

7. Similitudine

7.1 Teorema di Buckingham

Il teorema di Buckingham afferma che un problema descritto da n variabili fisiche, le cui dimensioni fisiche coinvolgono k grandezze fondamentali, può essere espresso in funzione di $n - k$ gruppi adimensionali.

7.2 Equazioni di Navier–Stokes incompressibili in forma adimensionale

Nelle equazioni incompressibili di Navier–Stokes per un fluido a densità costante

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (7.1)$$

compaiono 7 variabili fisiche $(\rho, \mathbf{u}, \mu, p, \mathbf{g}; \mathbf{r}, t)$, le 2 variabili indipendenti spaziale \mathbf{r} e temporale t , e le 5 variabili dipendenti rappresentate dalla densità ρ , dal campo di velocità \mathbf{u} , dal coefficiente di viscosità dinamica μ , dal campo di pressione p e dal campo di forze di volume \mathbf{g} . Le dimensioni fisiche delle 7 variabili possono essere costruite con 3 grandezze fondamentali, la massa M , la lunghezza L e il tempo T . Ad esempio, le dimensioni fisiche della velocità sono $[\mathbf{u}] = L T^{-1}$ e quelle della densità sono $[\rho] = M L^{-3}$. Le dimensioni delle 7 variabili fisiche che compaiono nelle equazioni di Navier–Stokes incompressibili sono raccolte nella tabella 7.1. Per poter formare i $7 - 3 = 4$ gruppi adimensionali che

	\mathbf{r}	t	ρ	\mathbf{u}	μ	p	\mathbf{g}
M	0	0	1	0	1	1	0
L	1	0	-3	1	-1	-1	1
T	0	1	0	-1	-1	-2	-2

Tabella 7.1: Variabili fisiche e grandezze fondamentali.

caratterizzano il problema, è necessario scegliere 3 variabili fisiche (o combinazione di queste) che “contengano in maniera linearmente indipendente” tutte le 3 grandezze fondamentali del problema. Facendo riferimento alla tabella 7.1, le colonne relative alle variabili scelte per l’adimensionalizzazione devono formare dei vettori linearmente indipendenti tra di loro. Ad esempio, due scelte valide delle variabili da usare per l’adimensionalizzazione del problema sono:

- (ρ, U, L) , una densità, una velocità e una lunghezza di riferimento,
- (μ, U, L) , una viscosità, una velocità e una lunghezza di riferimento,

mentre una scelta non accettabile è una terna (T, U, L) formata da un tempo, una velocità e una lunghezza di riferimento, poichè non è possibile costruire dei gruppi adimensionali con le variabili fisiche che contengono la massa come grandezza fisica, come la densità, la pressione e il coefficiente di viscosità.

Tutte le variabili fisiche vengono espresse come il prodotto di una loro grandezza di riferimento, che contiene le dimensioni fisiche e viene indicata con la tilde, e la loro versione adimensionale, indicata con l’asterisco,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \tilde{L} \mathbf{r}^* \quad , \quad t = \tilde{T} t^* \quad , \quad \mathbf{u} = \tilde{U} \mathbf{u}^* \\ \rho &= \tilde{\rho} \rho^* \quad , \quad \mu = \tilde{\mu} \mu^* \quad , \quad p = \tilde{p} p^* \quad , \quad \mathbf{g} = \tilde{g} \mathbf{g}^* . \end{aligned} \quad (7.2)$$

Per le equazioni di Navier–Stokes incomprimibili a proprietà costanti, è possibile scegliere il valore di riferimento della densità e della viscosità dinamica come il valore stesso delle variabili fisiche, $\tilde{\rho} = \rho$, $\tilde{\mu} = \mu$. In questo modo, il loro valore adimensionale è uguale a 1, $\rho^* = \mu^* = 1$. Nel caso del campo di forze di volume dovuto alla gravità, costante e diretto lungo la verticale, è possibile definire il valore di riferimento $\tilde{g} = |\mathbf{g}|$, cosicchè il vettore \mathbf{g}^* è uguale e contrario al versore $\hat{\mathbf{z}}$ orientato in direzione verticale. Anche l’operatore *nabla* viene adimensionalizzato, $\nabla = \frac{1}{\tilde{L}} \nabla^*$. Le equazioni di Navier–Stokes possono essere scritte come

$$\begin{cases} \frac{\rho \tilde{U}}{\tilde{t}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho \tilde{U}^2}{\tilde{L}} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \frac{\mu \tilde{U}}{\tilde{L}^2} \Delta^* \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{p}}{\tilde{L}} \nabla^* p^* = -\rho g \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\tilde{U}}{\tilde{L}} \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 . \end{cases} \quad (7.3)$$

7.2.1 Adimensionalizzazione “ad alti numeri di Reynolds”

Se si scelgono $(\tilde{\rho}, \tilde{U}, \tilde{L})$ come grandezze di riferimento, dividendo l’equazione della quantità di moto per $\tilde{\rho} \tilde{U}^2 / \tilde{L}$ e il vincolo di incomprimibilità per \tilde{U} / \tilde{L} ,

$$\begin{cases} \frac{\tilde{L}}{\tilde{U} \tilde{t}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \frac{\mu}{\rho \tilde{U} \tilde{L}} \Delta^* \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{p}}{\rho \tilde{U}^2} \nabla^* p^* = -\frac{g \tilde{L}}{\tilde{U}^2} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 , \end{cases} \quad (7.4)$$

si possono riconoscere 4 numeri adimensionali:

- il numero di Strouhal, $St = \frac{\tilde{L}}{\tilde{U} \tilde{t}}$, che rappresenta il rapporto tra una scala dei tempi e la scala dei tempi \tilde{L} / \tilde{U} costruita con la lunghezza e la velocità di riferimento;
- il numero di Reynolds, $Re = \frac{\rho \tilde{U} \tilde{L}}{\mu}$, che rappresenta il rapporto tra gli effetti di inerzia e quelli viscosi;
- il numero di Eulero, $Eu = \frac{\tilde{p}}{\rho \tilde{U}^2}$, che rappresenta il rapporto tra la grandezza di riferimento della pressione e quella di un’energia cinetica del fluido;
- il numero di Froude, $Fr = \frac{\tilde{U}^2}{g \tilde{L}}$, che rappresenta il rapporto tra gli effetti di inerzia e quelli dovuti al campo di forze di volume.

