B. Introduzione al calcolo tensoriale

Le equazioni che descrivono i fenomeni fisici hanno carattere tensoriale, cioè sono indipendenti dal sistema di coordinate nelle quali vengono scritte. É importante capire la natura tensoriale delle leggi fisiche, capirne l'*invarianza* rispetto ai sistemi di coordinate ed essere in grado di scrivere correttamente le equazioni nei sistemi di coordinate più vantaggiosi per la descrizione del fenomeno fisico e per la soluzione dei problemi.

In questo capitolo verrà usata la notazione di Einstein: è sottointesa la sommatoria sugli indici ripetuti in una espressione. Per chiarezza,

$$a_k b_k = \sum_k a_k b_k. \tag{B.1}$$

Si considerano qui **solo spazi vettoriali dotati di prodotto interno**, per i quali è possibile evitare di introdurre concetti più generali, ma più astratti e del tutto inessenziali per una prima introduzione ai tensori e al calcolo tensoriale: ad esempio è possibile "schivare" le definizioni di spazio e base duale (parente di quella che qui verrà chiamata *base reciproca*), isomorfismi e altri concetti più "matematici". Vengono comunque dati alcuni riferimenti per una trattazione esaustiva dell'argomento.

B.1 Richiami di algebra lineare

Definizione B.1.1 — Componenti contravarianti. Sia $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale, sia $\boldsymbol{v}$ un elemento di $\mathcal{V}$ e $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ una base[a] di $\mathcal{V}$; si può scrivere il vettore $\boldsymbol{v}$ in componenti rispetto alla base $\{\boldsymbol{b}_k\}$

$$\boldsymbol{v} = v^k \boldsymbol{b}_k, \tag{B.2}$$

dove gli scalari v^k sono definiti componenti contravarianti (rispetto alla base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$) del vettore $\boldsymbol{v}$.

[a] Una base è un insieme minimale di vettori linearmente indipendenti. La dimensione dello spazio

vettoriale coincide con il numero di elementi di una sua base.

Definizione B.1.2 — Base reciproca. Data la base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ di $\mathcal{V}$, la sua base reciproca è definita come l'insieme di vettori $\{\boldsymbol{b}^k\}_{k=1:N}$ tali che

$$\boldsymbol{b}^i \cdot \boldsymbol{b}_k = \delta^i_k, \tag{B.3}$$

dove con δ^i_k è stata indicata la delta di Kronecker, uguale a 1 quando gli indici sono uguali, uguale a 0 altrimenti.

R La base reciproca è anch'essa una base dello spazio $\mathcal{V}$. Nella trattazione più generale (e astratta) all'algebra tensoriale, si introduce lo spazio duale $\mathcal{V}^*$ dello spazio $\mathcal{V}$, la cui base viene definita base duale. In generale lo spazio duale $\mathcal{V}^*$ differisce dallo spazio $\mathcal{V}$ e di conseguenza, uan base dello spazio $\mathcal{V}$ e la sua base duale sono diverse.

Definizione B.1.3 — Componenti covarianti. Date la base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ di $\mathcal{V}$ e la sua base reciproca $\{\boldsymbol{b}^k\}_{k=1:N}$, le componenti covarianti v_k sono le componenti del vettore $\boldsymbol{v}$ nella base reciproca

$$\boldsymbol{v} = v_k \boldsymbol{b}^k. \tag{B.4}$$

R In generale, la base reciproca $\{\boldsymbol{b}^k\}_{k=1:N}$ non coincide con la base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ e di conseguenza le componenti contravarianti e covarianti di un vettore sono diverse, $v^k \neq v_k$.

Risulta quindi fondamentale prestare attenzione alla posizione degli indici e dei pedici. Nel seguito, dopo aver ristretto la trattazione generale a casi più particolari, si ridurrà l'esigenza di prestare attenzione alla posizione degli indici: un esempio in cui è possibile confondere pedici e apici è costituito dalle *componenti fisiche* di tensori espressi in sistemi di *coordinate curvilinei ortogonali*, come verrà dimostrato nel paragrafo B.3.4.

Notazione B.1. *Per distinguere gli oggetti covarianti da quelli contravarianti nelle formule, viene usata la seguente convenzione:*
- *gli oggetti **covarianti** sono indicati con i **pedici**;*
- *gli oggetti **contravarianti** sono indicati con gli **apici**.*

R I termini "covariante" e "contravariante" si riferiscono alla legge di trasformazione dell'oggetto (componenti o vettori della base) al quale sono riferiti, in seguito a un cambiamento della base. In particolare, gli oggetti covarianti sono quelli che seguono la stessa legge di trasformazione degli elementi della base $\{\boldsymbol{b}^k\}_{k=1:N}$, mentre gli oggetti contravarianti seguono la trasformazione inversa, come si vedrà meglio paragrafo B.1.2.

Un vettore e tutti gli oggetti **invarianti** al cambio di sistemi di riferimento (tensori), devono avere componenti contravarianti se riferite a un elemento di una base covariante, componenti covarianti se riferite a un elemento della base contravariante (che si scoprirà essere la base reciproca).

B.1.1 Trasformazione tra oggetti controvarianti e covarianti: regola per "alzare e abbassare gli indici".

Gli elementi di una base di uno spazio vettoriale non sono necessariamente ortogonali (né tantomeno ortonormali) tra di loro. Si definiscono i valori dei prodotti scalari degli elementi della base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ e della base reciproca $\{\boldsymbol{b}^k\}_{k=1:N}$ come

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j && \neq \delta_{ij} \text{ in generale} \\ g^{ij} &= \boldsymbol{b}^i \cdot \boldsymbol{b}^j && \neq \delta_{ij} \text{ in generale.} \end{aligned} \tag{B.5}$$

I simboli g_{ik} e g^{ik} sono simmetrici rispetto alla permutazione degli indici. Se questi i simboli g_{ik} vengono raccolti nella matrice G, questa matrice è simmetrica: i due indici possono quindi rappresentare indifferentemente la riga o la colonna della matrice G. Si può dimostrare che la matrice che raccoglie i simboli g^{ik} è la matrice inversa di G.

La regola per ricavare un vettore di una base rispetto a quelli dell'altra è

$$\boldsymbol{b}_i = g_{ik}\boldsymbol{b}^k, \quad \boldsymbol{b}^i = g^{ik}\boldsymbol{b}_k. \tag{B.6}$$

Infatti, inserendo la prima nella definizione di g_{ij} si ottiene la seguente identità

$$g_{ij} = \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = g_{ik}\boldsymbol{b}^k \cdot \boldsymbol{b}_j = g_{ik}\delta^k_j = g_{ij}. \tag{B.7}$$

Le relazioni (B.6) possono essere scritte in forma matriciale,

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{b}_1|\dots|\boldsymbol{b}_N] &= [\boldsymbol{b}^1|\dots|\boldsymbol{b}^N]\,[g_{ik}] = [\boldsymbol{b}^1|\dots|\boldsymbol{b}^N]G, \\ [\boldsymbol{b}^1|\dots|\boldsymbol{b}^N] &= [\boldsymbol{b}_1|\dots|\boldsymbol{b}_N]\,[g^{ik}] = [\boldsymbol{b}_1|\dots|\boldsymbol{b}_N]G^{-1}. \end{aligned} \tag{B.8}$$

La regola per ricavare una componente di un vettore $\boldsymbol{v}$ in una base, in funzione delle componenti della base reciproca è

$$v_i = g_{ik}v^k, \quad v^i = g^{ik}v_k. \tag{B.9}$$

Questa regola viene dimostrata facilmente scrivendo il vettore $\boldsymbol{v}$ nelle due basi e utilizzando le regole (B.6) per la trasformazione degli elementi delle basi

$$\boldsymbol{v} = \begin{cases} v^i\boldsymbol{b}_i = v^i g_{ik}\boldsymbol{b}^k = v_k\boldsymbol{b}^k \\ v_i\boldsymbol{b}^i = v_i g^{ik}\boldsymbol{b}_k = v^k\boldsymbol{b}_k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_k = g_{ik}v^i \\ v^k = g^{ik}v_i. \end{cases} \tag{B.10}$$

R Per ricordarsi le trasformazioni (B.6) e (B.9) è sufficiente ricordarsi che:
- gli indici non ripetuti a destra e a sinistra dell'uguale devono trovarsi nella stessa posizione;
- gli indici ripetuti dalla stessa parte dell'uguale si trovano uno in alto, l'altro in basso.

B.1.2 Cambio di base e regole di trasformazione: covarianza e contravarianza.

I termini "covariante" o "contravariante" sono riferiti alla legge di trasformazione di un oggetto (componente o elemento di una base), se confrontata con la legge di trasformazione degli elementi della base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ di $\mathcal{V}$. Gli apici sono riservati agli oggetti contravarianti (le componenti v^k del vettore $\boldsymbol{v}$ e gli elementi della base reciproca $\{\boldsymbol{b}^k\}_{k=1:N}$), mentre i pedici sono riservati agli oggetti covarianti (le componenti v_k del vettore $\boldsymbol{v}$ e gli elementi della base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ di $\mathcal{V}$).

Due basi $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ e $\{\hat{\boldsymbol{b}}_k\}_{k=1:N}$ dello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ sono legate dalla trasformazione lineare T,

$$\boldsymbol{b}_k = \hat{T}_k^q \hat{\boldsymbol{b}}_q, \quad \hat{\boldsymbol{b}}_k = T_k^q \boldsymbol{b}_q, \tag{B.11}$$

dove con $\hat{T}$ viene indicata la trasformazione inversa di T, $\hat{T} = T^{-1}$. Le rispettive basi reciproche $\{\boldsymbol{b}^k\}_{k=1:N}$ e $\{\hat{\boldsymbol{b}}^k\}_{k=1:N}$ di $\mathcal{V}$ sono legate dalla trasformazione inversa, mostrando quindi una natura contravariante alla quale vengono riservati gli apici,

$$\boldsymbol{b}^k = T_q^k \hat{\boldsymbol{b}}^q, \quad \hat{\boldsymbol{b}}^k = \hat{T}_q^k \boldsymbol{b}^q. \tag{B.12}$$

Infatti, usando le trasformazioni (B.11) e (B.12) nella definizione della base duale $\{\hat{\boldsymbol{b}}^k\}_{k=1:N}$, si ottiene

$$\delta_k^i = \hat{\boldsymbol{b}}^i \cdot \hat{\boldsymbol{b}}_k = \hat{\boldsymbol{b}}^i \cdot (T_k^q \boldsymbol{b}_q) = T_k^q \hat{\boldsymbol{b}}^i \cdot \boldsymbol{b}_q = T_k^q (\hat{T}_l^i \boldsymbol{b}^l) \cdot \boldsymbol{b}_q = T_k^q \hat{T}_l^i \delta_q^l = \hat{T}_l^i T_k^l, \tag{B.13}$$

che può essere riscritta $I = \hat{T}T$, dimostrando che $\hat{T} = T^{-1}$.
Le componenti contravarianti v^k di $\boldsymbol{v}$ variano secondo la trasformazione inversa degli elementi della base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ di $\mathcal{V}$,

$$\hat{v}^k = \hat{T}_q^k v^q, \quad v^k = T_q^k \hat{v}^q. \tag{B.14}$$

É possibile verificare immediatamente le (B.14), inserendo la trasformazione (B.11) nella rappresentazione del vettore $\boldsymbol{v}$ nella base covariante $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$,

$$\boldsymbol{v} = v^q \boldsymbol{b}_q = v^q \hat{T}_q^k \hat{\boldsymbol{b}}_k = \hat{v}^k \hat{\boldsymbol{b}}_k. \tag{B.15}$$

Le componenti covarianti v_k variano con la stessa trasformazione degli elementi della base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ di $\mathcal{V}$,

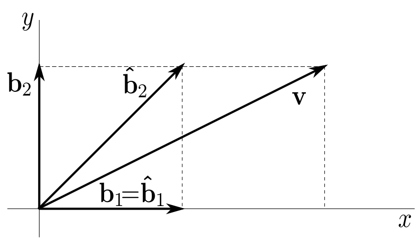
$$\hat{v}_k = T_k^q v_q, \quad v_k = \hat{T}_k^q \hat{v}_q. \tag{B.16}$$

É possibile verificare immediatamente le (B.16), inserendo la trasformazione (B.12) nella rappresentazione del vettore $\boldsymbol{v}$ nella base contravariante $\{\boldsymbol{b}^k\}_{k=1:N}$,

$$\boldsymbol{v} = v_q \boldsymbol{b}^q = v_q T_k^q \hat{\boldsymbol{b}}^k = \hat{v}_k \hat{\boldsymbol{b}}^k. \tag{B.17}$$

■ **Esempio B.1** In figura sono rappresentate le basi $B_i = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$, $\hat{B}_i = \left\{\hat{\boldsymbol{b}}_1, \hat{\boldsymbol{b}}_2\right\}$ dello spazio bidimensionale $\mathbb{R}^2$ e il vettore $\boldsymbol{v} = v^1 \boldsymbol{b}_1 + v^2 \boldsymbol{b}_2 = 2\boldsymbol{b}_1 + 1\boldsymbol{b}_2$. Viene chiesto di:

- determinare le basi reciproche $B^i = \{\boldsymbol{b}^i\}$, $\hat{B}^i = \left\{\hat{\boldsymbol{b}}^i\right\}$;
- determinare le componenti v^i, v_i, $\hat{v}^i$, $\hat{v}_i$ nelle basi B_i, B^i, $\hat{B}_i$, $\hat{B}^i$.



