *Green* per il potenziale instazionario, è opportuno applicare una trasformazione *Galileiana*, così che il nuovo sistema di riferimento sia rigidamente connesso con il fluido indisturbato. In questo modo l'equazione del potenziale si riduce all'equazione delle onde per la quale la funzione di *Green* è conosciuta; applicando la trasformazione inversa si ricava la funzione di *Green* per la (2.58). A questo scopo è opportuno considerare la seguente equazione non omogenea per il potenziale:

$$\nabla^2(\varphi) - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = Q(\vec{x}, t) \quad (2.60)$$

dove  $Q$  è una distribuzione assegnata di sorgenti fittizie. Quest'equazione si riduce alla corrispondente non omogenea per le onde in un sistema di riferimento connesso rigidamente con il fluido indisturbato. La trasformazione *Galileiana* da applicare è la seguente:

$$\begin{aligned} x &= \xi + V_\infty \tau \\ y &= \eta \\ z &= \zeta \\ t &= \tau \end{aligned} \quad (2.61)$$

Poiché inoltre risulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} &= \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

L'equazione (2.60) nel nuovo sistema di riferimento si riduce alla:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = \Gamma(\xi, \eta, \zeta, \tau) \quad (2.62)$$

con:

$$\Gamma(\xi, \eta, \zeta, \tau) = Q(\xi + V_\infty \tau, \eta, \zeta, \tau)$$

La soluzione dell'equazione (2.62) è data da:

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \iiint_{\infty} \frac{\Gamma(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \tau - \rho/c_{\infty})}{\rho} d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 \quad (2.63)$$

dove

$$\rho = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2}$$

Quindi  $\rho$  è la distanza tra il punto  $P(\xi, \eta, \zeta)$  in cui si calcola il potenziale  $\varphi$  ed il punto  $P_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  in cui è presente la sorgente di perturbazione d'intensità  $G$ . Notiamo che, mentre il potenziale è assegnato al tempo  $\tau$ , la sorgente è assegnata ad un tempo  $\tau_1 = \tau - \rho/c_{\infty}$  inferiore a  $\tau$  della quantità  $\rho/c_{\infty}$ , cioè del tempo necessario alla perturbazione per propagarsi dal punto  $P_1$  al punto  $P$  con velocità finita  $c_{\infty}$ . In questo schema ci sono due cause d'instazionarietà:

1. la sorgente  $G$  dipende esplicitamente dal tempo e quindi varia con esso;
2. la perturbazione si propaga con velocità finita dando un effetto di "ritardo di tempo".

Infine l'equazione (2.63) equivale a dire che la funzione di *Green* (la  $\delta$  sostituisce la  $G$  a secondo membro) per l'equazione delle onde è:

$$G_W = -\frac{1}{4\pi\rho} \delta(\tau_1 - \tau + \rho/c_{\infty}) \quad (2.64)$$

Per ottenere la soluzione dell'equazione (2.60) è necessario e sufficiente esprimere la (2.63) in funzione delle variabili originarie  $x, y, z$ , e  $t$ . Facendo riferimento agli argomenti dei fattori della (2.63) si deve considerare l'inversa della trasformazione:

$$\begin{aligned} x - x_1 &= \xi - \xi_1 + V_{\infty}(\tau - \tau_1) = \xi - \xi_1 + M_{\infty}\rho \\ y - y_1 &= \eta - \eta_1 \\ z - z_1 &= \zeta - \zeta_1 \\ t - t_1 &= \tau - \tau_1 = \rho/c_{\infty} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Se invertiamo la prima ed esprimiamo tutto in funzione di  $x - x_1, y - y_1, z - z_1$ , risulta:

$$\begin{aligned} \xi - \xi_1 &= \frac{1}{1 - M_{\infty}^2} (x - x_1 \pm M_{\infty}\hat{r}) \\ \eta - \eta_1 &= y - y_1 \\ \zeta - \zeta_1 &= z - z_1 \\ \tau - \tau_1 &= \frac{\rho}{c_{\infty}} = \frac{1}{c_{\infty}} \left| \frac{1}{1 - M_{\infty}^2} (\hat{r} \pm M_{\infty}(x - x_1)) \right| \end{aligned} \quad (2.66)$$

dove:

$$\hat{r} = \sqrt{(x - x_1)^2 + (1 - M_{\infty}^2) \left( (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \right)} \quad (2.67)$$

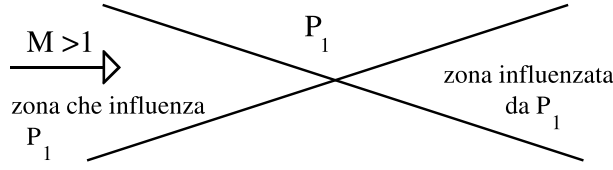
Il doppio segno che compare nelle (2.66) è da attribuirsi al fatto che la prima delle (2.65) ammette due soluzioni in funzione di  $x - x_1$ , mentre nell'ultima delle (2.66) si ha il modulo poiché è sempre  $\rho > 0$ . Per scegliere il segno corretto dovremo distinguere tra corrente subsonica e supersonica. Infine per completare la trasformazione ne scriviamo lo jacobiano e ne prendiamo il modulo. Per maggiore semplicità scriviamo lo jacobiano della (2.65), ovvero:

$$J = \frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}$$

Il suo reciproco è lo jacobiano della (2.66). A conti fatti risulta:

$$\|J\| = \frac{\rho}{\hat{r}} \quad (2.68)$$

Distinguiamo ora tra corrente subsonica e supersonica.

Figura 2.1: Zone di influenza del cono di *Mach*.

### 2.7.2 Corrente subsonica

Per  $M_\infty < 1$  si ha  $r_B = \hat{r}$  ed inoltre  $M(x - x_1) < r_B$ . Allora, eliminando il valore assoluto, la (2.66) si può riscrivere come:

$$\rho = \frac{1}{1 - M_\infty^2} (r_B \pm M_\infty (x - x_1)) \quad (2.69)$$

Sostituendo, l'ultima delle (2.66) è soddisfatta solo se utilizziamo il segno negativo nella (2.69). Con questi risultati la trasformazione inversa in caso subsonico diviene:

$$\begin{aligned} \xi - \xi_1 &= \frac{1}{1 - M_\infty^2} (x - x_1 - M_\infty r_B) \\ \eta - \eta_1 &= y - y_1 \\ \zeta - \zeta_1 &= z - z_1 \\ \tau - \tau_1 &= T = \frac{\rho}{c_\infty} = \frac{1}{c_\infty} \left| \frac{1}{1 - M_\infty^2} (r_B - M_\infty (x - x_1)) \right| \end{aligned} \quad (2.70)$$

In particolare notiamo che l'ultima ci dà il ritardo di tempo  $T$  nella propagazione del segnale che, come deve essere per  $M_\infty < 1$ , è unico. Applicando la trasformazione precedente all'equazione (2.63) otteniamo la soluzione nel riferimento  $x, y, z, t$ :

$$\varphi(x, y, z, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(x_1, y_1, z_1, t - T)}{r_B} dx_1 dy_1 dz_1 \quad (2.71)$$

dove  $T$  è il ritardo di tempo ed è definito dall'ultima delle (2.70). Infine l'equazione precedente mostra che la funzione di *Green* per il caso subsonico è:

$$G = -\frac{1}{4\pi r_B} \delta(t - t_1 + T) \quad (2.72)$$

### 2.7.3 Corrente supersonica

Seguiamo un procedimento analogo a quello del caso subsonico. Per  $M_\infty > 1$  si ha  $r_B = \hat{r}$  e dalla prima delle (2.65) risulta  $x - x_1 > 0$ , il che è consistente con la proprietà delle correnti supersoniche per cui un punto  $x_1$  può influenzare solo i punti  $x$  posti in una regione delimitata che si trova a valle del punto stesso e che verrà precisata più avanti. Inoltre, mentre per  $M_\infty < 1$  la distanza  $r_B$  (data dalla (2.67)) esiste, nel senso che l'argomento della radice quadrata è  $> 0$  per ogni punto  $P(x, y, z)$ , una volta assegnate le coordinate del punto  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  di perturbazione, per  $M_\infty > 1$  la distanza  $r_B$  esiste solo se:

$$(x - x_1)^2 \geq (M_\infty^2 - 1) \left( (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \right)$$

Questa è l'equazione di un cono, il cono di *Mach*, che è il luogo dei punti influenzati da  $P_1$ : più precisamente  $P_1$  influenza tutti e soli i punti a valle contenuti nel cono di *Mach*. A sua volta  $P_1$  è influenzato dai soli punti contenuti nel cono di *Mach* a monte, come rappresentato nella Figura 2.1. Essendo  $x - x_1 > 0$  risulta  $M_\infty (x - x_1) > r_B$ , ed allora l'ultima delle (2.66) si riscrive:

$$\rho = \frac{1}{M_\infty^2 - 1} (x - x_1 \pm M_\infty r_B) \quad (2.73)$$

Sostituendola nella prima delle (2.66), quest'ultima è soddisfatta per entrambi i segni. Ciò è possibile e ne vedremo in seguito i motivi. La trasformazione inversa supersonica è:

$$\begin{aligned}\xi - \xi_1 &= \frac{1}{M_\infty^2 - 1} (x - x_1 \pm M_\infty r_B) \\ \eta - \eta_1 &= y - y_1 \\ \zeta - \zeta_1 &= z - z_1 \\ \tau - \tau_1 &= T^\pm = \frac{\rho}{c_\infty} = \frac{1}{c_\infty} \frac{1}{M_\infty^2 - 1} (M_\infty (x - x_1) \pm r_B)\end{aligned}\quad (2.74)$$

Sostituendo la trasformazione nella (2.63) otteniamo la soluzione nel riferimento  $x, y, z, t$ .

$$\varphi(x, y, z, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(x_1, y_1, z_1, t - T^+) + Q(x_1, y_1, z_1, t - T^-)}{r_B} dx_1 dy_1 dz_1 \quad (2.75)$$

La (2.75) mostra che la funzione di *Green* per il caso supersonico è:

$$G = -\frac{1}{4\pi r_B} (\delta(t_1 - t + T^+) + \delta(t_1 - t + T^-)) \quad (2.76)$$

Notiamo che in entrambi i casi, dalle (2.71) e (2.75) o dalle (2.72) e (2.76) risulta che fondamentale per l'instazionarietà è il ritardo di tempo, oltre al fatto che le  $Q$  e le  $\delta$  dipendono esplicitamente dal tempo (più fisicamente possono essere pensate come variazione di condizioni al contorno).

Al fine di attribuire maggiore senso fisico ai ritardi di tempo, analizziamo un caso concreto. Sia  $P_1$  un punto che viaggia con velocità  $V_\infty$  e  $P$  un punto che viene raggiunto dai segnali emessi da  $P_1$ . Il tempo  $T$  che intercorre tra l'emissione e la ricezione del segnale è pari al rapporto tra la distanza che separa i due punti e la velocità del suono. Osserviamo che, nel frattempo, la distanza varia poiché  $P_1$  si muove rispetto a  $P$ . Allora, supponendo la  $V_\infty$  allineata come l'asse  $x$ , le coordinate dei punti sono:

$$\begin{aligned}P &= P(x, y, z) \\ P_1 &= P_1(x_1 + V_\infty T, y_1, z_1)\end{aligned}\quad (2.77)$$

Il ritardo di tempo  $T$  risulta dalla soluzione di:

$$T = \frac{\sqrt{(\Delta x - V_\infty T)^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{c_\infty} \quad (2.78)$$

Per brevità di scrittura abbiamo indicato con  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  rispettivamente  $x - x_1, y - y_1, z - z_1$ . Elevando al quadrato e sommando entrambi i membri si ottiene:

$$(c_\infty^2 - V_\infty^2) T^2 + 2V_\infty \Delta x T - R^2 \quad (2.79)$$

con:

$$R = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Distinguiamo ora tra i due casi  $M < 1$  e  $M > 1$ .

#### 1. $M < 1$

Nel caso di corrente subsonica,  $c_\infty > V_\infty$ , i coefficienti della (2.79) presentano una permanenza ed una variazione di segno. Le soluzioni, come risulta dalla teoria delle equazioni algebriche di secondo grado, sono una positiva ed una negativa. Quest'ultima è ovviamente da escludere poiché è priva di significato fisico. Allora risolvendo e considerando solo la soluzione positiva:

$$\begin{aligned}T &= \frac{-V_\infty \Delta x + \sqrt{V_\infty^2 \Delta x^2 + (c_\infty^2 - V_\infty^2) R^2}}{c_\infty^2 - V_\infty^2} \\ &= \frac{-M_\infty^2 \Delta x + \sqrt{\Delta x^2 - (M_\infty^2 - 1) (\Delta y^2 + \Delta z^2)}}{c_\infty (M_\infty^2 - 1)}\end{aligned}$$

Ricordando l'espressione di  $r_B$ , dalla soluzione scritta sopra ricaviamo esattamente:

$$T = \frac{1}{c_\infty} \frac{1}{M_\infty^2 - 1} (M_\infty (x - x_1) \pm r_B)$$

che è proprio l'ultima espressione delle (2.70) precedentemente ricavata. Notiamo che l'informazione sul numero di *Mach* asintotico della corrente è presente sia in  $r$  che nel ritardo di tempo  $T$ .

2.  $M > 1$

Riscriviamo la (2.79) con i segni invertiti:

$$(V_\infty^2 - c_\infty^2) T^2 - 2V_\infty \Delta x T + R^2 \quad (2.80)$$

In questo caso i segni dei coefficienti presentano due variazioni e quindi l'equazione ha due radici entrambe positive. Entrambe sono accettabili, come vedremo. Risolvendo l'equazione si ottiene:

$$\begin{aligned} T &= \frac{V_\infty \Delta x \pm \sqrt{V_\infty^2 \Delta x^2 - (V_\infty^2 - c_\infty^2) R^2}}{V_\infty^2 - c_\infty^2} \\ &= \frac{M_\infty \Delta x \pm \sqrt{\Delta x^2 - (M_\infty^2 - 1) (\Delta y^2 + \Delta z)^2}}{c_\infty (M_\infty^2 - 1)} \end{aligned}$$

Analogamente a prima, ricordando che la quantità sotto radice è  $r_B$ , i due ritardi di tempo sono:

$$T^\pm = \frac{1}{c_\infty} \frac{1}{M_\infty^2 - 1} (M_\infty (x - x_1) \pm r_B) \quad (2.81)$$

Giustificiamo ora il fatto che in regime supersonico vi sono due ritardi di tempo. Consideriamo la figura accanto: il punto  $A$  sta viaggiando con velocità superiore a quella del suono. Esso influenza il punto  $B$  (contenuto ovviamente nel cono di *Mach* di  $A$ ) due volte: la prima con l'onda emessa quando si trova in  $A'$  e la seconda con l'onda emessa quando si trova in  $A''$ . Ecco spiegato il motivo dei due ritardi di tempo.

Fatte queste premesse siamo pronti per ricavare la equazione di *Morino* per il potenziale nel caso instazionario. Ora che abbiamo a disposizione la funzione di *Green*, sia subsonica che supersonica, per l'equazione del potenziale, possiamo ricavare  $\varphi$  in ogni punto del dominio, in funzione di  $\varphi$  e di  $\partial\varphi/\partial n$  sul corpo e sulla scia, seguendo lo stesso metodo del caso stazionario. Perciò moltiplichiamo la (2.58) per la funzione di *Green*  $G$  e la (2.59) per il potenziale  $\varphi$ ; sottraiamo membro a membro le due equazioni, ed integriamo sul dominio. In questo caso il dominio d'integrazione comprende non solo lo spazio ma anche il tempo, poiché  $\varphi$  e  $G$  dipendono esplicitamente anche da esso. Il passo successivo consiste nel semplificare opportunamente gli integrali così da ridurli ad integrali da calcolarsi sulle superfici del corpo e della scia, invece che in tutto il dominio. Non saranno qui riportati, per semplicità, i passaggi intermedi (vedi per questo il riferimento (4)), ma solo le conclusioni. Notiamo, per inciso, che la funzione di *Green* contiene un termine dipendente dal tempo del tipo  $\delta(t_1 - t + T)$  il quale, considerando  $t_1$  variabile d'integrazione, fa sì che gli integrali spazio-temporali si trasformino in integrali spaziali calcolati per  $t_1 = t - T$ , ulteriore conferma della importanza del ritardo di tempo nel meccanismo d'instazionarietà. Ovvero considerando la generica funzione  $F$  abbiamo:

$$\int_\infty F \delta(t_1 - t + T) dV_1 dt = \int_\infty [F]^T dV_1$$

dove:

$$[F]^T = F(x_1, y_1, z_1, t_1 = t - T)$$

Per questa via si giunge ad un'espressione per  $\varphi$  instazionario (vedi le (2.38) e (??) del riferimento [2] valida in campo subsonico o supersonico e per ogni tipo di condizioni al contorno, cioè non solo quando la configurazione deformata differisce "di poco" da quella indeformata (come può essere ad esempio

per le pale di un rotore). Nel nostro caso di aerelasticità linearizzata le condizioni al contorno sono imposte da moti oscillatori della struttura, esponenzialmente smorzati o amplificati, di ampiezza piccola; in particolare se lo smorzamento è nullo il moto è armonico puro (ricordiamo che la condizione di flutter è una condizione armonica). Il metodo di *Morino* verrà specializzato proprio al caso armonico, ovvero verrà trattata la cosiddetta aerodinamica armonica nella quale il potenziale è funzione della frequenza immaginaria ridotta  $jk$ . Tuttavia, a differenza di altri metodi di aerodinamica armonica come la superficie portante o il profilo oscillante di Theodorsen o del Possio che valgono solo per valori di frequenza ridotta immaginari, il metodo di *Morino* è applicabile anche per frequenza ridotta complessa  $sl/V_\infty$  e quindi non solo per moti armonici puri ma anche per moti armonici smorzati o amplificati. Si consideri allora il caso armonico puro e si passi dal dominio del tempo a quello della frequenza. Si distingua inoltre tra corrente subsonica e supersonica.

#### 2.7.4 Metodo di *Morino*: caso subsonico

L'equazione per il potenziale  $\varphi$  è la seguente:

$$E4\pi\tilde{\varphi} = \iint_S \tilde{\varphi} \frac{\partial}{\partial n_1} \left( \frac{e^{-j\omega T}}{r_B} \right) dS_1 - \iint_S \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_1} \frac{e^{-j\omega T}}{r_B} dS_1$$

dove  $E$  è la solita funzione di dominio che vale 1 fuori dal corpo,  $1/2$  sulla superficie del corpo e della scia e 0 dentro il corpo. Il pedice 1 indica le variabili mute d'integrazione; la  $S$  comprende sia la superficie del corpo sia quella della scia. Il potenziale complesso  $\tilde{\varphi}$  è funzione sia delle tre coordinate spaziali  $(x, y, z)$  che della frequenza immaginaria  $j\omega$ . È possibile far comparire la frequenza ridotta  $jk = j\omega l/V_\infty$  adimensionalizzando le coordinate spaziali rispetto alla semicorda  $l = c/2$  e la scala temporale rispetto al tempo caratteristico  $l/V_\infty$ . Notiamo che la dipendenza dalla frequenza è nel termine nel quale compare anche il ritardo di tempo  $T$ . Separiamo ora i contributi del corpo e della scia. Per il corpo risulta semplicemente:

$$\iint_{S_B} \tilde{\varphi} \frac{\partial}{\partial n_1} \left( \frac{e^{-j\omega T}}{r_B} \right) dS_B - \iint_{S_B} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_1} \frac{e^{-j\omega T}}{r_B} dS_B \quad (2.82)$$

Le condizioni al contorno possono essere espresse con la (2.42). Il contributo della scia è invece più complesso poiché si deve rispettare la condizione di Kutta  $\Delta c_p = 0$  che lega il potenziale sulla scia a quello del bordo d'uscita. Notiamo che, come visto nel paragrafo sul caso stazionario (equazione (2.52)), il termine

$$\iint_{S_W} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_1} \frac{e^{-j\omega T}}{r_B} dS_W$$

si annulla, poiché i contributi della faccia superiore ed inferiore della scia sono opposti e quindi si elidono. Distinguendo tra faccia superiore ed inferiore (indicate rispettivamente con  $u$  ed  $l$ ), identiche a meno del verso opposto della normale, rimane allora:

$$\begin{aligned} \iint_{S_W} \tilde{\varphi} \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{e^{-j\omega T}}{r_B} dS_W &= \iint_{S_{Wu}} \tilde{\varphi}_u \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{e^{-j\omega T}}{r_B} dS_{Wu} - \iint_{S_{Wl}} \tilde{\varphi}_l \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{e^{-j\omega T}}{r_B} dS_{Wl} \\ &= \iint_{S_W} (\tilde{\varphi}_u - \tilde{\varphi}_l) \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{e^{-j\omega T}}{r_B} dS_W \\ &= \iint_{S_W} \Delta \tilde{\varphi} \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{e^{-j\omega T}}{r_B} dS_W \end{aligned}$$

Dobbiamo ora legare il potenziale  $\varphi$  sulla scia al suo valore sul bordo di uscita: applichiamo perciò la condizione  $\Delta c_p = 0$  sulla scia. Ricordando la (2.27), trasformandola nel dominio delle frequenze ed

uguagliandola a zero otteniamo:

$$\frac{\partial \Delta \tilde{\varphi}}{\partial x} + j \frac{\omega}{V_\infty} \Delta \tilde{\varphi} = 0$$

Risolvendo rispetto ad  $x$  si ha:

$$\Delta \tilde{\varphi} = C e^{-j \frac{\omega}{V_\infty} x}$$

Per determinare la costante  $C$  utilizziamo il fatto che al bordo d'uscita il  $\Delta \tilde{\varphi}$  della scia è pari al  $\Delta \tilde{\varphi}$  sul bordo di uscita (che a sua volta, ricordiamolo, uguaglia la circolazione istantanea). Quindi:

$$C = \Delta \tilde{\varphi}_{BU} e^{-j \frac{\omega}{V_\infty} x_{BU}}$$

e sostituendo il valore della costante otteniamo infine:

$$\Delta \tilde{\varphi} = \Delta \tilde{\varphi}_{BU} e^{-j \frac{\omega}{V_\infty} (x - x_{BU})} \quad (2.83)$$

L'operatore  $e^{-j \frac{\omega}{V_\infty} (x - x_{BU})}$  è un operatore di ritardo: la vorticosità è trasportata lungo la scia con velocità  $V_\infty$  e dipende direttamente da quella sul bordo d'uscita. Se teniamo conto di queste osservazioni la (2.81) diviene:

$$\begin{aligned} E4\pi\tilde{\varphi} = & \iint_{S_B} \tilde{\varphi} \frac{\partial}{\partial n_1} \left( \frac{e^{-j\omega T}}{r_B} \right) dS_B - \iint_{S_B} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_1} \frac{e^{-j\omega T}}{r_B} dS_B \\ & + \iint_{S_W} \Delta \tilde{\varphi}_{BU} e^{-j \frac{\omega}{V_\infty} (x - x_{BU})} \frac{\partial}{\partial n_1} \left( \frac{e^{-j\omega T}}{r_B} \right) dS_W \end{aligned} \quad (2.84)$$

Questa è l'equazione di *Morino* per il potenziale nel caso di oscillazioni armoniche di piccola ampiezza attorno ad una posizione di equilibrio. Se vogliamo trattare oscillazioni amplificate o smorzate possiamo semplicemente sostituire alla frequenza immaginaria  $j\omega$  quella complessa  $s$  (la cui parte reale è un termine di smorzamento). La risoluzione di quest'equazione si effettua per via numerica, in modo analogo a quanto visto nel paragrafo precedente. Ricordiamo che anche la scia deve essere divisa in pannelli: mentre nel caso stazionario la divisione è solo in apertura ora deve essere fatta anche in lunghezza (cfr. fine del paragrafo 2.6), a causa del termine di ritardo introdotto dall'equazione (2.83), com'è illustrato nella figura accanto ???. Un'osservazione va fatta riguardo alla superficie della scia che è a priori incognita: per ottenere la soluzione esatta bisogna accoppiare la (2.84) con l'equazione della scia, che dice che la velocità su di essa è tangente alla sua superficie. Questo approccio è numericamente possibile ma complesso. Da un punto di vista pratico si è visto che è possibile schematizzare la scia con una superficie parallela alla direzione della corrente asintotica, assunzione non esatta ma che garantisce comunque una buona approssimazione. Una volta discretizzato il dominio si deve discretizzare anche l'incognita; come in precedenza ciò si ottiene ad esempio assumendo  $\tilde{\varphi}$  e  $\partial \tilde{\varphi} / \partial n$  costanti su ogni pannello e pari al loro valore nel centro dello stesso, che è quindi il punto di collocazione. Svolgendo gli integrali si giunge ad un sistema di equazioni algebriche analogo al (2.55) del caso stazionario:

$$[Y] \{ \tilde{\varphi} \} = [Z] \left\{ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n} \right\}$$

Gli elementi delle matrici  $[Y]$  e  $[Z]$  sono gli stessi del caso stazionario, salvo per la presenza delle quantità

di ritardo  $e^{-j \frac{\omega}{V_\infty} (x - x_{BU})}$  ed  $e^{-j\omega T}$ . Ricordiamo che il ritardo di tempo  $T$  dipende dalle coordinate e



perciò varia da punto a punto del pannello; dunque quando si determinano i coefficienti d'influenza di un pannello sul centro di un altro (cioè gli elementi delle  $[Y]$  e  $[Z]$ ) si dovrebbe considerare  $T$  variabile con la coordinata del punto sul pannello "inducente". Vediamo che entra in gioco il termine  $e^{-j\omega T}$  che complica il calcolo degli integrali. Per semplicità si può assumere allora un ritardo di tempo medio pari a quello corrispondente alla distanza tra i centri dei due pannelli; l'approssimazione è ragionevole se la pannellatura è sufficientemente fitta e la frequenza  $\omega$  non è troppo elevata. Per frequenze ridotte elevate è necessario abbandonare sia l'ipotesi di ritardo di tempo medio, sia quella di  $\tilde{\varphi}$  e  $\partial\tilde{\varphi}/\partial n$  costanti sul pannello.

### 2.7.5 Tipi di geometrie a cui è applicabile il metodo di *Morino*

Esso è valido per ogni tipo di geometria, salvo il caso di corpi di spessore nullo, come ad esempio le superfici portanti. Infatti se lo spessore tende a zero il termine

$$\iint_{S_W} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_1} \frac{e^{-j\omega T}}{r_B} dS_W$$

che contiene le condizioni al contorno, si annulla e l'equazione integrale per  $\tilde{\varphi}$  diviene singolare. Per ovviare a questo inconveniente è possibile, nel caso si voglia utilizzare lo schema di superficie portante, considerare uno spessore fittizio anche estremamente sottile (dell'ordine di  $1/1000$  delle dimensioni caratteristiche del problema): gli errori numerici non sono apprezzabili rispetto alla formulazione con superficie portante. Inoltre è possibile ottenere, come vedremo, la superficie portante come limite del metodo di *Morino* al tendere a zero dello spessore.

### 2.7.6 Metodo di *Morino*: caso supersonico

L'equazione per il potenziale è simile alla (2.81), salvo per la presenza di due ritardi di tempo e la diversa definizione di  $r$ :

$$E4\pi\tilde{\varphi} = \iint_S \tilde{\varphi} \frac{\partial}{\partial n_1} \left( \frac{e^{-j\omega T^+} + e^{-j\omega T^-}}{r_B} \right) dS_1 - \iint_S \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_1} \frac{e^{-j\omega T^+} + e^{-j\omega T^-}}{r_B} dS_1 \quad (2.85)$$

Ricordando l'espressione (2.81) del ritardo di tempo:

$$T^\pm = \frac{1}{c_\infty} \frac{1}{M_\infty^2 - 1} (M_\infty (x - x_1) \pm r_B)$$

possiamo scrivere:

$$e^{-j\omega T^+} + e^{-j\omega T^-} = 2e^{-j \frac{\omega M_\infty}{c_\infty (M_\infty^2 - 1)} (x - x_1)} \cos \left( \frac{\omega r_B}{c_\infty (M_\infty^2 - 1)} \right)$$

Allora la (2.84) diventa:

$$E4\pi\tilde{\varphi} = \iint_S \tilde{\varphi} \frac{\partial}{\partial n_1} \left( \frac{2e^{-j \frac{\omega M_\infty}{c_\infty (M_\infty^2 - 1)} (x - x_1)} \cos \left( \frac{\omega r_B}{c_\infty (M_\infty^2 - 1)} \right)}{r_B} \right) dS_1 - \iint_S \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_1} \frac{2e^{-j \frac{\omega M_\infty}{c_\infty (M_\infty^2 - 1)} (x - x_1)} \cos \left( \frac{\omega r_B}{c_\infty (M_\infty^2 - 1)} \right)}{r_B} dS_1$$

Ricordiamo che  $r_B$  non è definito per ogni valore delle variabili ma esiste solo per

$$x - x_1 \geq \sqrt{(M_\infty^2 - 1) \left( (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \right)}$$

a causa di ciò gli integrali non sono di semplice valutazione e ne va considerato il valore principale secondo *Hadamard*. Per la risoluzione numerica si procede in modo analogo a prima: si divide la superficie in pannelli e si discretizza l'incognita. Non è possibile impiegare pannelli piani poiché le fessure creano delle perturbazioni fasulle, e non si può neppure ritenere il potenziale costante su ognuno di essi. È invece necessario mantenere la continuità della geometria e del potenziale, impiegando per esempio pannelli iperbolicoidali, ed almeno uno sviluppo del primo ordine (tale che il potenziale varî linearmente sul pannello). Inoltre esiste il problema dei coni d'influenza tra pannello e pannello, come si può dedurre dalla figura. Consideriamo ad esempio il punto  $A$ : esso è influenzato dai soli punti contenuti nel cono avente per vertice  $A$  ed esteso a monte. Allora non tutti i punti del pannello 1 influenzano  $A$ , mentre tutti i punti di 2 lo fanno.  $A$ , a sua volta, influenza solo parzialmente il pannello 3. Si comprende quindi come la risoluzione numerica sia complicata dal gioco delle rispettive zone d'influenza.

Vi è inoltre un altro problema che rende complesso il campo supersonico: il metodo di *Morino* richiede la modellazione della scia per ottenere portanza dall'imposizione della condizione di *Kutta*. La scia rappresenta una superficie di discontinuità; tuttavia, come vedremo di seguito, in una certa condizione intradosso ed estradosso fanno storia a sé, perché i due campi di velocità sono indipendenti. Ciò non toglie che la scia debba essere scarica, e quindi è possibile che la pressione, che immediatamente prima del bordo d'uscita può avere valori diversi sopra e sotto il profilo, debba diventare di colpo uguale immediatamente dopo il bordo d'uscita. Questo salto di pressione si ottiene nella realtà con un'onda d'urto, che a noi non interessa, perché l'unico contributo che dà è di resistenza e per l'analisi aeroelastica linearizzata è trascurabile. Il problema si pone quando questa condizione interessa un'altra parte di velivolo che si trovi entro il cono di *Mach* del punto in cui si ha il salto di pressione. Iniziamo con il caso dei bordi d'attacco.

Nei disegni  $\lambda$  è l'angolo di freccia,  $\beta$  quello di *Mach* che individua il rispettivo cono, legato al numero di *Mach* dalla relazione

$$\beta = \operatorname{atan} \left( \frac{1}{M} \right)$$

ed  $\alpha$  è il complementare di  $\lambda$ , quindi:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \lambda$$

Se il cono di *Mach*  $\beta$  è più inclinato del bordo d'attacco, i punti del bordo sono fuori dal cono ed esso è "supersonico"; questa condizione è individuata dal fatto che la componente della  $V_\infty$  normale al bordo d'attacco è supersonica. Se il cono di *Mach* è meno inclinato del bordo d'attacco, alcuni punti del bordo sono influenzati da altri interni al cono ed esso è "subsonico"; questa condizione è individuata dal fatto che la componente della  $V_\infty$  normale al bordo d'attacco è subsonica. Risulta che, per essere nel caso di  $\beta > \alpha$  (bordo d'attacco "subsonico"), dobbiamo avere un numero di *Mach* inferiore a:

$$M < \frac{1}{\tan \left( \frac{\pi}{2} - \lambda \right)^2} \frac{\pi}{2} - \lambda = \operatorname{atan} \left( \frac{1}{M} \right)$$

e, essendo

$$\frac{\pi}{2} - \lambda = \operatorname{atan} \left( \frac{1}{M} \right)$$

si ottiene

$$M < \frac{1}{\tan(\pi + \lambda)}$$

Se il punto  $P$  è posto sul dorso ed il bordo d'attacco è supersonico esso può influenzare solo i punti del dorso; viceversa se  $P$  è sul ventre può influenzare solo i punti sul ventre. Quindi se un'ala ha il bordo d'attacco supersonico il dorso ed il ventre sono completamente indipendenti, e la distribuzione di pressione su una faccia può essere calcolata senza alcun riferimento all'altra. Nel caso di bordo d'attacco subsonico invece il dorso ed il ventre si influenzano reciprocamente. Vediamo ora il bordo d'uscita.

Analogamente a prima il bordo d'uscita è supersonico se la componente della  $V_\infty$  normale al bordo è supersonica; è subsonico se la componente normale della  $V_\infty$  è subsonica. Nel caso di bordo supersonico  $P$  è influenzato dai punti appartenenti al cono  $\beta$  e quindi solamente dai punti appartenenti all'ala. Allora non esiste alcun meccanismo che “avverta” la corrente della fine dell'ala, cioè del bordo d'uscita: la condizione di *Kutta*, perciò, non può essere imposta. Esiste una superficie di discontinuità per la velocità dietro il bordo di uscita, tuttavia essa non può essere considerata come una “classica” scia di *Prandtl* poiché, per le ragioni appena viste, non induce sull'ala come in caso subsonico. Nel caso di bordo subsonico,  $P$  è influenzato dai punti appartenenti al cono  $\beta$  e quindi sia da punti appartenenti all'ala, sia da punti appartenenti alla corrente posteriore all'ala stessa. In questo caso esiste un meccanismo che “avverte” il fluido della fine dell'ala: la condizione di *Kutta* deve essere imposta e si ha quindi la presenza di una scia “classica” nelle zone di bordo d'uscita subsonico.

### 2.7.7 La superficie portante con il metodo di *Morino*

La formulazione a superficie portante può essere genericamente scritta nella forma:

$$\frac{\tilde{w}(x, y, k)}{V_\infty} = \iint_S K(x - \xi, y - \eta, k, M) \Delta \tilde{c}_p(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.86)$$

dove  $K$  si può fisicamente interpretare come il “downwash” adimensionale  $\tilde{w}/V_\infty$  nel punto  $(x, y)$  dovuto ad un  $\Delta \tilde{c}_p$  unitario nel punto  $(\xi, \eta)$ . Il dominio d'integrazione è limitato alla superficie alare poiché il coefficiente di pressione è nullo al di fuori dell'ala e la presenza della scia è inserita nella espressione della  $K$ . L'equazione 2.86 è valida nel caso generale di corrente instazionaria comprimibile, dipendendo i vari termini dalla frequenza ridotta  $k$  e dal numero di *Mach*. È possibile ricavare l'equazione 2.86 come caso particolare del metodo di *Morino* al tendere a zero dello spessore dell'ala. Se consideriamo la (2.81) e facciamo tendere lo spessore a zero i termini contenenti le condizioni al contorno si elidono in maniera del tutto analoga a quanto visto per la (2.82), ed essa si riduce alla:

$$E4\pi\tilde{\varphi} = \iint_S \Delta\tilde{\varphi} \frac{\partial}{\partial n_1} \left( \frac{e^{-j\omega T}}{r_B} \right) dS \quad (2.87)$$

Assumendo che la superficie  $S$  sia contenuta nel piano  $Z_1 = 0$ , l'equazione 2.87 si può riscrivere come:

$$E4\pi\tilde{\varphi} = - \iint_S \Delta\tilde{\varphi} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{-j\omega T}}{r_B} \right) dx_1 dy_1 \quad (2.88)$$

poiché la normale  $n$  è diretta come  $z$ , ed inoltre

$$\frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{e^{-j\omega T}}{r_B} \right) = - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{-j\omega T}}{r_B} \right)$$

Notando che  $\Delta\varphi$  è nullo al di fuori di  $S$  possiamo sostituire ad  $S$  tutto il piano come dominio d'integrazione. Inoltre, se deriviamo entrambi i membri rispetto a  $z$ , possiamo scrivere:

$$E4\pi \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} = - \iint_{\infty} \Delta\tilde{\varphi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{e^{-j\omega T}}{r_B} \right) dx_1 dy_1 \quad (2.89)$$

Questa, al tendere di  $z$  a zero, è una relazione tra il downwash  $\partial\tilde{\varphi}/\partial z$  e  $\Delta\tilde{\varphi}$ . Per ottenere la formulazione della superficie portante dobbiamo esprimere  $\Delta\tilde{\varphi}$  in funzione di  $\Delta\tilde{c}_p$ . Allora ricordando l'espressione del  $c_p$  (2.27) e trasformandola nel dominio delle frequenze possiamo scrivere:

$$\Delta\tilde{p} = -\rho_\infty V_\infty \left( j\omega \Delta\tilde{\varphi} + V_\infty \frac{\partial \Delta\tilde{\varphi}}{\partial x} \right) \quad (2.90)$$

che a sua volta può essere riscritta come:

$$\Delta\tilde{p} = -\rho_\infty V_\infty^2 e^{-j\frac{\omega}{V_\infty}x} \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{j\frac{\omega}{V_\infty}x} \Delta\tilde{\varphi} \right) \quad (2.91)$$

Integrandola lungo  $x$  da  $-V_\infty$  a  $x$  con la condizione  $\Delta\tilde{\varphi} = 0$  per  $x = -V_\infty$  otteniamo:

$$\Delta\tilde{\varphi} = -\frac{1}{\rho_\infty V_\infty^2} e^{-j\frac{\omega}{V_\infty}x} \int_{-\infty}^x e^{-j\frac{\omega}{V_\infty}\lambda_2} \Delta\tilde{p}(\lambda_2, y) d\lambda_2 \quad (2.92)$$

In questo modo abbiamo espresso il  $\Delta\tilde{\varphi}$  in funzione della differenza di pressione tra le due facce. Combinando l'ultima equazione con la 2.89 otteniamo:

$$E4\pi \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial z} = \frac{1}{\rho_\infty V_\infty^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{x_1} e^{-j\frac{\omega}{V_\infty}\lambda_2} \Delta\tilde{p}(\lambda_2, y_1) d\lambda_2 \right) e^{-j\frac{\omega}{V_\infty}x_1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{e^{-j\omega T}}{r_B} \right) dx_1 dy_1 \quad (2.93)$$

ed integrando per parti:

$$E4\pi \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial z} = \frac{1}{\rho_\infty V_\infty^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Delta\tilde{p}(x_1, y_1) K_z(x_1 - x, y_1 - y, k, M) dx_1 dy_1 \quad (2.94)$$

con:

$$K_z = e^{-j\frac{\omega}{V_\infty}x_1} \int_{x_1}^{\infty} e^{-j\frac{\omega}{V_\infty}\lambda_1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (e^{-j\omega T}) d\lambda_1$$

Facciamo tendere  $z$  a zero e l'equazione 2.94 si riduce alla:

$$2\pi \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial z} = \frac{1}{\rho_\infty V_\infty^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Delta\tilde{p}(x_1, y_1) K(x_1 - x, y_1 - y, k, M) dx_1 dy_1 \quad (2.95)$$

dove  $K$  è il limite per  $z$  che tende a zero della  $K_z$ .

## Capitolo 3

# Approssimazione quasi-stazionaria

### 3.1 Introduzione

Nei precedenti capitoli sono stati trattati alcuni problemi aeroelastici che possono venire definiti problemi di aeroelasticità statica. È stata esaminata la configurazione di equilibrio assunta dalla struttura a transitorio esaurito (problemi di risposta statica) ed è stata discussa la stabilità dell'equilibrio stesso (problemi di divergenza). Sono stati inoltre trattati i problemi relativi ad alcune manovre tipiche, rollio e richiamata, che grazie alle ipotesi assunte è stato possibile trattare “staticamente”. Nel concreto, i problemi sono stati affrontati utilizzando schemi strutturali ed aerodinamici molto semplici, come lo schema a trave e la teoria delle strisce. Indipendentemente dai modelli adottati vanno messi in evidenza due punti fondamentali:

1. l'aerodinamica è stata sempre considerata stazionaria, ovvero le forze aerodinamiche sono state considerate dipendenti istantaneamente dalle condizioni al contorno, senza introdurre alcuna dipendenza dalla storia precedente del moto della struttura. Si veda ad esempio, nella manovra di rollio, le forze originate dalla deflessione dell'alettone, che dipendono dal valore di  $\beta$  e non dalla storia temporale  $\beta(t)$ ;
2. non compaiono mai le forze di inerzia relative al moto di deformazione della struttura. Le uniche forze d'inerzia considerate sono quelle dovute ai moti rigidi del velivolo, durante le manovre.

Queste semplificazioni sono naturalmente accettabili quando viene esaminato l'equilibrio aeroelastico a transitorio esaurito e la sua stabilità statica. In tale caso, si considera che la struttura abbia raggiunto la condizione di equilibrio (incognita) e che quindi non vi siano né forze di inerzia né modificazioni delle condizioni al contorno dell'aerodinamica. Tuttavia le stesse ipotesi semplificative sono state utilizzate per trattare problemi di manovra, ovvero problemi dinamici, dove le forze applicate possono variare nel tempo e dove la struttura reagisce dinamicamente, mettendo in gioco delle forze d'inerzia, ed infine dove le condizioni al contorno dell'aerodinamica si modificano nel tempo. L'adozione, per lo studio di questi fenomeni, di ipotesi identiche o simili a quelle introdotte per lo studio di problemi propriamente statici necessita di una giustificazione teorica e conduce al concetto di aeroelasticità statica generalizzata.

### 3.2 Generica equazione aeroelastica

L'intero sistema aeroelastico può essere schematizzato con il seguente schema a blocchi: dove:

Schema a blocchi

|                      |  |
|----------------------|--|
| $\{q(t)\}$           | coordinate libere generalizzate  |
| $\{\delta_c(t)\}$    | spostamento delle superfici di comando   |
| $\{Q_{am}(t)\}$      | forze aerodinamiche dovute al movimento strutturale                              |
| $\{Q_{a\delta}(t)\}$ | forze aerodinamiche generalizzate dovute al movimento delle superfici di comando |
| $\{Q_{est}(t)\}$     | forzanti esterne   |

Per semplicità si sono ignorate le variazioni di condizioni al contorno dell'aerodinamica dovute a forzanti esterne (raffica) e l'eventuale presenza di un ramo di controllo fra il movimento della struttura e lo spostamento dei comandi. Considerando separatamente il blocco strutturale, il legame tra le forzanti generalizzate  $\{\tilde{Q}(t)\}$  e il movimento strutturale, descritto dalle  $\{q(t)\}$ , conduce, indipendentemente dallo schema strutturale adottato, ad un sistema di equazioni differenziali del tipo:

$$[M] \{\ddot{q}(t)\} + [C] \{\dot{q}(t)\} + [K] \{q(t)\} = \{\tilde{Q}(t)\}$$

dove:

|                       |                                    |
|-----------------------|------------------------------------|
| $[M] \{\ddot{q}(t)\}$ | forze d'inerzia generalizzate      |
| $[C] \{\dot{q}(t)\}$  | forze di smorzamento generalizzate |
| $[K] \{q(t)\}$        | forze elastiche generalizzate      |

Passando dal dominio del tempo al dominio di *Laplace*, l'equazione precedente può essere riscritta nel seguente modo:

$$(s^2 [M] + s [C] + [K]) \{q(s)\} = \{\tilde{Q}(s)\}$$

Il blocco aerodinamico, oltre a tradurre le leggi del comando  $\delta_c(t)$  in forze aerodinamiche  $\{Q_{a\delta}(t)\}$ , funge da blocco di retroazione per il sistema, in quanto parte delle forze aerodinamiche dipende dal movimento della struttura. In generale le forze aerodinamiche dipendenti dal movimento della struttura,  $\{Q_{am}(t)\}$ , possono essere espresse nel dominio di *Laplace* attraverso una funzione di trasferimento aerodinamica,  $[H_{am}(s, M)]$ , dipendente anche dal numero di *Mach*  $M$ , ottenendo:

$$\{Q(s)\} = q [H_{am}(s, M)] \{q(s)\}$$

dove  $q$  è la pressione dinamica di volo. L'insieme delle forzanti  $\{\tilde{Q}(s)\}$  agenti sul blocco strutturale può essere quindi scomposto in:

$$\{\tilde{Q}(s)\} = q [H_{am}(s, M)] \{q(s)\} + \{Q(s)\}$$

dove le  $\{Q(s)\}$  comprendono le forzanti esterne e le forzanti dovute al comando. La generica equazione aeroelastica, nel dominio di *Laplace*, assume dunque la forma:

$$(s^2 [M] + s [C] + [K] - [H_{am}(s, M)]) \{q(s)\} = \{Q(s)\}$$

che scritta in questo modo rappresenta un generico problema di risposta del sistema alle forzanti imposte.

### 3.3 Risposta statica di un oscillatore armonico

Per poter introdurre le semplificazioni che consentiranno di approssimare staticamente un fenomeno di risposta dinamica, è utile premettere un esempio che mostri come e sotto quali ipotesi sia possibile approssimare in maniera statica la risposta di un tipico sistema dinamico, quale l'oscillatore armonico. L'equazione nel dominio di *Fourier* che governa la dinamica dell'oscillatore sarà:

$$(-\omega^2 + j\omega 2\xi\omega_0 + \omega_0^2) q(\omega) = \frac{F(\omega)}{m}$$

\*

Figura 3.1: Risposta in frequenza

\*

Figura 3.2: Spettro ingresso

Nell'esame di un problema di risposta lo studio dell'equazione nel dominio di *Laplace* e nel dominio di *Fourier*, che si ottiene ponendo  $s = j\omega$ , sono assolutamente equivalenti. Si supponga che il contenuto in frequenza della forzante  $F(\omega)$  sia limitato, ovvero che esista una  $\omega_{max}$ , tale che  $F(\omega) \cong 0$  per  $\omega > \omega_{max}$ . Fisicamente questo significa porre un limite alla rapidità di variazione nel tempo della forzante, ovvero affermare che la forzante stessa è "lenta" rispetto ad un certo livello di frequenze. Il movimento  $q(\omega)$  ha espressione:

$$\begin{aligned} q(\omega) &= \frac{F(\omega)/m}{-\omega^2 + j\omega 2\xi\omega_0 + \omega_0^2} \\ &= \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + j2\xi(\omega/\omega_0)} \frac{F(\omega)}{m\omega_0^2} \end{aligned}$$

Per  $\omega > \omega_{max}$  la forzante  $F$  è trascurabile, e quindi  $q(\omega) \cong 0$ . Nel caso in cui  $\omega_{max} \ll \omega_0$ , si può affermare che, per tutte le  $\omega$  dove  $F(\omega) \neq 0$ ,  $\omega/\omega_0 \ll 1$ , per cui la dinamica della risposta degenera nella funzione unitaria, corrispondente alla trasmissione diretta:

$$q(\omega) = \frac{F(\omega)}{m\omega_0^2} = \frac{F(\omega)}{k}$$

La risposta è quindi statica, poiché  $F(\omega)/k$  è il valore che assume lo spostamento nel caso di carico applicato staticamente. Inoltre, antitrasformando nel tempo:

$$q(t) = \frac{F(t)}{k}$$

ovvero la risposta è immediata. Dal valore di  $\omega_0$  dipende la larghezza di banda della funzione di trasferimento; per un sistema del secondo ordine è descritta qualitativamente in figura 3.1. Dal valore di  $\omega_{max}$  dipende la larghezza di banda del segnale di ingresso  $F(\omega)$ , descritto in figura 3.2. La possibilità di applicare l'approssimazione precedente si basa dunque sul confronto fra le larghezze di banda del segnale in ingresso e della funzione di trasferimento.

### 3.4 Approssimazione stazionaria

Nei precedenti capitoli si è adottata, per l'aerodinamica, l'ipotesi di comportamento assolutamente stazionario. Questo comporta due caratteristiche fondamentali nel modello aerodinamico:

1. il sottosistema aerodinamico è sensibile solo ai  $\{q(t)\}$  e non alle loro derivate  $\{\dot{q}(t)\}$ ;
2. la risposta è statica e immediata, ovvero l'aerodinamica si adegua istantaneamente alle condizioni al contorno.

In ambito dinamico entrambe le affermazioni sono false. L'aerodinamica è instazionaria; tuttavia, sotto determinate ipotesi, la seconda affermazione può essere considerata un'accettabile approssimazione. Il fatto che l'aerodinamica non risponda istantaneamente alla variazione delle condizioni al contorno può essere vista sperimentalmente. Si consideri un profilo in galleria del vento, investito da una corrente di velocità  $V_\infty$ , cui viene data una variazione istantanea di incidenza a partire dall'incidenza di portanza nulla. Il sistema aerodinamico è sottoposto in questo caso ad una variazione a scalino della variabile d'ingresso  $\Delta\alpha$ . Se la portanza del profilo viene rilevata sperimentalmente nel tempo, il suo andamento non sarà quello di uno scalino. In figura 3.3 viene riportato l'andamento qualitativo della portanza; ciò

\*

Figura 3.3: Risposta indiciale nel tempo

che conta è che esiste un ritardo  $\bar{t}$  fra la variazione di incidenza e lo stabilizzarsi di  $\Delta P$  su valori prossimi al suo valore asintotico. Esiste dunque una dinamica dell'aerodinamica, ovvero, in termini analitici, l'aerodinamica non è un sistema di ordine zero, ma almeno del primo ordine. Con riferimento agli schemi strutturali adottati in precedenza, nel dominio delle frequenze, l'aerodinamica può essere rappresentata da un blocco  $H(s)$  avente in ingresso i parametri di movimento strutturale:  $h$  (traslazione verticale) e  $\vartheta$  (rotazione attorno all'asse elastico) ed in uscita le forze aerodinamiche  $\Delta P$  e  $\Delta M$ , per cui  $H(s)$  è in realtà una matrice di trasferimento. In termini analitici si ha:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P(s) \\ \Delta M(s) \end{Bmatrix} = q[H(s)] \begin{Bmatrix} h(s) \\ \vartheta(s) \end{Bmatrix}$$

che, nel dominio del tempo, può essere riscritta nel seguente modo:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P(t) \\ \Delta M(t) \end{Bmatrix} = q \int_0^\infty [h(t-\tau)] \begin{Bmatrix} h(\tau) \\ \vartheta(\tau) \end{Bmatrix} d\tau$$

dove l'integrale di convoluzione indica che il valore di  $\Delta P$  e  $\Delta M$  al variare del tempo  $t$  non dipende solo dal valore assunto al tempo  $t$  stesso da  $h$  e  $\vartheta$ , ma anche dalla storia precedente. Ritenere l'aerodinamica stazionaria implica quindi approssimare la funzione di trasferimento con il suo valore a frequenza nulla  $H(s) \cong H(0)$  e quindi  $h(t) \cong H(0)\delta t$ . Questa approssimazione è applicabile solo in base ad un confronto fra le larghezze di banda degli ingressi, che nel caso in esame sono  $h(j\omega)$  e  $\vartheta(j\omega)$ , e quella della funzione di trasferimento  $[H(j\omega)]$ . Nel caso in cui il contenuto in frequenza degli ingressi è sufficientemente limitato rispetto alla larghezza di banda degli elementi di  $[H(j\omega)]$ , allora un'approssimazione di questo tipo è accettabile. Si tenga conto, tuttavia, la prima ipotesi alla base del modello stazionario, ovvero la non sensibilità dell'aerodinamica alla derivate dello spostamento. In un generico problema dinamico le condizioni al contorno dell'aerodinamica saranno date anche dalle derivate dello spostamento, in quanto queste comportano una velocità relativa fra struttura e flusso che si traduce in una variazione di incidenza, definibile come incidenza cinematica. La funzione di trasferimento aerodinamica può essere pensata costituita da un termine dipendente dalla geometria e da un termine dipendente dal movimento della struttura. Nel dominio del tempo si ha:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P(t) \\ \Delta M(t) \end{Bmatrix} = q \int_0^\infty [h_g(t-\tau)] \begin{Bmatrix} h(\tau) \\ \vartheta(\tau) \end{Bmatrix} d\tau + q \int_0^\infty [h_c(t-\tau)] \frac{1}{V_\infty} \begin{Bmatrix} \dot{h}(\tau) \\ \dot{\vartheta}(\tau) \end{Bmatrix} d\tau$$

per entrambe le funzioni è possibile introdurre l'approssimazione stazionaria, ottenendo:

$$\begin{aligned} [h_g(t-\tau)] &= [H_g(0)] \delta(t) \\ [h_c(t-\tau)] &= [H_c(0)] \delta(t) \end{aligned}$$

La stessa equazione nel dominio di Laplace sarà:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P(s) \\ \Delta M(s) \end{Bmatrix} = q[H_{ag}(0)] \begin{Bmatrix} h(s) \\ \vartheta(s) \end{Bmatrix} + q \frac{s}{V_\infty} [H_{ac}(0)] \begin{Bmatrix} h(s) \\ \vartheta(s) \end{Bmatrix}$$

### 3.5 Concetto di frequenza ridotta

Si è stabilito che è possibile utilizzare l'approssimazione stazionaria se il moto strutturale e il moto delle superfici di controllo, che rappresentano gli ingressi della funzione di trasferimento aerodinamica, sono sufficientemente lenti rispetto alla dinamica dell'aerodinamica. Andrebbe allora eseguito un confronto fra la larghezza di banda dei segnali di ingresso e della funzione di trasferimento. Si pone il problema che il moto strutturale non rappresenta un vero e proprio ingresso esterno al sistema aeroelastico, in quanto l'aerodinamica rappresenta il ramo di retroazione del sistema ed il contenuto in frequenza del



\*

Figura 3.4: Moto del velivolo

moto strutturale è influenzato dall'aerodinamica stessa. Occorre, allora, un criterio semplice per poter stabilire se l'ipotesi è rispettata. Il metodo più intuitivo è un confronto fra i tempi tipici dei due fenomeni: il moto strutturale e l'interazione fluido-profilo che crea le forze aerodinamiche. Si supponga che il moto strutturale sia armonico di frequenza  $\omega$ , per cui il periodo è dato da:

$$T_m = \frac{2\pi}{\omega}$$

in questo tempo la struttura compie un'oscillazione completa. D'altra parte una particella di fluido interagisce con il profilo per un tempo:

$$T_a = \frac{c}{V_\infty}$$

Se  $T_a \ll T_m$  si può ritenere che le particelle che scorrono sul profilo lo percorrano senza avvertire una apprezzabile variazione di configurazione. In questo caso, perciò, i fenomeni aerodinamici risultano molto più veloci del moto strutturale e l'approssimazione stazionaria è applicabile. Come parametro indice del rapporto fra i tempi dei due fenomeni viene utilizzato il numero adimensionale  $k$ , definito come:

$$k = 2\pi \frac{T_a}{T_m} = \frac{\omega c}{V_\infty}$$

che viene detto frequenza ridotta. Per  $k \ll 1$  l'approssimazione stazionaria è applicabile. Quantitativamente si può affermare che l'approssimazione è valida per  $k < 0.1$ . A questo limite è possibile dare una interpretazione più "visiva" pensando ad un punto dell'ala, che si muove a velocità  $V_\infty$ , e contemporaneamente oscilla con periodo  $T_m = 2\pi/\omega$ ; il punto descriverà una sinusoide di lunghezza d'onda  $\lambda$ , tale che  $\lambda f = V_\infty$ , come riportato nella figura 3.4. Poiché si ha:

$$f = \frac{1}{T_m} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{e} \quad \omega = k \frac{V_\infty}{c}$$

ne segue che:

$$\lambda \frac{\omega}{2\pi} = \lambda k \frac{V_\infty}{2\pi c} = V_\infty \quad \text{quindi} \quad \lambda = \frac{2\pi c}{k}$$

per cui, per  $k = 0.1$ , si ricava  $\lambda \cong 62c$ . Si può pertanto affermare che l'approssimazione stazionaria è applicabile se il moto strutturale compie un ciclo completo nello spazio di almeno 70 corde. Si noti che l'approssimazione è tanto più applicabile quanto maggiore risulta la velocità. È dunque essenziale stabilire attorno a quali valori di frequenza ridotta avviene il moto strutturale per poter decidere l'applicabilità o meno di un'approssimazione di questo tipo. Nei problemi di stabilità questo avviene a posteriori, ossia si applica l'approssimazione, si calcolano le frequenze di flutter e si verifica se l'approssimazione è giustificata. Nei problemi di risposta la guida è rappresentata dal contenuto in frequenza della forzante.

