

10. Stabilità fluidodinamica e turbolenza

10.1 Stabilità idrodinamica

In questa sezione viene data una breve introduzione allo studio della stabilità idrodinamica, viene accennato alla possibile inadeguatezza dell'analisi modale e viene introdotta l'analisi lineare non modale, in grado di spiegare la dinamica di alcune correnti che non viene colta dall'analisi modale.

La stabilità idrodinamica si occupa delle prime instabilità delle correnti laminari, di solito descritte con l'approccio deterministico della teoria dei sistemi dinamici. Le equazioni di Navier–Stokes dotate delle appropriate condizioni iniziali, condizioni al contorno (ed eventualmente condizioni di compatibilità) descrivono il moto di una corrente incomprimibile di un fluido newtoniano. Nella forma adimensionale delle equazioni,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0} , \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 , \end{cases} \quad (10.1)$$

il numero di Reynolds Re è un parametro che rappresenta il rapporto tra la “scala” degli effetti inerziali e quella degli effetti viscosi. Fin dai primi studi di Reynolds (1883) sulla transizione al regime turbolento nelle correnti in canali, questo numero adimensionale è stato riconosciuto come il principale parametro che determina il regime della corrente, laminare o turbolento.

La turbolenza è frequentemente considerata come l'ultimo problema non risolto della meccanica classica, e solo recentemente sono stati spiegati alcuni fenomeni riguardanti la stabilità idrodinamica. L'approccio tradizionale all'analisi di stabilità dei sistemi dinamici consiste nella ricerca dei punti di equilibrio, ossia le soluzioni stazionarie del sistema, e nella soluzione del problema agli autovalori del sistema linearizzato attorno all'equilibrio. L'approccio modale, “alla Lyapunov”, permette di ottenere alcune informazioni locali sulla stabilità di un equilibrio in seguito a condizioni iniziali perturbate. È noto che l'analisi modale delle correnti stazionarie, che rappresentano equilibri delle equazioni di Navier–Stokes, riesce a descrivere il comportamento di alcune correnti, come ad esempio

la convezione di Rayleigh–Benard, la corrente di Taylor–Couette tra due cilindri coassiali rotanti o la scia di Von Kármán dietro un cilindro, mentre non è in grado di descrivere le osservazioni sperimentali di altre correnti, come la corrente di Newton–Couette e la corrente di Poiseuille, sia in canali piani sia in canali cilindrici, e alcune correnti a getto.

10.1.1 Fallimento dell'analisi modale: correnti amplificatrici di disturbi

Per le *correnti aperte*, per le quali le particelle fluide rimangono nel dominio euleriano considerato in un intervallo di tempo finito, vengono definiti i concetti di *instabilità assoluta* e *instabilità convettiva*. Queste definizioni sono legate alla risposta impulsiva del sistema e determinano la classificazione storica delle correnti aperte in **oscillatori fluidodinamici** e **correnti amplificatrici del rumore**: gli oscillatori fluidodinamici mostrano una dinamica oscillatoria intrinseca (auto-sostenuta) a una precisa frequenza e sono poco influenzate da disturbi esterni; nelle correnti amplificatrici del rumore, invece, disturbi con un ampio spettro di frequenze mostrano un'enorme amplificazione mentre vengono trasportate lungo il dominio.

Per spiegare il fallimento dell'analisi modale, alcuni studiosi si sono concentrati sull'inadeguatezza dello studio di stabilità del sistema linearizzato e hanno incluso alcuni termini non lineari per lo studio di stabilità dei sistemi con la cosiddetta *teoria dell'instabilità secondaria*. Comunque, è emerso che la principale ragione della discrepanza tra i risultati dell'analisi modale e le osservazioni sperimentali riguardanti correnti amplificatrici di rumore, dominate dalla convezione, è dovuta alla **non-normalità** del sistema linearizzato di Navier–Stokes. In particolare, il termine convettivo rende il problema linearizzato di Navier–Stokes non-normale, cioè descritto da un operatore linearizzato (l'equivalente della matrice jacobiana) non simmetrico, che in generale ha modi (autofunzioni, autovettori) non ortogonali. I sistemi non-normali hanno una dinamica lineare attorno a un equilibrio stabile più complicata rispetto alla dinamica dei sistemi lineari normali, caratterizzati da autovettori ortogonali.

I sistemi non-normali possono ad esempio mostrare il fenomeno del **crescita transitoria**: partendo nelle vicinanze di un equilibrio stabile, lo stato del sistema può momentaneamente allontanarsi dall'equilibrio (ad esempio, misurando la distanza con una norma energetica) per poi tendere asintoticamente ad esso. Quando sono forzati, i sistemi non-normali possono mostrare una **pseudorisonanza**, una grande amplificazione di disturbi con frequenza lontana da quella del autovalore meno stabile, e una grande amplificazione di disturbi stocastici. A causa della loro natura non-normale, sia la risposta deterministica sia la risposta stocastica delle correnti amplificatrici di rumore attorno a equilibri stabili sono state studiate con analisi di risposta lineari non-modali, sia nel dominio del tempo sia nel dominio della frequenza. L'analisi della risposta di questi sistemi viene affrontato come un problema di ottimizzazione: nel dominio del tempo, tecniche classiche di algebra lineare vengono usate insieme a un'integrazione “avanti e indietro” nel tempo per risolvere il problema di ottimizzazione e ricavare la condizione iniziale ottimale, cioè quella associata alla massima crescita transitoria; nel dominio delle frequenze, tecniche basate su una decomposizione ai valori singolari (SVD) della trasformata di Fourier del *resolvent operator*¹ per determinare la perturbazione armonica maggiormente amplificata dal sistema

¹ La risposta armonica di un sistema lineare può essere studiata nel dominio delle frequenze. La trasformata di Fourier del sistema lineare $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{f}$ è $i\omega\underline{\hat{x}} = \underline{A}\underline{\hat{x}} + \underline{B}\underline{\hat{f}}$. Il *resolvent operator* $\mathcal{R}(\omega)$ del sistema nel dominio delle frequenze è l'operatore che lega la trasformata di Fourier $\underline{\hat{f}}(\omega)$

e la sua amplificazione; la risposta stocastica del sistema può infine essere determinata dalla risposta armonica del sistema in tutto lo spettro di frequenze.

Approccio variazionale e metodi dell'aggiunto

Analisi di sensitività

Tecniche di controllo

10.1.2 Sistemi dipendenti da un parametro e stabilità strutturale

Spesso la dinamica di un sistema è influenzata dal valore di alcuni suoi parametri caratteristici. Ad esempio la dinamica di una corrente incomprimibile di un fluido viscoso newtoniano dipende dal numero di Reynolds Re , come facilmente intuibile dalla forma adimensionale delle equazioni di Navier–Stokes. Tipicamente, il numero di Reynolds determina il regime di moto della corrente: qualitativamente, in alcune correnti quando il numero di Reynolds supera un valore critico la soluzione laminare stabile lascia spazio a un regime caotico, turbolento.