Quando non esiste una scala dei tempi “indipendente” dal fenomeno fluidodinamico, è possibile scegliere il valore di riferimento del tempo $\tilde{t} = \tilde{L}/\tilde{U}$, in modo tale da ottenere un numero di Strouhal unitario. Per la natura stessa della “pressione” di moltiplicatore di Lagrange introdotto nelle equazioni di Navier–Stokes per imporre il vincolo di incompressibilità, è frequente che la pressione non abbia una scala indipendente nel regime incompressibile. È possibile quindi scegliere una scala di pressione $\tilde{p} = \rho\tilde{U}^2$, in modo tale da ottenere un numero di Eulero unitario,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \frac{1}{Re} \Delta^* \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* = -\frac{1}{Fr} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

Se le grandezze di riferimento sono rappresentative del problema, in modo tale da rendere gli ordini di grandezza delle variabili adimensionali paragonabili tra loro, il valore dei numeri adimensionali permette di valutare l’influenza dei termini. Ad esempio, per valori elevati del numero di Froude l’influenza delle forze di volume è ridotta. Per valori elevati del numero di Reynolds, l’influenza degli effetti viscosi diventa trascurabile nelle regioni del campo di moto nelle quali le derivate spaziali del campo di velocità sono piccole. Per applicazioni tipiche aeronautiche ad alti numeri di Reynolds, gli effetti viscosi saranno quindi trascurabili in gran parte del dominio, ad eccezione delle regioni di strato limite, all’interno delle quali la componente della velocità “parallela” alla parete ha una variazione elevata in direzione perpendicolare alla parete stessa. Se gli effetti delle forze di volume sono trascurabili ($Fr \rightarrow \infty$), le equazioni di Navier–Stokes incompressibili per problemi ad alti numeri di Reynolds ($Re \rightarrow \infty$) si riducono alle equazioni di Eulero incompressibili nelle regioni del dominio in cui gli effetti viscosi sono trascurabili,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* = \mathbf{0} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

7.2.2 Adimensionalizzazione “a bassi numeri di Reynolds”

Se si scelgono $(\tilde{\rho}, \tilde{U}, \tilde{L})$ come grandezze di riferimento, dividendo l’equazione della quantità di moto per $\tilde{\mu}\tilde{U}/\tilde{L}^2$ e il vincolo di incompressibilità per \tilde{U}/\tilde{L} , le equazioni di Navier–Stokes diventano

$$\begin{cases} \frac{\rho\tilde{L}^2}{\mu\tilde{t}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho\tilde{U}\tilde{L}}{\mu} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \Delta^* \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{p}\tilde{L}}{\mu\tilde{U}} \nabla^* p^* = -\frac{\rho g \tilde{L}^2}{\mu\tilde{U}} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \end{cases} \quad (7.7)$$

Se gli effetti delle forze di volume sono trascurabili rispetto agli effetti viscosi e non ci sono scale indipendenti di tempo e pressione, le equazioni di Navier–Stokes in forma adimensionale diventano

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + Re(\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \Delta^* \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* = \mathbf{0} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \end{cases} \quad (7.8)$$

Per correnti nelle quali il numero di Reynolds caratteristico tende a zero, note come *creeping flow*, il termine non lineare diventa trascurabile e le equazioni di Navier–Stokes si riducono alle equazioni di Stokes,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} - \Delta^* \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* = \mathbf{0} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \end{cases} \quad (7.9)$$

7.3 Equazione di continuità e numero di Mach

La forma adimensionale dell'equazione di continuità permette di valutare i limiti dell'approssimazione di corrente incomprimibile, che soddisfa il vincolo cinematico di incomprimibilità $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. L'equazione della massa viene scritta in forma convettiva,

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} . \quad (7.10)$$

Ricordando che lo stato termodinamico di un sistema monocomponente monofase è definito da due variabili termodinamiche, il campo di pressione p viene espresso in funzione del campo di densità ρ e di entropia s , come $p(\rho, s)$. Il differenziale di questa relazione,

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho ds , \quad (7.11)$$

può essere utilizzato per esprimere la derivata materiale della densità in funzione delle derivate materiali di pressione ed entropia,

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{(\partial p / \partial \rho)_s} \frac{Dp}{Dt} - \frac{(\partial p / \partial s)_\rho}{(\partial p / \partial \rho)_s} \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{c^2} \frac{Dp}{Dt} - \frac{(\partial p / \partial s)_\rho}{c^2} \frac{Ds}{Dt} , \quad (7.12)$$

avendo riconosciuto il quadrato della velocità del suono $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$. L'equazione della massa diventa quindi

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{Dp}{Dt} - \frac{(\partial p / \partial s)_\rho}{\rho c^2} \frac{Ds}{Dt} . \quad (7.13)$$

Per processi isentropici (o per i quali il secondo termine a destra dell'uguale è trascurabile), l'equazione della massa si riduce a

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{Dp}{Dt} . \quad (7.14)$$

Utilizzando i valori di densità $\tilde{\rho}$, velocità \tilde{U} e lunghezza \tilde{L} caratteristici della corrente per costruire la scala dei tempi $\tilde{t} = \tilde{L}/\tilde{U}$ e per la pressione $\tilde{p} = \tilde{\rho}\tilde{U}^2$, si ottiene l'equazione della massa in forma adimensionale,

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = -\frac{M^2}{\rho^*} \frac{Dp^*}{Dt^*} , \quad (7.15)$$

nella quale si è iconosciuto il numero di Mach caratteristico della corrente, $M = \frac{\tilde{U}}{c}$, definito come il rapporto tra una velocità caratteristica e la velocità del suono in uno stato termodinamico di riferimento della corrente. É immediato osservare che l'equazione di continuità della massa si riduce al vincolo di incomprimibilità quando il numero di Mach assume valori ridotti (e il campo di pressione non ha variazioni rapide).