### 3.6 Approssimazione quasi-stazionaria

I metodi di calcolo aerodinamico, con modelli che tengono conto dell'instazionarietà, forniscono in genere due tipi di funzioni di trasferimento, l'una correlata al movimento, l'altra alla raffica<sup>1</sup>:

$$\left[ H_{am} \left( \frac{sc}{V_\infty}, M \right) \right] \quad \text{e} \quad \left[ H_{ag} \left( \frac{sc}{V_\infty}, M \right) \right]$$

<sup>1</sup>Questa distinzione non deve portare a credere che la dinamica dell'aerodinamica legata al movimento della struttura e quella legata alla raffica siano distinte e separabili. Il sistema dinamico che le caratterizza è lo stesso, come discusso ad esempio in [4]. Dal punto di vista sistemistico, le due funzioni di trasferimento hanno i poli in comune ed eventualmente zeri diversi.

dove  $sc/V_\infty = p$  è la frequenza complessa ridotta. La forma in cui nella pratica le due matrici funzione di trasferimento sono note è però lontana dalla loro espressione teorica. In primo luogo sia il metodo di *Morino* che i metodi a superficie portante permettono di calcolare i carichi aerodinamici relativi ad oscillazioni armoniche delle condizioni al contorno. La conoscenza delle matrici funzione di trasferimento è limitata quindi al dominio di *Fourier*<sup>2</sup>. Quindi le due matrici precedenti saranno funzione della frequenza ridotta  $k = \omega c/V_\infty$ :

$$[H_{am}(k, M)] \quad \text{e} \quad [H_{ag}(k, M)]$$

Questo non porrebbe problemi se i termini delle matrici fossero noti in forma analitica, come funzioni continue di  $k$ . In questo caso basterebbe sostituire  $j\omega$  con  $s$  (oppure  $k$  con  $-jp$ ) per ottenere le matrici funzione di trasferimento nel dominio di *Laplace*. Il calcolo dei termini per un generico valore di  $k$  spesso è invece impossibile. Da qualunque modello aerodinamico siano calcolati i termini di  $[H_{am}(k, M)]$  o di  $[H_{ag}(k, M)]$  si deve fissare  $k$ . È possibile allora conoscere le matrici in forma tabulata per diversi valori della frequenza ridotta  $k$ . Per trattare la dipendenza da  $k$  delle due matrici funzione di trasferimento si supponrà fissata la condizione di volo (quindi il numero di *Mach*  $M$ ). Le forze aerodinamiche generalizzate sono:

$$\{Q(\omega)\} = q[H_{am}(k, M)]\{q(\omega)\} + q[H_{ag}(k, M)]\left\{\frac{v_g(\omega)}{V_\infty}\right\}$$

tenendo conto che le forze aerodinamiche dovute ai comandi sono comprese in quelle dovute al movimento; il comando, come è noto, può essere considerato come grado di libertà oppure come forzante a seconda del problema aeroelastico in esame<sup>3</sup>. Nel dominio del tempo questo equivale ad eseguire gli integrali di convoluzione sulle risposte impulsive:

$$\{Q(t)\} = q \int_{-\infty}^{+\infty} [h_{am}(t-\tau)]\{q(\tau)\} d\tau + q \int_{-\infty}^{+\infty} [h_{ag}(t-\tau)]\left\{\frac{v_g(\tau)}{V_\infty}\right\} d\tau$$

si osservi che i limiti inferiori degli integrali possono essere sostituiti dal valore 0, infatti per  $t < 0$  le risposte impulsive sono infatti nulle. È una conseguenza della *causalità* del fenomeno (la risposta non può essere diversa da zero prima che venga applicata la forzante). In precedenza si è imposta l'approssimazione *stazionaria* dell'aerodinamica instazionaria, dove il transitorio aerodinamico veniva completamente eliminato ritenendo costanti i coefficienti aerodinamici ed utilizzandoli con le effettive condizioni al contorno instazionarie (ossia introducendo l'incidenza cinematica). Si vuole passare ad una approssimazione migliore, che tenga conto, come si vedrà, almeno degli effetti di primo ordine dell'instazionarietà, oltre a considerare, naturalmente, le effettive condizioni al contorno. L'approssimazione sarà definita *quasi-stazionaria*.

### 3.6.1 Ipotesi di validità

Entrambe le approssimazioni hanno validità se il contenuto in frequenza degli ingressi è sufficientemente basso (moti "lenti" rispetto all'aerodinamica "veloce"). Per quanto riguarda la raffica, lo spettro dell'ingresso  $v_g(\omega)$  viene confrontato con quello di  $[H_{ag}(k, M)]$  per verificare la validità dell'approssimazione. Le  $\{q(\omega)\}$  al contrario non sono forzanti esterne. L'aerodinamica agisce come retroazione nel sistema completo, che comprende la parte strutturale. Il contenuto in frequenza di  $\{q(\omega)\}$  è influenzato dalla  $[H_{am}(k, M)]$  stessa; infatti la funzione di trasferimento del sistema completo comprende la  $[H_{am}(k, M)]$ . Nell'equazione di flutter l'approssimazione stazionaria o quasi-stazionaria può essere introdotta forzatamente, salvo, una volta effettuati i calcoli, verificare che le frequenze ridotte a cui si lavora siano compatibili con l'approssimazione.

<sup>2</sup>In linea di principio il metodo di *Morino* può essere applicato a moti di qualunque tipo, ed in particolare a moti di tipo esponenziale complesso (vedi capitolo 2).

<sup>3</sup>Ai due casi estremi, di comandi liberi o bloccati, si aggiungono le situazioni intermedie in cui entra in gioco la flessibilità della catena di comando o la dinamica dell'impianto di attuazione

### 3.6.2 Espressione formale

L'approssimazione quasi-stazionaria si basa su uno sviluppo in serie della matrice  $[H_a(s)]$  (ritenendo la condizione di volo fissata per cui non si ha più la dipendenza dal numero di *Mach*) attorno al punto  $s = 0$ . Lo sviluppo viene eseguito sui singoli termini della matrice:

$$[H(s)] = [H(0)] + s[H'(0)] + \frac{s^2}{2}[H''(0)]$$

che può essere riscritta in funzione della frequenza ridotta complessa:

$$[H(p)] = [H(0)] + p[H'(0)] + \frac{p^2}{2}[H''(0)]$$

L'ipotesi che permette questo sviluppo in serie è l'analiticità della funzione  $[H_a(p)]$ . Sotto questa ipotesi, i valori delle derivate di  $[H_a(p)]$  sono indipendenti dalla direzione rispetto a cui sono valutate. Questa circostanza, non solo permette lo sviluppo in serie, ma permette di calcolare  $[H'(0)]$  e  $[H''(0)]$  conoscendo la  $[H_a(p)]$  solo sull'asse immaginario. Le derivate di  $[H_a(p)]$  potranno venire valutate numericamente conoscendo  $[H_a(k)]$  per  $k = 0$  e per qualche altro  $k$  in un intorno dell'origine. L'ipotesi di analiticità per le matrici aerodinamiche, ricavate dalla teoria dei flussi a potenziale, è verificata fino al secondo ordine di derivazione. Grazie all'approssimazione quasi stazionaria l'equazione di flutter viene ricondotta a quella tipica di un sistema del secondo ordine:

$$(s^2[M_{ae}] + s[C_{ae}] + [K_{ae}])\{q\} = \{0\}$$

infatti l'espressione dei carichi aerodinamici nel dominio di *Laplace* diviene:

$$\{Q_a(s)\} = q \left( [H_{am}(0)] + s[H'_{am}(0)] + \frac{s^2}{2}[H''_{am}(0)] \right) \{q(s)\}$$

che nel dominio del tempo diventa:

$$\{Q_a(t)\} = q \left( [H_{am}(0)]\{q(t)\} + [H'_{am}(0)]\{\dot{q}(t)\} + \frac{1}{2}[H''_{am}(0)]\{\ddot{q}(t)\} \right)$$

Si riconoscono quindi, a meno del fattore  $q$ :

|   |  |
|---|--|
| $[H_{am}(0)]\{q(t)\}$                     | forze aerodinamiche dipendenti linearmente dalla posizione;<br>$[H_{am}(0)]$ è definita rigidità aerodinamica    |
| $[H'_{am}(0)]\{\dot{q}(t)\}$              | forze aerodinamiche dipendenti linearmente dalla velocità;<br>$[H'_{am}(0)]$ è definita smorzamento aerodinamico |
| $\frac{1}{2}[H''_{am}(0)]\{\ddot{q}(t)\}$ | forze aerodinamiche dipendenti linearmente dall'accelerazione  |

La matrice  $[H''_{am}(0)]/2$  non prende tuttavia il nome di matrice di massa aerodinamica, per evitare di generare confusione con la cosiddetta massa apparente, che viene introdotta in aerodinamica.

### 3.6.3 Differenze con l'approssimazione stazionaria

L'approssimazione quasi-stazionaria tiene effettivamente conto della non immediatezza della risposta aerodinamica. Il motivo non risiede nell'ordine dello sviluppo, si può infatti parlare di approssimazione quasi-stazionaria pur limitandosi al primo ordine, ma nel fatto che lo sviluppo viene eseguito sull'intera matrice aerodinamica calcolata da un modello completamente instazionario. Il concetto si chiarisce esaminando le effettive espressioni della  $[H_{am}(k, M)]$  calcolate con i metodi a disposizione. Con il metodo di Morino l'espressione tipica è:

$$[H_{am}(k, M)] = q \int_S [I_n(\xi, \eta)]^T [I_{C_p}(k, \xi, \eta)] [Y(k, M)]^{-1} [Z(k, M)] \left( [A] + \frac{j\omega}{V_\infty} [B] \right) dS$$

dove:

$$[I_{C_p}(k, \xi, \eta)] = -2 \left( [N_\varphi]_{/x} + \frac{j\omega}{V_\infty} [N_\varphi] \right)$$

Se viene eliminata la dipendenza da  $k$  nel nucleo dell'espressione, costituito dalle due matrici  $[Y(k, M)]$  e  $[Z(k, M)]$ , derivate dalla pannellizzazione, si ottiene che il potenziale aerodinamico si adegua istantaneamente alle condizioni al contorno instazionarie  $[A] + j\omega/V_\infty [B]$ . I carichi aerodinamici continuano, tuttavia, a dipendere dalla derivata temporale del potenziale; infatti in frequenza esiste il termine  $j\omega/V_\infty [N_\varphi]$  nella matrice  $[I_{C_p}(k, \xi, \eta)]$ . Si otterrebbe una  $[H_{am}(k, M)]$  i cui termini sarebbero costituiti da polinomi di secondo grado in  $j\omega$ , equivalenti a polinomi di secondo grado in  $s$  nel dominio di *Laplace*. Sebbene il risultato sia sempre un polinomio di secondo grado in  $s$ , non si tratta di un'approssimazione quasi-stazionaria. Il modello, infatti, non prende mai in considerazione i ritardi aerodinamici. Perché vi sia approssimazione quasi-stazionaria i ritardi aerodinamici vanno presi in considerazione lavorando sul "nucleo" dipendente da  $k$ , che viene poi approssimato. Si consideri, ad esempio, una matrice aerodinamica derivata da un metodo a superficie portante:

$$[H_{am}(k, M)] = q \int_S [N_z]^T [N_A] [A]^{-1} [\alpha] dS$$

che viene ricavata dalla scrittura del lavoro aerodinamico ponendo:

$$[A] \{a\} = \{\alpha\}$$

con:

$$\begin{aligned} A_{ik} &= \int_S K(x_i, y_i, \xi, \eta, k, M) N_{Ak}(\xi, \eta) dS \\ \alpha_i &= \alpha(x_i, y_i) \end{aligned}$$

ed essendo:

$$\begin{aligned} \Delta C_{pr} &= [N_A] [A]^{-1} \{\alpha\} \\ \alpha &= \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial z}{\partial t} \\ z &= [N_z] \{q\} \end{aligned}$$

si ricava:

$$\begin{aligned} \{\alpha\} &= [\alpha] \{q\} \\ \alpha_{ij} &= N_{zi/x} + \frac{j\omega}{V_\infty} N_{zj} \end{aligned}$$

per cui la matrice  $[\alpha]$  contiene polinomi di primo grado in  $j\omega$ . Per ottenere una approssimazione quasi-stazionaria, arrestata al secondo grado si può sviluppare il "nucleo" con un polinomio di primo grado anch'esso, ovvero:

$$[A(s)] = [A(0)] + s [A'(0)]$$

Questa approssimazione è valida se i movimenti sono abbastanza lenti. Si avrebbe:

$$([A(0)] + s [A'(0)]) \{a\} = \{\alpha\} = [\alpha(s)] \{q(s)\}$$

L'approssimazione non si può fermare qui, poiché è  $[A]^{-1}$  ad essere richiesta. L'espressione precedente può essere messa nella forma:

$$[A(0)] \left( [I] + s [A(0)]^{-1} [A'(0)] \right) \{a\} = [\alpha(s)] \{q(s)\}$$

da cui

$$\left([I] + s[A(0)]^{-1}[A'(0)]\right)\{a\} = [A(0)]^{-1}[\alpha(s)]\{q(s)\}$$

Il termine a destra è l'espressione degli  $\{a\}$  nell'approssimazione stazionaria, dove quindi il termine:

$$s[A(0)]^{-1}[A'(0)]$$

è ritenuto trascurabile. Nell'approssimazione quasi-stazionaria questo termine non viene ignorato ma considerato sufficientemente piccolo da giustificare l'approssimazione:

$$\left([I] + s[A(0)]^{-1}[A'(0)]\right)^{-1} = \left([I] - s[A(0)]^{-1}[A'(0)]\right)$$

per cui l'espressione degli  $\{a\}$  approssimata è dunque:

$$\{a\} = \left([I] - s[A(0)]^{-1}[A'(0)]\right)[A(0)]^{-1}[\alpha(s)]\{q(s)\}$$

e la matrice aerodinamica completa risulta:

$$[H_{am}(k, M)] = q \int_S [N_z]^T [N_A] \left([I] - s[A(0)]^{-1}[A'(0)]\right) [A(0)]^{-1} [\alpha(s)] dS$$

Poiché gli  $\alpha_{ij}(s)$  sono polinomi di primo grado in  $s$ , i termini di  $[H_{am}(k, M)]$  saranno polinomi di secondo grado in  $s$  che tengono conto degli effetti complessivi del primo ordine dell'instazionarietà dell'aerodinamica. Questa trattazione non rappresenta il metodo pratico con il quale si applica l'approssimazione quasi-stazionaria, ma è utile per distinguere fra approssimazione stazionaria e quasi-stazionaria. Il grado dell'approssimazione non è l'elemento distintivo, infatti, considerando l'intera  $[H_{am}(k, M)]$  ci si può fermare al primo grado ottenendo qualcosa di diverso dall'approssimazione stazionaria. È essenziale che il nucleo sia espresso per un'aerodinamica instazionaria e poi, solo in seguito, approssimato almeno al primo ordine.

### 3.6.4 Calcolo delle derivate

Il metodo con cui vengono calcolati i coefficienti dell'approssimazione riguarda l'intera matrice  $[H_a(k, M)]$  dopo che questa è stata calcolata, per un fissato valore del numero di *Mach*, in qualche punto  $k = 0$  e  $k \neq 0$  in un intorno dell'origine. Il coefficiente  $[H_a(0)]$  si calcola applicando un modello stazionario dell'aerodinamica. Per calcolare le derivate prime e seconde si sfruttano alcune proprietà di  $[H_a(j\omega)]$ . Come si è già affermato, una proprietà fondamentale è l'analiticità della matrice aerodinamica. Considerando il singolo termine  $[H_a(s)]$  la derivata è identica qualsiasi sia la direzione in cui viene calcolata. In realtà si ha a disposizione solo  $[H(j\omega)]$ , cioè l'andamento della funzione lungo l'asse immaginario, ma questo, per l'analiticità della funzione, è sufficiente per calcolare  $\partial[H]/\partial s$ :

$$\frac{\partial[H]}{\partial s} = \frac{\partial[H]}{\partial(j\omega)} = -j \frac{\partial[H]}{\partial\omega}$$

La  $[H(j\omega)]$  è composta da una parte reale ed una immaginaria:

$$[H(j\omega)] = [H_R(j\omega)] + j[H_I(j\omega)]$$

per cui si ha:

$$\frac{\partial[H]}{\partial s} = -j \left( \frac{\partial[H_R]}{\partial\omega} + j \frac{\partial[H_I]}{\partial\omega} \right)$$

Le derivate della parte reale e della parte immaginaria possono venir calcolate separatamente. Occorre ora ricordare che  $[H(j\omega)]$  è la trasformata di *Fourier* della risposta impulsiva del sistema:

$$[H(j\omega)] = \int_0^{+\infty} [h(t)] \cos(\omega t) dt - j \int_0^{+\infty} [h(t)] \sin(\omega t) dt$$

dove il primo estremo è stato posto uguale a zero per la causalità del fenomeno ( $[h(t)] = 0$  per  $t < 0$ ). Dall'espressione precedente si deducono due importanti proprietà della  $[H(j\omega)]$ :

\*

Figura 3.5: Funz. di trasf. simm e antisimm.

1. La parte reale di  $[H(j\omega)]$  è una funzione pari di  $\omega$ :  $[H_R(j\omega)] = [H_R(-j\omega)]$ .
2. La parte immaginaria di  $[H(j\omega)]$  è una funzione dispari di  $\omega$ :  $[H_I(j\omega)] = -[H_I(-j\omega)]$ .

come riportato in modo schematico in figura 3.5. Dalla prima proprietà si ricava:

$$\frac{\partial}{\partial \omega} [H_R(0)] = 0$$

che implica

$$\frac{\partial}{\partial s} [H(0)] = \frac{\partial}{\partial \omega} [H_I(0)]$$

dove  $\partial[H_I]/\partial\omega$  è un numero reale. Quindi per il calcolo di  $[H'(0)]$  basterà valutare per un  $\bar{k}$  sufficientemente vicino a 0. La derivata viene calcolata numericamente con una formula alle differenze finite:

$$[H'(0)] = \frac{\partial}{\partial \omega} [H_I(0)] \cong \frac{[H_I(\bar{k})] - [H_I(-\bar{k})]}{2\bar{k}} = \frac{[H_I(\bar{k})]}{\bar{k}}$$

In modo analogo, per quanto riguarda la derivata seconda si può scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2} [H(s)] &= \frac{\partial^2}{\partial (j\omega)^2} [H(j\omega)] \\ &= \frac{\partial}{\partial (j\omega)} \left( \frac{\partial}{\partial (j\omega)} [H(j\omega)] \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial}{\partial \omega} [H_R(j\omega)] + j \frac{\partial}{\partial \omega} [H_I(j\omega)] \right) \\ &= -\left( \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} [H_R(j\omega)] + j \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} [H_I(j\omega)] \right) \end{aligned}$$

e sfruttando la seconda proprietà relativa ad  $[H(j\omega)]$  si può scrivere:

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} [H(0)] = -\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} [H_R(0)]$$

che, anche in questo caso, è un numero reale. Il calcolo di  $[H''(0)]$  si esegue calcolando numericamente la derivata seconda di  $[H_R(\omega)]$  in  $\omega = 0$ . Occorre conoscere  $[H_R(0)]$  e  $[H_R(\bar{k})]$ , con  $\bar{k}$  vicino a 0. La formula alle differenze finite è:

$$\begin{aligned} [H''(0)] &= -\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} [H_R(0)] \\ &\cong -\frac{[H_R(\bar{k})] - 2[H_R(0)] + [H_R(-\bar{k})]}{\bar{k}^2} \\ &= -2\frac{[H_R(\bar{k})] - [H_R(0)]}{\bar{k}} \end{aligned}$$

In definitiva, l'approssimazione quasi-stazionaria necessita della conoscenza della matrice  $[H_{am}(k)]$  in due punti:  $k = 0$  e  $k = \bar{k}$ .

\*

Figura 3.6: Diagrammi

\*

Figura 3.7: Approssimazione

### 3.6.5 Giustificazione delle ipotesi di validità

In frequenza la giustificazione dell'approssimazione quasi-stazionaria si basa sul concetto di funzione di trasferimento; infatti, nel dominio di *Fourier*:

$$\{Q(j\omega)\} = [H_{am}(j\omega)] \{q(j\omega)\}$$

Come è stato fatto per l'oscillatore armonico, il confronto fra le larghezze di banda dei termini  $[H_{am}(j\omega, M)]$  e  $\{q(j\omega)\}$  può giustificare l'utilizzo di una approssimazione per  $[H_{am}(j\omega, M)]$ , utilizzando uno sviluppo in serie nell'intorno di  $j\omega = 0$ :

$$[H_{am}(j\omega)] = [H_{am}(0)] + j\omega [H'_{am}(0)] + \dots$$

Come si è già affermato l'approssimazione quasi-stazionaria è utilizzabile con lo sviluppo arrestato al primo ordine. La verifica dell'applicabilità comporta un confronto fra i contenuti in frequenza, ovvero fra la rapidità di cambiamento dei due segnali. Il confronto può essere fatto anche nel dominio del tempo. La legge temporale del carico aerodinamico si ottiene dalla convoluzione della risposta impulsiva  $[h_{am}(t)]$ :

$$\{Q(t)\} = q \int_0^t [h_{am}(t-\tau)] \{q(\tau)\} d\tau = q \int_0^t [h_{am}(\tau)] \{q(t-\tau)\} d\tau$$

La forma tipica della risposta impulsiva aerodinamica e di un ingresso con contenuto in frequenza relativamente basso (ossia il segnale cambia lentamente nel tempo), vengono riportati nel diagramma in figura 3.6. Si noti che, poiché per  $\tau > t$  si ha che  $\{q(t-\tau)\} = 0$ , il limite superiore dell'integrale di convoluzione può essere posto uguale a  $+\infty$ . Se  $\{q(t-\tau)\}$  varia lentamente con  $t$ , lo si può sviluppare in serie di Taylor attorno al punto  $t$ :

$$\{q(t-\tau)\} = \{q(t)\} + \frac{\partial}{\partial \tau} \{q(t)\} (-\tau) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \{q(t)\} (-\tau)^2 + \dots$$

in pratica  $\{q(t)\}$  è stato approssimato attorno al punto  $t$ , per calcolarne il valore in  $t-\tau$ , come descritto in figura 3.7. Nella convoluzione ciò equivale, per conoscere la risposta in  $t$ , ad approssimare il segnale con le caratteristiche (valore, derivata, derivata, seconda) che esso ha nel medesimo istante  $t$ . L'approssimazione conduce a:

$$\begin{aligned} \{q(t-\tau)\} &\cong \{q(t)\} + \{q'(t)\} (-\tau) + \{q''(t)\} \frac{\tau^2}{2} \\ &= \{q(t)\} - \tau \{q'(t)\} + \frac{\tau^2}{2} \{q''(t)\} \end{aligned}$$

che sostituita nell'integrale di convoluzione permette di scrivere:

$$\{Q_A(t)\} = q ([K_{am}] \{q(t)\} + [C_{am}] \{q'(t)\} + [M_{am}] \{q''(t)\})$$

Quanto fatto nel dominio del tempo è equivalente all'approssimazione quasi-stazionaria. Infatti:

1.  $[K_{am}] = [H_{am}(0)]$ , essendo

$$[H_{am}(s)] = \int_0^\infty [h_{am}(t)] e^{-st} dt$$

e quindi

$$[H_{am}(0)] = \int_0^\infty [h_{am}(t)] dt$$

2.  $[C_{am}] = [H'_{am}(0)]$ , infatti, derivando la definizione di derivata di *Laplace* rispetto ad  $s$ , si ottiene:

$$[H'_{am}(s)] = \int_0^{\infty} (-t) [h_{am}(t)] e^{-st} dt$$

da cui

$$[H'_{am}(0)] = \int_0^{\infty} (-t) [h_{am}(t)] dt$$

l'ultimo termine è definito momento della risposta impulsiva.

3.  $[M_{am}] = 1/2 [H''_{am}(0)]$ , ottenuta derivando ulteriormente rispetto ad  $s$  l'espressione della trasformata di *Laplace*:

$$[H''_{am}(s)] = \int_0^{\infty} (-t)^2 [h_{am}(t)] e^{-st} dt$$

da cui

$$[H''_{am}(0)] = \int_0^{\infty} (-t)^2 [h_{am}(t)] dt$$

Si è dunque visto che l'approssimazione quasi-stazionaria in frequenza equivale ad eseguire la convoluzione sostituendo al segnale di ingresso il suo sviluppo in serie di Taylor eseguita attorno a  $\tau = t$ . L'uscita al tempo  $t$  viene a dipendere dalle caratteristiche che il segnale d'ingresso ha al tempo  $\tau$ . Questo è valido se la risposta all'impulso permane per un intervallo di tempo sufficientemente breve da consentire di approssimare senza errori il segnale con il suo sviluppo in serie di Taylor.



## Capitolo 4

# Flutter

Il flutter (che letteralmente significa “svolazzamento”, “agitazione”) è certamente il fenomeno aeroelastico più caratteristico. Lo studio del flutter per l’aeroelasticista è, dal punto di vista analitico, lo studio di stabilità di un sistema lineare (o meglio linearizzato per movimenti infinitesimi). Il fenomeno fisico è l’insorgere di oscillazioni divergenti su una struttura elastica immersa in una corrente d’aria. Matematicamente non si fa altro che analizzare il comportamento degli *autovalori del sistema aeroelastico* al variare delle condizioni di volo. In termini più specifici il sistema aeroelastico è l’unione di due sistemi dinamici: 1) il sistema associato alla struttura elastica, e 2) il sistema associato all’aerodinamica. In realtà, nella pratica, viene analizzato solo il comportamento degli autovalori della parte elasto-meccanica sotto l’azione dell’aerodinamica, mentre la parte aerodinamica rimane nascosta. Questo fatto, apparentemente opinabile, trova la sua spiegazione nell’evidenza sperimentale che gli autovalori del sistema dinamico associato all’aerodinamica, quando quest’ultima viene accoppiata alla parte strutturale, in generale non si “instabilizzano” mai, ossia, con la terminologia dei sistemi di controllo, restano sempre nel semipiano sinistro<sup>1</sup>. Invece può accadere che gli autovalori (i poli) della parte elastomeccanica, a causa dell’aerodinamica, si spostino nel semipiano destro, causando appunto l’instabilità dinamica, il flutter. Da un punto di vista fisico quindi accade che i modi della struttura giungano ad avere smorzamento nullo in corrispondenza di una certa velocità (e oltre tale velocità lo smorzamento diventi negativo). Il flutter è perciò tale condizione di limite di stabilità in cui alcuni autovalori si trovano sull’asse immaginario del piano complesso. La condizione di flutter che si deve determinare è quindi caratterizzata da

- Frequenza di flutter  $\omega_F$  (lo smorzamento è nullo)
- Velocità di flutter  $V_F$
- Modo di flutter

La descrizione analitica del sistema elasto-meccanico, nel dominio del tempo, assume la nota forma

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{F(t)\} \quad (4.1)$$

mentre nel dominio delle frequenze diventa

$$([M] s^2 + [C] s + [K]) \{q(s)\} = \{F(s)\} \quad (4.2)$$

Alla (4.1), e alla (4.2), si può arrivare attraverso una delle note tecniche di approssimazione e discretizzazione del continuo quali Rayleigh-Ritz, elementi finiti, parametri concentrati. La forzante  $\{F(t)\}$  contiene anche la forzante aerodinamica  $\{F_a(t)\}$  descrivibile anch’essa nei due domini<sup>2</sup>:

$$\{F_a(t)\} = q \int_0^t [h_{am}(t - \tau)] \{q(\tau)\} d\tau \quad (4.3)$$

$$\{F_a(s)\} = q [H_{am}(s)] \{q(s)\} \quad (4.4)$$

---

<sup>1</sup>Del piano complesso.

<sup>2</sup>In questa trattazione ovviamente si pone l’enfasi sulla dipendenza delle forze aerodinamiche dalla dinamica della struttura; si ricordi però che tali forze dipendono anche da altri parametri, significativamente, dal punto di vista aeroelastico, dal numero di *Mach*.

Per la (4.3) in realtà si considera generalmente la forma che fa uso del tempo adimensionalizzato  $n = Vt/c$ , dove  $V$  è la velocità di volo e  $c$  la lunghezza di riferimento:  $n$  assume quindi il significato di numero di lunghezze di riferimento percorse. La scrittura dell'integrale di convoluzione in forma adimensionalizzata:

$$\left\{ F_a \left( \frac{nc}{V} \right) \right\} = q \int_0^\infty \left[ h_{am} \left( \frac{nc}{V} - \frac{\eta c}{V} \right) \right] \left\{ q \left( \frac{\eta c}{V} \right) \right\} d\eta$$

permette tra l'altro di riscrivere anche la (4.4) in una forma adimensionalizzata, facendo uso della *frequenza ridotta*<sup>3</sup>  $k = \omega c/V$  o della variabile complessa ridotta  $p = sc/V$ :

$$\{F_a(s)\} = q[H_{am}(p)]\{q(s)\}$$

Perciò il sistema aeroelastico senza forzanti esterne è

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = q \int_0^\infty [h_{am}(n-\eta)]\{q(\eta)\} d\eta$$

oppure

$$([M]s^2 + [C]s + [K])\{q(s)\} = q[H_{am}(p)]\{q(s)\}$$

È proprio la difficoltà nella determinazione di un modello per la forzante aerodinamica che fa sì che in pratica la *matrice delle risposte impulsive*  $[h_{am}(t)]$  non sia in genere disponibile; per di più, nella maggior parte dei casi, anziché la *matrice di trasferimento*  $[H_{am}(p)]$ , è disponibile solo la  $[H_{am}(k, M)]$ , ossia una valutazione della  $[H_{am}(p)]$  per un certo numero finito di frequenze ridotte  $p = j\omega c/V$  giacenti lungo l'asse immaginario del piano complesso (quindi per movimenti puramente armonici, non smorzati) e per vari numeri di *Mach*  $M$ . Se tuttavia si riuscisse ad avere una tabulazione di  $[H_{am}(p)]$  per vari valori di  $p$ , non sarebbe poi di facile utilizzo dato che richiederebbe l'uso di una tecnica di interpolazione quadridimensionale. Tale conoscenza numerica della matrice di trasferimento aerodinamica (che peraltro si rivela essere completa e sufficiente), fa sì che i metodi classici della ricerca degli autovalori di un sistema dinamico non siano applicabili al sistema aeroelastico, e si debba quindi ricorrere all'utilizzo di metodi *ad hoc*.

Il più grosso problema dello studio del flutter è dovuto al fatto che la matrice di trasferimento aerodinamica  $[H_{am}(p, M)]$  è nota per via numerica e quindi solo per valori prefissati della frequenza ridotta  $k$ , anziché come funzione analitica di  $k$  (o meglio di  $p$ ) stessa; inoltre, se tale funzione analitica fosse disponibile, essa sarebbe non polinomiale. Perciò ora verranno presentati i metodi computazionali che permettono di risolvere il problema di risalire, in via approssimata, ai valori di  $[H_{am}(p)] \forall p \in \mathcal{C}$  noti i valori di  $[H_{am}(k_n)]$  alle  $k_n$  frequenze ridotte in cui è stata calcolata. Esistono vari approcci al problema in letteratura, alla base dei quali c'è sempre il concetto di fornire un opportuno schema di interpolazione.

## 4.1 Approssimazione quasi-stazionaria

Questo tipo di approssimazione non è altro che uno sviluppo in serie di Mc Laurin della funzione di trasferimento aerodinamica  $[H_{am}(p)]$ , essendo  $p$  la variabile complessa adimensionalizzata:

$$p = \frac{sc}{V} = \frac{\sigma c}{V} + j \frac{\omega c}{V} = \delta + jk$$

dove  $c$  è la lunghezza di riferimento e  $V$  la velocità. Se infatti si analizza un fenomeno a bassa frequenza ridotta, per il quale valga la relazione  $p \ll 1$ , lo sviluppo intorno a  $p = 0$  della  $[H_{am}(p)]$  risulta essere accettabile. Perciò si pone:

$$[H_{am}(p)] = [H_{am}(0)] + [H'_{am}(0)]p + \frac{1}{2}[H''_{am}(0)]p^2 + \dots$$

indicando con  $[H'_{am}(0)]$  e  $[H''_{am}(0)]$  le derivate prima e seconda della  $[H_{am}(p)]$ , valutate per  $p = 0$ . Tutto ciò presuppone l'analiticità della  $[H_{am}(p)]$  in un intorno dell'origine, ipotesi non sempre verificata

<sup>3</sup>La frequenza ridotta da alcuni viene normalizzata rispetto alla semicorda  $c/2$ ; in questo contesto interessa soprattutto mettere in luce il significato di rapporto di scala tra le frequenze dei fenomeni strutturali ed aerodinamici.

## DIFFERENZA CENTRATA

Figura 4.1: Corrispondenza tra differenza destra e centrata nel calcolo della derivata della parte immaginaria di  $H_{am}$  nell'origine

esattamente, ma lo è spesso se ci si arresta alla derivata seconda. Ipotizzando quindi che esistano le derivate di  $[H_{am}(p)]$  rispetto alla variabile complessa  $p$ , allora possono essere calcolate lungo una direzione qualunque. Perciò possiamo affermare che:

$$[H'_{am}(0)] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{[H_{am}(0+z)] - [H_{am}(0)]}{z} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{[H_{am}(0+jk)] - [H_{am}(0)]}{jk}$$

e quindi calcolare la derivata tramite i soli valori puramente immaginari della variabile  $p$ . Evidentemente tale derivata verrà calcolata numericamente, come rapporto incrementale finito, dato che disponiamo solo dei valori di  $[H_{am}(jk)]$  per un insieme discreto di frequenze ridotte. È interessante notare il significato delle derivate prima e seconda, facile da intuire sviluppati i primi passaggi di calcolo:

$$\begin{aligned} [H'_{am}(0)] &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{[H_{am}(0+jk)] - [H_{am}(0)]}{jk} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \left( \frac{\text{Re}([H_{am}(jk)]) - \text{Re}([H_{am}(0)])}{jk} + j \frac{\text{Im}([H_{am}(jk)]) - \text{Im}([H_{am}(0)])}{jk} \right) \end{aligned}$$

ma

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\text{Re}([H_{am}(jk)]) - \text{Re}([H_{am}(0)])}{jk} = \frac{\partial}{\partial k} \text{Re}([H_{am}(jk)]) \Big|_{k=0} = 0$$

poichè tutte le funzioni di trasferimento sono simmetriche nella parte reale e antisimmetriche nella parte immaginaria, rispetto alla variabile  $j\omega$  ( $jk$  nel caso in esame). Perciò resta:

$$[H'_{am}(0)] = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\text{Im}([H_{am}(jk)]) - \text{Im}([H_{am}(0)])}{k} = \frac{\partial}{\partial k} \text{Im}([H_{am}(jk)]) \Big|_{k=0}$$

cioè la pendenza nell'origine della parte immaginaria, o meglio la matrice delle pendenze nell'origine delle parti immaginarie delle singole funzioni di trasferimento che compongono la matrice  $[H_{am}(jk)]$ . Ovviamente tale derivata sarà calcolata numericamente, e un possibile modo è l'approssimazione tramite il rapporto incrementale finito, cioè:

$$[H'_{am}(0)] \cong \frac{\text{Im}([H_{am}(jk_1)]) - \text{Im}([H_{am}(0)])}{k_1} = \frac{\partial}{\partial k} \text{Im}([H_{am}(jk)]) \Big|_{k=0}$$

dove  $k_1$  è la più piccola frequenza ridotta per cui è stata valutata  $[H_{am}(jk)]$ . La precedente è una *differenza destra*, con la terminologia del calcolo numerico; tuttavia, grazie all'antisimmetria della parte immaginaria rispetto a  $jk$ , tale differenza destra fornisce lo stesso risultato del calcolo di  $[H'_{am}(0)]$  attraverso una differenza centrata nell'origine, come si può notare dalla figura 4.1. Vediamo ora il significato della derivata seconda:

$$\begin{aligned} [H''_{am}(0)] &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{[H_{am}(jk)] - 2[H_{am}(0)] + [H_{am}(-jk)]}{(jk)^2} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \left( \frac{\text{Re}([H_{am}(jk)]) - 2\text{Re}([H_{am}(0)]) + \text{Re}([H_{am}(-jk)])}{(jk)^2} \right. \\ &\quad \left. + j \frac{\text{Im}([H_{am}(jk)]) - 2\text{Im}([H_{am}(0)]) + \text{Im}([H_{am}(-jk)])}{(jk)^2} \right) \\ &= - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\text{Re}([H_{am}(jk)]) - 2\text{Re}([H_{am}(0)]) + \text{Re}([H_{am}(-jk)])}{(k)^2} \\ &= - \frac{\partial^2}{\partial k^2} \text{Re}([H_{am}(jk)]) \Big|_{k=0} \end{aligned}$$

poichè, per le proprietà di simmetria e di antisimmetria già ricordate, risulta:

Quindi la derivata seconda è pari alla derivata seconda della sola parte reale, ossia alla curvatura della parte reale. Ma più che su tale significato geometrico, per così dire, di questi termini, è molto più interessante soffermarsi sulla loro interpretazione nel dominio del tempo. Infatti le forze aerodinamiche, con l'approssimazione quasi-stazionaria, ora si scrivono:

$$\begin{aligned}\{Q_a(s)\} &= q[H_{am}(p)]\{q(s)\} \\ &= q\left([H_{am}(0)] + [H'_{am}(0)]p + \frac{1}{2}[H''_{am}(0)]p^2\right)\{q(s)\} \\ &= q\left([H_{am}(0)] + [H'_{am}(0)]\frac{c}{V}s + \frac{1}{2}[H''_{am}(0)]\frac{c^2}{V^2}s^2\right)\{q(s)\}\end{aligned}$$

che nel tempo corrisponde a:

$$\{Q(t)\} = q\left([K_{am}(0)]\{q(t)\} + \frac{c}{V}[H'_{am}(0)]\{\dot{q}(t)\} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{V^2}[H''_{am}(0)]\{\ddot{q}(t)\}\right)$$

dove

|         |                          |
|---------|--------------------------|
| $[K_a]$ | Rigidezza aerodinamica   |
| $[C_a]$ | Smorzamento aerodinamico |
| $[M_a]$ | Massa aerodinamica       |

Anziché antitrasformare avremmo potuto operare l'integrale di convoluzione: e ora osserviamo che come è stata introdotta la frequenza ridotta adimensionalizzando la variabile complessa  $s = \sigma + j\omega$ , così, dualmente, è possibile introdurre la variabile temporale adimensionalizzata. Richiamando infatti la trasformata di *Fourier* di un segnale  $x(t)$ :

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\frac{\omega c}{V}t} dt$$

cioè moltiplicando e dividendo  $\omega t$  per  $c/V$ , per cui viene evidenziata la frequenza ridotta  $k = \omega c/V$ , compare nell'esponente il tempo adimensionale  $n = Vt/c$ , che può essere interpretato come il numero di lunghezze di riferimento percorse nel tempo  $t$ . Quindi scriveremo l'integrale di convoluzione in termini di lunghezze di riferimento percorse  $n$ , ponendo nella formula:

$$\{Q_a(t)\} = q \int_0^{\infty} [h_{am}(t-\tau)]\{q(\tau)\} d\tau$$

con  $t = nc/V$  e  $\tau = \eta c/V$ , che perciò diventa:

$$\begin{aligned}\{Q_a(t)\} &= q \int_0^{\infty} [h_{am}(t-\tau)]\{q(\tau)\} d\tau \\ &= q \int_0^{\infty} [h_{am}(\tau)]\{q(t-\tau)\} d\tau\end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned}\{Q_a(t)\} &= q \int_0^{\infty} \left[h_{am}\left(\frac{\eta c}{V}\right)\right] \left\{q\left(\frac{nc}{V} - \frac{\eta c}{V}\right)\right\} d\eta \\ &= q \int_0^{\infty} \left[h_{am}\left(\frac{\eta c}{V}\right)\right] \left\{q\left(\frac{c}{V}(n-\eta)\right)\right\} d\eta \\ &= q \int_0^{\infty} [h_{am}(\eta)]\{q(n-\eta)\} d\eta\end{aligned}$$

Ora pensiamo di sviluppare  $\{q(n-\eta)\}$  nell'intorno di  $n$ :

$$\{q(n-\eta)\} = \{q(n)\} + \frac{d}{dn}\{q(n)\}(-\eta) + \frac{d^2}{dn^2}\{q(n)\}\frac{n^2}{2} + \dots$$

Risulta quindi, portando fuori dall'integrale  $\{q(n)\}$  e le sue derivate:

$$\begin{aligned} \{Q_a(nc)V\} &= q \left( \int_0^\infty [h_{am}(\eta)] d\eta \{q(n)\} + \int_0^\infty [h_{am}(\eta)] (-\eta) d\eta \frac{d}{dn} \{q(n)\} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty [h_{am}(\eta)] \frac{\eta^2}{2} d\eta \frac{d^2}{dn^2} \{q(n)\} + \dots \right) \end{aligned}$$

Se a questo punto ricordiamo che:

$$\frac{d}{dn} \{q(n)\} = \frac{d}{dt} \{q(n)\} \frac{dt}{dn} = \{\dot{q}(t)\} \frac{c}{V}$$

e

$$\frac{d^2}{dn^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} \{q(n)\} \frac{dt}{dn} \right) \frac{dt}{dn} = \{\ddot{q}(t)\} \frac{c^2}{V^2}$$

otteniamo immediatamente:

$$\begin{aligned} \{Q_a(t)\} &= q \left( \int_0^\infty [h_{am}(\eta)] d\eta \{q(t)\} - \int_0^\infty [h_{am}(\eta)] \eta d\eta \frac{c}{V} \{\dot{q}(t)\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^\infty [h_{am}(\eta)] \eta^2 d\eta \frac{c^2}{V^2} \{\ddot{q}(t)\} \right) \end{aligned}$$

Osservando che i termini a moltiplicare  $\{q(t)\}$  e le sue derivate non sono altro che:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty [h_{am}(\eta)] d\eta &= [H_{am}(j\omega)]|_{\omega=0} = [H_{am}(0)] \\ - \int_0^\infty [h_{am}(\eta)] \eta d\eta &= [H'_{am}(j\omega)]|_{\omega=0} = [H'_{am}(0)] \\ \int_0^\infty [h_{am}(\eta)] \eta^2 d\eta &= [H''_{am}(j\omega)]|_{\omega=0} = [H''_{am}(0)] \end{aligned}$$

dato che, dalla definizione di trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned} [H_{am}(s)] &= \int_0^\infty [h_{am}(t)] e^{-st} dt \\ [H'_{am}(s)] &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty [h_{am}(t)] e^{-st} dt = \int_0^\infty [h_{am}(t)] (-t) e^{-st} dt \\ [H''_{am}(s)] &= \frac{d^2}{ds^2} \int_0^\infty [h_{am}(t)] e^{-st} dt = \int_0^\infty [h_{am}(t)] t^2 e^{-st} dt \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} [H_{am}(0)] &= \int_0^\infty [h_{am}(t)] dt \\ [H'_{am}(0)] &= - \int_0^\infty [h_{am}(t)] t dt \\ [H''_{am}(0)] &= \int_0^\infty [h_{am}(t)] t^2 dt \end{aligned}$$

Ritroviamo perciò la stessa espressione ricavata per antitrasformazione, sostituendo i tre termini visti sopra. Tali termini, se esistono, sono detti rispettivamente: momento della risposta di ordine zero, del primo ordine e del secondo ordine. Come si può notare dagli integrali generalizzati delle formule di cui sopra, l'esistenza dei momenti di vario ordine è legata all'ordine di decadimento della risposta impulsiva per  $t \rightarrow \infty$ .

Un ultimo aspetto dell'approssimazione quasi stazionaria su cui è opportuno soffermarsi è la struttura e il significato che viene ad avere, nel tempo, la matrice delle risposte impulsive  $[h_{am}(t)]$ : con lo sviluppo

$$[H_{am}(s)] = [H_{am}(0)] + \frac{c}{V} [H'_{am}(0)] s + \frac{1}{2} \frac{c^2}{V^2} [H''_{am}(0)] s^2 + \dots$$

antitrasformando risulta:

$$[H_{am}(t)] = [H_{am}(0)] \delta(t) + \frac{c}{V} [H'_{am}(0)] \dot{\delta}(t) + \frac{1}{2} \frac{c^2}{V^2} [H''_{am}(0)] \ddot{\delta}(t) + \dots$$

ricordando che le trasformate di *Laplace* delle suddette funzioni di singolarità sono:

$$\begin{aligned} L(\delta(t)) &= 1 \\ L(\dot{\delta}(t)) &= s \\ L(\ddot{\delta}(t)) &= s^2 \end{aligned}$$

È evidente che, operando ora la convoluzione con l'ingresso  $\{q(t)\}$ , si ottiene nuovamente la medesima espressione per le forze aerodinamiche  $\{Q_a(t)\}$ :

$$\begin{aligned} \left\{Q_a\left(\frac{nc}{V}\right)\right\} &= q \int_0^n \left[h_{am}\left(\frac{nc}{V} - \frac{\eta c}{V}\right)\right] \left\{q\left(\frac{\eta c}{V}\right)\right\} d\eta \\ &= q \int_0^n [H_{am}(0)] \delta\left(\frac{nc}{V} - \frac{\eta c}{V}\right) \left\{q\left(\frac{\eta c}{V}\right)\right\} d\eta \\ &\quad + q \frac{c}{V} \int_0^n [H'_{am}(0)] \dot{\delta}\left(\frac{nc}{V} - \frac{\eta c}{V}\right) \left\{q\left(\frac{\eta c}{V}\right)\right\} d\eta \\ &\quad + q \frac{1}{2} \frac{c^2}{V^2} \int_0^n [H''_{am}(0)] \ddot{\delta}\left(\frac{nc}{V} - \frac{\eta c}{V}\right) \left\{q\left(\frac{\eta c}{V}\right)\right\} d\eta \\ &= q [H_{am}(0)] \int_0^n \delta\left(\frac{nc}{V} - \frac{\eta c}{V}\right) \left\{q\left(\frac{\eta c}{V}\right)\right\} d\eta \\ &\quad + q \frac{c}{V} [H'_{am}(0)] \int_0^n \dot{\delta}\left(\frac{nc}{V} - \frac{\eta c}{V}\right) \left\{q\left(\frac{\eta c}{V}\right)\right\} d\eta \\ &\quad + q \frac{1}{2} \frac{c^2}{V^2} [H''_{am}(0)] \int_0^n \ddot{\delta}\left(\frac{nc}{V} - \frac{\eta c}{V}\right) \left\{q\left(\frac{\eta c}{V}\right)\right\} d\eta \\ &= q [H_{am}(0)] \{q(t)\} + q \frac{c}{V} [H'_{am}(0)] \{\dot{q}(t)\} + q \frac{1}{2} \frac{c^2}{V^2} [H''_{am}(0)] \{\ddot{q}(t)\} \end{aligned}$$

per le proprietà delle funzioni di singolarità nella convoluzione. L'espressione ora ricavata è ovviamente identica a quella ottenuta per antitrasformazione diretta delle  $\{q(s)\}$ ; è invece interessante commentare la forma assunta dalla matrice delle risposte impulsive  $[H_{am}(t)]$ :

$$[H_{am}(t)] = [H_{am}(0)] \delta(t) + \frac{c}{V} [H'_{am}(0)] \dot{\delta}(t) + \frac{1}{2} \frac{c^2}{V^2} [H''_{am}(0)] \ddot{\delta}(t)$$

e la sua trasformata in frequenza:

$$[H_{am}(s)] = [H_{am}(0)] + \frac{c}{V} [H'_{am}(0)] s + \frac{1}{2} \frac{c^2}{V^2} [H''_{am}(0)] s^2$$

Da entrambe le espressioni si può notare che l'approssimazione quasi-stazionaria ha un'interpretazione interessante relativamente alla teoria dei sistemi: si può pensare alla matrice di trasferimento aerodinamica  $[H_{am}(s)]$  come parallelo di tre derivatori, di ordine zero, uno e due. Infatti in un parallelo tra blocchi, le singole funzioni di trasferimento si sommano, e le  $\delta(t)$ ,  $\dot{\delta}(t)$  e  $\ddot{\delta}(t)$  sono le risposte impulsive di blocchi derivatori dell'ordine zero, primo e secondo (come già osservato nella parte introduttiva). Lo schema consueto è definito in figura 4.2.

## SCHEMA A BLOCCHI

Figura 4.2: Schema a blocchi

## DIAGRAMMA V-G

Figura 4.3: Diagramma  $V-g$ 

## 4.2 Il problema del *flutter*

Il problema di flutter richiede la risoluzione del sistema lineare omogeneo:

$$([M] s^2 + [C] s + [K] - q [H_{am}(p, M)]) \{q(s)\} = 0$$

che, come ben noto, ammette soluzioni non banali se e solo se

$$\det([M] s^2 + [C] s + [K] - q [H_{am}(p, M)]) = 0 \quad (4.5)$$

Nel paragrafo precedente si è vista l'approssimazione quasi-stazionaria per l'aerodinamica che porta ad una struttura per la (4.5) del tipo:

$$\det\left(\left([M] - q \frac{1}{2} \frac{c^2}{V^2} [H''_{am}(0)]\right) s^2 + \left([C] - q \frac{c}{V} [H'_{am}(0)]\right) s + ([K] - q [H_{am}(0)])\right) = 0 \quad (4.6)$$

La (4.6) è un problema agli autovalori risolubile con i metodi tradizionali, quello che si dice un problema standard agli autovalori. Potremmo pensare di utilizzare una generalizzazione del metodo delle secanti al campo complesso, per determinare le radici dell'equazione (4.5) nel caso in cui le frequenze ridotte non siano sufficientemente basse. Il vantaggio di tale metodo è che richiede solo delle valutazioni "puntuali" della funzione da annullare, cioè del determinante del sistema omogeneo nel nostro caso. Perciò, posto

$$\det([M] s^2 + [C] s + [K] - q [H_{am}(p, M)]) = f(s) \quad (4.7)$$

risolveremo la  $f(s) = 0$  con un'iterazione di questo tipo:

$$f(s_0) + \frac{f(s_1) - f(s_0)}{s_1 - s_0} (s - s_0) = 0 \quad (4.8)$$

cioè partendo da due approssimazioni dell'autovalore cercato,  $s_0$  e  $s_1$ , si risolve la (4.8) per un nuovo valore di  $s$ . Lo studio del flutter è uno studio di stabilità del sistema aeroelastico: al variare delle condizioni di volo si valutano gli autovalori del sistema, per determinare la zona di stabilità. Il sistema aeroelastico è costituito dalla parte strutturale

$$([M] s^2 + [C] s + [K]) \{q(s)\}$$

e dalla parte aerodinamica

$$q [H_{am}(p, M)] \{q(s)\}$$

introdotta come forzante alla parte strutturale. Di per sé entrambi i sistemi associati a tali matrici di trasferimento sono stabili; noi studieremo quindi l'influenza della parte aerodinamica sugli autovalori della parte strutturale. Bisogna accettare il fatto che gli autovalori dell'aerodinamica non si instabilizzino. Si potrebbe quindi rappresentare, in funzione della pressione dinamica  $q$ , il luogo delle radici del sistema nel piano complesso  $s = \sigma + j\omega$ . Quello che si fa effettivamente è invece tracciare due diagrammi  $\omega = \omega(V)$  e  $\sigma = \sigma(V)$ : cioè le parti reale ed immaginaria di  $s$  separatamente in funzione della velocità  $V$ .

Nella pratica poi i due diagrammi vengono uniti con un unico asse delle velocità nella forma indicata in figura 4.3. Il fattore di smorzamento  $g$  è pari al doppio del più noto

$$\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}$$

Si può subito osservare che i punti del diagramma sugli assi  $\omega$  e  $g$  sono già noti, di solito, dal calcolo strutturale del sistema: per  $V = 0$  infatti gli smorzamenti  $g$  e le frequenze  $\omega$  sono quelli propri della struttura. Ecco che si intuisce subito un modo di procedere nell'iterazione per risolvere la (4.5): scegliere come  $s_0$  di partenza l'autovalore corrispondente a frequenza e smorzamento propri della struttura e  $V_0 = 0$ . Inoltre il valore di tentativo  $s_1$  è scelto sufficientemente vicino a  $s_0$ , incrementando di un  $\Delta V$  la velocità (cioè la pressione dinamica  $q$ ), in modo da garantire la convergenza. Raggiunta una approssimazione soddisfacente di una soluzione  $\bar{s}$  della (4.8) (non è superfluo ricordare che ci sarà un numero di autovalori pari al rango della matrice  $[K]$ ), tale  $\bar{s}$  sarà il nuovo  $s_0$  di partenza per determinare la soluzione corrispondente ad una nuova velocità  $V + \Delta V$ . E ovviamente tale "inseguimento" della soluzione  $s$  al variare di  $V$  da 0 alla velocità massima considerata, deve essere effettuato per tutti gli autovalori del sistema, partendo cioè da ciascuna frequenza propria strutturale per volta. Come già detto questo metodo richiede soltanto di poter valutare la (4.7) noto il valore di  $s_i$  e la pressione dinamica  $q$ , senza richiedere una determinazione funzionale della (4.7) stessa. Per valutare la matrice  $[H_{am}(s)]$  in corrispondenza di un valore  $s$  complesso generico, essendo al solito nota solo  $[H_{am}(jk)]$ , se non è possibile usare l'approssimazione quasi-stazionaria, soprattutto per i primi punti del diagramma  $V$ - $g$  (basse velocità e quindi alte frequenze ridotte ...), si può utilizzare il metodo  $p$ - $k$ .

### 4.3 Metodo $p$ - $k$

L'ipotesi fisica su cui si basa tale metodo è la constatazione che l'aerodinamica calcolata per moti armonici puri è una buona approssimazione anche per moti armonici debolmente smorzati. Questo fatto permette di calcolare la matrice di trasferimento aerodinamica in corrispondenza di una frequenza complessa  $p = \delta + jk$ , ponendo  $p \cong jk$ , cioè trascurando completamente la parte reale, ovvero lo smorzamento. Ciò può dare il via ad un procedimento di calcolo di questo tipo, detto "Metodo Inglese con allineamento su  $k$ ":

1. Partire da una stima di un autovalore  $p_0 = \delta_0 + jk_0$
2. Valutare la matrice aerodinamica  $[H_{am}(jk)]$ , cioè con l'approssimazione  $p$ - $k$ .
3. Risolvere il problema agli autovalori<sup>4</sup>

$$\det \left( \frac{V^2}{c^2} [M] p^2 + \frac{V}{c} [C] p + [K] - q [H_{am}(jk, M)] \right) = 0 \quad (4.9)$$

che fornirà  $p_1 = \delta_1 + jk_1$

4. Iterare i passi 2) e 3) finché la parte immaginaria resta invariata, cioè:

$$k_n \cong k_{n-1}$$

5. Ripetere tale procedura per ottenere anche tutti gli altri autovalori.

L'approssimazione  $p$ - $k$  vista ora, cioè  $p = \delta + jk \cong jk$ , in realtà dovrebbe essere chiamata *approssimazione  $p$ - $k$  di ordine zero*. Infatti adesso possiamo pensare di introdurre le approssimazioni  $p$ - $k$  di ordine superiore, intendendo cioè degli sviluppi in serie di Taylor della  $[H_{am}(s)]$  in un intorno di una frequenza ridotta  $k_i$ . Così potremmo ottenere una approssimazione della matrice di trasferimento aerodinamica del tipo:

$$[H_{am}(p)] = [H_{am}(p_0)] + \frac{d}{dp} [H_{am}(p)] \Big|_{p=p_0} (p - p_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} [H_{am}(p)] \Big|_{p=p_0} (p - p_0)^2 \quad (4.10)$$

Tenendo conto che se le  $d^n/dp^n$  esistono, allora il limite del rapporto incrementale può essere calcolato lungo una direzione qualunque (si ricordi che appunto l'analiticità della  $[H_{am}(p)]$  è stata assunta a

<sup>4</sup>Il calcolo degli autovalori della (4.9) è ora eseguibile con una routine di soluzione standard, disponibile in molti pacchetti software (ad esempio il comando `eig` di `matlab` consente di risolvere sia il problema canonico  $(sI - A)x = 0$  che il problema generalizzato  $(sB - A)x = 0$ ).



priori), e che il punto di sviluppo  $p_0$  sarà immaginario puro, ossia  $p_0 = jk_0$ , in realtà dal punto di vista operativo le derivate che si calcolano sono:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dp} [H_{am}(p)] \right|_{p=p_0} &= -j \left. \frac{d}{dk} [H_{am}(jk)] \right|_{k=k_0} \\ \left. \frac{d^2}{dp^2} [H_{am}(p)] \right|_{p=p_0} &= - \left. \frac{d^2}{dk^2} [H_{am}(jk)] \right|_{k=k_0} \end{aligned}$$

Vale la pena di sottolineare l'importante proprietà delle funzioni analitiche: la conoscenza di una funzione lungo l'asse immaginario (ed in generale in una qualsiasi direzione) è sufficiente per la conoscenza della funzione in tutto il piano complesso.

A questo punto la sequenza operativa del metodo è ancora:

1. Stimare una frequenza ridotta  $k_0$  (magari con la approssimazione quasi-stazionaria, tanto per avere un punto di partenza per l'iterazione).
2. Sviluppare in serie la  $[H_{am}(p)]$  nell'intorno di tale frequenza ridotta  $k$ .
3. Risolvere il problema agli autovalori (4.9), riportato alla forma standard sostituendo  $[H_{am}]$  con l'approssimazione polinomiale in  $p$  data dalla (4.10); si ottiene una prima stima degli autovalori:

$$p_1 = \delta_1 + jk_1$$

4. Iterare i punti 2) e 3), sviluppando la  $[H_{am}(p)]$  attorno alla nuova frequenza ridotta  $k_1$  e risolvendo un nuovo problema agli autovalori, finché la frequenza ridotta stessa non resta invariata. A questo punto viene accettata anche la parte reale dell'autovalore.
5. Ripetere questo ciclo di calcolo per ricavare anche gli altri autovalori.