Lo studio della stabilità di un sistema dipendente dal valore di uno o più parametri è l'oggetto della **teoria delle biforcazioni**, che si occupa di studiare i cambiamenti qualitativi della dinamica di un sistema al variare dei suoi parametri. Di seguito, viene fornito lo studio di stabilità del sistema di Lorenz in funzione del valore di un suo parametro, come primo esempio di studio di stabilità di un sistema fluidodinamico ridotto: infatti il sistema tridimensionale di Lorenz può essere ricavato da un'approssimazione di Galerkin con base armonica della soluzione delle equazioni di Boussinesq per il problema della convezione di un fluido tra due superfici parallele. La stabilità del sistema viene studiata al variare di un parametro che è proporzionale al numero di Rayleigh Ra caratteristico del problema,

$$\rho \sim Ra = \frac{\alpha g \Delta T h^3}{\nu D} . \quad (10.3)$$

Prima di indagare il sistema di Lorenz vengono introdotti alcuni concetti utili per studiare la stabilità di un generico sistema dinamico,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 . \quad (10.4)$$

Alcuni di questi concetti non sono nuovi; tutte queste definizioni verranno usate (e risulteranno più chiare) nella sezione successiva dedicata al sistema di Lorenz.

Spazio delle fasi e stati di un sistema. Lo spazio delle fasi è uno spazio nel quale i punti rappresentano i possibili stati del sistema. Lo stato di un sistema dinamico è identificato dal valore delle sue variabili di stato, ovvero le variabili che lo descrivono in maniera esaustiva da poterne prevederne l'evoluzione.² L'evoluzione libera di un sistema dinamico viene descritta dalle traiettorie nel suo spazio delle fasi.

Equilibri e cicli limite. Un equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$ del sistema è una soluzione stazionaria delle equazioni del sistema dinamico, cioè

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) . \quad (10.5)$$

della forzante $\underline{f}(t)$ alla trasformata di Fourier $\underline{\hat{x}}(\omega)$ dello stato (o dell'uscita) $\underline{x}(t)$ del sistema,

$$\underline{\hat{x}}(\omega) = [-i\omega \underline{I} + \underline{A}]^{-1} \underline{B} \underline{\hat{f}}(\omega) = \mathcal{R}(\omega) \underline{\hat{f}}(\omega) \quad \rightarrow \quad \mathcal{R}(\omega) = [-i\omega \underline{I} + \underline{A}]^{-1} . \quad (10.2)$$

²Conoscendo lo stato del sistema **con esattezza** è possibile descrivere l'evoluzione libera del sistema, in assenza di perturbazioni e forze esterne. In fondo a questa sezione, sarà più chiara la necessità di conoscere *con esattezza* lo stato iniziale del sistema, per prevederne l'evoluzione.

Un ciclo limite di periodo T è una traiettoria periodica del sistema, tale per cui

$$\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t) \quad , \quad \forall t \quad , \quad (10.6)$$

rappresentata nello spazio delle fasi da un'orbita chiusa (e isolata).

Stabilità alla Lyapunov. Lo studio di stabilità alla Lyapunov riguarda l'evoluzione locale del sistema dinamico con **condizioni iniziali perturbate**. Qualitativamente, un punto di equilibrio è stabile se, partendo da uno stato “vicino” all'equilibrio, lo stato del sistema rimane per sempre “vicino” all'equilibrio. Inoltre, l'equilibrio è asintoticamente stabile se lo stato converge verso il punto di equilibrio, $\mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$ per $t \rightarrow \infty$.

La stabilità di Lyapunov di un equilibrio può essere indagata attraverso l'analisi degli autovalori del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio.

Stabilità strutturale. La stabilità strutturale considera l'evoluzione del sistema in seguito a perturbazioni del sistema stesso. Un sistema dinamico è strutturalmente stabile se le traiettorie nel suo spazio delle fasi non cambiano qualitativamente: ad esempio, in un sistema strutturalmente stabile alla perturbazione di un parametro, non cambiano il numero dei punti di equilibrio e cicli limite.

Sistema dinamico di Lorenz

In questa sezione si descrive, senza nessuna pretesa di completezza, lo studio di stabilità del sistema dinamico di Lorenz,

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} = -Y + \rho X - XZ \\ \dot{Z} = -\beta Z + XY \end{cases} \quad (10.7)$$

come primo esempio di studio di stabilità di un sistema fluidodinamico. Si studia la stabilità del sistema di Lorenz al variare del parametro ρ , mantenendo costante il valore dei parametri σ e β . Lorenz usò come valori $\sigma = 10$ e $\beta = 8/3$. Il numero di Prandtl assume un valore paragonabile a quello dell'acqua alla temperatura di 20°C , che vale circa $Pr \approx 7$. Il numero di Prandtl per l'aria e altri gas vale circa 0.7. Il valore $\beta = 8/3$ corrisponde a un numero d'onda fondamentale in direzione x uguale a $\frac{k}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{\beta} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.3536$.

Punti di equilibrio

I punti di equilibrio del sistema di Lorenz soddisfano le equazioni stazionarie

$$\begin{cases} 0 = -\sigma X + \sigma Y & \rightarrow Y = X \\ 0 = -Y + \rho X - XZ & \searrow \rightarrow X[X^2 - (\rho - 1)] = 0 \\ 0 = -\beta Z + XY & \rightarrow X^2 = \beta Z \quad \nearrow \end{cases} \quad (10.8)$$

L'equazione $X(X^2 - \rho) = 0$ ha una sola soluzione reale se $\rho < 1$, tre soluzioni per $\rho \geq 1$. Quindi per valori di $\rho < 1$ esiste un unico punto di equilibrio,

$$\mathbf{E1}: (\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{Z}_1) = (0, 0, 0) \quad . \quad (10.9)$$

Per valori di $\rho \geq 1$ esistono tre punti di equilibrio,

$$\begin{aligned} \mathbf{E1}: (\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{Z}_1) &= (0, 0, 0) \quad , \\ \mathbf{E2}: (\bar{X}_2, \bar{Y}_2, \bar{Z}_2) &= (-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1) \quad , \\ \mathbf{E3}: (\bar{X}_3, \bar{Y}_3, \bar{Z}_3) &= (+\sqrt{\beta(\rho - 1)}, +\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1) \quad . \end{aligned} \quad (10.10)$$