7.4 Equazioni di Boussinesq e numeri di Prandtl, Nusselt e Grashof

Esercizio 7.1 — Similitudine ad alta velocità: missile. Un missile vola alla quota di 7000 m, dove la densità dell'aria è $\rho = 0.59 \text{ kg/m}^3$ e la sua temperatura è $T = -30.45^\circ\text{C}$, alla velocità costante $V_v = 505 \text{ km/h}$.

Determinare:

- il fattore di scala geometrico $\lambda = L_m/L_v$,
- la velocità dell'aria V_m ,

necessari per riprodurre correttamente i coefficienti aerodinamici del missile in una galleria del vento che operi a condizioni atmosferiche standard ($\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$, $p = 101325 \text{ Pa}$, $T = 15^\circ\text{C}$).

($V_m = 152.8 \text{ m/s}$, $\lambda = 0.507$)

Soluzione

Concetti. Similitudine fluidodinamica: numeri di Reynolds e di Mach.

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} \quad , \quad M = \frac{U}{c} . \quad (7.16)$$

Formula di Sutherland per la viscosità dinamica **dei gas**,

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \frac{C + T_0}{C + T} . \quad (7.17)$$

Svolgimento. Assumendo che l'aria si comporti come gas ideale, per il quale vale l'equazione di stato $p = \rho R T$, la velocità del suono vale $c = \sqrt{\gamma R T}$, dove $\gamma = c_p/c_v$ è il rapporto dei calori specifici a pressione e volume costante, che vale $\gamma = 1.4$ per un gas biatomico. La costante del gas R è definita come il rapporto tra la costante universale dei gas \mathcal{R} e la massa molare M_m , $R = \mathcal{R}/M_m$. La massa molare dell'aria secca vale $M_m = 28.96 \text{ kg/kmol}$ e la sua costante R vale

$$R = \frac{\mathcal{R}}{M_m} = \frac{8314.4 \text{ J/(kmol K)}}{28.97 \text{ kg/kmol}} = 287.0 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} . \quad (7.18)$$

La velocità del suono nell'aria alle condizioni termodinamiche del problema vale $c = 312.3 \text{ m/s}$. Il numero di Mach caratteristico della corrente è quindi $M = 0.45$ e gli effetti di comprimibilità non possono essere trascurati, poichè il numero di Mach è maggiore del valore convenzionale 0.3 che identifica il limite della validità dell'approssimazione di fluido incomprimibile. Per ottenere la similitudine tra problema reale e quello modellato (di dimensioni ridotte) è necessaria la similitudine geometrica e l'uguaglianza dei numeri adimensionali che caratterizzano il problema, il numero di Reynolds Re e il numero di Mach M .

$$\begin{cases} M_1 = M_2 \\ Re_1 = Re_2 \end{cases} . \quad (7.19)$$

Utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti,

$$\begin{cases} \frac{V_v}{\sqrt{\gamma R T_v}} = \frac{V_m}{\sqrt{\gamma R T_m}} \\ \frac{\rho_v V_v L_v}{\mu(T_v)} = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu(T_m)} \end{cases} \quad (7.20)$$

Risolvendo il sistema, si ottiene l'espressione delle incognite

$$\begin{cases} V_m = V_v \sqrt{\frac{T_m}{T_v}} \\ \lambda = \frac{L_m}{L_v} = \frac{\rho_v}{\rho_m} \sqrt{\frac{T_v}{T_m} \frac{\mu(T_m)}{\mu(T_v)}} \end{cases} \quad (7.21)$$

Per trovare i valori ancora incogniti della viscosità dinamica si usa la formula di Sutherland: per l'aria i coefficienti sono $T_0 = 288K$, $C = 110.4K$. Si ottengono i valori numerici $V_m = 152.8m/s$, $\lambda = 0.507$.

Osservazioni. Non è sempre possibile imporre l'uguaglianza di Re e M . Si pensi ad esempio a un'applicazione in aria in condizioni standard e prove sul modello in galleria ad aria in condizioni standard. Per ottenere l'uguaglianza dei numeri di Mach, bisogna avere la stessa velocità caratteristica (poichè la celerità del suono è la stessa tra condizione reale e modello). Avendo uguagliato le velocità caratteristiche ed essendo uguali le variabili termodinamiche ρ e μ , si ottiene l'uguaglianza della dimensione caratteristica del modello. Questo significa che sarebbe necessario avere un modello in scala 1:1 per soddisfare la similitudine utilizzando nella prova sperimentale lo stesso fluido nelle stesse condizioni termodinamiche delle condizioni “al vero”. Per limiti tecnologici e di costi, dovuti alle dimensioni degli apparati sperimentali, spesso è necessario utilizzare un modello in scala dell'originale. Esistono gallerie controllate in pressione per variare lo stato termodinamico dell'aria di prova e gallerie che utilizzando acqua come fluido di prova: entrambe queste scelte comportano complicazioni nel progetto e nell'utilizzo dell'impianto, traducibile spesso in costi elevati.