## 4.4 Risoluzione come sistema non lineare

Riprendiamo il sistema di equazioni del flutter nel dominio delle frequenze:

$$([M] s^2 + [C] s + [K] - q [H_{am}(jk, M)]) \{q(s)\} = \{0\}$$

che possiamo scrivere sinteticamente nella forma:

$$[F(s, V)] \{q(s)\} = \{0\} \quad (4.11)$$

ponendo cioè:

$$[F(s, V)] = [M] s^2 + [C] s + [K] - q [H_{am}(jk, M)]$$

Il sistema (4.11) può essere visto come un sistema lineare omogeneo nelle incognite  $\{q(s)\}$  e, inoltre, non lineare in  $s$ . Da questo punto di vista il problema di flutter avrebbe  $n$  equazioni in  $n+1$  incognite; possiamo allora sfruttare il fatto che gli autovettori  $\{q\}$  sono, come è noto, definiti a meno di una costante moltiplicativa. In altre parole dei vettori soluzione  $\{q\}$  si può solo trovare il rapporto tra le componenti: sono noti solo in direzione, nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  a cui appartengono, ma restano indeterminati in modulo. Sfruttando questa caratteristica degli autovettori potremmo perciò pensare di fissare una componente del vettore  $\{q\}$  e così risolvere un problema con  $n$  equazioni in  $n-1$  incognite  $\{q\}$  e  $s$  come  $n$ -esima incognita. Tuttavia, fissare ad arbitrio una componente di  $\{q\}$  può portare a problemi numerici: se infatti accade che venga posta pari ad 1, per esempio, una componente di  $\{q\}$  di ampiezza trascurabile rispetto ad altre, se non nulla, ciò introdurrà un malcondizionamento numerico del problema. È per questo che in realtà, anziché fissare una componente di  $\{q\}$ , si introduce una equazione in più nel sistema: una equazione di normalizzazione per il vettore  $\{q\}$ , ovvero una relazione supplementare tra le sue componenti. Tale equazione di normalizzazione è posta nella forma:

$$\frac{1}{2} \{q\}^T \{q\} = 1 \quad (4.12)$$

o più in generale

$$\frac{1}{2} \{q\}^T [W] \{q\} = 1$$

dove  $[W]$  è una opportuna matrice diagonale di pesi. Quindi ci siamo ricondotti ad un sistema non lineare di  $n + 1$  equazioni in  $n + 1$  incognite, cioè  $s$  e le  $n$  componenti di  $\{q\}$ :

$$\begin{aligned} [F(s, V)] \{q\} &= 0 \\ \frac{1}{2} \{q\}^T [W] \{q\} - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

La soluzione di tale sistema non lineare verrà ora presentata attraverso il classico metodo di *Newton-Raphson*, sia nella forma tradizionale che modificata. Il metodo consiste nell'approssimare il sistema da risolvere con un suo sviluppo arrestato al primo ordine. Dato cioè il sistema non lineare  $\{f(\{x\})\} = \{0\}$  esso viene approssimato con

$$\{f(\{x_0\})\} + [J_0] (\{x\} - \{x_0\}) = \{0\} \quad (4.14)$$

dove  $[J_0]$  è la matrice Jacobiana di  $\{f(\{x\})\}$ ,

$$[J_0] = \left[ \frac{\partial \{f(\{x_0\})\}}{\partial \{x\}} \right]$$

valutata in  $\{x\} = \{x_0\}$ . Dall'espressione (4.14), lineare, possiamo risolvere per  $\{x\}$  se la matrice Jacobiana  $[J_0]$  risulta non-singolare, ottenendo

$$\{x\} = \{x_0\} - [J_0]^{-1} \{f(\{x_0\})\}$$

In realtà la  $\{x\}$  ottenuta è una  $\{x_1\}$ , in quanto il processo è iterato secondo la

$$\{x_{i+1}\} = \{x_i\} - [J_i]^{-1} \{f(\{x_i\})\}$$

finché la differenza tra le due iterate successive  $\{x_{i+1}\}$  e  $x_i$  scende sotto una quantità trascurabile fissata a priori (o l'errore sulla funzione  $\{f\}$  scende al di sotto di una soglia considerata accettabile). Applicando il metodo di *Newton-Raphson* al sistema (4.13), la linearizzazione (4.14) diventa:

$$\begin{aligned} [F(s_0, V_0)] \{q_0\} + \frac{\partial ([F] \{q\})}{\partial \{q\}} \{\Delta q\} + \frac{\partial ([F] \{q\})}{\partial s} \Delta s &= 0 \\ \frac{1}{2} \{q_0\}^T [W] \{q_0\} - 1 + \left( \frac{\partial}{\partial \{q\}} \left( \frac{1}{2} \{q\}^T [W] \{q\} \right) \right)^T \{\Delta q\} &= 0 \end{aligned}$$

dove non compare la derivata esplicita rispetto ad  $s$  dell'equazione di normalizzazione. Si è indicato con  $\{\Delta q\}$  la differenza  $\{q\} - \{q_0\}$  e con  $\Delta s$  la differenza tra  $s$  e  $s_0$ . Per vederla con il formalismo della (4.14) basta osservare che la matrice Jacobiana del sistema (4.13) è:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial ([F(s, V)] \{q\})}{\partial \{q\}} & \frac{\partial ([F(s, V)] \{q\})}{\partial s} \\ \left( \frac{\partial}{\partial \{q\}} \left( \frac{1}{2} \{q\}^T [W] \{q\} \right) \right)^T & 0 \end{bmatrix}$$

e il vettore delle variazioni è:

$$\{\Delta x\} = \{x\} - \{x_0\} = \begin{Bmatrix} \{\Delta q\} \\ \Delta s \end{Bmatrix}$$

Esplicitando le formule simboliche delle partizioni della matrice Jacobiana, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial ([F(s, V)] \{q\})}{\partial \{q\}} &= [F(s, V)] \\
&= [M] s^2 + [C] s + [K] - q [H_{am}] \\
\frac{\partial ([F(s, V)] \{q\})}{\partial s} &= \frac{\partial [F(s, V)]}{\partial s} \{q\} \\
&= \left( 2 [M] s + [C] - q \frac{\partial [H_{am}(jk, M)]}{\partial k} \left( j \frac{c}{V} \right) \right) \{q\} \\
\frac{\partial}{\partial \{q\}} \left( \frac{1}{2} \{q\}^T [W] \{q\} \right) &= [W] \{q\}
\end{aligned}$$

dove  $jc/V \equiv \partial k / \partial s$ . Possiamo quindi scrivere il sistema (4.14) in forma compatta:

$$\begin{bmatrix} [F(s, V)] & \frac{\partial [F(s, V)]}{\partial s} \{q\} \\ \{q\}^T [W] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta q\} \\ \Delta s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -[F(s_0, V)] \{q_0\} \\ 1 - \frac{1}{2} \{q_0\}^T [W] \{q_0\} \end{Bmatrix}$$

Ora possiamo illustrare la modalità di impostazione del precedente sistema, che, risolto per  $\{\Delta q\}$  e  $\Delta s$ , ci permette di raffinare il punto di partenza  $\{q_0\}$  e  $s_0$ , ottenendo  $\{q_1\} = \{q_0\} + \{\Delta q\}$  e  $s_1 = s_0 + \Delta s$ , e iterare in questo modo finché la soluzione converge a  $\{\bar{q}\}$  e  $\bar{s}$ .

## 4.5 Implementazione del calcolo

Una delle prime osservazioni da fare quando ci si accinge ad effettuare operativamente il calcolo, è ancora riflettere sulle problematiche portate dalla matrice di trasferimento aerodinamica  $[H_{am}(jk, M)]$ . Come già detto in precedenza, tale matrice è nota solo numericamente sottoforma di tabulati, e solo per un certo insieme di frequenze ridotte  $k$ . Sia il calcolo della matrice Jacobiana che la valutazione del vettore dei termini noti richiede la possibilità di determinare i valori assunti dalla  $[H_{am}(jk, M)]$  che dalla sua derivata rispetto a  $k$ , in corrispondenza dei valori di tentativo  $s_0$  e  $V_0$ . Ci si rende pertanto conto che se possiamo utilizzare per le valutazioni della  $[H_{am}(jk, M)]$  i metodi visti precedentemente (metodo  $p$ - $k$  di ordine zero o di ordine superiore), per quanto riguarda le derivate rispetto a  $k$  è necessaria una interpolazione delle matrici stesse alle varie frequenze ridotte. Questa è sempre una delle parti più onerose di un algoritmo completo di calcolo di flutter; tuttavia si può osservare che il comportamento delle matrici di trasferimento aerodinamiche al variare della frequenza ridotta  $k$  e del numero di *Mach*  $M$  è, come si suol dire, molto “morbido”, ossia regolare, senza brusche variazioni e forti gradienti. Nella pratica si usano con buoni risultati le *spline cubiche* per interpolare le matrici  $[H_{am}(jk, M)]$  e le loro derivate.

Viene ora illustrata l'effettiva messa in pratica del metodo di *Newton-Raphson*, sempre con l'idea originale dell'“inseguimento” degli autovalori del sistema a partire da velocità di volo nulla fino alla velocità massima considerata. Operativamente tale intervallo di velocità, da zero alla massima, verrà suddiviso in un certo numero di intervalli, di ampiezza non necessariamente costante; anzi lo stesso programma di calcolo è di solito in grado di variare l'ampiezza in base alla rapidità di convergenza e ai gradienti degli autovalori rispetto alla velocità di volo. Quindi il processo iterativo viene innescato con una soluzione di tentativo corrispondente ad un modo proprio e alla sua frequenza propria, cioè alla soluzione per  $V = 0$ . Come termini noti, e come termini di valutazione della matrice Jacobiana del sistema, verranno inseriti  $\{q_0\}$  e  $s_0$  corrispondenti ad uno dei modi propri: se l'intervallo di velocità non è troppo ampio (in caso contrario l'algoritmo stesso potrebbe ridurlo), l'iterazione dovrebbe portare a convergenza in pochi passi, poichè un aumento contenuto di velocità porterà generalmente a variazioni contenute degli autovalori e autovettori del sistema, e quindi  $\{q_0\}$  e  $s_0$  sono già una buona approssimazione della soluzione  $\{q_1\}$  e  $s_1$ . Noti ora  $\{q_1\}$  e  $s_1$  alla velocità  $0 + \Delta V$ , si può incrementare ulteriormente la velocità di  $\Delta V$  per passare alla determinazione di  $\{q_2\}$  e  $s_2$ , usando come punto di partenza  $\{q_1\}$  e  $s_1$ . Tale procedimento continua fino alla velocità massima considerata; a questo punto un nuovo modo proprio viene preso come soluzione di tentativo e “inseguito” lungo l'intervallo di velocità. Nella conclusione della presentazione di

questo metodo, non è superfluo fare ancora qualche osservazione. Innanzitutto è opportuno sottolineare che questo approccio porta contemporaneamente alla determinazione delle frequenze proprie e dei modi propri aeroelastici. Inoltre la soluzione può alternativamente essere determinata con versioni “modificate” del metodo di *Newton-Raphson*: per esempio, al fine di diminuire l’onere di calcolo, si può evitare di rivalutare ad ogni passo la matrice Jacobiana del sistema, mantenendola costante per un certo numero di iterazioni.

## 4.6 Metodo di continuazione ed equazioni del flutter

Abbiamo già visto in quale modo le equazioni del flutter possano essere ricondotte ad un sistema non lineare dalla forma simbolica:

$$\begin{aligned} [F(s, V)] \{q(s)\} &= \{0\} \\ N(\{q\}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

con

$$[F(s, M)] = [M] s^2 + [C] s + [K] - q [H_{am}(jk, M)]$$

e

$$N(\{q\}) = \frac{1}{2} \{q\}^T [W] \{q\} - 1$$

È sul sistema (4.15) che applicheremo il metodo di continuazione, di cui è riportata una spiegazione più dettagliata con anche un esempio numerico in appendice. Molto sinteticamente il metodo consiste nell’introdurre una parametrizzazione “fittizia” nel sistema di equazioni e poi differenziare le equazioni stesse rispetto a tale parametro, così da ottenere un sistema di equazioni differenziali. Nel caso delle equazioni del flutter il tutto è semplificato dal fatto che non è necessaria la parametrizzazione fittizia, essendo già presente un parametro che si presta ottimamente al nostro scopo: la velocità  $V$ . Differenziando il sistema (4.15) rispetto alla velocità  $V$  si ottiene simbolicamente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dV} ([F(s, V)] \{q\}) &= 0 \\ \frac{d}{dV} (N(\{q\})) &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

La forma simbolica del sistema (4.16) può essere esplicitata considerando la dipendenza degli autovettori  $\{q\}$  e degli autovalori  $s$  dalla velocità:

$$\frac{d}{dV} ([F(s, V)] \{q\}) = \frac{\partial}{\partial V} ([F(s, V)] \{q\}) + \frac{\partial}{\partial s} ([F(s, V)] \{q\}) \frac{ds}{dV} + \frac{\partial}{\partial \{q\}} ([F(s, V)] \{q\}) \frac{d\{q\}}{dV}$$

mentre

$$\frac{d}{dV} N(\{q\}) = \left( \frac{\partial}{\partial \{q\}} N(\{q\}) \right)^T \frac{d\{q\}}{dV}$$

non essendoci dipendenza diretta della  $N(\{q\})$  da  $V$  oltre a quella attraverso  $\{q\}$ . Sviluppando i vari termini della  $d/dV([F(s, V)]\{q\})$  si ha:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial V}([F(s, V)]\{q\}) &= \frac{\partial[F(s, V)]}{\partial V}\{q\} + [F(s, V)]\frac{d\{q\}}{dV} \\
 &= \left(-\rho V[H_{am}] - \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{\partial[H_{am}]}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial V} - \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{\partial[H_{am}]}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial V}\right)\{q\} \\
 &\quad + [F(s, V)]\frac{d\{q\}}{dV} \\
 &= \left(-\rho V[H_{am}] + \frac{1}{2}\rho \omega c \frac{\partial[H_{am}]}{\partial k} - \frac{1}{2}\frac{\rho V^2}{a} \frac{\partial[H_{am}]}{\partial M}\right)\{q\} + [F(s, V)]\frac{d\{q\}}{dV} \\
 \frac{\partial}{\partial s}([F(s, V)]\{q\})\frac{ds}{dV} &= (2[M]s + [C])\{q\}\frac{ds}{dV} + \left(-\frac{1}{2}\rho V^2 \frac{\partial[H_{am}]}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial s}\right)\{q\}\frac{ds}{dV} \\
 &= (2[M]s + [C])\{q\}\frac{ds}{dV} + \left(-\frac{1}{2}\rho c V \frac{\partial[H_{am}]}{\partial k}\right)\{q\}\text{Im}\left(\frac{ds}{dV}\right)
 \end{aligned}$$

dove si è fatto uso delle relazioni:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial k}{\partial V} &= -\frac{\omega c}{V^2} \\
 \frac{\partial M}{\partial V} &= \frac{1}{a} \\
 \frac{\partial k}{\partial s} &= \frac{1}{\frac{ds}{dk}} = \frac{1}{\frac{d}{dV}\left(\sigma + j\frac{kV}{c}\right)} = \frac{1}{j\frac{V}{c}} = -j\frac{c}{V}
 \end{aligned}$$

mentre  $\text{Im}(\cdot)$  indica la parte immaginaria di un numero complesso. L'ultimo termine è invece semplicemente:

$$\frac{\partial}{\partial \{q\}}([F(s, V)]\{q\})\frac{d\{q\}}{dV} = [F(s, V)]\frac{d\{q\}}{dV}$$

così come:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \{q\}}N(\{q\})\right)^T \frac{d\{q\}}{dV} = \{q\}^T [W] \frac{d\{q\}}{dV}$$

Esplicitati tutti i termini, il sistema differenziale (4.16) si può scrivere nella forma simbolica a matrice partizionata:

$$\begin{bmatrix} [F(s, V)] & \frac{\partial[F(s, V)]}{\partial s}\{q\} \\ \{q\}^T [W] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\{q\}}{dV} \\ \frac{ds}{dV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial[F(s, V)]}{\partial V}\{q\} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siamo quindi giunti ad un sistema di equazioni differenziali nelle incognite  $\{q\}$  e  $s$ : ora tale sistema si presta benissimo alla tecnica di “inseguimento” delle soluzioni al variare della velocità  $V$  da zero fino alla massima velocità considerata. Infatti il problema differenziale è un problema “alle condizioni iniziali” (*initial value problem*), essendo nota la soluzione  $\{q_0\}$  e  $s_0$  per  $V = 0$ : sono come già detto nel paragrafo 4.2 i modi propri strutturali e le loro frequenze proprie. È chiaro che tale problema può ora essere risolto con una tecnica numerica a piacere, purché si affronti la questione, peraltro già incontrata nel paragrafo 4.3, di formulare una opportuna interpolazione per poter valutare la matrice  $[H_{am}]$  e le sue derivate rispetto a  $k$  in corrispondenza di una qualunque frequenza complessa  $s$  e numero di *Mach*  $M$ . Un metodo numerico molto efficiente per la soluzione del sistema è il cosiddetto *predictor-corrector*: tale metodo fa uso di una formula di integrazione esplicita (ad esempio *Eulero*, *Heun*, o altre), per fare una stima, una “previsione” appunto, della soluzione, che poi viene raffinata con un “correttore” quale *Newton-Raphson* stesso o altre formulazioni molto efficienti nel caso si parta già da una buona approssimazione

della soluzione. Se poi il correttore non converge entro un certo numero di passi, si può tornare al predictor diminuendo il passo di integrazione. Nel riferimento bibliografico [] è presentato un algoritmo di soluzione del tipo predictor-corrector che fa uso di un metodo di *Heun* esplicito come predictor e di *Newton-Raphson* come corrector. Come conclusione della presentazione di questo approccio allo studio del problema del flutter, è opportuno presentare anche la semplificazione assunta dal problema quando si voglia determinare il solo punto di flutter, caratterizzato, come ben noto, da smorzamento nullo. Pertanto in questo caso siamo interessati ad una soluzione del tipo:

$$\begin{aligned} s &= j\omega_F \\ \{q\} &= \{q_F\} \end{aligned}$$

ovvero di un autovalore immaginario puro in corrispondenza di una velocità di flutter  $V_F$ . Quindi il problema si riduce ad avere  $2n + 2$  incognite, ossia le  $n$  parti reali e parti immaginarie degli autovettori  $\{q_F\}$  insieme a  $\omega_F$  e  $V_F$ , in  $2n + 2$  equazioni in cui vengono separate le parti reali ed immaginarie delle  $n + 1$  equazioni del sistema (4.15). Abbiamo ancora un sistema non lineare che possiamo risolvere con il metodo di *Newton-Raphson* come mostrato nel paragrafo 4.4, considerando ora come variabili, rispetto alle quali calcolare la matrice Jacobiana e risolvere per gli incrementi non più  $s$  e  $\{q\}$ , ma  $\omega_F$ ,  $V_F$  e  $\{q_F\}$ . Quindi il problema di flutter assume la forma:

$$\begin{aligned} (-[M]\omega_F^2 + j[C]\omega_F + [K] - q_F[H_{am}(jk_F, M_F)])\{q_F\} &= \{0\} \\ \frac{1}{2}\{q_F\}^T[W]\{q_F\} - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

e il suo sviluppo al primo ordine rispetto alle variabili  $\omega_F$ ,  $V_F$  e  $\{q_F\}$  è:

$$\begin{bmatrix} [F] & \frac{\partial[F]}{\partial\omega_F}\{q_F\} & \frac{\partial[F]}{\partial V_F}\{q_F\} \\ \{q_F\}^T[W] & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\{q_F\} \\ \Delta\omega \\ \Delta V_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -[F]\{q_F\} \\ 1 - \{q_F\}^T[W]\{q_F\} \end{Bmatrix}$$

con

$$[F] = (-[M]\omega_F^2 + j[C]\omega_F + [K] - q_F[H_{am}(k_F, M_F)]) \quad (4.18)$$

Le precedenti partizioni della matrice Jacobiana, scritte per intero, sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial[F]}{\partial\omega_F} &= \left( -2[M]\omega_F + j[C] - \frac{1}{2}\rho c V_F \frac{\partial[H_{am}]}{\partial k_F} \right) \{q_F\} \\ \frac{\partial[F]}{\partial V_F} &= \left( -\rho V_F [H_{am}] + \frac{1}{2}\rho\omega_F c \frac{\partial[H_{am}]}{\partial k_F} - \frac{1}{2} \frac{\rho V_F^2}{a} \frac{\partial[H_{am}]}{\partial M_F} \right) \{q_F\} \end{aligned}$$

come si può facilmente verificare.

## 4.7 Calcolo di sensitività del punto di flutter

Il metodo di continuazione, così come è stato presentato nel paragrafo precedente, è suscettibile di altre applicazioni, dato che il parametro rispetto al quale vengono derivate le equazioni del sistema (4.15) non deve essere necessariamente la velocità del vento asintotico, ma potrebbe essere un qualunque parametro presente nelle equazioni stesse o addirittura un parametro fittizio introdotto *ad hoc*. Si consideri ad esempio l'applicazione del metodo di continuazione per la determinazione della sensitività del punto di flutter rispetto ad un parametro strutturale della matrice di massa. Riprendiamo le equazioni (4.17) del paragrafo 4.6 per il calcolo diretto del punto di flutter. Come già osservato tale sistema è formato da  $n + 1$  equazioni complesse, quindi  $2n + 2$  equazioni scalari, in  $2n + 2$  incognite scalari: è perciò un problema consistente e risolubile come visto per esempio nel paragrafo 4.6. Quello che ora vogliamo fare è riprendere la linearizzazione del sistema rispetto alle incognite assunte,  $\omega_F$ ,  $V_F$  e  $\{q_F\}$ , e ora però

## DIAGRAMMA V-OMEGA PARAMETRIZZATO IN S-M

Figura 4.4: Diagramma  $V$ - $\omega$  parametrizzato in  $S_m$ .

derivare rispetto ad un parametro strutturale della matrice di massa, il momento statico  $S_m$ , per esempio. Quindi la linearizzazione è sempre:

$$\begin{bmatrix} [F] & \frac{\partial [F]}{\partial \omega_F} \{q\} & \frac{\partial [F]}{\partial V_F} \{q\} \\ ([W] \{q\})^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \{q_F\} \\ \Delta \omega_F \\ \Delta V_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -[F] \{q\} \\ 1 - \frac{1}{2} \{q\}^T [W] \{q\} \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

dove  $[F]$  è definita dalla (4.18). Derivando la (4.17) rispetto al momento statico  $S_m$ , si ottiene quello che è già stato chiamato il *predictor*,

$$\begin{bmatrix} [F] & \frac{\partial [F]}{\partial \omega_F} \{q\} & \frac{\partial [F]}{\partial V_F} \{q\} \\ ([W] \{q\})^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d \{q_F\}}{d S_m} \\ \frac{d \omega_F}{d S_m} \\ \frac{d V_F}{d S_m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial [F]}{\partial S_m} \{q\} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Ecco che possiamo utilizzare la tecnica vista nel paragrafo 4.6, usando la (4.20) come predictor e la (4.19) come corrector. Ovviamente l'inseguimento della soluzione  $\{\{q_F\}, \omega_F, V_F\}^T$  verrà eseguito partendo dal valore di progetto di  $S_m$ , fino al valore desiderato di tale parametro. Si è scelto poi, nelle applicazioni, di rappresentare tale sensitività proprio con il diagramma che mostra la curva dei punti di flutter  $(V_{F_i}, \omega_{F_i})$  nel piano  $(V, \omega)$ , parametrizzata nei valori di momento statico tra  $S_m^0$  e  $S_m$ , come descritto in figura 4.4.

## 4.8 Equazione di normalizzazione degli autovettori

Nei paragrafi 4.4 e 4.6 si è introdotta l'equazione di normalizzazione (4.12):

$$\frac{1}{2} \{q\}^T [W] \{q\} = 1$$

accanto al sistema omogeneo di calcolo del flutter. Vogliamo ora ritornare sulla (4.12) per evidenziare il fatto che in alcuni casi può portare ad una riduzione dell'efficienza del metodo. Infatti non è sempre detto che si possano normalizzare autovettori complessi non nulli in modo da soddisfare la (4.12). Può succedere che esistano autovettori non nulli, tali che però sia:

$$\frac{1}{2} \{q\}^T [W] \{q\} = 0$$

Perciò aggiungere la (4.12) al sistema significherebbe in questo caso forzare il problema ad una soluzione errata. Vediamo subito con un esempio in un caso semplice, in cui l'autovettore  $\{q\}$  è  $2 \times 1$  e la matrice dei pesi  $[W] = [I]$ . In questo caso se l'autovettore  $\{q\}$  converge al vettore

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} 1+j \\ 1-j \end{Bmatrix}$$

è immediato constatare che tale autovettore non nullo non può soddisfare la (4.12), dato che:

$$\frac{1}{2} \{q\}^T [W] \{q\} = \begin{Bmatrix} 1+j \\ 1-j \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 1+j \\ 1-j \end{Bmatrix} = 0$$

Questo semplice caso è mostra come si possano mettere in crisi le condizioni espresse dalla (4.12), che si possono esplicitare come segue:

$$\frac{1}{2} \{q\}^T [W] \{q\} = 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2} \{q\}^T [W] \{q\} \right) = 1 \\ \operatorname{Im} \left( \frac{1}{2} \{q\}^T [W] \{q\} \right) = 0 \end{cases}$$

ossia in termini di componenti,  $q_k = q_{Rk} + jq_{Ik}$ :

$$\begin{aligned} \sum_k W_k q_{Rk}^2 - \sum_k W_k q_{Ik}^2 &= 1 \\ 2j \sum_k W_k q_{Rk} q_{Ik} &= 0 \end{aligned}$$

ovvero, nel caso la matrice dei pesi  $[W]$  sia pari alla matrice unità,

$$\begin{aligned} \sum_k q_{Rk}^2 - \sum_k q_{Ik}^2 &= 1 \\ 2j \sum_k q_{Rk} q_{Ik} &= 0 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Si vede quindi che è facile mandare in crisi, per esempio, la (4.21) scegliendo un autovettore con un numero pari di componenti, a due a due complesse coniugate con parte reale in valore assoluto pari alla parte immaginaria. La soluzione al problema consiste nel cambiare l'equazione di normalizzazione (4.12). Utilizzeremo una equazione tuttavia molto simile alla (4.12), anzi, quest'ultima sarà un caso particolare della nuova. Infatti se consideriamo la seguente:

$$\frac{1}{2} \{q\}^* [W] \{q\} = 1 \tag{4.22}$$

in cui l'asterisco  $(\cdot)^*$  ha il significato di *coniugato del trasposto* del vettore (o in generale della matrice) in questione<sup>5</sup>, si può subito notare che la (4.22) è equivalente alla (4.12) nel caso in cui il vettore  $\{q\}$  abbia componenti reali. La (4.22) però ha il vantaggio di evitare i problemi di cui si è parlato precedentemente, poiché utilizzando il coniugato del trasposto nel prodotto, il termine di destra dell'equazione è nullo solo se il vettore ha norma nulla. A questo punto però sorge un dubbio: quando nel paragrafo 4.4 è stata introdotta la (4.12) si disse che, essendo una equazione complessa, equivalente quindi a due equazioni scalari, il bilancio incognite-equazioni era pari. Ora la (4.22) è palesemente una equazione reale, essendo la sua parte immaginaria sempre nulla, e quindi ci ritroviamo con un'equazione in meno nel bilancio. Il problema tuttavia non sussiste se pensiamo che il sistema non lineare formato dalle (4.11) e (4.22), ossia:

$$\begin{aligned} ([M] s^2 + [C] s + [K] - q [H_{am}(jk, M)]) \{q\} &= \{0\} \\ \frac{1}{2} \{q\}^* [W] \{q\} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

deve poi essere linearizzato. E quando la (4.22) viene linearizzata diventa un'equazione complessa con parte immaginaria non identicamente nulla: quindi equivale a due equazioni scalari e il bilancio torna, potendo così risolvere il singolo passo del metodo di *Newton-Raphson* per gli incrementi  $\Delta s$  e  $\Delta \{q\}$ . Analiticamente si vede che nella linearizzazione:

$$\frac{1}{2} \{q\}^* [W] \{q\} - 1 \cong \frac{1}{2} \{q_0\}^* [W] \{q_0\} - 1 + \{q_0\}^* [W] \Delta \{q\} = 0$$

si recupera la parte immaginaria dell'equazione grazie al termine

$$\{q_0\}^* [W] \Delta \{q\}$$

<sup>5</sup>Si noti che, ad esempio, in ambiente `matlab` l'operatore che esegue la trasposizione (l'apice singolo) è definito in modo tale che quando viene applicato a strutture dati complesse compie automaticamente anche l'operazione di coniugazione.



## Capitolo 5

# Modi di accelerazione

Viene presentata la tecnica di soluzione di problemi dinamici complessi attraverso la soluzione della dinamica di un sottoproblema ridotto, ed il recupero della soluzione in termini di deformazioni e sforzi mediante i cosiddetti modi di accelerazione, ovvero la residualizzazione statica della dinamica ad alta frequenza e il calcolo delle sollecitazioni mediante somma diretta delle forze. I diversi aspetti del problema sono discussi, ed in particolare ne viene analizzata la convergenza. L'approccio, in forma embrionale, è presentato in [1], e alcuni aspetti sono discussi in [5] (pp. 163–174), anche se in tale sede non viene completamente sviluppato e portato a compimento nella forma più generale.

### 5.1 Definizione del problema

Si consideri il problema dinamico di un sistema lineare, dato dalla equazione

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t) \quad (5.1)$$

dove le incognite  $u$  e le loro derivate possono essere pensate come coordinate libere in senso lagrangiano di un problema olonomo, e quindi, in un contesto generale di tipo prettamente applicativo, come incognite nodali di un modello ad elementi finiti. Di conseguenza le matrici  $M$ ,  $C$ ,  $K$  assumono il significato di matrici di massa, di smorzamento viscoso e di rigidezza del sistema, mentre il vettore  $f(t)$  contiene le forze nodali applicate al sistema. Il sistema abbia dimensione  $n$  in generale molto grande, tale da rendere poco efficiente o comunque sconsigliabile la soluzione diretta del problema (5.1) mediante integrazione diretta nel tempo o in frequenza.

#### 5.1.1 Natura dei carichi

La conoscenza della dinamica di un sistema, attraverso l'integrazione nel tempo delle relative equazioni, consente la determinazione dei carichi di origine dinamica a cui esso è sottoposto durante la sua evoluzione. Tali carichi, in aggiunta a quelli imposti o comunque in genere non dipendenti dalla configurazione, consentono di determinare le sollecitazioni a cui la struttura è sottoposta; essi in generale possono avere diversa natura, ma tipicamente sono dati dalle forze di inerzia e da eventuali forze dissipative di tipo viscoso nel caso si consideri un modello lineare. In problemi aeroelastici, anche le forze aerodinamiche forniscono carichi dipendenti dalla configurazione. Si considerino separatamente i diversi tipi di carichi.

#### Carichi inerziali

Sono dati dal prodotto della matrice di inerzia per le accelerazioni dei nodi. La matrice di inerzia, a sua volta, è calcolata a partire dalla discretizzazione delle accelerazioni

$$\begin{aligned} x &= Nu \\ \dot{x} &= N\dot{u} \\ \ddot{x} &= N\ddot{u} \end{aligned}$$

che si ottengono per derivazione dei moltiplicatori degli spostamenti nodali, mentre la loro distribuzione spaziale è data dalle funzioni di forma e quindi corrisponde a quella degli spostamenti, in quanto l'approssimazione degli elementi finiti opera la separazione della risoluzione spaziale rispetto a quella temporale. Le forze di inerzia si ottengono da una relazione del tipo

$$f_i = -\rho \ddot{x}$$

dove  $\rho$  è la densità del materiale considerato. Nel modello discreto, le forze d'inerzia applicate ai nodi hanno la forma

$$F_i = - \left( \int_V N^T \rho N dV \right) \ddot{u} = -M \ddot{u}$$

Si noti quindi la doppia dipendenza dalle funzioni di forma  $N$ .

### Carichi aerodinamici

Sono dati dal calcolo delle forze aerodinamiche, indipendentemente dal metodo utilizzato, a partire dalle condizioni al contorno di velocità normale al corpo aerodinamico nulla; questa risulta nella condizione

$$V_n = (\dot{x} + V_\infty \cdot \nabla x) \cdot n$$

dove il primo termine descrive la cosiddetta incidenza cinematica, legata al movimento del velivolo, ed il secondo l'incidenza geometrica, legata al trascinamento tra velivolo e fluido. Quest'ultima fa dipendere le forze aerodinamiche dal gradiente della posizione

$$\nabla x = (\nabla N) u$$

L'effetto del gradiente della posizione, formalmente assimilabile agli sforzi

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left( \nabla x + (\nabla x)^T \right)$$

è in realtà completamente diverso come natura, infatti i carichi aerodinamici sono relativamente piccoli rispetto alle forze elastiche, e i loro effetti sulla dinamica del sistema si fanno sentire sicuramente a livello globale, ma di solito sono trascurabili a livello locale. Quindi, se è vero che il gradiente della posizione è assimilabile agli sforzi, e che essendo tipicamente la derivata di funzioni polinomiali il suo ordine è inferiore a quello degli spostamenti, le condizioni al contorno aerodinamiche sono ben descritte anche da una approssimazione più grossolana perché l'effetto maggiore sulle forze si ha quando il loro andamento è relativamente regolare.

### 5.1.2 Relazione tra carichi e deformate

Dal momento che in questa trattazione si assume implicitamente un approccio agli spostamenti nella descrizione della dinamica del sistema, è opportuno ricordare che le ipotesi fondamentali su cui l'approccio si basa sono di consistenza della base di deformazioni scelte. In parole povere la base di spostamenti usata deve rispettare implicitamente, o meglio intrinsecamente, le condizioni al contorno di tipo cinematico, o imposto, ovvero la congruenza. Le condizioni al contorno naturali, ovvero l'equilibrio tra carichi imposti ed azioni interne, vengono quindi soddisfatte in modo approssimato dalla soluzione, e l'accuratezza aumenta con il crescere del numero di gradi di libertà, fino a convergenza quando si usi la base completa. Una conseguenza immediata è che in generale le azioni interne ottenute attraverso una base di spostamenti relativamente "povera" soddisfano solo in misura limitata l'equilibrio interno del sistema. Per azioni interne ci si riferisce tipicamente agli sforzi, ma qui si intendono in generale le forze elastiche scritte in dipendenza dalla configurazione discretizzata  $u$  nella forma  $\sigma = \sigma(u) = D\mathcal{E}(N)u$ , dove  $\mathcal{E}(\cdot)$  è un opportuno operatore differenziale che esprime la deformazione, e  $D$  è il relativo legame costitutivo; ad esempio, per la flessione di una trave si scrive  $M_f = EJy'' = EJN''u$ . Questo può essere spiegato in modo intuitivo ricordando che l'equilibrio scritto a livello di sforzi considera le deformazioni come derivate degli spostamenti, quindi gli sforzi scritti per esempio in forma polinomiale saranno sempre

almeno di un grado inferiori agli spostamenti. Inoltre, siccome gli sforzi partecipano all'equilibrio in forma derivata (l'equazione di equilibrio per un continuo è  $\nabla \cdot \sigma + f = 0$ , mentre per la flessione di una trave è  $(EJy'')'' + T' = 0$ ), saranno sempre almeno di un ordine superiori al carico che possono equilibrare in modo esatto. Se si considera un modello di trave, caricato a torsione da sollecitazione distribuita in modo uniforme, ad esempio dal momento torcente dovuto alla portanza dell'ala per una rotazione rigida:

$$M_t(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) qeLcC_{P/\alpha}\alpha_0$$

occorre uno sviluppo polinomiale di secondo grado per descriverne la torsione distribuita:

$$\vartheta(x) = \left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{2L^2}\right) \frac{qeLcC_{P/\alpha}\alpha_0}{GJ/L}$$

dove si è integrata la consueta equazione di equilibrio alla torsione  $(GJ\vartheta')' + m_t = 0$ . Quindi la deformata conseguente ad un carico è due ordini superiore al carico e, se il carico come nel caso aeroelastico dipende dalla configurazione, è evidente che si potrà avere la soluzione esatta solo a convergenza dello sviluppo usato per descrivere la soluzione.

## 5.2 Condensazione del problema

Vengono ora illustrati i concetti attraverso i quali si arriva alla condensazione di un modello. In questa fase ci si occupa di sistemi puramente meccanici per semplificare la trattazione. Il problema aeroelastico verrà ripreso più avanti.

### 5.2.1 Modi propri

Si consideri la parte omogenea del problema (5.1), data da

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0$$

Si considerino inizialmente solo i termini elastico ed inerziale, ovvero

$$M\ddot{u} + Ku = 0$$

Mediante trasformazione nel dominio di *Laplace*, il problema diventa

$$(s^2M + K)u = 0 \tag{5.2}$$

Esso rappresenta un problema agli autovalori in forma non canonica. Il problema in forma canonica è

$$Ax = x\lambda$$

e, per un problema reale simmetrico, porta a determinare un insieme di autovalori reali  $\lambda$  e una matrice di autovettori reali  $X$  tra loro ortogonali. Il problema in forma canonica può essere scritto in forma matriciale simultaneamente per tutti gli autovalori come

$$AX = X\Lambda$$

dove la matrice  $\Lambda$  è diagonale, e come elementi diagonali riporta gli autovalori. Se la matrice  $A$  non è simmetrica, si definiscono due problemi agli autovalori, i problemi *destro* e *sinistro*:

$$\begin{aligned} AX &= X\Lambda \\ A^TY &= Y\Lambda \end{aligned}$$

gli autovalori  $\Lambda$  sono gli stessi, mentre gli autovettori coincidono se  $A^T = A$ , ovvero se il problema è simmetrico. Il problema dinamico (5.2) all'occorrenza può essere riscritto in forma canonica<sup>1</sup> invertendo la matrice di massa  $M$  (o la matrice di rigidezza  $K$ ):

$$M^{-1}Ku = u(-s^2)$$

---

<sup>1</sup>Il problema canonico risultante in genere non è simmetrico; tuttavia si può verificare che se entrambe le matrici sono reali e simmetriche gli autovettori destri e sinistri coincidono.

ma ciò in genere non è necessario in quanto anche il problema in forma non-canonica può essere risolto direttamente; inoltre in alcuni casi è preferibile procedere in modo diverso, con considerevoli vantaggi dal punto di vista computazionale. Gli autovettori sono ortogonali tra loro; tornando al problema in forma canonica, essi godono della proprietà

$$X^T X = I$$

ovvero

$$\begin{aligned} x_i^T x_j &= 0 & i \neq j \\ x_i^T x_j &= 1 & i = j \end{aligned}$$

Questa proprietà può essere desunta dalla scrittura della matrice  $A$  in forma spettrale:

$$A = X \Lambda X^T$$

in cui la matrice viene riscritta a partire dalla sua forma diagonale  $\Lambda$  mediante proiezione nelle direzioni degli autovettori  $X$ . Quindi, ricordando la forma del problema canonico, si ottiene

$$AX = X \Lambda X^T X = X \Lambda$$

da cui risulta  $X^T X = I$ . Questa proprietà indica che i modi propri sono ortogonali fra loro, ovvero linearmente indipendenti; quindi, se la matrice non è singolare, essi costituiscono un cambiamento di base di coordinate. Si consideri ora di nuovo il problema dinamico in forma non-canonica; se le matrici di massa e di rigidezza sono state ottenute attraverso il Principio dei Lavori Virtuali sono simmetriche e definite positive, o al più semidefinite positive se si considera un sistema libero nello spazio o se non a tutti i nodi sono associate inerzie. Quindi gli autovalori di matrici reali simmetriche definite positive o semidefinite sono reali e positivi, o al più nulli. Si noti però che  $\lambda = -s^2$ , quindi ad ogni autovalore  $\lambda$  reale corrispondono due autovalori  $s = \pm j\sqrt{\lambda}$  immaginari puri e coniugati. Se si ribattezza  $\omega = \sqrt{\lambda}$ , si ottiene la usuale definizione delle frequenze proprie di un sistema meccanico. Dato che le matrici sono simmetriche, gli autovettori corrispondenti sono anch'essi reali, e sono anch'essi ortogonali. Ora però il disaccoppiamento va inteso in senso energetico; infatti i modi  $U$  associati agli autovalori  $\lambda$  diagonalizzano le matrici di inerzia e di rigidezza, ovvero

$$\begin{aligned} m &= U^T M U \\ k &= U^T K U \end{aligned}$$

Applicando il cambiamento di coordinate  $U$  al problema dinamico, si ottiene

$$U^T (s^2 M + K) U q = 0$$

da cui risultano  $n$  equazioni disaccoppiate<sup>2</sup>

$$(s^2 m + k) q = 0$$

Se si sceglie, come criterio di normalizzazione degli autovettori, la norma unitaria della matrice di massa, quindi  $m = I$ , la rigidezza modale è rappresentata direttamente dai quadrati delle frequenze proprie

$$k = \Omega^2$$

Il criterio di normalizzazione è del tutto arbitrario, in quanto i modi sono definiti a meno di una costante moltiplicativa. In certi casi è preferibile la normalizzazione a norma unitaria, cioè  $U^T U = I$ , oppure la normalizzazione “fisica”, in cui si rende unitario lo spostamento di un punto ritenuto significativo, ad esempio lo spostamento di estremità di una semiala. Nel seguito viene considerato implicitamente il

<sup>2</sup>In letteratura numerosi autori danno un peso eccessivo a questa proprietà. Se è vero che in sistemi meccanici semplici o in applicazioni specialistiche la possibilità di scrivere equazioni disaccoppiate consente la scrittura di formulazioni ed algoritmi particolarmente efficienti, in aeroelasticità la presenza delle forze aerodinamiche accoppia i gradi di libertà del sistema, quindi è spesso inutile cercare di disaccoppiarne la sola parte meccanica.

criterio a massa unitaria<sup>3</sup>, ma un qualsiasi criterio può essere utilizzato senza ledere la generalità della formulazione. Diverse normalizzazioni potranno essere usate a titolo di esempio nello svolgimento degli esercizi. In conclusione, il problema dell'analisi modale è completamente determinato da tre informazioni: le frequenze proprie  $\omega$ , i modi propri  $U$  e, se la normalizzazione non è a massa unitaria, la conoscenza delle masse o delle rigidità modali.

### 5.2.2 Smorzamento

Si introduca ora lo smorzamento strutturale. Le forze viscosi con cui viene descritto in prima approssimazione lo smorzamento strutturale in generale non trovano riscontro in alcun principio fisico; se è ragionevole in prima battuta pensare a forze viscosi dipendenti dalla velocità relativa tra corpi, e quindi legate alle velocità di deformazione, non vi è alcuna giustificazione per forze viscosi dipendenti dalla velocità assoluta. Infatti lo smorzamento nelle strutture è legato in piccola parte a fenomeni isteretici dei materiali soggetti a deformazione, e in maggior misura ad attriti di tipo Coulombiano che si manifestano nelle giunzioni. Tali fenomeni hanno natura fortemente non lineare, e la loro descrizione anche qualitativa è decisamente complessa. La giustificazione euristica che si dà di solito dello smorzamento viscoso è basata sulla considerazione che al di fuori della risonanza le forze viscosi sono piccole rispetto a quelle elastiche ed inerziali, quindi è sufficiente usare un modello semplice, che conservi la sostanziale linearità del problema pur introducendo nel modello il fondamentale effetto della dissipazione. Lo smorzamento strutturale, in genere, accoppia tra loro i modi propri; si consideri infatti la parte omogenea del problema meccanico completo

$$(s^2 M + sC + K) u = 0$$

esso può essere scritto al primo ordine in forma non canonica come

$$\left( s \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & K \\ -I & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} v \\ u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

In questo caso le matrici non sono più simmetriche e gli autovalori e gli autovettori che ne risultano sono in genere complessi coniugati. Un caso particolare si verifica quando la matrice di smorzamento  $C$  viene espressa come combinazione lineare delle matrici di massa e di rigidità; in tal caso, pur restando gli autovalori complessi coniugati, gli autovettori sono di nuovo reali. Infatti, definendo  $C = \alpha M + \beta K$ , il problema diventa

$$((s^2 + s\alpha) M + (s\beta + 1) K) u = 0$$

che corrisponde al problema senza smorzamento a patto di ridefinire l'autovalore come

$$\lambda = -\frac{s^2 + s\alpha}{s\beta + 1}$$

A questo punto, sostituendo la variabile di Laplace  $s$  con  $s = \sigma + j\omega$  e indicando con  $\hat{\omega}$  la frequenza ottenuta senza considerare lo smorzamento strutturale, si ottiene

$$s = -\frac{\alpha + \beta\hat{\omega}^2 \pm \sqrt{(\alpha + \beta\hat{\omega}^2)^2 - \hat{\omega}^2}}{2}$$

Questo risultato consente di usare i modi estratti in assenza di smorzamento preservandone le caratteristiche di disaccoppiamento energetico, e di mantenere un certo controllo sulla distribuzione di smorzamento sui diversi modi agendo sui parametri  $\alpha$  e  $\beta$ . Se si assume che lo smorzamento strutturale sia “piccolo”, ovvero che i coefficienti siano molto minori di 1, e se la frequenza del sistema non smorzato non è troppo piccola, gli autovalori degenerano in

$$s \cong -\frac{\alpha + \beta\hat{\omega}^2}{2} \pm j\hat{\omega}$$

---

<sup>3</sup>La normalizzazione a massa unitaria è possibile solo se a tutti i gradi di libertà corrisponde un'inerzia. Al contrario, una normalizzazione a rigidità unitaria è possibile solo se non vi sono modi a energia di deformazione nulla. Questo precluderebbe ad esempio l'uso di modi rigidi, per i quali la rigidità modale è nulla.

quindi l'effetto dello smorzamento consiste nell'introdurre una parte reale dell'autovalore senza alterare troppo la parte immaginaria. Nei casi limite, quando la frequenza è molto alta o prossima a zero, il discriminante dell'autovalore diventa positivo e le radici diventano entrambe reali e distinte, una tendente a zero e l'altra ad un valore finito, dando luogo ad un comportamento diverso da quello desiderato e quindi mandando in crisi il modello.

### 5.2.3 Interazioni tra i modi e la forzante

Si consideri un semplice problema del tipo

$$M\ddot{u} + Ku = f(t)$$

e si operi una sostituzione della base di spostamenti nodali con la base modale completa  $U$ :

$$m\ddot{q} + kq = U^T f(t)$$

Il problema è stato ricondotto in forma di equazioni disaccoppiate grazie alla proprietà di ortogonalità energetica degli autovettori. La soluzione può quindi aver luogo nel dominio delle frequenze in modo banale, nella forma

$$q(j\omega) = \text{diag}\left(\frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2}\right) U^T f(j\omega)$$

dove si è assunta la normalizzazione a massa unitaria degli autovalori; si ricordi che a rigore il problema non può essere risolto in frequenza se il sistema non è smorzato; tuttavia l'effetto dello smorzamento verrà considerato a parte perché non altera il significato delle osservazioni che verranno proposte. La soluzione nelle coordinate fisiche si ricava come

$$u(j\omega) = U \text{diag}\left(\frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2}\right) U^T f(j\omega)$$

Questa relazione contiene numerose informazioni che ad una attenta lettura ci mostrano come sia possibile operare una riduzione delle dimensioni del modello basata sulla conoscenza del contenuto in frequenza del sistema, e del contenuto in frequenza e della distribuzione spaziale della forzante.

### Indipendenza delle soluzioni modali

Si consideri innanzitutto il fatto che la soluzione relativa ad un modo non dipende dalla soluzione degli altri modi in quanto i modi sono fra loro dinamicamente indipendenti, quindi se la risposta di un modo non è significativa, il suo contributo alla risposta totale può essere eliminato senza particolari conseguenze.

### Separazione in frequenza delle risposte modali

Se un modo ha frequenza particolarmente elevata rispetto alla banda della forzante ( $\omega_i \gg \omega$ ), la sua risposta è trascurabile perché la frequenza  $\omega_i$  compare al denominatore elevata al quadrato; questo significa che il modo non viene eccitato significativamente dalla forzante, e quindi il suo contributo alla dinamica della risposta è trascurabile.

### Risoluzione spaziale della forzante

Se una forzante ha distribuzione spaziale relativamente regolare, indipendentemente dal suo contenuto in frequenza il suo effetto sui modi ad elevata risoluzione spaziale è ridotto e può essere ritenuto in modo grossolano inversamente proporzionale alla frequenza del modo.

### Esempio 5.1 : Trave

*Un esempio immediato di questa considerazione può essere ottenuto valutando l'espressione del termine  $U^T f(t)$  qualora si consideri una trave uniforme appoggiata agli estremi e caricata con una distribuzione*

uniforme di carico; di questo problema si conoscono in forma analitica sia le frequenze che le deformate modali, rispettivamente date da

$$\omega = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

e

$$x = \sin(k\pi\zeta/L)$$

dove  $\zeta$  è un'ascissa lungo la trave che varia da 0 a  $L$ , mentre  $k$  è il numero d'ordine del modo. Se si considera come caso limite una forzante variabile in modo arbitrario con il tempo e quindi con la frequenza, ma costante nello spazio, il lavoro generalizzato di un modo è

$$\begin{aligned} Q_k &= \int_L \sin(k\pi\zeta/L) d\zeta = -F_0 L / (k\pi) (\cos(k\pi) - \cos(0)) \\ &= \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ 2F_0 L / k\pi & k \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

Si noti che in caso di modi antisimmetrici, con  $k$  pari, il lavoro è direttamente nullo; questa considerazione può essere ricavata anche in modo intuitivo considerando che l'area sottesa da un'onda completa di seno è nulla, e quindi lo stesso vale per un multiplo di onde complete. Si noti poi che il lavoro compiuto dai modi simmetrici, con  $k$  dispari, è diverso da zero, ma è inversamente proporzionale all'indice del modo,  $k$ , quindi, come risulta dall'espressione delle frequenze, inversamente proporzionale alla radice quadrata della frequenza. Questo si spiega considerando che, per un numero dispari di semionde di seno  $k$ , le prime  $k-1$  si elidono e rimane solo il lavoro compiuto dall'ultima semionda, che è pari alla  $k$ -esima parte del lavoro compiuto dal primo modo caratterizzato da una sola semionda.

**Esercizio 5.1** Si calcoli la deformata statica di una trave di rigidità flessionale uniforme, appoggiata agli estremi, e caricata da una distribuzione uniforme di carico; utilizzando la deformata così calcolata, si stimi, con il metodo di Rayleigh, la frequenza del primo modo flessionale della trave nell'ipotesi di densità lineare uniforme e lo si confronti con la soluzione esatta

$$\omega = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

(suggerimento:

$$\lambda = \frac{\int_L x''^T EJ x'' d\zeta}{\int_L x^T m x d\zeta}$$

si sfruttino le proprietà di simmetria dei polinomi).

### Controindicazioni

Vi sono alcune controindicazioni a quanto visto sopra. In alcuni problemi strutturali, tipici delle costruzioni aeronautiche, vi possono essere modi a frequenze relativamente basse, perché legate a componenti molto flessibili, che tuttavia sono puramente locali e non contribuiscono significativamente alla risposta globale del sistema. Si pensi ad esempio a modi di pannello nel rivestimento di un velivolo: le frequenze sono basse, ma il modo è circoscritto alla sola deformazione del pannello, senza riflessi apprezzabili sulla dinamica del velivolo perché la massa del pannello è piccola in confronto alla massa totale, e quindi la sua oscillazione non riesce ad interessare la dinamica globale. È opportuno isolare ed escludere questi modi da una eventuale base ridotta, adottando tecniche appropriate. Al contrario, vi possono essere situazioni in cui a grosse masse, la cui vibrazione interessa la dinamica dell'intero velivolo, sono associate connessioni con il sistema dalla rigidità particolarmente elevata; un classico esempio è dato dai motori in un moderno velivolo da trasporto, la cui massa considerevole è connessa alla struttura alare da un pilone molto rigido. Anche in questo caso, un criterio di riduzione della base modale basato unicamente sulla separazione in frequenza rischia di fallire, escludendo modi importanti per la dinamica globale.

### 5.2.4 Riduzione della base modale

La riduzione della base modale porta ad avere un set di deformate modali  $\tilde{U}$  che è un sottoinsieme della base completa. Valgono ancora le proprietà di ortogonalità della base completa, solo che le matrici ridotte sono un sottoinsieme delle matrici diagonalizzate iniziali, in cui sono esclusi i coefficienti legati ai modi trascurati. Il problema ridotto diventa

$$\text{diag}(\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2) \tilde{q} = \tilde{U}^T f(j\omega)$$

o, nel dominio del tempo,

$$\ddot{\tilde{q}} + \tilde{\Omega}^2 \tilde{q} = \tilde{U}^T f(t)$$

e il recupero della soluzione in termini di incognite nodali si ha semplicemente come

$$u = \tilde{U} \tilde{q}$$

Si noti come questa soluzione consenta di ottenere direttamente gli spostamenti nodali, e da essi le deformazioni e gli sforzi. Tuttavia occorre ricordare che la soluzione appena determinata contiene solo la risposta relativa ad un numero ridotto di modi, e, se con una buona riduzione della base modale è lecito attendersi una buona qualità della risposta in termini di spostamento, lo stesso non può dirsi nel caso di deformazioni e sforzi, tipicamente dominati da fenomeni locali, la cui risoluzione spaziale può essere in larga parte legata ai modi ad alta frequenza che sono stati trascurati.

#### Deformate statiche

Vi sono alcune considerazioni sull'opportunità di basare la riduzione della base modale solo sul contenuto in frequenza di forzante e sistema. Infatti, se è vero che il sistema in genere risponderà alle frequenze sollecitate dalla forzante, e se è lecito attendersi che i modi a bassa frequenza contengano la parte preponderante della risposta in termini di spostamento, in quanto dominati dalle forze di inerzia che sono proporzionali agli spostamenti, vi possono tuttavia essere parti importanti di risposta che verrebbe persa qualora si trascurassero alcuni modi ad alta frequenza. La difficoltà sta nell'identificare tali modi in base alla sola indicazione della frequenza in una nuvola di frequenze. Occorre ricorrere ad informazioni sulla risoluzione spaziale dei modi e delle forzanti. Si considerino due casi particolari, di interesse nelle analisi di strutture aerospaziali.

- Carico concentrato. Si consideri come caso limite l'applicazione di un carico concentrato in un nodo; in questo caso il vettore a termine noto è nullo a meno del coefficiente corrispondente al nodo caricato, ed è moltiplicato per una funzione che descrive l'andamento temporale del carico, quindi

$$f(t) = f_c g(t)$$

è evidente che tutti i modi che coinvolgono uno spostamento del punto di applicazione del carico sono interessati dall'analisi dinamica; se vengono trascurati quelli a frequenza più alta basandosi sul contenuto in frequenza della funzione  $g(t)$  la dinamica globale del problema viene sicuramente descritta in modo soddisfacente, ma si perdono le informazioni locali quali le deformazioni e gli sforzi direttamente legati alla diffusione del carico intorno al punto di applicazione. In questo esempio l'effetto di attenuazione descritto nel paragrafo precedente viene sicuramente a mancare.

- Massa concentrata. Si consideri la presenza di una grossa massa concentrata collegata ad elementi strutturali di rigidezza elevata. In questo caso, la partecipazione della massa alla dinamica globale di modi a bassa frequenza viene descritta correttamente, ma si perdono effetti importanti legati a modi locali del supporto che magari appartengono allo spettro della forzante e quindi dovrebbero essere inclusi nella base modale, ma si trovano a frequenze superiori a quelle di tanti altri modi locali che invece è opportuno trascurare, e quindi viene a mancare un netto criterio di separazione in frequenza.



Questi due problemi possono essere risolti mediante l'uso di una base di spostamenti costituita da deformate statiche, ovvero deformate ottenute mediante l'applicazione di carichi statici al modello. Si consideri ad esempio il caso della forza concentrata:

$$u_c = K^{-1}f_c$$

nel caso della massa concentrata, il problema è del tutto analogo; si immagini di applicare una forza concentrata in corrispondenza della massa, o un insieme di forze concentrate, e di risolvere un problema analogo a quello appena visto. Una soluzione alternativa è data dall'assumere una certa distribuzione di accelerazioni, ad esempio, nel caso del velivolo con gondola motrice appesa, nell'assumere accelerazioni unitarie dei nodi della gondola e nulle nel resto del velivolo, e di raccoglierle in un vettore  $a_c$ ; quindi la forza concentrata diventa un sistema di forze, ottenute applicando il vettore delle accelerazioni alla matrice di massa

$$f_c = -Ma_c$$

Le deformate statiche possono essere usate in alternativa ai modi propri, pur con qualche svantaggio, perché, essendo ottenute dalla risoluzione di un problema statico, soddisfano la congruenza al contorno e quindi possono essere considerate a tutti gli effetti delle forme di spostamento alla Ritz; tuttavia non contengono informazioni sulla distribuzione dell'inerzia e quindi in genere sono meno adatte dei modi per problemi dinamici. L'uso migliore che se ne può fare è proprio quello di aumentare la base modale scelta in base a considerazioni sulla banda di frequenze della forzante, per recuperare staticamente effetti concentrati di carico o di inerzia.

