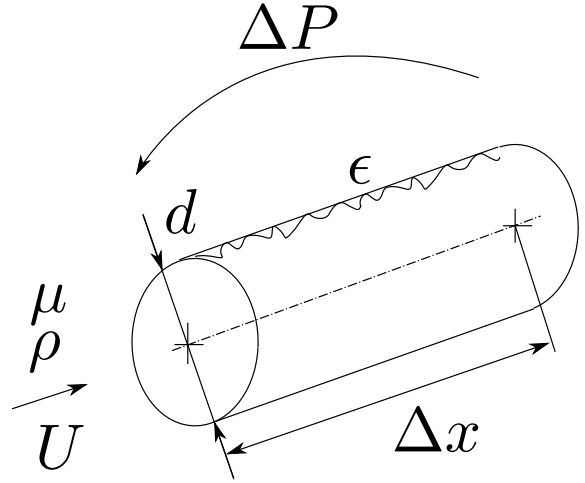


Esercizio 7.5 — Gradiente di pressione in tubi cilindrici. Si deve progettare un condotto che trasporti un fluido con densità ρ_1 e viscosità μ_1 , di diametro d_1 e lunghezza L_1 . Si suppone che la rugosità della superficie interna del condotto possa essere descritta interamente dall'altezza media ϵ_1 delle asperità. Il condotto deve garantire una portata massica Q_1 . Viene realizzato un modello in scala $\lambda = d_2/d_1$ del condotto di lunghezza L_2 , nel quale viene fatto scorrere lo stesso fluido alle stesse condizioni termodinamiche. Si chiede di determinare:

- la finitura superficiale della superficie interna del modello, in termini di dimensione caratteristica della rugosità ϵ_2 ;
- la velocità media di prova U_2 ;
- la differenza di pressione da imporre alle estremità del condotto al vero, conoscendo che la differenza di pressione ΔP_2 misurata in laboratorio.

Si supponga il fluido incomprimibile. ■



Soluzione

Concetti. Teorema di Buckingham. Similitudine fluidodinamica.

Svolgimento. Il problema è caratterizzato dal fluido utilizzato, dalla geometria del condotto e dal gradiente di pressione necessario a garantire la portata desiderata. Si può scrivere in maniera implicita

$$f\left(\frac{\Delta P}{\Delta x}, U, \rho, \mu, d, \epsilon\right) = 0 \quad (7.20)$$

avendo scelto come grandezza fisica caratteristica del problema il gradiente di pressione $\frac{\Delta P}{\Delta x}$ e non il salto di pressione e la lunghezza del tubo prese indipendentemente. Il teorema di Buckingham garantisce che il problema può essere caratterizzato da 3 numeri adimensionali (6 grandezze fisiche - 3 grandezze fondamentali (M,L,T)). Se si scelgono ρ , U , d come grandezze di riferimento, si possono costruire i tre numeri adimensionali come

$$\pi_1 = \frac{\Delta P}{\Delta x} \frac{d}{\rho U^2} = f_D \quad \pi_2 = \frac{\mu}{\rho U d} = 1/Re \quad \pi_3 = \frac{\epsilon}{d} = \epsilon' \quad (7.21)$$

Il problema può essere quindi scritto in forma implicita come:

$$g(f_D, Re, \epsilon') = 0. \quad (7.22)$$

Esplicitando f_D :

$$f_D = h(Re, \epsilon') \quad \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{\rho U^2}{d} f_D(Re, \epsilon'). \quad (7.23)$$

Affinchè sia verificata la similitudine fluidodinamica, ci deve essere l'uguaglianza dei numeri di Reynolds Re e delle rugosità adimensionalizzate ϵ' .

- Dall'uguaglianza delle rugosità adimensionalizzate

$$\epsilon'_1 = \epsilon'_2 =: \epsilon' \quad \Rightarrow \quad \epsilon_2 = \epsilon_1 \frac{d_2}{d_1} = \lambda \epsilon_1. \quad (7.24)$$

Per il modello è quindi necessaria una lavorazione che garantisca una finitura superficiale migliore rispetto al condotto al vero ($\lambda \leq 1$).

- La velocità media al vero U_1 viene ricavata grazie alla richiesta dell'apportata desiderata.

$$U_1 = \frac{Q}{\rho \frac{\pi}{4} d_1^2} \quad (7.25)$$

Per ottenere la similitudine fluidodinamica si impone l'uguaglianza dei numeri di Reynolds

$$Re_1 = Re_2 =: Re \quad \Rightarrow \quad U_2 = U_1 \frac{\rho_1 d_1 \nu_2}{\rho_2 d_2 \nu_1} = U_1 \frac{d_1}{d_2} \quad (7.26)$$

poichè la densità e la viscosità del fluido “di prova” sono le stesse di quelle del fluido “al vero”.

- Il rapporto tra la differenza di pressione ΔP_2 misurata sul condotto modello e la lunghezza del condotto modello L_2 permette di stimare il gradiente di pressione $\frac{\Delta P}{\Delta x} \Big|_2 = \frac{\Delta P_2}{L_2}$. Sfruttando ancora una volta la similitudine fluidodinamica

$$\begin{cases} \frac{\Delta P_2}{L_2} = \frac{\rho_2 U_2^2}{d_2} f_D(Re, \epsilon') \\ \frac{\Delta P_1}{L_1} = \frac{\rho_1 U_1^2}{d_1} f_D(Re, \epsilon') \end{cases} \Rightarrow \Delta P_1 = \Delta P_2 \frac{\rho_1 U_1^2}{\rho_2 U_2^2} \frac{d_2}{d_1} \frac{L_1}{L_2} \quad (7.27)$$

Dall'uguaglianza delle densità $\rho_1/\rho_2 = 1$; dall'uguaglianza dei numeri di Reynolds (e delle densità e viscosità) $U_1^2/U_2^2 = d_2^2/d_1^2$. La formula può quindi essere semplificata

$$\Delta P_1 = \Delta P_2 \frac{d_2^3}{d_1^3} \frac{L_1}{L_2} = \Delta P_2 \lambda^3 \frac{L_1}{L_2} \quad (7.28)$$

Diagramma di Moody.

