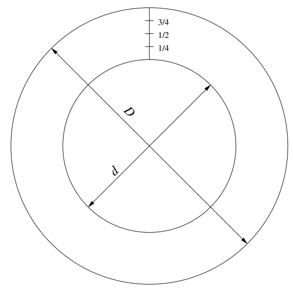
Esercizio 6.7 — Taylor-Couette: coppia sui cilindri. Si consideri la corrente piana fra due cilindri coassiali di raggio R_1 e R_2. Il cilindro esterno è fermo, mentre quello interno è messo in rotazione da un motore con curva caratteristica $C(\Omega) = \alpha - \beta\Omega$. Si determini il punto di equilibrio del sistema (Ω costante). Si determini inoltre la pressione in corrispondenza del cilindro interno sapendo che la pressione in corrispondenza del cilindro esterno vale 5 Pa. La densità del fluido è pari a 1.225 kg/m^3, che il diametro del cilindro interno è $d = 0.1\ m$ e che il diametro del cilindro esterno è $D = 0.16\ m$.
(...)



Soluzione

Concetti. Soluzione esatte delle equazioni di Navier-Stokes. Corrente di Taylor-Couette.

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial u_r}{\partial t} + \rho\left(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}u_r - \dfrac{u_\theta^2}{r}\right) - \mu\left(\nabla^2 u_r - \dfrac{u_r}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right) + \dfrac{\partial p}{\partial r} = f_r \\ \rho\dfrac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho\left(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}u_\theta + \dfrac{u_\theta u_r}{r}\right) - \mu\left(\nabla^2 u_\theta - \dfrac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} = f_\theta \\ \rho\dfrac{\partial u_z}{\partial t} + \rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}u_z - \mu\nabla^2 u_z + \dfrac{\partial p}{\partial z} = f_z \\ \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{6.68}$$

con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla}b &= a_r\frac{\partial b}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r}\frac{\partial b}{\partial\theta} + a_z\frac{\partial b}{\partial z} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{6.69}$$

Scrittura del contributo viscoso del vettore sforzo come:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s_n} &= \mathbb{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \\ &= \mu[\boldsymbol{\nabla u} + \boldsymbol{\nabla}^T\boldsymbol{u}]\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \\ &= \mu\left[2(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} + \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}\right] \end{aligned} \tag{6.70}$$

Svolgimento. Il problema viene risolto calcolando prima le velocità angolari dei cilindri e successivamente la pressione.

- Calcolo delle velocità angolari dei cilindri. Nota la forma del campo di moto e le velocità in due punti a diversi raggi, è possibile calcolare Ω_1, Ω_2 risolvendo un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite.
  Il campo di moto tra due cilindri coassiali rotanti è:

  $$u_\theta(r) = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{1}{r} \tag{6.71}$$

  Osservazione. La soluzione esatta di Taylor-Couette è facile da ricavare, se si ricorda che è la somma di una rotazione rigida e un vortice irrotazionale: imponendo la forma $u_\theta = Ar + B/r$ e le condizioni al contorno, si ottiene la formula voluta.

Note le misure $u_{\theta,1/4}$, $u_{\theta,3/4}$, il sistema risolvente diventa:

$$\begin{bmatrix} -\frac{R_1^2}{R_2^2-R_1^2} r_{1/4} + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2-R_1^2}\frac{1}{r_{1/4}} & \frac{R_2^2}{R_2^2-R_1^2} r_{1/4} - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2-R_1^2}\frac{1}{r_{1/4}} \\ -\frac{R_1^2}{R_2^2-R_1^2} r_{3/4} + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2-R_1^2}\frac{1}{r_{3/4}} & \frac{R_2^2}{R_2^2-R_1^2} r_{3/4} - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2-R_1^2}\frac{1}{r_{3/4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{\theta,1/4} \\ u_{\theta,3/4} \end{bmatrix} \tag{6.72}$$

La soluzione di Taylor-Couette può essere ricavata abbastanza facilmente semplificando le equazioni di Navier-Stokes scritte in coordinate cilindriche, dopo aver fatto le opportune ipotesi (quali?). Le componenti in direzione radiale e tangenziale dell'equazione della quantità di moto diventano:

$$\begin{cases} -\rho \dfrac{u_\theta^2}{r} + \dfrac{\partial P}{\partial r} = 0 \\ -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \dfrac{u_\theta}{r^2} = 0 \end{cases} \tag{6.73}$$

dove $P = P(r)$, $u_\theta = u_\theta(r)$. Le derivate parziali possono essere quindi trasformate in derivate ordinarie. La seconda equazione è disaccoppiata dalla prima e quindi può essere risolta, una volta imposte le condizioni al contorno. Trovato il campo di moto da questa equazione, la prima viene usata per calcolare il campo di pressione. La seconda equazione può essere riscritta come (svolgere le derivate per credere!)

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{1}{r} (r u_\theta)' \right)' = 0 \\ u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1 \\ u_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_\theta(r) = Ar + \dfrac{B}{r} \quad \text{A,B from b.c.} \\ u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1 \\ u_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2 \end{cases} \tag{6.74}$$

- Calcolo dello sforzo tangenziale a parete per determinare il puto di equilibrio del sistema. Si determina la componente tangenziale (quella che contribuisce alla coppia resistente) dello sforzo sul cilindro interno. Il contributo viscoso del vettore sforzo può essere scritto come:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s_n} &= \mathbb{S} \cdot \boldsymbol{\hat{n}} = \\ &= \mu[\boldsymbol{\nabla u} + \boldsymbol{\nabla}^T \boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{\hat{n}} = \\ &= \mu\left[2(\boldsymbol{\hat{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\hat{n}} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}\right] = \quad \text{(verificare con le tabelle)} \\ &= \mu\left[2\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta)\right] \boldsymbol{\hat{\theta}} = \\ &= \mu\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right] \boldsymbol{\hat{\theta}} = \qquad (u_\theta = Ar + B/r) \\ &= -2\mu\frac{B}{r^2}\boldsymbol{\hat{\theta}} \end{aligned} \tag{6.75}$$

La parte tangenziale dello sforzo a parete sul cilindro interno è quindi $\tau_w = 2\mu B/R_1^2$. Integrando il prodotto tra vettore sforzo e raggio R_1 sulla superficie laterale del cilindro si ottiene la coppia resistente. All'equilibrio, la coppia disponibile uguaglia quella resistente.

$$A\ R_1\ \tau_w = (2\pi R_1 l)\ R_1\ 2\mu\frac{B}{R_1^2}\Omega = \alpha - \beta\Omega \tag{6.76}$$

o in simboli $\gamma\Omega = \alpha - \beta\Omega$, da cui $\Omega = \alpha/(\beta + \gamma)$.

- Calcolo della pressione. Una volta noto il campo di moto è possibile calcolare il campo di pressione:

$$P'(r) = \rho \frac{u_\theta^2}{r} \qquad \text{con } P(R_2) = P_2. \tag{6.77}$$

$$\int_P^{P_2} \frac{dP}{dr} dr = \int_r^{R_2} \rho \frac{1}{r} \left(Ar + \frac{B}{r} \right)^2 dr \tag{6.78}$$

Da questa si ricava

$$P(r) = P_2 - \rho \left[\frac{1}{2} A^2 (R_2^2 - r^2) + 2ABln \frac{R_2}{r} - \frac{1}{2} B^2 \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right] \tag{6.79}$$