■

Il vettore $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{b}_1 + 1\boldsymbol{b}_2$ espresso nella base B_i è un dato del problema. Le componenti contravarianti v^i sono $v^1 = 2$, $v^2 = 1$. Per calcolare la base reciproca $B^i = \{\boldsymbol{b}^1, \boldsymbol{b}^2\}$ e le rispettive componenti covarianti con le espressioni (B.6) e (B.9) è necessario calcolare i simboli g_{ik} e g^{ik}. Si calcolano i simboli g_{ik} usando la definizione $g_{ik} = \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_k$

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = 1 \quad \Rightarrow \quad G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{B.18}$$

dove è stata introdotta la matrice G che raccoglie gli elementi g_{ik}. I simboli g^{ik} sono gli elementi dell'inversa di G, rappresentando la trasformazione inversa $\boldsymbol{b}^i = g^{ik}\boldsymbol{b}_k$, dagli elementi della base contravariante a quelli della base covariante,

$$\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{B.19}$$

Dalla (B.6) segue che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}^1 &= g^{11}\boldsymbol{b}_1 + g^{12}\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{b}^2 &= g^{21}\boldsymbol{b}_1 + g^{22}\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b}_2. \end{aligned} \tag{B.20}$$

Si poteva ottenere questo risultato senza svolgere nessun conto, poiché la base reciproca di una *base ortonormale*, come B_i, coincide con la base stessa. Come conseguenza, anche le componenti covarianti coincidono con le componenti contravarianti,

$$v_1 = v^1 = 2, \quad v_2 = v^2 = 1. \tag{B.21}$$

Per calcolare le componenti del vettore $\boldsymbol{v}$ nella base $\hat{B}_i$ è necessario calcolare gli elementi della matrice T che esprime il cambiamento di base (B.11). É possibile ottenere gli elementi di T moltiplicando scalarmente la (B.11) per i vettori della base $\hat{\boldsymbol{b}}^j$ e sfruttando la definizione di base reciproca (B.4),

$$\hat{\boldsymbol{b}}^j \cdot \boldsymbol{b}_k = \hat{\boldsymbol{b}}^j \cdot \hat{T}_k^q \hat{\boldsymbol{b}}_q = \hat{T}_k^j. \tag{B.22}$$

Per utilizzare la formula precedente è necessario conoscere la base reciproca $\hat{B}^i$. Data la base Seguendo lo stesso procedimento svolto in precedenza, si calcolano i simboli $\hat{g}_{ik} = \hat{\boldsymbol{b}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{b}}_k$

$$\hat{g}_{11} = 1, \quad \hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = 1, \quad \hat{g}_{22} = 2 \quad \Rightarrow \quad \hat{G} = \begin{bmatrix} \hat{g}_{11} & \hat{g}_{12} \\ \hat{g}_{21} & \hat{g}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{B.23}$$

e la trasformazione inversa per ottenere i simboli $\hat{g}^{ik}$,

$$\begin{bmatrix} \hat{g}^{11} & \hat{g}^{12} \\ \hat{g}^{21} & \hat{g}^{22} \end{bmatrix} = \hat{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{B.24}$$

I vettori dell base controvariante si ottengono dalla (B.6),

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{b}}^1 &= \hat{g}^{11}\hat{\boldsymbol{b}}_1 + \hat{g}^{12}\hat{\boldsymbol{b}}_2 = 2\hat{\boldsymbol{b}}_1 - \hat{\boldsymbol{b}}_2, \\ \hat{\boldsymbol{b}}^2 &= \hat{g}^{21}\hat{\boldsymbol{b}}_1 + \hat{g}^{22}\hat{\boldsymbol{b}}_2 = -\hat{\boldsymbol{b}}_1 + \hat{\boldsymbol{b}}_2. \end{aligned} \tag{B.25}$$

É ora possibile utilizzare la (B.22) per calcolare gli elementi della matrice $\hat{T}$

$$\begin{aligned} \hat{T}_1^1 &= \hat{\boldsymbol{b}}^1 \cdot \boldsymbol{b}_1 = (2\hat{\boldsymbol{b}}_1 - \hat{\boldsymbol{b}}_2) \cdot \boldsymbol{b}_1 = 2 - 1 = 1, \\ \hat{T}_2^1 &= \hat{\boldsymbol{b}}^1 \cdot \boldsymbol{b}_2 = (2\hat{\boldsymbol{b}}_1 - \hat{\boldsymbol{b}}_2) \cdot \boldsymbol{b}_2 = 0 - 1 = -1, \\ \hat{T}_1^2 &= \hat{\boldsymbol{b}}^2 \cdot \boldsymbol{b}_1 = (-\hat{\boldsymbol{b}}_1 + \hat{\boldsymbol{b}}_2) \cdot \boldsymbol{b}_1 = -1 + 1 = 0, \\ \hat{T}_2^2 &= \hat{\boldsymbol{b}}^2 \cdot \boldsymbol{b}_2 = (-\hat{\boldsymbol{b}}_1 + \hat{\boldsymbol{b}}_2) \cdot \boldsymbol{b}_2 = 0 + 1 = 1, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \hat{T} = \begin{bmatrix} \hat{T}_1^1 & \hat{T}_2^1 \\ \hat{T}_1^2 & \hat{T}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.26}$$

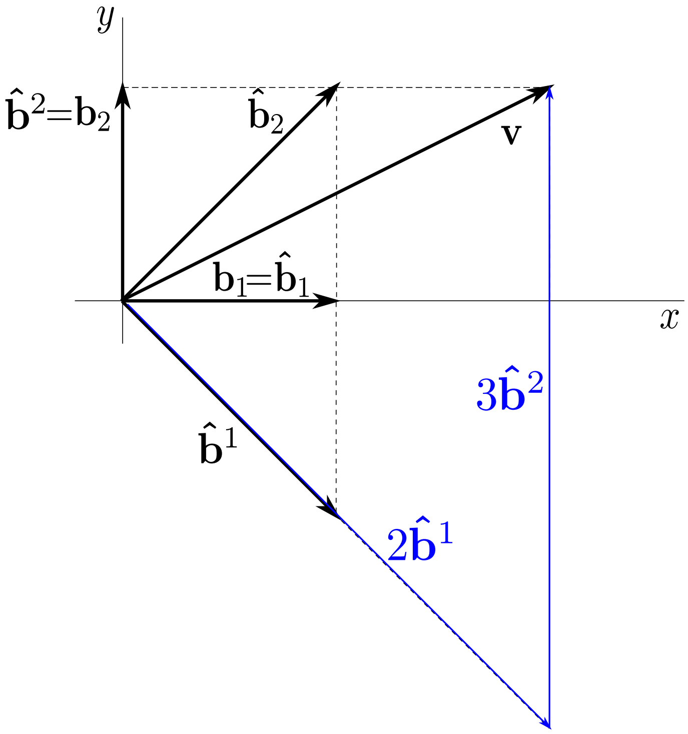


Figura B.1: Rappresentazione grafica dell'esempio B.1.

e la matrice inversa

$$T = \hat{T} = \begin{bmatrix} T_1^1 & T_2^1 \\ T_1^2 & T_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{B.27}$$

Utilizzando la (B.14) è ora possibile ricavare le componenti del vettore $\boldsymbol{v}$ nella base $\hat{B}_i$,

$$\begin{aligned} \hat{v}^1 &= \hat{T}_k^1 v^k = \hat{T}_1^1 v^1 + \hat{T}_2^1 v^2 = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 \\ \hat{v}^2 &= \hat{T}_k^2 v^k = \hat{T}_1^2 v^1 + \hat{T}_2^2 v^2 = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{b}}_1 + \hat{\boldsymbol{b}}_2. \tag{B.28}$$

Si ricavano infine le componenti covarianti nella base $\hat{B}^i$,

$$\begin{aligned} \hat{v}_1 &= \hat{g}_{1k} \hat{v}^k = \hat{g}_{11} \hat{v}^1 + \hat{g}_{12} \hat{v}^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \\ \hat{v}_2 &= \hat{g}_{2k} \hat{v}^k = \hat{g}_{21} \hat{v}^1 + \hat{g}_{22} \hat{v}^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} = 2\hat{\boldsymbol{b}}^1 + 3\hat{\boldsymbol{b}}^2. \tag{B.29}$$

Le leggi di trasformazione degli elementi di basi differenti e delle relative componenti sono state introdotte in questo paragrafo per i vettori. Nel prossimo paragrafo verranno utilizzate per ottenere le leggi di trasformazione degli elementi della base e delle componenti dei tensori. In particolare, la definizione classica di tensore come oggetto invariante al cambio di sistema di riferimento, coinvolge direttamente la legge di trasformazione delle componenti, in seguito a un cambio di base. L'esempio B.1 è stato pensato come un'occasione per riprendere dimestichezza con l'analisi lineare e prendere familiarità con le definizione introdotte nel paragrafo.

B.2 Algebra multilineare

Se l'algebra lineare è la branca della matematica che si occupa dello studio dei vettori, degli spazi vettoriali (o spazi lineari) e delle trasformazioni lineari, l'algebra multilineare si occupa dello studio dei tensori, degli spazi tensoriali e delle trasformazioni multilineari.

Definizione B.2.1 — Tensore (definizione intrinseca). Un tensore di ordine r su $\mathcal{V}$ è una funzione r-lineare

$$T : \underbrace{\mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V}}_{\text{r volte}} \to K \tag{B.30}$$

R La definizione di tensore data è riferita agli spazi dotati di prodotto interno. Per una prima introduzione all'algebra e al calcolo tensoriale, può essere considerata un buon compromesso tra comprensibilità e completezza della trattazione, per un corso di ingegneria. Senza voler entrare nei particolari, questa definizione evita di introdurre le definizioni di spazio duale e di isomorfismi necessarie a una trattazione generale dei tensori su spazi vettoriali qualsiasi.

Si indica con $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ l'insieme dei tensori di ordine r. Questo insieme è chiuso[1] rispetto alle operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare definite in seguito, e quindi è definito lo spazio vettoriale dei tensori di ordine r. Un tensore di ordine 0 è uno scalare, un tensore di ordine 1 un vettore.

B.2.1 Alcune operazioni tensoriali (I): somma e moltiplicazione per uno scalare.

Le due operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare e la chiusura dell'insieme $\mathcal{T}^r$ rispetto ad esse sono condizioni necessarie alla struttura di spazio vettoriale. La somma di due tensori $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ e la moltiplicazione di $\boldsymbol{A}$ per uno scalare $\alpha \in K$ sono definite come

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^r) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^r) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^r) \tag{B.31}$$

e

$$(\alpha \boldsymbol{A})(\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^r) = \alpha \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^r) \tag{B.32}$$

per ogni r-upla di vettori $(\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^r) \in \mathcal{V}^r$.

Definizione B.2.2 — Spazio vettoriale $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ dei tensori di ordine r. Lo spazio vettoriale $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ dei tensori di ordine r sullo spazio $\mathcal{V}$ è formato dall'insieme $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$, con le operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare definite in (B.31) e (B.32).

B.2.2 Prodotto tensoriale

Dati r vettori $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r \in \mathcal{V}$ si definisce il prodotto tensoriale tra vettori $\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_r$ come

$$\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_r(\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^r) = (\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{u}^1) \dots (\boldsymbol{v}_r \cdot \boldsymbol{u}^r), \tag{B.33}$$

per ogni r-upla di vettori $(\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^r) \in \mathcal{V}^r$.

[1] Un insieme $\mathcal{V}$ è chiuso rispetto a un'operazione se l'operazione su ogni elemento di $\mathcal{V}$ restituisce un elemento di $\mathcal{V}$.

Per due tensori $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}^p(\mathcal{V})$, $\boldsymbol{B} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ il prodotto $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} \in \mathcal{T}^{p+r}(\mathcal{V})$ è definito come

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})(\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^{p+r}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^p)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}^{p+1}, \dots, \boldsymbol{u}^{p+r}), \tag{B.34}$$

per ogni $(\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^{p+r}) \in \mathcal{V}^{p+r}$.

R Il prodotto tensoriale **non** è commutativo: $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{A}$.

Definizione B.2.3 — Base prodotto di $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$. Se lo spazio $\mathcal{V}$ ha dimensione N, la dimensione dello spazio $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ è N^r. La base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ di $\mathcal{V}$ induce una base prodotto (covariante) di $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$, definita come

$$\{\boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r}\}_{i_1,\dots,i_r=1:N} \,. \tag{B.35}$$

Rispetto alla base prodotto, un tensore $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ viene scritto come

$$\boldsymbol{A} = A^{i_1 \dots i_r} \boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r}, \tag{B.36}$$

dove $A^{i_1 \dots i_r}$ sono le componenti contravarianti del tensore $\boldsymbol{A}$ rispetto alla base prodotto covariante. Si dimostra che le componenti $A^{i_1 \dots i_r}$ sono

$$A^{i_1 \dots i_r} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}^{i_1}, \dots, \boldsymbol{b}^{i_r}). \tag{B.37}$$

Infatti,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}^{k_1}, \dots, \boldsymbol{b}^{k_r}) &= A^{i_1 \dots i_r} \boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r}(\boldsymbol{b}^{k_1}, \dots, \boldsymbol{b}_{l_r}) = \\ &= A^{i_1 \dots i_r} (\boldsymbol{b}_{i_1} \cdot \boldsymbol{b}^{k_1}) \dots (\boldsymbol{b}_{l_r} \cdot \boldsymbol{b}^{j_r}) = \\ &= A^{i_1 \dots i_r} \delta_{i_1}^{k_1} \dots \delta_{l_r}^{j_r} = A^{k_1 \dots k_r}\end{aligned} \tag{B.38}$$

B.2.3 Trasformazione tra oggetti controvarianti e covarianti: regola per "alzare e abbassare gli indici".