Il diagramma di Moody riporta il coefficiente f_D in funzione del numero di Re e della rugosità del tubo. Si possono individuare due regimi estremi del problema. Per “basse velocità” (o meglio, bassi numeri di Reynolds), si può intuire che gli effetti della viscosità prevalgano sugli effetti inerziali; inoltre, gli effetti della rugosità sono minimi. Si può quindi pensare che il problema sia indipendente dalla densità del fluido e dalla rugosità del tubo e descrivibile in forma implicita come

$$f_L(\Delta P/\Delta x, \mu, U, d) = 0 \quad (7.29)$$

Si può descrivere il problema solo con un numero adimensionale. Scegliendo μ , U , d come grandezze di riferimento, si può scrivere

$$\pi_{1,L} = \frac{\Delta P}{\Delta x} \frac{d^2}{\mu U} \quad (7.30)$$

Il problema può essere scritto in forma implicita $g_L(\pi_{1,L}) = 0$. Poichè la funzione g_L dipende solo dal coefficiente $\pi_{1,L}$, il coefficiente $\pi_{1,L}$ deve essere costante. Il gradiente di pressione può essere scritto

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = \pi_{1,L} \frac{\mu U}{d^2} = \frac{\rho U^2}{d} f_D \quad (7.31)$$

avendo usato la definizione di f_D introdotta nell'equazione (7.21). É quindi possibile stimare l'andamento del coefficiente f_D , per bassi numeri di Reynolds, invertendo l'equazione precedente. Si scopre che il coefficiente f_D è inversamente proporzionale al numero di Reynolds.

$$f_D = \pi_{1,L} \frac{\mu}{\rho U d} = \pi_{1,L} \frac{1}{Re} \quad (7.32)$$

. Per bassi numeri di Reynolds, il parametro f_D in funzione di Re mostra un andamento lineare in un diagramma con assi logaritmici, a conferma della correttezza della stima appena svolta.

Si può ragionare in maniera analoga per il regime di moto estremo opposto, dove gli effetti della viscosità sono trascurabili. Si scopre che il coefficiente f_D è funzione solo della rugosità adimensionale ϵ , mentre non dipende dal numero di Reynolds. Per alti numeri di Reynolds, il parametro f_D è descritto da curve che tendono a un valore costante, che dipende dal valore della rugosità adimensionale ϵ' .

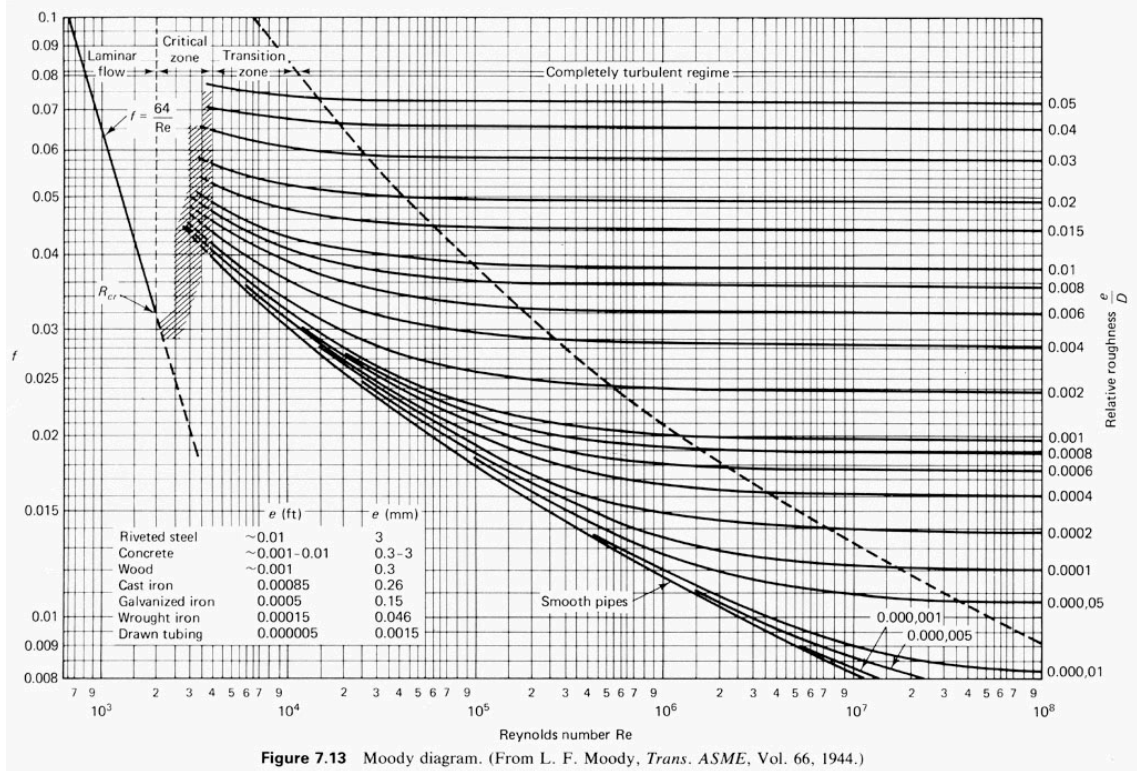


Figure 7.13 Moody diagram. (From L. F. Moody, *Trans. ASME*, Vol. 66, 1944.)