

“BIGINO” DI DINAMICA E CONTROLLO DI  
STRUTTURE AEROSPAZIALI

13 aprile 2015



# Indice

<b>1</b>	<b>EQUAZIONI DI BILANCIO IN FORMA EULERIANA E LAGRANGIANA</b>	<b>1-1</b>
1.1	TRASFORMAZIONE DI COORDINATE . . . . .	1-1
1.2	FORMULA DI NANSON . . . . .	1-3
1.3	BILANCIO DI MASSA . . . . .	1-4
1.4	BILANCIO DI QUANTITÀ DI MOTO . . . . .	1-5
1.5	BILANCIO DEL MOMENTO DELLE QUANTITÀ DI MOTO . . . . .	1-7
1.6	TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA PER IL CONTINUO (Bilancio dell'energia meccanica)	1-8
1.7	BILANCIO DI ENERGIA . . . . .	1-10
1.8	BILANCIO DI ENTROPIA . . . . .	1-11
1.9	LEGGE COSTITUTIVA . . . . .	1-12
1.10	CONDIZIONI AL CONTORNO . . . . .	1-14
<b>2</b>	<b>PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI</b>	<b>2-1</b>
2.1	TECNICHE DI APPROSSIMAZIONE NUMERICA . . . . .	2-2
2.2	FORMULAZIONE LAGRANGIANA TOTALE ED AGGIORNATA . . . . .	2-6
<b>3</b>	<b>SVILUPPO DEL PLV PER LA FORMULAZIONE LAGRANGIANA AGGIORNATA</b>	<b>3-1</b>
3.1	APPROSSIMAZIONE ELASTO-ACUSTICA, INTRODUZIONE FLUSSO POTENZIALE LINEARIZZATO	
3.1.1	Linearizzazione delle equazioni di Eulero attorno a una soluzione di quiete . . . . .	3-5
<b>4</b>	<b>RISOLUZIONE NUMERICA ATTRAVERSO L'ESPANSIONE MODALE</b>	<b>4-1</b>
4.1	METODO DI ACCELERAZIONE DEI MODI . . . . .	4-7
4.2	TRONCAMENTO E RESIDUALIZZAZIONE DINAMICA . . . . .	4-10
4.3	TRATTAMENTO DEI MOTI RIGIDI . . . . .	4-12
4.4	MOVIMENTI IMPOSTI . . . . .	4-13
4.5	CONDIZIONI INIZIALI . . . . .	4-14
4.5.1	Condizioni iniziali come problema ai minimi quadrati . . . . .	4-14
4.5.2	Risposta a forzanti impulsive . . . . .	4-15
4.5.3	Trasformata di Laplace applicata al problema scalare . . . . .	4-18
4.5.4	Trasformata di Laplace applicata al problema generico . . . . .	4-20
<b>5</b>	<b>CONDENSAZIONE MODALE: IL METODO DELLE POTENZE</b>	<b>5-1</b>
5.1	METODO DELLE POTENZE A BLOCCHI . . . . .	5-5
5.2	PROVE DI VIBRAZIONE AL SUOLO . . . . .	5-10
<b>6</b>	<b>SMORZAMENTO STRUTTURALE</b>	<b>6-1</b>
6.1	SMORZAMENTO PROPORZIONALE . . . . .	6-1
<b>7</b>	<b>ESEMPI DI SOLUZIONI BASATE SU SVILUPPI MODALI PROPRI IN FORMA ANALITICA</b>	
7.1	Torsione trave incastrata sollecitata da un momento all'estremo libero. . . . .	7-1
7.1.1	Piccolo Complemento . . . . .	7-7
7.1.2	Confronto dei risultati . . . . .	7-8
7.2	Torsione di una trave incastrata con rotazione imposta in estremità . . . . .	7-9
7.3	Asta con flusso di calore imposto ad una estremità e temperatura assegnata all'altra	7-15
7.4	Asta con temperature imposte alle estremità . . . . .	7-19