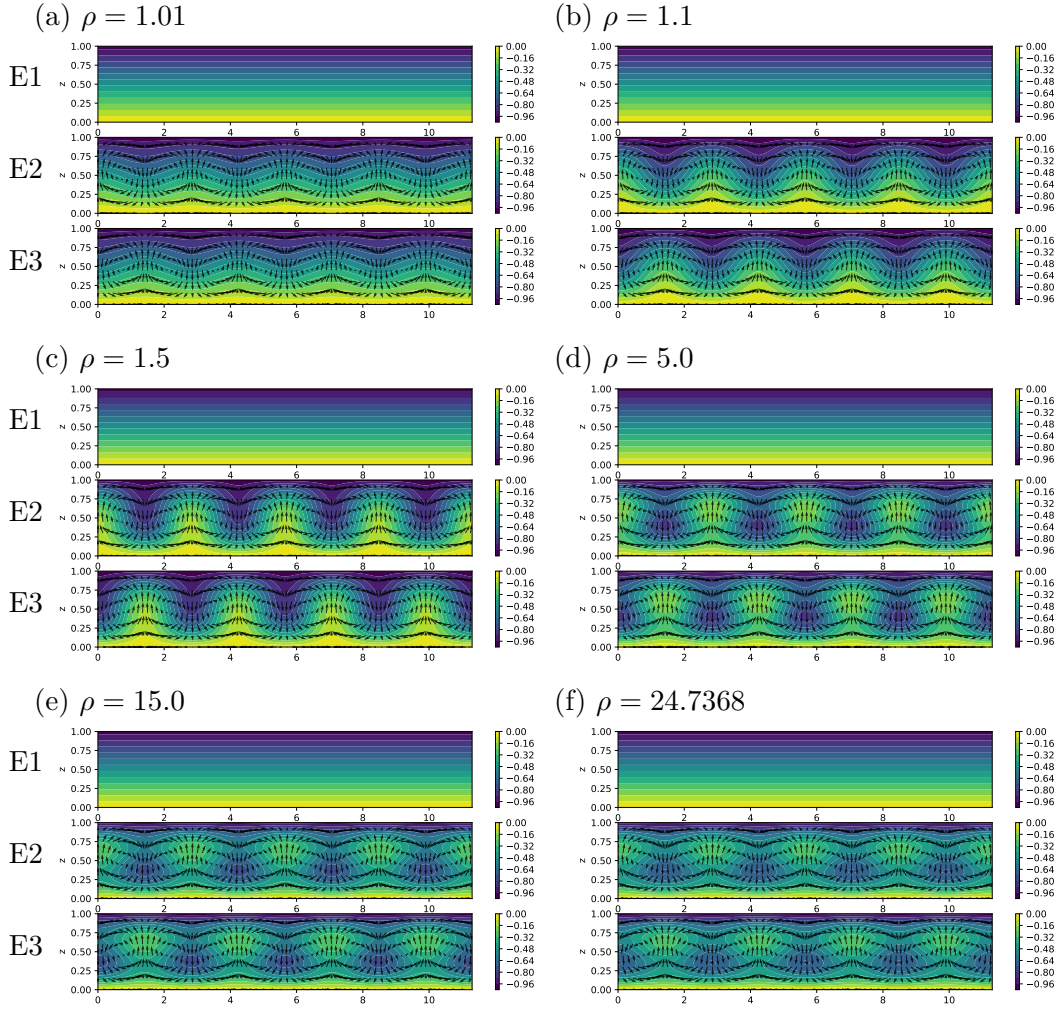


Figura 10.1: Equilibri del sistema di Lorenz per diversi valori del parametro $\rho > 1$. Il campo vettoriale della velocità è sovrapposto al campo di temperatura “scalato” $\tilde{T} = \frac{T(x,z) - \tilde{T}_w}{\delta T}$, i cui valori al contorno sono $\tilde{T}_w = 0$ sulla superficie inferiore a $z = 0$ e $\tilde{T}_c = -1$ sulla superficie superiore a $z = 1$.

I campi di velocità e temperatura degli equilibri del sistema fisico corrispondenti ai punti di equilibrio del sistema di Lorenz sono raffigurati in figura (10.1). L’equilibrio **E1** rappresenta la soluzione statica, il cui il campo di velocità è nullo: non sono presenti moti convettivi e la trasmissione della temperatura avviene solo per conduzione (diffusione). Questo equilibrio è stabile per valori del parametro $\rho < 1$. Per valori $\rho > 1$ questo equilibrio diventa instabile e nascono i due equilibri “simmetrici” **E2,3** che rappresentano dei moti convettivi stabili, traslati tra di loro di metà della lunghezza d’onda $\frac{k}{2}$: i moti convettivi tendono a portare il fluido caldo dalla parete inferiore (a temperatura maggiore, per $\rho > 0$, corrispondente a $Ra > 0$, e quindi $\Delta T = T_w - T_c > 0$) verso la parete superiore. La nascita di due equilibri stabili in corrispondenza del un cambio di stabilità di un equilibrio esistente è caratteristico dei sistemi dotati di simmetria.³ Questo cambiamento qualitativo nel piano delle fasi,

³ Un esempio strutturale è quello della trave caricata di punta a compressione. Per valori limitati del carico esiste un’unica soluzione, stabile, rappresentata dalla trave senza freccia. Quando il carico di compressione supera il valore critico, questa soluzione diventa instabile. Nel problema piano, nascono due configurazioni di equilibrio stabili del sistema strutturale: la trave può inflettersi (in maniera indifferente in

corrisponde alla *biforcazione pitchfork* che verrà descritta, almeno brevemente, nelle sezioni successive.

I moti convettivi rappresentati dagli equilibri **E2,3** contribuiscono al mescolamento del fluido e a una maggiore trasmissione del calore tra le due superfici. Calcolando il flusso di calore trasmesso attraverso le superfici che delimitano il dominio in $z = 0$ e $z = 1$, si può verificare che la convezione è un fenomeno fisico più efficiente per la trasmissione del calore nei fluidi rispetto alla conduzione. Per esempio, il problema della trasmissione del calore tra due superfici parallele separate da un fluido si trova nella costruzione di infissi con **doppi vetri**: lo scopo dei doppi vetri separati da una sottile intercapedine d'aria è quello di sfruttare l'aria (ferma!) come ottimo isolante termico. L'intercapedine tra i due vetri deve essere sufficiente piccola da impedire la nascita dei moti convettivi, che ridurrebbero l'efficienza dell'infisso (e l'efficienza energetica della casa). Le soluzioni convettive nel problema di Lorenz nascono quando il parametro ρ supera il valore critico $\rho_{cr} = 1$. Il parametro ρ è proporzionale al numero di Rayleigh,

$$\rho \sim Ra = \frac{\alpha g \Delta T h^3}{\nu D}, \quad (10.11)$$

e quindi proporzionale al cubo della distanza tra le due superfici, $\rho \sim h^3$. Si ricava la stessa conclusione utilizzata nella costruzione dei doppi vetri: per distanze h tra le due superfici limitate, il parametro ρ è inferiore del valore critico e l'unica soluzione stabile esistente è quella isolante di fluido in quiete.

Prima di studiare la stabilità locale “alla Lyapunov” dei punti di equilibrio, riprendendo la definizione di *stabilità strutturale* si scopre che il sistema di Lorenz non è strutturalmente stabile a perturbazioni del valore di ρ , quando $\rho = 1$: infatti per $\rho < 1$ esiste un solo punto di equilibrio, per $\rho > 1$ esistono tre punti di equilibrio e di conseguenza le traiettorie nel piano delle fasi subiscono un cambiamento qualitativo.

