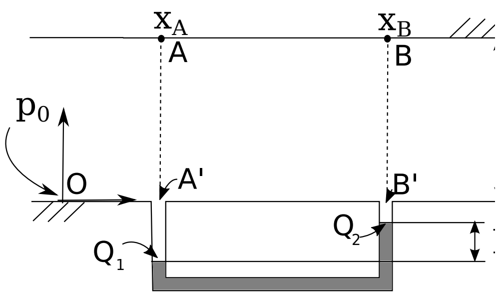
Esercizio 6.2 — Manometro per misura portata: Poiseuille. Una corrente di Poiseuille di acqua ($\rho = 1000/kg/m^3$, $\mu = 10^{-3}\ kg/(ms)$) scorre in un canale di altezza $H = 1\ cm$. Un manometro misura la differenza di pressione tra le sezioni in $x_A = 1.0\ m$ e $x_B = 2.0\ m$. Determinare:

- il gradiente di pressione all'interno del condotto, conoscendo la densità del liquido barometrico $\bar{\rho} = 1200\ kg/m^3$ e la differenza di quote $h = 5\ mm$;
- la velocità massima all'interno del canale;
- la risultante $\boldsymbol{R}$ delle forze esercitata dal fluido sul tratto di parete superiore compreso tra A e B, sapendo che sulla sezione $x = 0\ m$ la pressione vale $p_0 = 10^5\ Pa$. Qual è la relazione tra R_x e $p_A - p_B$? Commento.



Soluzione

Concetti. Soluzione esatte delle equazioni di Navier-Stokes. Corrente di Poiseuille nel canale piano 2D. Manometro: leggi della statica (Stevino).

Svolgimento.

- Per trovare la derivata in direzione x della pressione all'interno del canale ($\partial P/\partial x = -G_P = cost.$) risolve il problema di statica all'interno del manometro. Facendo riferimento al disegno, si utilizza Stevino tra i punti $A' - Q_1$, $Q_1 - Q_2$, $Q_2 - B'$ e l'informazione di derivata della pressione costante in direzione x all'interno del canale, tra A' e B'.

$$\begin{cases} p_{A'} = p_{Q_1} - \rho g z_{Q_1} \\ p_{Q_1} - \bar{\rho} g z_{Q_1} = p_{Q_2} - \bar{\rho} g z_{Q_2} \\ p_{B'} = p_{Q_2} - \rho g z_{Q_2} \\ p_{A'} - p_{B'} = G_P \Delta x \end{cases} \Rightarrow G_P = \frac{1}{\Delta x}(\bar{\rho} - \rho) g \Delta h \tag{6.20}$$

  avendo svolto correttamente i conti e riconosciuto $z_{Q_2} - z_{Q_1} = \Delta h$.
- Ricordando che il profilo di velocità di Poiseuille risulta $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{x}} u(y)$, con

$$u(y) = -\frac{G_P}{2\mu} y(y - H), \tag{6.21}$$

  la velocità massima all'interno del canale è $V = u(H/2) = \dfrac{G_P}{8\mu} H^2$
- Per calcolare la risultante degli sforzi sul tratto $A - B$ della parete superiore, è necessario calcolare il vettore sforzo agente su di essa e svolgere un semplice integrale. Il vettore sforzo sulla parete superiore risulta

$$\boldsymbol{t} = -\mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=H} \hat{\boldsymbol{x}} + p(x, H) \hat{\boldsymbol{y}} \tag{6.22}$$

La pressione $p(x,H)$ sulla parete superiore, per $x \in [x_A, x_B]$ si calcola come segue: si parte dall'origine del sistema di riferimento O, in corrispondenza della quale è noto il valore della pressione p_0 e ci si muove in orizzontale ricordando che $\partial P/\partial x = -G_P$ e in verticale ricordando che $\partial P/\partial y = -\rho g$.

$$\begin{aligned} p_{A'} &= p_0 - G_P x_A \\ p_A &= p_{A'} - \rho g H \\ p_B &= p_A - G_P(x_B - x_A) \end{aligned} \tag{6.23}$$

$$p(x,H) = p_A - G_P(x - x_A)$$

Lo sforzo tangenziale sulla parete è costante e vale

$$-\mu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=H} = \frac{G_P}{2} H \tag{6.24}$$

La risultante delle forze (per unità di lunghezza, poichè il problema è bidimensionale) si ottiene integrando lo sforzo tra A e B.

$$\boldsymbol{R} = \frac{G_P}{2} H \Delta x \hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}(P_A + P_B)\Delta x \hat{\boldsymbol{y}} \tag{6.25}$$