Nei paragrafi precedenti è stata ricavata la regola per ricavare le componenti contravarianti di un vettore dalle compontenti covarianti e viceversa. In questo paragrafo verranno ricavate le regole per alzare e abbassare gli indici in un tensore di ordine r generico, seguendo un procedimento simile a quello seguito in precedenza. Come primo esempio, si parte da un tensore scritto nella base prodotto covariante, con indici bassi (quindi le coomponenti hanno tutti indici contravarianti, alti): l'obiettivo è quello di scrivere le componenti in una base con il primo vettore appartenente alla base reciproca (indice alto) e tutti gli altri uguali (indici bassi). Le componenti avranno quindi il primo indice basso e gli altri alti.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= A^{i_1 \dots i_r} \boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \boldsymbol{b}_{i_2} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r} = \\ &= A^{i_1 \dots i_r} g_{i_1 k_1} \boldsymbol{b}^{k_1} \otimes \boldsymbol{b}_{i_2} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r} = \\ &= g_{i_1 k_1} A^{k_1 \dots i_r} \boldsymbol{b}^{i_1} \otimes \boldsymbol{b}_{i_2} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r} = \\ &= A_{i_1}{}^{i_2 \dots i_r} \boldsymbol{b}^{i_1} \otimes \boldsymbol{b}_{i_2} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r}\end{aligned} \tag{B.39}$$

dove è stata usata la simmetria dei simboli $g_{ij} = g_{ji}$ e sono stati invertiti gli indici ripetuti (sono indici "dummy", saturati dalla sommatoria). Risulta quindi

$$A_{i_1}{}^{i_2 \dots i_r} = g_{i_1 k_1} A^{k_1 i_2 \dots i_r} \tag{B.40}$$

dove come sempre è sottointesa la sommatoria sugli indici ripetuti (qui solo k_1). Una volta capito il ruolo di g_{ij} nell'abbassamento e nell'innalzamento degli indici, la stessa regola può essere applicata a qualsiasi indice di un tensore di ordine qualsiasi.

B.2.4 Cambio di base e regola di trasformazione delle componenti: definizione "classica" di tensore.

Aiutandosi con la legge di trasformazione degli elementi della base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ di $\mathcal{V}$ e della base reciproca $\{\boldsymbol{b}^k\}_{k=1:N}$ di $\mathcal{V}^*$, si può verificare che la base prodotto (covariante) dello spazio $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ si trasforma secondo

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{b}}_{i_1} \otimes \dots \otimes \hat{\boldsymbol{b}}_{i_r} &= T^{k_1}_{i_1} \dots T^{k_p}_{i_r} \boldsymbol{b}_{k_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{k_r} \\ \boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r} &= \hat{T}^{k_1}_{i_1} \dots \hat{T}^{k_r}_{i_r} \hat{\boldsymbol{b}}_{k_1} \otimes \dots \otimes \hat{\boldsymbol{b}}_{k_r}.\end{aligned} \tag{B.41}$$

Per ricavare la regola di trasformazione della base prodotto (B.41) è sufficiente applicare la (B.11) a tutti i vettori $\boldsymbol{b}_{i_\alpha}$ della base prodotto. Usando la multilinearità del prodotto tensoriale

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{b}}_{i_1} \otimes \dots \otimes \hat{\boldsymbol{b}}_{i_r} =&(T^{k_1}_{i_1} \boldsymbol{b}_{k_1}) \otimes \dots \otimes (T^{k_p}_{i_r} \boldsymbol{b}_{k_r}) = \\ =&T^{k_1}_{i_1} \dots T^{k_r}_{i_r} \boldsymbol{b}_{k_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{k_r}.\end{aligned} \tag{B.42}$$

La regola di trasformazione delle componenti di un tensore $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$, $\boldsymbol{A} = A^{i_1 \dots i_r} \boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r} = \hat{A}^{i_1 \dots i_r} \hat{\boldsymbol{b}}_{i_1} \otimes \dots \otimes \hat{\boldsymbol{b}}_{i_r}$ al variare dei sistemi di riferimento è

$$\begin{aligned}\hat{A}^{k_1 \dots k_r} &= \hat{T}^{k_1}_{i_1} \dots \hat{T}^{k_r}_{i_r} A^{i_1 \dots i_r} \\ A^{i_1 \dots i_r} &= T^{i_1}_{k_1} \dots T^{i_r}_{k_r} \hat{A}^{k_1 \dots k_r}.\end{aligned} \tag{B.43}$$

La legge di trasformazione delle componenti (B.43) si ricava grazie alla legge di trasformazione della base prodotto

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= A^{i_1 \dots i_r} \boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r} = \\ &= A^{i_1 \dots i_r} \hat{T}^{k_1}_{i_1} \dots \hat{T}^{k_r}_{i_r} \hat{\boldsymbol{b}}_{k_1} \otimes \dots \otimes \hat{\boldsymbol{b}}_{k_r} = \\ &= \hat{A}^{k_1 \dots k_r} \hat{\boldsymbol{b}}_{k_1} \otimes \dots \otimes \hat{\boldsymbol{b}}_{k_r}\end{aligned} \tag{B.44}$$

Partendo dalla definizione intrinseca di un tensore come applicazione multilineare B.2.1, grazie all'introduzione di una base dello spazio vettoriale e alla rappresentazione in coordinate, è stato possibile arrivare alla definizione classica di tensore.

Definizione B.2.4 — Tensore (definizione classica). Un tensore $\boldsymbol{A}$ di ordine r su uno spazio $\mathcal{V}$ di dimensione N è un oggetto matematico formato da N^r componenti $A^{i_1 \dots i_r}$ che si trasformano secondo la (B.43), in seguito al cambio di sistema di coordinate $\boldsymbol{b}_j = \hat{T}^i_j \hat{\boldsymbol{b}}_i$.

B.2.5 Alcune operazioni tensoriali (II)

Come le operazioni introdotte nel paragrafo B.2.1, anche le operazioni in questo paragrafo operano su tensori e restituiscono tensori.

Contrazione.

L'operazione di contrazione $\boldsymbol{C}^k_l$ agente su un tensore $\boldsymbol{A}$ di ordine r ha come risultato un tensore di ordine $r-2$. Le componenti del tensore ottenuto tramite la contrazione di due indici si ottengono saturando con la somma gli indici di tutte le componenti indicati da

$\boldsymbol{C}_l^k$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_l^k \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{C}_l^k (A^{i_1 \dots i_r} \boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r}) \\ &= \boldsymbol{C}_l^k (A^{i_1 \dots i_k \dots i_{l-1}}{}_{i_l}{}^{i_{l+1} \dots i_r} \boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_k} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_{l-1}} \otimes \boldsymbol{b}^{i_l} \otimes \boldsymbol{b}_{i_{l+1}} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r}) \\ &= A^{i_1 \dots i_{k-1} n i_{k+1} \dots i_{l-1}}{}_{n}{}^{i_{l+1} \dots i_r} \boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_{k-1}} \otimes \boldsymbol{b}_{i_{k+1}} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_{l-1}} \otimes \boldsymbol{b}_{i_{l+1}} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r}.\end{aligned} \tag{B.45}$$

Per rendere (più) comprensibile la definizione dell'operazione di contrazione data in (B.45), si fornisce un esempio su un tensore di ordine 3, $\boldsymbol{A} = A^{ijk} \boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j \otimes \boldsymbol{b}_k$.

R Affinchè la contrazione sia svolta correttamente (e quindi dia come risultato un tensore) senza la scrittura esplicita dei simboli g_{ik}, la coppia di indici che viene "contratta" deve avere carattere opposto (uno covariante, l'altro contravariante).

Si vuole svolgere la contrazione del primo e del terzo indice di $\boldsymbol{A}$. In componenti si ottiene

$$\boldsymbol{C}_3^1 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}_3^1 (A^{ijk} \boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j \otimes \boldsymbol{b}_k) = \boldsymbol{C}_3^1 (A_i{}^{jk} \boldsymbol{b}^i \otimes \boldsymbol{b}_j \otimes \boldsymbol{b}_k) = A_i{}^{ji} \boldsymbol{b}_j = g_{il} A^{ljk} \boldsymbol{b}_j, \tag{B.46}$$

dove è stata utilizzata la regola (B.40) per esprimere il risultato in funzione del tensore $\boldsymbol{A}$ con tutti gli indici contravarianti.

"Dot" product.
Siano $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$, $\boldsymbol{B} \in \mathcal{T}^s(\mathcal{V})$, il prodotto "dot" $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ è un tensore di ordine $r + s - 2$, definito tramite il prodotto tensoriale e la contrazione di una coppia di indici di natura opposta. In particolare si definisce

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}_{r+1}^r (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}). \tag{B.47}$$

Si ricorda che la contrazione deve avvenire tra indici di natura opposta. Supponendo che la regola per passare da indici covarianti a indici contravarianti sia stata compresa e non comporti nessuna difficoltà aggiuntiva, per comodità il tensore $\boldsymbol{A}$ viene scritto in componenti contravarianti, il tensore $\boldsymbol{B}$ in componenti covarianti. Facendo un esempio con $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}^3$, $\boldsymbol{B} \in \mathcal{T}^2$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} &= (A^{ijk} \boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j \otimes \boldsymbol{b}_k) \cdot (B_{mn} \boldsymbol{b}^m \otimes \boldsymbol{b}^n) = \\ &= A^{ijk} B_{mn} \boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j \otimes \boldsymbol{b}_k \cdot \boldsymbol{b}^m \otimes \boldsymbol{b}^n = \\ &= A^{ijl} B_{ln} \boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j \otimes \boldsymbol{b}^n.\end{aligned} \tag{B.48}$$

R Il prodotto "dot" **non** è commutativo ($\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$). Il prodotto "dot" **non** è un prodotto interno (in generale non ha nemmeno come risultato uno scalare).

Doppio "Dot" product.
Siano $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$, $\boldsymbol{B} \in \mathcal{T}^s(\mathcal{V})$, il doppio prodotto "dot" $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}$ è un tensore di ordine $r + s - 4$ definito tramite il prodotto tensoriale e una doppia contrazione. In particolare si definisce

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}_{r+1,r+2}^{r-1,r} (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) \tag{B.49}$$

Per esempio con $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}^4$, $\boldsymbol{B} \in \mathcal{T}^3$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} &= (A^{ijkl}\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j \otimes \boldsymbol{b}_k \otimes \boldsymbol{b}_l) : (B_{mnp}\boldsymbol{b}^m \otimes \boldsymbol{b}^n \otimes \boldsymbol{b}^p) = \\ &= A^{ijuv}B_{uvp}\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j \otimes \boldsymbol{b}^p\end{aligned} \tag{B.50}$$

Si presti attenzione all'ordine con il quale avviene la doppia contrazione: il penultimo indice di $\boldsymbol{A}$ si contrae con il primo di $\boldsymbol{B}$, l'ultimo di $\boldsymbol{A}$ con il secondo di $\boldsymbol{B}$. É possibile definire "dot product" multipli estendendo la contrazione a un numero maggiore di indici.