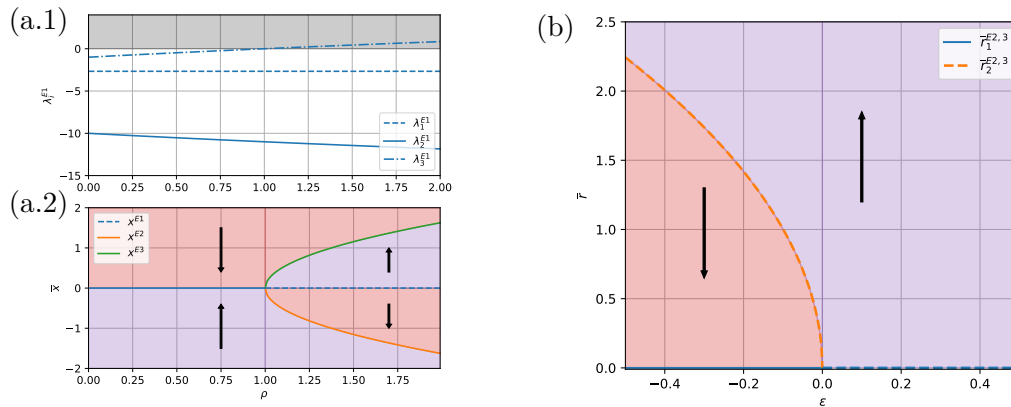


Figura 10.2: Diagrammi di biforcazione. (a) Biforcazione pitchfork per $\rho = 1$: (a.1) luogo delle radici dell'equilibrio **E1** e (a.2) diagramma di biforcazione. Per $\rho = 1$ l'equilibrio **E1** diventa instabile e nascono i due equilibri stabili **E2,3**. (b) Biforcazione di Hopf degli equilibri **E2,2**: diagramma di biforcazione, rappresentato utilizzando la forma normale. Per $\epsilon = 0$, $\rho = 24.7368$, il ciclo limite instabile collassa sull'equilibrio stabile, che diventa instabile.

Stabilità dell'equilibrio E1

Si studia la stabilità “alla Lyapunov” dell'equilibrio **E1**: $(0, 0, 0)$. Linearizzando il sistema non lineare di Lorenz attorno all'equilibrio **E1**, si ottiene il sistema linearizzato

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}, \quad \delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}|_{\mathbf{E1}} \delta\mathbf{x} \quad (10.12)$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}) = -(\beta + \lambda)[(\sigma + \lambda)(1 + \lambda) - \sigma\rho] = \\ &= -(\beta + \lambda)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - \rho)] . \end{aligned} \quad (10.13)$$

Gli autovalori del sistema linearizzato attorno al primo equilibrio sono quindi

$$\lambda_1^{E1} = -\beta, \quad \lambda_{2,3}^{E1} = -\frac{\sigma + 1}{2} \mp \frac{\sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - \rho)}}{2}. \quad (10.14)$$

Per valori positivi dei parametri, tutti gli autovalori sono reali. Gli autovalori λ_1^{E1} e λ_2^{E1} sono negativi per ogni valore di ρ , mentre l'autovalore λ_3^{E1} cambia segno per $\rho = 1$, come mostrato in figura (10.2)(a.1). L'analisi lineare di stabilità permette di concludere che l'equilibrio **E1** è linearmente stabile per $\rho < 1$ e instabile per $\rho > 1$, mentre non permette di affermare nulla sul caso $\rho = 1$.

Stabilità degli equilibri E2, E3

Per valori di $\rho \geq 1$ esistono i due equilibri **E2**, **E3**. Si studia la loro stabilità “alla Lyapunov” tramite lo studio degli autovalori del sistema linearizzato attorno ai punti di equilibrio,

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)} & \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)} & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}, \quad \delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}|_{\mathbf{E2,3}} \delta\mathbf{x}. \quad (10.15)$$

Si può dimostrare (con il criterio di Routh-Hurwitz analiticamente, o calcolandone numericamente il valore) che i due punti di equilibrio sono stabili se $\rho < \frac{\sigma(\sigma+\beta+3)}{\sigma-1-\beta} \approx 24.7368$, utilizzando i valori $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$.

Biforcazioni, cicli limite e attrattori strani

L'analisi degli autovalori del sistema linearizzato attorno ai punti di equilibrio permette di determinarne le caratteristiche locali quando gli autovalori hanno parte reale diversa da zero. In corrispondenza del cambio di stabilità di un punto di equilibrio e/o della comparsa/scomparsa di punti di equilibrio (ma non solo!), le traiettorie nello spazio delle fasi del sistema subiscono un cambiamento qualitativo: il sistema non è strutturalmente stabile e si verifica una **biforcazione**.

Per studiare la stabilità locale di un equilibrio in presenza di autovalori a parte reale nulla è necessario costruire un'approssimazione non lineare del sistema. Si considera un punto di equilibrio per il quale il sistema linearizzato non ha autovalori instabili, ha N_s autovalori stabili e N_c autovalori a parte reale nulla e si vuole determinare l'evoluzione del sistema nelle vicinanze del punto di equilibrio. Si può dimostrare che la dinamica del sistema $N = N_s + N_c$ -dimensionale si riduce velocemente alla dinamica di un sistema N_c dimensionale: le N_s dinamiche asintoticamente stabili associate agli autovalori con parte reale negativa tendono asintoticamente ad annullarsi nell'intorno dell'equilibrio, mentre rimangono solo le dinamiche associate alle N_c dinamiche marginalmente stabili.

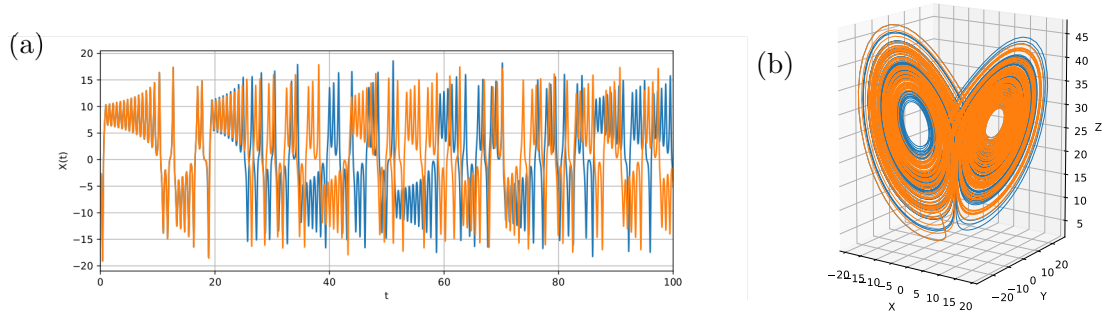


Figura 10.3: Dinamica caotica del sistema di Lorenz per $\rho = 24.74$: evoluzione del sistema con condizioni iniziali $\mathbf{x}_0^{(1)} = (-10, 10, 1)$, in blu, e $\mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(1)} + 1.0 \cdot 10^{-9}$, in arancione. (a) Evoluzione temporale della variabile $X(t)$: partendo da due condizioni iniziali “vicine”, le due traiettorie del sistema si discostano in maniera “non banale”. Il sistema dimostra un’evoluzione non periodica, estremamente sensibile alle condizioni iniziali e quindi caotica. (b) Attrattore di Lorenz nello spazio delle fasi: le traiettorie nello spazio delle fasi rivelano la presenza di un attrattore, “nelle vicinanze” del quale si svolge la dinamica asintotica del sistema.