Allora per quale numero adimensionale o secondo quale combinazione dei numeri adimensionali conviene ottenere la similitudine? “Arte”, esperienza e alcuni “espedienti” sperimentali, che non sono oggetto di questo corso hanno lo scopo di ottenere risultati rappresentativi del problema al vero, anche se la perfetta similitudine non è soddisfatta.

Esercizio 7.2 — Similitudine ad alta velocità: velivolo. Un aeromobile vola nell'alta atmosfera a velocità costante $V_v = 252 \text{ m/s}$, in condizioni di densità ρ_v e temperatura T_v assegnate: $\rho_v = 0.424 \text{ kg/m}^3$, $T_v = -50.3^\circ\text{C}$.

Determinare la velocità, la densità e la pressione dell'aria da utilizzarsi in una galleria del vento pressurizzata che operi alla temperatura di 15°C per ottenere la similitudine dinamica corretta con un modello in scala ridotta $\lambda = 0.2$.

$$(V_m = 286.6 \text{ m/s}, \rho_m = 2.292 \text{ kg/m}^3, p_m = 189560 \text{ Pa})$$

Soluzione

Concetti. Similitudine fluidodinamica: numeri di Reynolds e di Mach.

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu}, \quad M = \frac{U}{c}. \quad (7.22)$$

Formula di Sutherland per la viscosità dinamica **dei gas**,

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \frac{C + T_0}{C + T}. \quad (7.23)$$

Svolgimento. Assumendo che l'aria si comporti come gas ideale, per il quale vale l'equazione di stato $p = \rho RT$, la velocità del suono vale $c = \sqrt{\gamma RT}$, dove $\gamma = c_p/c_v$ è il rapporto dei calori specifici a pressione e volume costante, che vale $\gamma = 1.4$ per un gas biatomico. La costante del gas R è definita come il rapporto tra la costante universale dei gas \mathcal{R} e la massa molare M_m , $R = \mathcal{R}/M_m$. La massa molare dell'aria secca vale $M_m = 28.96 \text{ kg/kmol}$ e la sua costante R vale

$$R = \frac{\mathcal{R}}{M_m} = \frac{8314.4 \text{ J/(kmol K)}}{28.97 \text{ kg/kmol}} = 287.0 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}. \quad (7.24)$$

La velocità del suono nell'aria alle condizioni termodinamiche del problema vale $c = 299.2 \text{ m/s}$. Il numero di Mach caratteristico della corrente è quindi $M = 0.84$ e gli effetti di comprimibilità non possono essere trascurati, poichè il numero di Mach è maggiore del valore convenzionale 0.3 che identifica il limite della validità dell'approssimazione di fluido incomprimibile. Per ottenere la similitudine tra problema reale e quello modellato (di dimensioni ridotte) è necessaria la similitudine geometrica e l'uguaglianza dei numeri adimensionali che caratterizzano il problema, il numero di Reynolds Re e il numero di Mach M .

$$\begin{cases} M_1 = M_2 \\ Re_1 = Re_2 \end{cases}. \quad (7.25)$$

Utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti,

$$\begin{cases} \frac{V_v}{\sqrt{\gamma RT_v}} = \frac{V_m}{\sqrt{\gamma RT_m}} \\ \frac{\rho_v V_v L_v}{\mu(T_v)} = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu(T_m)} \end{cases} \quad (7.26)$$

Risolvendo il sistema, si ottiene l'espressione delle incognite:

$$\Rightarrow \begin{cases} V_m = V_v \sqrt{\frac{T_m}{T_v}} \\ \rho_m = \frac{1}{\lambda} \rho_v \sqrt{\frac{T_v}{T_m}} \frac{\mu(T_m)}{\mu(T_v)} \\ P_m = \rho_m R T_m = \frac{1}{\lambda} \frac{\mu(T_m)}{\mu(T_v)} \rho_v R \sqrt{T_v T_m} \end{cases} \quad (7.27)$$

Per trovare i valori ancora incogniti della viscosità dinamica si usa la formula di Sutherland: per l'aria i coefficienti sono $T_0 = 288K$, $C = 110.4K$. Si ottengono i valori numerici $V_m = 286.6 \text{ m/s}$, $\rho_m = 2.292 \text{ kg/m}^3$, $p_m = 189560 \text{ Pa}$.

Esercizio 7.3 — Similitudine a bassa velocità: sottomarino. La velocità di pattugliamento di un sottomarino vale $V_v = 2.5 \text{ m/s}$. Considerando che il sottomarino si muova in acqua in condizioni standard, a quale velocità deve essere provato un modello in scala $\lambda = 1/10$, avendo a disposizione rispettivamente:

- una galleria ad acqua in condizioni standard,
- una galleria ad aria a pressione di 10 bar e temperatura di 30°C ?

Se la resistenza al vero vale $D_v = 6000 \text{ N}$, quanto vale la resistenza sui modelli in scala nei due casi?

(Galleria ad aria: $V_m = 35.17 \text{ m/s}$, $D_m = 136.1 \text{ N}$. Galleria ad acqua: $V_m = 25 \text{ m/s}$, $D_m = 6000 \text{ N}$.)

Soluzione

Concetti. Similitudine fluidodinamica per correnti incompressibili, numero di Reynolds,

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} . \quad (7.28)$$

Formula di Sutherland per la viscosità dinamica **dei gas**,

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \frac{C + T_0}{C + T} . \quad (7.29)$$

Azioni agenti sul modello e coefficienti di forza.