■ **Esempio B.2 — Tensore degli sforzi.** I primi tensori che vengono incontrati durante un corso di studi in ingegneria sono il tensore di inerzia per i corpi rigidi in Meccanica Razionale e il tensore degli sforzi nei corsi di Meccanica Strutturale. Viene qui ricavato velocemente il legame tra vettore sforzo $\boldsymbol{t_n}$ e la normale $\boldsymbol{\hat{n}}$ della giacitura considerata in un mezzo continuo non polare, tramite l'equilibrio del tetraedro di Cauchy. Siano $\boldsymbol{\hat{x}}$, $\boldsymbol{\hat{y}}$ e $\boldsymbol{\hat{z}}$ i versori di un sistema di riferimento cartesiano centrato nel punto del continuo considerato e $\boldsymbol{\hat{e}_x} = \boldsymbol{t_x}$, $\boldsymbol{\hat{e}_y} = \boldsymbol{t_y}$ e $\boldsymbol{\hat{e}_z} = \boldsymbol{t_z}$ i vettori sforzo agenti sulle facce del tetraedro di area dS_x, dS_y e dS_z con le normali orientate come i rispettivi versori della base. Sia $\boldsymbol{t_n}$ il vettore sforzo agente sulla faccia "inclinata" di area dS del tetraedro di Cauchy, con normale $\boldsymbol{\hat{n}}$. Il legame tra le aree delle facce del tetraedro è

$$dS = -\frac{dS_x}{n_x} = -\frac{dS_y}{n_y} = -\frac{dS_z}{n_z}, \tag{B.51}$$

avendo indicato con n_i le componenti cartesiane del versore normale $\boldsymbol{\hat{n}}$, tutte negative per come è stato definito il tetraedro rappresentato in figura B.2. Si scrive l'equilibrio del tetraedro, ricordando che i contributi di volume sono di un ordine inferiore rispetto a quelli di superficie, quando le dimensioni del tetraedro tendono a zero,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{0} &= \boldsymbol{t_n}dS + \boldsymbol{t_x}dS_x + \boldsymbol{t_y}dS_y + \boldsymbol{t_z}dS_z = \\ &= (\boldsymbol{t_n} - \boldsymbol{t_x}n_x - \boldsymbol{t_y}n_y - \boldsymbol{t_z}n_z)dS \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{t_n} = \boldsymbol{t_x}n_x + \boldsymbol{t_y}n_y + \boldsymbol{t_z}n_z\end{aligned} \tag{B.52}$$

Secondo la definizione intrinseca, il vettore $\boldsymbol{t_n}$ è un'applicazione lineare $\boldsymbol{t_n} : \mathcal{V} \rightarrow K = \mathbb{R}$, la cui azione su un vettore qualsiasi $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ può essere espressa in termini del prodotto scalare su $\mathcal{V}$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t_n}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{t_n} \cdot \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{t_x} \cdot \boldsymbol{v}n_x + \boldsymbol{t_y} \cdot \boldsymbol{v}n_y + \boldsymbol{t_z} \cdot \boldsymbol{v}n_z = \\ &= (\boldsymbol{t_x} \cdot \boldsymbol{v})(\boldsymbol{\hat{x}} \cdot \boldsymbol{\hat{n}}) + (\boldsymbol{t_y} \cdot \boldsymbol{v})(\boldsymbol{\hat{y}} \cdot \boldsymbol{\hat{n}}) + (\boldsymbol{t_z} \cdot \boldsymbol{v})(\boldsymbol{\hat{z}} \cdot \boldsymbol{\hat{n}}) = (\boldsymbol{\hat{e}_i} \cdot \boldsymbol{\hat{n}})(\boldsymbol{t_i} \cdot \boldsymbol{v}) = \\ &= [\boldsymbol{\hat{e}_i} \otimes \boldsymbol{t_i}]\,(\boldsymbol{\hat{n}}, \boldsymbol{v}) = [t_{i,j}\boldsymbol{\hat{e}_i} \otimes \boldsymbol{\hat{e}_j}]\,(\boldsymbol{\hat{n}}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\hat{n}}, \boldsymbol{v}),\end{aligned} \tag{B.53}$$

avendo definito $t_{i,j}$ la j-esima coordinata del vettore agente sulla i-esima faccia e introdotto la defintizione del tensore degli sforzi $\boldsymbol{T}$. É sottintesa la sommatoria sugli indici ripetuti. Sfruttando l'uguaglianza appena ricavata, valida per ogni vettore $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t_n} \cdot \boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{\hat{n}} \cdot \boldsymbol{\hat{e}_i})(\boldsymbol{t_i} \cdot \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\hat{n}} \cdot \boldsymbol{\hat{e}_i} \otimes \boldsymbol{t_i} \cdot \boldsymbol{v} = \\ &= \boldsymbol{\hat{n}} \cdot [t_{i,j}\boldsymbol{\hat{e}_i} \otimes \boldsymbol{\hat{e}_j}] \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\hat{n}} \cdot [T_{ij}\boldsymbol{\hat{e}_i} \otimes \boldsymbol{\hat{e}_j}] \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\hat{n}} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v},\end{aligned} \tag{B.54}$$

dove sono state definite le componenti $T_{ij} = t_{i,j}$ del tensore degli sforzi in una base cartesiana, si ricava la relazione tra il vettore sforzo $\boldsymbol{t_n}$ e la normale $\boldsymbol{\hat{n}}$,

$$\boldsymbol{t_n} = \boldsymbol{\hat{n}} \cdot \boldsymbol{T}. \tag{B.55}$$

■

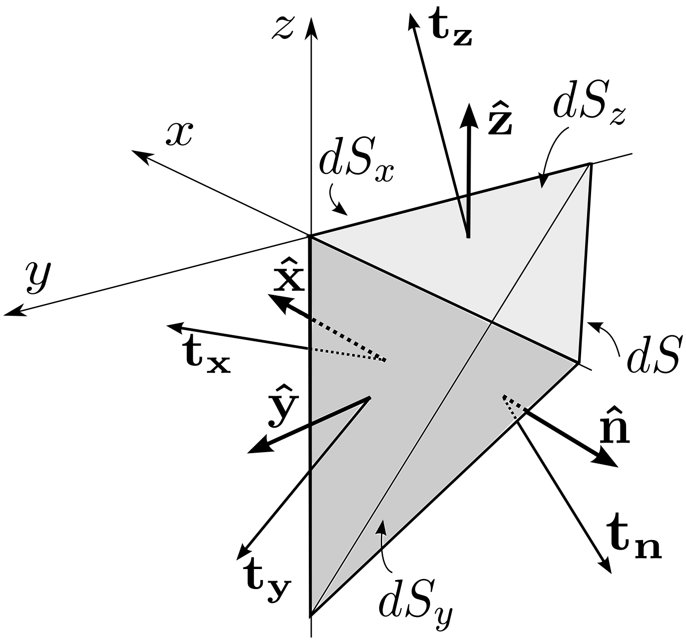


Figura B.2: tetraedro di Cauchy

B.2.6 Cosa non è stato detto

Molte cose non sono state dette. In particolare, è stato scelto di trattare i tensori su spazi forniti di prodotto interno e di non introdurre concetti di *algebra esterna*, che permetterebbero di generalizzare l'operazione di rotore e ricavare il teorema di Stokes,

$$\oint_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega, \tag{B.56}$$

di cui viene solo riportata l'espressione matematica senza fornire alcun dettaglio. Il teorema del rotore e della divergenza sono casi particolari del teorema di Stokes, nel cui enunciato compaiono i concetti di forma differenziale ω e di derivata esterna $d\omega$.
Il materiale fornito rappresenta un compromesso tra il vuoto totale sul calcolo tensoriale (del quale l'affermazione "un tensore è una matrice" è la regina indiscussa) e un corso intero dedicato al calcolo tensoriale. Lo scopo dei cenni veloci ad argomenti non trattati qui è quello di "mettere una pulce nell'orecchio" di chi legge, di mettere a conoscenza il lettore dell'esistenza di alcuni argomenti che permettono di generalizzare le operazioni vettoriali presentate nei primi corsi di Algebra e di spiegare in maniera rigorosa alcuni comportamenti strani o inaspettati (come quelli che si possono osservare con il prodotto vettoriale e il rotore), senza scoperchiare dei vasi di Pandora che porterebbero questa introduzione lontana dal suo scopo.

Per i più curiosi, viene messo a disposizione del materiale un più completo, che introduce concetti che non sono stati presentati qui e che generalizzano la trattazione, ma che la renderebbero inadatta ad essere svolta in poche ore per un pubblico formato da studenti del terzo anno di ingegneria, senza aggiungere particolari fondamentali per un utilizzo "cosciente" dei tensori durante questo corso e in quelli successivi.

Riferimenti.

Il testo di Bowen e Wang, *Introduction to vectors and tensors. Linear and multilinear algebra* può essere considerato un valido e completo riferimento, anche per il futuro. La lettura di questo testo non è sempre agevole e contiene sicuramente molto più di quanto sia indispensabile presentare in una prima e breve introduzione ai tensori, come è questa. Oltre alla sua qualità, è da apprezzare la disponibilità in rete dei due volumi, seguendo i seguenti collegamenti (sperando che siano ancora validi):

Vol. 1: Linear and Multilinear Algebra
Vol. 2: Vector and Tensor Analysis

Cosa è utile ripassare.

Questa può essere una buona occasione per ripassare alcuni concetti di algebra lineare, tra i quali quello di spazio vettoriale (definizione e proprietà, dimensione e base, ...), prodotto interno, linearità (e la differenza con l'essere "affine"), alla luce di quanto visto in questi paragrafi introduttivi sui tensori e del fatto che le equazioni della fisica hanno carattere tensoriale.

B.3 Calcolo vettoriale e tensoriale in coordinate curvilinee

Dopo aver introdotto alcuni concetti di algebra tensoriale nella sezione precedente, viene una breve introduzione al calcolo tensoriale. In questa sezione vengono introdotte alcune definizioni e operatori differenziali necessari per descrivere campi (funzioni dipendenti dallo spazio) tensoriali. Si ricavano le espressioni in coordinate degli operatori rispetto a sistemi di coordinate curvilinee generali. Si introducono poi i sistemi di coordinate curvilinee ortogonali. Infine, come esempio, si scrivono le espressioni di alcuni operatori differenziali e, come utile esempio per un corso di fluidodinamica, le equazioni di Navier-Stokes in un sistema di coordinate cilindriche. Per aiutare la comprensione dell'argomento, i concetti generali verranno specializzati ad alcuni sistemi coordinate particolari, come le coordinate cartesiane o cilindriche.

Lavoriamo per semplicità in uno spazio tridimensionale, descritto completamente dalle tre coordinate $\{q^1, q^2, q^3\}$: il vettore posizione $\boldsymbol{x}$ sarà quindi una funzione delle tre coordinate q^i:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(q^1, q^2, q^3) \tag{B.57}$$

Si suppone che la trasformazione di coordinate da $\boldsymbol{x}$ a $\{q^1, q^2, q^3\}$ sia biunivoca. Vengono fornite ora le definizioni di curve coordinate, superfici coordinate e base naturale indotta dalla parametrizzazione dello spazio.

Definizione B.3.1 — Curve coordinate. Le curve coordinate passanti per il punto $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(q_0^1, q_0^2, q_0^3)$ sono le curve ottenute al variare di una coordinata, tenendo fisse le altre due

$$\begin{cases} \ell_1 : & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(q^1, q_0^2, q_0^3) \\ \ell_2 : & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(q_0^1, q^2, q_0^3) \\ \ell_3 : & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(q_0^1, q_0^2, q^3). \end{cases} \tag{B.58}$$

Definizione B.3.2 — Superfici coordinate. Le superfici coordinate passanti per il punto $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(q_0^1, q_0^2, q_0^3)$ sono le superficie descritte da due coordinate, tenendo fissa l'altra

$$\begin{cases} S_1 : & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(q_0^1, q^2, q^3) \\ S_2 : & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(q^1, q_0^2, q^3) \\ S_3 : & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(q^1, q^2, q_0^3). \end{cases} \tag{B.59}$$

Definizione B.3.3 — Base naturale. Per ogni punto dello spazio tridimensionale $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(q^1, q^2, q^3)$, viene definita la base naturale $\{\boldsymbol{b}_i\}_{i=1:3}$, i cui elementi sono le derivate parziali del vettore posizione rispetto alle coordinate q^i,

$$\boldsymbol{b}_i = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q^i}. \tag{B.60}$$

La base reciproca $\{\boldsymbol{b}^i\}_{i=1:3}$ della base naturale viene definita tramite la definizione (B.3), cioé $\boldsymbol{b}^i \cdot \boldsymbol{b}_j = \delta^i_j$.

■ **Esempio B.3 — Coordinate cartesiane.** La posizione di un punto nello spazio tridimensionale viene definito dalle tre componenti $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$ nel sistema di coordinate cartesiane. Le curve coordinate sono rette parallele agli assi, mentre le superfici coordinate sono dei piani perpendicolari agli assi. I vettori della base naturale sono i tre versori $\hat{\boldsymbol{b}}_x = \hat{x}$, $\boldsymbol{b}_y = \hat{\boldsymbol{y}}$, $\boldsymbol{b}_z = \hat{\boldsymbol{z}}$ allineati con le linee coordinate, costanti in tutto lo spazio. ■

■ **Esempio B.4 — Coordinate cilindriche.** La posizione di un punto nello spazio tridimensionale viene definito dalle tre componenti $(q^1, q^2, q^3) = (r, \theta, z)$ nel sistema di coordinate cilindriche, come raffigurato in figura B.3. Le curve coordinate $\boldsymbol{x}(r_0, \theta_0, z)$ sono delle linee parallele all'asse z, le curve coordinate $\boldsymbol{x}(r_0, \theta, z_0)$ sono delle circonferenze con centro sull'asse z, mentre le curve coordinate $\boldsymbol{x}(r, \theta_0, z_0)$ sono dei raggi (semirette) perpendicolari all'asse z. Le superfici coordinate $S_3 = S_z$ sono dei piani perpendicolai all'asse z, le superfici coordinate $S_2 = S_\theta$ sono dei cilindri con asse coincidente con l'asse z, le superfici coordinate $S_1 = S_r$ sono dei semipiani delimitati dall'asse z, come raffigurato in figura B.3(a). I vettori della base naturale non sono costanti in spazio. É possibile calcolarli, esprimendo il vettore posizione in coordinate cartesiane e in coordinate cilindriche. In particolare $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{b}_x + y\boldsymbol{b}_y + z\boldsymbol{b}_z$, con

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z. \end{cases} \tag{B.61}$$

I vettori della base naturale possono essere calcolati inserendo queste espressioni nella formula che descrive la posizione nella base cartesiana, costante in spazio e quindi con derivate spaziali nulle. In figura B.3(b) sono rappresentati i vettori della base naturale

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_r = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r} = \cos\theta \boldsymbol{b}_x + \sin\theta \boldsymbol{b}_y = \hat{\boldsymbol{r}} \\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b}_\theta = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} = -r\sin\theta \boldsymbol{b}_x + r\cos\theta \boldsymbol{b}_y = r\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b}_z = \hat{\boldsymbol{z}}, \end{cases} \tag{B.62}$$

avendo introdotto i versori $\hat{\boldsymbol{r}} = \cos\theta \boldsymbol{b}_x + \sin\theta \boldsymbol{b}_y$, $\hat{\boldsymbol{t}} = -\sin\theta \boldsymbol{b}_x + \cos\theta \boldsymbol{b}_y$, comunemente utilizzati per descrivere i problemi in geometria cilindrica.