Si può usare un’espansione polinomiale per approssimare il sistema non lineare originale e costruire la **varietà centrale**, cioè la regione dello spazio delle fasi nella quale si svolgono le dinamiche marginalmente stabili.

Ad esempio, quando $\rho = 1$ il sistema di Lorenz nell’intorno dell’equilibrio **E1** (e dei nascenti equilibri **E2,3**) può essere ricondotto alla dinamica del sistema monodimensionale

$$\dot{a}(t) = f(a(t)) = a(t)[\alpha\varepsilon - \beta a(t)^2] \quad , \quad \text{con } \varepsilon := \rho - 1 \quad , \quad (10.16)$$

con $\alpha \approx 0.909$ e $\beta \approx 0.170$. Questo sistema coincide alla **forma normale** della biforcazione, cioè il sistema più semplice in grado di descrivere il cambiamento qualitativo del sistema. Lo studio della forma normale della biforcazione rivela l’esistenza di un unico equilibrio stabile $\bar{a}_1 = 0.0$ per $\varepsilon \leq 0$, cioè $\rho \leq 1$. Per $\rho > 1$ l’equilibrio \bar{a}_1 diventa instabile e nascono due equilibri stabili $\bar{a}_{2,3} = \mp \sqrt{\alpha\varepsilon/\beta}$. L’equazione (10.16) rappresenta la forma normale di una *biforcazione pitchfork*. Poiché $\beta > 0$, la biforcazione si definisce *supercritica*.

Analogamente, quando $\rho \approx 24.7368$ i due equilibri **E2,3** cambiano stabilità: una coppia di autovalori complessi coniugati attraversa l’asse immaginario e la loro parte reale diventa positiva. Questo tipo di instabilità strutturale viene definita *biforcazione di Hopf*: cambia la stabilità del punto di equilibrio considerato e nasce/sparisce un ciclo limite nel suo intorno (il ciclo limite nasce da o si riduce al punto di equilibrio). L’approssimazione sulla varietà centrale del sistema attorno a uno dei due equilibri conduce al sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = \alpha_r r \varepsilon - \beta_r r^3 \\ \dot{\theta}(t) = \omega + \alpha_i \varepsilon + \beta_i r^2 \end{cases} \quad , \quad \text{con } \varepsilon := \rho - 24.7368 \quad , \quad (10.17)$$

dove è stata utilizzata la rappresentazione polare complessa $a(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ della variabile $a(t)$ che descrive la dinamica del sistema ridotta alla varietà centrale. Il parametro $\omega = 9.6245$ coincide con la parte immaginaria degli autovalori marginalmente stabili e gli altri parametri valgono:

$$\begin{aligned} \alpha_r &= 0.0302 & , & & \beta_r &= -0.003 \\ \alpha_i &= 0.1815 & , & & \beta_i &= -0.028 \quad . \end{aligned} \quad (10.18)$$

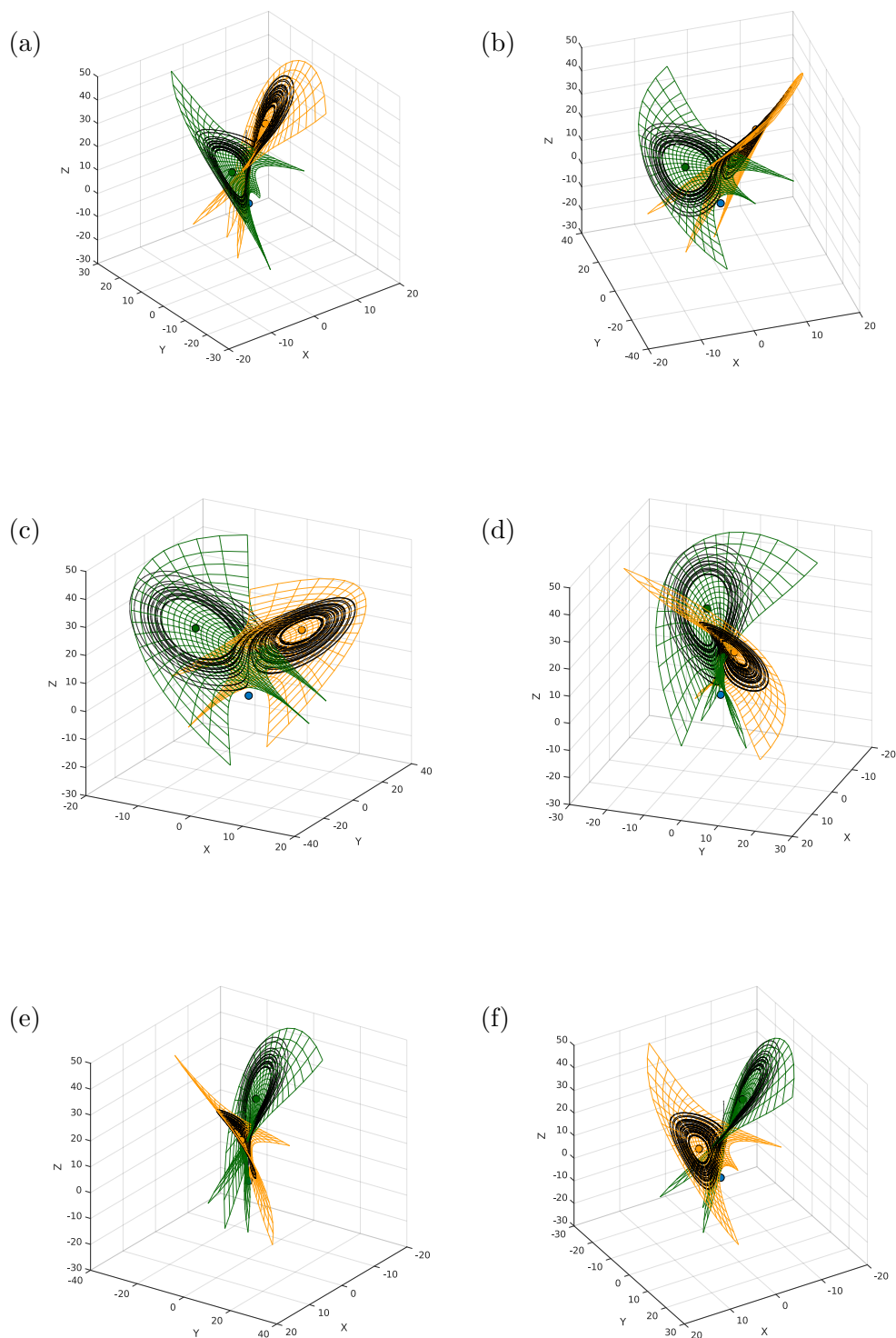


Figura 10.4: Evoluzione del sistema di Lorenz per $\rho = 24.7368$ nel piano delle fasi. Dinamica caotica, equilibri (**E1** in azzurro, **E2** in arancione e **E3** in verde) e varietà centrali dei due equilibri marginalmente stabili **E2,3**. La dinamica asintotica del sistema caotica del sistema alterna in maniera irregolare delle oscillazioni attorno ai due equilibri instabili sulle “nelle vicinanze” delle rispettive varietà centrali.

