

## 6. Soluzioni esatte

### 6.1 Introduzione e linee guida per la soluzione dei problemi

È possibile ricavare alcune soluzioni esatte stazionarie delle equazioni di Navier-Stokes, che descrivono il moto di un fluido viscoso, quando il dominio ha una geometria “semplice”. In alcuni casi, come la corrente in un canale piano (Newton-Couette), la corrente in un tubo a sezione circolare (Poiseuille), o la corrente nel setto tra due cilindri rotanti (Taylor-Couette), per semplificare le equazioni è possibile sfruttare l’omogeneità del dominio (in qualche direzione) e, per ipotesi, della corrente. Nella maggioranza delle soluzioni esatte, i termini non lineari nelle equazioni si annullano, permettendo di ricavare abbastanza facilmente la soluzione delle equazioni.

In generale, le soluzioni stazionarie esatte presentate in questo capitolo sono significative quando il regime di moto è laminare. Senza entrare molto nel dettaglio, una soluzione stazionaria è una soluzione di equilibrio delle equazioni di Navier-Stokes, per la quale  $\partial \mathbf{u} / \partial t = \mathbf{0}$ . Un regime di moto instazionario può manifestarsi a causa di una “instabilità intrinseca” della corrente o a causa di una enorme amplificazione (*ricettività*) di disturbi, anche di intensità minima, sempre presenti in natura<sup>1</sup>. Entrambi i processi che allontanano la corrente dalla condizione di equilibrio vengono innescati o amplificati all’aumentare del numero di Reynolds caratteristico della corrente. Qualitativamente, si può quindi affermare che le soluzioni stazionarie esatte sono rappresentative del fenomeno fisico quando il numero di Reynolds caratteristico assume valori “sufficientemente bassi”, per i quali non si verificano

<sup>1</sup> Il regime di moto periodico (e ordinato) che si manifesta nella corrente attorno a un cilindro quando il numero di Reynolds supera un valore critico ( $Re_c \approx 46$ ) è il risultato di una “instabilità intrinseca” (*globale*) parametrica del sistema. La soluzione stazionaria stabile esistente per  $Re < Re_c$  diventa instabile quando il parametro  $Re$  eccede il valore critico e nasce un ciclo limite (stabile) nel piano delle fasi del sistema. Il moto periodico e ordinato del sistema osservato nello sviluppo della *scia di Von Karman* a valle del cilindro, corrisponde alla dinamica del sistema sul ciclo limite.

Mentre la corrente attorno a un corpo tozzo risulta abbastanza insensibile ai disturbi e perturbazioni esterni, altre correnti possono amplificare perturbazioni di intensità ridotta di diversi ordini di grandezza. Alcuni esempi sono uno strato limite, uno strato di mescolamento o un getto. In queste correnti dominate dalla convezione, l’enorme amplificazione può avvenire tramite meccanismi *non-modali*, che caratterizzano di sistemi dinamici lineari stabili non simmetrici.

instabilità intrinseche nella corrente e per i quali le perturbazioni e gli effetti di estremità (ad esempio, all'imbocco di un tubo) vengono smorzati dalla viscosità, rendendo la corrente stazionaria e omogenea.

**R** In questa introduzione non c'è nessuna velleità di una descrizione precisa e completa di quelli che sono gli argomenti di studio della *stabilità fluidodinamica*, ma solamente la necessità di precisare i “limiti di validità” delle soluzioni esatte ricavate in questo capitolo.

### 6.1.1 Equazioni di Navier-Stokes in coordinate cartesiane e cilindriche

Le equazioni di Navier-Stokes vengono scritte nel sistema di coordinate più adeguato alla descrizione del problema, come ad esempio possono essere le coordinate cartesiane o quelle cilindriche. Le equazioni di Navier-Stokes per un fluido incompressibile

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

accompagnate dalle condizioni iniziali e dalle condizioni al contorno opportune (e, qualora servissero, dalle condizioni di compatibilità dei dati), possono essere scritte ad esempio in un sistema di coordinate cartesiane

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g_y \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

o in un sistema di coordinate cilindriche

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = \rho g_r \\ \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho g_\theta \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_z - \mu \nabla^2 u_z + \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \nabla b &= a_r \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial b}{\partial \theta} + a_z \frac{\partial b}{\partial z} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (6.4)$$

### 6.1.2 Esempio in coordinate cartesiane: corrente di Poiseuille

Nel caso di corrente bidimensionale di Poiseuille in un canale piano, si usano le equazioni scritte nel sistema di coordinate cartesiane. Si sceglie l'asse  $x$  orientato lungo il canale e l'asse  $y$  perpendicolare alle pareti. Si fanno alcune ipotesi:

- stazionarietà:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ;
- omogeneità della coordinata  $x$ : il campo di velocità è indipendente dalla coordinata  $x$ . La derivata di tutte le componenti della velocità rispetto ad  $x$  è nulla:  $\frac{\partial u_i}{\partial x} = 0$ .  
 È invece ammissibile che la pressione vari lungo  $x$ : da un punto di vista fisico, è necessario un gradiente di pressione che equilibri gli sforzi a parete dovuti alla viscosità e che “spinga” il fluido nel canale; dal punto di vista matematico, è già stato accennato al ruolo particolare che svolge quel campo indicato con  $p$ , diverso dalla pressione termodinamica nel caso di fluido incompressibile; si osservi poi che il campo  $p$  non compare mai nelle equazioni, se non sotto l’operatore di gradiente (o all’interno delle condizioni al contorno, che “fissano” un valore di  $p$ : è già stato sottolineato più volte che spesso il moto di un fluido incompressibile è indipendente dal valore assoluto del campo  $p$ , mentre dipende da differenze, o dalle derivate, di  $p$ !).
- sfruttando la bidimensionalità della corrente, l’omogeneità della coordinata  $x$  e il vincolo di incompressibilità si ottiene:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (6.5)$$

Questo implica che la componente  $v$  della velocità è costante in tutto il canale; sfruttando le condizioni al contorno di adesione a parete  $\mathbf{u} = (u, v) = \mathbf{0}$  è evidente che la costante deve essere nulla:  $v = 0$ .

- supponiamo qui che, se vengono considerate le forze di volume, esse sono costanti e dirette lungo  $-\hat{\mathbf{y}}$ .

Le equazioni diventano quindi

$$\begin{cases} -\mu \left( \frac{d^2 u}{dy^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \end{cases} \quad (6.6)$$

dove la derivata parziale in  $y$  della componente  $u$  è stata sostituita dalla derivata ordinaria, poiché la velocità  $\mathbf{u}(y)$  (e quindi tutte le sue componenti) dipende solo dalla coordinata  $y$ . La seconda equazione integrata dà come risultato ( $p$  dipende sia da  $x$  sia da  $y$ ):

$$p(x, y) = -\rho g y + f(x) \quad (6.7)$$

Inserita nella prima:

$$\mu \left( \frac{d^2 u}{dy^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (6.8)$$

Nell’ultima equazione, i termini a sinistra dell’uguale sono funzione solo della variabile indipendente  $y$ , quelli a destra dell’uguale solo di  $x$ : affinché l’uguaglianza possa essere sempre valida, i due termini devono essere costanti; si sceglie di definire questa costante  $-G_P$  (con questa  $G_P$  assumerà valore positivo). Si possono quindi risolvere le due equazioni

$$\begin{cases} \mu \left( \frac{d^2 u}{dy^2} \right) = -G_P \\ \frac{\partial p}{\partial x} = -G_P \end{cases} \quad (6.9)$$

accompagnate dalle opportune condizioni al contorno. Osservando il sistema (6.6), nelle equazioni compare la derivata seconda in  $y$  della componente  $u$  della velocità, la derivata prima sia in  $x$  sia in  $y$  di  $p$ : è ragionevole pensare che servano due condizioni al contorno in  $y$  per  $u$ , una condizione al contorno per  $p$  in  $x$  e una in  $y$ . In particolare, sulle pareti del canale (alto  $H$ ) la velocità del fluido deve essere nulla, per le condizioni al contorno di adesione. Per quando riguarda la pressione, si può fissare il valore in un punto del dominio, ad esempio l'origine degli assi  $p(0, 0) = p_0$ .