R I vettori della base naturale indotta dalle coordinate cilindriche **non** è costante nello spazio, è ortogonale (come vedremo nella prossima sezione) ma **non** è ortonormale, non ha dimensioni fisiche omogenee: mentre i vettori $\boldsymbol{b}_r$ e $\boldsymbol{b}_z$ hanno modulo 1, il vettore $\boldsymbol{b}_\theta$ ha modulo r, che ha le dimensioni fisiche di una lunghezza.

■

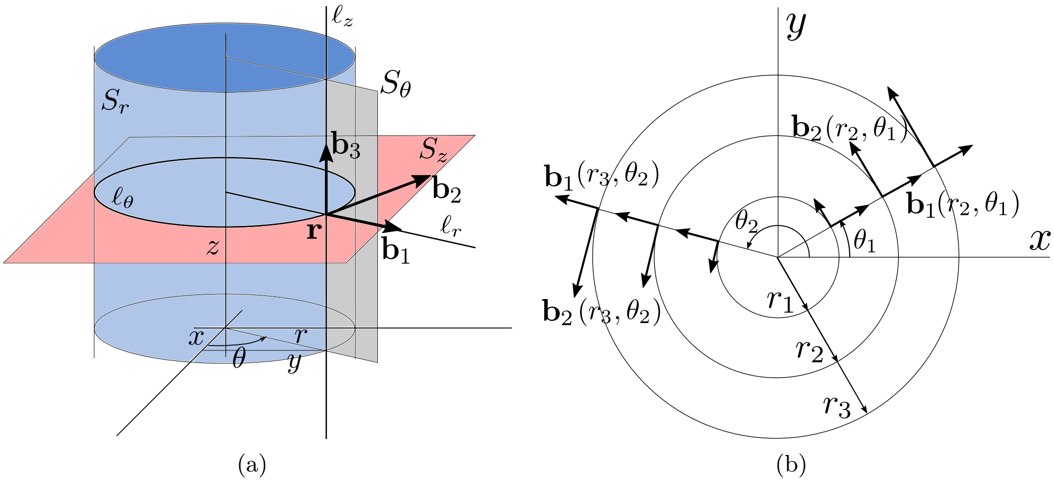


Figura B.3: Sistema di coordinate cilindriche. (a) Curve e superfici coordinate per un sistema di coordinate cilindriche. (b) Rappresentazione bidimensionale della base naturale - coordinate polari.

B.3.1 Tensore metrico.

Definizione B.3.4 — Tensore metrico. Il tensore metrico è un tensore del secondo ordine (o meglio un campo tensoriale, poiché in generale è funzione della coordinata spaziale) definito come il tensore le cui componenti covarianti g_{ik} e contravarianti g^{ik} sono rispettivamente i prodotti scalari dei vettori $\boldsymbol{b}_i$ della base naturale e dei vettori della base reciproca $\boldsymbol{b}^i$. Il tensore metrico $\boldsymbol{g}$ viene scritto nella base prodotto naturale e nella sua reciproca come

$$\boldsymbol{g} = g_{ij}\boldsymbol{b}^i \otimes \boldsymbol{b}^j = g^{ij}\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j, \tag{B.63}$$

con le componenti definite come

$$g_{ij} = \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j, \qquad g^{ij} = \boldsymbol{b}^i \cdot \boldsymbol{b}^j. \tag{B.64}$$

R Il tensore metrico è simmetrico.

Il tensore metrico caratterizza la geometria dello spazio (o meglio della varietà $\boldsymbol{x}(q^i)$ descritta dai parametri q^i). I concetti quali distanza, angolo, lunghezza di una curva possono essere espressi in funzione del tensore metrico $\boldsymbol{g}$. Ad esempio, è possibile scrivere la lunghezza ds dell'elemento elementare $d\boldsymbol{x} = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q^i} dq^i = \boldsymbol{b}_i dq^i$ come

$$ds^2 = |d\boldsymbol{x}|^2 = d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{b}_i dq^i\right) \cdot \left(\boldsymbol{b}_j dq^j\right) = \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j dq^i dq^j = g_{ij} dq^i dq^j, \tag{B.65}$$

dove, come sempre, sono sottointese le sommatorie sugli indici ripetuti. Come già visto in precedenza, il tensore metrico risulta utile nel passaggio dalla componenti contravarianti a quelle covarianti e viceversa, consentendo di esprimere un vettore della base $\{\boldsymbol{b}_k\}$ nella base $\{\boldsymbol{b}^k\}$ e viceversa tramite le (B.6)

$$\boldsymbol{b}_i = g_{ik}\boldsymbol{b}^k, \quad \boldsymbol{b}^i = g^{ik}\boldsymbol{b}_k, \tag{B.66}$$

con $g_{ij} = \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j$ e $g^{ij} = \boldsymbol{b}^i \cdot \boldsymbol{b}^j$. In maniera analoga è possibile passare dalle coordinate contravarianti a quelle covarianti e viceversa tramite le (B.9). Ad esempio, per un vettore $\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{b}_i = v_i \boldsymbol{b}^i$,

$$v^i = g^{ik} v_k, \qquad v_i = g_{ik} v^k. \tag{B.67}$$

Secondo le (B.40), per un tensore del secondo ordine $\boldsymbol{S} = S^{ij} \boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j = S^i{}_j \boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}^j = S_i{}^j \boldsymbol{b}^i \otimes \boldsymbol{b}_j = S_{ij} \boldsymbol{b}^i \otimes \boldsymbol{b}^j$ si ottiene

$$S^{ij} = g^{jk} S^i{}_k = g^{ik} S_k{}^j = g^{ik} g^{jl} S_{kl}. \tag{B.68}$$

■ **Esempio B.5 — Coordinate cartesiane.** Poichè i vettori della base naturale sono costanti e ortonormali in tutto lo spazio, dalla definizione (B.64) segue che il tensore metrico $g_i k$ è uguale all'identità. ■

■ **Esempio B.6 — Coordinate cilindriche.** Svolgendo i prodotti scalari tra i vettori della base del sistema di coordinate cilindriche, le componenti g_{ik} del tensore metrico possono essere raccolte nella matrice.

$$\begin{bmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} & g_{rz} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta z} \\ g_{zr} & g_{z\theta} & g_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{B.69}$$

Il tensore metrico è diagonale, poichè la base è ortogonale. Le componenti covarianti g^{ik} del tensore metrico si ottengono dall'inversione dei simboli g_{ik}

$$\begin{bmatrix} g^{rr} & g^{r\theta} & g^{rz} \\ g^{\theta r} & g^{\theta\theta} & g^{\theta z} \\ g^{zr} & g^{z\theta} & g^{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{B.70}$$

La base reciproca è $\boldsymbol{b}^r = \boldsymbol{b}_r$, $\boldsymbol{b}^\theta = r^{-2} \boldsymbol{b}_\theta = r^{-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{b}^z = \boldsymbol{b}_z$. ■

B.3.2 Simboli di Christoffel.

I vettori della base naturale $\boldsymbol{b}_i$ sono definiti come le derivate parziali del vettore posizione $\boldsymbol{x}$ rispetto alle coordinate q^i utilizzate per descrivere lo spazio. In generale, quindi anche i vettori della base naturale non sono costanti nello spazio, ma sono funzioni delle coordinate q^i. Se i vettori della base variano dello spazio, le loro derivate rispetto ai parametri q^i non sono nulle e possono essere espresse nella base naturale e nella base reciproca come

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}_i}{\partial q^j} = \Gamma_{ijk} \boldsymbol{b}^k = \Gamma^k_{ij} \boldsymbol{b}_k, \tag{B.71}$$

dove sono stati introdotti i simboli di Christoffel di primo e di secondo tipo, Γ_{ijk} e Γ^k_{ij} rispettivamente. In particolare, dalla (B.71), i simboli di Christoffel Γ_{ijk} e Γ^k_{ij} di primo e secondo tipo possono essere definiti come la k-esima componente covariante e contravariante della derivata $\partial \boldsymbol{b}_i / \partial q^j$ rispettivamente. Sfruttando la definizione di base reciproca, è possibile calcolare i simboli di Christoffel dalle (B.71) come

$$\Gamma_{ijk} = \frac{\partial \boldsymbol{b}_i}{\partial q^j} \cdot \boldsymbol{b}_k, \quad \Gamma^k_{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{b}_i}{\partial q^j} \cdot \boldsymbol{b}^k. \tag{B.72}$$

Essendo le componenti delle derivate prime dei vettori della base naturale, a sua volta derivate prime del vettore posizione, i simboli di Christoffel rappresentano le componenti delle derivate seconde del vettore posizione $\boldsymbol{x}$ rispetto alle coordinate q^i,

$$\Gamma^k_{ji} \boldsymbol{b}_k = \Gamma_{jik} \boldsymbol{b}^k = \frac{\partial \boldsymbol{b}_j}{\partial q^i} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial q^j \partial q^i} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial q^i \partial q^j} = \frac{\partial \boldsymbol{b}_i}{\partial q^j} = \Gamma_{ijk} \boldsymbol{b}^k = \Gamma^k_{ij} \boldsymbol{b}_k, \tag{B.73}$$

dove l'uguaglianza delle derivate seconde miste è verificata sotto le ipotesi del *teorema di Schwarz*. Uguagliando le componenti alle estremità dell'uguaglianza precedente, si ottengono le condizioni di simmetria per i simboli di Christoffel,

$$\Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij}, \quad \Gamma_{jik} = \Gamma_{ijk}. \tag{B.74}$$

R I simboli di Christoffel non costituiscono le componenti di un tensore, poichè non seguono la (B.43) nel cambio di sistemi di coordinate.

■ Esempio B.7 — Coordinate cartesiane. Poichè i vettori della base naturale sono costanti in tutto lo spazio, i simboli di Christoffel per il sistema di coordinate cartesiane sono identicamente nulli. ■

■ Esempio B.8 — Coordinate cilindriche. Vengono calcolati qui solo i simboli di Christoffel di secondo tipo (che verranno poi utilizzati in seguito). Da un calcolo diretto dei simboli di Christoffel di secondo tipo, si ottiene che gli unici simboli di Christoffel diversi da zero sono

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = r^{-1}, \quad \Gamma^1_{22} = -r, \tag{B.75}$$

dove l'indice 1 è associato alla coordinata r, l'indice 2 alla coordinata θ. Infatti

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} &= \frac{\partial \boldsymbol{b}_1}{\partial q^2} \cdot \boldsymbol{b}^2 = \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot (r^{-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = r^{-1} \\ \Gamma^1_{22} &= \frac{\partial \boldsymbol{b}_2}{\partial q^2} \cdot \boldsymbol{b}^1 = -r\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} = -r. \end{aligned} \tag{B.76}$$

■

B.3.3 Operatori differenziali

In questo paragrafo vengono definiti alcuni operatori differenziali sui campi tensoriali, cioè tensori che sono funzioni dello spazio. Un operatore è una funzione che prende come argomento l'oggetto al quale viene applicato, per restituirne un altro. In termini generali, un operatore $P : U \to V$, prende un elemento di U e ne restituisce uno di V,

$$\boldsymbol{v} = P(\boldsymbol{u}), \tag{B.77}$$

con $\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{v} \in V$. Per ottenere un vettore di $\boldsymbol{v} \in V$, l'operatore P deve avere come argomento (deve essere applicato a) un elemento $\boldsymbol{u} \in U$. Se P è un operatore lineare spesso si possono omettere le parentesi e indicare semplicemente $\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{u}$. L'ordine di un operatore coincide con il massimo ordine delle derivate (in questo caso spaziali) contenute nella definizione dell'operatore. Inizialmente vengono introdotti gli operatori di primo ordine che non richiedono l'introduzione di prodotti esterni (parenti dei prodotti vettoriali). Viene poi introdotto il concetto di rotore di un campo vettoriale. Infine viene introdotto il laplaciano, un operatore del secondo ordine definito come la divergenza di un gradiente.

R Diversi autori usano convenzioni diverse per la definizione degli operatori differenziali, come ad esempio la divergenza di un tensore di secondo ordine. Nel caso di tensori simmetrici (come sono i tensori degli sforzi per materiali non polari), le due diverse definizioni di divergenza di un tensore portano allo stesso risultato, grazie alla simmetria del tensore. Si rimanda al paragrafo sulla divergenza per una discussione più approfondita.