7.5	Trave su due appoggi soggetta a flessione . . . . .	7-22
7.5.1	Ulteriore Piccolo Complemento . . . . .	7-28
<b>8</b>	<b>METODI DI INTEGRAZIONE DIRETTA PER IL PROBLEMA TERMOELASTICO</b>	<b>8-1</b>
8.1	UN METODO DI INTEGRAZIONE IMPLICITA CON DISSIPAZIONE NUMERICA MODULABILE	8-5
8.2	SVILUPPO DI METODI DI INTEGRAZIONE COL METODO DEI RESIDUI PESATI	8-8
8.3	METODO DI NEWMARK . . . . .	8-8
8.4	METODO HHT . . . . .	8-9
8.5	CONFRONTO TRA LE PRINCIPALI CARATTERISTICHE DEI METODI . . .	8-10
8.6	METODI ALLE DIFFERENZE CENTRATE, CENNO A INTEGRAZIONE ESPLICITA	8-12
8.7	STABILITÀ DA UN PUNTO DI VISTA ENERGETICO . . . . .	8-13
<b>9</b>	<b>ESTENSIONE DEI MODELLI PER ELEMENTI STRUTTURALI</b>	<b>9-1</b>
9.1	MODELLI A PIASTRE . . . . .	9-1
9.2	TRAVE CON AZIONE ASSIALE DI PRETENSIONE . . . . .	9-6
9.3	TRAVE ALLA TIMOSHENKO . . . . .	9-7
<b>10</b>	<b>CONDIZIONI di STAZIONARIETÀ VINCOLATA</b>	<b>10-1</b>
<b>11</b>	<b>CONTROLLO OTTIMO</b>	<b>11-1</b>
11.1	SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE ALGEBRICA DI RICCATI . . . . .	11-9
<b>12</b>	<b>RIVISITAZIONE CONTROLLO OTTIMO E REALIZZAZIONE TRAMITE OSSERVATORE OTTIMO</b>	<b>12-1</b>
12.1	OSSERVATORE OTTIMO DETERMINISTICO . . . . .	12-4
<b>13</b>	<b>COMBINAZIONE CONTROLLORE-OSSERVATORE</b>	<b>13-1</b>
13.1	Combinazione osservatore-controllore con imposizione di uscite desiderate . . . . .	13-3
13.2	Uso osservatore per possibile compensazione di disturbi costanti . . . . .	13-5
13.3	Attenuazione disturbi e imposizione uscite desiderate, costanti, mediante controllo ottimo integrale	13-8
13.A	Riduzione dell'ordine di un sistema lineare, con un po' di praticaccia sull'uso di autosoluzioni	13-11
13.B	Richiami di raggiungibilità-controllabilità e osservabilità-rilevabilità . . . . .	13-18
<b>14</b>	<b>CONTROLLO (SUB-OTTIMO) PER CONTROREAZIONE DIRETTA DELLE MISURE</b>	<b>14-1</b>
<b>15</b>	<b>ALCUNE TECNICHE PER LA SCELTA DEI PESI/OBIETTIVI NEL CONTROLLO OTTIMO</b>	<b>15-1</b>
15.1	Pesatura attraverso i valori massimi attesi . . . . .	15-1
15.2	Traslazione autovalori in direzione dell'asse reale . . . . .	15-2
15.3	Inseguimento dei modelli in forma implicita: approssimazione di autosoluzioni desiderate	15-2
15.4	Pesatura in frequenza . . . . .	15-4
15.5	SWLQR . . . . .	15-6
<b>16</b>	<b>CONTROLLO OTTIMO IN PRESENZA DI DISTURBI STOCASTICI (LQG)</b>	<b>16-1</b>
<b>17</b>	<b>OSSERVATORE OTTIMO GAUSSIANO</b>	<b>17-1</b>
<b>18</b>	<b>CONTROLLO (SUB-OTTIMO) STOCASTICO PER CONTROREAZIONE DIRETTA DELLE MISURE</b>	<b>18-1</b>
<b>19</b>	<b>RIDUZIONE BILANCIATA DEI MODELLI</b>	<b>19-1</b>
<b>20</b>	<b>RECUPERO DI ROBUSTEZZA SULLE MATRICI DI TRASFERIMENTO DI MAGLIA (LOOP)</b>	<b>20-1</b>
20.1	RECUPERO SUGLI INGRESSI TRAMITE PESATURA DELL'OSSERVATORE	20-2
20.2	RECUPERO SULLE USCITE TRAMITE PESATURA DEL CONTROLLORE	20-4
<b>21</b>	<b>CONTROLLORE OTTIMO PER DISTURBI PESSIMI (MIN-MAX)</b>	<b>21-1</b>
<b>22</b>	<b>RIVISITAZIONE CONTROLLO OTTIMO PER DISTURBI PESSIMI (MIN-MAX)</b>	<b>22-1</b>

<b>23 ATTUATORI E SENSORI PIEZOELETTRICI</b>	<b>23-1</b>
23.1 Trave con piezoelettrico . . . . .	23-7
23.2 Piastra con piezoelettrico . . . . .	23-8
23.3 Sensore triangolare piezoelettrico . . . . .	23-8
 <b>GNU Free Documentation License</b>	 <b>23-11</b>
1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS . . . . .	23-11
2. VERBATIM COPYING . . . . .	23-12
3. COPYING IN QUANTITY . . . . .	23-12
4. MODIFICATIONS . . . . .	23-13
5. COMBINING DOCUMENTS . . . . .	23-14
6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS . . . . .	23-14
7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS . . . . .	23-15
8. TRANSLATION . . . . .	23-15
9. TERMINATION . . . . .	23-15
10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE . . . . .	23-15
11. RELICENSING . . . . .	23-16

Copyright (C) 2011, Paolo Mantegazza <mantegazza@aero.polimi.it>.