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ u(x, H) = 0 \\ p(0, 0) = p_0 \end{cases} \quad (6.10)$$

Le equazioni (6.9) con le condizioni al contorno appena elencate danno come risultato:

$$\begin{cases} u(y) = -\frac{G_P}{2\mu}y(y-H) \\ p(x, y) = p_0 - \rho g y - G_P x \end{cases} \quad (6.11)$$

### 6.1.3 Calcolo del vettore sforzo

Se vengono chieste azioni (risultanti di forze o momenti) esercitate dal fluido sul solido, è necessario calcolare lo sforzo a parete  $\mathbf{t}_{n,s}$  esercitato sul solido, uguale e contrario allo sforzo esercitato dal solido sul fluido  $\mathbf{t}_n$ . Il vettore sforzo  $\mathbf{t}_n$  su una superficie con giacitura definita dal versore normale  $\hat{\mathbf{n}}$  si può esprimere come il prodotto del versore  $\hat{\mathbf{n}}$  e il tensore degli sforzi  $\mathbb{T}$ ,

$$\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T} = \hat{\mathbf{n}} \cdot [-p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}] = -p\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{s}_n, \quad (6.12)$$

avendo utilizzato la relazione costitutiva  $\mathbb{S} = 2\mu\mathbb{D}$  per un fluido incompressibile newtoniano, che lega il tensore degli sforzi viscosi  $\mathbb{S}$  al tensore velocità di deformazione  $\mathbb{D}$  tramite il coefficiente di viscosità dinamica  $\mu$ . Il vettore  $\mathbf{s}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{S}$  è il vettore degli sforzi viscosi. È possibile trasformare la relazione (6.12) in una relazione che contenga solamente operazioni tra vettori,

$$\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}} + \mu[2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{u})] = -p\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{s}_n. \quad (6.13)$$

Questa espressione può risultare vantaggiosa quando è richiesto il calcolo del vettore degli sforzi in sistemi di coordinate non cartesiani. Mentre esistono molte tabelle che raccolgono l'espressione delle operazioni vettoriali in sistemi di coordinate non cartesiane, sono più rare tabelle che raccolgano la forma in componenti di operazioni tensoriali.

In sistemi di coordinate cartesiane, è facile calcolare il vettore sforzo come prodotto tensoriale tra il versore normale  $\hat{\mathbf{n}}$  e il tensore degli sforzi, le cui componenti sono facili da calcolare

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D} = -p\mathbb{I} + 2\mu \left[ \frac{1}{2} (\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u}) \right] \\ T_{ij} &= -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Ad esempio, per una corrente in uno spazio bidimensionale descritto dalle coordinate cartesiane  $(x, y)$  le componenti del tensore degli sforzi possono essere raccolte in forma

matriciale,

$$\mathbb{T} = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Sfruttando la simmetria del tensore degli sforzi,  $T_{ij} = T_{ji}$ , il vettore sforzo  $t_i = n_j T_{ji} = T_{ij} n_j$  può essere calcolato come prodotto matrice vettore. Come esempio, viene calcolato lo sforzo a parete in un canale piano, nel quale scorre un fluido con un campo di velocità che ha solamente la componente parallela alle pareti che dipende dalla coordinata perpendicolare ad esse,  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u(y)\hat{\mathbf{x}}$ . Facendo riferimento alla corrente di Poiseuille della sezione precedente, il vettore sforzo agente sul fluido in corrispondenza della parete inferiore a  $y = 0$ , si ottiene moltiplicando il versore normale uscente dal fluido  $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{y}}$  per il tensore degli sforzi,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -p & \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ p \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \mathbf{t}_n = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \hat{\mathbf{x}} + p \hat{\mathbf{y}} = -\frac{G_P H}{2} \hat{\mathbf{x}} + p \hat{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Lo sforzo sulla parete inferiore è l'opposto  $\mathbf{t}_{n,s} = \frac{G_P H}{2} \hat{\mathbf{x}} - p \hat{\mathbf{y}}$ . Sulla parete superiore, a  $y = H$ , la normale uscente dal fluido è  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{y}}$ , la derivata  $\partial u / \partial y(x, H) = -G_P / (2\mu)$ . Svolgendo i conti, come fatto per la parete inferiore, si ottiene che lo sforzo agente sulla parete superiore è  $\mathbf{t}_{n,s} = \frac{G_P H}{2} \hat{\mathbf{x}} + p \hat{\mathbf{y}}$ .

#### Equivalenza tra l'espressione tensoriale e vettoriale del vettore sforzo.

Per i più curiosi e i più “matematici”, si dimostra infine l'equivalenza tra (6.12) e (6.13). Questa dimostrazione viene fatta ricorrendo alla notazione indiciale, sfruttando le proprietà di permutazione degli indici del simbolo  $\epsilon_{ijk}$  e la proprietà dei simboli  $\epsilon_{ijk}$  e  $\delta_{a,b}$ ,

$$\epsilon_{kij}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}. \quad (6.17)$$

La componente  $i$ -esima di  $\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}$  è

$$\begin{aligned} \{\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}\}_i &= \epsilon_{ijk} n_j \{\nabla \times \mathbf{u}\}_k = \\ &= \epsilon_{ijk} n_j \epsilon_{klm} \partial_l u_m = \\ &= \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} n_j \partial_l u_m = \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) n_j \partial_l u_m = \\ &= n_j \partial_i u_j - n_j \partial_j u_i = \\ &= n_j \partial_i u_j + n_j \partial_j u_i - 2n_j \partial_j u_i = \\ &= 2n_j \frac{1}{2} (\partial_i u_j + n_j \partial_j u_i) - 2n_j \partial_j u_i = \\ &= \{2\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{D} - 2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u}\}_i \end{aligned} \quad (6.18)$$

Il contributo viscoso al vettore sforzo è uguale al primo termine a destra dell'uguale moltiplicato per la viscosità dinamica  $\mu$ ,  $\mathbf{s}_n = 2\mu \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{D}$ ; il vettore sforzo  $\mathbf{t}_n$  è la somma del vettore degli sforzi viscosi  $\mathbf{s}_n$  e del vettore degli sforzi (normali) dovuti alla “pressione”,  $\mathbf{t}_n = \mathbf{s}_n - p\hat{\mathbf{n}}$ . Si ottiene così l'identità desiderata

$$\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T} = \hat{\mathbf{n}} \cdot [-p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}] = -p\hat{\mathbf{n}} + \mu[2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{u})] = -p\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{s}_n. \quad (6.19)$$



Si ricorda che le identità vettoriali e tensoriali sono indipendenti dal sistema di riferimento in cui vengono scritte le componenti: per la loro dimostrazione si può utilizzare un sistema di coordinate qualsiasi (spesso le coordinate cartesiane sono un sistema di coordinate conveniente, poiché le espressioni delle operazioni e degli operatori differenziali sono semplici da ricordare e utilizzare).