Operatore B.3.1 — Gradiente. L'operatore di gradiente è connesso alla derivata direzionale di un campo tensoriale. In particolare, la derivata direzionale di un tensore $\boldsymbol{T}$ in una qualsiasi direzione $\boldsymbol{c}$ di un campo tensoriale è il prodotto scalare tra il gradiente del tensore e il vettore $\boldsymbol{c}$,

$$\mathrm{grad}\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{c} = \frac{d}{d\alpha}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{c})\bigg|_{\alpha=0} . \tag{B.78}$$

L'operatore di gradiente alza di 1 l'ordine del tensore al quale viene applicato: il gradiente del tensore $\boldsymbol{T}$ può essere scritto sfruttando la definizione della base naturale e della sua reciproca come

$$\mathrm{grad}\boldsymbol{T} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial q^i} \otimes \boldsymbol{b}^i, \tag{B.79}$$

dove i vettori $\boldsymbol{b}^i$ sono quelli della base reciproca della base naturale e, come al solito, è sottintesa la sommatoria sugli indici ripetuti. É possibile indicare l'operatore gradiente con G, senza applicarlo ad alcun tensore, rimuovendo l'argomento dalla (B.79),

$$G\_ = \mathrm{grad}\ \_ = \frac{\partial \_}{\partial q^i} \otimes \boldsymbol{b}^i, \tag{B.80}$$

avendo lasciato lo spazio _ per inserire l'argomento dell'operatore gradiente e avendo omesso le parentesi poichè il gradiente è un operatore lineare. Il gradiente di un campo tensoriale $\boldsymbol{T}$ viene ottenuto semplicemente inserendo $\boldsymbol{T}$ negli spazi indicati nella (B.80).

Il gradiente di un tensore di ordine r ha ordine $r+1$. Per esempio, il gradiente di un campo scalare f è il vettore $\mathrm{grad}f$

$$\mathrm{grad}f = \boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial q^i}\boldsymbol{b}^i = \frac{\partial f}{\partial q^k} g^{ik}\boldsymbol{b}_i. \tag{B.81}$$

Il gradiente di un campo vettoriale è il campo tensoriale del secondo ordine che viene scritto nella base naturale come

$$\mathrm{grad}\boldsymbol{v} = \left[\frac{\partial v^i}{\partial q^k} + \Gamma^i_{lk} v^l\right] \boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}^k, \tag{B.82}$$

dove sono sottointese le sommatorie sugli indici ripetuti. Il gradiente di un campo tensoriale del secondo ordine $\boldsymbol{S}$ è il campo tensoriale del terzo ordine

$$\mathrm{grad}\boldsymbol{S} = \left[\frac{\partial S^{ij}}{\partial q^k} + \Gamma^i_{kl} S^{lj} + \Gamma^j_{kl} S^{il}\right] \boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j \otimes \boldsymbol{b}^k =: \nabla_k S^{ij} \boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j \otimes \boldsymbol{b}^k, \tag{B.83}$$

dove è stata introdotta la definizione di **derivata covariante** $\nabla_k S^{ij}$ della componente S^{ij} rispetto alla coordinata q^k, come generalizzazione delle derivate parziali. Un campo tensoriale è costante nello spazio se sono nulle tutte le sue derivate covarianti.

■ **Esempio B.9 — Coordinate cartesiane.** Poichè la base naturale e la sua reciproca coincidono con la base ortonormale $\{\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}\}$ e tutti i simboli di Christoffel per le coordinate cartesiane sono nulli, dalla (B.81) si ottiene la forma già nota del gradiente di un campo scalare f

$$\mathrm{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}. \tag{B.84}$$

Il gradiente di un vettore $\boldsymbol{v} = v^1 \boldsymbol{b}_1 + v^2 \boldsymbol{b}_2 + v^3 \boldsymbol{b}_3 = v_x \hat{\boldsymbol{x}} + v_y \hat{\boldsymbol{y}} + v_z \hat{\boldsymbol{z}}$ è

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}\boldsymbol{v} =& \frac{\partial v_x}{\partial x} \hat{\boldsymbol{x}} \otimes \hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \hat{\boldsymbol{x}} \otimes \hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \hat{\boldsymbol{x}} \otimes \hat{\boldsymbol{z}} + \\
&+ \frac{\partial v_y}{\partial x} \hat{\boldsymbol{y}} \otimes \hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \hat{\boldsymbol{y}} \otimes \hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \hat{\boldsymbol{y}} \otimes \hat{\boldsymbol{z}} + \\
&+ \frac{\partial v_z}{\partial x} \hat{\boldsymbol{z}} \otimes \hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \hat{\boldsymbol{z}} \otimes \hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \hat{\boldsymbol{z}} \otimes \hat{\boldsymbol{z}},
\end{aligned} \tag{B.85}$$

le cui componenti possono essere raccolte nella matrice

$$\begin{bmatrix}
\frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\
\frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\
\frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z}
\end{bmatrix} . \tag{B.86}$$

■

■ **Esempio B.10 — Coordinate cilindriche.** Il gradiente in coordinate cilindriche di un campo scalare f può essere scritto nella base ortonormale $\{\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{z}}\}$ come

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\boldsymbol{z}}, \tag{B.87}$$

avendo utilizzato la (B.81) ed essendosi ricordati che $\hat{\boldsymbol{b}}_2 = \hat{\boldsymbol{\theta}}/r$. Da quest'ultima relazione tra i vettori delle basi naturale e ortonormale si ottiene il legame $v^2 = r v_\theta$ tra le componenti del vettore $\boldsymbol{v} = v^1 \hat{\boldsymbol{b}}_1 + v^2 \hat{\boldsymbol{b}}_2 + v^3 \hat{\boldsymbol{b}}_3 = v_r \hat{\boldsymbol{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + v_z \hat{\boldsymbol{z}}$ espresse in queste basi. Utilizzando queste relazioni nella formula (B.82) del gradiente di un campo vettoriale, è possibile scrivere

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}\boldsymbol{v} =& \left[\frac{\partial v^i}{\partial q^k} + \Gamma^i_{lk} v^l \right] \boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}^k = \\
=& \frac{\partial v^1}{\partial q^1} \boldsymbol{b}_1 \otimes \boldsymbol{b}^1 + \left(\frac{\partial v^1}{\partial q^2} + \Gamma^1_{22} v^2 \right) \boldsymbol{b}_1 \otimes \boldsymbol{b}^2 + \frac{\partial v^1}{\partial q^3} \boldsymbol{b}_1 \otimes \boldsymbol{b}^3 + \\
&+ \left(\frac{\partial v^2}{\partial q^1} + \Gamma^2_{21} v^2 \right) \boldsymbol{b}_2 \otimes \boldsymbol{b}^1 + \left(\frac{\partial v^2}{\partial q^2} + \Gamma^2_{12} v^1 \right) \boldsymbol{b}_2 \otimes \boldsymbol{b}^2 + \frac{\partial v^2}{\partial q^3} \boldsymbol{b}_2 \otimes \boldsymbol{b}^3 + \\
&+ \frac{\partial v^3}{\partial q^1} \boldsymbol{b}_3 \otimes \boldsymbol{b}^1 + \frac{\partial v^3}{\partial q^2} \boldsymbol{b}_3 \otimes \boldsymbol{b}^2 + \frac{\partial v^3}{\partial q^3} \boldsymbol{b}_3 \otimes \boldsymbol{b}^3 = \\
=& \frac{\partial v_r}{\partial r} \hat{\boldsymbol{r}} \otimes \hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \hat{\boldsymbol{r}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \hat{\boldsymbol{r}} \otimes \hat{\boldsymbol{z}} + \\
&+ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{z}} + \\
&+ \frac{\partial v_z}{\partial r} \hat{\boldsymbol{z}} \otimes \hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{z}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \hat{\boldsymbol{z}} \otimes \hat{\boldsymbol{z}},
\end{aligned} \tag{B.88}$$

avendo utilizzato i valori dei simboli di Christoffel ricavati in precedenza. Si noti come l'annullarsi delle derivate parziali delle componeti del vettore non implichi l'uniformità (costanza in spazio e quindi gradiente nullo) del campo vettoriale: devono annullarsi le derivate covarianti poichè un campo vettoriale uniforme espresso in coordinate cilindriche (come in ogni altro sistema di coordinate diverso da quello cartesiano) non ha componenti costanti in spazio. ■

Operatore B.3.2 — Divergenza. La divergenza di un campo tensoriale è definito dalla contrazione degli ultimi due indici del gradiente del campo tensoriale stesso.

$$\mathrm{div}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{end}}^{\mathrm{end}-1}(\mathrm{grad}\boldsymbol{T}). \tag{B.89}$$

L'operatore di divergenza abbassa di 1 l'ordine del tensore al quale viene applicato: la divergenza di un tesnore di ordine r ha ordine $r-1$. Non può quindi essere applicato a un campo scalare (tensore di ordine 0). La divergenza di un campo vettoriale espresso nella base naturale è

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial v^i}{\partial q^i} + \Gamma^i_{il} v^l = \nabla_i v^i. \tag{B.90}$$

La divergenza di un tensore $\boldsymbol{S}$ del secondo ordine è il campo vettoriale che viene scritto nella base naturale come

$$\mathrm{div}\boldsymbol{S} = \left[\frac{\partial S^{ij}}{\partial q^j} + \Gamma^i_{jl} S^{lj} + \Gamma^j_{jl} S^{il}\right] \boldsymbol{b}_i = \nabla_j S^{ij} \boldsymbol{b}_i. \tag{B.91}$$

■ **Esempio B.11 — Coordinate cartesiane.** Poichè i simboli di Christoffel sono identicamente nulli e i vettori della base naturale coincidono con la terna ortonormale $\{\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}\}$ nei sistemi di coordinate cartesiane, dalla (B.90) si ottiene la forma già nota della divergenza di un campo vettoriale $\boldsymbol{v}$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{B.92}$$

■

■ **Esempio B.12 — Coordinate cilindriche.** In coordinate cilindriche gli unici simboli di Christoffel non nulli sono $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = r^{-1}$, $\Gamma^1_{22} = -r$. Utilizzando la (B.90), la divergenza di un campo vettoriale $\boldsymbol{v} = v^1 \hat{\boldsymbol{b}}_1 + v^2 \hat{\boldsymbol{b}}_2 + v^3 \hat{\boldsymbol{b}}_3 = v_r \hat{\boldsymbol{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + v_z \hat{\boldsymbol{z}}$ viene scritta in coordinate cilindriche come

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} &= \frac{\partial v^1}{\partial q^1} + \frac{\partial v^2}{\partial q^2} + \Gamma^2_{12} v^1 + \frac{\partial v^3}{\partial q^3} = \\
&= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial (v_\theta / r)}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{B.93}$$

■

Nello studio della meccanica dei continui viene spesso utilizzata una definizione alternativa di divergenza, che non è equivalente a quella data in precedenza. La divergenza di un tensore del secondo ordine $\boldsymbol{S}$ (come, ad esempio, il tensore degli sforzi) viene definita come

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S} = \nabla_i S_{ij} \boldsymbol{b}^j, \tag{B.94}$$

come se la contrazione avvenisse tra il primo e l'ultimo indice del gradiente del tensore $\boldsymbol{S}$. É quindi possibile definire l'operatore $\boldsymbol{\nabla}\cdot$, diverso dalla divergenza definita dalla (B.89), come

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{T} = \boldsymbol{C}^1_{\mathrm{end}}(\mathrm{grad}\boldsymbol{T}), \tag{B.95}$$

quando viene applicato a un tensore $\boldsymbol{T}$ di ordine qualsiasi maggiore o uguale a 1. Questo operatore può essere pensato come il prodotto "dot" tra il "vettore formale" $\boldsymbol{\nabla} = \nabla_k \boldsymbol{b}^k$ e il tensore $S^{ij}\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S} = (\nabla_k \boldsymbol{b}^k) \cdot (S_{ij}\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j) = \nabla_k S_{ij} \underbrace{\boldsymbol{b}^k \cdot \boldsymbol{b}_i}_{\delta_i^k} \otimes \boldsymbol{b}_j = \nabla_i S_{ij} \boldsymbol{b}_j \tag{B.96}$$

Il risultato di questo operatore applicato a un tensore del secondo ordine $\boldsymbol{S}$ può quindi essere scritto nella base naturale come

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S} = \left[\frac{\partial S^{ij}}{\partial q^i} + \Gamma^i_{il} S^{lj} + \Gamma^j_{il} S^{il} \right] \boldsymbol{b}_j . \tag{B.97}$$

R Gli operatori div e $\boldsymbol{\nabla}\cdot$ danno lo stesso risultato se applicati a campi vettoriali o a tensori del secondo ordine simmetrici, come il tensore degli sforzi per continui non polari.

R Utilizzando il lemma A.1.3 e l'espressione del vettore sforzo (B.55) in componenti cartesiane (per le quali la base reciproca coincide con la base ortonormale naturale e le componenti contravarianti e coavarianti coincidono con le variabili fisiche, vedere §B.3.4), è possibile trasformare il contributo degli sforzi di superficie $\boldsymbol{t_n}$ in un integrale di volume,

$$\oint_S \boldsymbol{t_n} = \oint_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{T} = \oint_S n_i T_{ij} = \int_V \partial_i T_{ij} = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{T}, \tag{B.98}$$

avendo indicato la superficie chiusa del volume V con $S = \partial V$ e riconosciuto l'espressione in componenti cartesiane (per le quali le derivate covarianti coincidono con le derivate parziali) dell'operatore $\boldsymbol{\nabla}\cdot$ applicato al tensore degli sforzi $\boldsymbol{T}$. Poiché il tensore degli sforzi per continui non polari è simmetrico, la confusione generata dalle due definizioni diverse di divergenza usate da alcuni autori è solo apparente quando applicata al tensore degli sforzi.