**Esercizio 5.2** *Si determini la deformata statica di una semiala diritta, di densità lineare e rigidità flessionale uniformi, incastrata e caricata trasversalmente da una forza applicata all'estremità e da una applicata a metà apertura.*

**Soluzione 1:**

$$x = -\frac{1}{EJ} (\zeta^3/6 - \zeta^2 L/2)$$

**Soluzione 2:**

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{EJ} (\zeta^3/6 - \zeta^2 L/4) & 0 < \zeta < L/2 \\ x &= -\frac{1}{EJ} (L^3/48 - \zeta L^2/8) & L/2 < \zeta < L \end{aligned}$$

### Disaccoppiamento dai modi rigidi

Si consideri una generica deformata in termini di spostamenti nodali. Tale deformata in generale sarà descritta da una combinazione di spostamenti rigidi e deformabili, ove gli spostamenti rigidi sono definiti dagli autovettori a cui corrispondono autovalori nulli, ovvero da quegli spostamenti che non generano forze elastiche. La parte puramente deformabile può essere isolata sottraendo alle deformate la parte rigida, che viene determinata rendendoli ortogonali agli spostamenti rigidi attraverso la matrice di massa, ovvero

$$R^T M u_D = R^T M (u - R q_R) = 0$$

da cui si ricava

$$u_D = \left( I - R (R^T M R)^{-1} R^T M \right) u$$

Questa operazione può essere effettuata anche in relazione ad un insieme di autovettori a lavoro di deformazione non nullo, in modo da disaccoppiare le deformate statiche anche nei confronti degli autovettori, che tra loro sono già energeticamente disaccoppiati. Di solito l'operazione non viene eseguita perché, se è preferibile avere gli spostamenti rigidi e quelli deformabili distinti (deformabilità in assi medi), per poter scrivere la dinamica del velivolo rigido disaccoppiata dalla deformabilità della struttura, è meno importante preservare il disaccoppiamento dinamico tra i modi e le deformate statiche, dal momento che tipicamente le forze aerodinamiche li riaccoppiano.

**Esercizio 5.3** Si disaccoppi la deformata calcolata nell'esercizio precedente per forza applicata all'estremità nel caso la struttura abbia distribuzione uniforme di massa, e nel caso in cui vi sia anche una massa molto maggiore della massa totale dell'ala, concentrata all'estremità.

**Soluzione 1:**

$$\int_L m x \, d\zeta - mLq_R = 0$$

$$q_R = \frac{L^3}{8EJ}$$

$$x_D = -\frac{1}{EJ} (\zeta^3/6 - \zeta^2 L/2 + L^3/8)$$

**Soluzione 2:**

$$\int_L m x \, d\zeta - (mL + M) q_R = 0$$

$$q_R = \frac{mL^4}{8(mL + M)EJ}$$

$$x_D = -\frac{1}{EJ} \left( \zeta^3/6 - \zeta^2 L/2 + \frac{L^3}{8(1 + M/(mL))} \right)$$

### Scarico inerziale

Quando si considera un problema di corpo libero, le deformate statiche possono essere migliorate correggendole per l'effetto delle forze di inerzia. Si consideri ad esempio il caso della forza concentrata. La forza concentrata non può essere applicata isolatamente al corpo libero, ma deve far parte di un sistema equilibrato di forze. L'equilibrio viene ripristinato ricorrendo alle forze di inerzia associate agli spostamenti rigidi del corpo

$$MR\ddot{q}_R = f_c$$

dove la matrice  $R$  contiene i modi rigidi del sistema e i  $q_R$  sono i moltiplicatori dei modi, quindi le incognite che descrivono il moto rigido. Le forze di inerzia dovute al moto rigido si ottengono prendendo le risultanti del carico concentrato attraverso la premoltiplicazione per la trasposta della matrice  $R$ , e trovando le accelerazioni che equilibrano queste risultanti, ovvero

$$F_i = -MR(R^T MR)^{-1} R^T f_c$$

che, aggiunte alla forzante concentrata nella determinazione del modo statico, consente di ottenere una deformata arricchita dagli effetti inerziali dovuti allo spostamento rigido conseguente all'applicazione del carico:

$$u_c = K^{-1} \left( I - MR(R^T MR)^{-1} R^T \right) f_c$$

si noti che la matrice di inerzia ridotta che viene invertita altro non è che la matrice di inerzia del corpo rigido, definita come

$$R^T MR = M_R = \begin{bmatrix} mI & S \times^T \\ S \times & J \end{bmatrix}$$

A questo punto il sistema può essere vincolato isostaticamente e risolto a dare le deformate statiche senza introdurre effetti di reazioni vincolari spurie. Il metodo può essere esteso mediante lo scarico delle forze di inerzia relative anche agli altri modi della base, ovvero

$$u_c = K^{-1} \left( I - M\tilde{U}(\tilde{U}^T M\tilde{U})^{-1} \tilde{U}^T \right) f_c$$

In questo caso, la matrice di inerzia ridotta  $\tilde{U}^T M \tilde{U}$ , per via della normalizzazione a massa unitaria, degenera nell'identità e quindi può essere eliminata; di conseguenza:

$$u_c = K^{-1} (I - M \tilde{U} \tilde{U}^T) f_c \quad (5.3)$$

Il significato di questa operazione consiste nel depurare la forza concentrata delle sue componenti generalizzate nello spazio dei modi usati nella base ridotta. L'unione dello scarico inerziale con il disaccoppiamento dai modi rigidi dà luogo alla seguente espressione per le deformate statiche

$$u_c = (I - R (R^T M R)^{-1} R^T M) K^{-1} (I - M \tilde{U} (\tilde{U}^T M \tilde{U})^{-1} \tilde{U}^T) f_c$$

Si noti la simmetria della matrice, che mostra la stretta relazione tra i due concetti.

**Esercizio 5.4** Si consideri un sistema costituito da due masse,  $M$  ed  $m$ , con la prima molto maggiore della seconda, unite da una molla  $k$  molto rigida. Si determini la deformata con scarico inerziale conseguente all'applicazione di una forza allineata con la molla, applicata alternativamente alla massa grande ed alla massa piccola. Si disaccoppi quindi il risultato dal modo rigido.

**Esercizio 5.5** Si determini la deformata con scarico inerziale di una semiala diritta, di densità lineare e rigidezza flessionale uniformi, caricata: 1) da una forza normale al piano della semiala e giacente nel piano di simmetria, 2) da una forza normale alla semiala e applicata all'estremità (considerare separatamente i casi simmetrico ed antisimmetrico), e 3) da una coppia attorno all'asse di rollio.

## 5.3 Modi di accelerazione

Con il termine modi di accelerazione si vuole indicare la residualizzazione statica della dinamica delle alte frequenze, per procedere alla determinazione delle sollecitazioni mediante sommatoria diretta delle forze.

### 5.3.1 Residualizzazione

Il concetto di residualizzazione della dinamica ad alta frequenza non è assolutamente una novità; viene comunemente impiegato nell'analisi delle condizioni di carico quando vengono utilizzati i carichi di manovra per la determinazione del livello di sollecitazione nella struttura. Si consideri ad esempio un velivolo flessibile in una determinata condizione di manovra. I carichi vengono determinati applicando le accelerazioni e le condizioni al contorno aerodinamiche dovute alla manovra al velivolo rigido, quindi le sollecitazioni vengono determinate risolvendo il problema elastico come se fosse statico, applicando i carichi calcolati in precedenza. Se  $R$  è la matrice dei modi rigidi del velivolo, i carichi inerziali determinati con l'ipotesi di velivolo rigido sono

$$f_i = -M R \ddot{q}_R$$

quindi le sollecitazioni dovute a tali carichi vengono calcolate a partire dalla soluzione del problema del velivolo elastico come

$$u = K^{-1} f$$

dove il termine di carico  $f$  include eventuali carichi applicati esplicitamente e le forze di inerzia sopra descritte. I carichi aerodinamici vengono applicati in modo del tutto equivalente, previo calcolo a partire dalle condizioni al contorno di velivolo rigido

$$\begin{aligned} u_R &= R q_R \\ \dot{u}_R &= R \dot{q}_R \end{aligned}$$

Questa operazione è sostanzialmente analoga all'integrazione diretta dei carichi a partire da un estremo libero della struttura; tuttavia l'approccio descritto nel seguito consente una maggiore generalità nell'ambito di metodi di calcolo ormai diffusi e consolidati quali il metodo degli elementi finiti.

### 5.3.2 Recupero diretto di deformazioni e sforzi

Si consideri inizialmente il problema in forma modale, risolto nel dominio delle frequenze. A prima vista si nota che la risposta dipende in modo inversamente proporzionale dal quadrato delle frequenze dei modi, quindi se un modo ha alta frequenza, è ragionevole supporre che la sua partecipazione alla dinamica a frequenze più basse sia limitata. Si consideri l'espressione delle forze elastiche calcolata a partire dalla soluzione ottenuta attraverso la base modale:

$$F_e = Ku = KU \operatorname{diag} \left( \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2} \right) U^T f(j\omega)$$

ma, ricordando la relazione di normalizzazione degli autovettori,

$$k = \Omega^2 = U^T KU$$

la matrice di rigidezza può essere espressa come

$$K = U^{-T} \Omega^2 U^{-1}$$

quindi le forze elastiche diventano

$$F_e = Ku = U^{-T} \operatorname{diag} \left( \frac{\omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega^2} \right) U^T f(j\omega)$$

Se si considera il modello ridotto per il calcolo della soluzione dinamica, si ottiene

$$F_e = U^{-T} \operatorname{diag}(\omega_i^2) U^{-1} \tilde{U} \operatorname{diag} \left( \frac{1}{\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2} \right) \tilde{U}^T f(j\omega)$$

dove si può notare che il prodotto  $U^{-1} \tilde{U}$  dà la matrice identità per i modi mantenuti nel modello ridotto, e zero per quelli mancanti, ovvero

$$U^{-1} \tilde{U} = \begin{bmatrix} \tilde{I} \\ 0 \end{bmatrix}$$

quindi è possibile operare la ulteriore semplificazione

$$F_e = U^{-T} U^{-1} \tilde{U} \operatorname{diag} \left( \frac{\tilde{\omega}_i^2}{\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2} \right) \tilde{U}^T f(j\omega)$$

dove si è sfruttata la proprietà

$$\operatorname{diag}(\omega_i^2) U^{-1} \tilde{U} = U^{-1} \tilde{U} \operatorname{diag}(\tilde{\omega}_i^2)$$

e, considerando che per effetto della normalizzazione dei modi a massa unitaria vale la relazione  $U^{-T} U^{-1} = M$ , si ottiene infine

$$F_e = M \tilde{U} \operatorname{diag} \left( \frac{\tilde{\omega}_i^2}{\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2} \right) \tilde{U}^T f(j\omega)$$

quindi è evidente che se la risposta in termini di spostamento decresce con l'aumentare della frequenza dei modi, l'energia elastica contenuta nella risposta dei modi ad alta frequenza può rimanere considerevole, come si vede considerando che il limite

$$\lim_{\omega/\omega_i \rightarrow 0} F_e = M \tilde{U} \tilde{U}^T f(j\omega)$$

si mantiene finito, ed è proporzionale al lavoro delle forze esterne per la base modale ridotta  $\tilde{U}^T f$ ; questi termini di forza elastica vanno perduti quando si recuperano le deformazioni e gli sforzi direttamente dalla soluzione del problema ridotto. Al contrario, se si considerano gli effetti della dinamica ad alta frequenza, si ottiene

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} F_e = 0 \cdot \lim_{\omega \rightarrow \infty} f(j\omega)$$

quindi il limite va a zero nell'ipotesi ragionevole che le forze applicate decadano con la frequenza in modo regolare (tipicamente si ha decadimento almeno iperbolico per forzanti continue).

### 5.3.3 Residualizzazione statica delle alte frequenze

Si consideri il problema dinamico iniziale, tralasciando per il momento lo smorzamento viscoso:

$$M\ddot{u} + Ku = f(t)$$

Si consideri ora la riduzione della dinamica operata attraverso un insieme limitato di modi e deformate statiche, applicato solo alle accelerazioni

$$M\tilde{U}\ddot{\tilde{q}} + Ku = f(t)$$

La dinamica ridotta può essere risolta separatamente, in modo da ottenere i moltiplicatori delle accelerazioni modali. A questo punto la soluzione è statica nelle incognite nodali, e di conseguenza la determinazione di deformazioni e sforzi locali in modo dettagliato si ottiene da

$$u(t) = K^{-1} \left( f(t) - M\tilde{U}\ddot{\tilde{q}}(t) \right)$$

A tutti gli effetti si tratta di una residualizzazione statica della dinamica ad alta frequenza: la dinamica a bassa frequenza viene calcolata per integrazione, mentre quella ad alta frequenza viene trascurata e i suoi effetti sono ricavati direttamente considerando l'effetto delle forze dinamiche come imposte. Si consideri il problema nel dominio delle frequenze

$$u(j\omega) = K^{-1} \left( f(j\omega) + \omega^2 M\tilde{U}\tilde{q}(j\omega) \right)$$

Si sostituisca ora la risposta modale con la soluzione calcolata in precedenza

$$u(j\omega) = K^{-1} \left( I + \omega^2 M\tilde{U} \text{diag} \left( \frac{1}{\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2} \right) \tilde{U}^T \right) f(j\omega)$$

Si considerino due casi limite: la risposta statica e la risposta a frequenze molto elevate.

- Risposta statica. La risposta statica si ottiene per  $\omega$  nullo; si ha

$$u(0) = K^{-1} f(0)$$

ovvero non viene perduta alcuna informazione.

- Risposta alle alte frequenze La risposta alle alte frequenze si ottiene calcolando il limite per  $\omega$  che tende all'infinito; si ha

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} u(j\omega) = K^{-1} \left( I - M\tilde{U}\tilde{U}^T \right) \lim_{\omega \rightarrow \infty} f(j\omega)$$

dove si assume che la funzione di carico sia sufficientemente regolare da decadere con la frequenza. Si noti come la risposta sia dominata dalla parte statica per i modi residualizzati, mentre quelli non residualizzati, che fanno parte della base modale ridotta, sono correttamente cancellati.

Le forze elastiche diventano semplicemente

$$F_e = \left( I + M\tilde{U} \text{diag} \left( \frac{\omega^2}{\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2} \right) \tilde{U}^T \right) f(j\omega)$$

come si nota, le forze elastiche ora sono calcolate in modo consistente ed il limite

$$\lim_{\omega/\omega_i \rightarrow 0} F_e = f(j\omega)$$

ci dice che per i modi ad alta frequenza le forze elastiche sono calcolate direttamente a partire dai carichi applicati. Si confronti l'espressione delle forze elastiche con quella ottenuta mediante il calcolo diretto dalla soluzione ridotta, calcolandone la differenza con un abuso di notazione:

$$\begin{aligned} F_e - \tilde{F}_e &= \left( I + M\tilde{U} \text{diag} \left( \frac{\omega^2}{\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2} \right) \tilde{U}^T - M\tilde{U} \text{diag} \left( \frac{\tilde{\omega}_i^2}{\tilde{\omega}_i^2 - \omega^2} \right) \tilde{U}^T \right) f(j\omega) \\ &= \left( I - M\tilde{U}\tilde{U}^T \right) f(j\omega) \end{aligned}$$

in essa appare evidente che la differenza tra le due espressioni è esattamente data dalla dinamica ad alta frequenza, trovata calcolando il limite della risposta al tendere della frequenza all'infinito. È interessante notare come la stessa matrice risulti dall'operazione di scarico inerziale delle deformate statiche (5.3), evidenziando quindi che lo scarico inerziale permette di estrarre dalle deformate statiche il contenuto ad alta frequenza.

**Esercizio 5.6** *Un sistema meccanico è costituito da due masse,  $M$  ed  $m$ , con la prima molto maggiore della seconda, collegate da una molla  $k$  molto rigida. Il sistema sia forzato in direzione della molla da una forzante armonica applicata alla massa più piccola, con frequenza molto inferiore a quella propria del sistema. Si determini la forza nella molla.*

### 5.3.4 Smorzamento

Quando si considera l'effetto dello smorzamento strutturale, il problema non cambia natura; occorre solo aggiungere un contributo alla risposta. La risposta del sistema ridotto diventa

$$\tilde{q} = \text{diag} \left( \frac{1}{\tilde{\omega}_i^2 + 2j\xi\tilde{\omega}_i\omega - \omega^2} \right) \tilde{U}^T f(j\omega)$$

mentre il problema dinamico completo, con residualizzazione della dinamica ad alta frequenza, diventa

$$M\tilde{U}\ddot{\tilde{q}} + C\tilde{U}\dot{\tilde{q}} + Ku = f(t)$$

quindi la soluzione in frequenza è

$$u(j\omega) = K^{-1} \left( f(j\omega) - (j\omega C - \omega^2 M) \tilde{U} \tilde{q}(j\omega) \right)$$

ovvero, considerando la soluzione del problema ridotto,

$$u(j\omega) = K^{-1} \left( I - (j\omega C - \omega^2 M) \tilde{U} \text{diag} \left( \frac{1}{\tilde{\omega}_i^2 + 2j\xi\tilde{\omega}_i\omega - \omega^2} \right) \tilde{U}^T \right) f(j\omega)$$

È ragionevole assumere, dato che le forze viscosse sono in genere limitate rispetto a quelle inerziali ed elastiche al di fuori della risonanza, che le considerazioni svolte in assenza di smorzamento siano valide dal punto di vista qualitativo e quantitativo, sia pure nell'impossibilità di giungere ad una dimostrazione esplicita a causa del (limitato) accoppiamento tra i modi.

### 5.3.5 Problema aeroelastico

L'aggiunta dell'aeroelasticità complica il problema perché non ne permette la diagonalizzazione, introducendo accoppiamenti tra i diversi gradi di libertà. L'aerodinamica, secondo l'approccio classico, può essere descritta attraverso una matrice di trasferimento  $H_a(j\omega)$  che ne descrive la dinamica<sup>4</sup>. Per ragioni pratiche, usualmente le forze aerodinamiche vengono determinate direttamente a partire dalle condizioni al contorno rappresentate dalla base modale ridotta. Quindi, a partire dal problema ridotto

$$\left( -\omega^2 m + j\omega c + k + q\tilde{H}_{am}(j\omega) \right) \tilde{q} = \tilde{U}^T f(j\omega) + q\tilde{H}_{ag}(j\omega) v_g$$

dove le matrici di trasferimento aerodinamiche  $\tilde{H}_{am}$  e  $\tilde{H}_{ag}$  sono state scritte direttamente in funzione della frequenza  $\omega$  anziché della frequenza ridotta, si ottiene

$$\tilde{q} = \left( -\omega^2 \tilde{I} + 2j\omega \tilde{\Xi} \tilde{\Omega} + \tilde{\Omega}^2 + q\tilde{H}_{am}(j\omega) \right)^{-1} \left( \tilde{U}^T f(j\omega) + q\tilde{H}_{ag}(j\omega) v_g \right)$$

dove le matrici diagonali  $\tilde{\Omega}$  e  $\tilde{\Xi}$  sono state introdotte per descrivere le frequenze e gli smorzamenti del sistema ridotto. La residualizzazione porta a scrivere

$$u = K^{-1} \left( I - (-\omega^2 M + j\omega C + H(j\omega)) \tilde{U} \left( -\omega^2 \tilde{I} + 2j\omega \tilde{\Xi} \tilde{\Omega} + \tilde{\Omega}^2 + q\tilde{H}(j\omega) \right)^{-1} \tilde{U}^T \right) f(j\omega)$$

<sup>4</sup>Non viene considerata la dipendenza dal numero di *Mach* perché in questo contesto è essenzialmente irrilevante

Si noti che nella residualizzazione si è usata una ipotetica matrice di trasferimento aerodinamica  $H(j\omega)$  scritta in coordinate nodali. In genere tale matrice non è nota, in quanto vengono calcolate direttamente le forze nodali conseguenti alle deformate modali, che risultano nella matrice rettangolare formalmente data da

$$\Theta(\omega) = H(j\omega) \tilde{U}$$

ottenuta calcolando il lavoro della distribuzione di pressioni che risulta dal calcolo aerodinamico per gli spostamenti della struttura descritti mediante interpolazione degli spostamenti nodali. Quindi la residualizzazione in realtà va scritta nella forma

$$u = K^{-1} \left( I - \left( (-\omega^2 M + j\omega C) \tilde{U} + \Theta(j\omega) \right) \left( -\omega^2 \tilde{I} + 2j\omega \tilde{\Xi} \tilde{\Omega} + \tilde{\Omega}^2 + q \tilde{H}(j\omega) \right)^{-1} \tilde{U}^T \right) f(j\omega)$$

La descrizione dell'aerodinamica nell'approccio classico in frequenza attraverso una matrice di trasferimento aerodinamico nella base modale ridotta si basa sull'assunzione che solo la dinamica strutturale alle frequenze della base ridotta sia significativa nella determinazione delle forze aerodinamiche, mentre la dinamica locale che viene residualizzata possa essere trascurata. A sua volta, la matrice delle forze aerodinamiche contiene la dinamica dell'aerodinamica in modo implicito, incluse le alte frequenze; in questo caso vale l'assunzione che le alte frequenze dell'aerodinamica siano stabili e disaccoppiate da quelle della dinamica strutturale.





## Capitolo 6

# Risposta a forzanti non deterministiche

*Con il contributo e le correzioni di Marco Morandini.*

Una volta analizzata la risposta del velivolo a forzanti descrivibili in modo completo mediante una storia temporale nota a priori, e ricordando che si è presupposta l'asintotica stabilità del sistema, si rende necessario tenere conto del fatto che non sempre si è in grado di predire in modo deterministico tutte le forzanti a cui esso sarà sottoposto durante la vita operativa. È il caso delle raffiche o dei carichi che spesso vengono schematizzati considerandoli come successioni di forme descrivibili mediante funzioni semplici, quali il gradino, la rampa saturata e la funzione  $1 - \cos$ . È da notare che l'ampiezza della forzante deve comunque spesso essere determinata con un approccio statistico. Mediante una approssimazione deterministica delle forzanti è quindi successivamente possibile ricavare la risposta del sistema in esame. Nulla però garantisce che eventuali picchi più elevati nella risposta non possano essere riscontrati per forzanti di durata maggiore.

Questo approccio consente di limitare l'approccio statistico alla sola ampiezza della forzante, e studiare poi in modo deterministico la risposta del sistema dinamico. In particolare, nel caso in cui sia possibile ritenere la raffica abbastanza omogenea da non variare in modo apprezzabile lungo l'apertura, la descrizione statistica della sola ampiezza della raffica con profilo assegnato può risultare notevolmente semplificata. Naturalmente questa ipotesi vale solo nel caso in cui l'apertura alare sia piccola rispetto alle dimensioni tipiche di un fenomeno turbolento che si può incontrare in volo, e può quindi venire a cadere per velivoli particolarmente grandi.

Un secondo approccio, che verrà esposto in questo capitolo, è invece quello di tentare una descrizione statistica della risposta, nota una descrizione statistica “sufficientemente completa” della forzante.

Vediamo una raffica descritta in funzione del tempo (Figura 6.1). Si tratta ovviamente di un campione del segnale in esame: ci si chiede ora come descriverlo in modo statistico mediante un numero ridotto di indicatori. Intuitivamente si può schematizzare il segnale mediante un numero finito di livelli discreti (Figura 6.2).

Viene ora introdotto il parametro frequenza relativa,  $f$ , definito come il rapporto tra il numero di volte in cui il segnale rientra in un particolare intervallo di valori e il numero totale di eventi registrati nell'intervallo di tempo scelto; si tratta di una misura empirica della probabilità, che verrà definita più rigorosamente in seguito.

$$f_i = \frac{n_i \in [V_{G_{i+1}}, V_{G_i}]}{N_{tot}}$$

Ovviamente si ha  $\sum_i f_i = 1$ . Dal diagramma delle frequenze relative di diversi livelli della velocità di raffica, calcolate per tratti uniformi, si ottiene un istogramma (Figura 6.3).

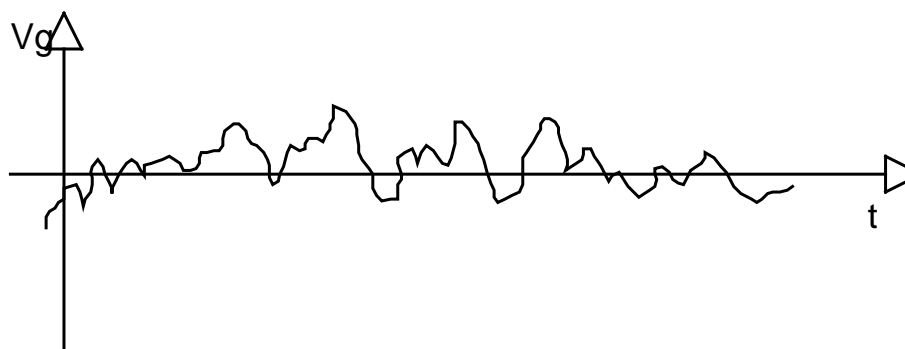


Figura 6.1: Raffica

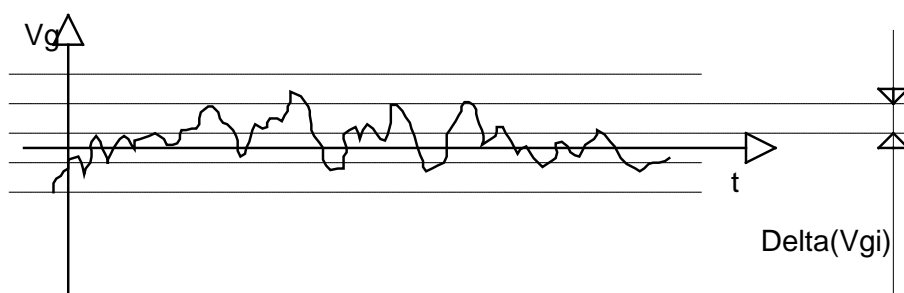


Figura 6.2: Raffica discreta

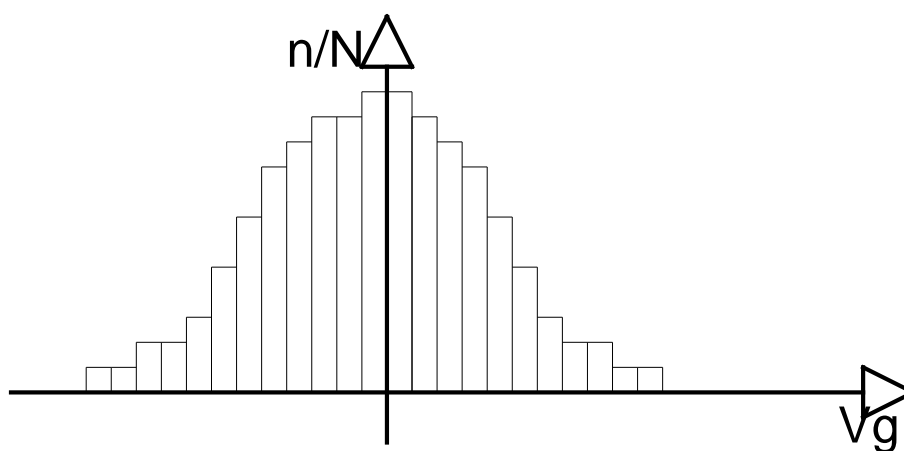


Figura 6.3: Istogramma

Si noti come tipicamente la distribuzione per la raffica tenda ad essere simmetrica rispetto all'origine; questo è dovuto al fatto che nell'atmosfera la velocità verticale media è nulla. Intuitivamente si può calcolare la media:

$$\mu_{V_G} = \sum_i \tilde{V}_{G_i} f_i$$

e la varianza:

$$\sigma_{V_G}^2 = \sum_i \left( \tilde{V}_{G_i} - \mu_{V_G} \right)^2 f_i$$

dove con  $\tilde{V}_{G_i}$  si intende il valore medio dell'intervallo  $[V_{G_{i+1}}, V_{G_i}]$ . Naturalmente si dovrà verificare che la media e la varianza siano indipendenti dal campione scelto e rimangano sostanzialmente costanti all'allungarsi dello stesso. È ragionevole ritenere che media e varianza possano cambiare solo su tempi lunghi, ad esempio al variare delle stagioni o almeno delle settimane o dei mesi, ma si assume che si mantengano costanti almeno per il tempo relativo ad un volo. In effetti, queste definizioni sono valide per una categoria ristretta di fenomeni, detti ergodici, che consente una grande semplificazione operativa in quanto rende possibile descrivere le caratteristiche di un processo stocastico mediante un solo campione qualsiasi. Per quanto detto sopra l'ipotesi di ergodicità va intesa come un'astrazione accettabile "a zone". In particolare l'attenzione verrà concentrata sui fenomeni ergodici gaussiani.

È ora opportuna una rappresentazione analitica degli indicatori statistici appena introdotti. Come già detto un fenomeno si dice ergodico quando i suoi indicatori statistici (media, varianza e frequenze relative) sono indipendenti dal campione considerato. Per descrivere analiticamente la densità di probabilità, qui definita come la curva limite dell'istogramma delle frequenze relative, una delle funzioni più utilizzate è la *Gaussiana*, che ben rispecchia molti fenomeni interessanti ai fini applicativi. Essa dipende appunto dai due soli parametri, media e varianza:

$$p_{V_G} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{V_G}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{V_G - \mu_{V_G}}{\sigma_{V_G}} \right)^2}$$

Dal punto di vista pratico verrà qui considerata come la migliore curva approssimante un diagramma delle frequenze relative ricavabile sperimentalmente. Si noti che l'ipotesi di turbolenza Gaussiana è spesso non rispondente alla realtà; la turbolenza viene qui assunta come Gaussiana per semplicità di presentazione.

La probabilità che la velocità di raffica appartenga all'intervallo  $[V_1, V_2]$  è data da:

$$P_{V_G}(V \in [V_1, V_2]) = \int_{V_1}^{V_2} p_{V_G} dV_G$$

In particolare, la probabilità di avere una raffica con velocità minore di  $\tilde{V}$  è:

$$P_{V_G}(\tilde{V}) = \int_{-\infty}^{\tilde{V}} p_{V_G} dV_G$$

e ovviamente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{V_G} dV_G = 1$$

Come utilizzare media e varianza? Non si è più in grado di ricostruire il segnale in funzione del tempo; si vogliono però calcolare gli indicatori della risposta, cioè media e varianza, una volta assegnati quelli della forzante. Ciò, per esempio, consentirà di determinare il numero medio di volte in cui entro la struttura, per effetto di una forzante casuale, verrà superato un livello di sforzo assegnato.

Come già detto, una nota densità di probabilità che è univocamente determinata da media e varianza è la Gaussiana, di cui si farà uso nel seguito per alcune significative applicazioni. Per questo motivo, anche se non strettamente necessario per quanto segue, viene enunciato ora un teorema fondamentale del quale non si riporta la dimostrazione:

*Sia assegnato un sistema lineare asintoticamente stabile*

*Sia applicata ad esso una forzante ergodica a distribuzione gaussiana*

allora

*anche la risposta del sistema alla forzante è ergodica e gaussiana.*

In verità la risposta tende ad essere distribuita gaussianamente anche per forzanti non gaussiane. Si prospettano quindi due differenti vie per determinare gli indicatori statistici dell'uscita:

- utilizzare in modo deterministico un campione della storia temporale della forzante, e calcolare le statistiche sull'uscita con un'elaborazione dell'istogramma dell'ampiezza della risposta come già fatto precedentemente.
- ricavare direttamente gli indicatori dell'uscita noti quelli della forzante: questa sarà la strada più conveniente, anche perché, come si vedrà più avanti, praticabile per una classe di forzanti più ampia di quella ergodica.

Generalizzando le definizioni già viste, si calcola ora la media di un processo ergodico su un campione temporale limitato:

$$\tilde{\mu}_x = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) dt \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

facendo ora tendere  $T$  all'infinito si ottiene la media di un processo ergodico, che verrà chiamata anche *valore atteso* (Expected value,  $E$ ). Per semplicità si utilizzerà la seguente simbologia:

$$\mu_x = \mathbb{M} x(t + \tau) dt \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

esprimendo cioè l'operatore media con:

$$E_{ergodico}(\cdot) = \mathbb{M}(\cdot) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (\cdot) dt$$

La varianza sarà allora definita come:

$$\sigma_{xx}^2 = \mathbb{M}(x(t + \tau) - \mu_x)^2 dt = \mathbb{M}(\Delta x(t + \tau))^2 dt \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

dove con  $\Delta * (t)$  si intenderà d'ora in poi il valore assunto dalla variabile  $*$  al tempo  $t$  depurato della media:  $\Delta * (t) = * (t) - \mu_*$ .

Si osservi inoltre che per l'ipotesi di ergodicità, un'arbitraria traslazione nel tempo  $\tau$  non altera i valori di media e varianza. Chiaramente i valori di cui sopra coincidono con quelli ottenibili dalla funzione densità di probabilità.

Si consideri ora un semplice sistema asintoticamente stabile ad un ingresso ed una uscita, la cui funzione di trasferimento nel dominio delle frequenze sia  $H(s)$ , mentre  $h(t)$  ne rappresenti la risposta impulsiva nel dominio del tempo; la risposta  $y(t)$  ad un ingresso  $x(t)$  nel dominio del tempo è data dall'integrale di convoluzione:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (6.1)$$

Si calcoli la media della risposta:

$$\mathcal{M}y(t) dt = \mathcal{M} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau dt$$

Poiché la media coinvolge solo l'integrazione nel tempo, la si può portare all'interno della convoluzione ottenendo

$$\mu_y = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \mathcal{M}x(t-\tau) dt d\tau = \mu_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau$$

Sottraendo l'ultima equazione alla (6.1) si ottiene

$$\Delta y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \Delta x(t-\tau) d\tau$$

che indica come il valore dell'uscita depurato del suo valore medio sia pari all'integrale di convoluzione del valore dell'ingresso depurato dal suo valore medio. Questa proprietà e l'uso di  $\Delta(\cdot)$  come differenza rispetto alla media verranno usate estensivamente nel seguito.

Si noti che

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \stackrel{\text{causalità}}{=} \int_0^{\infty} h(\tau) d\tau = H(0)$$

dove  $H(s)$  è la trasformata di Laplace della risposta impulsiva:

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

La media della risposta risulta quindi essere pari alla media dell'ingresso moltiplicata per la funzione di trasferimento valutata a frequenza nulla, ed è perciò interpretabile come la risposta statica alla media dell'ingresso. Allora:

$$\mu_y = H(0) \mu_x$$

Si assuma che nel dominio del tempo il sistema dinamico considerato sia descritto dal sistema agli stati:

$$\begin{aligned} \{\dot{x}\} &= [A] \{x\} + [B] u \\ y &= [C] \{x\} + Du \end{aligned}$$

È possibile sottoporre il sistema all'operatore di media. La media della derivata di un qualsiasi processo ergodico,

$$\mu_{\dot{x}} = \mathcal{M} \dot{x} dt$$

è nulla; per dimostrarlo si consideri la definizione di integrale in media, da cui risulta

$$\mu_{\dot{x}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \dot{x}(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{x(T) - x(-T)}{2T} = 0$$

L'ultimo limite tende a zero dal momento che  $x(T)$  e  $x(-T)$  sono limitate per ipotesi. Naturalmente poiché la media di un vettore è data dal vettore delle medie dei suoi componenti sarà pure  $\{\mu_{\dot{x}}\} = \{0\}$ . Applicando allora la media all'equazione di stato, risolvendo il primo insieme di equazioni per  $\{\mu_x\}$  e sostituendo il risultato ottenuto nell'equazione che determina la media dell'uscita si ottengono infine le seguenti espressioni per la media dello stato e dell'uscita:

$$\begin{aligned} \{\mu_x\} &= -[A]^{-1} [B] \mu_u \\ \mu_y &= \left( -[C] [A]^{-1} [B] + D \right) \mu_u \end{aligned}$$

Quest'ultimo risultato va confrontato con l'integrale visto in precedenza:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau \stackrel{\text{causalità}}{=} \int_0^{+\infty} h(\tau) d\tau = H(0) = -[C][A]^{-1}[B] + D$$

Si ha così la conferma che i risultati ottenuti nel dominio del tempo e in quello delle frequenze coincidono. Nel caso in esame la media della velocità di raffica è tipicamente nulla; se tuttavia fosse diversa da zero la si potrebbe trattare semplicemente calcolando la media dell'ingresso e determinando quella della risposta. Si proceda ora al calcolo della varianza dell'uscita:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^2 &= \int \mathbb{I}(\Delta y(t))^2 dt \\ &= \int \mathbb{I} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} h(v) \Delta x(t-v) dv \int_{-\infty}^{+\infty} h(w) \Delta x(t-w) dw \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(v) h(w) \int \mathbb{I} \Delta x(t-w) \Delta x(t-v) dt dw dv \end{aligned}$$

Questo risultato indica che, per il calcolo della varianza dell'uscita, è necessario calcolare un termine aggiuntivo,

$$\int \mathbb{I} \Delta x(t-w) \Delta x(t-v) dt,$$

che indica in qualche modo come i valori dell'ingresso a due tempi diversi siano "imparentati" tra loro. Questa informazione è necessaria anche se si è supposto che il fenomeno sia ergodico. Si definisce pertanto il concetto di *autocovarianza*, o semplicemente *covarianza*, per un processo ergodico:

$$k_{xx}(\tau) = \int \mathbb{I} \Delta x(t) \Delta x(t+\tau) dt$$

Si osservi che  $k_{xx}$  è simmetrica in  $\tau$ , cioè  $k_{xx}(-\tau) = k_{xx}(\tau)$ . I passaggi necessari a verificare questa proprietà sono semplici, e possono essere dedotti dalla verifica, riportata di seguito, di una proprietà simile (antisimmetria dell'intercovarianza).

Una covarianza con andamento esponenziale in  $\tau$ , ad esempio, indica che la funzione perde parentela in modo esponenziale al crescere della traslazione  $\tau$ ; una correlazione esponenziale modulata da un seno significa che la funzione perde parentela con legge esponenziale, con dei picchi di "parentela" ad intervalli costanti, ed è quindi possibile identificare una frequenza caratteristica. La funzione è simmetrica rispetto all'origine, in corrispondenza della quale assume il suo massimo valore. Viene definita anche l'*intercovarianza* (cross-covariance), in cui un segnale viene correlato con un altro:

$$k_{xy}(\tau) = \int \mathbb{I} \Delta x(t) \Delta y(t+\tau) dt$$

L'intercovarianza è antisimmetrica, cioè  $k_{xy}(-\tau) = k_{yx}(\tau)$ . per effettuare la verifica si scriva la definizione di  $k_{xy}(-\tau)$ :

$$k_{xy}(-\tau) = \int \mathbb{I} \Delta x(t) \Delta y(t-\tau) dt$$

si applichi ora uno spostamento pari a  $\tau$  alla funzione integranda; poiché il segnale è ergodico, ciò non condiziona il risultato:

$$k_{xy}(-\tau) = \int \mathbb{I} \Delta x(t+\tau) \Delta y(t) dt$$

Quest'ultimo integrale corrisponde alla definizione di intercovarianza tra  $y$  e  $x$ :

$$\int \mathbb{I} \Delta x(t+\tau) \Delta y(t) dt = \int \mathbb{I} \Delta y(t) \Delta x(t+\tau) dt = k_{yx}(\tau)$$

Per completare la definizione degli indicatori funzionali tipici dei processi ergodici viene introdotta ora l'*autocorrelazione*:

$$r_{xx}(\tau) = \int x(t) x(t+\tau) dt$$

È possibile ottenere una relazione che lega l'autocovarianza all'autocorrelazione e alla media. Svolgendo infatti i prodotti della definizione di autocovarianza si ottiene:

$$\begin{aligned} k_{xx}(\tau) &= \int (x(t) - \mu_x)(x(t+\tau) - \mu_x) dt \\ &= \int x(t) x(t+\tau) dt - \int x(t) \mu_x dt - \int x(t+\tau) \mu_x dt + \int \mu_x^2 dt \\ &\stackrel{\text{ergodicità}}{=} \underbrace{\int x(t) x(t+\tau) dt}_{r_{xx}(\tau)} - \underbrace{2 \int x(t) \mu_x dt}_{-\mu_x^2} + \mu_x^2 \end{aligned}$$

e quindi:

$$k_{xx}(\tau) = r_{xx}(\tau) - \mu_x^2$$

In tutti i casi in cui la media sia nulla l'autocovarianza è chiaramente uguale all'autocorrelazione. È possibile definire anche l'intercorrelazione in modo tutt'affatto analogo all'intercovarianza. Si osservi che la varianza precedentemente definita non è altro che l'autocovarianza valutata per  $t = 0$ , cioè  $\sigma_{xx}^2 = k_{xx}(0)$ .

È ora possibile procedere al calcolo dell'autocovarianza dell'uscita di un sistema dinamico. Si consideri a tal fine un sistema dinamico asintoticamente stabile con uscita  $y(t)$ , ingresso  $x(t)$  e risposta impulsiva  $h(t)$ . Allora, ricordando che  $\Delta y(t)$  è pari all'integrale di convoluzione di  $\Delta x(t)$ , l'autocovarianza dell'uscita è:

$$\begin{aligned} k_{yy}(\tau) &= \int \Delta y(t) \Delta y(t+\tau) dt \\ &= \int \left( \int_0^t h(u) \Delta x(t-u) du \int_0^{t+\tau} h(v) \Delta x(t+\tau-v) dv \right) dt \\ &= \int_0^t \int_0^{t+\tau} \left( \int \Delta x(t-u) \Delta x(t+\tau-v) dt \right) h(u) h(v) du dv \end{aligned}$$

Si operi, con un certo abuso di notazione, il seguente cambio di variabili con Jacobiano unitario:

$$\begin{aligned} t-u &= z \\ u &= u \\ v &= v \end{aligned}$$

si riconosce allora che l'integrale tra parentesi è, per definizione, l'autocovarianza di  $x$  valutata in  $(u+\tau-v)$ :

$$k_{xx}(u+\tau-v) = \int \Delta x(z) \Delta x(z+u+\tau-v) dz$$

L'autocovarianza dell'uscita è quindi pari a

$$k_{yy}(\tau) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) k_{xx}(u+\tau-v) h(v) du dv$$

In particolare la varianza sarà data da:

$$\sigma_{yy}^2 = \int \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) k_{xx}(u-v) h(v) du dv$$

**Esempio 6.1** Si calcoli l'autocovarianza dell'uscita  $y$  di un sistema avente risposta impulsiva  $h(t) = \text{sca}(t)e^{-\alpha t}$ , soggetto ad un ingresso  $x$  avente media nulla e autocovarianza  $k_{xx} = w\delta(\tau)$ .

**Soluzione:**

L'ingresso considerato si chiama rumore bianco e verrà definito più avanti; le caratteristiche fornite sono sufficienti per lo svolgimento del problema. Assumendo che il sistema sia asintoticamente stabile, e quindi  $\alpha > 0$ , per definizione si ha:

$$\begin{aligned}
 k_{yy} &= \iint_{-\infty, +\infty} h(u) k_{xx}(u + \tau - v) h(v) dudv \\
 &= A^2 w \iint_{-\infty, +\infty} \text{sca}(u) e^{-\alpha u} \delta(u + \tau - v) \text{sca}(v) e^{-\alpha v} dudv \\
 &\stackrel{\text{causalità}}{=} A^2 w \iint_{0, +\infty} e^{-\alpha u} \delta(u + \tau - v) e^{-\alpha v} dudv \\
 &= A^2 w e^{-\alpha \tau} \int_{\max(-\tau, 0)}^{+\infty} e^{-2\alpha u} du \\
 &= \frac{A^2 w}{2\alpha} e^{-\alpha \tau} e^{-2\alpha \max(-\tau, 0)} \\
 &= \frac{A^2 w}{2\alpha} e^{-\alpha |\tau|}
 \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che

$$\int_0^{+\infty} \delta(u + \tau - v) e^{-\alpha v} dv = \text{sca}(u + \tau) e^{-\alpha(u + \tau)}$$

L'estremo inferiore di integrazione  $\max(-\tau, 0)$  nasce dall'intersezione della condizione  $u > -\tau$  contenuta nella funzione  $\text{sca}(u + \tau)$  e della condizione  $u > 0$  imposta dalla causalità della risposta impulsiva. La funzione è simmetrica, e decresce esponenzialmente al crescere di  $\tau$ .

## 6.1 La formula di Rice

Una volta in grado di calcolare gli indicatori statistici dell'uscita, sotto l'ipotesi di ergodicità gaussiana, si può da questi risalire a sollecitazioni e sforzi equivalenti nella struttura al fine di procedere al suo dimensionamento; per fare ciò si può ricorrere a due differenti metodologie:

- la prima, più semplice ed empirica, consiste nel valutare delle sollecitazioni deterministiche equivalenti, di un livello tale che la probabilità di superarlo sia inferiore ad un limite prefissato in fase di progetto: per il momento flettente in corrispondenza di una determinata sezione alare, ad esempio, si potrebbe stabilire:

$$M_{F \text{ equivalente}} = M_{F \text{ medio}} + 4 \div 5 \sqrt{\sigma_{M_F}^2}$$

che corrisponde a una probabilità di non superamento, per una distribuzione Gaussiana, pari a, rispettivamente, 0.999968 e 0.9999997. Le probabilità di superamento sono quindi pari a, nei due casi, 3.2E-5 e 3E-7.

Naturalmente non si garantisce con assoluta certezza il non superamento dei livelli di sollecitazione che esso è in grado di prevedere. Si apre quindi un nuovo modo di concepire la sicurezza, su cui non ci si dilungherà. È chiaro però che "la sicurezza" non esiste più, ma ci si può al più ridurre ad un elevato grado di improbabilità.

- la seconda metodologia consiste nel determinare la probabilità di superamento (non superamento) durante la vita operativa del velivolo di un livello ammissibile di sollecitazione o di sforzo.



A tale scopo si farà uso della *formula di Rice* che fornisce una stima del numero medio di volte  $N(x)$  che, per un fenomeno gaussiano ed ergodico, un livello  $x$  assegnato viene “attraversato” nell’unità di tempo:

$$N(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}\dot{x}}}{\sigma_{xx}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu_x}{\sigma_{xx}} \right)^2}$$

dove  $\sigma_{\dot{x}\dot{x}}^2$  rappresenta la varianza della derivata temporale di  $x$  e  $N(x)$  è il numero medio di volte in cui viene superato nell’unità di tempo un livello assegnato di  $x$ , in entrambe le direzioni, cioè in salita ed in discesa. Il numero di attraversamenti verso l’alto sarà in media uguale a quelli verso il basso. Si definisce allora con  $N_+(x)$  il numero di attraversamenti “verso l’alto”:

$$N_+(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}\dot{x}}}{\sigma_{xx}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu_x}{\sigma_{xx}} \right)^2}$$

Il numero di volte in cui viene superato il valore nullo (nota: sottinteso in caso di media  $\mu_x = 0$ , altrimenti si riferisce al superamento del valore medio) prende il nome di frequenza apparente del fenomeno:

$$N_+(0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}\dot{x}}}{\sigma_{xx}}$$

Questo operatore presenta un’analogia con il calcolo della frequenza per un fenomeno armonico: interpretando infatti  $\sigma_{\dot{x}\dot{x}}$  come l’ampiezza dell’oscillazione della velocità per un moto armonico  $Ae^{j\omega t}$  di ampiezza  $A$  e pulsazione  $\omega$ , e  $\sigma_{xx}$  come l’ampiezza dell’oscillazione della relativa posizione, si avrebbe:

$$N_+(0) = \frac{1}{2\pi} \frac{|\omega A|}{|A|}$$

Talvolta viene utilizzato anche il periodo di ritorno,  $R_+(x)$ , definito come l’inverso di  $N_+(x)$ .

La formula di Rice può essere ottenuta in base a semplici considerazioni. Quelle riportate di seguito non pretendono di fornire una dimostrazione rigorosa, ma semplicemente di illustrare i concetti che stanno alla base della formula.

Si consideri un processo  $x(t)$  generico. La funzione che descrive il superamento di una soglia  $a$  è definita come

$$y(t) = \text{sca}(x(t) - a)$$

infatti essa assume valore unitario solo quando  $x(t) > a$ , altrimenti è nulla. La derivata di  $y$  assume quindi il significato di segnale di conteggio degli attraversamenti del livello considerato, sia in senso crescente che decrescente:

$$\dot{y}(t) = \delta(x(t) - a) \dot{x}(t)$$

In un intervallo di tempo  $[T_1, T_2]$  il numero di attraversamenti in entrambi i sensi è:

$$N_{T_1, T_2} = \int_{T_1}^{T_2} \delta(x(t) - a) |\dot{x}| dt$$

per cui la funzione  $\delta(x(t) - a) |\dot{x}|$  rappresenta il rateo di attraversamenti nell’unità di tempo. Il loro numero medio, per un processo ergodico, è

$$\mu_N = \iint_{-\infty, +\infty} \delta(x(t) - a) |\dot{x}| p(x, \dot{x}) d\dot{x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{x}| p(a, \dot{x}) d\dot{x}$$

Gli attraversamenti solo in direzione positiva, per valori di  $x$  in aumento, sono

$$\mu_{N_+} = \int_0^{+\infty} \dot{x} p(a, \dot{x}) d\dot{x}$$

Se il processo  $x$  è ergodico l'intercovarianza tra il processo e la sua derivata è nulla,  $\sigma_{x\dot{x}}^2 = 0$ . Infatti

$$\begin{aligned} \sigma_{x\dot{x}}^2 &= \overline{\Delta x \Delta \dot{x}} = \overline{\Delta x \frac{d}{dt} \frac{1}{2} (\Delta x)^2} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[ \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \right]_{-T}^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(\Delta x(T))^2 - (\Delta x(-T))^2}{4T} = 0 \end{aligned}$$

poiché  $\Delta x(T)$  e  $\Delta x(-T)$  sono limitate per ipotesi, e quindi il limite non può che tendere a zero. Per un processo Gaussiano ergodico  $\sigma_{x\dot{x}}^2 = 0$  implica l'indipendenza tra il processo e la sua derivata; la densità di probabilità composta è allora semplicemente data dal prodotto delle densità di probabilità dei due processi, la  $x$  e la sua derivata:

$$p(x, \dot{x}) = p(x) p(\dot{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{xx}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{\sigma_{xx}}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{x}\dot{x}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}}{\sigma_{\dot{x}\dot{x}}}\right)^2}$$

e, eseguendo l'integrazione, si ottiene appunto

$$\mu_{N_+} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}\dot{x}}}{\sigma_{xx}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sigma_{xx}}\right)^2}$$

Tale formula può essere utilizzata per vari tipi di verifica strutturale, inclusi alcuni tipi di calcolo a fatica. Si vedrà ora come sia possibile calcolare degli ammissibili statici equivalenti collegati alla vita operativa. Se si considera un intervallo di tempo  $\Delta t$ , il livello  $x$  verrà superato  $N_+(x) \cdot \Delta t$  volte. La probabilità di non superare il livello  $x$  in un tempo  $t$ , suddiviso in un numero sufficientemente elevato di intervalli  $\Delta t$ , tali che gli eventi entro i diversi intervalli possano considerarsi mutuamente indipendenti, è data da:

$$q(x, t) = (1 - N_+ \Delta t)^n$$

dove  $t = n \cdot \Delta t$ :

$$q(x, t) = \left(1 - \frac{N_+ t}{n}\right)^n$$

Passando ora al limite per  $n$  che tende all'infinito si ottiene la definizione di numero di Nepero "e":

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{N_+ t}{n}\right)^n \stackrel{\text{def}}{=} e^{-N_+ t}$$

La probabilità di superare il valore in questione quindi è:

$$\tilde{q}(x, t) = 1 - q(x, t)$$

Questa probabilità in genere è dettata dalle norme, oppure può essere scelta dal progettista di comune accordo con il committente. La formula testè ricavata può essere utilizzata come verifica di progetto: assegnati i valori di sforzo ed il tempo operativo del velivolo o di sue parti, essa consente di effettuare un controllo diretto sul valore di  $q$ , o, viceversa, assegnato  $q$ , di determinare il lasso di tempo che concorre a definire la vita operativa, o l'intervallo ispettivo, del pezzo in questione.

## 6.2 La densità spettrale di potenza

Sino ad ora è stato considerato il dominio del tempo, ed anche quando ci si è riferiti a quello delle frequenze, per la funzione di trasferimento, l'impiego dell'integrale di convoluzione ha consentito di calcolare gli indicatori statistici di interesse. È però evidente che l'uso dell'integrale di convoluzione non è né semplice né agevole. Risulta invece conveniente cercare di operare direttamente nel dominio delle frequenze, dove spesso le operazioni dell'analisi matematica possono trasformarsi in semplici operazioni algebriche.

Se il sistema considerato è asintoticamente stabile se ne può analizzare la risposta ad una forzante casuale attraverso il concetto di *autodensità spettrale di potenza* o semplicemente densità spettrale di potenza (DSP), definita come la trasformata di *Fourier* dell'autocovarianza:

$$\Phi_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Ovviamente si riottiene l'autocovarianza nel dominio del tempo antitrasformando la DSP:

$$k_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

La varianza è data dall'autocovarianza valutata per  $t = 0$ :

$$\sigma_{xx}^2 = k_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(\omega) d\omega$$

**Esempio 6.2** Si calcoli la DSP relativa all'autocovarianza calcolata all'esempio precedente

**Soluzione:**

$$\begin{aligned} \Phi_{yy}(\omega) &= \frac{A^2 w}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{A^2 w}{2\alpha} \left( \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-j\omega)\tau} d\tau + \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+j\omega)\tau} d\tau \right) \\ &= \frac{A^2 w}{2\alpha} \left( \frac{1}{\alpha-j\omega} + \frac{1}{\alpha+j\omega} \right) \\ &= \frac{A^2 w}{\alpha^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Poiché la  $k_{xx}$  è una funzione simmetrica può essere sviluppata in serie di soli coseni e vengono quindi a mancare i termini che danno origine alla parte immaginaria dello sviluppo. La DSP è quindi una funzione reale e simmetrica in  $\omega$ . Inoltre la  $k_{xx}$  deve tendere a zero per  $t$  che tende all'infinito e deve essere a sua volta limitata, altrimenti la sua trasformata avrebbe contenuto armonico illimitato e potenza infinita. Viene però utilizzata anche una categoria di ingressi, detti *rumori bianchi*, dotati di densità spettrale di potenza costante: essi non sono fisicamente possibili, ma godono di alcune proprietà che talora risultano molto vantaggiose, come si vedrà più avanti. Nel dominio del tempo la definizione di rumore bianco si trasforma in:

$$K_{ww}(\tau) = W\delta(\tau)$$

cioè la sua covarianza è una delta di Dirac.

Si ricava ora la DSP della risposta:

$$\begin{aligned} \Phi_{yy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} k_{yy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} h(u) k_{xx}(u+\tau-v) h(v) e^{-j\omega\tau} du dv d\tau \end{aligned}$$

Effettuando il seguente cambio di variabili con Jacobiano unitario

$$\begin{aligned} u &= u \\ v &= v \\ z &= u + \tau - v \end{aligned}$$

si ottiene:

$$\Phi_{yy}(\omega) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} h(u) k_{xx}(z) h(v) e^{-j\omega(-u+z+v)} dz du dv$$

Scomponendo ora l'esponenziale nel prodotto dei tre termini:

$$e^{-j\omega(-u+z+v)} = e^{-j\omega(-u)} e^{-j\omega z} e^{-j\omega v}$$

si possono integrare separatamente le tre funzioni ed ottenere:

$$\begin{aligned} \Phi_{yy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) e^{-j\omega(-u)} du \int_{-\infty}^{+\infty} k_{xx}(z) e^{-j\omega z} dz \int_{-\infty}^{+\infty} h(v) e^{-j\omega(v)} dv \\ &= H(-\omega) \Phi_{xx} H(\omega) \end{aligned}$$

o, poiché le funzioni integrande sono scalari, in forma più compatta:

$$\Phi_{yy}(\omega) = \|H(\omega)\|^2 \Phi_{xx}(\omega)$$

si noti che la funzione di trasferimento tra la DSP dell'ingresso e quella dell'uscita è il quadrato del modulo della funzione di trasferimento del sistema, e non il modulo del quadrato; questo è dovuto al fatto che  $H(-\omega)$  e  $H(\omega)$  sono una la coniugata dell'altra. Infatti, dal momento che  $H$  è causale, essa ha parte reale simmetrica e parte immaginaria antisimmetrica in  $\omega$ .

Se si considera, con un certo abuso di notazione, la trasformata della derivata temporale di una funzione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}(t) e^{-j\omega t} dt = \dot{x}(\omega) = j\omega x(\omega)$$

si può interpretare  $j\omega$  come una funzione di trasferimento tra la derivata e la funzione stessa; la DSP della derivata è allora:

$$\Phi_{\dot{x}\dot{x}} = \|j\omega\|^2 \Phi_{xx} = \omega^2 \Phi_{xx}$$

e, analogamente, sarà  $\Phi_{\ddot{x}\ddot{x}} = \omega^4 \Phi_{xx}$ .

Perché la DSP di  $\dot{x}$  sia definita, la DSP di  $x$  deve annullarsi almeno come  $1/\omega^2$  per  $\omega$  che tende all'infinito; nel caso di un sistema dinamico la funzione di trasferimento si annulla almeno come  $1/\omega^2$  a causa dei termini inerziali che introducono le derivate seconde degli stati.