**Osservazione: vettore sforzo in coordinate cilindriche.**

È possibile calcolare le componenti del prodotto  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T}$  svolgendo un prodotto matrice-vettore anche per sistemi di coordinate non cartesiani. In questo caso, però, la forma delle operazioni vettoriali e tensoriali e le componenti del tensore sono “non banali”. Per esempio le coordinate cartesiane del gradiente  $\nabla \mathbf{v}$  di un campo vettoriale  $\mathbf{v}$  sono uguali a  $\partial v_i / \partial x_j$ , mentre le componenti in coordinate cilindriche sono raccolte nella seguente matrice  $3 \times 3$ ,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (6.20)$$

se riferite alla base fisica  $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{z}})$ . Bisogna quindi prestare attenzione nella scrittura delle componenti di tensori e operatori quando si usano sistemi di coordinate non cartesiane. Per il calcolo del vettore sforzo si consiglia quindi di usare, la formula (6.13) che contiene solo operazioni vettoriali, per le quali è più facile trovare tavole che ne raccolgano le espressioni in componenti in diversi sistemi di coordinate.

Per concludere questa sezione, viene ricavata l'espressione del vettore degli sforzi viscosi in coordinate cartesiane come prodotto  $2\mu \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{D}$ . Poiché il sistema di coordinate cilindriche (fisiche, riferite alla base  $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{z}})$ ) è un sistema ortogonale, le componenti del vettore degli sforzi viscosi possono essere calcolate con il prodotto matrice vettore,

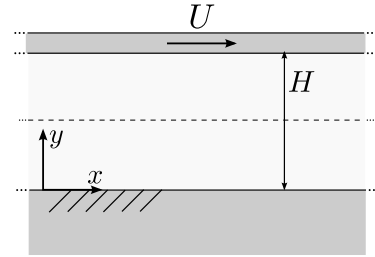
$$\begin{bmatrix} t_r \\ t_\theta \\ t_z \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ sym & \frac{2}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \\ sym & sym & 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_r \\ n_\theta \\ n_z \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

Come esercizio, è possibile utilizzare l'espressione vettoriale (6.13) per verificare la validità dell'espressione appena trovata del vettore sforzo in coordinate cilindriche.

**Esercizio 6.1 — Corrente in un canale piano - Newton-Poiseuille.** In un canale piano, di lunghezza e apertura infinita, orizzontale, di altezza  $H = 1.51 \text{ mm}$ , delimitato da una parete inferiore fissa e da una parete superiore mobile con velocità orizzontale, costante e positiva  $U = 0.31 \text{ m/s}$ , scorre acqua in condizioni standard. Per quale valore del gradiente di pressione  $G_P = -\partial P/\partial x$  la portata nel canale risulta nulla?

Si trascurino le forze di volume.

( $Re = 441$ ,  $G_P = -930 \text{ Pa/m}$ )



### Soluzione

**Concetti.** Semplificazione delle equazioni di NS in coordinate cartesiane per descrivere la corrente in un canale piano infinito messo in moto da un gradiente di pressione (corrente di Poiseuille) e dal trascinamento dovuto al movimento di una parete del canale (corrente di Newton).

**Svolgimento.** In questo problema, la corrente nel canale ha due forzanti: il moto a (velocità costante) della parete superiore e il gradiente di pressione  $G_P$  lungo il canale. Il problema chiede di trovare il valore di  $G_P$  tale che la portata nel canale sia nulla quando i due effetti si combinano. Il problema viene risolto ricavando il profilo di velocità in funzione del gradiente di velocità dalle equazioni di NS opportunamente semplificate e successivamente il valore del gradiente di pressione necessario ad avere portata nulla. La geometria del problema suggerisce di utilizzare un sistema di coordinate cartesiane.

- Scrittura delle equazioni di NS in coordinate cartesiane in 2 dimensioni.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6.22)$$

- Semplificazione delle equazioni di NS per il problema considerato. Vengono fatte le seguenti ipotesi:

- problema stazionario:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ;
- direzione  $x$  omogenea (canale infinito in direzione  $x$ ):  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ;

**R** non si può dire altrettanto della pressione, a causa del ruolo che questa ha nelle equazioni di NS incompressibili. Il campo di pressione può essere interpretato come un moltiplicatore di Lagrange necessario a imporre il vincolo di incompressibilità. Inoltre, ad eccezione di alcune condizioni al contorno, non appare mai direttamente come pressione  $p$  ma solamente con le sue derivate spaziali. Da un punto di vista più fisico, la differenza di pressione lungo il canale è la forzante che mette in moto il fluido in una corrente di Poiseuille.

- la condizione  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  inserita nel vincolo di incomprimibilità, implica  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ; poichè  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  segue che  $v = \text{cost} = 0$ , poichè è nulla a parete per la condizione al contorno di adesione,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
- no forze di volume:  $\mathbf{f} = 0$ .

Le equazioni di NS possono essere semplificate

$$\begin{cases} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6.23)$$

Dalla seconda segue che la pressione può essere funzione solo di  $x$ . Nella prima, il termine a sinistra dell'uguale è funzione solo di  $y$ ; quello di destra può essere funzione solo di  $x$ : l'uguaglianza implica che entrambi i membri sono costanti. Definiamo questa costante come  $G_P = -\frac{\partial p}{\partial x}$ : si noti che questo è il gradiente di pressione lungo il canale, cambiato di segno.

$$\begin{cases} -\mu u''(y) = G_P & y \in [0, H] \\ u(0) = 0 \\ u(H) = U \end{cases} \quad (6.24)$$

- Soluzione dell'equazione differenziale con dati al contorno: si integra due volte e si impongono le condizioni al contorno per ottenere la componente  $u$  del campo di velocità.

$$\Rightarrow u(y) = -\frac{G_P}{2\mu} y^2 + \left( \frac{G_P}{2\mu} H + \frac{U}{H} \right) y. \quad (6.25)$$

- Calcolo della portata come integrale della velocità.

$$Q = \int_0^H u(y) dy = \frac{G_P}{12\mu} H^3 + \frac{1}{2} U H \quad (6.26)$$

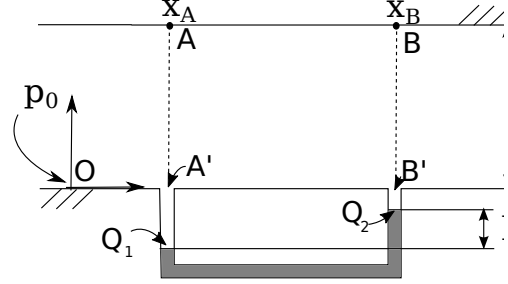
Infine, imponendo la condizione di portata nulla  $Q = 0$ , si ottiene il valore di  $G_P$ :

$$G_P = -6 \frac{\mu U}{H^2} \quad \Rightarrow \quad G_P = -930 \text{ Pa/m} \quad (6.27)$$



**Esercizio 6.2 — Corrente di Poiseuille in un canale piano e manometro.** Una corrente di Poiseuille di acqua ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 10^{-3} \text{ kg/(ms)}$ ) scorre in un canale di altezza  $H = 1 \text{ cm}$ . Un manometro misura la differenza di pressione tra le sezioni in  $x_A = 1.0 \text{ m}$  e  $x_B = 2.0 \text{ m}$ . Determinare:

- il gradiente di pressione all'interno del condotto, conoscendo la densità del liquido barometrico  $\bar{\rho} = 1200 \text{ kg/m}^3$  e la differenza di quote  $h = 5 \text{ mm}$ ;
- la velocità massima all'interno del canale;
- la risultante  $\mathbf{R}$  delle forze esercitata dal fluido sul tratto di parete superiore compreso tra A e B, sapendo che sulla sezione  $x = 0 \text{ m}$  la pressione vale  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ . Qual è la relazione tra  $R_x$  e  $p_A - p_B$ ? Commento.