Analogamente con quanto fatto per l'operatore $\boldsymbol{\nabla}\cdot$, è possibile definire l'operatore $\boldsymbol{\nabla}$ (controparte dell'operatore gradiente), tramite la sua azione su un campo tensoriale. In particolare può essere pensato come il prodotto tensoriale tra il "vettore formale" $\boldsymbol{\nabla} = \nabla_k \boldsymbol{b}^k$ e il tensore $\boldsymbol{T}$ al quale è applicato

$$\boldsymbol{\nabla T} = (\nabla_k \boldsymbol{b}^k) \otimes \boldsymbol{T}. \tag{B.99}$$

Per esempio, per un tensore del secondo ordine $\boldsymbol{S} = S^{ij}\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j$

$$\boldsymbol{\nabla S} = \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{S} = (\nabla_k \boldsymbol{b}^k) \otimes (S^{ij}\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j) = \nabla_k S^{ij} \boldsymbol{b}^k \otimes \boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j . \tag{B.100}$$

Nel caso di gradiente di un campo scalare, l'operatore $\boldsymbol{\nabla}$ così definito e l'operatore gradiente danno come risultato lo stesso campo vettoriale.

R Le equazioni vettoriali (o tensoriali) e le identità vettoriali (o tensoriali) possono essere scritte nel sistema di riferimento più conveniente. Durante il corso di Fluidodinamica si incontreranno alcune identità vettoriali utili all'elaborazione delle equazioni. Per chi volesse provare a dimostrarle, o dimostrarne almeno qualcuna, può usare le coordinate cartesiane, per le quali i simboli di Christoffel sono nulli e le derivate covarianti si riducono alle derivate parziali. La validità di un'identità vettoriale non dipende dal sistema di riferimento in cui viene scritta. Per fornire un primo esempio, si dimostra che

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (a\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\nabla} a \cdot \boldsymbol{v} + a\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}, \tag{B.101}$$

dove a e $\boldsymbol{v}$ sono rispettivamente un campo scalare e vettoriale definiti nello spazio $\mathbb{R}^2$. Il campo vettoriale viene scritto in coordinate cartesiane come $\boldsymbol{v} = v_x\hat{\boldsymbol{x}} + v_y\hat{\boldsymbol{y}}$. Da un calcolo diretto, si ottiene

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \cdot (a\boldsymbol{v}) &= \frac{\partial(av_x)}{\partial x} + \frac{\partial(av_y)}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial a}{\partial x}v_x + a\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}v_y + a\frac{\partial v_y}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial a}{\partial x}v_x + \frac{\partial a}{\partial y}v_y + a\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = \boldsymbol{\nabla} a \cdot \boldsymbol{v} + a\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}.\end{aligned} \tag{B.102}$$

Mentre è stato possibile introdurre gli operatore gradiente e divergenza utilizzando gli strumenti del calcolo tensoriale, sarebbe necessario introdurre dei concetti di *Algebra Esterna* per introdurre l'operazione di *prodotto esterno* della quale il rotore di un campo vettoriale è un caso particolare. Essendo questa una prima introduzione al calcolo tensoriale, la trattazione generale di questa operazione (e di molto altro, come ad esempio delle forme differenziali) va ben oltre lo scopo di questo documento. Per quanto ci serve, è sufficiente saper operare con il rotore su campi vettoriali e sapere esprimere le componenti fisiche del rotore in sistemi di coordinate cartesiane (per le quali la base naturale e la sua base reciproca coincidono con la base ortonormale $\{\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}\}$ e le componenti contravarianti e covarianti coincidono con quelle fisiche).

Operatore B.3.3 — Rotore. Il rotore di un campo vettoriale $\boldsymbol{v}$ può essere scritto in coordinate cartesiane tramite l'utilizzo dei simboli ϵ_{ijk} come

$$\text{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}, \quad a_i = \epsilon_{ijk}\partial_j v_k, \tag{B.103}$$

dove la derivata parziale $\partial/\partial x_j$ rispetto alla coordinata x_j è stat indicata con ∂_j per brevità. I simboli ϵ_{ijk} assumono valore 1 se gli indici $\{ijk\}$ formano una permutazione pari di $\{1,2,3\}$, -1 se gli indici $\{ijk\}$ formano una permutazione dispari di $\{1,2,3\}$, 0 se ci sono degli indici ripetuti.

Identificando con 1 la coordinata x, con 2 la coordinata y, con 3 la coordinata z, i simboli ϵ_{ijk} diversi da zero sono

$$\begin{aligned}\epsilon_{123} &= 1, & \epsilon_{132} &= -1 \\ \epsilon_{231} &= 1, & \epsilon_{213} &= -1 \\ \epsilon_{321} &= 1, & \epsilon_{312} &= -1.\end{aligned} \tag{B.104}$$

Le componenti cartesiane del rotore $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}$ sono

$$\begin{cases} a_x = \epsilon_{xyz}\partial_y v_z + \epsilon_{xzy}\partial_z v_y = \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ a_y = \epsilon_{yzx}\partial_z v_x + \epsilon_{yxz}\partial_x v_z = \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ a_z = \epsilon_{zxy}\partial_x v_y + \epsilon_{zyx}\partial_y v_x = \partial_x v_y - \partial_y v_x. \end{cases} \tag{B.105}$$

Si osservi che si è ottenuto lo stesso risultato che si ottiene usando il determinante simbolico

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}. \tag{B.106}$$

R I simboli ϵ_{ijk} possono essere usati anche per esprimere il prodotto vettoriale tra due vettori, caso particolare del prodotto esterno tra tensori. Le componenti cartesiane del prodotto vettoriale $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ sono $a_i = \epsilon_{ijk} b_j c_k$.

R I simboli ϵ_{ijk} rappresentano le componenti dello pseudo-tensore di Levi-Civita, o di Ricci. Solo per curiosità, uno pseudo-tensore si trasforma come un tensore per cambi di coordinate che preservano l'orientazione dello spazio, mentre deve essere aggiunto un segno meno alle componenti se la trasformazione di coordinate cambia l'orientazione dello spazio. Un esempio di trasformazione di coordinate che non conserva l'orientamento dello spazio è una riflessione rispetto a un piano. Ad esempio, date le coordinate cartesiane (x, y, z), la riflessione rispetto al piano $x = 0$ è definisce le nuove coordinate come $(q^1, q^2, q^3) = (-x, y, z)$. Se la base $\{\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}\}$ è destrorsa (regola della mano destra), la base naturale nelle coordinate (q^1, q^2, q^3) è sinistrorsa: poichè l'orientazione dello spazio è invertita, bisogna prestare attenzione a svolgere un prodotto vettoriale in questo sistema di coordinate.

Operatore B.3.4 — Laplaciano. L'operatore laplaciano è un'operatore del secondo ordine definito come la divergenza del gradiente,

$$\Delta \boldsymbol{T} = \mathrm{div}(\mathrm{grad} \boldsymbol{T}). \tag{B.107}$$

Il laplaciano lascia inalterato l'ordine del tensore al quale è applicato.

■ **Esempio B.13 — Coordinate cartesiane.** Il laplaciano di un campo scalare f può essere espresso in un sistema di coordinate cartesiane come

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \tag{B.108}$$

■

■ **Esempio B.14 — Coordinate cilindriche.** L'espressione in coordinate cilindriche del laplaciano applicato a campi scalari e vettoriali viene fornita in §B.3.5. ■

Operatore B.3.5 — Operatore di advezione. L'operatore di advezione $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\_$, dovuta al campo vettoriale $\boldsymbol{u}$, applicato a una quantità tensoriale $\boldsymbol{T}$ può essere definito come il prodotto scalare del campo vettoriale $\boldsymbol{u}$ con il tensore $\boldsymbol{\nabla T}$,

$$(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{T} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla T}. \tag{B.109}$$

Questo operatore rappresenta il trasporto della quantità alla quale viene applicato (il tensore $\boldsymbol{T}$), dovuta al "campo di velocità" $\boldsymbol{u}$. L'operatore advezione lascia inalterato l'oridne del tensore al quale è applicato.

R L'operatore di advezione è diverso dall'operatore $\boldsymbol{\nabla} \cdot$ applicato al vettore $\boldsymbol{u}$. Il prodotto scalare formale tra un vettore, $\boldsymbol{u}$, e un vettore formale, $\boldsymbol{\nabla}$, non è commutativo. Quando applicati a un campo vettoriale, l'operatore $\boldsymbol{\nabla} \cdot \_$ coincide con l'operatore di divergenza div _ e restituiscono un campo scalare. L'operatore $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\_$, deve essere applicato a un campo vettoriale $\boldsymbol{v}$ per restituisce un vettore e non rimanere soltanto un operatore. Si rimanda all'esempio in coordinate cartesiane

L'operatore di advezione applicato a un campo scalare f viene espresso nella base naturale come

$$(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}) f = \left(u^i \underbrace{\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}^k}_{\delta_i^k} \nabla_{k\_} \right) f = \left(u^i \nabla_{i\_} \right) f = u^i \nabla_i f. \tag{B.110}$$

L'operatore di advezione applicato a un campo vettoriale $\boldsymbol{v}$ viene espresso nella base naturale come

$$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = \left(u^i\boldsymbol{b}_i\right)\cdot\left(\nabla_j v^k \boldsymbol{b}^j\otimes\boldsymbol{b}_k\right) = u^i\nabla_j v^k \underbrace{\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{b}^j}_{\delta_i^j}\otimes\boldsymbol{b}_k = u^i\left[\frac{\partial v^k}{\partial q^j}+\Gamma^k_{jl}v^l\right]\boldsymbol{b}_k. \quad \text{(B.111)}$$

L'operatore di advezione applicato a un campo tensoriale del secondo ordine $\boldsymbol{S}$ viene espresso nella base naturale come

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{S} = u^k\nabla_k S^{ij}\boldsymbol{b}_i\otimes\boldsymbol{b}_j = u^k\left[\frac{\partial S^{ij}}{\partial q^k}+\Gamma^i_{kl}S^{lj}+\Gamma^j_{kl}S^{il}\right].\boldsymbol{b}_i\otimes\boldsymbol{b}_j \quad \text{(B.112)}$$

■ **Esempio B.15 — Coordinate cartesiane.** L'espressione in coordinate cartesiane dell'operatore di advezione applicato al campo scalare f è

$$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})f = u_x\frac{\partial f}{\partial x}+u_y\frac{\partial f}{\partial y}+u_z\frac{\partial f}{\partial z} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}f. \quad \text{(B.113)}$$

L'espressione in coordinate cartesiane dell'operatore di advezione applicato al campo vettoriale $\boldsymbol{v}$ è

$$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}u_x)\hat{\boldsymbol{x}}+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}u_y)\hat{\boldsymbol{y}}+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}u_z)\hat{\boldsymbol{z}}, \quad \text{(B.114)}$$

avendo utilizzato il risultato dell'operatore di advezione applicato a un campo scalare, appena ricavata. ■

■ **Esempio B.16 — Coordinate cilindriche.** L'espressione in coordinate cilindriche dell'operatore di advezione applicato a un campo vettoriale viene fornita in §B.3.5. ■

B.3.4 Coordinate curvilinee ortogonali

Le coordinate curvilinee ortogonali sono n caso particolare di coordinate curvilinee, caratterizzate dalla condizione di ortogonalità tra gli elementi della base $\{\boldsymbol{b}_k\}$. Gli elementi del tensore metrico fuori dalla diagonale (quelli con indici diversi) sono quindi nulli,

$$\begin{cases}\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{b}_i = g_{ii}\\ \boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{b}_j = 0, \quad i\neq j.\end{cases} \quad \text{(B.115)}$$

Anche la trasformazione dagli elementi di $\{\boldsymbol{b}_i\}$ a quelli di $\{\boldsymbol{b}^k\}$ si semplifica, diventando

$$\boldsymbol{b}_i = g_{ii}\boldsymbol{b}^i, \quad \boldsymbol{b}^i = g^{ii}\boldsymbol{b}_i, \quad \text{(B.116)}$$

dove, in questo caso, non è sottintesa nessuna sommatoria sugli indici ripetuti. Essendo il tensore metrico diagonale, le componenti covarianti sono uguali all'inverso delle componenti contravarianti,

$$g^{ii} = g_{ii}^{-1}, \quad \text{(B.117)}$$

dove non è sottintesa nessuna sommatoria sugli indici ripetuti.

Componenti contravarianti, covarianti e fisiche.

In generale, le componenti espresse nella base naturale non hanno le dimensioni fisiche della quantità tensoriale, poichè è possibile che gli elementi della base abbiano una dimensione fisica, come già osservato in precedenza per le coordinate cilindriche. Si pensi al caso di un sistema di coordinate polare $(q^1, q^2) = (r, \theta)$

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{b}_1] &= \left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r}\right] = \frac{L}{L} = 1 \\ [\boldsymbol{b}_2] &= \left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}\right] = \frac{L}{1} = L. \end{aligned} \tag{B.118}$$

Mentre il primo elemento della base naturale non ha dimensione fisica, poichè è il risultato di un rapporto (derivata) tra lunghezze, il secondo elemento della base ha la dimensione di una lunghezza, poichè è la derivata di una lunghezza rispetto a un angolo (e l'angolo non ha dimensioni fisiche!).