Così la varianza di  $\dot{x}$ ,  $\sigma_{\dot{x}\dot{x}}^2$ , che compare nella formula di Rice, può essere ricavata antitrasformando l'espressione della relativa DSP:

$$\sigma_{\dot{x}\dot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \Phi_{xx}(\omega) d\omega$$

Per esempio, si consideri il sistema dinamico tipico per i problemi aeroelastici:

$$[Z(q, \omega, M)] \{q(\omega)\} = q \{H_{aG}(\omega, M)\} \frac{V_G(\omega)}{V_\infty} \quad (6.2)$$

dove

$$[Z(q, \omega, M)] = -\omega^2 [M_s] + j\omega [C_s] + [K_s] - q [H_{am}(\omega, M)]$$

Le risposte di interesse potranno essere espresse come

$$\{y\} = [C(\omega)] \{q\} + [D(\omega)] \frac{V_G(\omega)}{V_\infty}$$

e, quindi, facendo uso della 6.2 come:

$$\{y\} = \{H(\omega)\} \frac{V_G(\omega)}{V_\infty}$$

dove

$$\{H(\omega)\} = q [C(\omega)] [Z(q, \omega, M)]^{-1} \{H_{aG}(\omega, M)\} + [D(\omega)]$$

Si consideri ora come possibile variabile di interesse il momento flettente in un punto della struttura. In generale gli spostamenti di un punto della struttura saranno legati agli spostamenti nodali, o modali, da funzioni di forma opportune:

$$u = [N] \{q\}$$

Il momento flettente dipende dalle derivate seconde nello spazio di tali funzioni, cioè dalle curvature:

$$M_F = k [N''] \{q\}$$

Il recupero delle azioni interne avviene quindi direttamente dall'ingresso, considerando il sistema dinamico descritto dall'equazione 6.2, tramite la relazione:

$$M_F = qk [N''] [Z(q, \omega, M)]^{-1} \{H_{aG}(\omega)\} \frac{V_G}{V_\infty}$$

Ipotizzando di conoscere la densità spettrale di potenza della raffica  $\Phi_{V_G V_G}(\omega)$ , supposta a media nulla, quella dell'uscita è

$$\Phi_{M_F M_F}(\omega) = q \left\| k [N''] [Z(q, \omega, M)]^{-1} \{H_{aG}(\omega)\} \right\|^2 \frac{1}{V_\infty^2} \Phi_{V_G V_G}(\omega)$$

Mediante l'operazione di antitrasformazione si ottengono le varianze che occorrono per applicare la formula di Rice:

$$\begin{aligned} \sigma_{M_F M_F}^2 &= k_{M_F M_F}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{M_F M_F}(\omega) d\omega \\ \sigma_{\dot{M}_F \dot{M}_F}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \Phi_{M_F M_F}(\omega) d\omega \end{aligned}$$

## 6.3 Estensione a sistemi multi ingressi/uscite

Nel caso in cui la velocità di raffica vari lungo l'apertura alare può risultare conveniente utilizzare una rappresentazione discretizzata di  $V_G$ ; dobbiamo in tal caso saper scrivere tutte gli indicatori statistici in forma multidimensionale. Se  $\{x\}$  è un vettore di variabili casuali ergodiche, la sua autocovarianza viene definita, in completa analogia con il caso scalare, come:

$$[k_{xx}(\tau)] = \mathbb{E} \{ \Delta x(t) \} \{ \Delta x(t+\tau) \}^T dt$$

Sulla diagonale della matrice  $[k_{xx}]$  si trovano le autocovarianze delle componenti del vettore  $\{x\}$ , al di fuori si trovano invece le intercovarianze tra le diverse componenti, che sono antisimmetriche, ovvero  $k_{x_i x_j}(\tau) = k_{x_j x_i}(-\tau)$ . L'autocorrelazione è:

$$[r_{xx}(\tau)] = \mathbb{E} \{ x(t) \} \{ x(t+\tau) \}^T dt$$

La matrice delle varianze, o più semplicemente la varianza, si ottiene valutando la matrice delle autocovarianze per  $t = 0$ ; essa risulta simmetrica:

$$[\sigma_{xx}^2] = [k_{xx}(0)]$$

Per vettori  $\{x\}$  con componenti distribuite gaussianamente la densità di probabilità è:

$$p(\{x\}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det([\sigma_{xx}^2])}} e^{-\frac{1}{2} \{\Delta x\}^T [\sigma_{xx}^2]^{-1} \{\Delta x\}}$$

È anche possibile, in perfetta analogia con il caso monodimensionale, determinare il legame che intercorre tra autocorrelazione, autocovarianza e media:

$$\begin{aligned} [k_{xx}(\tau)] &= \mathbb{M}\{x(t) - \mu_x\} \{x(t + \tau) - \mu_x\}^T dt \\ &= \mathbb{M}\{x(t)\} \{x(t + \tau)\}^T dt - \mathbb{M}\{x(t)\} \{\mu_x\}^T dt \\ &\quad - \mathbb{M}\{\mu_x\} \{x(t + \tau)\}^T dt + \{\mu_x\} \{\mu_x\}^T \\ \text{ergodicità} &= \underbrace{\mathbb{M}\{x(t)\} \{x(t + \tau)\}^T dt}_{[r_{xx}(\tau)]} - \underbrace{\mathbb{M}\{x(t)\} \{\mu_x\}^T dt}_{\{\mu_x\} \{\mu_x\}^T} \\ &\quad - \underbrace{\mathbb{M}\{\mu_x\} \{x(t)\}^T dt}_{\{\mu_x\} \{\mu_x\}^T} + \{\mu_x\} \{\mu_x\}^T \end{aligned}$$

ottenendo quindi:

$$[k_{xx}(\tau)] = [r_{xx}(\tau)] - \{\mu_x\} \{\mu_x\}^T$$

In tutti i casi in cui la media sia nulla l'autocovarianza è chiaramente uguale all'autocorrelazione. La matrice di intercorrelazione  $[r_{xy}(\tau)]$  tra due segnali  $\{x\}$  e  $\{y\}$  viene definita come

$$[r_{xy}(\tau)] = \mathbb{M}\{x(t)\} \{y(t + \tau)\}^T dt$$

e la matrice di intercovarianza  $[k_{xy}(\tau)]$  come

$$[k_{xy}(\tau)] = \mathbb{M}\{\Delta x(t)\} \{\Delta y(t + \tau)\}^T dt$$

È altresì immediato verificare che

$$[k_{xy}(\tau)] = [r_{xy}(\tau)] - \{\mu_x\} \{\mu_y\}^T$$

Applicando la definizione di autocovarianza dell'uscita,  $[k_{yy}(\tau)]$ , utilizzando la matrice della risposta impulsiva nel tempo  $[h(u)]$  e applicando la stessa sostituzione di variabili utilizzata nel caso bidimensionale si arriva alla seguente espressione per l'autocovarianza dell'uscita:

$$[k_{yy}(\tau)] = \int \int_{-\infty}^{+\infty} [h(u)] [k_{xx}(u + \tau - v)] [h(v)]^T du dv \quad (6.3)$$

Sempre mediante una sostituzione di variabili si ricava, come già visto, la matrice autodensità spettrale di potenza :

$$[\Phi_{yy}(\omega)] = [H(-\omega)] [\Phi_{xx}(\omega)] [H(\omega)]^T \quad (6.4)$$

**N.B.** si noti bene che, anche se la sequenza dei passaggi necessari a ricavare le equazioni (6.3, 6.4) è formalmente uguale a quella utilizzata nel caso singolo ingresso/uscita, è necessario però porre estrema attenzione al fatto che i prodotti matriciali non godono della proprietà commutativa.

La matrice delle varianze può essere ricavata antitrasformando la DSP:

$$[\sigma_{xx}^2] = [k_{xx}(0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi_{xx}(\omega)] d\omega$$

I termini sulla diagonale di  $[\Phi_{xx}]$  sono reali, gli altri sono in generale complessi; i termini ad indici scambiati sono complessi coniugati.

Osserviamo ora che, sempre per fenomeni ergodici, è possibile anche un approccio diretto nel dominio del tempo.

Sia assegnato il sistema:

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{u\}$$

Si sottoponga l'equazione all'operatore di media:

$$\{0\} = [A]\{\mu_x\} + [B]\{\mu_u\},$$

dove si è fatto uso della constatazione, già vista, che

$$\int \{ \dot{x} \} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T \frac{d\{x\}}{dt} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\{x(T)\} - \{x(-T)\}}{2T} = \{0\}$$

Si sottragga la seconda equazione dalla prima; si ottiene:

$$\{\Delta \dot{x}\} = [A]\{\Delta x\} + [B]\{\Delta u\}$$

Si moltiplichino ora a destra per  $[\Delta x]^T$ , e si applichi nuovamente l'operatore media:

$$\begin{aligned} \int \{ \Delta \dot{x} \} \{ \Delta x \}^T dt &= [A] \int \{ \Delta x \} \{ \Delta x \}^T dt + [B] \int \{ \Delta u \} \{ \Delta x \}^T dt \\ &= [A] [\sigma_{xx}^2] + [B] ([\sigma_{ux}^2]) \end{aligned}$$

Si sommi a quest'ultima equazione la sua trasposta

$$\int \{ \Delta x \} \{ \Delta \dot{x} \}^T dt = [\sigma_{xx}^2] [A]^T + \left( \int \{ \Delta x \} \{ \Delta u \}^T dt \right) [B]^T = [\sigma_{xx}^2] [A]^T + ([\sigma_{xu}^2]) [B]^T$$

e si osservi che

$$\begin{aligned} \int \{ \Delta \dot{x} \} \{ \Delta x \}^T dt + \int \{ \Delta x \} \{ \Delta \dot{x} \}^T dt &= \int \frac{d}{dt} (\{ \Delta x \} \{ \Delta x \}^T) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\{ \Delta x(T) \Delta x(T)^T \} - \{ \Delta x(-T) \Delta x(-T)^T \}}{2T} \\ &= 0 \end{aligned}$$

per cui<sup>1</sup>

$$[0] = [A] [\sigma_{xx}^2] + [\sigma_{xx}^2] [A]^T + [B] [\sigma_{ux}^2] + [\sigma_{xu}^2] [B]^T \quad (6.5)$$

Per valutare gli ultimi due termini a secondo membro, che prendono il nome di intervianze dell'ingresso e del vettore degli stati,  $[\sigma_{ux}^2] = [k_{ux}(0)]$  e  $[\sigma_{xu}^2] = [k_{xu}(0)]$ , rispettivamente, appare però subito evidente che occorrono alcune conoscenze supplementari sulle caratteristiche statistiche della forzante,

<sup>1</sup>Attenzione: questa relazione evidenzia che, mentre nel caso scalare  $\sigma_{x\dot{x}} = 0$ , nel caso vettoriale la matrice  $[\sigma_{x\dot{x}}^2]$  non è nulla, ma solo antisimmetrica.

in particolare della sua matrice delle varianze e di quella delle intervianze con il vettore  $\{x\}$ .

Si ricordi che per il sistema dinamico in esame la risposta è

$$\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(t-\tau)] [B] \{u(\tau)\} d\tau$$

dove, data l'ipotesi di asintotica stabilità del sistema, le condizioni iniziali non sono state considerate, in quanto la parte autonoma della soluzione si estingue rapidamente, e la risposta a regime è dominata dalla parte forzata (si noti che la storia si estende da  $-\infty$  a  $+\infty$ ).

L'intervarianza tra stato e ingresso  $[\sigma_{xu}^2]$  è quindi pari a

$$\begin{aligned} [\sigma_{xu}^2] &= \mathbb{M} \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(\tau)] [B] \{\Delta u(t-\tau)\} \{\Delta u(t)\}^T dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(\tau)] [B] \mathbb{M} \{\Delta u(t-\tau)\} \{\Delta u(t)\}^T dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(\tau)] [B] [k_{uu}(\tau)] d\tau \end{aligned}$$

La formula mostra come, per calcolare  $[\sigma_{xu}^2]$ , sia necessario eseguire un'integrazione. Calcolato tale integrale è possibile calcolare  $[\sigma_{xx}^2]$  risolvendo il sistema lineare 6.5. Si noti che la condizione di asintotica stabilità da noi assunta è anche condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema 6.5. Note  $[\sigma_{xx}^2]$  e  $[\sigma_{xu}^2]$  si può calcolare la varianza relativa ad ogni uscita  $\{y\} = [C]\{x\} + [D]\{u\}$ :

$$[\sigma_{yy}^2] = [C] [\sigma_{xx}^2] [C]^T + [C] [\sigma_{xu}^2] [D]^T + [D] [\sigma_{ux}^2] [C]^T + [D] [\sigma_{uu}^2] [D]^T$$

Per quanto riguarda i processi ergodici possiamo ottenere un risultato importante considerando come forzanti dei rumori bianchi, cioè dei segnali dotati di densità spettrale di potenza costante al variare della frequenza; allora possiamo ritenere che

$$[\Phi_{uu}(\omega)] = [W]$$

dove la matrice  $[W]$  è la matrice delle intensità del rumore bianco, considerata costante nel tempo a causa dell'ergodicità del fenomeno in analisi. La matrice di autocovarianza della forzante è allora data da:

$$[k_{uu}(\tau)] = [W] \delta(\tau)$$

D'ora in poi si indicherà con  $w$  il rumore bianco. Il calcolo dell'intervarianza  $[\sigma_{xw}^2]$  associata al rumore bianco si riduce a quello dell'integrale:

$$[\sigma_{xw}^2] = \int_0^t [\Phi(\tau)] \delta(\tau) d\tau [B] [W] = \frac{1}{2} [B] [W]$$

Il termine  $1/2$ , è dovuto al fatto che la funzione  $[\Phi]$  in zero è modulata da uno scalino: essa è nulla per  $t < 0$  e pari a  $[I]$  per  $t = 0^+$  (vedi l'appendice alla fine di questo capitolo). Allora la  $\delta$  di Dirac "media" il valore della funzione nel punto di discontinuità (Figura 6.4).

L'equazione 6.5, osservando che la matrice  $[W]$  è simmetrica, se non addirittura diagonale, si riduce allora alla più semplice **Equazione di Lyapunov**:

$$\{0\} = [A] [\sigma_{xx}^2] + [\sigma_{xx}^2] [A]^T + [B] [W] [B]^T$$

L'equazione così ottenuta permette di calcolare la matrice delle varianze del vettore delle variabili di stato direttamente nel dominio del tempo, senza dover passare nello spazio delle frequenze o effettuare integrali, una volta nota la matrice  $[W]$ .

In questo paragrafo si è così ottenuta una soluzione in forma chiusa per un sistema sollecitato da una



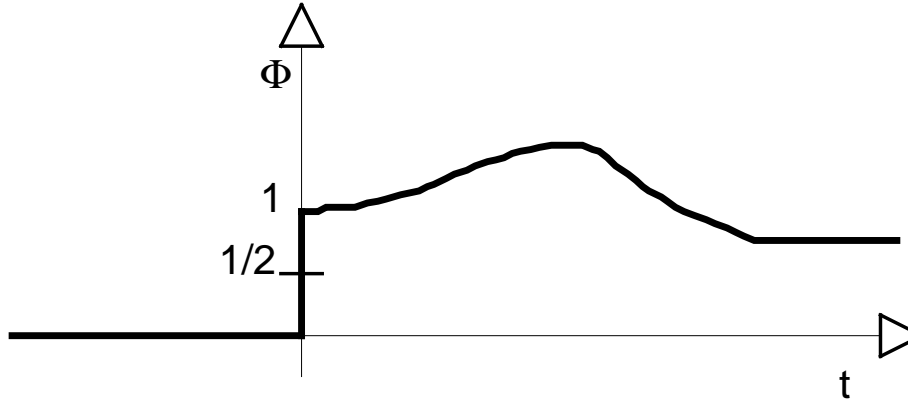


Figura 6.4: Funzione di Dirac nell'origine

forzante ideale come un rumore bianco. Questo non deve essere interpretato come un limite, perché, come si vedrà in seguito, è possibile descrivere ingressi stocastici diversi come uscite di un sistema, detto *filtro di forma* (shaping filter), eccitato da un rumore bianco. Si avrà modo di osservare più avanti che l'equazione appena ricavata nell'ambito dei fenomeni ergodici ha una validità più generale. Sarà infatti possibile ricavare un'equazione formalmente identica a questa, ma che si riferisce ad una classe di fenomeni più ampia.

**Esempio 6.3** Sia dato un veicolo, idealmente descritto da una massa  $M$ , in movimento su un terreno con asperità caratterizzato da un profilo  $z$ . La massa sia collegata al terreno mediante una rigidità  $K$  ed uno smorzatore  $C$ . La derivata seconda del profilo del terreno,  $z''$ , sia assimilabile ad un rumore bianco di media nulla e varianza pari a  $w$ . Si determinino le proprietà del sistema in modo da ottimizzare il comfort del passeggero (si minimizzi la varianza dell'accelerazione della massa).

**Soluzione:**

La velocità di traslazione,  $V$ , sia costante; quindi la derivazione rispetto al tempo del profilo del terreno è in relazione di proporzionalità diretta con la derivazione spaziale:  $\dot{z} = V^2 z''$ . Nel seguito la costante moltiplicativa verrà inglobata nella varianza. L'omogeneità della derivata seconda spaziale del profilo del terreno non implica direttamente l'ergodicità nel tempo nel caso in cui la velocità  $V$  non si mantenga costante. Tuttavia, anche in tale caso, si può pensare di considerare il fenomeno ergodico "a tratti" qualora la variazione di velocità sia lenta rispetto alla velocità di variazione delle asperità del profilo. L'equazione di equilibrio della massa è:

$$M(\ddot{x} + \ddot{z}) + C\dot{x} + Kx = 0$$

dove  $x$  rappresenta la distanza dal terreno e quindi la quota assoluta è data da  $x + z$ . La conformazione del terreno  $z$  è un dato imposto e quindi rappresenta la forzante; l'equazione di moto è:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = -M\ddot{z}$$

L'equazione, scritta agli stati, diventa:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & -C/M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ddot{z}$$

L'uscita è data dalla misura dell'accelerazione totale del baricentro,  $y = \ddot{x} + \ddot{z}$ ; analizzando con attenzione l'equazione di equilibrio, si nota che l'uscita può essere riscritta come

$$y = \begin{bmatrix} -K/M & -C/M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}$$

La forzante per ipotesi ha densità spettrale di potenza costante pari a  $w$ ; il problema può essere scritto direttamente in forma di Lyapunov:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & -C/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^2 & \sigma_{x\dot{x}}^2 \\ \sigma_{x\dot{x}}^2 & \sigma_{\dot{x}\dot{x}}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^2 & \sigma_{x\dot{x}}^2 \\ \sigma_{x\dot{x}}^2 & \sigma_{\dot{x}\dot{x}}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -K/M \\ 1 & -C/M \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} w \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ovvero:

$$\begin{bmatrix} -\left(K\sigma_{xx}^2 + C\sigma_{x\dot{x}}^2\right)/M & -\left(K\sigma_{x\dot{x}}^2 + C\sigma_{\dot{x}\dot{x}}^2\right)/M \\ \sigma_{x\dot{x}}^2 & \sigma_{\dot{x}\dot{x}}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^2 & -\left(K\sigma_{xx}^2 + C\sigma_{x\dot{x}}^2\right)/M \\ \sigma_{x\dot{x}}^2 & -\left(K\sigma_{x\dot{x}}^2 + C\sigma_{\dot{x}\dot{x}}^2\right)/M \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il problema si riduce a tre equazioni (per la simmetria della matrice incognita):

$$\begin{aligned} 2\sigma_{x\dot{x}}^2 &= 0 \\ -2\left(K\sigma_{xx}^2 + C\sigma_{x\dot{x}}^2\right)/M + w &= 0 \\ \sigma_{\dot{x}\dot{x}}^2 - \left(K\sigma_{xx}^2 + C\sigma_{x\dot{x}}^2\right)/M &= 0 \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{x\dot{x}}^2 &= 0 & (\text{come già dimostrato nel paragrafo 6.1}) \\ \sigma_{x\dot{x}}^2 &= \frac{M}{2C}w \\ \sigma_{xx}^2 &= \frac{M^2}{2KC}w \end{aligned}$$

La varianza dell'uscita è:

$$\sigma_{yy}^2 = \begin{bmatrix} -K/M & -C/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} wM^2/2KC & 0 \\ 0 & wM/2C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K/M \\ -C/M \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left( \frac{K}{C} + \frac{C}{M} \right) w$$

In genere la rigidezza del sistema è determinata da considerazioni sulla deformazione statica del veicolo e sulla tenuta di strada, quindi il problema è costituito da una minimizzazione in cui l'unico parametro di progetto è lo smorzamento. La condizione di stazionarietà della varianza dell'uscita è:

$$\frac{\partial \sigma_{yy}^2}{\partial C} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{M} - \frac{K}{C^2} \right) w = 0$$

da cui si ottiene  $C = \sqrt{KM}$ . Se si considera il sistema di partenza nel dominio delle frequenze, si nota che la funzione di trasferimento ha la forma

$$\frac{x}{s^2 z} = \frac{1}{s^2 + s \frac{C}{M} + \frac{K}{M}}$$

Il rapporto tra rigidezza e massa,  $K/M$ , fornisce la frequenza propria del sistema. La forma della risposta dipende dagli autovalori del sistema, i quali a loro volta dipendono dai parametri. Gli autovalori sono soluzioni dell'equazione caratteristica, data dall'annullamento del denominatore della funzione di trasferimento:

$$s = -\frac{C}{2M} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4M^2} - \frac{K}{M}}$$

Perché il sistema sia stabile, lo smorzamento  $C$  deve essere positivo, come la massa (positiva per definizione) e la rigidezza (generalmente positiva nei sistemi meccanici se non in condizioni patologiche). Se il discriminante delle radici è negativo, la soluzione presenta forma oscillatoria, altrimenti si ha

semplicemente un andamento smorzato. Il valore critico di smorzamento rappresenta la condizione di minimo smorzamento che fornisce una risposta non oscillante, e lo si ottiene imponendo l'annullamento del discriminante:

$$C = 2\sqrt{KM}$$

Si noti come lo smorzamento ottimo determinato in precedenza corrisponda alla metà dello smorzamento critico. Questo significa che la risposta del caso ottimo sarà oscillatoria, ma fortemente smorzata.

## 6.4 Filtro di forma

Nel caso in cui gli ingressi non siano schematizzabili con dei rumori bianchi, è ancora possibile utilizzare l'equazione di Lyapunov a patto di applicare sugli ingressi un opportuno filtro di forma che generi gli ingressi (reali) del sistema a partire da rumori bianchi (fittizi). Si tratta cioè di vedere gli ingressi come filtrati da un ulteriore sistema lineare di funzione di trasferimento opportuna. Detto  $\{n\}$  il vettore delle forzanti, di cui sia nota la matrice autodensità spettrale di potenza  $[\Phi_{nn}]$ , o equivalentemente la  $[k_{nn}]$ , si associ al sistema dinamico

$$\begin{aligned}\{\dot{x}\} &= [A]\{x\} + [B]\{n\} \\ \{y\} &= [C]\{x\} + [D]\{n\}\end{aligned}$$

un ulteriore sistema-filtro con una forzante data da un vettore di rumori bianchi

$$\begin{aligned}\{\dot{x}_n\} &= [A_n]\{x_n\} + [B_n]\{w\} \\ \{n\} &= [C_n]\{x_n\}\end{aligned}$$

che dovrà essere tale da garantire che la DSP di  $\{n\}$ , uscita del sistema aggiuntivo, sia uguale a quella della forzante effettiva:

$$[\Phi_{nn}] = [H(-\omega)][\Phi_{ww}][H(\omega)]^T$$

Nel caso ad una dimensione si ha, più semplicemente,  $\Phi_{nn} = |H|^2 W$ , che evidenzia chiaramente come un rumore qualsiasi possa essere ottenuto filtrando un rumore bianco con un'apposita dinamica  $H$ . La sintesi di  $H$  da  $\Phi_{nn}$  è sempre possibile, anche se a volte non semplice, in tutti i casi di interesse pratico. L'equazione della varianza si può allora applicare al complesso filtro + sistema. Il sistema completo diventa quindi:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{\dot{x}_n\} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [A] & [B][C_n] \\ [0] & [A_n] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{x_n\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ [B_n] \end{bmatrix} \{w\} \\ \{y\} &= [C] \begin{bmatrix} [A] & [B][C_n] \\ [0] & [A_n] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{x_n\} \end{Bmatrix} + [D][C_n]\{x_n\}\end{aligned}$$

Si osservi che il sistema così ottenuto è *strettamente proprio*, e poiché la densità spettrale di potenza del rumore filtrato decade almeno come  $1/\omega^2$  (trattandosi di una forzante fisicamente realizzabile) sarà possibile calcolare anche la varianza dell'accelerazione  $[\Phi_{\ddot{x}\ddot{x}}]$ . Si noti però che come condizione limite si può accettare anche una densità spettrale di potenza tendente a un valore asintotico costante, alla quale si assocerà un filtro di forma non strettamente proprio, cioè avente una funzione di trasferimento tendente a un valore costante per frequenze infinite. Con una semplice divisione fra polinomi sarà pertanto possibile ricondurre tale funzione di trasferimento a un valore costante più una parte strettamente propria. La presenza di detta tendenza asintotica a un valore costante, sia per la densità spettrale di potenza che per il filtro di forma a essa associata, è indicativa di un rumore bianco sovrapposto a un forzante casuale fisicamente realizzabile. Chiaramente lo spettro originario non sarà fisicamente realizzabile ma potrebbe essere un'utile semplificazione per rappresentare una componente del disturbo avente banda spettrale assai più ampia del contenuto in frequenza del sistema dinamico da essa eccitato. La rappresentazione agli stati di tale filtro assumerà pertanto la seguente forma:

$$\begin{aligned}\{\dot{x}_n\} &= [A_n]\{x_n\} + [B_n]\{w\} \\ \{n\} &= [C_n]\{x_n\} + [D_n]\{w\}\end{aligned}$$

così che il sistema aumentato dal filtro diventerà:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{\dot{x}_n\} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [A] & [B][C_n] \\ [0] & [A_n] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{x_n\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [B][D_n] \\ [B_n] \end{bmatrix} \{w\} \\ \{y\} &= \begin{bmatrix} [C] & [D][C_n] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{x_n\} \end{Bmatrix} + [D][D_n][w] \end{aligned}$$

La situazione sopra presentata è da ritenersi un limite insuperabile. Non sarà pertanto plausibile nessuna modellazione di densità spettrali di potenza almeno non semplicemente proprie. Si noti che il precedente esempio sulla rugosità modellabile come un rumore bianco può essere visto come un caso particolare di quanto sopra detto. Laddove si possa ritenere che la densità spettrale di potenza della rugosità fisica della strada lungo il percorso sia asintotica a  $1/\omega^4$ , così che la doppia derivazione associata alla forzante sul veicolo generi una densità di potenza asintoticamente costante e tale da permettere di trascurare la parte propria rispetto al rumore bianco. Sovente sono proprio le forzanti modellabili come derivate temporali di grandezze fisiche quelle che portano al succitato limite semplicemente proprio di modellazione spettrale, con la menzionata attenzione a evitare derivate di ordine tale da portare a spettri e filtri di forma impropri.

**Esempio 6.4** Si consideri l'esempio precedente, in cui però la correlazione della derivata seconda del profilo del terreno sia  $k_{z''z''} = Ae^{-\alpha|\lambda|}$ .

**Soluzione:**

L'asperità del terreno può essere descritta come l'uscita di un filtro di forma il cui ingresso sia un rumore bianco. La correlazione, in funzione del tempo, è  $k_{z''z''} = Ae^{-\alpha V|\tau|}$ ; si esegua una trasformazione di Fourier, dividendo l'integrale in due parti per evitare l'inconveniente del modulo del parametro temporale:

$$\begin{aligned} \Phi_{z''z''} &= \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\alpha V|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= A \left( \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha V - j\omega)\tau} d\tau + \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha V + j\omega)\tau} d\tau \right) \\ &= A \left( \frac{1}{\alpha V - j\omega} + \frac{1}{\alpha V + j\omega} \right) \\ &= \frac{2A\alpha V}{(\alpha V)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Il modulo della funzione filtro di forma è dato dalla radice quadrata della densità spettrale di potenza così calcolata; avrà la forma

$$H = \frac{b}{a + s}$$

Si consideri il quadrato del modulo in frequenza:

$$\|H\|^2 = \frac{b^2}{a^2 + \omega^2} = \frac{2\alpha V}{(\alpha V)^2 + \omega^2}$$

dove si è considerata  $A$  come l'ampiezza del rumore bianco in ingresso. Si ottiene:

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{2\alpha V} \\ a &= \alpha V \end{aligned}$$

Il filtro di forma, scritto agli stati, diventa:

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= -\alpha V x_n + \sqrt{2\alpha V} u_n \\ \ddot{z} &= x_n \end{aligned}$$

con  $k_{u_n u_n}(\tau) = A\delta(\tau)$ . L'equazione del filtro di forma si aggiunge al sistema, che diventa:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{z} \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -K/M & -C/M & -1 \\ 0 & 0 & -\alpha V \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \\ x_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2\alpha V} \end{bmatrix} u_n$$

mentre l'uscita è

$$y = \begin{bmatrix} -K/M & -C/M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \\ x_n \end{Bmatrix}$$

L'equazione di Lyapunov diventa:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -K/M & -C/M & -1 \\ 0 & 0 & -\alpha V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \sigma_{13}^2 \\ \sigma_{12}^2 & \sigma_{22}^2 & \sigma_{23}^2 \\ \sigma_{13}^2 & \sigma_{23}^2 & \sigma_{33}^2 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \sigma_{13}^2 \\ \sigma_{12}^2 & \sigma_{22}^2 & \sigma_{23}^2 \\ \sigma_{13}^2 & \sigma_{23}^2 & \sigma_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -K/M & 0 \\ 1 & -C/M & 0 \\ 0 & -1 & -\alpha V \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2\alpha V} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2\alpha V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con  $\sigma_{11}^2 = \sigma_{xx}^2$ ,  $\sigma_{12}^2 = \sigma_{x\dot{x}}^2$ ,  $\sigma_{13}^2 = \sigma_{xx_n}^2$ ,  $\sigma_{22}^2 = \sigma_{\dot{x}\dot{x}}^2$ ,  $\sigma_{23}^2 = \sigma_{\dot{x}x_n}^2$ ,  $\sigma_{33}^2 = \sigma_{x_n x_n}^2$ , da cui:

$$\begin{aligned} 2\sigma_{12}^2 &= 0 \\ \sigma_{22}^2 - (K\sigma_{11}^2 + C\sigma_{12}^2)/M - \sigma_{13}^2 &= 0 \\ \sigma_{23}^2 - \alpha V \sigma_{13}^2 &= 0 \\ -2(K\sigma_{12}^2 + C\sigma_{22}^2)/M - 2\sigma_{23}^2 &= 0 \\ -(K\sigma_{13}^2 + C\sigma_{23}^2)/M - \sigma_{33}^2 - \alpha V \sigma_{23}^2 &= 0 \\ -2\alpha V \sigma_{33}^2 + 2\alpha V A &= 0 \end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^2 &= 0 \\ \sigma_{33}^2 &= A \\ \sigma_{13}^2 &= -\frac{A}{K/M + (C/M + \alpha V)\alpha V} \\ \sigma_{23}^2 &= -\frac{A\alpha V}{K/M + (C/M + \alpha V)\alpha V} \\ \sigma_{22}^2 &= \frac{M}{C} \frac{A\alpha V}{K/M + (C/M + \alpha V)\alpha V} \\ \sigma_{11}^2 &= \frac{M}{K} \left( \frac{M}{C} \alpha V + 1 \right) \frac{A}{K/M + (C/M + \alpha V)\alpha V} \end{aligned}$$

La varianza dell'uscita è:

$$\sigma_{yy}^2 = \left( \left( \frac{K}{C} + \frac{C}{M} \right) \alpha V + \frac{K}{M} \right) \frac{A}{K/M + (C/M + \alpha V)\alpha V}$$

La minimizzazione si ottiene uguagliando a zero la sua derivata rispetto al parametro di smorzamento  $C$ :

$$\frac{\partial \sigma_{yy}^2}{\partial C} = \left( \frac{K^2}{C^2} + 2\frac{K}{C}\alpha V + \left( \frac{K}{C} \frac{M}{C} - 1 \right) \alpha^2 V^2 \right) \frac{A}{K/M + (C/M + \alpha V)\alpha V} = 0$$

quindi:

$$C = \frac{K + \sqrt{2K^2 + KM\alpha^2 V^2}}{\alpha V}$$

Si noti come si riottienga la soluzione del caso precedente al tendere di  $\alpha$  all'infinito, condizione per la quale la correlazione della rugosità della superficie ritorna ad essere un rumore bianco.

Per quanto riguarda la realizzazione del filtro di forma, in alternativa alla procedura generale nel dominio delle frequenze attraverso la densità spettrale di potenza si consideri una semplice rappresentazione nel dominio del tempo della risposta impulsiva di un sistema del prim'ordine strettamente proprio,

$$h(t) = \text{step}(t)ce^{at}b$$

e si consideri la covarianza dell'uscita in funzione di quella dell'ingresso,

$$k_{\ddot{z}\ddot{z}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\eta)k_{ww}(\eta + \tau - \zeta)h(\zeta) \, d\eta \, d\zeta \quad (6.6)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{step}(\eta)ce^{a\eta}bA\delta(\eta + \tau - \zeta)\text{step}(\zeta)ce^{a\zeta}b \, d\eta \, d\zeta \quad (6.7)$$

$$= c^2b^2A \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{a\eta}\delta(\eta + \tau - \zeta)e^{a\zeta} \, d\eta \, d\zeta \quad (6.8)$$

$$= c^2b^2A \int_{\max(0, -\tau)}^{+\infty} e^{a\eta}e^{a(\eta+\tau)} \, d\eta \quad (6.9)$$

$$= c^2b^2Ae^{a\tau} \int_{\max(0, -\tau)}^{+\infty} e^{2a\eta} \, d\eta \quad (6.10)$$

$$= c^2b^2Ae^{a\tau} \left[ -\frac{e^{2a\eta}}{2a} \right]_{\max(0, -\tau)} \quad (6.11)$$

nell'ipotesi che  $a < 0$  perché la funzione di trasferimento del filtro di forma sia asintoticamente stabile. Ne consegue

$$k_{\ddot{z}\ddot{z}}(\tau) = -\frac{c^2b^2Ae^{a|\tau|}}{2a}$$

Ora, per confronto con la covarianza dell'accelerazione fornita nei dati del problema, deve essere

$$a = -\alpha V$$

$$c^2b^2 = 2\alpha V$$

e quindi, posto arbitrariamente  $c = 1$ , si ottiene  $b = \sqrt{2\alpha V}$ .

**Esempio 6.5** Come esempio della possibilità di utilizzo di filtri di forma non strettamente propri si consideri il sistema di Fig. 6.5. Calcolare la densità spettrale di potenze richiesta alla forza  $N$  per imporre un movimento casuale  $y$  di densità spettrale di potenza:

$$\Phi_{yy} = \frac{1}{\omega^2 + 1}. \quad (6.12)$$

determinando anche la varianza della reazione elastica della molla conseguente al movimento imposto.

**Soluzione:**

Scrivendo l'equilibrio all'estremo della molla abbiamo l'equazione di moto:

$$C\dot{x} + Kx = C\dot{y} \quad (6.13)$$

mentre per le uscite richieste, non preoccupandoci del segno della forza nella molla,  $F_m$ , si avrà:

$$F_m = N = Kx \quad (6.14)$$

Ricordando poi la classica relazione fra la densità spettrale di un generico ingresso  $u$  e una generica uscita  $y$ , collegate dalla funzione di trasferimento  $H$ ,  $y(s) = H(s)U(s)$ , è data da:

$$\Phi_{yy} = |H(\omega)|^2 \Phi_{uu} \quad (6.15)$$

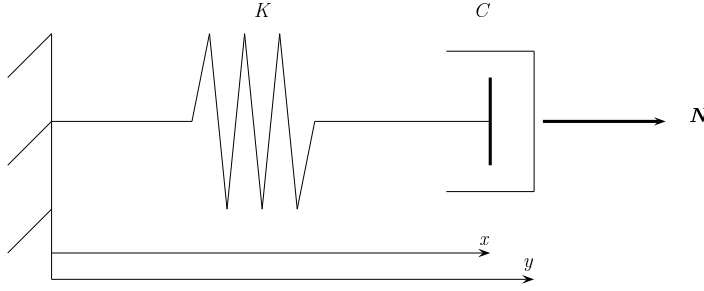


Figura 6.5: Sistema molla-smorzatore

essendo la funzione di trasferimento fra  $N = F_m$  e  $y$ ,  $F_m(s) = N(s) = \frac{KC s}{(K + sC)} y(s)$ , avremo:

$$\Phi_{NN}(\omega) = \Phi_{F_m F_m}(\omega) = \frac{(KC)^2 \omega^2}{K^2 + \omega^2 C^2} \Phi_{yy} = \frac{(KC)^2 \omega^2}{(K^2 + \omega^2 C^2)(1 + \omega^2)} \quad (6.16)$$

Come ben sappiamo potremmo anche scrivere:

$$\sigma_{F_m F_m}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{F_m F_m}(\omega) d\omega \quad (6.17)$$

ma risulterà assai più semplice utilizzare un filtro di forma e calcolare tale varianza risolvendo la solita equazione di Lyapunov. Ricordando che  $\dot{y}(\omega) = j\omega y(\omega)$ , la densità spettrale di potenza  $\Phi_{\dot{y}\dot{y}}$  sarà:

$$\Phi_{\dot{y}\dot{y}} = \frac{\omega^2}{\omega^2 + 1} = 1 - \frac{1}{1 + \omega^2} \quad (6.18)$$

il cui relativo filtro di forma, associato a un rumore bianco di intensità unitaria,  $W = 1$ , sarà:

$$H(s) = \frac{s}{1 + s} = 1 - \frac{1}{1 + s} \quad (6.19)$$

Pur notando che il rumore bianco non ha trasformata, per semplicità di notazione ci permettiamo il seguente abuso notazionale, scrivendo:

$$\dot{y}(s) = w(s) - \frac{1}{1 + s} w(s) \quad (6.20)$$

in modo che definendo  $n(s) = \frac{1}{1+s} w(s)$ , o anche  $sn(s) = -n(s) + w(s)$ , avremo  $\dot{y}(s) = w(s) - n(s)$  e la seguente rappresentazione agli stati del filtro di forma:

$$\begin{cases} \dot{n} = -n + w \\ \dot{y} = w - n \end{cases} \quad (6.21)$$

Infine, combinandola con l'equazione di moto e d'uscita scritte all'inizio dell'esercizio, otterremo il seguente sistema aumentato:

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K}{C} & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ F_m = Kx \end{cases} \quad (6.22)$$

Vediamo così confermato che essendo il filtro di forma semplicemente proprio il rumore bianco  $w$  è presente direttamente nell'equazione dello stato  $x$ . Il problema è asintoticamente stabile ed il sistema ha autovalori  $-\frac{K}{C}$  e  $-1$ .

Ricordando l'equazione di Lyapunov per le varianze:

$$[A][\sigma_{xx}^2] + [\sigma_{xx}^2][A]^T + [B][B]^T = 0 \quad (6.23)$$

svolgendo i primi due prodotti matriciali scriviamo:

$$\begin{bmatrix} 2\left(-\frac{K}{C}\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xn}^2\right) & -\left(\frac{K}{C} + 1\right)\sigma_{xn}^2 - \sigma_{nn}^2 \\ Sym & -2\sigma_{nn}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Sym & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Sym & 0 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

da cui, equagliando a zero la somma dei termini dei due triangoli superiori, otteniamo:

$$\sigma_{xx}^2 = \frac{C}{2K} \quad \sigma_{xn}^2 = \frac{C}{2(K+C)} \quad \sigma_{nn}^2 = \frac{1}{2} \quad \sigma_{F_m F_m}^2 = K^2 \sigma_{xx}^2 \quad (6.25)$$



## 6.5 Definizione di probabilità

Nell'intento di giungere ad una descrizione matematica la più rigorosa possibile e, nel contempo, alla possibilità di considerare categorie di forzanti anche differenti da quelle, pur sempre ristrette, fin qui analizzate, si profila ora la necessità di inquadrare le nozioni sinora illustrate in un quadro analitico più ampio e completo. Occorrerà esaminare la risposta di un sistema a forzanti non più necessariamente ergodiche.

Si chiama esperimento casuale la singola osservazione di un fenomeno casuale o aleatorio. L'esito di un fenomeno casuale è a priori incognito. Si può identificare l'insieme i cui elementi sono tutti i possibili risultati di un tale esperimento; questo insieme si chiama *spazio campione*. Lo spazio campione di un fenomeno casuale come il lancio di una moneta è dato dall'insieme  $\{testa, croce\}$ ; quello del lancio di un dado è l'insieme  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Ogni elemento dello spazio campione si chiama *punto campione*. Si distinguono tre tipi di spazi campione. Uno spazio campione finito contiene un numero finito di punti campione, come  $[testa, croce]$  e  $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$ . Uno spazio campione infinito numerabile contiene un numero infinito ma numerabile di punti campione. Uno spazio campione non numerabile contiene una infinità non numerabile di punti campione, come ad esempio i numeri reali compresi negli intervalli  $[0, +\infty)$  e  $[a, b]$ . Introduciamo ora il concetto di *evento*. Supponiamo che l'esito di un esperimento casuale consistente nel lancio di un dado sia 4. A tale esito si possono associare uno o più eventi. Si può infatti dire che: a) il numero è 4; b) è un numero pari; c) è un numero maggiore di due; d) è un numero minore di 5; e) è un numero  $\neq 6$ ; f) è un numero minore di 7; g) è un numero minore di 1. Si noti che gli eventi da b) a d) possono essere verificati anche se l'esito dell'esperimento non è 4. Un evento come a) contiene un solo punto campione ed è chiamato evento elementare; gli altri sono detti eventi composti. Dalla definizione è evidente che gli eventi elementari sono mutuamente esclusivi. Un evento si dice (statisticamente) certo quando contiene tutti i punti dello spazio campione; nell'esempio precedente l'evento f) è certo. Un evento si dice impossibile se non contiene nessun punto campione; nell'esempio precedente l'evento g) è impossibile. Si definisce probabilità  $P$  una misura associata agli eventi  $E$  che soddisfa i tre assiomi seguenti, dove  $\Omega$  indica lo spazio campione:

1.  $P(E) \geq 0$
2.  $P(\Omega) = 1$
3.  $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$  se  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ , cioè se  $E_1$  ed  $E_2$  sono disgiunti.

Il primo assioma afferma che la probabilità è un numero non negativo; il secondo dice che la probabilità ha come valore massimo uno, evento certo, mentre il terzo va sotto il nome di principio della additività delle probabilità totali. Dire  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$  significa che i due eventi sono mutuamente esclusivi, cioè se si verifica  $E_1$  non può verificarsi  $E_2$  e viceversa; nell'esempio precedente gli eventi a) e g) sono mutuamente esclusivi, mentre gli eventi a) e b) non lo sono. La probabilità di verificarsi dei due singoli eventi è pertanto uguale alla somma delle probabilità dei singoli eventi. Si enunciano brevemente alcuni teoremi di teoria della probabilità:

### Teorema 6.1 Teorema dell'evento complementare

Se  $P(E)$  è la probabilità che si verifichi l'evento  $E$ , la probabilità dell'evento complementare  $\neg E$ , cioè che non si verifichi  $E$ , è:

$$Q(E) = P(\neg E) = 1 - P(E)$$

### Teorema 6.2 Teorema dell'evento totale

Dati due eventi  $E_1$  ed  $E_2$  la probabilità che si verifichino o  $E_1$  o  $E_2$  o entrambi è data da:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

dove  $P(E_1 \cap E_2)$  è la probabilità che si verifichino entrambi  $E_1$  ed  $E_2$ . Si noti la necessità di differenziare questo teorema dall'assioma 3 in quanto in questo caso si possono verificare anche entrambi, poiché  $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ , cioè gli eventi non sono mutuamente esclusivi.

**Teorema 6.3 Definizione della probabilità condizionata**

La probabilità del verificarsi dell'evento  $E_2$  dopo che si è verificato l'evento  $E_1$  si indica con  $P(E_2 | E_1)$  ed è definita come:

$$P(E_2 | E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

**Teorema 6.4 Definizione di indipendenza**

Un evento  $E_2$  si dice indipendente da un altro evento  $E_1$  se:

$$P(E_1 | E_2) = P(E_2)$$

**Teorema 6.5 Teorema dell'evento composto**

Dati due eventi  $E_1$  ed  $E_2$ , la probabilità che si verifichino entrambi gli eventi è data da:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1) = P(E_2) \cdot P(E_1 | E_2)$$

ovvero:

$$P(E_1) = \frac{P(E_2) \cdot P(E_1 | E_2)}{P(E_2 | E_1)}$$

$$P(E_2) = \frac{P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1)}{P(E_1 | E_2)}$$

Tale relazione prende il nome di legge di Bayes. Nel caso in cui gli eventi siano mutuamente indipendenti si ha evidentemente:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

## 6.6 Regolarità statistica

Non è difficile determinare intuitivamente la probabilità  $P$  del verificarsi di un evento per un semplice esperimento casuale come il lancio di una moneta o di un dado. Nell'esempio del lancio di una moneta è facile stabilire che  $P(testa) = P(croce) = 1/2$ . L'assegnazione intuitiva del valore della probabilità ad un evento implica che nella presentazione che si sta svolgendo la probabilità sia vista come un concetto primordiale, quali quelli di punto e di retta in geometria. Se si è in grado di stabilire la probabilità degli eventi elementari, le regole del calcolo delle probabilità permettono di calcolarla per eventi più complessi. Va rilevato inoltre che, dichiaratamente o no, il concetto di probabilità qui considerato è associato all'idea di rapporto tra i risultati favorevoli di un esperimento casuale rispetto a tutti i possibili risultati, come si è già visto nell'introduzione alla frequenza relativa: si cercherà ora di definire in modo più rigoroso i concetti intuitivi precedentemente esposti e le ipotesi che stanno alla base della loro formulazione. Si giungerà così ad una trattazione matematica più completa dei fenomeni dal punto di vista statistico. L'esperienza mostra poi che gli esperimenti ripetuti di un fenomeno casuale hanno una certa regolarità e gli esiti tendono a dei comportamenti limite individuabili quando il numero di esperimenti divenga sufficientemente grande. Tale tendenza è chiamata *regolarità statistica*. È importante notare che si parla di regolarità statistica per ogni fenomeno casuale. Ciò significa che gli esperimenti vanno ripetuti nelle stesse condizioni. Sia  $N$  il numero di esperimenti di un fenomeno casuale, ed  $N_E$  il numero delle volte in cui si è verificato un evento  $E$ . Si definisce frequenza relativa dell'evento  $E$  il rapporto:

$$f_N(E) = \frac{N_E}{N}$$

Una possibile definizione di regolarità statistica è la seguente:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(|f_N(E) - P(E)| \geq \varepsilon) = 0$$

dove  $\varepsilon$  è un numero positivo e "piccolo a piacere". L'equazione appena scritta va sotto il nome di *legge di Bernoulli dei grandi numeri* e giustifica il modo pratico di misurare la probabilità. Ancora una volta basterà misurare logicamente la probabilità degli eventi elementari ed utilizzare poi le regole del calcolo delle probabilità per eventi complessi.

## 6.7 Variabili casuali

Per molti problemi fisici gli esiti di un fenomeno casuale sono rappresentati da valori numerici. Altri tipi di esiti, anche se non numerici, possono essere ricondotti ad essere tali. Per esempio nel lancio della moneta si può assegnare 1 all'esito *testa* e 0 all'esito *croce*. È completamente generale dire che si può rappresentare un fenomeno casuale con un numero casuale che indichiamo con  $X$ . Poiché il valore di  $X$  si può ritenere dipendente dall'esito di un esperimento casuale, che è rappresentato da un punto campione  $\omega$  dello spazio campione,  $X$  è una funzione definita sullo spazio campione  $\Omega$ . In generale una descrizione quantitativamente dettagliata di  $X$  non è richiesta o addirittura non è possibile, ed è sufficiente una opportuna descrizione probabilistica. Una variabile casuale è quindi una funzione definita su uno spazio campione  $\Omega$  che permette di associare ad ogni numero reale  $x$  una probabilità  $P[\omega : X(\omega) \leq x]$ .

## 6.8 Funzioni probabilità, distribuzione di probabilità e densità di probabilità

Le variabili casuali possono essere descritte in diversi modi. Nel caso in cui  $X$  assuma valori discreti il modo più intuitivo consiste nel determinare qual è la probabilità che la variabile  $X$  assuma determinati valori:

$$P_x(x) = P(X = x) \quad x = a_1, a_2, \dots, a_n$$

dove  $P(X = x)$  è equivalente a scrivere  $P[\omega : X(\omega) = x]$ .  $P_x(x)$  si chiama funzione distribuzione di probabilità della variabile casuale  $X$  e l'argomento  $x$  si chiama variabile di stato. Si può descrivere una variabile casuale con la probabilità che essa assuma valori minori o uguali a quelli della variabile di stato  $x$  definendo così la funzione *distribuzione di probabilità* della variabile casuale  $X$  che si indica con  $F_x(x)$ , come

$$F_x(x) = P(X \leq x)$$

dove  $P(X \leq x)$  equivale a scrivere  $P[\omega : X(\omega) \leq x]$ . Si possono vedere alcune proprietà della funzione distribuzione di probabilità. Essa è una funzione discreta monotona crescente ed inoltre si ha:

$$\begin{aligned} F_x(-\infty) &= 0 \\ F_x(+\infty) &= 1 \end{aligned}$$

Queste proprietà sono immediate. Infatti se lo spazio campione si estende da  $-\infty$  a  $+\infty$  la probabilità che  $X(\omega)$  sia minore di  $-\infty$  è nulla, mentre vi è la certezza che sia  $X(\omega) \leq +\infty$ . Quanto detto non si può applicare ad una variabile casuale continua alla quale è associato uno spazio campione non numerabile, e quindi la probabilità che  $X$  assuma un ben determinato valore è generalmente zero. In questo caso  $F_x(x)$  è una funzione continua ed è allora conveniente definire la funzione *densità di probabilità*  $p_x(x)$ :

$$p_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}$$

dove si suppone che  $F_x(x)$  sia derivabile in tutto il suo campo di esistenza. La densità di probabilità  $p_x(x)$  descrive la probabilità che  $X(\omega)$  sia compresa tra  $x$  e  $x + dx$ . Dalla definizione segue che:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x p_x(s) ds$$

dove si è fatto uso della condizione  $F_x(-\infty) = 0$ . Se il limite superiore dell'integrale va a  $+\infty$  si ha:

$$F_x(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(s) ds = 1$$

Nello studio dei fenomeni fisici una delle funzioni densità di probabilità più frequentemente utilizzate è la densità di probabilità Gaussiana, che è già stata incontrata in precedenza.

## 6.9 Funzioni distribuzione e densità di probabilità

Spesso interessa conoscere la relazione tra due o più variabili casuali. Se si considera un sistema dinamico soggetto ad una generica eccitazione casuale, è ragionevole pensare che l'eccitazione ad un certo istante di tempo non sia del tutto indipendente da quella ad un altro istante di tempo. Siano  $X_1$  ed  $X_2$  le variabili che rappresentano i valori dell'eccitazione agli istanti  $t_1$  e  $t_2$  rispettivamente. La relazione tra  $X_1$  ed  $X_2$  è descritta dalla funzione *distribuzione di probabilità composta*:

$$F_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = P((X_1 < x_1) \cap (X_2 < x_2))$$

La  $F_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$  soddisfa le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} F_{X_1 X_2}(-\infty, x_2) &= F_{X_1 X_2}(x_1, -\infty) = 0 \\ F_{X_1 X_2}(+\infty, +\infty) &= 1 \\ F_{X_1 X_2}(x_1, +\infty) &= F_{X_1}(x_1) \\ F_{X_1 X_2}(+\infty, x_2) &= F_{X_2}(x_2) \end{aligned}$$

La funzione *densità di probabilità composta* è definita come la derivata mista della funzione distribuzione di probabilità composta:

$$p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F_{X_1 X_2}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Invertendo la precedente relazione si ha:

$$F_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p_{X_1 X_2}(s_1, s_2) ds_2 ds_1$$

Se  $x_2$  tende a  $+\infty$ , ci si riduce alla funzione distribuzione per una singola variabile casuale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x_1} p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) ds_1 ds_2 = P(X_1 \leq x_1) = F_{X_1}(x_1)$$

Se si differenzia quest'equazione si ottiene:

$$p_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1 X_2}(x_1, s_2) ds_2$$

Analogamente:

$$p_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1 X_2}(s_1, x_2) ds_1$$

Se sia  $x_1$  che  $x_2$  tendono a  $+\infty$  si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) ds_1 ds_2 = 1$$

La funzione densità di probabilità composta contiene più informazioni di  $p_{X_1}(x_1)$  e  $p_{X_2}(x_2)$  separatamente, poiché queste ultime possono essere ottenute dalla prima ma non viceversa. In Figura 6.6 è rappresentata la densità di probabilità composta gaussiana in due dimensioni.

Il caso bidimensionale può essere immediatamente generalizzato. Si ha:

$$F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P((X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2) \cap \dots \cap (X_n \leq x_n))$$

e:

$$p_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

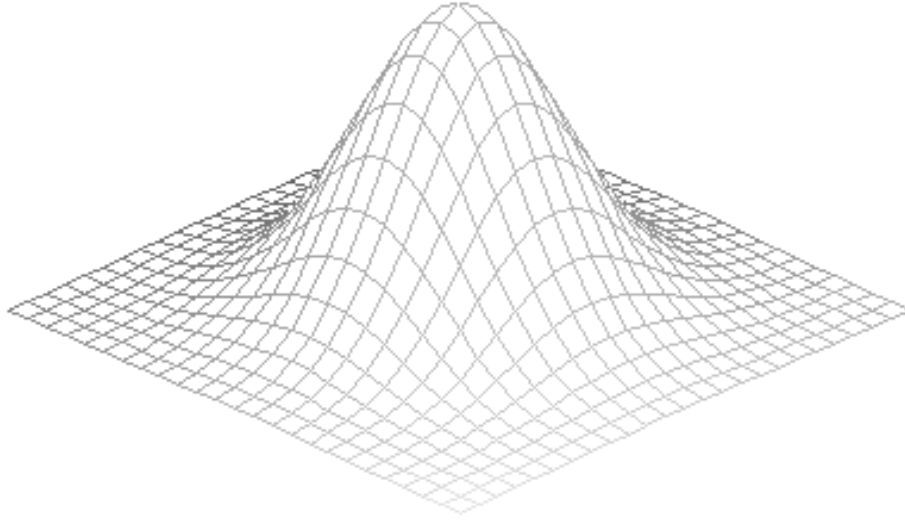


Figura 6.6: Densità di probabilità composta gaussiana in due dimensioni

## 6.10 Valore atteso

Sia  $X$  una variabile casuale; il valore atteso di  $X$  è definito come:

$$\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_x(x) dx$$

Il valore atteso è chiamato anche media d'insieme, media statistica o semplicemente media. Facendo un paragone tra la densità di probabilità e la densità di materia, il calcolo del valore atteso è l'analogo del calcolo del baricentro di un corpo.

## 6.11 Momenti

Un'importante classe di valori attesi è quella delle varie potenze di una o più variabili casuali. Questi valori attesi vengono detti momenti. Nel caso di una singola variabile casuale,  $E(X)$  è anche noto come momento del primo ordine,  $E(X^2)$  si chiama momento del secondo ordine, e così via; nel caso di due o più variabili casuali  $E(X_1^m X_2^n)$  si chiama momento composto di ordine  $m + n$ . Mentre il momento del primo ordine è l'analogo del calcolo del baricentro, il momento del secondo ordine è l'analogo del calcolo del momento d'inerzia ed il momento di due variabili casuali è l'analogo del calcolo del prodotto d'inerzia. Di solito si indica con  $\mu_x$  il momento primo di  $X$ ; si chiama allora:

$$E((X - \mu_x)^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - \mu_x)^n \cdot p_x(x) dx$$

momento centrale  $n$ -esimo di  $X$  rispetto al valore atteso. In particolare il momento del secondo ordine si chiama varianza e si indica con  $\sigma_{xx}^2$ . In generale  $E((X_1 - \mu_x)^m (X_2 - \mu_x)^n)$  si chiamerà momento centrale composto  $(m + n)$ -esimo di  $X_1$  ed  $X_2$  rispetto ai loro valori attesi. Come si è già visto, la media e la varianza sono sufficienti per definire completamente la funzione densità di probabilità gaussiana:

$$p_{V_G} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{V_G V_G}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{V_G - \mu_{V_G}}{\sigma_{V_G V_G}} \right)^2}$$

## 6.12 Processi casuali o stocastici

Per un generico sistema dinamico si può considerare come variabile casuale una qualsiasi  $X(t)$ . Si può anche prendere in esame l'uscita non ad un solo istante di tempo, ma a diversi istanti con una

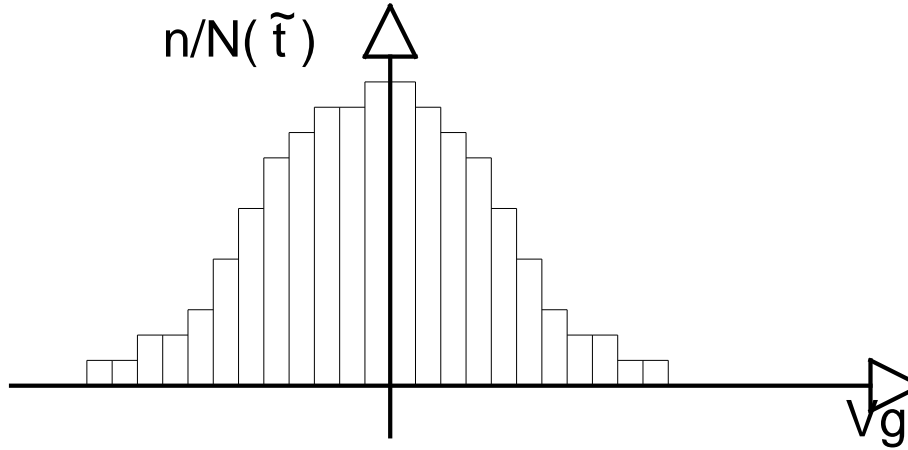


Figura 6.7: Frequenze relative

famiglia di variabili casuali  $X(t_1), X(t_2), \dots$ . Si può indicare l'intera famiglia con  $\{X(t) : t \in T\}$  o più semplicemente con  $X(t)$ , dove  $t$  è libero di assumere ogni valore dell'insieme  $T$ . Così per un sistema massa-molla-smorzatore  $X(t)$  potrebbe essere lo spostamento, mentre per il movimento casuale di una trave lo si potrebbe identificare con una famiglia di variabili casuali  $\{X(t, s) : t \in T, s \in S\}$  o  $X(t, s)$ , dove  $t$  e  $s$  hanno il significato di coordinate temporale e spaziale. Queste famiglie di variabili casuali vanno sotto il nome di *processi casuali*. Si può dare una definizione formale di processo casuale:

*Un processo casuale è una famiglia parametrizzata di variabili casuali con il parametro (parametri) appartenente ad un insieme (insiemi) di indici.*

Un processo casuale viene anche chiamato *processo stocastico* o *funzione casuale*; in generale non si tratterà di un processo rispondente alle caratteristiche di ergodicità. Avremo pertanto bisogno di un modo differente per descriverlo completamente. Si considerino a tal fine diversi (numerosi) voli campione e le relative registrazioni delle velocità di raffica intervenute; si può ipotizzare di calcolare la media di  $V_G$ , discretizzata in un numero finito di livelli, ad ogni istante  $t$  "su tutte le storie".