### Soluzione

**Concetti.** Soluzione esatte delle equazioni di Navier-Stokes. Corrente di Poiseuille nel canale piano 2D. Manometro: leggi della statica (Stevino).

### Svolgimento.

- Per trovare la derivata in direzione  $x$  della pressione all'interno del canale ( $\partial P / \partial x = -G_P = \text{cost.}$  per la corrente di Poiseuille) risolve il problema di statica all'interno del manometro. Facendo riferimento al disegno, si utilizza Stevino tra i punti  $A' - Q_1$ ,  $Q_1 - Q_2$ ,  $Q_2 - B'$  e l'informazione di derivata della pressione costante in direzione  $x$  all'interno del canale, tra  $A'$  e  $B'$ .

$$\begin{cases} p_{A'} = p_{Q_1} - \rho g z_{Q_1} \\ p_{Q_1} - \bar{\rho} g z_{Q_1} = p_{Q_2} - \bar{\rho} g z_{Q_2} \\ p_{B'} = p_{Q_2} - \rho g z_{Q_2} \\ p_{A'} - p_{B'} = G_P \Delta x \end{cases} \Rightarrow G_P = \frac{1}{\Delta x} (\bar{\rho} - \rho) g \Delta h \quad (6.28)$$

avendo svolto correttamente i conti e riconosciuto  $z_{Q_2} - z_{Q_1} = \Delta h$ .

- Ricordando che il profilo di velocità di Poiseuille risulta  $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{x}} u(y)$ , con

$$u(y) = -\frac{G_P}{2\mu} y(y - H), \quad (6.29)$$

la velocità massima all'interno del canale è  $V = u(H/2) = \frac{G_P}{8\mu} H^2$

- Per calcolare la risultante degli sforzi sul tratto  $A - B$  della parete superiore, è necessario calcolare il vettore sforzo agente su di essa e svolgere un semplice integrale. Il vettore sforzo agente sulla parete superiore risulta

$$\mathbf{t} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=H} \hat{\mathbf{x}} + p(x, H) \hat{\mathbf{y}}. \quad (6.30)$$

La pressione  $p(x, H)$  sulla parete superiore, per  $x \in [x_A, x_B]$  si calcola come segue: si parte dall'origine del sistema di riferimento  $O$ , in corrispondenza della quale è noto il valore della pressione  $p_0$  e ci si muove in orizzontale ricordando che  $\partial P/\partial x = -G_P$  e in verticale ricordando che  $\partial P/\partial y = -\rho g$ .

$$\begin{aligned} p_{A'} &= p_0 - G_P x_A \\ p_A &= p_{A'} - \rho g H \end{aligned} \quad \rightarrow \quad p(x, H) = p_A - G_P(x - x_A) \quad (6.31)$$

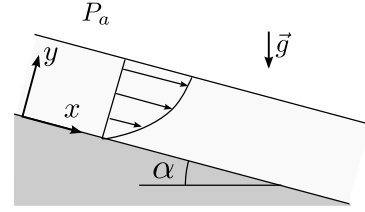
Lo sforzo tangenziale sulla parete è costante e vale

$$-\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=H} = \frac{G_P}{2} H \quad (6.32)$$

La risultante delle forze (per unità di lunghezza, poichè il problema è bidimensionale) si ottiene integrando lo sforzo tra  $A$  e  $B$ . Facendo comparire il valore  $p_B$  della pressione in  $B$ , l'espressione della risultante delle forze diventa

$$\mathbf{R} = \frac{G_P}{2} H \Delta x \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} (p_A + p_B) \Delta x \hat{\mathbf{y}} . \quad (6.33)$$

**Esercizio 6.3 — Corrente libera su parete inclinata.** Si consideri una corrente d'acqua a pelo libero, laminare e stazionaria, che scorre su una parete piana di lunghezza e apertura infinita inclinata di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale. Sul pelo libero la pressione è uniforme e uguale a  $P_a$ . Lo sforzo tangenziale fra acqua e aria viene considerato nullo. Si calcoli il profilo di velocità nello strato di acqua e il campo di pressione. ■



### Soluzione

**Concetti.** Semplificazione delle equazioni di NS in casi particolari. Soluzioni esatte in coordinate cartesiane.

**Svolgimento.** Si scelga un sistema di riferimento cartesiano con l'asse  $x$  orientato lungo la parete verso il basso e l'asse  $y$  perpendicolare ed uscente ad essa. Sulla corrente di questo problema agiscono le forze di volume dovute alla gravità. L'ipotesi che la pressione sia uniforme sulla superficie di interfaccia tra acqua e aria implica che la pressione è indipendente dalla coordinata  $x$  in tutto il fluido.

- Scrittura delle equazioni di NS in coordinate cartesiane in 2 dimensioni.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6.34)$$

- Semplificazione delle equazioni di NS per il problema considerato. Vengono fatte le seguenti ipotesi:

- problema stazionario:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ;
- direzione  $x$  omogenea (canale infinito in direzione  $x$ ):  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ;

**R** non si può dire altrettanto della pressione, a causa del ruolo che questa ha nelle equazioni di NS incomprimibili. Il campo di pressione può essere interpretato come un moltiplicatore di Lagrange necessario a imporre il vincolo di incomprimibilità. Inoltre, ad eccezione di alcune condizioni al contorno, non appare mai direttamente come pressione  $p$  ma solamente con le sue derivate spaziali. Da un punto di vista più fisico, la differenza di pressione lungo il canale è la forzante che mette in moto il fluido in una corrente di Poiseuille.

- la condizione  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  inserita nel vincolo di incomprimibilità, implica  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ;
- poiché  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  segue che  $v = \text{cost} = 0$ , poiché è nulla a parete per la condizione al contorno di adesione,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
- no forze di volume:  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g} = \rho g \sin \alpha \hat{\mathbf{x}} - \rho g \cos \alpha \hat{\mathbf{y}}$ .

Le equazioni di NS possono essere semplificate

$$\begin{cases} -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos \alpha \end{cases} \quad (6.35)$$

Dalla seconda segue che l'espressione del campo di pressione è

$$p(x, y) = -\rho g y \cos \alpha + f(x) . \quad (6.36)$$

L'espressione di  $f(x)$  può essere calcolata imponendo la condizione al contorno sul pelo libero,  $p(x, H) = P_a$ ,

$$P_a = -\rho g H \cos \alpha + f(x) \quad \rightarrow \quad f(x) = P_a + \rho g H \cos \alpha . \quad (6.37)$$

La funzione  $f(x)$  è costante, senza dipendere dalla coordinata  $x$ . Di conseguenza, il campo di pressione dipende solo dalla coordinata  $y$

$$p(x, y) = P_a + \rho g (H - y) \cos \alpha , \quad (6.38)$$

e la derivata di  $\partial p / \partial x$  è nulla. La componente  $x$  dell'equazione della quantità di moto diventa quindi un'equazione ordinaria del secondo ordine

$$\begin{cases} -\mu u''(y) = \rho g \sin \alpha , & y \in [0, H] \\ u(0) = 0 \\ u'(H) = 0 , \end{cases} \quad (6.39)$$

con le condizioni al contorno di adesione a parete e di sforzo di taglio nullo all'interfaccia tra aria ed acqua,  $0 = \tau(H) = \mu \frac{\partial u}{\partial y}(H) = \mu u'(H)$ . La derivata parziale in  $y$  è stata sostituita da quella ordinaria, poichè la velocità è solo funzione di  $y$ .