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled GNU Free Documentation License.

## DUE NOTE IMPORTANTI

**Scopo del bigino.** Questo “bigino” fornisce una traccia di base per il corso che dovrebbe essere complementata dai testi via via suggeriti nel bigino stesso e durante le lezioni.

Lo studente della laurea “magistrale” dovrebbe infatti abituarsi a rivedere e approfondire i vari argomenti su diversi testi, traendo beneficio dai differenti modi di presentare lo stesso argomento e maturando così una sicura conoscenza e un buon senso critico sulle poche cose qui illustrate.

Pertanto si ritiene: “assolutamente sconsigliabile adoperare questo bigino solo per riuscire a superare l’esame con il minimo sforzo; in effetti questo potrebbe anche riuscire, ma significherebbe solo impiegare le proprie energie intellettuali per imparare a dare risposte accettabili all’esame, pur avendo capito il meno possibile, il che è ovviamente sconsigliabile sia dal punto di vista culturale che da quello professionale” (da: V. Giavotto, Strutture Aeronautiche, Città Studi, con alcune modifiche).

**Nota bene.** Vettori e tensori sono entità fisiche distinte dalle entità algebriche vettori e matrici. Ciononostante, nel caso in cui si utilizzino sistemi di riferimento cartesiani ortogonali, gli enti vettoriali e tensoriali e molte loro operazioni possono essere formalmente rappresentate attraverso l’algebra delle matrici. In queste brevi note si farà uso di tali similarità con estrema libertà. Si noti che per svolgere correttamente le operazioni algebriche per vettori e tensori in coordinate arbitrarie (cartesiane oblique, polari, cilindriche, ecc.) è spesso necessario disporre di alcuni enti, metrica e simboli di Christoffel, distinzione fra componenti covarianti e controvarianti di tensori, per la cui determinazione funzionale è necessario utilizzare un sistema di coordinate di appoggio, di solito cartesiano ortogonale. È quindi comunque utile saper agilmente operare con tensori e vettori in sistemi cartesiani ortogonali. Ciò detto si ricordi sempre che *tensori e vettori sono enti in generale ben diversi dalle matrici*.

E a proposito di matrici va notato che in questo corso se ne fa un uso intenso ed esteso, probabilmente un po’ più di quanto si è normalmente abituati. È pertanto necessario assicurarsi un’adeguata operatività e prontezza nel loro uso, leggasi: ripassarsele per bene.

## Capitolo 1

# EQUAZIONI DI BILANCIO IN FORMA EULERIANA E LAGRANGIANA

In questa parte si assume la base di conoscenza operativa della meccanica dei continui già sviluppata nei corsi di: Fluidodinamica, Scienza delle Costruzioni e Strutture. Dai programmi e dal materiale didattico di tali corsi si evince una visione sufficientemente ben impostata del punto di vista Euleriano, in particolare dai corsi di Fluidodinamica, in quanto la distinzione fra punto di vista Euleriano e Lagrangiano diventa sfumata e impropria nei corsi sui continui strutturali, a causa della prevalente assunzione di deformazioni e spostamenti infinitesimi, con la conseguente indistinguibilità fra posizione deformata e indeformata. In ogni caso il bagaglio di cognizioni già disponibili è più che sufficiente per un'agevole estensione alla formulazione Lagrangiana utilizzata in questo corso. È pertanto importante rinfrescare quanto già fatto per meglio seguire questa prima parte del corso.