Svolgimento. La velocità sul modello si trova tramite l'uguaglianza dei numeri di Reynolds,

$$\frac{\rho_v U_v L_v}{\mu_v} = \frac{\rho_m U_m L_m}{\mu_m} \rightarrow U_m = U_v \frac{\rho_v L_v}{\rho_m L_m} \cdot \frac{\mu_m}{\mu_v} \quad (7.30)$$

Per trovare la viscosità dell'aria viene utilizzata la formula di Sutherland (per l'aria i coefficienti sono $T_0 = 288\text{K}$, $C = 110.4\text{K}$, $\mu_0 = 18.27 \mu\text{Pas}$). Il coefficienti di viscosità dinamica dell'acqua in condizioni standard è dell'ordine di 10^{-3} kg/(m s) .

La forza agente aerodinamica agente sul corpo, la cui superficie esterna è indicata con S , è la risultante degli sforzi di superficie esterna del corpo S_b ,

$$\mathbf{F} = \oint_S \mathbf{t}_n = \oint_S -p \hat{\mathbf{n}} + \mu [\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (7.31)$$

Vengono scelte la densità caratteristica del fluido ρ , una velocità caratteristica della corrente U e una lunghezza caratteristica del problema L , per definire la scala della pressione $P = \rho U^2$. Raccogliendo le dimensioni fisiche fuori dal segno di integrale è quindi possibile scrivere,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \oint_{S_b} -P p^* \hat{\mathbf{n}} + \frac{\mu U}{L} [\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*] \hat{\mathbf{n}} = & (P = \rho U^2, dS = L^2 dS^*) \\ &= \rho U^2 L^2 \oint_{S_b^*} -p^* \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{Re} [\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*] \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \frac{1}{2} \rho U^2 S c_F(Re) , \end{aligned} \quad (7.32)$$

avendo introdotto il coefficiente di forza c_F ,

$$c_F = 2 \frac{L^2}{S} \oint_{S_b^*} -p^* \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{Re} [\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*] \hat{\mathbf{n}} \quad (7.33)$$

che può dipendere dalle variabili fisiche solo attraverso i numeri adimensionali del problema (in questo caso solo da Re , per problemi comprimibili anche da M) e che rappresenta la forza agente sul corpo adimensionalizzata con la pressione dinamica $\frac{1}{2}\rho U^2$ e con una superficie di riferimento del corpo S . La superficie di riferimento S scala con L^2 ($S = aL^2$, a costante).

Si può scrivere la risultante delle forze sul modello e al vero come

$$\begin{cases} \mathbf{F}_m = \frac{1}{2}\rho_m U_m^2 S_m^2 \mathbf{c}_F(Re_m) \\ \mathbf{F}_v = \frac{1}{2}\rho_v U_v^2 S_v^2 \mathbf{c}_F(Re_v) . \end{cases} \quad (7.34)$$

Poichè è soddisfatta la similitudine fluidodinamica, i valori dei coefficienti di forza del modello e “al vero” sono uguali. Si può quindi scrivere

$$\mathbf{F}_m = \frac{\rho_m}{\rho_v} \left(\frac{U_m}{U_v} \right)^2 \left(\frac{S_m}{S_v} \right) \mathbf{F}_v = \frac{\rho_m}{\rho_v} \left(\frac{U_m}{U_v} \right)^2 \left(\frac{L_m}{L_v} \right)^2 \mathbf{F}_v = \frac{\rho_m}{\rho_v} \left(\frac{U_m}{U_v} \right)^2 \lambda^2 \mathbf{F}_v , \quad (7.35)$$

Nel caso della galleria ad acqua, nella quale il fluido è lo stesso e nello stesso stato termodinamico della situazione reale ($\rho_m = \rho_v$, $\mu_m = \mu_v$), l'uguaglianza dei numeri di Reynolds si semplifica in

$$\frac{\rho_m U_m L_m}{\mu_m} = \frac{\rho_v U_v L_v}{\mu_v} \quad \rightarrow \quad U_m L_m = U_v L_v . \quad (7.36)$$

Quindi, in questo caso la forza agente sul modello di galleria coincide con la forza agente sul corpo nella situazione reale,

$$\mathbf{F}_m^{H_2O,s} = \mathbf{F}_v^{H_2O,s} . \quad (7.37)$$

Esercizio 7.4 — Getto: codice numerico adimensionale. Si vuole studiare con la corrente di aria che esce da un ugello verticale di diametro $\tilde{D} = 0.01 \text{ m}$, nell'intervallo di velocità di riferimento $\tilde{U} \in [1, 10] \text{ m/s}$. Si ha a disposizione un codice numerico che risolve le equazioni in forma adimensionale, in cui non è possibile variare le condizioni al contorno, e una sola griglia di calcolo. Si chiede di:

- determinare l'intervallo di numeri di Reynolds Re da inserire nel codice, sapendo che la velocità di riferimento nel codice è $U = 1$ e il diametro nella griglia vale $D = 1$.
- la frequenza \tilde{f} di rilascio di vortici quando $\tilde{U} = 1 \text{ m/s}$, sapendo che la frequenza estratta dai risultati numerici è $f = 0.2$;
- stimare l'errore compiuto dal codice nel trascurare l'effetto della gravità.

Soluzione

Concetti. Similitudine fluidodinamica. Numeri di Reynolds e Froude. Ordini di grandezza dei termini.

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} \quad , \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}} \quad (7.38)$$

Svolgimento.