- Soluzione dell'equazione differenziale con dati al contorno: si integra due volte e si impongono le condizioni al contorno per ottenere la componente  $u$  del campo di velocità.

$$u(y) = -\frac{\rho g}{2\mu} y(y - H) \sin \alpha . \quad (6.40)$$

**Esercizio 6.4 — Corrente libera su parete verticale.** Si consideri una corrente d'acqua a pelo libero, laminare e stazionaria, che scorre su una parete verticale piana di lunghezza e apertura infinita. Si ipotizzi che la pressione atmosferica che agisce sul pelo libero sia uniforme. Si ipotizzi inoltre che lo sforzo tangenziale fra acqua e aria in corrispondenza del pelo libero sia nullo.

Assegnata la portata in massa per unità di apertura  $\bar{Q} = 0.5 \text{ kg/(ms)}$ , determinare

1. lo spessore  $h$  della corrente d'acqua;
2. lo sforzo tangenziale a parete;
3. la velocità in corrispondenza del pelo libero;
4. la velocità media e il numero di Reynolds basato su tale velocità media e sullo spessore della corrente.

Si sostituisca poi al pelo libero una parete solida. Si determini quale dovrebbe essere la velocità di tale parete per ottenere una portata nulla.

Dati:  $\bar{\rho} = 999 \text{ kg/m}^3$ ,  $\bar{\mu} = 1.15 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(ms)}$ .

( $h = 5.61 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ ,  $\tau = 5.494 \text{ Pa}$ ,  $u(h) = 1.339 \text{ m/s}$ ,  $\bar{U} = 0.893 \text{ m/s}$ ,  $Re = 434.8$ ,  $U = -0.4464 \text{ m/s}$ .)

### Soluzione

**Concetti.** Semplificazione delle equazioni di NS in casi particolari. Soluzioni esatte in coordinate cartesiane.

**Svolgimento.** Si scelga un sistema di riferimento cartesiano con l'asse  $x$  orientato lungo la parete verso il basso e l'asse  $y$  perpendicolare ed uscente ad essa.

Sulla corrente di questo problema agisce la forza di volume dovuta alla gravità.

L'ipotesi che la pressione sia uniforme sulla superficie di interfaccia tra acqua e aria implica che la pressione è costante in tutto il fluido: si vedrà che  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ ; se sulla superficie libera la pressione è costante e non varia nello spessore, allora la pressione è costante in tutto il fluido.

- Scrittura delle equazioni di NS in 2 dimensioni.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6.41)$$

- Semplificazione delle equazioni di NS per il problema da affrontare.

Ipotesi:

- problema stazionario:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ;
- direzione  $x$  omogenea (canale infinito in direzione  $x$ ):  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ; la pressione nelle equazioni di NS incomprimibili è un moltiplicatore di Lagrange per imporre il vincolo di incomprimibilità; inoltre non appare mai, se non nelle condizioni al contorno, come  $p$  ma solo con le sue derivate spaziali: quindi non è corretto imporre  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ , nonostante la direzione  $x$  sia omogenea;
- $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  inserito nel vincolo di incomprimibilità ( $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ) implica  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ; poichè  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  e  $v = 0$  a parete per la condizione al contorno di adesione, segue che  $v = \text{cost} = 0$ ;
- forze di volume solo in direzione verticale: per come sono stati orientati gli assi,  $\mathbf{f} = g\hat{\mathbf{x}}$ .

$$\begin{cases} -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6.42)$$

Dalla seconda segue che la pressione può essere funzione solo di  $x$ . Come già detto in precedenza, la pressione sulla superficie libera è costante e uguale alla pressione ambiente  $P_a$ : se la pressione non può variare nello spessore, allora è costante ovunque. La derivata parziale  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ , il suo gradiente è nullo e quindi la pressione è costante in tutta la corrente di acqua.

Nella prima, il termine a sinistra dell'uguale è funzione solo di  $y$ ; quello di destra è costante e uguale a  $\rho g$ . Le condizioni al contorno sono di adesione a parete e di sforzo di taglio nullo all'interfaccia tra aria ed acqua:  $0 = \tau(H) = \mu \frac{\partial u}{\partial y}(H) = \mu u'(H)$ , dove la derivata parziale in  $y$  è stata sostituita da quella ordinaria, poichè la velocità è solo funzione di  $y$ .

$$\begin{cases} -\mu u''(y) = \rho g, & y \in [0, H] \\ u(0) = 0 \\ u'(H) = 0 \end{cases} \quad (6.43)$$

- Soluzione dell'equazione differenziale (semplice) con dati al contorno.

Risulta:

$$\Rightarrow u(y) = -\frac{\rho g}{2\mu} y^2 + \frac{\rho g}{\mu} H y \quad (6.44)$$

- Calcolo della portata come integrale della velocità; si trova così la relazione tra  $Q$  ed  $H$ .

$$Q = \int_0^H \rho u(y) dy = \frac{1}{3} \frac{\rho^2 g}{\mu} H^3 \quad (6.45)$$

E quindi

$$H = \left( \frac{3Q\mu}{\rho^2 g} \right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow H = 5.61 \cdot 10^{-4} m \quad (6.46)$$

- Calcolo dello sforzo a parete

$$\tau = \mu u'|_{y=0} = \rho g H \Rightarrow \tau = 5.494 Pa \quad (6.47)$$

*Osservazione.* Equilibrio con la forza di gravità (problema stazionario).

- Calcolo di  $u(H)$ .

$$u(H) = \frac{1}{2} \frac{\rho g}{\mu} H^2 \Rightarrow u(H) = 1.342 m/s \quad (6.48)$$

- Calcolo velocità media e numero di Reynolds.

$$\bar{U} = \frac{1}{H} \int_0^H u(y) dy = \frac{Q}{\rho H} \Rightarrow \bar{U} = \frac{Q}{\rho H} = \frac{2}{3} u(H) = 0.895 m/s \quad (6.49)$$

$$Re = \frac{\rho \bar{U} H}{\mu} \Rightarrow Re = 434.8 \quad (6.50)$$

L'ultima parte del problema chiede di sostituire alla superficie libera, una parete infinita. L'equazione trovata in precedenza è ancora valida; è necessario però sostituire la condizione di sforzo tangenziale nullo con adesione su una parete mobile con velocità costante  $U$ .

$$\begin{cases} -\mu u''(y) = \rho g, & y \in [0, H] \\ u(0) = 0 \\ u(H) = U \end{cases} \quad (6.51)$$

Il profilo di velocità è:

$$u(y) = \frac{\rho g}{2\mu}(-y^2 + yH) + \frac{U}{H}y \quad (6.52)$$

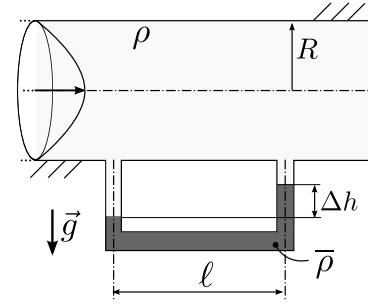
dove la velocità  $U$  è ancora incognita. Per trovarne il valore, si calcola la portata e la si pone uguale a zero. La portata è uguale a

$$Q = \int_0^H u(y)dy = \dots = \frac{1}{12} \frac{\rho g H^3}{\mu} + \frac{1}{2} UH \quad (6.53)$$

Imponendo  $Q = 0$ ,

$$U = -\frac{\rho g H^2}{6\mu} \Rightarrow U = -0.4474 \text{ m/s} \quad (6.54)$$

