3. Cinematica

Per descrivere la cinemcatica di un fluido vengono definite quattro famiglie di curve: le linee di corrente, le traiettorie, le curve di emissione (o linee di fumo) e le tracce. Viene data una definizione matematica di queste curve, che possono essere ottenute durante le attività sperimentali tramite delle tecniche di visualizzazione del campo di moto, come mostrato nel seguente video
Stanford 1963 - Flow Visualization.

- Le linee di corrente sono curve $\boldsymbol{S}$ tangenti al campo vettoriale $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$ in ogni punto dello spazio $\boldsymbol{r}$ e per ogni istante temporale t. Essendo curve (1 dimensione), possono essere espresse in forma parametrica, come funzioni di un parametro scalare p. La 'traduzione' della definizione in formula è quindi:

$$\frac{d\boldsymbol{S}(p)}{dp} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{S}(p), t) \tag{3.1}$$

  Il vettore tangente $d\boldsymbol{S}(p)/dp$ alla curva $\boldsymbol{S}(p)$ nel punto $\boldsymbol{S}(p)$ è parallelo al vettore velocità $\boldsymbol{u}$ nello stesso punto $\boldsymbol{S(p)}$, al tempo considerato t.
- Le traiettorie descrivono il moto della singola particella fluida e sono descritte dall'equazione:

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{R(t)}, t) \\ \boldsymbol{R}(t_0) = \boldsymbol{R_0} \end{cases} \tag{3.2}$$

  La traiettoria descritta sopra è quella della particella che all'istante t_0 passa per il punto $\boldsymbol{R_0}$. Interpretazione della formula: la velocità $d\boldsymbol{R}(t)/dt$ della particella (derivata della posizione della particella $R(t)$ nel tempo) è uguale alla velocità del fluido nella posizione $R(t)$ nella quale si trova la particella all'istante t.
  Fissati t_0 e $\boldsymbol{R_0}$, si descrive la traiettoria della particella al variare del tempo t.

- Le linee di fumo sono un modo per tracciare tutte le particelle di fluido passate per un determinato punto nello spazio a diversi istanti temporali. La loro equazione è:

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{R}, t) \\ \boldsymbol{R}(\tau) = \bar{\boldsymbol{R}} \end{cases} \tag{3.3}$$

  L'equazione è identica all'equazione delle traiettorie. Cambia la variabile che descrive la curva: si considerano fissi il punto di emissione $\bar{\boldsymbol{R}}$ e il tempo t al quale viene osservata la curva di emissione; la variabile che descrive la curva di emissione è il tempo τ al quale le particelle passano da $\bar{\boldsymbol{R}}$.
  Nel caso di campi stazionari linee di corrente, traiettorie e linee di fumo coincidono.
- Tracce:

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{R}, t) \\ \boldsymbol{R}(\tau) = \bar{\boldsymbol{R}} \end{cases} \tag{3.4}$$

  L'equazione è identica all'equazione delle traiettorie e delle curve di emissione. Cambia la variabile che descrive la curva: si considerano fissi il tempo τ e il tempo t al quale viene osservata la curva di emissione; la variabile che descrive la curva di emissione è la posizione $\bar{\boldsymbol{R}}$ dalle quali passano le particelle.

Osservazione. Non c'è nessuna differenza formale tra τ e t_0 e $\boldsymbol{R_0}$ e $\bar{\boldsymbol{R}}$.

Esercizio 3.2 — Linee di corrente, traiettorie e linee di fumo: non stazionario. Sia dato il campo di moto

$$\boldsymbol{u}(x, y) = 3\hat{\boldsymbol{x}} + 3t\hat{\boldsymbol{y}} \tag{3.8}$$

Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle. ■

Soluzione

Concetti. Definizione di linee di corrente, traiettorie, linee di fumo, tracce. Soluzione di sistemi di equazioni differenziali.

Svolgimento.

- Linee di corrente.

$$\begin{cases} \frac{dX}{dp} = \lambda(p)3 \\ \frac{dY}{dp} = \lambda(p)3t \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dY}{dX} = t \quad \Rightarrow \quad Y = Xt + c \tag{3.9}$$