- Affinchè le simulazioni numeriche siano rappresentative della corrente incomprimibile che si vuole studiare, è necessario che ci sia similitudine fluidodinamica tra i due casi: bisogna imporre l'uguaglianza dei numeri di Reynolds

$$Re = \frac{\tilde{U} \tilde{D}}{\tilde{\nu}} \approx \frac{(1 \div 10) \text{ m/s} \times 10^{-2} \text{ m}}{10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 10^3 \div 10^4 . \quad (7.39)$$

- Se la frequenza adimensionale ottenuta dalla simulazione numerica è $f = 0.2$, la frequenza dimensionale viene ottenuta dall'uguaglianza dei numeri di Strouhal, cioè “ri-dimensionalizzando” f con le grandezze di riferimento usate per l'adimensionalizzazione (U, L, ρ) .

$$\frac{f D}{U} = \frac{\tilde{f} \tilde{D}}{\tilde{U}} \Rightarrow \tilde{f} = f \frac{\tilde{U}}{\tilde{D}} = 0.2 \times \frac{1 \text{ m/s}}{10^{-2} \text{ m}} = 20 \text{ s}^{-1} . \quad (7.40)$$

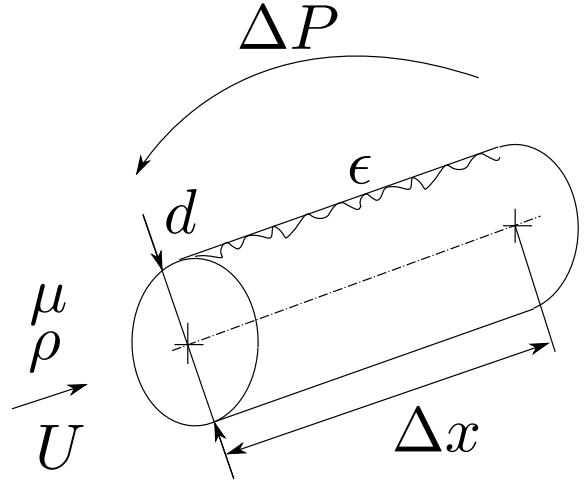
- Per quantificare l'effetto della gravità, si calcola il valore del numero di Froude. Nelle equazioni di Navier-Stokes adimensionali, compare il numero adimensionale $gD/U^2 = 1/Fr^2$ davanti ai termini di forze di volume. Più questo numero è “piccolo”, più gli effetti delle forze di volume sono ridotti.

$$\begin{cases} U = 1 \text{ m/s} & : & 1/Fr^2 \approx 10^{-1} \\ U = 10 \text{ m/s} & : & 1/Fr^2 \approx 10^{-3} \end{cases} \quad (7.41)$$

Esercizio 7.5 — Gradiente di pressione in tubi cilindrici. Si deve progettare un condotto che trasporti un fluido con densità ρ_1 e viscosità μ_1 , di diametro d_1 e lunghezza L_1 . Si suppone che la rugosità della superficie interna del condotto possa essere descritta interamente dall'altezza media ϵ_1 delle asperità. Il condotto deve garantire una portata massica Q_1 . Viene realizzato un modello in scala $\lambda = d_2/d_1$ del condotto di lunghezza L_2 , nel quale viene fatto scorrere lo stesso fluido alle stesse condizioni termodinamiche. Si chiede di determinare:

- la finitura superficiale della superficie interna del modello, in termini di dimensione caratteristica della rugosità ϵ_2 ;
- la velocità media di prova U_2 ;
- la differenza di pressione da imporre alle estremità del condotto al vero, conoscendo che la differenza di pressione ΔP_2 misurata in laboratorio.

Si supponga il fluido incompressibile. ■



Soluzione

Concetti. Teorema di Buckingham. Similitudine fluidodinamica.

Svolgimento. Il problema è caratterizzato dal fluido utilizzato, dalla geometria del condotto e dal gradiente di pressione necessario a garantire la portata desiderata. Si può scrivere in maniera implicita

$$f\left(\frac{\Delta P}{\Delta x}, U, \rho, \mu, d, \epsilon\right) = 0 \quad (7.42)$$

avendo scelto come grandezza fisica caratteristica del problema il gradiente di pressione $\frac{\Delta P}{\Delta x}$ e non il salto di pressione e la lunghezza del tubo prese indipendentemente. Il teorema di Buckingham garantisce che il problema può essere caratterizzato da 3 numeri adimensionali (6 grandezze fisiche - 3 grandezze fondamentali (M,L,T)). Se si scelgono ρ , U , d come grandezze di riferimento, si possono costruire i tre numeri adimensionali come

$$\pi_1 = \frac{\Delta P}{\Delta x} \frac{d}{\rho U^2} = f_D \quad \pi_2 = \frac{\mu}{\rho U d} = 1/Re \quad \pi_3 = \frac{\epsilon}{d} = \epsilon' \quad (7.43)$$

Il problema può essere quindi scritto in forma implicita come:

$$g(f_D, Re, \epsilon') = 0. \quad (7.44)$$

Esplicitando f_D :

$$f_D = h(Re, \epsilon') \quad \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{\rho U^2}{d} f_D(Re, \epsilon'). \quad (7.45)$$

Affinchè sia verificata la similitudine fluidodinamica, ci deve essere l'uguaglianza dei numeri di Reynolds Re e delle rugosità adimensionalizzate ϵ' .

- Dall'uguaglianza delle rugosità adimensionalizzate

$$\epsilon'_1 = \epsilon'_2 =: \epsilon' \quad \Rightarrow \quad \epsilon_2 = \epsilon_1 \frac{d_2}{d_1} = \lambda \epsilon_1. \quad (7.46)$$

Per il modello è quindi necessaria una lavorazione che garantisca una finitura superficiale migliore rispetto al condotto al vero ($\lambda \leq 1$).

- La velocità media al vero U_1 viene ricavata grazie alla richiesta dell'apportata desiderata.

$$U_1 = \frac{Q}{\rho \frac{\pi}{4} d_1^2} \quad (7.47)$$

Per ottenere la similitudine fluidodinamica si impone l'uguaglianza dei numeri di Reynolds

$$Re_1 = Re_2 =: Re \quad \Rightarrow \quad U_2 = U_1 \frac{\rho_1 d_1 \nu_2}{\rho_2 d_2 \nu_1} = U_1 \frac{d_1}{d_2} \quad (7.48)$$

poichè la densità e la viscosità del fluido “di prova” sono le stesse di quelle del fluido “al vero”.