**Esercizio 6.5 — Corrente di Poiseuille in un tubo a sezione circolare e manometro.** Un manometro a mercurio ( $\rho_{hg} = 13610 \text{ kg/m}^3$ ) collega due prese di pressione posizionate a una distanza di  $l = 2 \text{ m}$  l'una dall'altra lungo un tubo orizzontale di diametro  $2R = 5 \text{ cm}$  in cui scorre un fluido con densità  $\rho_f = 950 \text{ kg/m}^3$ . Se la differenza fra le altezze dei peli liberi del liquido manometrico nelle due colonne vale  $\Delta h = 4 \text{ cm}$  e la portata volumetrica che scorre nel tubo è  $Q = 6 \text{ m}^3/\text{s}$ , quanto valgono la viscosità  $\mu$  del fluido e lo sforzo a parete  $\tau_w$ ? ( $\mu = 6.36 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m s)}$ ,  $\tau_w = 31.05 \text{ z N/m}^2$ ) ■



### Soluzione

**Concetti.** Semplificazione delle equazioni di NS in casi particolari. Soluzioni esatte in coordinate cilindriche. Legge di Stevino.

Scrittura del contributo viscoso del vettore sforzo come:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_n &= \mathbb{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu [\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu [2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}] \end{aligned} \quad (6.55)$$

**Svolgimento.** La geometria del problema suggerisce di utilizzare un sistema di coordinate cilindriche.

- Scrittura delle equazioni di NS in coordinate cilindriche

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = f_r \\ \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = f_\theta \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_z - \mu \nabla^2 u_z + \frac{\partial p}{\partial z} = f_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (6.56)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \nabla b &= a_r \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial b}{\partial \theta} + a_z \frac{\partial b}{\partial z} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (6.57)$$

- Semplificazione delle equazioni di NS per il problema considerato. Vengono fatte le seguenti ipotesi:

- problema stazionario:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ;
- direzione  $z$  omogenea (canale infinito in direzione  $z$ ):  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ ; come discusso negli esercizi in geometria cartesiana, il termine  $\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = -G_P$  è costante e in generale diverso da zero.
- problema assialsimmetrico:  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ ;



- no swirl:  $u_\theta = 0$ ;
- dall'incomprimibilità e dalle condizioni al contorno a parete, segue che la componente radiale della velocità è identicamente nulla,  $u_r = 0$ ;
- no forze di volume:  $\mathbf{f} = 0$ .

Grazie alle ipotesi fatte, il campo di velocità assume la forma  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u(r)\hat{\mathbf{z}}$ . La componente radiale e azimuthale dell'equazione della quantità di moto sono identicamente soddisfatte, mentre la componente lungo  $z$  diventa

$$\begin{cases} \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} u(r) \right) = -G_P & r \in [0, R] \\ u(0) = \text{valore finito} \\ u(R) = 0 \end{cases} \quad (6.58)$$

dove la derivata ordinaria  $\frac{d}{dr}$  è stata utilizzata al posto della derivata parziale, poichè la componente assiale della velocità dipende solamente dalla coordinata radiale,  $u(r)$ . Le condizioni al contorno garantiscono che il campo di velocità sia regolare nel dominio (in particolare che non esistano singolarità sull'asse) e che sia soddisfatta la condizione al contorno di adesione a parete.

- Soluzione dell'equazione differenziale. Si integra due volte e si ottiene:

$$u(r) = -\frac{G_P}{4\mu} r^2 + A \ln r + B \quad (6.59)$$

Imponendo le condizioni al contorno,  $A$  deve essere nullo per l'ipotesi di valore finito in  $r = 0$  ( $\ln r \rightarrow -\infty$  quando  $r \rightarrow 0$ ). Imponendo poi la condizione di adesione a parete per  $r = R$ , si ottiene:

$$u(r) = -\frac{G_P}{4\mu} (r^2 - R^2) . \quad (6.60)$$

- Calcolo della portata: si integra la velocità sulla sezione circolare (!) del tubo. Questa relazione lega il gradiente di pressione  $G_P$  alla portata  $Q$  e al coefficiente di viscosità dinamica  $\mu$ ,

$$Q = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R u(r) r dr d\theta = 2\pi \int_{r=0}^R u(r) r dr = \frac{\pi}{8} \frac{G_P R^4}{\mu} . \quad (6.61)$$

La differenza di pressione tra i due punti A e B (separati da una distanza  $l$ ) è quindi  $P_B - P_A = -G_P l$ .

- Applicazione della legge di Stevino per ottenere il sistema risolvante:

$$\begin{cases} P_1 = P_A + \rho_f g H_0 & (\text{Stevino tra 1 e A}) \\ P_2 = P_B + \rho_f g (H_0 - \Delta h) & (\text{Stevino tra 2 e B}) \\ P_B = P_A - G_P l & (\text{relazione trovata dalla sln di NS}) \\ P_2 = P_1 - \rho_{Hg} g \Delta h & (\text{Stevino tra 1 e 2}) \end{cases} \quad (6.62)$$

Risolvendo il sistema, si trova che:

$$G_P l = (\rho_{Hg} - \rho_f) g \Delta h \quad (6.63)$$

Esplicitando il legame tra  $G_P$  e  $\mu$ , si ottiene il risultato:

$$\Rightarrow \mu = \frac{\pi R^4}{8 Q l} (\rho_{Hg} - \rho_f) g \Delta h \quad \Rightarrow \mu = 6.36 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{ms} \quad (6.64)$$

- Bisogna calcolare ora  $\tau_w$ , la componente parallela alla parete dello sforzo a parete. Usando l'espressione vettoriale della parte viscosa del vettore sforzo agente sul fluido (aiutandosi con le tabelle per le espressioni in coordinate cilindriche degli operatori differenziali) con  $\mathbf{u} = u_z(r)\hat{\mathbf{z}}$  e  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$ , si può scrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_n &= \mu [2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}] = \\ &= \mu \left[ 2 \frac{\partial u_z}{\partial r} \hat{\mathbf{z}} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \hat{\mathbf{z}} \right] = \\ &= \mu \frac{\partial u_z}{\partial r} \hat{\mathbf{z}} . \end{aligned} \quad (6.65)$$

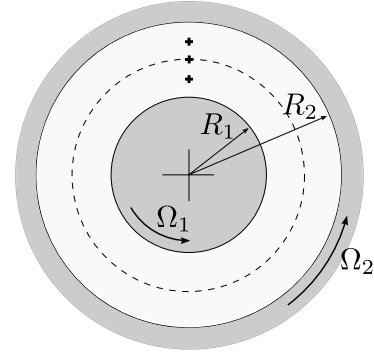
Ricordando che lo sforzo agente sulla parete è uguale e contrario a quello agente sul fluido e che lo sforzo dovuto alla pressione è normale alla parete,

$$\begin{aligned} \tau_w &= -\mu \frac{\partial u_z}{\partial r} \Big|_{r=R} = \\ &= \frac{1}{2} G_P R . \end{aligned} \quad (6.66)$$

Si ottiene quindi il valore,  $\tau_w = 31.05 N/m^2$ .

- R** L'espressione dello sforzo tangenziale a parete  $\tau_w = -\mu \frac{\partial u_z}{\partial r}$  per la corrente di Poiseuille in un tubo a sezione circolare è simile a quella ottenuta per la corrente in un canale piano, in coordinate cartesiane,  $\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ . In questi due casi, la componente tangenziale dello sforzo è proporzionale alla derivata in direzione perpendicolare alla parete della componente di velocità parallela alla parete. Questa **NON** è una formula generale per lo sforzo tangenziale a parete, come sarà evidente nel caso della corrente di Taylor-Couette.