Questa situazione è "scomoda": è sensato desiderare una base formata da vettori privi di "unità fisiche". Inoltre è lecito desiderare una base ortonormale. I due problemi vengono risolti definendo i versori della **base fisica** come

$$\hat{\boldsymbol{b}}_i = \frac{\boldsymbol{b}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad \text{(no sum)}. \tag{B.119}$$

É immediato verificare che questi vettori hanno lunghezza unitaria ricordando che $g_{ii} = \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_i = |\boldsymbol{b}_i|^2$. Facendo lo stesso procedimento sulla base contravariante $\{\boldsymbol{b}^i\}$, si scopre che la base fisica contravariante coincide con quella covariante (e quindi non ha senso fare questa distinzione). Infatti

$$\hat{\boldsymbol{b}}^i = \frac{\boldsymbol{b}^i}{\sqrt{g^{ii}}} = \sqrt{g_{ii}}\boldsymbol{b}^i = \frac{\boldsymbol{b}_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \hat{\boldsymbol{b}}_i. \tag{B.120}$$

Poichè per coordinate curvilinee ortogonali le basi fisiche coincidono, anche le componenti fisiche ottenute partendo dalle componenti contravarianti coincidono con le componenti fisiche ottenute partendo dalle componenti contravarianti: ha quindi senso parlare di componenti fisiche, senza fare riferimento a covarianza e contravarianza. Le **componenti fisiche** $\hat{v}_k$ di un vettore $\boldsymbol{v}$ vengono ricavate dalle componenti controvarianti e dalle componenti covarianti tramite la radice quadrata degli elementi non nulli della tensore metrico,

$$\boldsymbol{v} = \hat{v}_k \hat{\boldsymbol{b}}_k = \begin{cases} v^k \boldsymbol{b}_k = v^k \sqrt{g_{kk}} \hat{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{k}} \\ v_k \boldsymbol{b}^k = v_k \sqrt{g^{kk}} \hat{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{k}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \hat{v}_k = \begin{cases} v^k \sqrt{g_{kk}} = v^k / \sqrt{g^{kk}} \\ v_k \sqrt{g^{kk}} = v_k / \sqrt{g_{kk}}. \end{cases} \tag{B.121}$$

R Ora che sono state introdotte le componenti fisiche in sistemi di coordinate curvilinee ortogonali, **e solo ora**, è possibile confondere i pedici con gli apici nelle componenti dei tensori.

B.3.5 Esempio: coordinate cilindriche

Questo paragrafo viene dedicato alle coordinate cilindriche, un sistema di coordiante ortogonali. Vengono calcolate le espressioni delle coordinate degli operatori applicati a campi tensoriali che verranno incontrati nella scrittura delle equazioni di bilancio, come ad esempio le equazioni di Navier–Stokes per fluidi incomprimibili introdotte alla fine del paragrafo.

Lo spazio tridimensionale viene descritto in coordinate cilindriche dalle tre coordinate $(q^1, q^2, q^3) = (r, \theta, z)$. L'elemento di lunghezza ds ha la forma

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \tag{B.122}$$

Tensore metrico.

Il sistema di coordinate cilindriche è ortogonale. Il tensore metrico è diagonale $g_{ij} = 0,\ i \neq j$. In particolare, dall'elemento di lunghezza si ricavano le componenti del tensore metrico

$$\begin{aligned} &g_{11} = 1, \quad g_{22} = q^{(1)^2}, \qquad g_{33} = 1 \qquad \text{(componenti covarianti)} \\ &g^{11} = 1, \quad g^{22} = 1/q^{(1)^2}, \qquad g^{33} = 1 \qquad \text{(componenti contravarianti)} \end{aligned} \tag{B.123}$$

Vettore posizione e base naturale.

Rispetto alla base cartesiana $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$, il vettore posizione $\boldsymbol{x}$ è

$$\boldsymbol{x} = q^1 \cos(q^2)\hat{\boldsymbol{x}} + q^1 \sin(q^2)\hat{\boldsymbol{y}} + q^3\hat{\boldsymbol{z}} \tag{B.124}$$

I vettori della base naturale sono definiti $\boldsymbol{b}_i = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q^i}$. La base reciproca si ottiene da $\boldsymbol{b}^i = g^{ik}\boldsymbol{b}_k$

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = \cos q^2 \hat{\boldsymbol{x}} + \sin q^2 \hat{\boldsymbol{y}} \\ \boldsymbol{b}_2 = -q^1 \sin q^2 \hat{\boldsymbol{x}} + q^1 \cos q^2 \hat{\boldsymbol{y}} \\ \boldsymbol{b}_3 = \hat{\boldsymbol{z}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{b}^1 = \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}^2 = g^{22}\boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}^3 = \boldsymbol{b}_3 \end{cases} \tag{B.125}$$

Componenti contravarianti, covarianti e fisiche.

I vettori $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{b}^1$, $\boldsymbol{b}^3$ delle basi naturale e reciproca sono privi di dimensioni fisiche, mentre il vettore $\boldsymbol{b}_2$ ha la dimensione di una lunghezza (la coordinata q^1 coincide con il raggio r) e il vettore $\boldsymbol{b}^2$ ha la dimensione dell'inverso di una lunghezza. É quindi necessario definire ula base fisica e le componenti fisiche di un vettore (in maniera analoga si definiranno le componenti fisiche di un tensore di ordine qualsiasi). Utilizzando il valore delle componenti del tensore metrico trovate e la (B.120), la base fisica nel sistema di coordiante cilindriche è

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{b}}^1 & = \boldsymbol{b}^1 & = \cos q^2 \hat{\boldsymbol{x}} + \sin q^2 \hat{\boldsymbol{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{b}}^2 & = \boldsymbol{b}^2/\sqrt{g^{22}} & = -\sin q^2 \hat{\boldsymbol{x}} + \cos q^2 \hat{\boldsymbol{y}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{b}}^3 & = \boldsymbol{b}^3 & = \hat{\boldsymbol{z}}. \end{cases} \tag{B.126}$$

Simboli di Christoffel.

Si può verificare tramite calcolo diretto che gli unici simboli di Christoffel del secondo tipo diversi da zero sono

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = 1/q^1, \quad \Gamma^1_{22} = -q^1. \tag{B.127}$$

Gradiente di uno scalare.

Utilizzando la forma in componenti del gradiente, il legame tra componenti contravarianti, covarianti e fisiche, si può scrivere il gradiente di un campo scalare in componenti contravarianti, covarianti e fisiche.

$$\begin{aligned} \text{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{b}^1 + \frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{b}^2 + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{b}^3 = \\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{b}_1 + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{b}_2 + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{b}_3 = \\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} \end{aligned} \tag{B.128}$$

Divergenza di un vettore.
Si riporta qui l'espressione della divergenza di un campo vettoriale, già calcolata in §B.3.3

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\boldsymbol{v} &= \frac{\partial v^i}{\partial q^i} + \Gamma^i_{il} v^l = \\
&= \frac{\partial v^1}{\partial q^1} + \frac{\partial v^2}{\partial q^2} + \frac{\partial v^3}{\partial q^3} + \Gamma^2_{12} v^1 = \\
&= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} v_r \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{B.129}$$

Gradiente di un vettore.
Si riporta qui l'espressione della gradiente di un campo vettoriale, già calcolata in §B.3.3

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}\boldsymbol{v} &= \left[\frac{\partial v^i}{\partial q^k} + \Gamma^i_{lk} v^l\right] \boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}^k = \\
&= \frac{\partial v^1}{\partial q^1}\boldsymbol{b}_1 \otimes \boldsymbol{b}^1 + \left(\frac{\partial v^1}{\partial q^2} + \Gamma^1_{22} v^2\right)\boldsymbol{b}_1 \otimes \boldsymbol{b}^2 + \frac{\partial v^1}{\partial q^3}\boldsymbol{b}_1 \otimes \boldsymbol{b}^3 + \\
&+ \left(\frac{\partial v^2}{\partial q^1} + \Gamma^2_{21} v^2\right)\boldsymbol{b}_2 \otimes \boldsymbol{b}^1 + \left(\frac{\partial v^2}{\partial q^2} + \Gamma^2_{12} v^1\right)\boldsymbol{b}_2 \otimes \boldsymbol{b}^2 + \frac{\partial v^2}{\partial q^3}\boldsymbol{b}_2 \otimes \boldsymbol{b}^3 + \\
&+ \frac{\partial v^3}{\partial q^1}\boldsymbol{b}_3 \otimes \boldsymbol{b}^1 + \frac{\partial v^3}{\partial q^2}\boldsymbol{b}_3 \otimes \boldsymbol{b}^2 + \frac{\partial v^3}{\partial q^3}\boldsymbol{b}_3 \otimes \boldsymbol{b}^3 = \\
&= \frac{\partial v_r}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} \otimes \hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right)\hat{\boldsymbol{r}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\hat{\boldsymbol{r}} \otimes \hat{\boldsymbol{z}} + \\
&+ \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{z}} + \\
&+ \frac{\partial v_z}{\partial r}\hat{\boldsymbol{z}} \otimes \hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{z}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} \otimes \hat{\boldsymbol{z}},
\end{aligned} \tag{B.130}$$

Laplaciano.
La forma in componenti dell'operatore laplaciano di un vettore si ottiene partendo dalla definizione $\Delta \boldsymbol{v} = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, \boldsymbol{v})$. Il gradiente è stato appena scritto in componenti miste; per poter utilizzare la formula in componenti contravarianti di un tensore, è quindi necessario prima trasformare (tramite il tensore metrico) le componenti miste in contravarianti: viene scritto esplicitamente solo il termine g^{22} poiché è l'unico elemento diagonale diverso da uno e viene eseguito il calcolo solo per la prima componente, per motivi di sintesi

$$\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{v} =& \boldsymbol{b}_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial q^1}\frac{\partial v^1}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^2}\left[g^{22}\left(\frac{\partial v^1}{\partial q^2} + \Gamma^1_{22} v^2\right)\right] + \frac{\partial}{\partial q^3}\frac{\partial v^1}{\partial q^3} + g^{22}\Gamma^1_{22}\left(\frac{\partial v^2}{\partial q^2} + \Gamma^2_{12} v^1\right) + \Gamma^2_{21}\frac{\partial v^1}{\partial q^2} \right\} \\
&+ \boldsymbol{b}_2 \left\{\dots\right\} + \boldsymbol{b}_3 \left\{\dots\right\} = \\
&= \dots = \\
&= \left[\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{r}} + \\
&\quad + \left[\Delta u_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \\
&\quad + \left[\Delta u_z\right]\hat{\boldsymbol{z}}
\end{aligned} \tag{B.131}$$

dove con Δf è stato indicato il laplaciano di uno scalare

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{B.132}$$

Termine advettivo.

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} &= \left[\frac{\partial v^i}{\partial q^j} + \Gamma^i_{lj}v^l\right]a^j\boldsymbol{b}_i = \\
&= \left[a^k\frac{\partial v^1}{\partial q^k} + a^2\Gamma^1_{22}v^2\right]\boldsymbol{b}_1 + \left[a^k\frac{\partial v^2}{\partial q^k} + a^1\Gamma^1_{12}v^2 + a^2\Gamma^1_{21}v^1\right]\boldsymbol{b}_2 + \left[a^k\frac{\partial v^3}{\partial q^k}\right]\boldsymbol{b}_3 = \\
&= \cdots = \\
&= \left[a_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + a_r\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{a_\theta v_\theta}{r}\right]\hat{\boldsymbol{r}} + \\
&\quad + \left[a_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + a_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{a_\theta v_r}{r}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \\
&\quad + \left[a_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + a_r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right]\hat{\boldsymbol{z}}
\end{aligned} \tag{B.133}$$

Equazioni di Navier-Stokes

Utilizzando l'espressione in coordinate cilindriche degli operatori ricavate nel paragrafo precedente, è ora possibile scrivere le equazioni di Navier-Stokes in coordinate cilindriche.

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{u} - \dfrac{1}{Re}\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla}p = \boldsymbol{f} \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0
\end{cases} \tag{B.134}$$

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u_r}{\partial t} + \left(u_r\dfrac{\partial u_r}{\partial r} + \dfrac{u_\theta}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_r\dfrac{\partial u_r}{\partial r} - \dfrac{u_\theta^2}{r}\right) - \dfrac{1}{Re}\left[\Delta u_r - \dfrac{u_r}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right] + \dfrac{\partial p}{\partial r} = f_r \\
\dfrac{\partial u_\theta}{\partial t} + \left(u_r\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} + \dfrac{u_\theta}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} + \dfrac{u_\theta u_r}{r}\right) - \dfrac{1}{Re}\left[\Delta u_\theta + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} - \dfrac{u_\theta}{r^2}\right] + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} = f_\theta \\
\dfrac{\partial u_z}{\partial t} + \left(u_r\dfrac{\partial u_z}{\partial r} + \dfrac{u_\theta}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_r\dfrac{\partial u_z}{\partial r}\right) - \dfrac{1}{Re}\Delta u_z + \dfrac{\partial p}{\partial z} = f_z \\
\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = 0
\end{cases} \tag{B.135}$$

dove si è usato il laplaciano di un campo scalare, definito in precedenza. Per inciso, si ricorda che le equazioni hanno bisogno di condizioni iniziali (poichè sono evolutive nel tempo), di condizioni al contorno (poichè compaiono derivate spaziali) e, quando necessario, di condizioni di compatibilità, tra condizioni iniziali e al contorno.