- Il rapporto tra la differenza di pressione ΔP_2 misurata sul condotto modello e la lunghezza del condotto modello L_2 permette di stimare il gradiente di pressione $\frac{\Delta P}{\Delta x}|_2 = \frac{\Delta P_2}{L_2}$. Sfruttando ancora una volta la similitudine fluidodinamica

$$\begin{cases} \frac{\Delta P_2}{L_2} = \frac{\rho_2 U_2^2}{d_2} f_D(Re, \epsilon') \\ \frac{\Delta P_1}{L_1} = \frac{\rho_1 U_1^2}{d_1} f_D(Re, \epsilon') \end{cases} \Rightarrow \Delta P_1 = \Delta P_2 \frac{\rho_1 U_1^2}{\rho_2 U_2^2} \frac{d_2}{d_1} \frac{L_1}{L_2} \quad (7.49)$$

Dall'uguaglianza delle densità $\rho_1/\rho_2 = 1$; dall'uguaglianza dei numeri di Reynolds (e delle densità e viscosità) $U_1^2/U_2^2 = d_2^2/d_1^2$. La formula può quindi essere semplificata

$$\Delta P_1 = \Delta P_2 \frac{d_2^3}{d_1^3} \frac{L_1}{L_2} = \Delta P_2 \lambda^3 \frac{L_1}{L_2} \quad (7.50)$$

Diagramma di Moody.

Il diagramma di Moody riporta il coefficiente f_D in funzione del numero di Re e della rugosità del tubo. Si possono individuare due regimi estremi del problema. Per “basse velocità” (o meglio, bassi numeri di Reynolds), si può intuire che gli effetti della viscosità prevalgano sugli effetti inerziali; inoltre, gli effetti della rugosità sono minimi. Si può quindi pensare che il problema sia indipendente dalla densità del fluido e dalla rugosità del tubo e descrivibile in forma implicita come

$$f_L(\Delta P/\Delta x, \mu, U, d) = 0 \quad (7.51)$$

Si può descrivere il problema solo con un numero adimensionale. Scegliendo μ , U , d come grandezze di riferimento, si può scrivere

$$\pi_{1,L} = \frac{\Delta P}{\Delta x} \frac{d^2}{\mu U} \quad (7.52)$$

Il problema può essere scritto in forma implicita $g_L(\pi_{1,L}) = 0$. Poichè la funzione g_L dipende solo dal coefficiente $\pi_{1,L}$, il coefficiente $\pi_{1,L}$ deve essere costante. Il gradiente di pressione può essere scritto

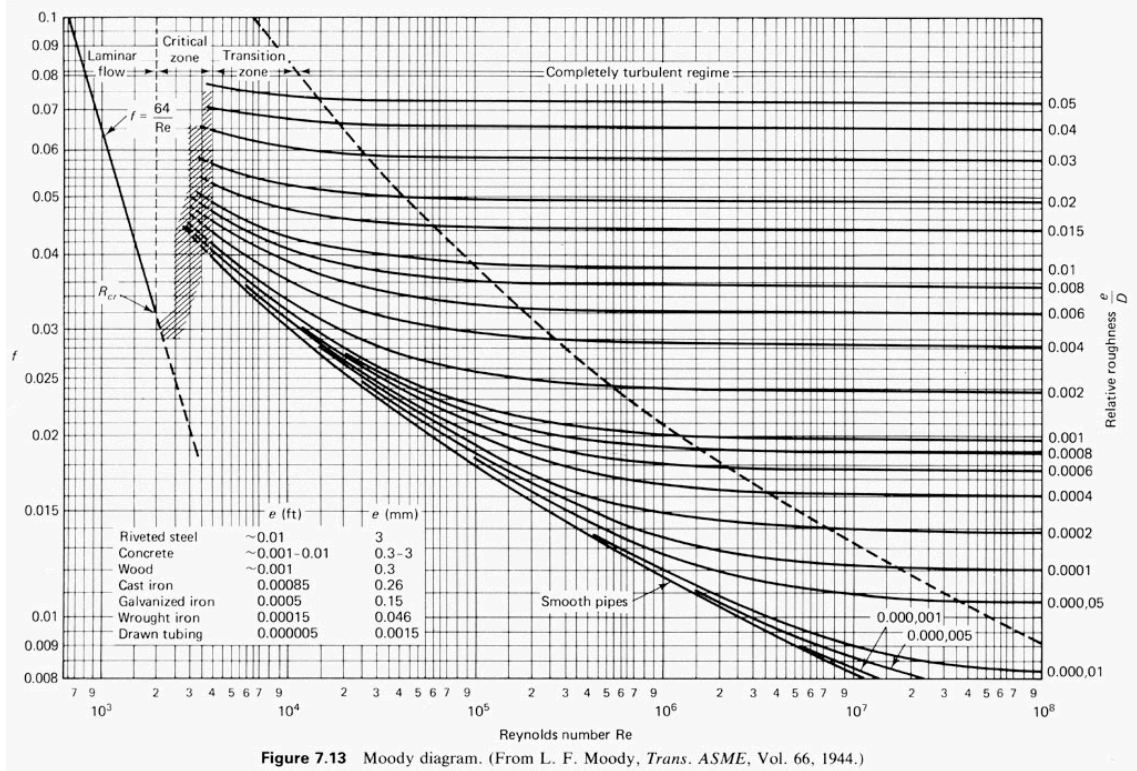
$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = \pi_{1,L} \frac{\mu U}{d^2} = \frac{\rho U^2}{d} f_D \quad (7.53)$$

avendo usato la definizione di f_D introdotta nell'equazione (7.43). É quindi possibile stimare l'andamento del coefficiente f_D , per bassi numeri di Reynolds, invertendo l'equazione precedente. Si scopre che il coefficiente f_D è inversamente proporzionale al numero di Reynolds.