**Esercizio 6.6 — Corrente di Taylor-Couette.** Si consideri la corrente piana fra due cilindri coassiali rotanti. Si misuri la velocità in due punti posti rispettivamente a  $1/4$  e  $3/4$  del gap fra i due cilindri:  $u_{\theta,1/4} = 0.5 \text{ m/s}$ ,  $u_{\theta,3/4} = 0.8 \text{ m/s}$ . Si determini la velocità di rotazione dei due cilindri nonché la pressione in corrispondenza del cilindro interno sapendo che la pressione in corrispondenza del cilindro esterno vale  $5 \text{ Pa}$ , che la densità del fluido è pari a  $1.225 \text{ kg/m}^3$ , che il diametro del cilindro interno è  $d = 2R_1 = 0.1 \text{ m}$  e che il diametro del cilindro esterno è  $D = 2R_2 = 0.16 \text{ m}$ . ( $\Omega_1 = 6.663 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Omega_2 = 11.743 \text{ s}^{-1}$ ) ■



### Soluzione

**Concetti.** Soluzione esatte delle equazioni di Navier-Stokes in geometria cilindrica. Corrente di Taylor-Couette.

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = f_r \\ \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = f_\theta \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_z - \mu \nabla^2 u_z + \frac{\partial p}{\partial z} = f_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (6.67)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \nabla b &= a_r \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial b}{\partial \theta} + a_z \frac{\partial b}{\partial z} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (6.68)$$

**Svolgimento.** Il problema viene risolto calcolando prima le velocità angolari dei cilindri e successivamente la pressione.

- La soluzione di Taylor-Couette viene ricavata dall'espressione semplificata delle equazioni di Navier-Stokes,

$$\begin{cases} -\rho \frac{u_\theta^2}{r} + \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{u_\theta}{r^2} = 0, \end{cases} \quad (6.69)$$

ottenute imponendo che il campo di moto sia bidimensionale  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u_\theta(r, \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} + u_r(r, \theta) \hat{\mathbf{r}}$ , che la soluzione sia omogenea rispetto alla coordinata  $\theta$  e sfruttando le condizioni al contorno e il vincolo di incomprimibilità per ricavare  $u_r(\theta) = 0$ . Sia il campo di pressione sia il campo di velocità dipendono solamente dalla coordinata radiale,  $P = P(r)$ ,  $u_\theta = u_\theta(r)$ . Le derivate parziali possono essere quindi trasformate in derivate ordinarie. La seconda equazione è disaccoppiata dalla prima e può essere risolta, una volta imposte le condizioni al contorno. Trovato il campo di moto da

questa equazione, la prima viene usata per calcolare il campo di pressione. La seconda equazione può essere riscritta come (svolgere le derivate per credere!)

$$\begin{cases} -\left(\frac{1}{r}(ru_\theta)'\right)' = 0 \\ u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1 \\ u_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r} \\ u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1 \\ u_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2 \end{cases} \quad \text{A,B from b.c.} \quad (6.70)$$

Il campo di moto tra due cilindri coassiali rotanti è

$$u_\theta(r) = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}. \quad (6.71)$$

**R** La soluzione esatta di Taylor-Couette è facile da ricavare, se si ricorda che è la somma di una rotazione rigida e un vortice irrotazionale: imponendo la forma  $u_\theta(r) = Ar + B/r$  e le condizioni al contorno,

$$u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1, \quad u_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2 \quad (6.72)$$

si ottiene la formula voluta.

- Calcolo delle velocità angolari dei cilindri. Nota la forma del campo di moto e le velocità in due punti a diversi raggi, è possibile calcolare  $\Omega_1, \Omega_2$  risolvendo un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite. Note le misure di velocità  $u_{\theta,1/4} = u_\theta(r_{1/4})$ ,  $u_{\theta,3/4} = u_\theta(r_{3/4})$ , il sistema risolvente diventa:

$$\begin{bmatrix} -\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r_{1/4} + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r_{1/4}} & \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} r_{1/4} - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r_{1/4}} \\ -\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r_{3/4} + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r_{3/4}} & \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} r_{3/4} - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r_{3/4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{\theta,1/4} \\ u_{\theta,3/4} \end{bmatrix} \quad (6.73)$$

- Calcolo della pressione. Una volta noto il campo di moto, è possibile calcolare il campo di pressione dalla componente radiale dell'equazione della quantità di moto,

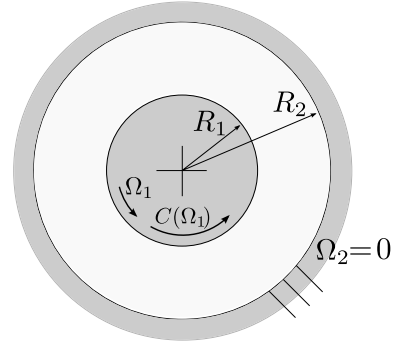
$$\begin{aligned} P'(r) &= \rho \frac{u_\theta^2}{r}, \quad \text{con } P(R_2) = P_2 \\ &\rightarrow \int_r^{R_2} \frac{dP}{dr} dr = \int_r^{R_2} \rho \frac{1}{r} \left( Ar + \frac{B}{r} \right)^2 dr \end{aligned} \quad (6.74)$$

Da questa si ricava

$$P(r) = P_2 - \rho \left[ \frac{1}{2} A^2 (R_2^2 - r^2) + 2AB \ln \frac{R_2}{r} - \frac{1}{2} B^2 \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right]. \quad (6.75)$$

**Esercizio 6.7 — Taylor-Couette: coppia sui cilindri.**

Si consideri la corrente piana di un fluido di densità  $\rho$  fra due cilindri coassiali di raggio  $R_1$  e  $R_2$ . Il cilindro esterno è fermo, mentre quello interno è messo in rotazione da un motore con curva caratteristica  $C_{disp}(\Omega) = \alpha - \beta\Omega$ . Si determini il punto di equilibrio del sistema ( $\Omega$  costante).  
(...)

**Soluzione**

**Concetti.** Soluzione esatte delle equazioni di Navier-Stokes in geometria cilindrica. Corrente di Taylor-Couette.

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = f_r \\ \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = f_\theta \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_z - \mu \nabla^2 u_z + \frac{\partial p}{\partial z} = f_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (6.76)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \nabla b &= a_r \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial b}{\partial \theta} + a_z \frac{\partial b}{\partial z} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (6.77)$$

Espressione vettoriale del contributo viscoso del vettore sforzo,

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_n &= \mathbb{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu [\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu [2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}] \end{aligned} \quad (6.78)$$

**Svolgimento.** Viene risolto il problema piano, nel quale i campi di velocità e di pressione hanno la forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u_r(r, \theta) \hat{\mathbf{r}} + u_\theta(r, \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad , \quad P(\mathbf{r}) = P(r, \theta) \quad , \quad (6.79)$$

e le azioni integrali (come la coppia fornita e quella incognita) sono intese per unità di lunghezza, essendo la “dimensione mancante” quella fuori dal piano del disegno.