La prima equazione delle (10.17) è identica all'equazione che descrive la biforcazione pitchfork. In questo caso, però, il coefficiente β_r è minore di zero. Questo tipo di biforcazione si definisce *subcritica*. Si può facilmente dimostrare che per $\varepsilon < 0$ esistono due (il raggio r di una rappresentazione polare deve essere ≥ 0) equilibri

$$\bar{\rho}_1 = 0 \quad , \quad \bar{\rho}_2 = \sqrt{-\alpha_r \varepsilon / \beta_r} . \quad (10.19)$$

Il primo equilibrio dell'equazione in r corrisponde a un punto fisso, poichè il raggio è nullo. Il secondo equilibrio corrisponde al raggio $\bar{\rho}_2$ del ciclo limite esistente per $\varepsilon < 0$. Si dimostra quindi che un ciclo limite instabile coesiste con ognuno dei due punti di equilibri stabili **E2,3** per $\varepsilon < 0$ (cioè $\rho < 24.7368$), almeno in un intervallo finito di valori di ρ . Quando $\varepsilon = 0$ (cioè $\rho < 24.7368$), il ciclo limite instabile si riduce al punto di equilibrio. Per $\varepsilon > 0$ il punto di equilibrio diventa instabile, mentre scompare il ciclo limite.

Rimangono aperte alcune questioni: è possibile descrivere i cicli limite esistenti per (alcuni) valori del parametro $\rho < 24.7368$? Qual è l'evoluzione del sistema per valori di $\rho > 24.7368$? Ha senso utilizzare il modello di Lorenz, un brutale troncamento di un sistema continuo che dà origine a un sistema tridimensionale, per descrivere l'evoluzione del sistema fisico per valori crescenti del numero di Rayleigh Ra , e quindi del parametro ρ ?

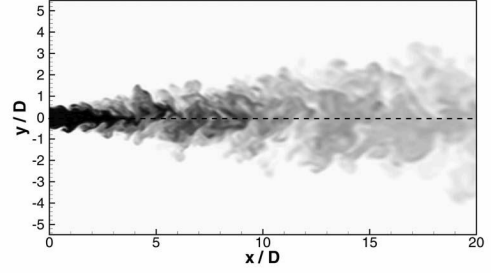
Partendo dall'espressione approssimata del ciclo limite ottenuta dalla forma normale della biforcazione di Hopf per $\rho \lesssim 24.7368$ è possibile calcolare la forma del ciclo limite per valori inferiori del parametro, tramite tecniche di **continuazione**: negli algoritmi di continuazione la soluzione di un problema, nota per un valore del parametro, viene utilizzata per stimare la guess iniziale dello stesso problema per un valore diverso del parametro. In particolare, per identificare la traiettoria periodica corrispondente a un ciclo limite si può utilizzare una tecnica di **bilanciamento armonico**: la traiettoria periodica viene scritta come serie di Fourier, della quale è necessario determinare i coefficienti.

Per valori di $\rho > 24.7368$ non esistono punti di equilibrio stabili e non esistono cicli limite stabili. La dinamica del sistema rimane confinata in una regione limitata dello spazio delle fasi, senza divergere. L'evoluzione del sistema rappresentata in figura (10.3) dimostra l'elevata sensibilità della soluzione alle condizioni iniziali e l'assenza di equilibri o dinamiche periodiche stabili, caratteristici di un **regime caotico**. L'evoluzione di lungo tempo del sistema avviene “nelle vicinanze” dell'attrattore di Lorenz, del quale si può intuire la forma grazie alle traiettorie rappresentate in figura (10.3)(b). La figura (10.4) rappresenta la traiettoria del sistema di Lorenz e le *varietà centrali* dei due equilibri **E2,3** marginalmente stabili per $\rho = 24.7368$. Qualitativamente, lo stato del sistema viene attratto su queste superfici, lungo le direzioni stabili. Su queste superfici poi, si può osservare la dinamica marginalmente stabile (di dimensione ridotta: per il sistema di Lorenz, di dimensione 2, invece della dimensione 3 del sistema completo) del sistema: lo stato del sistema inizialmente oscilla attorno all'equilibrio **E2** (ad esempio), prima di essere attratta in maniera “difficilmente prevedibile” dalla varietà centrale dell'equilibrio **E3** e iniziare ad oscillare attorno a quest'ultimo equilibrio.

L'approssimazione di Lorenz di dimensioni ridotte del sistema fisico continuo (e quindi di dimensione infinita) perde significato all'aumentare del numero di Rayleigh: all'aumentare del numero di Rayleigh infatti si attivano delle dinamiche più complesse, di dimensione maggiore, non descrivibili a un sistema tridimensionale.

Esercizio 10.1 — Getto piano turbolento. Calcolare la soluzione in similitudine per un getto turbolento piano.

Concetti. Equazioni mediate di Reynolds. Equazioni di Prandtl per lo strato limite turbolento. Correnti debolmente non parallele. Soluzioni in similitudine. Entrainment.



Soluzione

Si descrive schematicamente il procedimento:

- Il problema turbolento viene descritto dalle equazioni mediate di Reynolds.
- I problemi di "strato limite" possono essere ben descritti dalle equazioni di Prandtl, ricavabili grazie a ragionamenti sugli ordini di grandezza, analoghe alle equazioni di Prandtl laminari.
- Viene introdotta una variabile di similitudine η ; si ipotizza la forma della soluzione: $u = U_0 f$, $\langle u'v' \rangle = U_0^2 g$
- Vengono calcolati i flussi integrali di massa, quantità di moto ed energia cinetica.
- Si inserisce l'ansatz sulla soluzione nelle equazioni di Prandtl per ottenere un'equazione per i profili similari di velocità f e degli sforzi turbolenti g . Si ricava l'andamento dello spessore dello $\delta(x)$ "strato limite", necessario affinché esista una soluzione simile.
- Per ottenere una equazione chiusa, si introduce l'ipotesi di Boussinesq, che lega f e g . Infine si risolve, con le opportune condizioni al contorno, l'equazione in f .

Svolgimento.

- Il punto di partenza del problema sono le equazioni mediate di Reynolds (RANS)

$$\begin{cases} (U \cdot \nabla)U + \nabla \cdot \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle - \frac{1}{Re} \nabla^2 U + \nabla P = 0 \\ \nabla \cdot U = 0 \end{cases} \quad (10.20)$$

ottenibili inserendo la decomposizione di Reynolds delle variabili in moto medio e fluttuazione $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$ all'interno delle equazioni di Navier-Stokes.