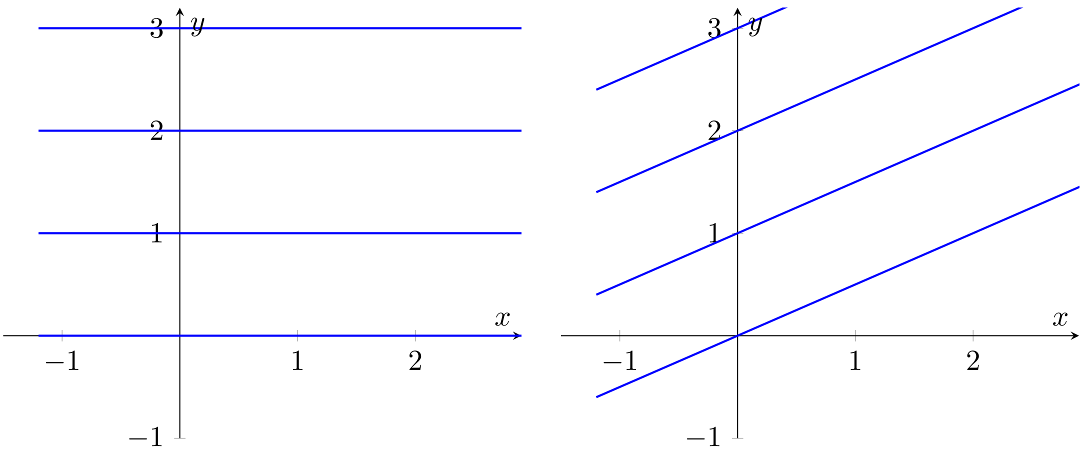


Figura 3.1: Linee di corrente a $t = 0.0$ (sinistra) e $t = 0.5$ (destra).

- Traiettorie.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3 \\ \frac{dy}{dt} = 3t \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t; \boldsymbol{x}_0, t_0) = x_0 + 3(t - t_0) \\ y(t; \boldsymbol{x}_0, t_0) = y_0 + \frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) \end{cases} \tag{3.10}$$

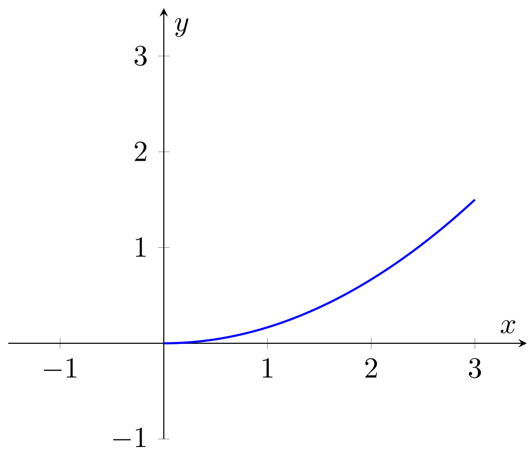
- Linee di fumo (curve di emissione).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3 \\ \frac{dy}{dt} = 3t \\ x(\tau) = x_0, \quad y(\tau) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x(\tau; \boldsymbol{x}_0, t) = x_0 + 3(t - \tau) \\ y(\tau; \boldsymbol{x}_0, t) = y_0 + \frac{3}{2}(t^2 - \tau^2) \end{cases} \tag{3.11}$$

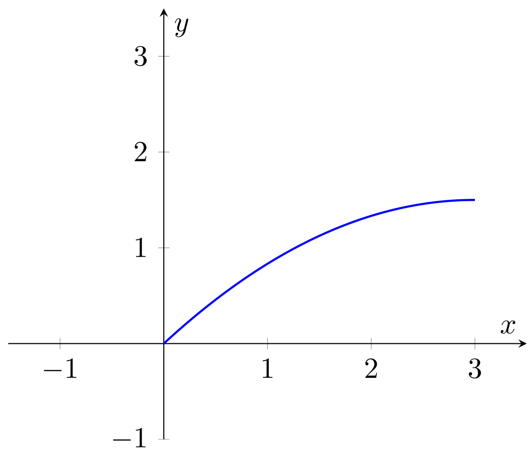
- Tracce.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3 \\ \frac{dy}{dt} = 3t \\ x(\tau) = x_0, \quad y(\tau) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x(\boldsymbol{x}_0; t, \tau) = x_0 + 3(t - \tau) \\ y(\boldsymbol{x}_0; t, \tau) = y_0 + \frac{3}{2}(t^2 - \tau^2) \end{cases} \tag{3.12}$$

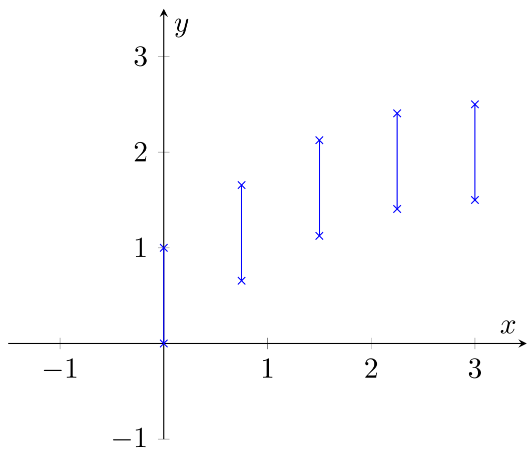
Collegamento al video del National Committee sulle visualizzazioni.



Traiettoria per $\boldsymbol{R_0} = \mathbf{0}, t_0 = 0, t \in [0, 1]$



Curva di emissione con $\boldsymbol{R_0} = \mathbf{0}, \tau \in [0, t], t = 1$



Tracce uscenti dalla curva $\boldsymbol{R_0} = (0, y0), y0 \in [0, 1]$; vengono segnate le particelle passanti per tale curva negli istanti di tempo $\tau = 0; 0.25; 0.5; 0.75; 1$; le tracce vengono osservate nell'istante di tempo $t = 1$.