### 1.1 TRASFORMAZIONE DI COORDINATE

Definendo la trasformazione che porta dalle coordinate Lagrangiane  $\underline{X}$  a quelle Euleriane  $\underline{x}$  come

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad (1.1) \quad \boxed{01}$$

si può asserire che tale funzione vettoriale è sempre invertibile, in quanto fisicamente deve valere sia la condizione di impenetrabilità, non può esistere un istante  $t$  per cui in una certa posizione  $\underline{x}$  dello spazio si trovino simultaneamente due particelle diverse, corrispondenti cioè a due diverse posizioni  $\underline{X}$  all'istante iniziale, sia l'assunzione che non avvengano rotture o lacerazioni che inficino la regolarità di tale trasformazione e di tutte le sue derivate necessarie agli sviluppi che proporremo. Esiste quindi sempre la funzione

$$\underline{X} = \underline{\phi}^{-1}(\underline{x}, t) \quad (1.2) \quad \boxed{02}$$

ed è definita in modo univoco in ogni istante di tempo. Definendo la matrice Jacobiana della trasformazione come  $F_{ik} = \phi_{i/k}$  da cui, con notazione sintetica,  $\underline{F} = \text{Grad}(\underline{\phi})^1$ , si può scrivere

$$d\underline{x}_i = \phi_{i/k} dX_k \quad (1.3a) \quad \boxed{1}$$

o anche

$$d\underline{x} = \underline{F} d\underline{X} \text{ e quindi } d\underline{X} = \underline{F}^{-1} d\underline{x} \quad (1.3b) \quad \boxed{3}$$

---

<sup>1</sup>Le notazioni  $\text{div}$  e  $\text{grad}$  saranno utilizzate per indicare i relativi operatori Euleriani, cioè con derivate rispetto a  $\underline{x}$ , mentre  $\text{Div}$  e  $\text{Grad}$  si riferiranno alla modalità Lagrangiana, cioè con derivate rispetto a  $\underline{X}$ .



Il tensore  $\underline{\underline{F}}$  viene di solito denominato gradiente di deformazione. Se chiamiamo  $\underline{s}$  il vettore spostamento tale per cui

$$\underline{x} = \underline{X} + \underline{s}(\underline{X}, t), \quad (1.4) \quad \text{spest1}$$

il gradiente di deformazione sarà uguale a:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \text{Grad } \underline{s}. \quad (1.5) \quad \text{spest2}$$

Introduciamo anche una misura di deformazione attraverso il tensore di Green-Lagrange (GL)

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}). \quad (1.6) \quad \text{GL}$$

che rappresenta la variazione del quadrato della lunghezza (i.e. del modulo al quadrato) del vettore  $d\underline{X}$ , ossia  $|d\underline{x}|^2 - |d\underline{X}|^2 = 2d\underline{X}^T \underline{\underline{E}} d\underline{X}$ . Sostituendo questa espressione nella (1.6) si ottiene

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\text{Grad } \underline{s} + (\text{Grad } \underline{s})^T + (\text{Grad } \underline{s})^T \text{Grad } \underline{s}). \quad (1.7) \quad \text{GL2}$$

Si noti che per spostamenti infinitesimi si può trascurare il prodotto dei gradienti e il tensore di Green-Lagrange viene a coincidere con il tensore di deformazione già noto dai precedenti corsi strutturali.

L'importanza di questa misura di deformazione rispetto al gradiente di deformazione  $\underline{\underline{F}}$  è dato dall'indipendenza di  $\underline{\underline{E}}$  da movimenti rigidi e dalla possibilità di coniugare un'opportuna definizione dello stato locale di sforzo, che definiremo a breve, con  $\underline{\underline{E}}$  attraverso una legge costitutiva che garantisce l'*oggettività materiale*, ossia l'indipendenza da trasformazioni di coordinate rigide.

Se infatti prendiamo un movimento rigido:  $\underline{x} = \underline{x}_T + \underline{R}\underline{X}$ , essendo  $\underline{R}^T \underline{R} = \underline{R} \underline{R}^T = \underline{\underline{I}}$ , composto da una traslazione rigida più una rotazione, si vede facilmente che  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}$ , quindi  $\underline{\underline{F}}$  non è nullo per moti rigidi e pertanto, contenendo anche il movimento rigido, non è una deformazione pura e semplice, mentre  $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} - \underline{\underline{I}}) = 0$ . Meglio ancora è verificare l'espressione formale dei due tensori rispetto a una generica trasformazione rigida di coordinate:  $\underline{\bar{x}} = \underline{\bar{x}}_T + \underline{\bar{R}}\underline{x}$ , per cui si può vedere che  $\bar{F}_{ik} = \bar{x}_{i/k}$  risulta essere  $\bar{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{F}}$ , che evidenzia il mantenimento della componente rigida in  $\underline{\underline{F}}$ , mentre  $\bar{\underline{\underline{E}}} = \frac{1}{2}(\bar{\underline{\underline{F}}}^T \bar{\underline{\underline{F}}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) = \underline{\underline{E}}$ , cioè l'invarianza oggettiva del tensore di deformazione di Green-Lagrange.