$$f_D = \pi_{1,L} \frac{\mu}{\rho U d} = \pi_{1,L} \frac{1}{Re} \quad (7.54)$$

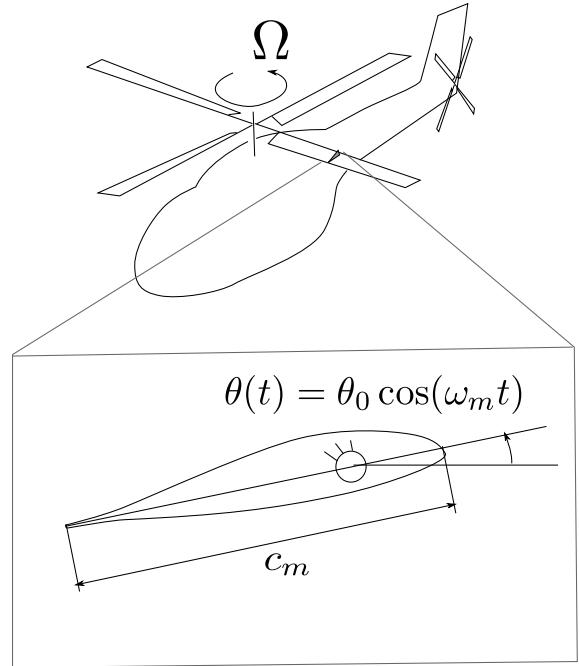
. Per bassi numeri di Reynolds, il parametro f_D in funzione di Re mostra un andamento lineare in un diagramma con assi logaritmici, a conferma della correttezza della stima appena svolta.

Si può ragionare in maniera analoga per il regime di moto estremo opposto, dove gli effetti della viscosità sono trascurabili. Si scopre che il coefficiente f_D è funzione solo della rugosità adimensionale ϵ , mentre non dipende dal numero di Reynolds. Per alti numeri di Reynolds, il parametro f_D è descritto da curve che tendono a un valore costante, che dipende dal valore della rugosità adimensionale ϵ' .



Esercizio 7.6 — Profilo oscillante. L'obiettivo di una prova in galleria è lo studio del campo di moto attorno a una pala di elicottero, in particolare attorno alla sezione che si trova a metà della lunghezza della pala, $R_v = 6.85 \text{ m}$. Il rotore dell'elicottero ruota con una velocità angolare Ω_v , tale da avere una velocità $U_{tip} = 200 \text{ m/s}$ (per evitare il regime supersonico). La corda della pala nella sezione analizzata è $c_v = 0.30 \text{ m}$. Il modello di galleria a circuito aperto è costituito da una superficie alare, incernierata su un asse perpendicolare alla direzione del vento di galleria, in corrispondenza dell'asse "di comando del passo". Sapendo che la massima velocità raggiungibile nell'impianto utilizzato è $U_m = 50 \text{ m/s}$, si chiede di determinare:

- la corda del modello c_m , per ottenere la similitudine in Re e di commentare gli effetti di comprimibilità;
- la frequenza di oscillazione ω_m da imporre al profilo per simulare il cambio di incidenza dovuti ai comandi di passo collettivo e ciclico;
- una stima della potenza dell'impianto necessaria a svolgere la prova, conoscendo le dimensioni della camera di prova rettangolare, $b = 1.5 \text{ m}$, $h = 1.0 \text{ m}$.



Soluzione

Concetti. Similitudine fluidodinamica. Comando elicottero. Stima potenza galleria del vento.

Svolgimento.

- Per ottenere la similitudine in Re , è necessario uguagliare i numeri di Reynolds ottenuti con le grandezze dimensionali caratteristiche del problema. La lunghezza di riferimento è la corda. La velocità di riferimento è la velocità che investe il profilo della pala considerato; nella prova di galleria è la velocità di galleria U_m , nella realtà è la velocità relativa dovuta alla rotazione della pala (alla quale deve essere sovrapposto il moto dell'elicottero, in caso di avanzamento, qui ipotizzato nullo): $U_v = \Omega R_v/2 = U_{tip}/2$. Il fluido è sempre aria.

$$\frac{U_v c_v}{\nu} = \frac{U_m c_m}{\nu} \Rightarrow c_m = c_v \frac{U_{tip}}{2 U_m} = 0.60 \text{ m} \quad (7.55)$$

In questo esempio, per avere similitudine in Re serve un modello con una corda maggiore della corda reale.

Gli effetti di comprimibilità possono essere valutati calcolando il numero di Mach. Il numero di Mach per la sezione di pala considerata nella realtà è $M_v \approx 100/340 \approx 0.3$, limite convenzionale per potere trascurare gli effetti di comprimibilità. Per la prova in galleria $M_m \approx 0.15$.

- Il comando di passo ciclico è periodico e armonico con frequenza $\Omega_v = U_{tip}/R_v = 29.19 \text{ s}^{-1}$. Per essere in similitudine con la realtà è necessario avere uguaglianza dei numeri di Strouhal (o *frequenze ridotte*, indicate da strutturisti e aeroelastici con k).

$$\frac{\Omega c_v}{U_v} = \frac{\omega_m c_m}{U_m} \Rightarrow \omega_m = \Omega \frac{c_v}{c_m} \frac{U_m}{U_v} = \Omega \left(\frac{U_m}{U_v} \right)^2 \quad (7.56)$$

- In un impianto a galleria aperta si può ricavare la formula per la stima della potenza necessaria da un bilancio integrale di energia cinetica

$$P \approx \frac{1}{2} \rho U^3 A . \quad (7.57)$$