Se si considera un problema bidimensionale (per le grandezze medie), le RANS in coordinate cartesiane sono

$$\begin{cases} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'u' \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v'v' \rangle}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (10.21)$$

- Per problemi "di strato limite" le equazioni RANS possono essere semplificate, considerando gli ordini di grandezza delle coordinate e dei campi che compaiono all'interno delle equazioni. Per la regione "interna" (la lunghezza caratteristica in y è "molto minore" di quella in x), assumendo che la pressione "esterna" sia costante e

trascurando i termini di fluttuazione con contributo minore

$$\begin{cases} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (10.22)$$

Da queste prime semplificazioni, a differenza delle equazioni di strato limite per il caso laminare, la pressione non è funzione solo della coordinata x , ma $P + \langle v'^2 \rangle$ è funzione solo di x . Con ulteriori considerazioni sui termini di fluttuazione nel caso di getti, è possibile scrivere in prima approssimazione

$$\begin{cases} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \\ P(x) + \langle v'^2 \rangle = P_0(x) \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (10.23)$$

con $P_0(x)$ la pressione del problema esterno. Le fluttuazioni nel problema esterno sono considerate nulle.

Prima di procedere con la ricerca di soluzioni in similitudine, viene fatta l'ultima ipotesi: consideriamo numeri di Reynolds sufficientemente alti da rendere trascurabile l'effetto degli sforzi viscosi del moto medio rispetto agli effetti delle fluttuazioni.

$$\begin{cases} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} = 0 \\ P(x) + \langle v'^2 \rangle = P_0(x) \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (10.24)$$

- Partendo dalle equazioni di Prandtl turbolente semplificate, si introduce la variabile di similitudine

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)} \quad (10.25)$$

con $\delta(x)$ una grandezza caratteristica (convenzionale) della sezione del getto; si ipotizzano poi il profilo di velocità della componente x della velocità e del termine di fluttuazione $\langle u'v' \rangle$:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= U_0 f(\eta(x, y)) \\ \langle u'v' \rangle(x, y) &= U_0^2 g(\eta(x, y)) \end{aligned} \quad (10.26)$$

Si calcola la derivata parziale di U in x , che verrà usata in seguito:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= U'_0(x) f(\eta) - U_0(x) \frac{y \delta'(x)}{\delta^2(x)} f'(\eta) = \\ &= U'_0(x) f(\eta) - U_0(x) \frac{\delta'(x) \eta}{\delta(x)} f'(\eta) \end{aligned} \quad (10.27)$$

Tramite il vincolo di incomprimibilità si ricava la forma della componente V della velocità. Nel trasformare l'integrale su y in un integrale su η , si usa $y = \delta(x)\eta$,

$$d\xi = \delta(x)d\chi.$$

$$\begin{aligned} V(x, y) - \underbrace{V(x, 0)}_{=0} &= \int_{\xi=0}^y \frac{\partial V(x, \xi)}{\partial y} d\xi = - \int_{\xi=0}^y \frac{\partial U(x, \xi)}{\partial x} = \\ &= - \int_{\chi=0}^{\eta} \left[U'_0(x)f(\chi) - U_0(x) \frac{\delta'(x)\chi}{\delta(x)} f'(\chi) \right] \delta(x)d\chi = \quad (10.28) \\ &= - \int_{\chi=0}^{\eta} [\delta(x)U'_0(x)f(\chi) - U_0(x)\delta'(x)\chi f'(\chi)] d\chi \end{aligned}$$

- Prima di scrivere le equazioni di Prandtl per le variabili adimensionali, conviene calcolare il flusso di quantità di moto in direzione x attraverso dei piani verticali. Questo consente di trovare una relazione tra U_0 e δ da usare in seguito.

$$Q = \rho \int_{y=-\infty}^{\infty} U^2(x, y) dy \quad (10.29)$$

Si calcola la derivata in direzione x di Q , usando le equazione di Prandtl della componente x della quantità di moto:

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d}{dx} \rho \int_{y=-\infty}^{\infty} U^2(x, y) dy = \rho \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{\partial U^2}{\partial x} dy = -\rho \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} dy = 0 \quad (10.30)$$

se si considera un fluido in quiete all'infinito. Utilizzando i profili in similitudine

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dQ}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{y=-\infty}^{\infty} U^2 dy = \\ &= \frac{d}{dx} \left(U_0^2(x)\delta(x) \right) \int_{\eta=-\infty}^{\infty} f^2(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (10.31)$$

Deve quindi essere $\frac{d}{dx}(U_0^2\delta) = 0$, cioè

$$2U_0U'_0\delta + U_0^2\delta' = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \frac{U'_0}{U_0} = -\frac{1}{2}\delta' \quad (10.32)$$

- Inseriamo ora la forma di U , V , $\langle u'v' \rangle$ espresse in termini della variabile η e delle funzioni di similitudine nella componente x dell'equazione della quantità di moto.

$$U_0 f \left[U'_0 f - U_0 \frac{\delta'}{\delta} \eta f' \right] - \left[\int_{\chi=0}^{\eta} [\delta(x)U'_0(x)f(\chi) - U_0(x)\delta'(x)\chi f'(\chi)] d\chi \right] \frac{U_0}{\delta} f' + \frac{U_0^2}{\delta} g' = 0 \quad (10.33)$$

Moltiplicando per $\frac{\delta}{U_0^2}$ e integrando per parti l'integrale che contiene $\eta f'(\eta)$

$$\delta \frac{U'_0}{U_0} f^2 - \delta' \eta f f' - \delta \frac{U'_0}{U_0} f' \int_0^{\eta} f d\chi + \delta' f'(\eta) [\chi f(\chi)] \Big|_0^{\eta} - \delta' f(\eta) \int_0^{\eta} f(\chi) d\chi + g'(\eta) = 0 \quad (10.34)$$

Usando la relazione tra U_0 e δ trovata al punto precedente è possibile scrivere l'equazione come

$$\frac{1}{2}\delta'(x) \left[f^2(\eta) + f'(\eta) \int_{\chi=0}^{\eta} f(\chi) d\chi \right] = g'(\eta) \quad (10.35)$$