In analogia con quanto accennato per le medie di fenomeni statisticamente stazionari, si introduce il parametro *frequenza relativa*  $f(\tilde{t})$ , definito come il rapporto tra il numero di storie in cui il segnale rientra in un particolare intervallo di valori (evento) all'istante  $\tilde{t}$  e il numero totale di storie temporali considerate. Si tratta di una misura empirica della probabilità, che verrà definita più rigorosamente in seguito.

$$f_i(\tilde{t}) = \frac{n_i \in [V_{G_{i+1}}(\tilde{t}) - V_{G_i}(\tilde{t})]}{N_{tot}}$$

con

$$\sum_i f_i(\tilde{t}) = 1$$

Diagrammando le frequenze relative di diversi livelli della velocità di raffica, calcolate a pezzi uniformi, si ottiene un istogramma differente per ogni istante  $\tilde{t}$  considerato (Figura 6.7).

Si può calcolare la *media*:

$$media(\tilde{t}) = \sum_i \frac{n_i(\tilde{t}) \tilde{V}_{G_i}(\tilde{t})}{N} = \sum_i \frac{n_i}{N} \tilde{V}_{G_i} = \sum_i f_i \tilde{V}_{G_i}$$

dove  $n_i$  è il numero di occorrenze del livello  $V_{G_i}$ ,  $p_i = n_i/N$  è la frequenza relativa del livello  $V_{G_i}$  calcolata attraverso le storie al tempo  $\tilde{t}$  e  $\tilde{V}_{G_i}$  il valore medio dell'intervallo  $[V_{G_{i+1}}, V_{G_i}]$  (Figura 6.8).

Passando al limite per  $N \rightarrow \infty$ , cioè pensando di esaminare un numero infinito di storie temporali "parallele", si ottiene:

$$\mu_{V_G}(\tilde{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_G(\tilde{t}) \cdot p(V_G, \tilde{t}) dV_G$$

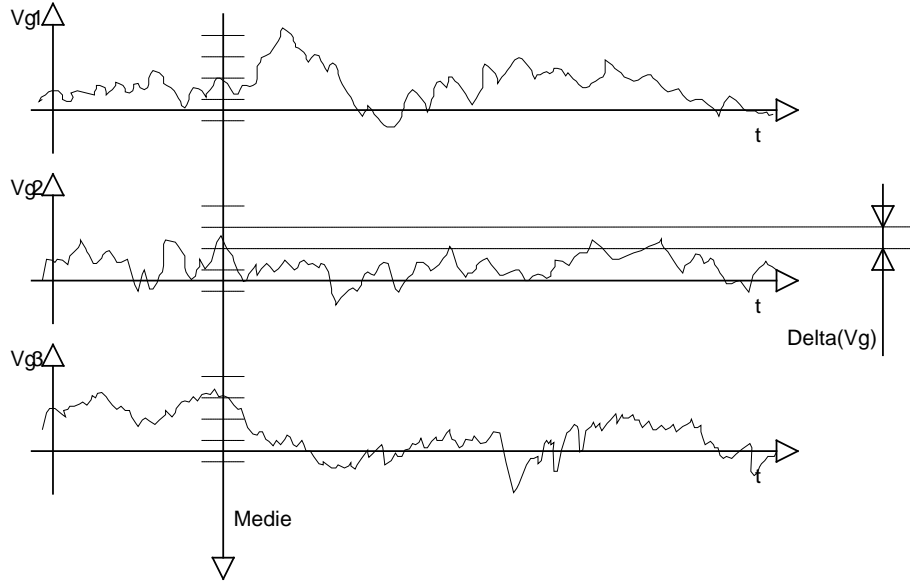


Figura 6.8: Storie temporali

La struttura probabilistica di un processo casuale è data in ordine crescente di completezza dalla conoscenza delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} p_x(x_1, t_1) \\ p_{xx}(x_1, t_1; x_2, t_2) \\ \dots \end{aligned}$$

dove  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots \in T$ . Esse si chiamano *funzioni densità di probabilità* del processo casuale  $x(t)$  del primo ordine, del secondo ordine, e così via, e sono funzioni delle variabili di stato  $x$  e dei parametri  $t$ . Ognuna di queste descrive la probabilità che il processo casuale  $x(t)$  assuma un determinato valore per un determinato valore del parametro  $t$ , ad esempio

$$p_{xx}(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 = P[x_1 \leq X(t_1) \leq x_1 + dx_1, x_2 \leq X(t_2) \leq x_2 + dx_2]$$

Per descrivere due o più processi casuali  $x(t)$  e  $y(u)$  sono inoltre necessarie le funzioni densità di probabilità composte

$$\begin{aligned} p_{xy}(x_1, t_1; y_1, u_1) \\ p_{xxy}(x_1, t_1; x_2, t_2; y_1, u_1) \\ p_{xyy}(x_1, t_1; y_1, u_1; y_2, u_2) \\ \dots \end{aligned}$$

Per ricostruire gli indicatori statistici della risposta occorrerà conoscere, oltre alla media, anche la covarianza relativa a due istanti differenti:

$$r_{V_G V_G}(t_1, t_2) = \iint_{-\infty, +\infty} V_{G1} V_{G2} p(V_{G1}, t_1, V_{G2}, t_2) dV_{G1} dV_{G2}$$

dove  $p(V_{G1}, t_1, V_{G2}, t_2)$  rappresenta la probabilità che la velocità di raffica  $V_G$  sia compresa tra i valori  $V_{G1}$  e  $V_{G1} + dV_{G1}$  al tempo  $t_1$  e tra  $V_{G2}$  e  $V_{G2} + dV_{G2}$  al tempo  $t_2$ . Se si ha a che fare con un vettore di variabili casuali il valore atteso ( $E$  come *expected*) è definito come:

$$E(\{x\}) = \{\mu_x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{x\} p(\{x\}, t) d\{x\}$$

La matrice di autocorrelazione è data dal valore atteso del prodotto di due vettori  $\{x\}$  per la densità di probabilità doppia:

$$E\left(\{x(t_1)\}\{x(t_2)\}^T\right) = [r_{xx}(t_1, t_2)] = \iint_{-\infty, +\infty} \{x_1\}\{x_2\}^T p(\{x_1\}, t_1, \{x_2\}, t_2) d\{x_1\} d\{x_2\}$$

Sulla diagonale si trovano le autocorrelazioni di  $x_i(t_1)$  con  $x_i(t_2)$  mentre al di fuori si trovano le varie intercorrelazioni. Le intercorrelazioni sono antisimmetriche.

Così la matrice di autocovarianza: due vettori  $\{x\}$  per la densità di probabilità doppia:

$$\begin{aligned} E\left(\left(\{x(t_1)\} - \{\mu_x(t_1)\}\right)\left(\{x(t_2)\} - \{\mu_x(t_2)\}\right)^T\right) \\ = \iint_{-\infty, +\infty} (\{x_1\} - \mu_x(t_1))(\{x_2\} - \mu_x(t_2))^T p(\{x_1\}, t_1, \{x_2\}, t_2) d\{x_1\} d\{x_2\} \\ = [k_{xx}(t_1, t_2)] = [r_{xx}(t_1, t_2)] - \{\mu_x(t_1)\}\{\mu_x(t_2)\}^T \end{aligned}$$

Se  $t_1 = t_2 = t$ , la matrice di autocovarianza prende il nome di matrice di varianza: essa è simmetrica, ed ha sulla diagonale le varianze  $\sigma_{x_i x_i}^2$  dei processi  $x_i$ .

### 6.13 Sistemi lineari con forzanti stocastiche non ergodiche

Dopo aver definito le grandezze necessarie per descrivere i fenomeni casuali si vogliono determinare gli indicatori statistici delle uscite di un sistema lineare tempo invariante noti gli indicatori statistici degli ingressi.

Sia dato un sistema lineare tempo invariante, come definito nell'appendice al termine di questo capitolo. Per ricavare delle equazioni differenziali che descrivano direttamente gli indicatori statistici dell'uscita noti quelli degli ingressi si applichi innanzitutto l'operatore di valore atteso alla soluzione  $x(t)$  (si veda l'appendice alla fine del capitolo):

$$E(\{x(t)\}) = [\Phi(t)] E(\{x_0\}) + \int_0^t [\Phi(t-\tau)] [B] E(\{u(\tau)\}) d\tau$$

Quindi, essendo il valore atteso pari alla media, si può scrivere:

$$\{\mu_x(t)\} = [\Phi(t)] \{\mu_{x_0}\} + \int_0^t [\Phi(t-\tau)] [B] \{\mu_u\} d\tau$$

Si riscriva allora il sistema lineare dopo l'applicazione dell'operatore:

$$\begin{aligned} \{\dot{\mu}_x(t)\} &= [A] \{\mu_x(t)\} + [B] \{\mu_u(t)\} \\ \{\mu_y(t)\} &= [C] \{\mu_x(t)\} + [D] \{\mu_u(t)\} \end{aligned}$$

Integrando il sistema, a partire da  $\{\mu_x(0)\} = \{\mu_{x_0}\}$ , si può calcolare la media istante per istante. Per la varianza occorre invece la differenza tra  $\{x\}$  e la media  $\{\mu_x\}$ :

$$\{x(t)\} - \{\mu_x(t)\} = [\Phi(t)] (\{x_0\} - \{\mu_{x_0}\}) + \int_0^t [\Phi(t-\tau)] [B] (\{u(\tau)\} - \{\mu_u(\tau)\}) d\tau$$

Ponendo:

$$\begin{aligned} \{\Delta x(t)\} &= \{x(t)\} - \{\mu_x(t)\} \\ \{\Delta u(t)\} &= \{u(t)\} - \{\mu_u(t)\} \end{aligned}$$

la variazione di  $\{x\}$  risulta allora essere:

$$\{\Delta x(t)\} = [\Phi(t)] \{\Delta x_0\} + \int_0^t [\Phi(t-\tau)] [B] \{\Delta u(\tau)\} d\tau$$



La covarianza è:

$$\begin{aligned}
[k_{xx}(t_1, t_2)] &= E \left( \{\Delta x(t_1)\} \{\Delta x(t_2)\}^T \right) \\
&= E \left( [\Phi(t_1)] \{\Delta x_0\} \{\Delta x_0\}^T [\Phi(t_2)]^T + \int_0^{t_1} [\Phi(t_1 - \tau_1)] [B] \{\Delta u(\tau_1)\} d\tau_1 \{\Delta x_0\}^T [\Phi(t_2)]^T \right. \\
&\quad + [\Phi(t_1)] \{\Delta x_0\} \int_0^{t_2} \{\Delta u(\tau_2)\}^T [B]^T [\Phi(t_2 - \tau_2)]^T d\tau_2 \\
&\quad \left. + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} [\Phi(t_1 - \tau_1)] [B] \{\Delta u(\tau_1)\} \{\Delta u(\tau_2)\}^T [B]^T [\Phi(t_2 - \tau_2)]^T d\tau_1 d\tau_2 \right)
\end{aligned}$$

Si assuma di poter ipotizzare una correlazione nulla tra forzanti e condizioni iniziali; si porti quindi l'operatore valore atteso all'interno degli integrali. Ad esempio:

$$\begin{aligned}
E \left( [\Phi(t_1)] \{\Delta x_0\} \{\Delta x_0\}^T [\Phi(t_2)]^T \right) &= [\Phi(t_1)] E \left( \{\Delta x_0\} \{\Delta x_0\}^T \right) [\Phi(t_2)]^T \\
&= [\Phi(t_1)] [k_{x_0 x_0}] [\Phi(t_2)]^T
\end{aligned}$$

Si ottiene allora:

$$\begin{aligned}
[k_{xx}(t_1, t_2)] &= [\Phi(t_1)] [k_{x_0 x_0}] [\Phi(t_2)]^T \\
&\quad + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} [\Phi(t_1 - \tau_1)] [B] [k_{uu}(\tau_1, \tau_2)] [B]^T [\Phi(t_2 - \tau_2)]^T d\tau_1 d\tau_2
\end{aligned}$$

Per  $t_1 = t_2 = t$  si ottiene, come è ormai già noto, la varianza:

$$\begin{aligned}
[\sigma_{xx}^2(t)] &\stackrel{\text{def}}{=} [k_{xx}^2(t, t)] \\
&= [\Phi(t)] [k_{x_0 x_0}] [\Phi(t)]^T \\
&\quad + \int_0^t \int_0^t [\Phi(t - \tau_1)] [B] [k_{uu}(\tau_1, \tau_2)] [B]^T [\Phi(t - \tau_2)]^T d\tau_1 d\tau_2
\end{aligned}$$

È interessante osservare che, come nel caso di forzanti deterministiche, la soluzione è costituita da due parti: una rappresenta il contributo dovuto alle condizioni iniziali, parente della soluzione dell'equazione omogenea associata, che si estingue in modo più o meno rapido se il sistema è asintoticamente stabile. L'altra rappresenta il contributo dovuto alla forzante: il sistema, perciò, dopo un transitorio insegue la varianza dell'uscita con un ritardo dovuto alla propria matrice di trasferimento, genitrice di  $[\Phi]$ . Si derivi ora rispetto al tempo, per verificare che questa sia la soluzione di un sistema differenziale: si ricordi a tale proposito un noto teorema (regola di Leibniz).

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(\tau) d\tau = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{d}{dt} f(\tau) d\tau + f(b(t)) \frac{d}{dt} b(t) - f(a(t)) \frac{d}{dt} a(t)$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned}
[\dot{\sigma}_{xx}^2(t)] &= [\dot{\Phi}(t)] [k_{x_0 x_0}] [\Phi(t)]^T + [\Phi(t)] [k_{x_0 x_0}] [\dot{\Phi}(t)]^T \\
&\quad + \int_0^t \int_0^t [\dot{\Phi}(t - \tau_1)] [B] [k_{uu}(\tau_1, \tau_2)] [B]^T [\Phi(t - \tau_2)]^T d\tau_1 d\tau_2 \\
&\quad + \int_0^t [\Phi(0)] [B] [k_{uu}(t, \tau_2)] [B]^T [\Phi(t - \tau_2)]^T d\tau_2 \\
&\quad + \int_0^t \int_0^t [\Phi(t - \tau_1)] [B] [k_{uu}(\tau_1, \tau_2)] [B]^T [\dot{\Phi}(t - \tau_2)]^T d\tau_1 d\tau_2 \\
&\quad + \int_0^t [\Phi(t - \tau_1)] [B] [k_{uu}(\tau_1, t)] [B]^T [\Phi(0)]^T d\tau_1
\end{aligned}$$

Si ricordi che  $[\Phi(0^+)] = [I]$ . Dal momento che la matrice  $[\Phi]$  soddisfa il sistema omogeneo associato al problema differenziale lineare:

$$[\dot{\Phi}] = [A][\Phi]$$

si può sostituire quest'ultima relazione al posto delle derivate di  $[\Phi]$  ed ottenere:

$$\begin{aligned} [\dot{\sigma}_{xx}^2(t)] &= [A][\sigma_{xx}^2(t)] + [\sigma_{xx}^2(t)][A]^T \\ &\quad + [B] \int_0^t [k_{uu}(t, \tau)][B]^T [\Phi(t - \tau)]^T d\tau + \int_0^t [\Phi(t - \tau)][B][k_{uu}(\tau, t)] d\tau [B]^T \end{aligned}$$

I due integrali sono l'uno il trasposto dell'altro: se ne calcolerà quindi solamente uno. Emerge però un problema: l'intervarianza di forzanti e stati  $[\sigma_{xu}^2(t)] = [k_{xu}(t, t)]$  viene descritta a sua volta da un'equazione differenziale che dovrà essere integrata "da capo" ad ogni istante di tempo  $t$ , in quanto ad ogni istante saranno diverse le relative condizioni iniziali. Per verificarlo si calcoli innanzitutto l'intercovarianza  $[k_{xu}(t_1, t_2)]$ :

$$\begin{aligned} [k_{xu}(t_1, t_2)] &= E\left(\{\Delta x(t_1)\}\{\Delta u(t_2)\}^T\right) \\ &= E\left([\Phi(t_1)]\{\Delta x_0\}\{\Delta u(t_2)\}^T\right) + E\left(\int_0^{t_1} [\Phi(t_1 - \tau)][B]\{\Delta u(\tau)\} d\tau \{\Delta u(t_2)\}^T\right) \end{aligned}$$

Per ipotesi non vi è correlazione tra condizioni iniziali e forzante: allora la matrice di intercovarianza tra stati e ingressi è pari a:

$$[k_{xu}(t_1, t_2)] = \int_0^{t_1} [\Phi(t_1 - \tau)][B] \underbrace{E\left(\{\Delta u(\tau)\}\{\Delta u(t_2)\}^T\right)}_{[k_{uu}(\tau, t_2)]} d\tau$$

Questo termine coincide con l'integrale determinato in precedenza. Si può quindi scrivere:

$$[\dot{\sigma}_{xx}^2(t)] = [A][\sigma_{xx}^2(t)] + [\sigma_{xx}^2(t)][A]^T + [B][\sigma_{ux}^2(t)] + [\sigma_{xu}^2(t)][B]^T$$

Si noti come l'espressione ottenuta per la matrice  $[k_{ux}(t_1, t_2)]$  assomigli alla soluzione di un sistema deterministico formato da una serie di forzanti riunite sinteticamente in una matrice:

$$[\dot{k}_{xu}(t, t_2)] = [A][k_{xu}(t, t_2)] + [B][k_{uu}(t, t_2)]$$

Si fissa cioè  $t_2$ , poi si integra, con condizioni iniziali  $[k_{ux}(0, t_2)] = [0]$ ; per ogni  $t_2$  è necessario però ricominciare l'integrazione dall'inizio. Per maggiore chiarezza viene spesso utilizzata la seguente notazione, tesa a sottolineare appunto la dipendenza della condizione iniziale dal particolare istante di tempo considerato nell'equazione per  $[k_{xu}]$ :

$$[\dot{k}_{xu}(t, \cdot)] = [A][k_{xu}(t, \cdot)] + [B][k_{uu}(t, \cdot)]$$

Dal punto di vista operativo risulta più conveniente calcolare l'integrale di intercovarianza piuttosto che integrare il sistema (con un metodo numerico di integrazione al passo).

Se l'ingresso è un rumore bianco, cioè un segnale la cui matrice delle autocovarianze sia pari a

$$[k_{uu}(t_1, t_2)] = [W(t_1)]\delta(t_2 - t_1)$$

allora la matrice di intercovarianza tra lo stato del sistema e le forzanti valutata per  $t_1 = t_2 = t$ , cioè l'intervarianza  $[\sigma_{xu}^2]$ , diventa

$$[\sigma_{xu}^2(t)] = [k_{xu}(t, t)] = \int_0^t [\Phi(t - \tau)][B][k_{uu}(\tau, t)] d\tau = \int_0^t [\Phi(t - \tau)][B][W(t)]\delta(t) d\tau = \frac{1}{2}[B][W(t)]$$

dove il termine  $\frac{1}{2}$  è dovuto, come visto in precedenza, al fatto che la funzione  $[\Phi(t)]$  è nulla per  $t < 0$  e pari a  $[I]$  per  $t = 0^+$ .

È immediato verificare che la matrice delle autocovarianze delle variabili di uscita verifica la seguente relazione:

$$\begin{aligned} [k_{yy}(t_1, t_2)] &= [C][k_{xx}(t_1, t_2)][C]^T + [C][k_{xu}(t_1, t_2)][D]^T \\ &\quad + [D][k_{ux}(t_1, t_2)][C]^T + [D][k_{uu}(t_1, t_2)][D]^T \end{aligned}$$

## 6.14 Processi casuali stazionari (omogenei)

Un processo casuale si dice *fortemente omogeneo* o *omogeneo in senso stretto* se la sua completa struttura probabilistica è indipendente da una traslazione dell'origine del parametro. La forte omogeneità implica che

$$\begin{aligned} p_x(x_1, t_1) &= p_x(x_1, t_1 - a) \\ p_{xx}(x_1, t_1; x_2, t_2) &= p_{xx}(x_1, t_1 - a; x_2, t_2 - a) \\ &\dots \\ \forall a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Consideriamo il caso  $a = t_1$ : allora la funzione densità di probabilità è indipendente dal parametro  $t$  e quelle di ordine superiore dipendono dalle differenze dei valori di  $t$ . Quando il parametro  $t$  assume il significato di tempo, un processo casuale omogeneo è più comunemente chiamato *stazionario*. Se le relazioni appena viste sono verificate si parla di processo casuale fortemente stazionario o stazionario in senso stretto; se sono verificate solo le prime due relazioni si parla di processo casuale debolmente stazionario o stazionario in senso ampio.

Si consideri una forzante stazionaria in senso stocastico, cioè con media costante nel tempo e con autocorrelazione ed autocovarianza non dipendenti in modo generale da  $t_1$  e  $t_2$  ma solamente dalla loro differenza  $t_2 - t_1$ . Il sistema analizzato sarà ancora una volta assunto asintoticamente stabile; allora, nel caso di forzante statisticamente stazionaria, anche la risposta lo sarà:

$$\{\dot{\mu}_x\} = \{0\}$$

Dal sistema si ottiene:

$$\{\dot{\mu}_x\} = [A]\{\mu_x\} + [B]\{\mu_u\} = \{0\}$$

quindi:

$$\{\mu_x\} = -[A]^{-1}[B]\{\mu_u\}$$

e per la risposta:

$$\{\mu_y\} = [C]\{\mu_x\} + [D]\{\mu_u\}$$

da cui:

$$\{\mu_y\} = \left(-[C][A]^{-1}[B] + [D]\right)\{\mu_u\}$$

Ricordando la funzione di trasferimento di un sistema lineare:

$$[H(s)] = [C](s[I] - [A])^{-1}[B] + [D]$$

nella funzione di trasferimento della media di un segnale stazionario si riconosce che

$$-[C][A]^{-1}[B] + [D] = [H(0)]$$

analogamente a quanto visto per il caso di forzanti ergodiche.

Esaminando l'uscita, ed in particolare la sua matrice di autocovarianza,  $[k_{yy}(t_1, t_2)]$ :

$$\begin{aligned} [k_{yy}(t_1, t_2)] &= [C] [k_{xx}(t_1, t_2)] [C]^T + [C] [k_{xu}(t_1, t_2)] [D]^T \\ &\quad + [D] [k_{ux}(t_1, t_2)] [C]^T + [D] [k_{uu}(t_1, t_2)] [D]^T \end{aligned}$$

si osserva che nel caso stazionario

$$[k_{yy}(t_1, t_2)] = [k_{yy}(t_2 - t_1)]$$

da cui:

$$\begin{aligned} [k_{yy}(t_2 - t_1)] &= [C] \iint_{-\infty, +\infty} [\Phi(t_1 - \tau_1)] [B] [k_{uu}(\tau_2 - \tau_1)] [B]^T [\Phi(t_2 - \tau_2)]^T d\tau_1 d\tau_2 [C]^T \\ &\quad + [C] \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi(t_1 - \tau_1)] [B] [k_{uu}(t_2 - \tau_1)] d\tau_1 [D]^T \\ &\quad + [D] \int_{-\infty}^{+\infty} [k_{uu}(\tau_2 - t_1)] [B]^T [\Phi(t_2 - \tau_2)]^T d\tau_2 [C]^T \\ &\quad + [D] [k_{uu}(t_2 - t_1)] [D]^T \end{aligned}$$

Si può descrivere tutta l'espressione precedente sotto forma di integrale doppio utilizzando la funzione  $\delta$  di Dirac. Per esempio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi(t_1 - \tau_1)] [B] [k_{uu}(t_2 - \tau_1)] d\tau_1 = \iint_{-\infty, +\infty} [\Phi(t_1 - \tau_1)] [B] [k_{uu}(\tau_2 - \tau_1)] \delta(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

cioè:

$$[k_{uu}(t_2 - \tau_1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [k_{uu}(\tau_2 - \tau_1)] \delta(t_2 - \tau_2) d\tau_2$$

L'autocovarianza dell'uscita sarà esprimibile quindi come:

$$\begin{aligned} [k_{yy}(t_2 - t_1)] &= [C] \iint_{-\infty, +\infty} [\Phi(t_1 - \tau_1)] [B] [k_{uu}(\tau_2 - \tau_1)] [B]^T [\Phi(t_2 - \tau_2)]^T d\tau_1 d\tau_2 [C]^T \\ &\quad + [C] \iint_{-\infty, +\infty} [\Phi(t_1 - \tau_1)] [B] [k_{uu}(\tau_2 - \tau_1)] \delta(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 [D]^T \\ &\quad + [D] \iint_{-\infty, +\infty} \delta(t_1 - \tau_1) [k_{uu}(\tau_2 - \tau_1)] [B]^T [\Phi(t_2 - \tau_2)]^T d\tau_1 d\tau_2 [C]^T \\ &\quad + [D] \iint_{-\infty, +\infty} \delta(t_1 - \tau_1) [k_{uu}(\tau_2 - \tau_1)] \delta(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 [D]^T \end{aligned}$$

Se si definisce

$$[h(t - \tau)] = [C] [\Phi(t - \tau)] [B] + [D] \delta(t - \tau)$$

allora

$$[k_{yy}(t_2 - t_1)] = \iint_{-\infty, +\infty} [h(t_1 - \tau_1)] [k_{uu}(\tau_2 - \tau_1)] [h(t_2 - \tau_2)]^T d\tau_1 d\tau_2$$

Si operi ora la seguente sostituzione di variabili con Jacobiano unitario:

$$\begin{aligned} t_1 - \tau_1 &= z_1 \\ t_2 - \tau_2 &= z_2 \end{aligned}$$

dove  $t_1$  e  $t_2$  sono considerati costanti. L'integrale si trasforma allora in:

$$\begin{aligned} d\tau_1 &= -dz_1 \\ d\tau_2 &= -dz_2 \end{aligned}$$

allora:

$$[k_{yy}(t_2 - t_1)] = \iint_{-\infty, +\infty} [h(z_1)] [k_{uu}(z_1 + t_2 - t_1 - z_2)] [h(z_2)]^T dz_1 dz_2$$

Si ottiene così un importante risultato: le formule ottenute per forzanti ergodiche continuano a valere, a livello formale, anche per forzanti stazionarie; l'unica differenza consiste nelle diverse modalità di calcolo del valore atteso.

Anche per i segnali stazionari è possibile usare la DSP; Si consideri ora la risposta del sistema a delle forzanti rappresentabili con dei rumori bianchi: come è già stato sottolineato in precedenza, il rumore bianco non è un segnale fisicamente riscontrabile in natura, poiché, con un contenuto in frequenza uniforme, avrebbe una potenza infinita. È tuttavia utilizzabile convenientemente allorché la DSP della forzante reale abbia un andamento sufficientemente uniforme sino a frequenze abbastanza elevate da non interessare i poli del sistema sollecitato.

Per un rumore bianco stazionario, la  $[k_{uu}]$  è pari a:

$$[k_{uu}(t_2 - t_1)] = [W] \delta(t_2 - t_1)$$

dove  $[W]$  è una matrice costante.

Abbiamo visto in precedenza che la varianza dello stato soddisfa la relazione:

$$[\dot{\sigma}_{xx}^2(t)] = [A] [\sigma_{xx}^2(t)] + [\sigma_{xx}^2(t)] [A]^T + [B] [\sigma_{ux}^2(t)] + [\sigma_{xu}^2(t)] [B]^T$$

dove

$$[\sigma_{xu}^2(t)] = \int_0^t [\Phi(t - \tau)] [B] [k_{uu}(\tau, t)] d\tau$$

Quando la risposta è stazionaria (se il sistema è asintoticamente stabile la parte dipendente dalle condizioni iniziali diverrà trascurabile dopo il transitorio iniziale) si ha:

$$[\dot{\sigma}_{xx}^2(t)] = [\dot{\sigma}_{xx}^2(0)] = [0]$$

Allora la soluzione con il rumore bianco quale forzante, analogamente a quanto visto nel paragrafo 6.3, dà:

$$[\sigma_{xu}^2(t)] = \int_0^t [\Phi(t - \tau)] [B] [W] \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{2} [B] [W]$$

L'equazione della varianza in caso di segnale stazionario diviene quindi:

$$[0] = [A] [k_{xx}(t - t)] + [k_{xx}(t - t)] [A]^T + \frac{1}{2} [B] [W] [B]^T + \frac{1}{2} [B] [W] [B]^T$$

È stata cioè nuovamente ottenuta, anche per segnali stazionari, l'Equazione di Lyapunov

$$[A] [\sigma_{xx}^2] + [\sigma_{xx}^2] [A]^T + [B] [W] [B]^T = [0]$$

Questo è un sistema di  $n(n+1)/2$  equazioni in altrettante incognite, perché la  $[\sigma_{xx}^2]$  è una matrice simmetrica. Vale inoltre la seguente relazione (antitrasformata della DSP)

$$[\sigma_{xx}^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi_{xx}(\omega)] d\omega$$

## 6.15 Nota sui metodi di soluzione

L'equazione di Lyapunov

$$[A] [\sigma_{xx}^2] + [\sigma_{xx}^2] [A]^T + [B] [W] [B]^T = [0]$$

richiede la soluzione di un sistema lineare di  $n(n+1)/2$  equazioni (data la simmetria di  $[\sigma_{xx}^2]$ ). Poichè la soluzione di un sistema lineare in  $N$  incognite, richiede in genere, un numero di operazioni proporzionale a  $N^3$ , la soluzione dell'equazione di Lyapunov richiede un numero di operazioni proporzionale a  $n^6$ . Questo rende molto onerosa, al crescere delle dimensioni del vettore degli stati, la soluzione diretta dell'equazione. È tuttavia possibile trasformare l'equazione moltiplicandola a sinistra per una matrice (non singolare)  $[X]^{-1}$  e a destra per la sua trasposta:

$$[X]^{-1} [A] [X] [X]^{-1} [\sigma_{xx}^2] [X]^{-T} + [X]^{-1} [\sigma_{xx}^2] [X]^{-T} [X]^T [A]^T [X]^{-T} + [X]^{-1} [B] [W] [B]^T [X]^{-T} = [0]$$

Il sistema diventa quindi

$$\begin{aligned} [\tilde{A}] [\Sigma] + [\Sigma] [\tilde{A}]^T + [\tilde{B}] &= [0] \\ [\Sigma] &= [X]^{-1} [\sigma_{xx}^2] [X]^{-T} \end{aligned}$$

dove  $[\tilde{A}] = [X]^{-1} [A] [X]$  e  $[\tilde{B}] = [X]^{-1} [B] [W] [B]^T [X]^{-T}$ , da cui è immediato ricavare  $[\sigma_{xx}^2] = [X] [\Sigma] [X]^T$ . Si noti che la trasformazione che porta  $[A]$  in  $[\tilde{A}]$  non è altro che una trasformazione di similarità, che conserva gli autovalori.

Scegliendo opportunamente la matrice  $[X]$  si può portare  $[\tilde{A}]$  in una forma che rende possibile la soluzione diretta del problema trasformato in modo efficiente, cioè con un numero di operazioni molto minore di  $n^6$ . Esempi notevoli sono l'utilizzo della matrice degli autovettori di  $[A]$  che rende  $[\tilde{A}] = [\Lambda]$  diagonale quando questa ha autovalori distinti o con molteplicità geometrica uguale a quella algebrica. La generica equazione  $(i, j)$  diventa

$$\Lambda_i \Sigma_{ij} + \Sigma_{ij} \Lambda_j + \beta_{ij} = 0$$

ove  $\beta_{ij}$  è il generico coefficiente del termine noto, la cui soluzione è  $\Sigma_{ij} = -\beta_{ij}/(\Lambda_i + \Lambda_j)$ . Qualora la matrice non sia diagonalizzabile si può ricorrere a una matrice  $[X]$  che porta  $[\tilde{A}]$  nella forma di Schur. In quest'ultimo caso si ha un'efficienza inferiore a quella resa possibile dalla diagonalizzazione. Il numero di operazioni rimane comunque assai inferiore a  $n^6$  e il buon condizionamento del problema è garantito anche in presenza di autovalori vicini o coincidenti.

## 6.16 Nota su problemi di ottimizzazione

Al crescere delle dimensioni del problema la soluzione analitica non è generalmente praticabile. Esistono metodi per la soluzione numerica dell'equazione di Lyapunov, quindi l'ottimizzazione del problema può essere svolta per via numerica. I metodi di ottimizzazione maggiormente efficienti richiedono la determinazione delle derivate di sensitività del problema rispetto alle variabili di progetto. Queste, in molti casi, possono essere determinate per via analitica. Si consideri un generico parametro di progetto, come, in un esempio precedente, lo smorzamento  $C$ . La derivata di sensitività della varianza dell'uscita è:

$$\frac{\partial [\sigma_{yy}^2]}{\partial p} = \frac{\partial [C]}{\partial p} [\sigma_{xx}^2] [C]^T + [C] \frac{\partial [\sigma_{xx}^2]}{\partial p} [C]^T + [C] [\sigma_{xx}^2] \frac{\partial [C]^T}{\partial p}$$

nel caso in cui anche la matrice dell'uscita dipenda dal parametro. Si concentri ora l'attenzione sulla derivata di sensitività della varianza dello stato. Essa si determina considerando la derivata dell'equazione di Lyapunov con le stesse matrici dei coefficienti:

$$\frac{\partial [A]}{\partial p} [\sigma_{xx}^2] + [A] \frac{\partial [\sigma_{xx}^2]}{\partial p} + \frac{\partial [\sigma_{xx}^2]}{\partial p} [A]^T + [\sigma_{xx}^2] \frac{\partial [A]^T}{\partial p} + \frac{\partial [B]}{\partial p} [W] [B]^T + [B] [W] \frac{\partial [B]^T}{\partial p} = [0]$$

nel caso in cui anche la matrice degli ingressi dipenda dal parametro. Si noti come la relazione appena scritta sia in pratica un nuovo problema di Lyapunov nelle derivate di sensitività:

$$[A] \frac{\partial [\sigma_{xx}^2]}{\partial p} + \frac{\partial [\sigma_{xx}^2]}{\partial p} [A]^T + \frac{\partial [A]}{\partial p} [\sigma_{xx}^2] + [\sigma_{xx}^2] \frac{\partial [A]^T}{\partial p} + \frac{\partial [B]}{\partial p} [W] [B]^T + [B] [W] \frac{\partial [B]^T}{\partial p} = [0]$$

La varianza dello stato viene calcolata risolvendo il problema con il valore corrente del parametro; le derivate delle matrici possono essere calcolate sempre utilizzando la stessa matrice  $[X]$  di trasformazione. Nel caso del problema precedente si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [A]}{\partial p} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial [B]}{\partial p} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial [C]}{\partial p} &= [0 \quad -1/M \quad 0] \end{aligned}$$

## 6.17 Appendice: Sistemi lineari tempo invarianti

Dato il sistema lineare tempo invariante

$$\begin{aligned} \{\dot{x}\} &= [A] \{x\} + [B] \{u\} \\ \{y\} &= [C] \{x\} + [D] \{u\} \end{aligned}$$

l'equazione di stato può essere risolta moltiplicandola per  $e^{-[A]t}$  dove, per definizione,

$$e^{[A]t} = [I] + [A]t + [A]^2 \frac{t^2}{2!} + [A]^3 \frac{t^3}{3!} + \dots$$

Si ottiene:

$$e^{-[A]t} \{\dot{x}\} = e^{-[A]t} [A] \{x\} + e^{-[A]t} [B] \{u\}$$

Si può notare che:

$$e^{-[A]t} \{\dot{x}\} - e^{-[A]t} [A] \{x\} = \frac{d}{dt} \left( e^{-[A]t} \{x\} \right)$$

e quindi:

$$\frac{d}{dt} \left( e^{-[A]t} \{x\} \right) = e^{-[A]t} [B] \{u\}$$

che, integrata tra 0 e  $t$  con condizione iniziale  $\{x(0)\} = \{x_0\}$ , dà:

$$\{x(t)\} = [\Phi(t)] \{x_0\} + \int_0^t [\Phi(t-\tau)] [B] \{u(\tau)\} d\tau$$

dove si indica la matrice  $e^{[A]t}$  con  $[\Phi(t)]$ , che prende il nome di matrice di transizione, ed è soluzione della:

$$[\dot{\Phi}] = [A] [\Phi] \quad \text{con} \quad [\dot{\Phi}(0^+)] = [I].$$

Con una visione più fisica si può interpretare  $[\Phi]$  come la matrice delle risposte impulsive a livello di stati, cioè la soluzione di

$$[\dot{\Phi}] = [A] [\Phi] + [I] \delta(t) \quad \text{con} \quad [\Phi(0^-)] = [0] \quad (6.26)$$

che, integrata tra  $0^-$  e  $0^+$  dà  $[\Phi(0^+)] - [\Phi(0^-)] [I]$  e quindi  $[\Phi(0^+)] = [I]$ .

Si osserva che la matrice di transizione gode della seguente proprietà:

$$[\Phi(t_1)] = [\Phi(t_1 - t_2 + t_2)] = [\Phi(t_1 - t_2)] [\Phi(t_2)],$$

immediatamente verificabile tenendo conto delle proprietà degli esponenziali. L'uscita risulta essere:

$$\{y(t)\} = [C] \left( [\Phi(t)] \{x_0\} + \int_0^t [\Phi(t - \tau)] [B] \{u(\tau)\} d\tau \right) + [D] \{u(t)\}$$

Si osserva che:

$$\{u(t)\} = \int_0^t \delta(t - \tau) \{u(\tau)\} d\tau$$

e quindi

$$\{y(t)\} = [C] [\Phi(t)] \{x_0\} + \int_0^t ([C] [\Phi(t - \tau)] [B] + [D] \delta(t - \tau)) \{u(\tau)\} d\tau$$

Per  $\{x_0\} = \{0\}$  si può scrivere:

$$\{y(t)\} = \int_0^t [h(t - \tau)] \{u(\tau)\} d\tau$$

con

$$[h(t)] = [C] [\Phi(t)] [B] + [D] \delta(t)$$



## Capitolo 7

# Sperimentazione aeroelastica

### 7.1 Introduzione

Il flutter considera l'interazione sfavorevole, eventualmente in presenza di un sistema di controllo, tra forze aerodinamiche, elastiche ed inerziali sulle strutture, le quali possono produrre oscillazioni, eventualmente instabili, che spesso comportano danneggiamenti strutturali. I velivoli ad elevate prestazioni sono più sensibili al flutter, sebbene velivoli di costruzione amatoriale siano pure risultati suscettibili di tale instabilità già a 100 Km/h. Senza un'opportuna indagine è quindi impossibile escludere che un qualsiasi velivolo di nuova concezione sia esente da flutter, o, più in generale, da problemi aeroelastici. L'aeroelasticità gioca in effetti un ruolo essenziale nel progetto dei velivoli. L'introduzione di ali sempre più sottili, piano di coda orizzontale completamente mobile e configurazione dei piani di coda a T, hanno aumentato la probabilità di avere flutter all'interno dell'involuppo di volo. Lo studio dell'aeroelasticità è condotto utilizzando sia strumenti teorici che rilievi sperimentali, le due attività sono strettamente interconnesse in quanto l'attività sperimentale, il cui scopo primario è di verificare l'assenza di flutter nell'intero involucro di volo, serve anche a convalidare ed eventualmente ad aggiornare il modello teorico, il quale a sua volta permetterà di analizzare tutte le condizioni di configurazione, peso, carico e centraggio che non è pensabile di coprire sperimentalmente. L'attività d'analisi aeroelastica si svolge secondo lo schema di Figura 7.1 Prima di effettuare le prove in volo, quindi, si effettua la verifica del modello strutturale tramite l'analisi modale sperimentale (alcune tipologie d'analisi sono presentate nella sezione 7.9). In realtà il primo passo è la realizzazione di prove statiche per la verifica del modello di rigidità (flessibilità) strutturale (coefficienti di influenza). Le prove statiche permettono inoltre di evidenziare non linearità strutturali. Nel caso generale delle strutture aeronautiche, il rivestimento collabora alla rigidità complessiva; è quindi possibile (ed ammesso dalle normative) che, superato un certo fattore di carico, alcuni pannelli si trovino a lavorare in condizioni di instabilità locale. Questa è una possibile causa di non linearità elastiche. Va poi ricordato che nella definizione del modello aeroelastico, oltre alle non linearità, che possono essere dovute anche ad attriti e giochi, esistono poi caratteristiche modellabili con difficoltà: tipicamente nei modi propri con elevata partecipazione delle superfici di comando o dei

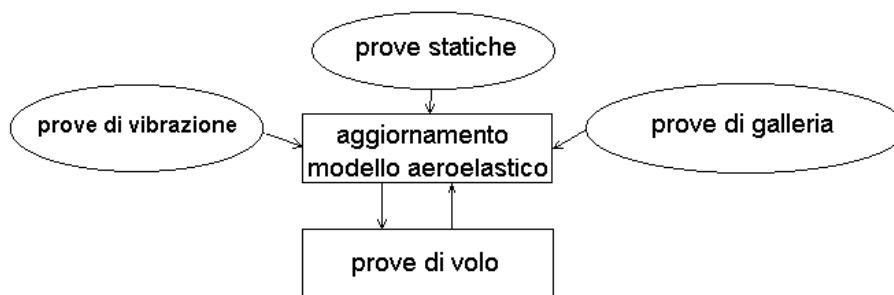


Figura 7.1: Analisi Aeroelastica.

carichi appesi, o nelle forze aerodinamiche in condizioni di volo transonico. Durante la fase sperimentale in volo, poi, il modello è continuamente aggiornato per estrapolare il comportamento aeroelastico nei successivi punti di prova. Nell'appendice A è riportato un estratto della normativa vigente sia civile che militare. Da essa si può, tra l'altro, vedere quali sono le limitazioni nell'uso dell'analisi e cosa invece debba essere dimostrato sperimentalmente. Va poi ricordato che, nel caso militare dove non esiste una certificazione propriamente detta, si dovrà tenere conto delle richieste del cliente. Il quale potrebbe anche non accontentarsi dei requisiti standard.

## 7.2 Cenni storici

Lo scopo di questo capitolo è quello d'introdurre la casistica dei fenomeni aeroelastici, così come si sono presentati nell'evoluzione del progetto dei velivoli. Il primo incidente legato al flutter accadde ad un Handley Page O/400 nel 1916. Il meccanismo del flutter consisté nell'accoppiamento del modo torsionale della fusoliera con il modo antisimmetrico di rotazione dell'equilibratore. Su questo velivolo c'erano due equilibratori comandati separatamente. La soluzione fu di collegare tra loro i due equilibratori con un tubo di torsione. Durante la prima guerra mondiale fu molto comune il flutter delle superfici di controllo e degli alettoni in particolare. In questo caso la soluzione fu di usare una massa di bilanciamento attorno all'asse di cerniera della superficie. La sostituzione di configurazioni di tipo biplano, con le due ali collegate da cavi, con ala semplice a sbalzo, fu fonte di nuovi incidenti, mentre fenomeni di flutter coinvolgenti le superfici primarie apparvero nel 1925. Un'ulteriore forma di flutter affrontata fu quella che coinvolgeva le servo-alette, ancora oggi non completamente risolto (Fairchild T-46 ad esempio). Nuovi problemi aeroelastici occorsero con la capacità dei velivoli di raggiungere velocità transoniche, tipico è il cosiddetto "aileron buzz" in cui la separazione del flusso dovuta all'onda d'urto fa vibrare ad alta frequenza l'alettone. Ancora oggi il regime transonico è considerato come il più critico dal punto di vista del flutter. L'avvento delle velocità supersoniche produsse un nuovo tipo di flutter, conosciuto come flutter dei pannelli. Questo tipo d'instabilità, generalmente non distruttiva perché instaura un ciclo limite di non eccessiva ampiezza, può però condurre a rotture improvvise per fatica. Un altro fattore che può indurre flutter è il trasporto di carichi esterni o i motori in gondole appese alle ali. E' stato infatti verificato che certe combinazioni di carichi esterni possono indurre, in velivoli quali: F16, F18 e F111, una instabilità aeroelastica conosciuta come oscillazione a ciclo limite (*limit cycle oscillation* - LCO). Queste oscillazioni sono per lo più caratterizzate da un moto periodico d'ampiezza limitata, le prove di volo hanno dimostrato che le ampiezze sono funzione del fattore di carico (incidenza) e velocità.

## 7.3 Sperimentazione in volo

La sperimentazione in volo relativa ai fenomeni aeroelastici è critica dal punto di vista della sicurezza, fa infatti parte di quella categoria di prove che gli americani definiscono "hazardous flight tests". Con questa definizione s'intende ogni tipo d'attività in volo che richieda una speciale preparazione, comprese modifiche del velivolo, per garantire la sicurezza dell'aeromobile stesso e dell'equipaggio. Tipica è l'installazione del paracadute anti-vite per le prove d'alta incidenza, ci sono poi stati casi di velivoli civili in cui era stato aggiunto un sistema d'eiezione per il pilota, proprio per le prove di flutter. Fanno parte di questa speciale categoria le prove di:

- stallo, post stallo e vite;
- espansione dell'involuppo di volo (libero da flutter);
- certificazione dell'armamento;
- decollo abortito;
- minima velocità di controllo.

Data quindi la potenziale pericolosità, l'attività di prova si svolge a passi successivi, partendo da un involuppo di volo ristretto, in cui l'assenza di fenomeni aeroelastici è ritenuta certamente verificata per mezzo d'analisi.

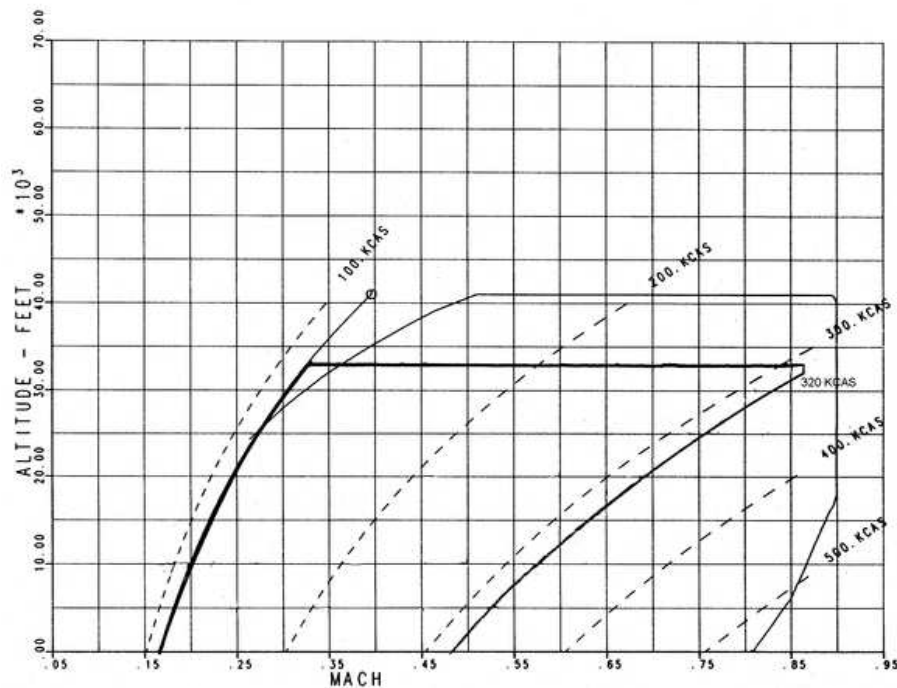


Figura 7.2: Involuppo di volo ad 1  $g$  con limitazione corrente.

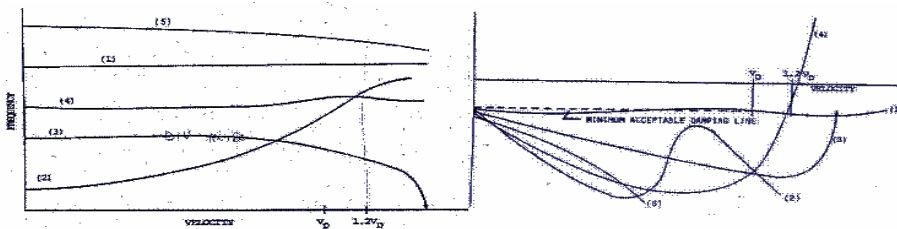


Figura 7.3: Diagramma  $V-g$ , ovvero frequenze e smorzamenti modali in funzione della velocità di volo.

La sperimentazione aeroelastica è la prima fase d'ogni campagna di prove su di un velivolo nuovo. Le prove di flutter sono quelle che permettono la cosiddetta apertura dell'involuppo di volo, dove per involuppo s'intendono quelle condizioni di quota, pressione dinamica (e di conseguenza numero di  $Mach$ , Figura 7.2), a cui è permesso l'utilizzo del velivolo. Solo dopo che ogni nuova parte dell'involuppo è stata verificata dal punto di vista aeroelastico, vengono analizzate le prestazioni, le qualità di volo ed i sistemi. A ciascun passo successivo, nell'apertura dell'involuppo di volo, viene effettuata la valutazione dello smorzamento e della frequenza di ogni modo strutturale del velivolo e delle superfici di controllo ritenuto importante. In generale l'approccio sperimentale è quello di pianificare ogni punto di prova, per un volo, in modo poi di poter estrapolare per il volo successivo l'andamento dello smorzamento. Anche con queste precauzioni esistono comunque delle incertezze, basta vedere i diversi andamenti che possono assumere le relazioni smorzamento-velocità (Figura 7.3) in cui appare chiaro come sia talvolta difficile effettuare un'estrapolazione anche in parti dell'involuppo lontane dalle condizioni critiche. Per queste ragioni un'estesa analisi, per quanto possibile, viene effettuata in tempo reale mediante i dati ricevuti in telemetria, o, per velivoli la cui dimensione permetta di imbarcare l'attrezzatura di elaborazione, direttamente a bordo. Sono diversi gli aspetti da considerare nell'effettuazione di una prova di flutter, che possono essere così riassunti:

- procedura di prova;
- sistemi di eccitazione;

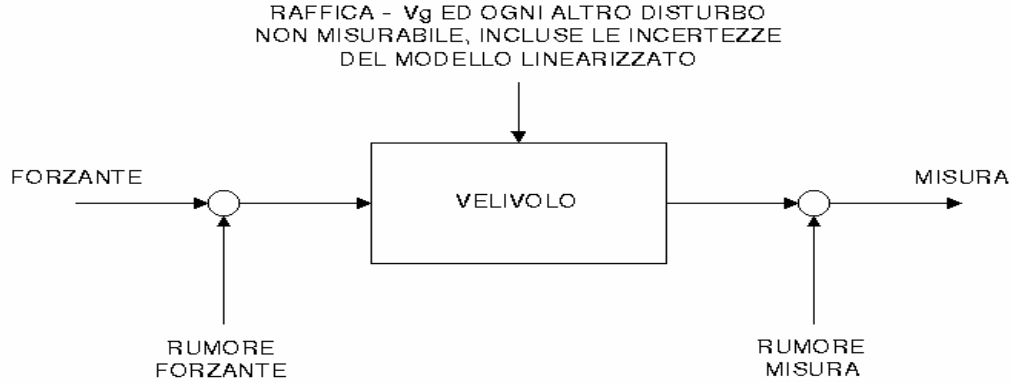


Figura 7.4: Schema dell'analisi aeroelastica.

- strumentazione;
- metodi d'analisi.

Lo scopo primario delle prove di flutter è la verifica dell'assenza d'instabilità aeroelastiche all'interno dell'involuppo di volo. Questo si ottiene sollecitando con una forzante il sistema aeroelastico e analizzando poi la risposta, secondo lo schema di Figura 7.4. La stessa figura pone in risalto anche le incertezze del processo d'analisi che alla fine si traducono in dispersione dei risultati sperimentali. Vediamo infatti che il velivolo può essere soggetto a forzanti non volute e non misurabili quali la turbolenza atmosferica. Esistono poi disturbi, il cui impatto non è valutabile, legati, ad esempio, alla non linearità del sistema aeroelastico in esame. Infatti l'attività sperimentale si basa sull'assunzione che il sistema sia lineare o linearizzabile nell'intorno delle condizioni di prova. Esistono poi incertezze legate alle misure, usualmente chiamate rumori di misura, che possono essere legate al sistema di misura stesso, alla sua intrusività, al trattamento dell'informazione (misura) dal momento in cui viene raccolta (in volt o carica elettrica nel caso di un accelerometro) tramite un trasduttore al momento in cui viene restituita in unità ingegneristica. Per la trattazione presentata in questo paragrafo si considerano le ipotesi di quasi-stazionarietà dell'aerodinamica, senza nulla togliere alla generalità dell'inquadratura del problema. Il modello presentato sopra può essere descritto matematicamente tramite le relazioni:

$$[M] \{\ddot{q}\} + \left( [C] + \frac{q}{V_\infty} [C_a] \right) \{\dot{q}\} + ([K] + q[K_a]) \{q\} = \{f\} u + \{n_s\} + \{f\} w_f$$

dove le variabili hanno il significato usuale:

|                 |  |
|-----------------|--|
| $\{q\}$         | coordinate generalizzate (modali)  |
| $[M], [C], [K]$ | matrici, generalmente simmetriche, che rappresentano rispettivamente le caratteristiche modali di massa, smorzamento e rigidità della struttura.   |
| $[C_a], [K_a]$  | matrici, non diagonali, che danno il contributo aerodinamico alla rigidità e allo smorzamento del sistema aeroelastico. Sono in genere responsabili dell'accoppiamento di modi originariamente ortogonali. |
| $\{f\}$         | vettore d'influenza per la forzante.   |
| $\{n_s\}$       | ingressi non modellabili   |
| $u, w_f$        | forzante e rumore della forzante.  |

Lo schema è poi completato dalle relazioni che legano la risposta del sistema all'effettiva misura:

$$\begin{aligned} \{y_a\} &= [D_a] \{\ddot{q}\} + \{w_a\} \\ \{y_v\} &= [D_v] \{\dot{q}\} + \{w_v\} \\ \{y_s\} &= [D_s] \{q\} + \{w_s\} \end{aligned}$$

dove le misure  $\{y_a\}$  sono associate agli accelerometri, le misure  $\{y_v\}$  sono di dubbia utilità se non spesso irrealizzabili, e le misure  $\{y_s\}$ , intese come spostamenti relativi, sono associate agli estensimetri. In queste equazioni la misura stessa risulta combinazione lineare della risposta e del rumore. Questo è un modello semplice in quanto il rumore legato alla risposta potrebbe essere correlato alla risposta stessa o con il rumore legato alla forzante. Nella pianificazione delle prove, che comprende la definizione dell'attrezzatura da impiegare, va tenuto presente quale tipo d'analisi si vuole effettuare e con quali strumenti. Ogni sistema usato per introdurre la sollecitazione e i sistemi di misura hanno i loro pregi, difetti e limitazioni di cui occorre tenere conto. Innanzi tutto è necessario che il sistema sia controllabile; per definizione, è quindi necessario che la forzante per posizione, ampiezza, e campo di frequenze coperto sia in grado di sollecitare tutti i modi d'interesse. Va poi ricordato che aumentare l'ampiezza della forzante riduce gli effetti d'incertezza dei risultati dovuti al rumore di misura della stessa. I sistemi che generano forzanti di tipo impulsivo (eccitatori pirotecnici e impulsi sulle superfici di comando) non permettono una misura accurata della forzante. I metodi d'analisi che si possono utilizzare sono semplici, ma si hanno difficoltà nella separazione di modi vicini, in generale è necessario filtrare mediante un filtro passa banda in modo da isolare uno o al più pochi modi. I sistemi che danno la forzante migliore sono quelli aerodinamici e inerziali. Con essi è infatti possibile avere forzanti simmetriche e antisimmetriche di tipo periodico e pseudo random (questa sollecitazione consiste in una serie di segnali casuali, eventualmente a banda passante limitata, che si ripetono in modo periodico); dal momento che l'analisi è spesso effettuata nel dominio della frequenza, la forzante periodica facilita la stima dei parametri ed, in particolare, l'utilizzo di tutti quegli accorgimenti per limitare gli effetti dei rumori di processo quale, ad esempio, l'esecuzione della media su una serie di più campioni su cui effettuare la trasformata di *Fourier*. Le forzanti sono poi facilmente misurabili questo permette sistemi d'analisi in grado di trattare più modi contemporaneamente quindi adatta anche quando ci siano modi con frequenze proprie vicine. D'altra parte questi sistemi sono i più intrusivi sia inerzialmente che aerodinamicamente. L'intrusività inerziale può essere valutata teoricamente con grande accuratezza, mentre la valutazione teorica dell'influenza sul campo aerodinamico è più complessa, anche se spesso trascurabile. Esistono poi metodi d'eccitazione che hanno una banda passante limitata quali la turbolenza atmosferica e l'oscillazione delle superfici di controllo. Nel primo caso, inoltre, la forzante non è misurabile in modo semplice e sicuro, nel secondo si misura la posizione della superficie nell'ipotesi, verificata nella maggioranza dei casi per ampiezze sufficientemente piccole, che esista un legame lineare tra posizione della superficie e sollecitazione. Col primo sistema si può arrivare al massimo a frequenze di 10 Hz, col secondo fino a 35 Hz; quest'ultimo però richiede attuatori con banda passante adeguata e il sistema dei comandi di volo deve essere tale per cui sia possibile comandare la servo-valvola dell'attuatore interessato in modo da avere la forzante richiesta. Ognuno di questi sistemi verrà analizzato in dettaglio nella sezione 7.3.2. Il concetto di osservabilità è invece legato al sistema di misura della risposta, il che implica che i trasduttori devono essere in numero tale e nelle posizioni che permettano di valutare le risposte relative a tutti i modi importanti. Il sistema di registrazione non permette la valutazione della forma dei vari modi in volo, a causa della quantità di dati da registrare. I trasduttori andranno quindi installati dove più grandi sono le quantità da misurare, quindi, per quanto riguarda gli accelerometri, andranno piazzati lontani dai nodi modali, possibilmente sui ventri (dei modi, zone degli spostamenti di massima ampiezza), mentre, al contrario, gli estensimetri dovranno essere posti dove maggiori sono gli sforzi. Ci sono quindi due tipi di trasduttori che si usano principalmente: gli accelerometri e gli estensimetri. In genere sono largamente più utilizzati i primi per ragioni di facilità installativa, calibrazione e banda passante.