- Calcolo delle velocità angolari dei cilindri. Nota la forma del campo di moto e le velocità in due punti a diversi raggi, è possibile calcolare  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  risolvendo un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite. Il campo di moto tra due cilindri coassiali rotanti è:

$$u_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r} = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} \quad (6.80)$$

Se il cilindro esterno è fermo e la velocità angolare del cilindro interno vale  $\Omega_1 = \Omega$ , i coefficienti  $A$  e  $B$  valgono

$$A = -\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\Omega < 0 \quad , \quad B = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\Omega > 0 . \quad (6.81)$$

**R** La soluzione esatta di Taylor-Couette è facile da ricavare, se si ricorda che è la somma di una rotazione rigida e un vortice irrotazionale: imponendo la forma  $u_\theta(r) = Ar + B/r$  e le condizioni al contorno,

$$u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1 \quad , \quad u_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2 \quad (6.82)$$

si ottiene la formula voluta.

- Calcolo dello sforzo tangenziale a parete per determinare il puto di equilibrio del sistema. Si determina la componente tangenziale (quella che contribuisce alla coppia resistente) dello sforzo sul cilindro interno. Il contributo viscoso del vettore sforzo può essere scritto come:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_n &= \mathbb{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu [\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu [2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}] = \quad (\text{verificare con le tabelle}) \\ &= \mu \left[ 2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} = \\ &= \mu \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} = \quad (u_\theta = Ar + B/r) \\ &= -2\mu \frac{B}{r^2} \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \quad (6.83)$$

**R** La formula dello sforzo tangenziale a parete per la corrente di Taylor-Couette è  $\tau_w = \mu \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right]$ ,

La parte tangenziale dello sforzo a parete sul cilindro interno è quindi  $\tau_w = 2\mu B/R_1^2$ . Integrando il prodotto tra vettore sforzo e raggio  $R_1$  sulla superficie laterale del cilindro si ottiene la coppia resistente,

$$\begin{aligned} C_{res}(\Omega) &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \tau_w(R_1) R_1 R_1 d\theta = \\ &= 2\pi \tau_w(R_1) R_1^2 = -4\pi \mu \frac{B(\Omega)}{R_1^2} R_1^2 = -4\pi \mu \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \Omega = -\gamma \Omega . \end{aligned} \quad (6.84)$$

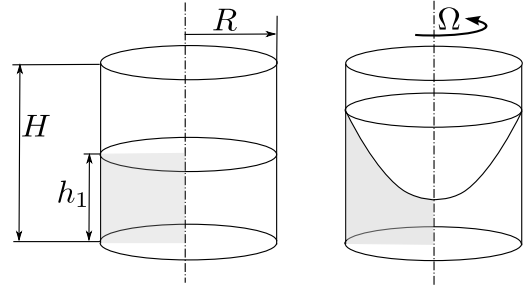
All'equilibrio, la somma della coppia disponibile e di quella resistente deve essere uguale a zero,

$$0 = C_{disp}(\Omega) + C_{res}(\Omega) = \alpha - \beta \Omega - \gamma \Omega , \quad (6.85)$$

e quindi  $\Omega = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}$ .

**Esercizio 6.8 — Recipiente rotante.** Un contenitore cilindrico (raggio  $R$ , altezza  $H$ ) è riempito fino ad una quota  $h_1 = H/2$  di un liquido di densità  $\rho$ . Il contenitore è messo poi in rotazione con velocità angolare costante  $\Omega$ . Una volta esaurito il transitorio, viene chiesto di trovare:

- la forma che assume il liquido all'interno del contenitore;
- la velocità  $\Omega_{max}$  alla quale il liquido inizia a uscire dal contenitore;
- il campo di pressione quando il corpo ruota con velocità angolare  $\Omega_{max}$ .



### Soluzione

**Concetti.** Soluzione esatte delle equazioni di Navier-Stokes. Fluido in rotazione rigida, con superficie superiore libera.

#### Svolgimento.

- Si usano le equazioni di NS in coordinate cilindriche. Seguendo un procedimento analogo a quello svolto per ottenere la soluzione esatta di Taylor-Couette, ma senza trascurare l'effetto della gravità, si ottiene la seguente coppia di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \\ \frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{u_\theta^2}{r} \end{cases} \quad (6.86)$$

Il campo di moto descrive una rotazione rigida, poichè il termine  $1/r$  della soluzione di Taylor-Couette non è ammissibile (l'asse appartiene al dominio, non ha senso una velocità che tende all'infinito). La costante di proporzionalità tra  $u_\theta$  ed  $r$  è la velocità angolare  $\Omega$  per soddisfare le condizioni al contorno a parete,  $u_\theta(R) = \Omega R$ .

$$u_\theta(r) = \Omega r \quad (6.87)$$

Dall'integrazione delle due equazioni (6.86) si ottiene il campo di pressione  $P(r, z)$ , a meno di una costante di integrazione  $C$

$$P(r, z) = -\rho g z + \rho \frac{\Omega^2 r^2}{2} + C \quad (6.88)$$

La condizione al contorno necessaria è  $P(r, z_{free}(r)) = P_a$ ; sulla superficie libera, la cui quota è descritta dalla funzione  $z_{free}(r)$  (ancora incognita), agisce la pressione ambiente  $P_a$

$$P(r, z_{free}(r)) = -\rho g z_{free} + \rho \frac{\Omega^2 r^2}{2} + C = P_a \quad (6.89)$$

$\Downarrow$

$$z_{free}(r) = \frac{\Omega^2 r^2}{2g} - \frac{P_a - C}{\rho g} \quad (6.90)$$

Per determinare la costante  $C$  bisogna ricorrere alla conservazione della massa. La massa contenuta all'interno del recipiente non varia (fino a quando il liquido non esce). Se si considera densità costante  $\rho$ , bisogna scrivere la conservazione del volume tra istante iniziale  $V_0 = \pi R^2 H/2$  e condizione a regime  $V$ . Il volume  $V$  viene calcolato tramite un'integrale di volume, comodo da descrivere in coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \int_{z=0}^{z=z_{free}(r)} r dr dz d\theta = \\
 &= 2\pi \int_{r=0}^R z_{free}(r) r dr = \\
 &= 2\pi \int_{r=0}^R \frac{\Omega^2 r^3}{2g} - \frac{P_a - C}{\rho g} r dr = \\
 &= 2\pi \left[ \frac{\Omega^2 R^4}{8g} - \frac{(P_a - C)}{2\rho g} R^2 \right] = \\
 &= \pi \left[ \frac{\Omega^2 R^4}{4g} - \frac{(P_a - C)}{\rho g} R^2 \right] =
 \end{aligned} \tag{6.91}$$

Uguagliando  $V_0$  e  $V$  si ottiene

$$-\frac{(P_a - C)R}{\rho g} = -\frac{\Omega^2 R^4}{4g} + R^2 \frac{H}{2} \tag{6.92}$$

termine che può essere sostituito in (6.90)

$$z_{free}(r) = \frac{\Omega^2 r^2}{2g} - \frac{\Omega^2 R^2}{4g} + \frac{H}{2} \tag{6.93}$$

La superficie libera ha la forma di un parabolide. La concavità del paraboloide è diretta verso l'alto e aumenta all'aumentare di  $|\Omega|$  (il risultato è indipendente dal verso di rotazione, e quindi dal segno di  $\Omega$ , poichè compare con potenze pari). La quota del vertice  $z_v = -\frac{\Omega^2 R^2}{4g} + \frac{H}{2}$  invece diminuisce.

- Per determinare la  $\Omega_{max}$ , bisogna imporre la condizione  $z_{free}(r = R) = H$ .

$$z_{free}(R) = \frac{\Omega_{max}^2 R^2}{4g} + R^2 \frac{H}{2} = H \Rightarrow \Omega_{max} = \sqrt{\frac{2gH}{R^2}} \tag{6.94}$$

- Per ottenere il campo di pressione, basta inserire il valore di  $C$  e  $\Omega_{max}$  nella formula (6.88).