Affinchè sia possibile trovare una soluzione in similitudine, non ci possono essere coefficienti dipendenti da x o y se non tramite η . Deve quindi essere:

$$\delta'(x) = S \quad \Rightarrow \quad \delta(x) = S(x - x_0) \quad (10.36)$$

Seguendo questo procedimento è stato possibile ottenere una stima dell'evoluzione in x della grandezza trasversale caratteristica $\delta(x)$: la grandezza trasversale caratteristica di un getto turbolento è lineare in x . Dalla costanza del flusso di quantità di moto $U_0^2(x)\delta(x) = \text{cost}$ e quindi la velocità caratteristica del getto evolve come

$$U_0(x) \sim x^{-1/2} \quad (10.37)$$

- Come fatto in precedenza per il flusso di quantità di moto (costante in x), vengono calcolate le derivate in x dei flussi di massa e di energia cinetica del moto medio per la soluzione in similitudine attraverso piani perpendicolari all'asse x . Il flusso di massa M è:

$$M = \rho \int_{y=-\infty}^{\infty} U dy = \rho U_0(x) \delta(x) \int_{\eta=-\infty}^{\infty} f(\eta) d\eta \sim x^{1/2} \quad (10.38)$$

$$\frac{dM}{dx} \sim x^{-1/2} > 0, \quad \text{per } x > 0$$

Il flusso di massa aumenta allontanandosi dall'ugello. Il getto riesce a “trascinare” anche del fluido che non esce dall'ugello (entrainment). Il flusso di energia cinetica del moto medio è:

$$E = \frac{1}{2} \rho \int_{y=-\infty}^{\infty} U^3 dy = \frac{1}{2} \rho U_0^3(x) \delta(x) \int_{\eta=-\infty}^{\infty} f^3(\eta) d\eta \sim x^{-1/2} \quad (10.39)$$

$$\frac{dE}{dx} \sim -x^{-3/2} < 0, \quad \text{per } x > 0$$

Il flusso di energia cinetica del moto medio diminuisce allontanandosi dall'ugello, nonostante le equazioni utilizzate nella soluzione in similitudine non contengano il termine dissipativo degli sforzi viscosi, che quindi non può avere nessuna influenza sulla diminuzione di energia cinetica del moto medio: l'energia del moto medio viene trasferita alle fluttuazioni di velocità. Scrivendo le equazioni di bilancio dell'energia cinetica del moto medio e dell'energia cinetica delle fluttuazioni (energia turbolenta) si trovano due termini opposti: il termine che in generale fa diminuire l'energia cinetica del moto medio, si trova nell'equazione dell'energia turbolenta con segno opposto.

- Nell'eq. 10.34, anche dopo aver sostituito $\delta' = S$, rimangono due equazioni incognite $f(\eta)$, $g(\eta)$. Così come le RANS non sono un problema chiuso, anche il problema semplificato non è chiuso. Per ottenere una soluzione si può introdurre l'ipotesi di Boussinesq (validità di questa ipotesi? Nessuna giustificazione rigorosa ...) per esprimere il termine di fluttuazioni in funzione del moto medio. Per il getto piano, l'ipotesi di Boussinesq si riduce a

$$-\langle u'v' \rangle = \nu_T \frac{\partial U}{\partial y} \quad (10.40)$$

avendo indicato con ν_T la viscosità turbolenta.

$$-U_0^2 g(\eta) = \nu_T \frac{U_0}{\delta(x)} f(\eta) \quad (10.41)$$

$$g(\eta) = -\frac{\nu_T}{U_0(x)\delta(x)} f(\eta) \quad (10.42)$$

$$(10.43)$$

Fatte già molte ipotesi (non tutte con fondamento fisico), facciamo l'ultima ipotesi che consente di ottenere una soluzione in forma chiusa del problema. Si ipotizza che

$$\hat{\nu}_T = \frac{\nu_T}{U_0(x)\delta(x)} = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad g(\eta) = -\nu_T f'(\eta) \quad (10.44)$$

La validità di queste ipotesi andrà controllata a posteriori.

L'equazione in $f(\eta)$ diventa:

$$\frac{1}{2} S \left[f^2(\eta) + f'(\eta) \int_{\chi=0}^{\eta} f(\chi) d\chi \right] = -\hat{\nu}_T f'''(\eta) \quad (10.45)$$

Si introduce la funzione $F(\eta) = \int_{\chi=0}^{\eta} f(\chi) d\chi$ per eliminare il termine integrale e ottenere un'equazione differenziale in $F(\eta)$ (osservare che $F'(\eta) = f(\eta)$ e $F(0) = 0$ poiché l'intervallo di integrazione ha dimensione nulla):

$$\frac{1}{2} S (F'^2 + F''F) = -\hat{\nu}_T F''' \quad (10.46)$$

$$\frac{1}{2} S (F'F)' = -\hat{\nu}_T F''' \quad (10.47)$$

$$(10.48)$$

Le condizioni di simmetria sull'asse del getto sono

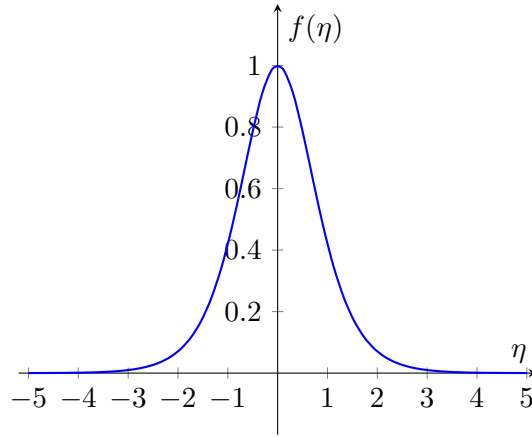
$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(\eta=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad F''(\eta=0) = 0 \quad (10.49)$$

Si integra ora due volte. Dopo aver integrato la prima volta, la prima costante di integrazione è nulla dalle condizioni $F(0) = 0$, $F''(0) = 0$. Si integra la seconda volta e si definisce la velocità di riferimento $U_0(x)$ (fino ad ora generica) con la condizione $F'(0) = f(0) = 1$: ricordando $U(x, y) = U_0(x)f(\eta(x, y))$, si ottiene che $U_0(x)$ è la velocità sull'asse ($y = 0$, $\eta = 0$).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S F'(\eta)F(\eta) + \hat{\nu}_T F''(\eta) &= C \stackrel{\text{b.c}}{=} 0 & ((F^2)' = 2FF') \\ \frac{1}{4} S (F^2)' + \hat{\nu}_T F'' &= 0 & (\text{integrare...}) \\ F' &= -\frac{S}{4\hat{\nu}_T} F^2 + B \stackrel{F'(0)=1}{=} 1 - \frac{S}{4\hat{\nu}_T} F^2 \end{aligned} \quad (10.50)$$

Integrando un'ultima volta si ottiene la soluzione $F(\eta)$, la cui derivata $f(\eta)$ è il profilo in similitudine della velocità U

$$F(\eta) = \frac{1}{\alpha} \tanh(\alpha\eta) \quad \Rightarrow \quad f(\eta) = \frac{1}{\cosh^2(\alpha\eta)} = \frac{U(x, y)}{U_0(x)} \quad (10.51)$$



Profilo di velocità similare $f(\eta)$ in variabile di similitudine η .

con $\alpha = \sqrt{\frac{S}{4\hat{\nu}_T}}$.

Mancano da determinare i valori delle costanti che compaiono nella soluzione, ottenibili usando dei confronti con le misure sperimentali e introducendo una definizione per la dimensione di riferimento $\delta(x)$ della dimensione trasversale del getto: di solito si definisce $\delta(x) = r_{1/2}(x)$ l'ordinata in cui la velocità $U(x, \delta(x))$ è la metà della velocità sull'asse (o sul piano di simmetria), cioè

$$U(x, r_{1/2}(x)) = \frac{1}{2}U(x, 0) = \frac{1}{2}U_0(x) \quad (10.52)$$

Per questa scelta di $\delta(x)$ il coefficiente S risulta $S \sim 0.1$.