### 7.3.1 Procedura di prova

Una tipica prova di flutter di per sé non è complessa, infatti consiste nello stabilizzare il velivolo ad una data velocità e quota. Fanno eccezione le prove effettuate a velocità superiori a quella massima orizzontale; in questo caso si sceglie se mantenere costante il numero di *Mach* (condizione costante per fenomeni di compressibilità) o la velocità indicata (pressione dinamica costante), perdendo quota. In Figura 7.5 viene proposta una tipica pianificazione di punti di prova per un velivolo di elevate prestazioni. Una volta che il velivolo è stabilizzato, viene attivato il sistema di eccitazione scelto, per il tempo necessario. Oggigiorno, i dati sono analizzati preliminarmente in tempo reale; se questi danno esito favorevole e si può estrapolare con relativa certezza la condizione successiva, il velivolo viene portato

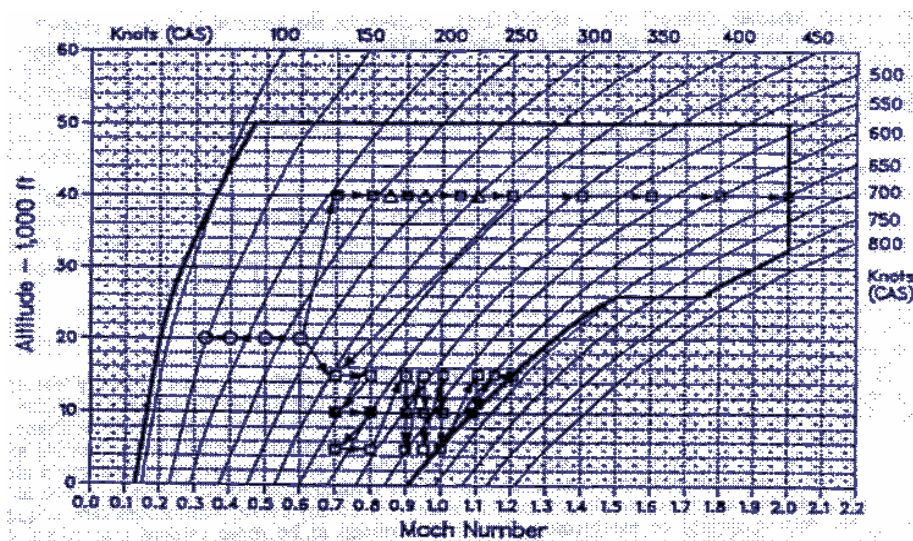


Figura 7.5: Pianificazione dei punti di prova.

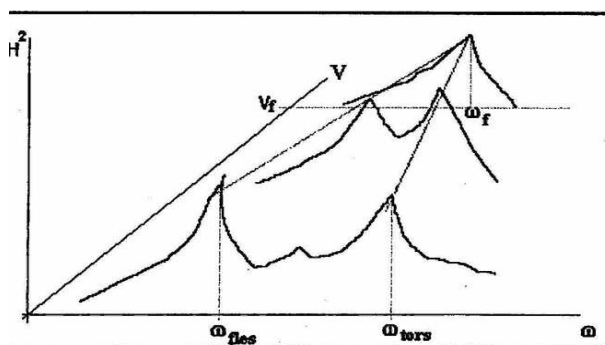


Figura 7.6: Coalescenza di due modi all'aumentare della pressione dinamica.

alla fase di prova successiva. Questa può eventualmente essere alla stessa velocità, ma con eccitazione, quota o fattore di carico diversi. Come vedremo, infatti, per coprire un determinato campo di frequenze, a seconda del tipo di sollecitazione utilizzato (eccitatori pirotecnici ad esempio) è a volte necessario ripetere la prova. Cambiando la quota si può mantenere inalterato il numero di *Mach* incrementando la pressione dinamica. Usualmente l'incremento di fattore di carico aumenta le ampiezze mentre rimangono invariate le frequenze delle risonanze. Per garantire la consistenza dei risultati, le prove andrebbero ripetute nelle stesse condizioni. Come si è già visto, il modello su cui si basa la valutazione sperimentale è lineare o linearizzato nell'intorno della condizione di prova; la ripetizione della prova con forzanti di maggiore ampiezza permette di evidenziare eventuali non linearità. L'effettuazione di voli di prova, però, è molto costosa, quindi la ripetizione di un punto di prova viene effettuata solo in caso di effettiva incertezza e quando si è prossimi a condizioni critiche. Si tenga presente che, se durante la prova l'analisi preliminare viene effettuata in pochi minuti, l'analisi del dopo volo richiede mediamente cento ore, a seconda del tipo e numero di prove effettuate, per ogni volo. L'analisi preliminare è effettuata mediante metodi empirici basati, ad esempio, sulla coalescenza di due modi vicini (Figura 7.6) e sul cosiddetto metodo peak-hold; oppure su metodi semplici, quale l'ampiezza di picco, ed è rivolta esclusivamente alla sicurezza del volo. Il metodo dell'ampiezza di picco verrà descritto più avanti. La coalescenza di due modi vicini si controlla confrontando gli spettri per pressione dinamica crescente dove si noterà un avvicinamento delle frequenze proprie di due modi, tipicamente un modo flessionale e uno torsionale. Il metodo peak-hold consiste nel confrontare gli spettri per pressioni dinamiche crescenti, come si può notare in Figura 7.7, per pressioni dinamiche basse si nota un modo con uno spettro a base larga che denota un modo molto

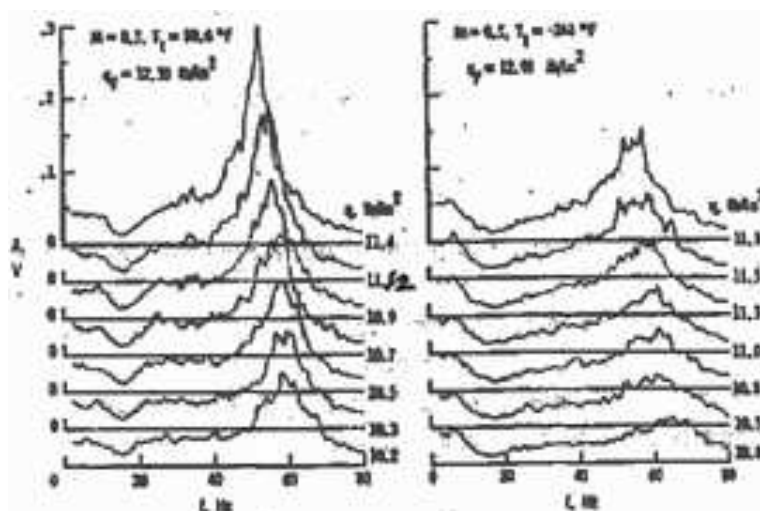


Figura 7.7: Variazione dell'ampiezza della risposta in funzione della pressione dinamica.

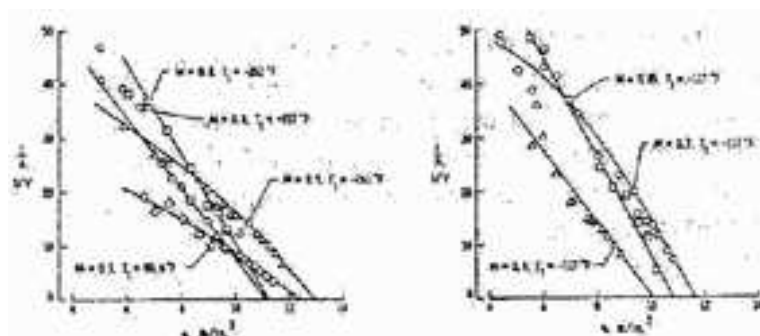


Figura 7.8: Estrapolazione dell'inverso dell'ampiezza dei picchi.

smorzato o con risposta debole. Aumentando la velocità la risposta presenta un picco più pronunciato e a base più stretta. A questo punto si diagramma l'inverso dell'ampiezza in funzione della pressione dinamica (Figura 7.8) come ci si avvicina alla pressione dinamica critica l'inverso dell'ampiezza del picco si avvicina a zero. Estrapolando le misure a zero si ottiene una stima della pressione dinamica di divergenza. Nell'analisi post-volo vengono eventualmente utilizzati metodi più sofisticati, anche più d'uno, il cui scopo è la valutazione sperimentale del modello aeroelastico.

### 7.3.2 Sistemi di eccitazione

L'eccitazione del sistema aeroelastico, come visto, è una parte fondamentale nella metodologia delle prove di flutter. L'identificazione di instabilità aeroelastiche incombenti non può essere ottenuta senza un'adeguata eccitazione. Il termine "adeguata" sottintende la capacità del tipo di eccitazione di fornire alla struttura l'energia necessaria a sollecitare tutti i modi significativi ad un'ampiezza tale per cui si possa poi valutare la stabilità dalla risposta ottenuta. A titolo di esempio si riporta il caso del Transavia PL12/T-400 (velivolo per impiego agricolo, anno 1986). Nella fase iniziale delle prove il metodo d'eccitazione era limitato alla turbolenza atmosferica e ad impulsi sui comandi. Durante queste prove non ci furono problemi di flutter. In un volo successivo, non dedicato al flutter, in condizioni meteorologiche avverse il velivolo fu soggetto a violente oscillazioni di timone e della trave di coda. L'esperienza insegna che un'inadeguata eccitazione può causare:

- il mancato riconoscimento dell'inizio di instabilità (flutter onset);
- dispersione eccessiva nella valutazione del valore di smorzamento;

- errata valutazione del valore di smorzamento.

Riassumendo, le caratteristiche generali che un sistema di eccitazione deve soddisfare sono:

- garantire un livello adeguato della forzante;
- coprire il campo di frequenze di interesse;
- avere un peso contenuto in modo da non variare le caratteristiche modali della struttura, ed in generale deve essere “poco” intrusivo;
- le caratteristiche di assorbimento di potenza devono essere sufficientemente contenute da poter essere soddisfatte dal velivolo senza modifiche radicali.

I metodi d'eccitazione più comuni si possono così riassumere:

- impulsi delle superfici di controllo;
- imposizione di oscillazioni sui comandi;
- eccitatori pirotecnici;
- eccitatori inerziali;
- eccitatori elettrodinamici;
- dispositivi di eccitazione aerodinamici (aletta e cilindro con fessura);
- turbolenza atmosferica.

### **Impulsi delle superfici di controllo**

Gli impulsi manuali delle superfici di controllo sono stati storicamente il primo metodo di eccitazione. Con questo metodo, a seconda del sistema di comandi di volo adottati, si possono eccitare frequenze fino a 10 Hz. Questo sistema ha essenzialmente due tipi di vantaggi: non richiede una apparecchiatura particolare e il transitorio di smorzamento della struttura è facile da analizzare per studiarne la stabilità. La durata di ciascun impulso è breve, quindi il punto di prova può essere ripetuto per la consistenza dei risultati. Ci sono comunque diversi aspetti negativi:

- è difficile avere ripetibilità nell'eccitazione;
- bassa risoluzione, per elevati smorzamenti, e fase finale del transitorio di smorzamento che si perde nel rumore, come per tutte le forzanti impulsive;
- la frequenza massima eccitabile è limitata ( $< 10$  Hz);
- spesso non permette di valutare il flutter incipiente (per il troppo basso livello dell'eccitazione).

L'impulso di superficie di controllo ottenuto automaticamente dal sistema comandi volo, possibile con i moderni sistemi (fly by wire), è abbastanza utilizzato. Una limitazione della frequenza di eccitazione può persistere, in quanto molti di questi sistemi hanno un filtro passa basso che limita la velocità di rotazione della superficie. Un ulteriore limite è rappresentato dalla banda passante dell'attuatore.

### **Imposizione di oscillazioni alle superfici di controllo**

Questo metodo è simile a quello precedente in quanto l'eccitazione viene ottenuta muovendo le superfici di controllo, in questo caso però il sistema dei comandi di volo non viene interessato in quanto il segnale viene trasmesso direttamente all'attuatore della superficie. In questo modo si possono ottenere normalmente campi di frequenze da 5 a 35 Hz. Il limite del campo di frequenza è dato dalle caratteristiche degli attuatori, in alcuni casi sono montati attuatori con bande passanti più elevate proprio per le prove di flutter. L'eccitazione che si può in generale ottenere è uno “sweep” sinusoidale; nelle applicazioni più recenti è stato possibile generare segnali pseudo-random filtrati ad una data banda passante. Nelle



\*

Figura 7.9: Scansione in frequenza sinusoidale.

\*

Figura 7.10: Scansione in frequenza logaritmica  $f = \sin((\ln(at) + b)t)$ .

Figure 7.9-7.11 vengono proposte le storie temporali e le densità spettrale di potenza di alcuni tipi di sollecitazione. Il vantaggio primario delle superfici di controllo oscillanti è che non è richiesta l'installazione di alcun particolare sistema, se non la scatola di controllo dell'eccitazione che s'installa in cabina; quindi le caratteristiche aeroelastiche rimangono immutate. Uno svantaggio può essere la necessità di installare attuatori speciali per le prove di flutter, in quanto quelli di serie non permettono di raggiungere il campo di frequenze richiesto.

### Eccitatori pirotecnici

In generale identificati con i termini inglesi di “bonkers”, “thrusters”, “ballistic excitors” o “impulse generators”, sono uno dei primi sistemi usati (1940) per eccitare le strutture. Si tratta di piccoli razzetti a propellente solido che brucia per un tempo approssimativo di 18–26 millisecondi e un livello di spinta variante generalmente tra i 50 e 2000 chilogrammi. Questi eccitatori sono semplici e leggeri quindi non modificano le caratteristiche modali, inoltre producono un transitorio breve. Questa caratteristica è importante quando si debbano effettuare prove in discesa. Gli svantaggi di questo metodo sono invece:

- possono essere sparati solo una volta;
- la banda di frequenze che sono in grado d'eccitare dipende dalla durata della carica; in generale ne sono richiesti 3, con tempi di combustione diversi, per eccitare una banda di frequenze tra i 5 e i 50 Hz;
- generalmente ne viene sparato uno per volta in quanto è difficile fasare lo scoppio contemporaneo di più di un dispositivo;
- non permettono la misura della forzante.

### Eccitatori inerziali

Gli eccitatori inerziali sono costituiti da masse eccentriche in grado di generare la forza prescritta ad una frequenza variabile, ma con poca flessibilità di controllo. In particolare l'ampiezza della forza è limitata dalla massima eccentricità. Questo tipo d'eccitazione è poco adatto alle basse frequenze in quanto la forza dipende dal quadrato della velocità. In compenso questo sistema permette una valutazione accurata d'ampiezza e fase della forzante mettendo degli estensimetri sui vincoli con la struttura. Per l'utilizzo in volo si possono identificare i seguenti problemi:

- la forza generata è ovviamente funzione della frequenza; per ovviare in parte a questo problema sono stati sviluppati eccitatori a masse controrotanti con controllo dell'eccentricità al variare dei giri e conseguente possibilità di determinare l'intensità e la direzione di applicazione della forzante.
- per generare forze di entità significativa il sistema deve avere ingombri che potrebbero eventualmente sporgere dalle superfici aerodinamiche e massa che potrebbe cambiare le caratteristiche modali.

\*

Figura 7.11: Sollecitazione casuale assimilabile a rumore bianco o a larga banda.

\*

Figura 7.12: Eccitatori pirotecnici.

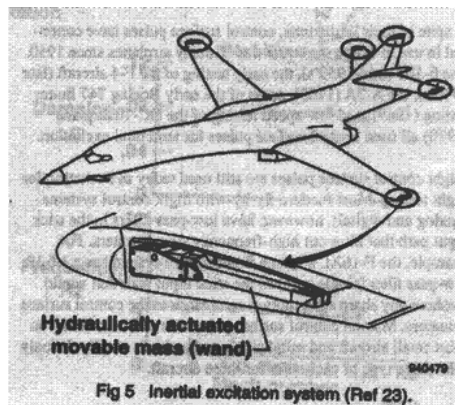


Figura 7.13: Eccitatore inerziale usato sul B1-B.

A titolo d'esempio si riportano i dati di una coppia di sistemi. Entrambi erano composti da masse oscillanti controllate elettroidraulicamente. Il primo aveva un campo di frequenze da 5 a 50 Hz e la forza generata variava da 100 a 1500 N a fronte di un peso di 4 Kg ed a una profondità di circa 10 cm. Questo fu utilizzato sul Convair F102-A (fine anni '50). Il secondo fu utilizzato per il B1-B ed era in grado di sviluppare una forza massima di 2500 N, a fronte di un peso di 20 Kg (Figura 7.13).

### Eccitatori elettrodinamici

#### Dispositivi aerodinamici

**Alette** Le alette oscillanti ("aerodynamics vanes" in inglese) sono alette che vengono montate all'estremità delle ali o dei piani di coda. Le alette sono montate su di un alberino il quale è azionato elettricamente o idraulicamente e oscilla attorno ad un angolo medio. L'oscillazione determina l'insorgere di una forza aerodinamica variabile agente sul velivolo. L'entità della forza varia a seconda delle dimensioni dell'aletta, dall'angolo di rotazione e dalla pressione dinamica. I vantaggi principali di questo sistema sono i seguenti:

- buona eccitazione alle basse frequenze;
- l'ampiezza ad alta frequenza è limitata unicamente dalle caratteristiche del sistema che fa muovere l'aletta;
- la frequenza di eccitazione e l'ampiezza, ad una data velocità, possono essere controllate facilmente;
- la storia temporale è ripetibile.
- la forzante può essere misurata tramite la misura dello sforzo di taglio agente sull'alberino di comando.

I principali aspetti negativi sono invece:

- la massima forza generata dipende dal quadrato della velocità;
- la massa complessiva del sistema può essere rilevante;
- il dispositivo, all'estremità della superficie in prova, interferisce con il normale flusso aerodinamico.
- in generale è richiesta una potenza considerevole per generare l'oscillazione.

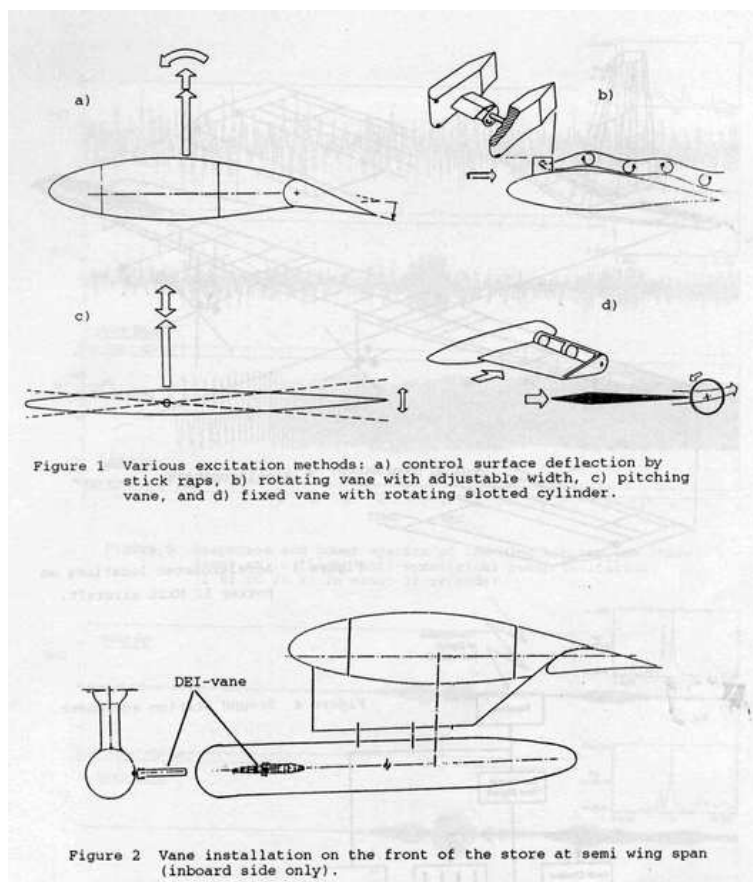


Figura 7.14: Dispositivi di eccitazione aerodinamica.

**Altri Dispositivi** Le alette non sono l'unico dispositivo facente parte di questa categoria, come si può vedere dalle Figure 7.14–7.15. Un altro sistema molto utilizzato è il cosiddetto cilindro rotante con fessura. Questo eccitatore è costituito da un'aletta fissa e da due cilindri concentrici con fessure, di cui quello interno viene fatto ruotare a velocità eventualmente variabile. I cilindri hanno una fessura attraverso cui passa l'aria che viene alternativamente deviata verso l'alto e verso il basso. La frequenza d'eccitazione è quindi il doppio della frequenza di rotazione del cilindro. In generale le caratteristiche di questo sistema sono simili a quelle dell'aletta; a parità di prestazioni presenta però una minore intrusività aerodinamica, maggiore leggerezza, semplicità costruttiva e un assorbimento di potenza per il funzionamento drasticamente più basso. Meno efficace alle basse frequenze, questo apparato può essere utilizzato da 5 a 35 Hz.

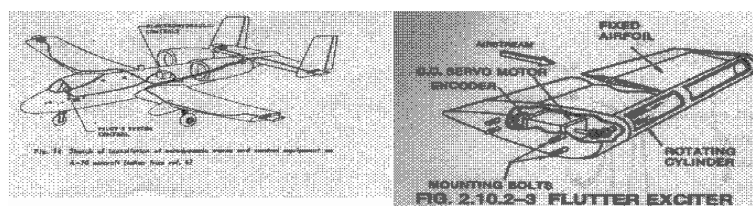


Figura 7.15: Esempio di installazione di cilindro rotante.

### Turbolenza atmosferica

La grande attrattiva di questo metodo è che non necessita di alcun particolare sistema da montare a bordo. La turbolenza sollecita tutte le superfici aerodinamiche e quindi eccita contemporaneamente i modi simmetrici e antisimmetrici. La turbolenza naturale è la variazione casuale nella velocità e nella direzione del vento ed è generata, usualmente, dal vento dovuto a un fronte di variazione delle condizioni atmosferiche o da cause termiche. Sebbene questo metodo sia stato usato con qualche successo nel passato, presenta degli svantaggi:

- l'intensità non è controllabile e quindi la sollecitazione non è ripetibile, non consentendo verifiche di linearità del sistema;
- spesso la turbolenza non è intensa abbastanza da produrre una sufficiente eccitazione rispetto ai sistemi già visti;
- per la maggior parte dei velivoli, la turbolenza eccita solo i modi a frequenza più bassa;
- la raccolta dei dati deve avvenire durante un tempo lungo per avere un livello di confidenza statistica elevata;
- il rapporto tra segnale e rumore è spesso basso, il che rende difficile l'analisi dei dati;
- una considerevole parte del tempo di volo viene spesso persa cercando il livello di turbolenza necessario;
- la forzante non è valutabile in modo semplice e soprattutto affidabile.

A titolo di esempio, in Figura 7.16 è presentato il modello di Dryden della turbolenza atmosferica. Come si può notare, l'ampiezza decresce rapidamente con la frequenza, questo comporta che i modi a più alta frequenza siano meno sollecitati. Questo svantaggio è particolarmente limitante quando si ricerca la soglia dei problemi aeroelastici (*flutter onset*), identificabile con una brusca variazione della derivata dello smorzamento rispetto alla velocità  $d\xi/dV$ , in quanto la forzante potrebbe non essere sufficiente ad eccitare il modo in questione. Inoltre, la bassa sollecitazione alle frequenze più alte fa sì che i picchi di risonanza presentino delle potenze spettrali della risposta con base larga e bassi valori d'ampiezza, aspetti che potrebbero indurre a sopravvalutare lo smorzamento.

### 7.3.3 Strumentazione

La strumentazione utilizzata per registrare la risposta strutturale di un velivolo ad una eccitazione è un altro componente critico della metodologia delle prove di flutter. I dati relativi alla risposta devono essere misurati in un numero sufficiente di punti della struttura (già citato concetto di osservabilità) e devono essere d'alta qualità in modo che le prove siano condotte in sicurezza. Nella strumentazione sono inclusi: la misura, la telemetria, il sistema di registrazione dati e la presentazione degli stessi in tempo reale.

#### Il sistema di misura

I trasduttori più utilizzati per la misura della risposta strutturale sono gli accelerometri e i ponti estensimetrici. La scelta di un sistema rispetto all'altro è spesso dettata da considerazioni pratiche legate alla facilità d'installazione. Una volta che la struttura è assemblata, posizionare e calibrare un estensimetro è usualmente complesso, sicuramente più complesso che posizionare un accelerometro, che, tra l'altro, ha una banda passante notevolmente più larga. D'altra parte in genere gli estensimetri sono comunque posizionati sul velivolo per consentire verifiche statiche, quindi può essere conveniente approfittare della presenza di tali sensori anche per le misure aeroelastiche. Questo fa sì che, attualmente, la misura accelerometrica sia preferita alle altre misure tradizionali. Un accelerometro piezoelettrico può pesare meno di 10 grammi ed ha risposta lineare in un campo di frequenze da 1 a 10000 Hz per un'ampiezza da 1 a 500 g. Può operare a temperature dai -55 ai 90 °C mentre le dimensioni sono approssimativamente 6 mm in larghezza e 4 mm in altezza. Esistono sistemi integrati che non hanno bisogno di collegamenti tramite fili:

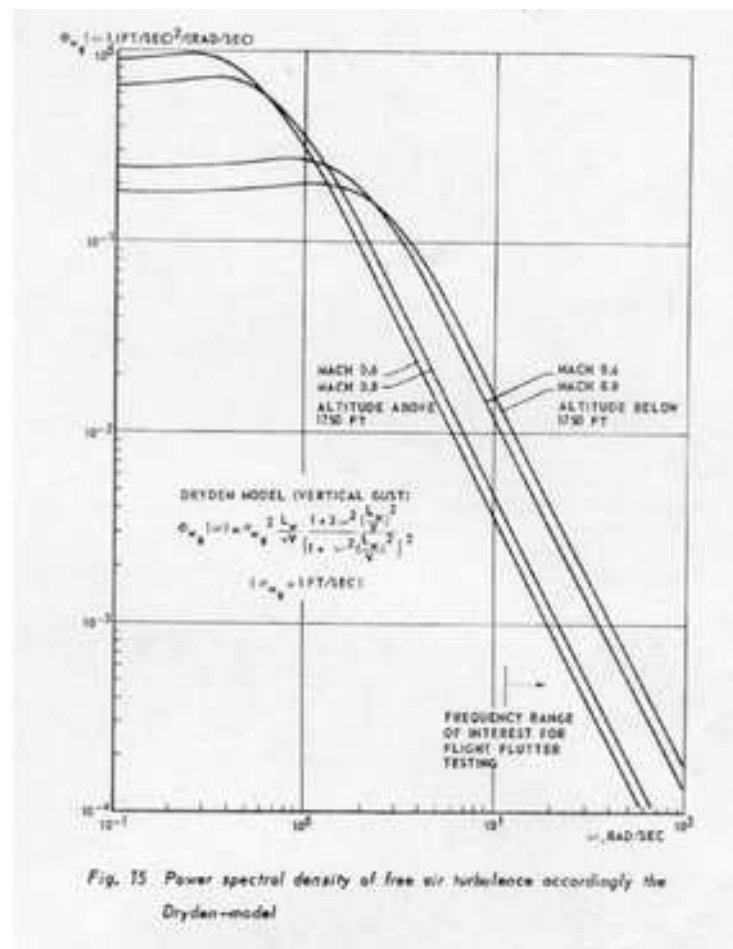


Figura 7.16: Spettro di turbolenza di Dryden.

il segnale è trasmesso via radio ad un ricevitore posto sull'aeroplano e quindi registrato. I trasduttori sono distribuiti sul velivolo in numero considerevole ed i punti di installazione sono sostanzialmente standard. Facendo l'esempio dell'ala, la somma di due accelerometri, installati sulla stessa corda alare, consentono di rilevare i modi simmetrici, mentre la loro differenza consente di rilevare quelli antisimmetrici. Questo concetto è applicabile a tutto il velivolo: la differenza tra due accelerometri posti alle due estremità alari consentono di rilevare i modi torsionali della fusoliera (???). Gli accelerometri sono generalmente installati dove più ampio è lo spostamento, per contro gli estensimetri vengono posizionati dove maggiore è la sollecitazione, quindi se gli accelerometri sono posti all'estremità dell'ala gli estensimetri saranno collocati in prossimità della radice (???).

### Telemetria e registrazione

Due sono i modi più diffusi per registrare i dati: analogico (FM, acronimo per *frequency modulation*) o digitale (PCM, acronimo per *pulse code modulation*). Mentre i parametri di volo (quota, velocità, assetti, ecc.) vengono ormai registrati esclusivamente in digitale, la registrazione in FM è ancora relativamente diffusa per i dati strutturali. L'elevata frequenza di campionamento richiesta in questo caso necessita una capacità e velocità di registrazione notevole. Anche la filosofia di registrazione è sostanzialmente diversa nei due casi. Mentre nel caso analogico ogni parametro ha un canale di registrazione, nel caso della registrazione PCM esiste una mappa di parametri che viene acquisita in modo sequenziale. Se un parametro è presente una sola volta nella mappa allora la frequenza di campionamento è l'inverso del tempo che viene impiegato nella lettura di tutti i parametri. La frequenza di campionamento di un certo parametro viene aumentata ponendolo nella mappa più volte. Essendo finito il numero di posizioni presente sulla mappa ed essendo finito sia il tempo di trasferimento che il tempo di registrazione dei dati, sono evidenti le limitazioni di questo metodo di registrazione. Sul velivolo EF 2000 non c'è registrazione in analogico, però sui prototipi sono installati 6 PCM. La registrazione in FM è una registrazione in continuo, contiene quindi tutte le frequenze fino alla massima prevista per una data portante. Il suo funzionamento è esattamente come quello delle onde radiofoniche, dove l'informazione è rappresentata dalle variazioni di frequenza rispetto ad una frequenza nominale, denominata portante. L'analisi viene poi effettuata comunque su dati digitalizzati sia che venga utilizzato un moderno analizzatore di *Fourier*, il quale accetta in ingresso segnali analogici, o che venga utilizzato un normale computer, ed in questo caso i dati devono essere digitalizzati prima dell'utilizzo. Se si usa invece un PCM, i dati vengono registrati in forma digitale, quindi il valore della tensione in uscita dall'accelerometro, che rappresenta l'informazione, viene digitalizzata; il dato viene poi registrato sotto forma di numero intero. La risoluzione dipende dal fondo scala e dal numero di bit impiegato per rappresentare il numero stesso. Consideriamo la pressione statica dall'impianto anemometrico: il campo di misura è ragionevolmente compreso tra 100 e 1100 mbar. Con una rappresentazione interna a 12 bit la risoluzione è:

$$\Delta p = \frac{1100 - 100}{2^{12}} = \frac{1000}{4096} = 0.24 \text{ mbar}.$$

A terra, la quantità fisica si ottiene tramite una calibrazione che mette in relazione la rappresentazione digitale con il valore ingegneristico. Oltre ad essere registrato a bordo, il dato è trasmesso a terra via telemetria, sia che si tratti di un formato FM o digitale. In questo caso la decodifica avviene in tempo reale per permettere un'analisi preliminare dei dati. I dati telemetrici sono registrati anche a terra in caso di malfunzionamento del registratore di bordo o nella malaugurata ipotesi di perdita del velivolo. E' interessante notare che la trasmissione telemetrica avviene in FM (ad altissima frequenza, dell'ordine dei GHz), questo comporta che il velivolo sia "in vista" dell'antenna telemetrica. Di conseguenza i dati da telemetria sono di qualità inferiore a causa dell'eventuale perdita di collegamento o semplicemente a causa del limitato rateo di trasmissione. Sempre in tempo reale, i dati vengono presentati sotto forma di storia temporale oppure messi in opportuna relazione tra loro. Elaborando, subito dopo la singola prova, le risposte accelerometriche con uno dei metodi semplici che verranno illustrati in seguito, sarà possibile dare l'assenso al punto prova successivo e quindi ridurre il rischio e i tempi di volo.

## 7.4 Analisi nel dominio della frequenza

Esistono diversi metodi utilizzati per l'analisi aeroelastica nel dominio delle frequenze. Alcuni, molto semplici, possono essere utilizzati anche in tempo reale; altri, più complessi, richiedono una elaborazione a posteriori. Si possono distinguere due grandi categorie di metodi: a un grado di libertà, dove si tende ad individuare le caratteristiche modali isolando ogni singolo modo, e a molti gradi di libertà, dove tutti i modi importanti vengono identificati simultaneamente. In pratica, tutte le tecniche d'analisi nel dominio della frequenza sono basate sulla valutazione della funzione di trasferimento (TF, ovvero *transfer function*). Si arriva alla TF attraverso la trasformata di *Fourier*. Si illustra nel seguito come si ottenga la valutazione della funzione di trasferimento; come, di fatto, si esegua la trasformata di *Fourier* e quali siano gli effetti del rumore di misura.

### 7.4.1 Determinazione della funzione di risposta in frequenza

Si consideri innanzitutto la TF, in particolare nel caso di un sistema lineare a parametri costanti per il quale sia  $h(t)$  la funzione di risposta all'impulso unitario e  $H(\omega)$  la sua trasformata nel dominio delle frequenze. Iniziando da  $t = 0$  si assuma che il sistema sia soggetto ad una forzante  $x(t)$  la quale produca una risposta  $y(t)$ . La risposta del sistema è data allora dall'integrale di convoluzione:

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (7.1)$$

dove  $h(t) = 0$  e  $x(t) = 0$  per  $t < 0$ . Assumiamo che l'ingresso del sistema  $x(t)$  sia un campione di un processo ergodico. Dopo il transitorio, anche la risposta  $y(t)$  apparterrà ad un processo ergodico. Dall'equazione 7.1 il prodotto tra la risposta ai tempi  $t$  e  $t + \tau$  è dato da:

$$y(t) y(t + \tau) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty h(\xi) h(\eta) x(t - \xi) x(t + \tau - \eta) d\xi d\eta \quad (7.2)$$

Ricordando l'equazione della intercovarianza:

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) - \mu_x)(y(t + \tau) - \mu_y) dt = R_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y \quad (7.3)$$

dove

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y(t + \tau) dt \quad (7.4)$$

è definita funzione di intercorrelazione e  $\mu_x, \mu_y$  sono i valori attesi (o medi) rispettivamente di  $x(t)$  e  $y(t)$ . Assumendo processi a media nulla (sempre possibile in caso di processi ergodici a patto di ridefinire i segnali a meno di un offset) per i quali intercovarianza e intercorrelazione diventano intercambiabili, e prendendo i valori attesi di entrambe le parti della 7.2

$$C_{yy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) y(t + \tau) dt$$

e

$$C_{xx}(\tau + \xi - \eta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t - \xi) x(t + \tau - \eta) dt$$

otteniamo, nel nostro caso, la relazione di autocorrelazione della risposta:

$$C_{yy}(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty h(\xi) h(\eta) C_{xx}(\tau + \xi - \eta) d\xi d\eta \quad (7.5)$$

Analogamente il prodotto tra l'ingresso e l'uscita è dato da:

$$x(t) y(t + \tau) = \int_{-\infty}^\infty h(\xi) x(t) x(t + \tau - \xi) d\xi \quad (7.6)$$

In questo caso il valore atteso di entrambe le parti dell'equazione conduce a:

$$C_{xy}(\tau) = \int_0^\infty h(\xi) C_{xx}(\tau - \xi) d\xi \quad (7.7)$$

definita, come visto, funzione di intercorrelazione. Si noti che l'estremo inferiore di integrazione è stato posto uguale a zero in quanto la risposta impulsiva del sistema,  $h(t)$ , è causale ( $h(t) = 0$  per  $t < 0$ ). Le trasformate di *Fourier* delle equazioni 7.5 e 7.7:

$$S_{yy}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty R_{yy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (7.8)$$

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (7.9)$$

dopo alcuni passaggi algebrici conducono alle relazioni:

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega)$$

$$S_{xy}(\omega) = H(\omega) S_{xx}(\omega)$$

$$S_{yy}(\omega) = H(-\omega) S_{yx}(\omega)$$

Dalle tre espressioni precedenti si possono ricavare le relazioni denominate rispettivamente  $H_0$ ,  $H_1$  e  $H_2$ :

$$\frac{S_{yy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} = |H(\omega)|^2 = H_0 \quad (7.10)$$

$$\frac{S_{xy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} = H(\omega) = H_1 \quad (7.11)$$

$$\frac{S_{yy}(\omega)}{S_{yx}(\omega)} = H(-\omega) = H_2 \quad (7.12)$$

Va notato che l'equazione 7.10 è un valore reale e contiene solo il cosiddetto guadagno; si noti quindi che la notazione  $H_0$  implica la sola conoscenza del modulo della funzione di trasferimento. Le equazioni 7.11 e 7.12 al contrario sono le funzioni di trasferimento, e restituiscono un valore complesso da cui si possono ricavare fase e guadagno. Va sottolineato che, nel caso ideale senza rumore,  $H_1$  e  $H_2$  sono uguali. Può essere conveniente eseguire le trasformate di *Fourier* solo per frequenze positive, in questo caso si ottiene  $G_{xx}(\omega) = 2S_{xx}(\omega)$  e  $G_{xy}(\omega) = 2S_{xy}(\omega)$ . Il grado di correlazione tra ingresso e uscita viene espresso mediante la funzione di coerenza  $\gamma_{xy}$  espressa da:

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{|G_{xy}(\omega)|^2}{G_{xx}(\omega) G_{yy}(\omega)} = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega) S_{yy}(\omega)} \quad (7.13)$$

il cui valore è compreso tra 0 e 1 e che si può notare essere il rapporto tra  $H_1$  e  $H_2$ . Nel caso ideale, come detto, si ottiene:

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{|H(\omega) G_{xx}(\omega)|^2}{G_{xx}(\omega) |H(\omega)|^2 G_{xx}(\omega)} = 1$$

Nella pratica corrente, quando la funzione di coerenza è più grande di 0 ma significativamente minore di 1, quattro maggiori cause possono essere individuate:

- rumore estraneo presente nelle misure e sul sistema (forzanti non misurabili);
- errori di risoluzione sono presenti nelle stime spettrali;
- il sistema che mette in relazione  $x(t)$  e  $y(t)$  non è lineare (errori di modello);
- la risposta  $y(t)$  è dovuta ad altri ingressi oltre che a  $x(t)$ .



Vicino alla risonanza sarà la forzante ad essere più influenzata dal rumore, in quanto dovendo vincere solo le forze dissipative, è sufficiente un basso valore di forza applicata, quindi  $S_{xx}$  potrebbe essere valutato male a causa del basso valore del rapporto tra segnale richiesto e rumore. Per ragioni analoghe, in condizioni di antirisonanza sarà invece la risposta che maggiormente soffrirà di eventuali disturbi di misura e la valutazione di  $S_{yy}$  potrebbe essere soggetta ad errori. Come conseguenza, nel primo caso  $H_1$  potrebbe essere valutato in modo non corretto, ed è quindi preferibile la valutazione mediante  $H_2$  mentre nel secondo caso è vero il contrario. Esiste una via alternativa e più diretta per determinare le equazioni 7.10–7.12 senza calcolare gli integrali di convoluzione che danno l'autocovarianza dell'uscita, equazione 7.5, e l'intercorrelazione tra ingresso e uscita, equazione 7.7. Per ogni coppia di serie temporali di ingresso e uscita finite di lunghezza  $T$  l'equazione 7.1 è equivalente a

$$Y(\omega, T) = H(\omega) X(\omega, T)$$

dove  $Y(\omega, T)$  e  $X(\omega, T)$  sono le trasformate di *Fourier* finite di  $y(t)$  e  $x(t)$  rispettivamente. Si dimostra che è:

$$\begin{aligned} S_{xy}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[X_k^*(\omega, T) Y_k(\omega, T)] \\ S_{xx}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[|X_k(\omega, T)|^2] \end{aligned}$$

dove l'operatore di valore atteso  $E$  denota un'operazione di media sull'indice  $k$ . Scriviamo poi

$$\begin{aligned} Y^*(\omega, T) &= H^*(\omega) X^*(\omega, T) \\ |Y(\omega, T)|^2 &= |H(\omega)|^2 |X(\omega, T)|^2 \\ X^*(\omega, T) Y(\omega, T) &= H(\omega) |X(\omega, T)|^2 \end{aligned}$$

Si nota che il termine a sinistra rappresenta l'interspettro ingresso/uscita mentre il termine a destra rappresenta l'autospettro dell'ingresso moltiplicato per la funzione di trasferimento, a meno del fattore moltiplicativo  $1/T$ , quando il valore atteso sia valutato su diversi valori possibili e lasciando crescere  $T$  oltre i limiti.

### Processi transitori

All'inizio di questo capitolo è stata chiaramente espressa l'ipotesi di ergodicità (e quindi di stazionarietà) dei sistemi considerati. Consideriamo ora un processo non stazionario  $x(t)$  il quale rappresenti la forzante a un sistema meccanico rappresentato da  $h(t)$ . Il processo è considerato transitorio, rispetto a  $h(t)$  asintoticamente stabile, se assume valori diversi da zero solo nel periodo  $0 \leq t \leq T_0$ . Consideriamo un campione  $x_k(t)$  di un processo transitorio  $x(t)$  il quale ha valore diverso da zero solo nel periodo  $0 \leq t \leq T_0$ . Con "campione" si intende una qualunque realizzazione. È chiaro che in questo caso, trattandosi di un transitorio, si richiede una ripetizione del processo in esame, e non l'estrazione di un pezzo della storia temporale associata ad un processo ergodico. La trasformata di *Fourier* di  $x_k(t)$  è data da:

$$X_k(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_k(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{T_0} x_k(t) e^{-j\omega t} dt$$

La quantità  $X_k(\omega)$  fornisce una descrizione spettrale di  $x_k(t)$ , chiamata "spettro di *Fourier*", ed è la stessa quantità usata per valutare le proprietà spettrali dei transitori deterministici. Nel caso di transitori casuali, comunque, si deve ricordare che  $X_k(\omega)$  è una variabile casuale che assume diversi valori a seconda dei campioni che si prendono dal processo. E' conveniente, sia dal punto di vista dell'analisi che delle applicazioni, definire la quantità:

$$\begin{aligned} \varsigma_x(\omega) &= 2E[|X_k|^2] & \omega > 0 \\ \varsigma_x(\omega) &= 0 & \omega < 0 \end{aligned}$$

La funzione  $\varsigma_x(\omega)$  è positiva ed è spesso chiamata “funzione di densità spettrale d’energia” del transitorio  $x(t)$ . Il confronto tra questa quantità e la funzione di densità spettrale di potenza rivela una sostanziale similarità tra  $\varsigma_x(\omega)$  e  $G_x(\omega)$ . A differenza di  $G_x(\omega)$ ,  $\varsigma_x(\omega)$  non presenta la divisione per la lunghezza del campione,  $T$ , e l’operazione di limite per  $T \rightarrow \infty$ . Segue da quanto visto che, nel caso di transitori di lunghezza finita  $T$  (forzanti impulsive o scansioni in frequenza ad esempio), al posto delle funzioni di densità spettrale di potenza andrebbero utilizzate le corrispettive funzioni di densità spettrale d’energia legate alle precedenti tramite le relazioni:

$$\begin{aligned}\wp_{xx}(\omega) &= TG_{xx}(\omega) \\ \wp_{xy}(\omega) &= TG_{xy}(\omega) \\ \wp_{yy}(\omega) &= TG_{yy}(\omega)\end{aligned}$$

Avremo quindi:

$$\begin{aligned}\varsigma_{yy}(\omega) &= |H(\omega)|^2 \varsigma_{xx}(\omega) \\ \varsigma_{xy}(\omega) &= H(\omega) \varsigma_{xx}(\omega) \\ \varsigma_{yx}(\omega) &= H(-\omega) \varsigma_{xy}(\omega)\end{aligned}$$

### 7.4.2 Effetto del rumore di misura

SI consideri un modello più realistico in cui esista un rumore di misura sia sull’ingresso che sulla risposta. Siano  $u(t)$  e  $v(t)$  i veri segnali, mentre  $m(t)$  e  $n(t)$  siano i termini di rumore. L’ingresso e l’uscita che ottengono sono quindi:

$$\begin{aligned}x(t) &= u(t) + m(t) \\ y(t) &= v(t) + n(t)\end{aligned}\tag{7.14}$$

Si assuma che il rumore sul segnale d’ingresso non sia correlato con quello d’uscita; sia quindi  $G_{um}(\omega) = G_{vn}(\omega) = G_{mn}(\omega) = 0$ . Dal calcolo delle densità spettrali si ottiene:

$$\begin{aligned}G_{xx}(\omega) &= G_{uu}(\omega) + G_{mm}(\omega) \geq G_{uu}(\omega) \\ G_{yy}(\omega) &= G_{vv}(\omega) + G_{nn}(\omega) \geq G_{vv}(\omega) \\ G_{xy}(\omega) &= G_{uv}(\omega)\end{aligned}\tag{7.15}$$

La funzione di coerenza in questo caso diventa:

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{G_{uu}(\omega) G_{vv}(\omega)}{(G_{uu}(\omega) + G_{mm}(\omega))(G_{vv}(\omega) + G_{nn}(\omega))} \leq 1\tag{7.16}$$

La stretta ineguaglianza risulta ogni volta che  $G_{mm}(\omega) > 0$  o  $G_{nn}(\omega) > 0$ , il che è inevitabile qualora si considerino dati reali. Se il rumore è presente solo nella misura dell’uscita si ha:

$$G_{yy}(\omega) = G_{vv}(\omega) + G_{nn}(\omega)\tag{7.17}$$

dove

$$G_{vv}(\omega) = |H(\omega)|^2 G_{xx}(\omega)\tag{7.18}$$

da cui segue

$$G_{vv}(\omega) = \left| \frac{G_{xy}(\omega)}{G_{xx}(\omega)} \right|^2 G_{xx}(\omega) = \gamma_{xy}^2(\omega) G_{yy}(\omega)$$

da cui si ricava

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{G_{vv}(\omega)}{G_{yy}(\omega)}\tag{7.19}$$

Questa quantità è definita “spettro di potenza dell’uscita coerente”. Nel caso il rumore estraneo sia presente solo sull’ingresso si ottiene:

$$G_{xx}(\omega) = G_{uu}(\omega) + G_{nn}(\omega) \quad (7.20)$$

da cui

$$G_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 G_{uu}(\omega) \quad (7.21)$$

$$G_{xy}(\omega) = H(\omega) G_{uu}(\omega) \quad (7.22)$$

e quindi:

$$G_{uu}(\omega) = \frac{|G_{xy}(\omega)|^2}{G_{yy}(\omega)} = \gamma_{xy}^2(\omega) G_{xx}(\omega)$$

da cui si ricava

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{G_{uu}(\omega)}{G_{xx}(\omega)} = 1 - \frac{G_{mm}(\omega)}{G_{xx}(\omega)} \quad (7.23)$$

Ritornando al caso in cui sia presente sia il rumore d’ingresso che quello d’uscita e ricordando l’equazione 7.19 si ottiene:

$$\gamma_{xy}^2(\omega) G_{yy}(\omega) = G_{vv}(\omega) \frac{G_{uu}(\omega)}{G_{uu}(\omega) + G_{mm}(\omega)} \quad (7.24)$$

Quindi la potenza spettrale coerente della risposta determina  $G_{vv}(\omega)$  quando  $G_{mm}(\omega) = 0$  indipendentemente dal rumore nella misura dell’uscita. Una via per stimare il guadagno del sistema è per mezzo della definizione di  $H_0$ , cioè:

$$|H(\omega)|_a^2 = \frac{G_{yy}(\omega)}{G_{xx}(\omega)}$$

Un’altra via è per mezzo di  $H_1$ :

$$|H(\omega)|_c^2 = \frac{|G_{xy}(\omega)|^2}{G_{xx}^2(\omega)}$$

Il rapporto di queste ultime due equazioni esprime la seguente forma della funzione di coerenza:

$$\gamma_{xy}^2(\omega) = \frac{|H(\omega)|_a^2}{|H(\omega)|_c^2} = \frac{|G_{xy}(\omega)|^2}{G_{xx}(\omega) G_{yy}(\omega)}$$

Da questa equazione si evince che  $H_0$  darà sempre, in pratica, un valore di guadagno superiore a  $H_1$ , in quanto la funzione di coerenza è sempre inferiore a 1. Inoltre se consideriamo le equazioni 7.15 nell’espressione di  $H_0$  e di  $H_1$  scopriamo che, anche se il rumore d’ingresso è molto più piccolo della forzante, la valutazione della prima sarà sempre comunque soggetta ad errore dovuto al rumore legato alla risposta, mentre aumentando la forzante rispetto al rumore d’ingresso aumenta la precisione nella stima di  $H_1$  che inoltre non è affetta dal rumore d’uscita. Si dimostra anche che, in presenza di rumore d’uscita, la valutazione di  $H_1$  dà una stima migliore di  $H_2$ .

### 7.4.3 Metodo dell’ampiezza di picco

I metodi di analisi presentati nel seguito hanno in comune la supposizione che, per frequenze prossime ad una risonanza, la risposta del sistema sia dominata dal contributo del modo relativo a quella frequenza di risonanza. Quindi, perché i metodi funzionino correttamente, i modi devono essere sufficientemente separati. Tutti questi metodi vengono generalmente usati, in fase di analisi preliminare, durante le prove di flutter in volo.

Il metodo probabilmente più semplice in assoluto è denominato metodo dell’ampiezza di picco; si applica come segue:

1. I singoli picchi di risonanza vengono individuati sul diagramma della TF e la frequenza della massima risposta viene individuata e presa come frequenza naturale  $\omega_r$ .
2. Si prende nota dell'ampiezza massima  $|\hat{\alpha}|$  e della banda di frequenza per cui l'ampiezza vale  $|\hat{\alpha}|/\sqrt{2}$ ,  $\Delta\omega$ . I due valori di frequenza identificati come  $\omega_a$  e  $\omega_b$  vengono chiamati punti di mezza potenza.
3. Lo smorzamento del modo in questione viene così determinato:

$$\begin{aligned}\eta_r &= \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{\omega_r^2} \cong \frac{\Delta\omega}{\omega_r} \\ \xi_r &= 2\eta_r\end{aligned}\tag{7.25}$$

Il cosiddetto residuo, cioè la costante modale dell'equazione:

$$\frac{X_p}{F_q} = \frac{A_{pqr}}{-\sigma_r + j(\omega - \omega_{dr})}\tag{7.26}$$

può essere stimata come segue, nell'ipotesi, già espressa, che la risposta complessiva, nell'intorno del campo di frequenze considerato, sia da attribuirsi al modo in esame:

$$|\hat{\alpha}| = \frac{A_r}{\omega_r^2 \eta_r}$$

da cui risulta

$$A_r = |\hat{\alpha}| \omega_r^2 \eta_r\tag{7.27}$$

Le limitazioni di questo metodo si possono così riassumere:

- a. le stime dello smorzamento e della costante modale dipendono pesantemente dall'accuratezza con cui è valutata l'ampiezza massima. Tra l'altro questa è una quantità non facilmente misurabile;
- b. l'assunzione del modo singolo non è applicabile strettamente.

Il metodo può essere migliorato utilizzando la parte reale ed immaginaria dell'accelerazione anziché il modulo, come si può vedere dalle Figure (XXX4.3-3a e 4.3-3b).

#### 7.4.4 Metodo dell'eccitazione smorzata

Questo è forse il metodo più immediato per la determinazione della frequenza naturale e dello smorzamento. La tecnica consiste nell'eccitare la struttura con una frequenza nell'intorno della frequenza propria relativa ad un modo. Quindi, terminata l'eccitazione, si registra la storia temporale del transitorio di smorzamento (Figura XXX4.4-1 dove, per la simulazione, si è utilizzato il sistema precedente interrompendo l'eccitazione). Le caratteristiche di frequenza naturale e smorzamento possono venire valutate misurando le ampiezze di picchi successivi e il periodo dell'oscillazione (Figura XXX4.4-2). Ricordando l'equazione del decremento logaritmico  $y = e^{\sigma t}$ , la relazione che lega il logaritmo dell'ampiezza a multipli  $N$  del periodo  $T = 2\pi/\omega_d$  dell'oscillazione è lineare; quindi si ottiene:

$$\sigma = -\frac{\log\left(\frac{A_0}{A_N}\right)}{\frac{2\pi N}{\omega_d}}\tag{7.28}$$

dove  $N$  è il numero dei campioni e  $T$  il periodo. Se si esprime lo smorzamento di un modo oscillante come frazione della frequenza naturale,  $\sigma = \xi\omega_n$ , si ottiene:

$$\xi = \frac{\sigma}{\omega_n} = \frac{\sigma}{\omega_d} \sqrt{1 - \xi^2}\tag{7.29}$$

dall'equazione 7.28:

$$\xi^2 = \frac{\left(\log\left(\frac{A_0}{A_N}\right)\right)^2}{(2\pi N)^2} (1 - \xi^2) \quad (7.30)$$

da cui si ottiene:

$$\xi = \frac{\log\left(\frac{A_0}{A_N}\right)}{\sqrt{(2\pi N)^2 - \left(\log\left(\frac{A_0}{A_N}\right)\right)^2}} \quad (7.31)$$

Dall'equazione 7.29 si ricava poi il valore corretto di  $\omega_n$ :

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{2\pi N} \sqrt{(2\pi N)^2 - \left(\log\left(\frac{A_0}{A_N}\right)\right)^2}$$

In fase di prova, si possono ottenere i valori preliminari in tempo reale, eventualmente limitando l'analisi ad un solo periodo. Un ulteriore miglioramento del metodo consiste nell'utilizzare i dati calcolati secondo quanto descritto in precedenza come valori iniziali per un affinamento iterativo, utilizzando il metodo di *Gauss-Newton*, in cui si minimizza l'errore tra la storia temporale registrata e quella ricostruita con i parametri stimati.

#### 7.4.5 Metodo della pseudo-risposta impulsiva

Tramite il metodo della pseudo risposta impulsiva ci si può ricondurre alla procedura appena vista. Questo approccio si può applicare quando non si conosca la sollecitazione ma sia disponibile solo la risposta, come nel caso di grosse strutture, quali ponti o edifici snelli, soggette a sollecitazioni dovute a cause ambientali. A titolo di esempio si considerino fenomeni meteorologici o di traffico. Il metodo può essere usato per il flutter, in particolare, quando la sollecitazione sia dovuta alla turbolenza o a forzanti impulsive, e, in generale, quando non si conosca la forzante (Figure XXX3-5, 3-6).

Si integri l'equazione di un sistema meccanico ad un grado di libertà già utilizzata negli esempi precedenti, considerando una forzante avente le caratteristiche di un rumore bianco. Si supponga di avere misurato la funzione di trasferimento in termini di  $H_0$ , quindi soltanto il modulo. La densità spettrale di potenza del segnale di ingresso sia praticamente costante nel campo di frequenze di interesse. Dal momento che, in campo aeroelastico, questo metodo sia principalmente utilizzato quando come forzante si considera la sola turbolenza atmosferica, in considerazione del ristretto campo di frequenze in cui quest'ultima ipotesi sia soddisfatta, sono evidenti i limiti di tale eccitazione per frequenze strutturali relativamente elevate. Il valore della costante  $S_{xx}$  è inessenziale. Si ottiene allora  $S_{yy} = |H(\omega)|^2$ . Se si antitrasforma lo spettro ottenuto si ottiene la funzione di autocovarianza, che presenta componenti di frequenza e smorzamento uguali al sistema considerato (Figura XXX 4.4-4) e che può essere trattato nel modo descritto in precedenza (Figura XXX4.4-5). La funzione di covarianza è simmetrica, quindi è sufficiente considerarne solo la parte per  $\tau > 0$ . Quanto descritto è generalmente conosciuto come metodo della pseudo-risposta impulsiva in quanto la parte di funzione di autocovarianza che si tiene è temporalmente simile alla risposta del sistema in esame ad una forzante impulsiva.

Si consideri ora la risposta di un sistema a due gradi di libertà (Figura XXX4.4-6), soggetto alla forzante casuale già vista; si ottiene la densità spettrale di potenza di Figura XXX4.4-7.

Se si esegue la trasformata inversa di *Fourier* di quest'ultima funzione si ottiene, come visto, la storia temporale di una risposta smorzata avente le caratteristiche di frequenza propria e smorzamento (quindi i poli) del sistema originale (Figura XXX4.4-8). Dall'osservazione dei diagrammi delle Figure XXX si può individuare la sovrapposizione dei due modi e valutare frequenza e smorzamento rispettivi (evidenti nel diagramma logaritmico di Figura XXX4.4-9). Eventualmente si possono rilevare i valori di picco

negativi e positivi dei due modi, trasformare secondo *Fourier* ed ottenere così il modulo della funzione di trasferimento,  $H_0$ .

Come già detto, utilizzando questo metodo si perde l'informazione relativa alla fase tra ingresso e uscita. Nell'ipotesi che il sistema in esame sia a fase minima, sicuramente verificata per quanto riguarda i poli in quanto supponiamo che il sistema sia stabile e quindi essi sono tutti nel semipiano sinistro, possiamo ricostruire in modo immediato il diagramma approssimativo della fase a partire da quello del modulo, malgrado questo non metta in evidenza esplicita, come quello asintotico, le costanti di tempo e le pulsazioni naturali dei poli e degli zeri. Mediante la cosiddetta relazione di Bode possiamo infatti scrivere:

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX VERIFICARE!

$$\angle(H(j\bar{\omega})) = \frac{\bar{\omega}}{10\pi \ln} \int_0^\infty \frac{|H(j\omega)|_{db} - |H(j\bar{\omega})|_{db}}{\omega^2 - \bar{\omega}^2} d\omega$$

e quindi ricostruire una funzione di trasferimento con gli stessi poli e zeri inessenziali. La fase è comunque fittizia perché il metodo la forza ad essere minima, ma comunque è inessenziale perché non modifica i poli. Spesso, di fatto, il sistema in analisi è comunque a zeri destri.

#### 7.4.6 Metodo dell'approssimazione circolare

L'approccio originale per questo metodo fu sviluppato da Kennedy e Panku per sistemi con smorzamento strutturale (smorzamento variabile con la frequenza). Sotto certe ipotesi può essere esteso ai casi di attrito viscoso e può includere modi complessi. Le assunzioni per l'estensione sono le seguenti:

1. nell'intorno di una risonanza i modi sono soltanto debolmente accoppiati e il contributo dei modi a frequenza più elevata e più bassa può essere approssimato da una costante complessa  $g = R + jI$ ;
2. il sistema è debolmente smorzato.

La risposta in frequenza della struttura nel campo di frequenze dove l' $r$ -esimo modo è predominante può essere derivata dall'equazione 7.26 come:

$$\frac{X_p}{F_q} = \frac{U_{pqr} + jV_{pqr}}{-\sigma_r + j(\omega - \omega_{dr})} + (R + jI) \quad (7.32)$$

con  $X_p$  risposta nel punto  $p$ -esimo e  $F_q$  sollecitazione nel punto  $q$ -esimo, dove  $R + jI$  include il contributo del termine associato con il valore coniugato (???). Se la costante complessa è trascurata e l'ampiezza del modo è posta uguale all'unità allora vale la seguente relazione:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{X_p}{F_q}\right) = -\frac{(\omega - \omega_{dr})}{(\omega - \omega_{dr})^2 + \sigma_r^2} \quad (7.33)$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{X_p}{F_q}\right) = -\frac{\sigma_r}{(\omega - \omega_{dr})^2 + \sigma_r^2} \quad (7.34)$$

da cui si ottiene:

$$\left(\operatorname{Re}\left(\frac{X_p}{F_q}\right)\right)^2 + \left(\operatorname{Im}\left(\frac{X_p}{F_q}\right) - \frac{1}{2\sigma_r}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\sigma_r}\right)^2 \quad (7.35)$$

che è manifestamente l'equazione di un cerchio. Quindi il contributo di un modo alla risposta generale del sistema può essere rappresentato nel piano di Nyquist come un cerchio (Figura XXX4.5-1). Prendendo poi in considerazione la costante complessa e il coefficiente modale, le coordinate del centro possono essere calcolate come:

$$x_c = R - \frac{U_{pqr}}{2\sigma_r} \quad (7.36)$$

$$y_c = I - \frac{V_{pqr}}{2\sigma_r} \quad (7.37)$$

e il raggio diventa:

$$R = \frac{\sqrt{U_{pqr}^2 + V_{pqr}^2}}{2\sigma_r} \quad (7.38)$$

Il vettore complesso dello spostamento modale espande o riduce il diametro e ruota il cerchio nel piano di Nyquist. Una misura dell'accuratezza del metodo risiede nella forma della risposta in frequenza alla risonanza, più la curva si avvicina alla forma circolare, più accurato è il risultato. Può essere dimostrato che la frequenza di risonanza si trova dove la variazione dell'angolo di fase come funzione della frequenza è massimo, ovvero  $\partial^2 \phi / \partial \omega^2 = 0$ . Il rapporto di smorzamento,  $\xi_r$ , può anche essere determinato dall'approssimazione circolare individuando le due frequenze  $\omega_a$  e  $\omega_b$  a  $\pm 90^\circ$  (??45?) rispetto alla frequenza naturale smorzata. Lo smorzamento risulta poi:

$$\xi_r = \frac{|\omega_a - \omega_b|}{2\omega_r} \quad (7.39)$$

mentre il raggio è proporzionale al modulo del residuo:

$$R = \frac{1}{2\eta_r} |A_{pqr}|^2$$

L'angolo di fase del coefficiente modale complesso,  $\phi_{pqr}$ , può essere calcolato facendo passare una retta attraverso il punto di risonanza,  $\omega_r$ , e il centro del cerchio. L'angolo che questa linea forma con l'asse immaginario è uguale all'angolo di fase del coefficiente modale:

$$\phi_{pqr} = \text{atan} \left( \frac{U_{pqr}}{V_{pqr}} \right) = \frac{\pi}{2} + \angle(A_{pqr}) \quad (7.40)$$

Questa tecnica permette una migliore separazione dei modi, ma come tutte le tecniche più sofisticate, tende a divergere. In generale il metodo è veloce e può essere usato per ottenere modi complessi, ma per ottenere il risultato migliore dovrebbe essere utilizzato in modo interattivo (??).

A titolo di esempio si consideri il solito sistema soggetto alla scansione lineare in frequenza che, come visto produce la risposta di Figura XXX4.3-1. Si calcoli ora la funzione di risposta in frequenza, si diagrammino i punti della TF sul diagramma di Nyquist ed si esegua una interpolazione mediante il metodo dei minimi quadrati. Il risultato è presentato in Figura XXX4.5-1. Il raggio del cerchio  $\tilde{r}$  e  $r = 5.97$ , mentre le coordinate del centro sono  $x_c = 0 - 25$ ,  $y_c = 5.95$ . La frequenza caratteristica è facilmente individuabile derivando la fase rispetto alla frequenza, da cui si ricava  $\omega_r = 21.0$  (Figura XXX4.5-2). Sul diagramma di Nyquist il picco di risonanza è verosimilmente compreso tra i due punti aventi il massimo valore immaginario. I due punti, aventi rispettivamente il valore reale minimo e massimo, sono approssimativamente a  $\pm 90^\circ$  rispetto al segmento congiungente l'origine con il punto relativo alla frequenza di risonanza. In questi due punti la frequenza vale rispettivamente  $\omega_a = 9.84$  e  $\omega_b = 22.8$ . Eseguendo i calcoli si ottiene  $\xi_r = 0.0053$ .

## 7.5 Approssimazione a più gradi di libertà

Il limite dei metodi visti risiede nella necessità che l'interferenza tra i modi sia minima; questo comporta che le loro frequenze non siano troppo vicine. Vengono ora presentati alcuni metodi che ammettono la mutua influenza tra i modi.

### 7.5.1 Approssimazione mediante fattorizzazione

Si esprima la funzione di trasferimento nella forma delle frazioni parziali:

$$H_{ij} = \frac{X_i}{F_j} = \sum_{r=1}^{\infty} \left( \frac{A_{ijr}}{j\omega - s_r} + \frac{\bar{A}_{ijr}}{j\omega - \bar{s}_r} \right) \quad (7.41)$$

Questa equazione può essere divisa in tre somme parziali in modo che ogni somma copra il contributo dei modi nei campi di frequenze rispettivamente  $[0, f_a]$ ,  $[f_a, f_b]$  (campo di interesse) e  $[f_b, \infty]$ :

$$\frac{X_i}{F_j} = \left( \sum_{r=1}^{r_a-1} + \sum_{r=r_a}^{r_b} + \sum_{r=r_b+1}^{\infty} \right) \left( \frac{A_{ijr}}{j\omega - s_r} + \frac{\bar{A}_{ijr}}{j\omega - \bar{s}_r} \right) \quad (7.42)$$

Il termine a frequenza più bassa viene chiamato “residuo di massa” mentre quello a frequenza più alta viene definito “residuo di rigidità”. Scriviamo l’equazione della risposta in frequenza nel modo seguente:

$$\frac{X_i}{F_j} = \frac{C_{ij}}{-\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2 + 2j\xi_r \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right) + 1} \quad (7.43)$$

Ora, se si considera il residuo di massa, si nota che le frequenze proprie rispetto al campo di frequenze d’interesse sono basse, ovvero  $\omega/\omega_r \gg 1$ . Questo termine può essere quindi approssimato da un polinomio del tipo  $a_0 + a_1/s + a_2/s^2 + \dots$ . Se si considera invece il residuo di rigidità, si ha la situazione opposta, cioè  $\omega/\omega_r \ll 1$ ; sotto questa condizione, l’effetto di questo termine sui modi d’interesse può essere approssimato mediante un polinomio del tipo  $b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots$ . Si può quindi scrivere:

$$H_{ij} = \frac{X_i}{F_j} = \frac{a_1}{j\omega} + \frac{a_2}{(j\omega)^2} + \dots + \sum_{r=r_a}^{r_b} \left( \frac{A_{ijr}}{j\omega - s_r} + \frac{\bar{A}_{ijr}}{j\omega - \bar{s}_r} \right) + k + b_1j\omega + b_2(j\omega)^2 + \dots \quad (7.44)$$

Uno dei modi per risolvere l’equazione ai minimi quadrati può essere il seguente. Si riscriva l’equazione 7.42 con le approssimazioni descritte in precedenza:

$$\frac{X_i}{F_j} \cong \frac{a_1}{j\omega} + \frac{a_2}{(j\omega)^2} + \sum_{r=r_a}^{r_b} \left( \frac{U_{ijr} + jV_{ijr}}{-\sigma_r + j(\omega - \omega_r)} + \frac{U_{ijr} - jV_{ijr}}{-\sigma_r + j(\omega + \omega_r)} \right) + k + b_1j\omega + b_2(j\omega)^2 \quad (7.45)$$

Quest’equazione contiene  $4n + 5$  parametri incogniti:  $\sigma_r$ ,  $\omega_r$ ,  $U_{ijr}$ ,  $V_{ijr}$  relativi agli  $n$  modi nel campo di frequenze d’interesse, più i parametri  $k$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  che tengono conto in modo approssimato dei modi a più alta e più bassa frequenza. L’equazione potrebbe essere risolta una volta nota la TF a  $4n + 5$  frequenze. In questo caso, però, gli errori di misura potrebbero rendere la soluzione inutile. Infatti le equazioni possono essere non lineari nei parametri  $\sigma_r$  e  $\omega_r$  e quindi è necessario un approccio iterativo. Di conseguenza, ottenere una soluzione convergente, in presenza di rumore di misura, sarebbe molto difficile. Sia  $G$  una misura sperimentale di risposta in frequenza, mentre  $H$  rappresenta il modello matematico dell’equazione 7.45. I dati variano soltanto con la frequenza e sono conosciuti a  $m$  frequenze, ovvero  $\bar{H}_k = \bar{H}(\omega = \omega_k)$ ,  $k = 1, m$ . Il modello dipende non solo dalla frequenza, ma anche dai parametri aeroelastici, i quali saranno rappresentati dalle  $4n + 5$  componenti  $\gamma_i$  di un vettore  $\gamma$ :  $H_j = H(\omega, \gamma = \gamma_j)$ ,  $j = 1, 4n + 5$ . L’errore tra modello e dati sperimentali alla frequenza  $\omega_k$  è:

$$\begin{aligned} E_k(\gamma) &= \bar{H}(\omega_k) - H(\omega, \gamma) \\ &= G(\omega_k) - \frac{a_1}{j\omega_k} - \frac{a_2}{(j\omega_k)^2} - \sum_{r=1}^{4n+5} \left( \frac{U_{ijr} + jV_{ijr}}{-\sigma_r + j(\omega_k - \omega_r)} + \frac{U_{ijr} - jV_{ijr}}{-\sigma_r + j(\omega_k + \omega_r)} \right) \\ &\quad - k - b_1j\omega_k - b_2(j\omega_k)^2 \end{aligned} \quad (7.46)$$

Il funzionale che deve essere minimizzato nel senso dei minimi quadrati rispetto all’insieme dei parametri aeroelastici  $\gamma$  è:

$$E = \sum_{k=1}^m E_k(\gamma) \bar{E}_k(\gamma) = \sum_{k=1}^m |E_k(\gamma)|^2 \quad (7.47)$$

In accordo all’usuale tecnica dei minimi quadrati, il minimo del funzionale viene trovato imponendo l’annullamento delle derivate parziali del funzionale rispetto ai parametri  $\gamma$ :

$$\sum_{k=1}^m \left( \bar{E}_k(\gamma) \frac{\partial H(\omega_k, \gamma)}{\partial \gamma_k} - E_k(\gamma) \frac{\partial \bar{H}(\omega_k, \gamma)}{\partial \gamma_k} \right) = 0 \quad (7.48)$$



Come già detto queste equazioni sono non lineari, quindi la soluzione va cercata in modo iterativo partendo da valori iniziali delle componenti di  $\gamma$ . Questo implica il calcolo di  $\Delta\gamma$  ad ogni iterazione. Il calcolo termina una volta che si ha la convergenza entro una tolleranza accettabile. Il metodo iterativo comunemente usato è quello di *Gauss-Newton*. Si sviluppi in serie di Taylor l'equazione 7.45, arrestandosi al primo ordine nell'ipotesi che le variazioni rispetto ai valori di partenza siano piccole; si ottiene:

$$H(\omega, \gamma) = H(\omega, \gamma_v) + \sum_{i=1}^{4n+5} \frac{\partial H(\omega, \gamma_v)}{\partial \gamma_i} \Delta\gamma_i$$

dove  $\gamma_v$  è il vettore dei valori approssimati delle incognite con cui si inizia il calcolo e  $\Delta\gamma_i$  è la variazione dell' $i$ -esimo parametro. L'errore alla frequenza  $\omega_k$  può essere espresso come:

$$E_k(\gamma) = G(\omega_k) - H(\omega_k, \gamma_v) - \sum_{i=1}^{4n+5} \frac{\partial H(\omega_k, \gamma_v)}{\partial \gamma_i} \Delta\gamma_i$$

L'equazione è lineare in tutti i parametri  $\gamma_i$  in quanto  $\gamma$  è un vettore costante. Le derivate di  $H$  rispetto a  $\gamma_i$  si ottengono da una derivazione formale dell'equazione 7.45 e sono valutate per  $\gamma = \gamma_v$ . I risultati dipendono dalla sola frequenza; si ponga quindi  $\beta_i(\omega) = \partial H / \partial \gamma_i$ . Il funzionale da minimizzare diventa:

$$E_{\text{lin.}} = \sum_{k=1}^m \left| G(\omega_k) - H(\omega_k, \gamma_v) - \sum_{i=1}^{4n+5} \beta_i(\omega_k) \Delta\gamma_i \right|^2$$

Eguagliando a zero le derivate  $dE_{\text{lin.}}/d\gamma_i$ , si trovano equazioni lineari risolvibili rispetto a  $\Delta\gamma_i$ , cioè, ponendo  $q = 4n + 5$ , si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q \beta_1^2 & \cdots & \sum_{i=1}^q \beta_1 \beta_q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^q \beta_q \beta_1 & \cdots & \sum_{i=1}^q \beta_q^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\gamma_1 \\ \vdots \\ \Delta\gamma_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^q \beta_1 (H - G) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^q \beta_q (H - G) \end{bmatrix}$$

Si noti la particolare struttura  $A^T A x = A^T b$  tipica della forma canonica dei minimi quadrati di un problema lineare. Questo sistema viene risolto ad ogni iterazione e il vettore dei valori di partenza viene aggiornato:  $\gamma_v := \gamma_v + \Delta\gamma$ . L'iterazione termina quando una norma<sup>1</sup> del valore aggiornato differisce da quella all'iterazione precedente di una quantità inferiore ad un valore scelto a priori del valore del parametro, oppure si è raggiunto il minimo di  $E$ . In genere la procedura d'iterazione è costruita così che ognuno degli autovalori possa essere bloccato mentre l'iterazione continua sui rimanenti. Se un modo tende a divergere i parametri relativi possono essere bloccati ai valori iniziali. In genere i modi che tendono a divergere sono quelli che hanno coefficienti modali molto piccoli. Per una buona riuscita del processo è importante che i valori iniziali siano buoni. In genere, inizialmente vengono utilizzati i dati ricavati dalle prove modali, quindi, come l'attività sperimentale procede, si utilizzano quelli del punto di prova precedente, secondo una tecnica di continuazione.

### 7.5.2 Approssimazione mediante funzione razionale

Il successivo metodo che viene introdotto tende ad identificare simultaneamente tutti i modi importanti tra gli infiniti modi di una struttura. Si cerca cioè di identificare poli e zeri della funzione di trasferimento approssimandola mediante il rapporto di due polinomi. Si esprima quindi la TF come rapporto tra due polinomi:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (7.49)$$

Siano  $N(s)$  e  $D(s)$  due polinomi

$$N(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n \quad (7.50)$$

$$D(s) = 1 + b_1 s + \dots + b_d s^d \quad (7.51)$$

<sup>1</sup>Tipicamente la norma Euclidea, o norma 2 ( $\sqrt{\Delta\gamma^T \Delta\gamma} < \varepsilon$ ), ma spesso anche norma infinita ( $\max(\text{abs}(\Delta\gamma)) < \varepsilon$ ).

Gli zeri di  $D(s)$  corrispondono ai modi naturali del sistema. Gli indici  $n$  e  $d$  rappresentano l'ordine dei polinomi rispettivi. Si pone  $b_0 = 1$  altrimenti il problema sarebbe indeterminato. In generale il numero di gradi di libertà presenti nel campo di frequenze d'interesse è conosciuto. Il primo problema consiste nella definizione dell'ordine di numeratore e denominatore. Un modo pratico di affrontare la questione è quello di alzare l'ordine di numeratore e denominatore fino a che il risultato sia soddisfacente; in genere il residuo presenterà un minimo per un determinato ordine. In genere l'ordine sarà superiore al numero di gradi di libertà presenti, sarà quindi necessaria un'analisi per evidenziare le frequenze proprie spurie. Lo stesso problema si pone nella determinazione del numero di termini da usare nell'equazione 7.41. Il residuo dell'approssimazione razionale è:

$$E = \frac{D(j\omega)H(j\omega) - N(j\omega)}{D(j\omega)} \quad (7.52)$$

dove si è passati nel dominio di *Laplace* sull'asse immaginario e quindi si opera sulle trasformate di *Fourier*, il che è lecito nell'ipotesi che si stia operando su di un sistema stabile. Se il residuo fosse nullo si potrebbe semplificare il denominatore:

$$D(j\omega)H(j\omega) - N(j\omega) = 0$$

e calcolare i parametri mediante i minimi quadrati. Dal momento che il residuo in genere non è nullo, è necessario ricorrere ad un metodo iterativo per la soluzione. Un primo approccio si può ottenere scrivendo l'equazione 7.52 nel modo seguente:

$$\frac{D_i(j\omega)H(j\omega) - N(j\omega)}{D_{i-1}(j\omega)} = 0 \quad (7.53)$$

Dal punto di vista pratico, al primo passo si pone  $D_0(j\omega) = 1$  e si uguaglia a zero il numeratore. Quindi si procede nell'iterazione finché la variazione dei coefficienti è inferiore ad un valore assunto a priori. Chiaramente anche in questo caso si può utilizzare l'approccio di *Gauss-Newton* in sostituzione dell'iterazione implicita nella formula in equazione 7.53, con una maggiore rapidità di convergenza. Il grado dei polinomi che si utilizzano è spesso più elevato dei modi presenti nel campo di frequenze d'interesse, quindi, in fase di analisi, vanno tolte le cosiddette frequenze spurie, cioè quelle frequenze non corrispondenti a modi reali. Si consideri il sistema a due gradi di libertà descritto nella sezione ?? ed utilizzato in precedenza, sollecitato da una forzante paragonabile ad un rumore bianco. Si consideri l'accelerazione di beccheggio. In un caso reale potrebbe essere misurata mediante due accelerometri posti in corda in punti diversi, delle cui misure si consideri la differenza. Mediante la routine `spectrum` di `matlab` si calcolano i valori puntuali della funzione di trasferimento,  $\bar{H}(j\omega)$ , quindi mediante la routine `invfreqz`, che implementa il metodo descritto in precedenza, si calcolano i polinomi relativi al numeratore e denominatore della TF. Si possono ora confrontare i valori discreti di  $\bar{H}(j\omega)$  con l'interpolazione ottenuta mediante  $H(j\omega)$  sul diagramma di Bode (Figure XXX5-1a e 5-1b).

## 7.6 Identificazione parametrica nel dominio del tempo

L'identificazione parametrica nel dominio del tempo si affronta cercando i parametri di un modello che può essere deterministico, o, quando il modello deterministico sia troppo complesso, stocastico. Esistono diversi metodi per l'identificazione nel dominio del tempo; nel seguito viene proposto il metodo dei minimi quadrati, molto usato e con risultati paragonabili a metodi più complessi quali quello di massima verosimiglianza o del filtro di Kalman.

*Si può forse fare anche un accenno al filtro di Kalman, quanto meno ai principi di base?*

### 7.6.1 Metodo dei minimi quadrati

La tecnica dei minimi quadrati (LS dall'inglese "least square") è conosciuta soprattutto per le sue applicazioni nell'interpolazione o nell'analisi delle regressioni. In queste applicazioni si desidera rappresentare dei dati misurati con semplici relazioni funzionali o semplicemente per una interpolazione grafica. Il concetto di minimi quadrati è semplice, la soluzione si determina, infatti, minimizzando la somma dei

quadrati delle deviazioni tra i dati misurati e quelli calcolati tramite un modello. L'estensione della tecnica dei minimi quadrati alla stima di parametri di un sistema dinamico partendo dalla storia temporale dell'ingresso e dell'uscita può essere illustrata con un semplice esempio. Si assuma che il sistema in prova sia governato da un'equazione differenziale scalare:

$$\dot{x}(t) = \vartheta_1 x(t) + u(t) \quad (7.54)$$

dove  $x(t)$  e  $u(t)$  sono rispettivamente le variabili di stato e d'ingresso e  $\vartheta_1$  è il parametro incognito che caratterizza il modello. Si assuma inoltre che:

- a.  $\dot{x}(t)$ ,  $x(t)$  e  $u(t)$  sono conosciute perché misurate.
- b.  $x(t)$  e  $u(t)$  sono misurate senza errore, mentre i valori misurati di  $\dot{x}(t)$  sono corrotti da errori di misura in modo che:

$$y(t_i) = \dot{x}(t_i) + \varepsilon(t_i) \quad (7.55)$$

con  $i = 1, N$  dove  $y(t_i)$  è il valore misurato di  $\dot{x}(t_i)$  ad un insieme di istanti finiti  $t_i$  che per praticità sono assunti equidistanziati, e  $\varepsilon(t_i)$  è un errore di misura casuale.

La misura dei valori istantanei delle grandezze ad istanti prefissati si dice *campionamento* (in inglese "sampling") e viene ottenuto in pratica con dispositivi elettronici detti DAC ("digital-analog converter"). La notazione più compatta  $x(i)$  verrà ora usata al posto di  $x(t_i)$  per indicare le grandezze campionate. Utilizzando i dati misurati e le equazioni 7.54 e 7.55, per ogni tempo  $t_i$  si può scrivere la seguente relazione:

$$y(i) - \vartheta_1 x(i) - u(i) = \varepsilon(i) \quad (7.56)$$

Il criterio dei minimi quadrati, in questo caso, può essere espresso nei termini della funzione di costo:

$$J(\vartheta) = \sum_{i=1}^N (\varepsilon(i))^2 = \sum_{i=1}^N (y(i) - \vartheta_1 x(i) - u(i))^2 \quad (7.57)$$

Ora si deve determinare il valore di  $\vartheta_1$  che minimizza la funzione di costo. Questo si ottiene calcolando la derivata parziale rispetto a  $\vartheta_1$ :

$$\frac{\partial J(\vartheta_1)}{\partial \vartheta_1} = -2 \sum_{i=1}^N (y(i) - \vartheta_1 x(i) - u(i)) x(i) \quad (7.58)$$

uguagliandola a zero si ottiene la condizione desiderata:

$$\sum_{i=1}^N (x(i))^2 \hat{\vartheta}_1 = \sum_{i=1}^N (y(i) - u(i)) x(i) \quad (7.59)$$

Risolvendo l'equazione 7.59 si ottiene la stima ottima di  $\vartheta_1$ .

### Stima di un modello complesso

Analogamente si supponga che  $y(i)$  rappresenti un fenomeno fisico che si vuole rappresentare tramite il modello:

$$y(i) = a_1 y(i-1) + \dots + a_n y(i-n) + b_1 u(i-1) + \dots + b_n u(i-n) + \varepsilon(i) \quad (7.60)$$

Siccome l'equazione 7.60 è soltanto un'approssimazione del fenomeno fisico, spesso ci si riferisce a  $\varepsilon(i)$  come errore d'equazione. Definendo i vettori:

$$X_i = \begin{bmatrix} y(i-1) & \dots & y(i-n) & u(i-1) & \dots & u(i-n) \end{bmatrix}$$

e

$$\vartheta = [a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_1 \quad \dots \quad b_n]$$

l'equazione dell'errore può essere espressa come:

$$\varepsilon(i) = y(i) - X_i \vartheta^T \quad (7.61)$$

Il minimo della funzione di costo:

$$J(\vartheta) = \sum_{i=1}^N (y(i) - X_i \vartheta^T)^2 \quad (7.62)$$

si otterrà annullandone la derivata parziale rispetto a  $\vartheta$ , cioè

$$\frac{\partial J(\vartheta)}{\partial \vartheta} = -2 \sum_{i=1}^N X_i^T (y(i) - X_i \vartheta^T) = 0$$

quindi la stima dei parametri del modello può essere ottenuta mediante:

$$\hat{\vartheta} = \left( \sum_{i=1}^N X_i^T X_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^N X_i^T y(i) \quad (7.63)$$

## 7.7 Estratti della normativa corrente

### 7.7.1 MIL-A-8870C(AS) — General Requirement

Construction, materials and design shall be such that there will be: No flutter, buzz, divergence, aeroservoelastic, aerothermoelastic instabilities, including sustained limit amplitude instabilities, of the airplane weapon system consistent with the requirements of 3.1.1 ...

3.1.1 Aeroelastic Stability Analysis, wind tunnel and laboratory tests, and airplane ground and flight tests (up to design limit speed) shall demonstrate that flutter, divergence and other related aeroelastic or aeroservoelastic instability boundaries occur outside the 1.15 times design limit speed envelope. The airplane shall meet the following stability design requirements for both normal and emergency conditions:

- a) Margin: Fifteen percent equivalent airspeed,  $V_e$ , margin on the applicable design limit speed envelope, both at constant altitude and constant *Mach* number.
- b) Damping: The damping coefficient,  $g$ , for any critical flutter mode or for any significant dynamic response mode shall be at least three percent (0.03) for all altitudes or flight speeds up to design limit speed.

### 7.7.2 JAR 23.629 — Flutter

Date: March 11, 1994

- (a) It must be shown by the methods of (b) and either (c) or (d) of this paragraph, that the aeroplane is free from flutter, control reversal and divergence for any condition of operation within the limit  $V - n$  envelope and at all speeds up to the speed specified for the selected method. In addition —
  - (1) Adequate tolerances must be established for quantities which affect flutter; including speed, damping, mass balance and control system stiffness; and
  - (2) The natural frequencies of main structural components must be determined by vibration tests or other approved methods.
- (b) Flight flutter tests must be made to show that the aeroplane is free from flutter, control reversal and divergence and to show by these tests that —

- (1) Proper and adequate attempts to induce flutter have been made within the speed range up to  $V_D$ ;
  - (2) The vibratory response of the structure during the test indicates freedom from flutter;
  - (3) A proper margin of damping exists at  $V_D$ ; and
  - (4) There is no large and rapid reduction in damping as  $V_D$  is approached.
- (c) Any rational analysis used to predict freedom from flutter, control reversal and divergence must cover all speeds up to  $1.2 V_D$ .
- (d) Compliance with the rigidity and mass balance criteria (pages 4–12), in Airframe and Equipment Engineering Report No. 45 (as corrected) “Simplified Flutter Prevention Criteria” (published by the Federal Aviation Administration) may be accomplished to show that the aeroplane is free from flutter, control reversal, or divergence if -
- (1)  $V_D/M_D$  for the aeroplane is less than 260 Knots (EAS) and less than *Mach* 0.5;
  - (2) The wing and aileron flutter prevention criteria, as represented by the wing torsional stiffness and aileron balance criteria, are limited to use to aeroplanes without large mass concentrations (such as engines, floats, or fuel tanks in outer wing panels) along the wing span; and
  - (3) The aeroplane -
    - (i) Does not have a T-tail or other unconventional tail configurations;
    - (ii) Does not have unusual mass distributions or other unconventional design features that affect the applicability of the criteria; and
    - (iii) Has fixed-fin and fixed-stabiliser surfaces.
- (e) For turbo-propeller powered aeroplanes, the dynamic evaluation must include -
- (1) Whirl mode degree of freedom which takes into account the stability of the plane of rotation of the propeller and significant elastic, inertial and aerodynamic forces; and
  - (2) Propeller, engine, engine mount and aeroplane structure stiffness and damping variations appropriate to the particular configuration.
- (f) Freedom from flutter, control reversal and divergence up to  $V_D/M_D$  must be shown as follows:
- (1) For aeroplanes that meet the criteria of sub-paragraphs (d)(1) to (d)(3) of this paragraph, after the failure, malfunction, or disconnection of any single element in any tab control system.
  - (2) For aeroplanes other than those described in sub-paragraph (f)(1) of this paragraph, after the failure, malfunction, or disconnection of any single element in the primary flight control system, any tab control system, or any flutter damper.
- (g) For aeroplanes showing compliance with the fail-safe criteria of JAR 23.571 and 23.572, the aeroplane must be shown by analysis to be free from flutter up to  $V_D/M_D$  after fatigue failure, or obvious partial failure of a principal structural element.
- (h) For aeroplanes showing compliance with the damage-tolerance criteria of JAR 23.573, the aeroplane must be shown by analysis to be free from flutter up to  $V_D/M_D$  with the extent of damage for which residual strength is demonstrated.
- (i) For modifications to the type design which could affect the flutter characteristics compliance with sub-paragraph (a) of this paragraph must be shown, except that analysis alone, which is based on previously approved data, may be used to show freedom from flutter, control reversal and divergence for all speeds up to the speed specified for the selected method.

### 7.7.3 JAR 25.629 — Flutter, Deformation, and Failsafe Criteria

Date: May 27, 1994

- (a) General. Compliance with this paragraph must be shown by calculations, resonance tests, or other tests found necessary by the Authority. Full scale flight flutter tests at speeds up to  $V_{DF}/M_{DF}$  for the critical aeroplane flutter modes must be conducted when —
  - (1)  $M_D$  is equal to or greater than 0.8 M;
  - (2) The adequacy of flutter analysis and tunnel tests have not been established by previous experience with aircraft having similar design features; or
  - (3) The conditions specified in sub-paragraph (a)(1) or (2) of this paragraph exist, and modifications to the type design have a significant effect on the critical flutter modes.
- (b) Flutter and divergence prevention. The dynamic evaluation of the aeroplane must include an investigation of the significant elastic, inertia, and aerodynamic forces associated with the rotations and displacements of the plane of the propeller. In addition, the following apply:
  - (1) The aeroplane must be designed to be free from flutter and divergence (unstable structural distortion due to aerodynamic loading) for all combinations of altitude and speed encompassed by the  $V_D/M_D$  versus altitude envelope enlarged at all points by an increase of 20% in equivalent airspeed at both constant *Mach* number and constant altitude, except that [the envelope may be limited to a maximum *Mach* number of 1.0 when  $M_D$  is less than 1.0 at] all design altitudes and the following is established:
    - (i) A proper margin of damping exists at all speeds up to  $M_D$ ; and
    - (ii) There is no large and rapid reduction in damping as  $M_D$  is approached.
  - (2) If concentrated balance weights are used on control retracts, their effectiveness and strength, including supporting structure, must be substantiated.
- (c) Loss of control due to structural deformation. The aeroplane must be designed to be free from control reversal and from undue loss of longitudinal, lateral, and directional stability and control, as a result of structural deformation (including that of the control surface covering) at speeds up to the speed prescribed in sub-paragraph (b) of this paragraph for flutter prevention.
- (d) Fail-safe criteria. The following fail-safe criteria must be met:
  - (1) It must be shown, by analysis or tests, that the aeroplane is free from such flutter or divergence that would preclude safe flight, at any speed up to  $V_D$ , after each of the following:
    - (i) Each of the failures, malfunctions, or adverse conditions listed in sub-paragraph (d)(4) of this paragraph.
    - (ii) Any other combination of [failures, malfunctions, or adverse conditions not shown to be extremely] improbable.
  - (2) If a failure, malfunction, or adverse condition described in sub-paragraph (d)(4) of this paragraph is simulated during a flight test in showing compliance with this paragraph, the maximum speed investigated need not exceed  $V_{FC}$  if it is shown, by correlation of the flight test data with other test data or analyses, that hazardous flutter or divergence will not occur at any speed up to  $V_D$ .
  - (3) The structural failures described in sub-paragraphs (d)(4)(i) and (ii) of this paragraph need not be considered in showing compliance with this paragraph if engineering data substantiate that the probability of their occurrence is negligible by showing that the structural element is designed with —
    - (i) Conservative static strength margins for each ground and flight loading conditions specified in this JAR-25; or
    - (ii) Sufficient fatigue strength for the loading spectrum expected in operation.

- (4) The failures, malfunctions, or adverse conditions use to show compliance with this paragraph are as follows:
- (i) Failure of any single element of the structure supporting any engine, independently mounted propeller shaft, large auxiliary power unit, or large externally mounted aerodynamic body (such as an external fuel tank).
  - (ii) Any single failure of the engine structure, on turbo-propeller aeroplanes, that would reduce the yaw or pitch rigidity of the propeller rotational axis.
  - (iii) Absence of propeller aerodynamic forces resulting from the feathering of any single propeller, and, for aeroplanes with four or more engines, the feathering of the critical combination of two propellers. In addition, any single feathered propeller must be paired with the failures, specified in (d)(4)(i) of this sub-paragraph, involving failure of any single element of the structure supporting any engine or independently mounted propeller shaft, and the failures specified in (d)(4)(ii) of this sub-paragraph.
  - (iv) Any single propeller rotating at the highest likely overspeed.
  - (v) Failure of each principal element selected for compliance with JAR 25.571 (b). Safety following a failure may be substantiated by showing that losses in rigidity or changes in frequency, mode shape, or damping are within the parameter variations shown to be satisfactory in the flutter and divergence investigations.
  - (vi) Any single failure or malfunction, or combinations thereof, in the flight control system considered under JAR 25.671, 25.672 and 25.1309, and any single failure in any flutter damper system. Investigation of forced structural vibration than flutter, resulting from failures, malfunctions, or adverse conditions in the automatic flight control system may be limited to airspeed up to  $V_C$ .

## 7.8 Identificazione dei parametri modali

### 7.8.1 Eccitazione armonica appropriata

La snellezza tipica delle strutture aeronautiche porta a caratteristiche modali che presentano modi poco smorzati con frequenze relativamente basse e vicini tra loro. Queste caratteristiche hanno portato allo sviluppo di particolari tecniche di prova ed analisi, in continua evoluzione, aventi lo scopo sia di limitare le imprecisioni di misura che arrivare a definire un modello lineare che meno si discosti dalla struttura reale. Uno dei primi e diffusi metodi per l'individuazione delle caratteristiche modali è la cosiddetta eccitazione armonica appropriata. Questo metodo deve la sua diffusione alle caratteristiche di semplicità nell'elaborazione dei dati. Infatti, una volta determinata una distribuzione di forze in grado di isolare un modo proprio, il calcolo dei parametri modali può essere svolto con algoritmi relativamente semplici che possono essere implementati su modesti dispositivi di calcolo. La semplicità di analisi richiede però un metodo di eccitazione dedicato, che vedremo, e che rende questo metodo, a differenza dei successivi, non praticabile nell'analisi del flutter. La tecnica di prova consiste nell'applicare, in determinati punti della struttura, delle forze puramente sinusoidali con fase relativa di 0 o  $\pi$  tali da eccitare la struttura stessa ad una frequenza di risonanza. L'individuazione delle risonanze viene preventivamente effettuata con una scansione in frequenza (in inglese "frequency sweep") lungo il campo di frequenze di interesse (generalmente sotto i 100 Hz) con una o più configurazioni standard di eccitazione, tali da evidenziare, anche se in modo non ottimale, tutti i modi principali. Nell'ipotesi che le strutture aeronautiche sono caratterizzate da modi di vibrare poco smorzati e in presenza di non linearità trascurabili, è possibile approssimare la struttura reale ad una lineare debolmente dissipativa, cioè un ad un sistema in cui le forze viscosse sono di almeno un ordine di grandezza inferiori rispetto a quelle inerziali ed elastiche. Con queste premesse si possono trascurare i coefficienti non diagonali della matrice di viscosità (ipotesi di Basile). Di conseguenza il comportamento modale, è descritto dal sistema:

$$[\bar{M}] \{\ddot{q}\} + [\bar{C}] \{\dot{q}\} + [\bar{K}] \{q\} = \{Q\}, \quad (7.64)$$

che come visto comporta l'ortogonalità dei modi propri. Per ogni modo proprio abbiamo poi nel dominio della frequenza:

$$-\hat{\omega}^2 M_i \bar{q}_i + j\hat{\omega} C_i \bar{q}_i + K_i \bar{q}_i = \bar{Q}_i, \quad (7.65)$$

che può essere scomposta nelle:

$$(-\hat{\omega}^2 M_i + K_i) \bar{q}_i = 0 \quad (7.66)$$

e

$$j\hat{\omega} C_i \bar{q}_i = \bar{Q}_i, \quad (7.67)$$

da cui si evince che, com'è noto, perché una struttura vibri nelle condizioni di risonanza, le risposte degli accelerometri in tutti i punti devono essere in quadratura con le forze di eccitazione. I parametri modali che saranno ricavati sono relativi alla struttura supposta con smorzamento nullo. Il termine di smorzamento è ricavato dall'uguaglianza delle forze di eccitazione con quelle dissipative. L'eccitazione armonica appropriata consiste quindi nel distribuire su tutta la struttura delle forze sinusoidali tali da vincere le forze dissipative presenti e verificare il criterio di fase. Si dimostra che se le ipotesi di linearità della struttura reale e di invarianza dei coefficienti sono verificate esiste una ripartizione opportuna dell'eccitazione su tutta la struttura che alla frequenza di risonanza fa vibrare tutti i punti della struttura con uno sfasamento di  $\pi/2$  rispetto alla sollecitazione. Motivi di carattere pratico, quali il numero dei sollecitatori o l'inaccessibilità di zone della struttura, fanno sì che la precedente affermazione non sia sempre verificata. Di seguito vengono introdotti due metodi per l'analisi dei dati ottenuti mediante questo metodo di sollecitazione

### Metodo delle forze in quadratura

Quello delle forze in quadratura è un metodo di calcolo che permette di determinare i parametri modali, in particolare il coefficiente di smorzamento, in modo abbastanza semplice e veloce. Inoltre, se il modo è ben isolato, serve a stabilire se lo smorzamento è di tipo viscoso o meno. Consideriamo per semplicità di scrittura un sistema ad un grado di libertà soggetto ad una forzante di tipo armonico:  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Fe^{j\omega t}$ . A meno di un transitorio iniziale, il moto sarà descritto dalla equazione  $x = Ae^{j\omega t}$ , per cui derivando e sostituendo nell'equazione precedente si ottiene:

$$\left(mj\omega + \frac{k}{j\omega}\right) A = F. \quad (7.68)$$

Se, in condizioni di risonanza, si sovrappone alla forzante un'altra forza  $F'$ , proporzionale alla prima in modulo, ma sfasata di  $\pi/2$ , la risposta subirà uno sfasamento dato da  $\tan \vartheta = F'/F$ . Lo sfasamento si tradurrà in una variazione della frequenza di risonanza. Indicando con  $\omega_0$  e  $\omega_1$  le frequenze di risonanza rispettivamente con  $F' = 0$  e  $F' \neq 0$ , l'equazione (7.68) potrà essere scomposta nelle:

$$cA = F$$

e

$$\left(mj\omega + \frac{k}{j\omega}\right) A = jF'.$$

Moltiplicando la seconda per  $j\omega$  e ponendo  $\omega_1/A = 1/|v|$  si ottiene

$$m\omega_1^2 - \left(k + \frac{F'}{|v|}\right) = 0.$$

Si ha quindi che il termine  $F'/|v|$  si comporta in pratica come una rigidità supplementare, che può essere positiva o negativa a seconda che lo sfasamento di  $F'$  rispetto a  $F$  sia  $\pm\pi/2$ . Le due equazioni, con o senza questo termine di rigidità aggiuntiva si possono scrivere come

$$\begin{aligned} m\omega_1^2 - k - \Delta k &= 0 \\ m\omega_0^2 - k &= 0 \end{aligned}$$



da cui:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta k}{|\omega_1^2 - \omega_0^2|} \\ &= \frac{\omega_1}{|\omega_1^2 - \omega_0^2|} \frac{F'}{|A|} \\ &= \frac{1}{|\omega_1^2 - \omega_0^2|} \frac{F'}{|v|}. \end{aligned}$$

Ricordando che  $c = 2\zeta m\omega_0$  e quindi  $F = |A| c = |A| 2\zeta m\omega_0$  da cui

$$2\zeta = \frac{F}{|A|} \frac{1}{m\omega_0},$$

ponendo  $\lambda = F'/F$  si ottiene

$$\zeta = \frac{1}{2\lambda} \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\omega_1\omega_0}.$$

Lo smorzamento sarà proporzionale alle velocità di deformazione (viscoso) se l'introduzione della forza in quadratura non farà variare apprezzabilmente l'ampiezza  $A$ . Dal punto vista operativo, la sovrapposizione della forza sfasata rispetto alla forzante è ottenuta miscelando, al segnale proveniente dal generatore di frequenza, un segnale, controllato in ampiezza, sfasato di  $\pm\pi/2$ .

### Metodo della potenza complessa

La procedura consiste in uno sweep in un piccolo intervallo nell'intorno della frequenza di risonanza, così che il modo rimanga isolato, misurando ad ogni frequenza l'andamento delle componenti, in fase e in quadratura, della risposta rispetto all'eccitazione. Consideriamo la potenza attiva  $W' = \sum_{i=1}^n F_i v'_i$  e reattiva  $W'' = \sum_{i=1}^n F_i v''_i$ , dove  $v'_i$  e  $v''_i$  sono rispettivamente le componenti in fase ed in quadratura delle velocità nei punti di applicazione delle forze  $F_i$ . L'equazione del moto nell'intorno della risonanza è:

$$\ddot{B}_k + 2C_k^k \dot{B}_k + \omega_k^2 B_k = A_k \cos(\Omega t).$$

Per  $\omega_k \cong \Omega$  si può ritenere che la separazione dei modi sia ancora buona, per cui l'integrale particolare è ancora  $B_k = R_k \sin(\Omega t)$ , da cui risulta  $A_k = 2C_k^k \omega_k R_k$ . Si ha inoltre un ritardo di fase per la velocità:

$$\Phi_k = \vartheta_k - \frac{\pi}{2} = \text{atan}\left(\frac{\Omega^2 - \omega_k^2}{2C_k^k \Omega}\right).$$

Su questa base le potenze attive e reattive si esprimono come

$$W' = A_k R_k \omega_k \cos(\Phi_k)$$

e

$$\begin{aligned} W'' &= A_k R_k \omega_k \sin(\Phi_k) \\ &= W' \tan(\Phi_k) \\ &= W' \frac{\Omega^2 - \omega_k^2}{2C_k^k \Omega}. \end{aligned}$$

In corrispondenza della frequenza di risonanza, cioè per  $\Omega = \omega_k$ , le  $v'$  raggiungeranno un massimo, mentre le  $v''$  andranno a zero. Per  $\Omega = \omega_k$  si ha  $W' = A_k R_k \omega_k = 2C_k^k (\omega_k R_k)^2$  ed inoltre  $dW''/d\Omega = W'/C_k^k$ , da cui:

$$R_k = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{dW''}{d\Omega}\right)_{\Omega=\omega_k}}}{\omega_k},$$

da cui segue:

$$C_k^k = \frac{(W')_{\Omega=\omega_k}}{\left(\frac{dW''}{d\Omega}\right)_{\Omega=\omega_k}}.$$

Con questo metodo si ottengono quindi i termini diagonali della matrice di smorzamento.

### 7.8.2 Eccitazione della struttura

Nell'eccitazione armonica appropriata la procedura di sollecitazione era parte integrante del metodo di analisi. Per i due ultimi sistemi visti, le caratteristiche essenziali sono che i modi siano singolarmente o complessivamente eccitati e che una quantità di energia significativa venga introdotta. In linea di massima esistono tre tipi di sollecitatori:

- ad impatto,
- meccanici (masse eccentriche rotanti),
- elettromagnetici (bobina mobile in un campo magnetico),
- elettroidraulici.

#### Eccitatori ad impatto

Il metodo abbastanza diffuso consiste nell'uso di un eccitatore ad impatto; di fatto si tratta di un martello. Il metodo è quindi semplice, ma richiede un notevole impegno nell'elaborazione dei dati. Il "martello" in generale ha diversi tipi d'estremità che servono ad estendere il campo di frequenze da eccitare e l'ampiezza della sollecitazione. Il martello contiene una cella di carico per la misura della forzante. In generale l'operatore, più che la forza, controlla la velocità con cui viene dato il colpo, quindi il miglior metodo per cambiare la forza è cambiare la massa della testa del martello. Il campo di frequenze che viene eccitato dipende principalmente dalla rigidità della superficie di contatto e dalla massa della testa: la risonanza del sistema (martello) è data da  $\omega_r = K_{stiff}/M_{head}$ . Oltre questo valore è difficile trasmettere energia nella struttura. Si può dimostrare inoltre (vedi figura) un legame tra lunghezza dell'impulso e campo di frequenze eccitato: un impulso più breve permette l'eccitazione di frequenze maggiori. Oltre all'analisi dei dati, un problema nell'uso di questo sistema risiede nella difficile ripetibilità l'eccitazione, più in direzione che in ampiezza; inoltre esiste la possibilità di esagerare nel carico e superare il limite di elasticità del materiale.

#### Eccitatori meccanici

Gli eccitatori meccanici sono costituiti da masse eccentriche in grado di generare la forza prescritta ad una frequenza variabile, ma con poca flessibilità di controllo. In particolare l'ampiezza della forza è limitata dalla massima eccentricità e, tra l'altro, non può essere variata durante il funzionamento. Questo tipo di eccitazione è poco adatto alle basse frequenze in quanto la forza dipende dal quadrato della velocità. In compenso questo sistema permette una valutazione accurata di ampiezza e fase della forzante.

#### Eccitatori elettromagnetici

Gli eccitatori più utilizzati sono forse gli oscillatori elettromeccanici o elettromagnetici. In essi il segnale d'ingresso viene trasformato in un campo magnetico alternato, in cui è piazzata una bobina che, a sua volta, è fissata sulla parte che trasmette la sollecitazione alla struttura. In questo caso la frequenza e l'ampiezza dell'eccitazione sono controllate indipendentemente, dando una maggior flessibilità operativa. Va comunque notato che l'impedenza elettrica di questi apparati varia con l'ampiezza dello spostamento della bobina mobile, quindi non è possibile dedurre la forza esercitata dalla misura della tensione applicata o della corrente che passa attraverso l'oscillatore perché quest'ultima in particolare darebbe

la forza su tutta la massa mobile e non solo sulla struttura. Se è vero che, in generale, questa osservazione può sembrare triviale, va considerato che, in prossimità della risonanza, la forza necessaria a far vibrare la struttura è molto piccola quindi l'errore che si commette può diventare significativo. Questo metodo quindi impone una misura diretta della forza applicata. In generale più grande è l'eccitatore più elevata è la forza che questo può trasmettere. Va notato però che incrementare le dimensioni comporta delle limitazioni nella frequenza massima. Infatti, quando la frequenza di vibrazione si avvicina e quindi oltrepassa la prima frequenza naturale dell'eccitatore, c'è una forte riduzione nella sollecitazione trasmessa. Questo quindi impone un limite naturale alla massima frequenza utilizzabile. In generale quanto questa frequenza è più bassa tanto maggiori sono le dimensioni dell'eccitatore.

### Eccitatori elettroidraulici

Il vantaggio maggiore che quest'ultimi sistemi hanno rispetto ai precedenti è la possibilità di applicare un carico statico insieme a quello dinamico. Questa peculiarità può essere estremamente utile quando si debba provare una struttura o un particolare il quale, oltre al normale ambiente vibratorio, sia soggetto a un carico statico che può cambiare la sua risposta dinamica e/o la sua geometria. Un ulteriore vantaggio è rappresentato dalle maggiori dimensioni che può avere la corsa dell'eccitatore permettendo così l'indagine su strutture caratterizzate da spostamenti di grande ampiezza. Gli eccitatori elettroidraulici sono più complessi e costosi di quelli elettromagnetici, a parità di prestazioni, pur essendo di dimensioni e peso più ridotti. Un limite di questi apparati è la banda di frequenza utile che raramente può superare un kHz, mentre la controparte elettromagnetica può operare tranquillamente nella regione da 30 a 50 kHz.

## 7.9 Richiami teorici

Questo paragrafo ha essenzialmente lo scopo di ricordare alcune relazioni fondamentali nonché definire una terminologia comune, in quanto quelle presentate sono sicuramente nozioni già acquisite. La rappresentazione modale è una tecnica secondo cui le proprietà dinamiche di una struttura vengono rappresentate attraverso i suoi modi (da cui modale) di vibrare. Viene quindi effettuato un processo di identificazione, in modo analitico o sperimentale, il cui risultato è costituito dal modello modale. Il modello è costituito da un insieme di  $N$  sistemi, ad un solo grado di libertà, tali per cui il comportamento dinamico della struttura è ottenuto dalla sovrapposizione lineare dei modi di vibrare degli  $N$  sistemi indipendenti. La creazione del modello modale si basa su tre assunzioni: a) la struttura è lineare; b) obbedisce al principio di reciprocità; ed è invariante nel tempo.

### 7.9.1 Sistema ad un grado di libertà

Il sistema ad un grado di libertà schematizzato in fig. 1XXX, è il classico sistema per cui si può prevedere una risposta del secondo ordine ed è identificato da una massa, una parte elastica ed uno smorzamento. L'equazione differenziale che regge il moto del sistema è quella solita: . Quest'equazione può essere risolta indifferentemente nel dominio del tempo, nel dominio della frequenza o secondo *Laplace*. Quando il sistema sia sollecitato da un impulso (Delta Function) la soluzione nel dominio del tempo diventa: ; dove è la frequenza naturale smorzata. L'equazione rappresenta una sinusoide, eventualmente, smorzata (fig.2).

Nel dominio della frequenza, la soluzione è rappresentata dalla funzione di risposta in frequenza (frequency response function — FRF) : rapporto tra la trasformata di Fourier della risposta e quella dell'eccitazione. con frequenza naturale e smorzamento. La FRF è una funzione complessa in e può essere rappresentata nelle tre forme definite:

CO-QUAD Qui presentato per il caso dell'accelerazione (fig. 3), rappresenta separatamente la parte immaginaria e la parte reale della FRF in funzione della frequenza. La risonanza può essere individuata nel picco della parte reale o dove la fase cambia segno.

BODE Come è noto, in questo caso La FRF è rappresentata attraverso il suo modulo e la sua ampiezza (fig.4) e nelle condizioni di risonanza avremo un picco nell'ampiezza e la fase subirà una variazione pari a .

NYQUIST Sul piano di Nyquist la parte immaginaria della FRF è presentata in funzione di quella reale. Il diagramma è completato da raggi rappresentanti condizioni di fase costanti.

Nel dominio di *Laplace*, la risposta all'impulso è rappresentata dalla funzione di trasferimento  $Z(s)$ , con  $s$  generalmente variabile complessa, rapporto tra la trasformata di *Laplace* della risposta e quella dell'eccitazione. Come è noto si passa dalla trasformata di *Laplace* a quella di *Fourier* sostituendo  $s$  con  $j\omega$ , cioè assumendo che la variabile dipendente abbia solo la parte complessa. e sono detti i poli, in questo caso complessi coniugati, di e possono essere così espressi: Esistono poi le seguenti relazioni: è generalmente espressa nella forma delle frazioni parziali: dove e sono chiamati 'residui'.

### 7.9.2 Sistema a più gradi di libertà

Il processo di modellazione attraverso cui dalla struttura reale discreta, si ottiene il modello modale consiste in una trasformazione del sistema da coordinate fisiche a coordinate generalizzate. In coordinate fisiche il sistema è costituito da un insieme di masse, molle e smorzatori, rappresentativi delle caratteristiche fisiche del sistema. Così ogni equazione del moto riferita ad esempio allo spostamento, della massa, contiene, non solo i termini relativi a, ma anche quelli relativi alle altre coordinate. In coordinate generalizzate, il sistema è costituito da un insieme di masse, molle e smorzatori rappresentativi, in questo caso, delle caratteristiche dinamiche di tutto il sistema, aventi cioè valori tali da caratterizzare il sistema come una combinazione lineare di  $N$  sistemi indipendenti ad un solo grado di libertà. In questo modo, ogni equazione del moto contiene solo i termini relativi alla coordinata generalizzata cui è riferita. In forma matriciale, le equazioni del moto in coordinate fisiche, hanno la seguente espressione: In coordinate modali tali equazioni assumono l'espressione: dove le matrici sono diagonali. Condizione sufficiente perché sia possibile la trasformazione, da coordinate fisiche a coordinate modali, è che esista un legame di proporzionalità tra lo smorzamento, la massa e il richiamo elastico: Il legame tra coordinate fisiche e quelle modali è dato dalla matrice, cioè: . La matrice di trasformazione si ottiene dalla soluzione (costituita da autovalori) del sistema in coordinate fisiche. La rappresentazione delle proprietà dinamiche della struttura fisica nel dominio di *Laplace*, attraverso gli autovalori, e la matrice modale, è data da un insieme di funzioni di trasferimento fra le coordinate fisiche e, aventi la seguente espressione: L'espressione è del tutto analoga a quella di un sistema ad un solo grado di libertà, con la differenza che, per un sistema ad  $N$  gradi di libertà, la funzione di trasferimento è data dalla sovrapposizione lineare delle funzioni di trasferimento di  $n$  sistemi lineari ad un grado di libertà, ciascuna dei quali è caratterizzata da .

MODI ACCOPPIATI Costanti fisiche spostamenti fisici fi forzanti fisiche  
Struttura discreta

MODI DISACCOPPIATI Costanti modali spostamenti modali forzanti modali

# Bibliografia

- [1] R. L. Bisplinghoff and H. Ashley, *Principles of Aeroelasticity*. New York: Wiley & sons, 1962.
- [2] L. Morino, L. Chen, and E. Suci, "Steady and Oscillatory Subsonic and Supersonic Aerodynamics Around Complex Configurations," *AIAA Journal*, vol. 13, no. 3, pp. 368–374, 1975.
- [3] E. H. Dowell, H. C. Jr, Curtiss, R. H. Scanlan, and F. Sisto, *A Modern Course in Aeroelasticity*. Alphen aan den Rijn: Sijthoff & Noordhoff, 1978.
- [4] G. Pasinetti and P. Mantegazza, "A single finite states modeling of the unsteady aerodynamic forces related to structural motions and gusts," *AIAA Journal*, vol. 37, pp. 604–612, May 1999.
- [5] R. L. Bielawa, *Rotary Wing Structural Dynamics and Aeroelasticity*. Washington, DC: AIAA, 1992.