Chiamando Jacobiano lo scalare  $J = \det \underline{\underline{F}} > 0$ , si ottiene, con tecnica analoga a quella utilizzata per il cambio di coordinate negli integrali multipli, già vista nei corsi di Analisi Matematica, che il volume elementare in coordinate Euleriane è pari a:

$$dv = JdV. \quad (1.8) \quad \text{trasfdv}$$

Oltre all'espressione di  $dv$  sarà utile nel seguito conoscere anche la sua derivata rispetto al tempo  $\frac{D(dv)}{Dt}$ . In coordinate Cartesiane ortogonali la valutazione della relativa espressione è abbastanza semplice. Infatti, ricordando che  $dv = dxdydz$ , sarà:

$$\begin{aligned} \frac{D(dv)}{Dt} &= \frac{D(dxdydz)}{Dt} = \frac{D(dx)}{Dt} dydz + dx \frac{D(dy)}{Dt} dz + dxdy \frac{D(dz)}{Dt} = d \frac{Dx}{Dt} dydz + dxd \frac{Dy}{Dt} dz + dxdy d \frac{Dz}{Dt} = \\ &dv_x dydz + dx dv_y dz + dxdy dv_z = \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dxdydz = \text{div } (\underline{v}) dv. \end{aligned} \quad (1.9) \quad \text{dimostddv/dt1}$$

in cui, naturalmente, il vettore velocità  $\underline{v}$  e le relative componenti  $v_x, v_y, v_z$  non vanno confuse col volume  $v$ .

Sintetizzando la conclusione di cui sopra si scriverà:

$$\frac{D(dv)}{Dt} = \text{div } (\underline{v}) dv. \quad (1.10) \quad \text{dimostddv/dt1b}$$

Da tale relazione si può facilmente dedurre:

$$\frac{D(dv)}{Dt} = \text{div}(\underline{v}) dv = \text{div}(\underline{v}) JdV = \frac{DJ}{Dt} dV, \quad (1.11) \quad \boxed{\text{dimostddv/dt2}}$$

per cui stante l'arbitrarietà di  $dV$  nell'eguaglianza finale di cui sopra,  $\text{div}(\underline{v}) JdV = \frac{DJ}{Dt} dV$ , sarà:

$$\frac{DJ}{Dt} = J \text{div}(\underline{v}). \quad (1.12) \quad \boxed{\text{dimostddv/dt3}}$$

Sarà utile anche notare che per tutte le grandezze espresse in coordinate Lagrangiane, cioè come funzioni di  $\underline{X}$ , l'uso di  $\frac{D}{Dt}$ ,  $\frac{\partial}{\partial t}$  e  $()$  sono equivalenti. Chiaramente così non è per le grandezze in coordinate Euleriane, che sono funzioni di  $\underline{x}$ , essendo, come noto,  $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$ , si ricordi infatti che:  $\frac{D()}{Dt} = \frac{\partial()}{\partial t} + \text{grad}(\underline{v}) \cdot () = \dot{()}$ .

## 1.2 FORMULA DI NANSON

La formula di Nanson permette di collegare l'area infinitesima vettoriale, orientata secondo la normale locale diretta verso l'esterno del dominio, di una qualsiasi condizione deformata espressa in termini Euleriani alla corrispondente area infinitesima espressa in termini Lagrangiani. Data un'area dotata di normale  $\underline{n}$  e un generico vettore infinitesimo  $d\underline{x}$ , il volume infinitesimo si può scrivere come

$$dv = d\underline{x} \cdot \underline{n} da = d\underline{x}^T \underline{n} da. \quad (1.13) \quad \boxed{4}$$

Identica relazione si può scrivere per le coordinate Lagrangiane:

$$dV = d\underline{X} \cdot \underline{N} dA = d\underline{X}^T \underline{N} dA. \quad (1.14) \quad \boxed{4b}$$

per cui si ottiene che:

$$dv = JdV = Jd\underline{X}^T \underline{N} dA. \quad (1.15) \quad \boxed{5}$$

Inoltre dalla (1.3b) si ha  $d\underline{x} = \underline{F} d\underline{X}$  e quindi  $d\underline{X}^T = d\underline{x}^T \underline{F}^{-T}$ . Sostituendo quest'ultima espressione nella (1.15) si ottiene

$$dv = Jd\underline{x}^T \underline{F}^{-T} \underline{N} dA. \quad (1.16) \quad \boxed{6}$$

Uguagliando la (1.13) e la (1.16), dovendo l'uguaglianza valere per qualunque  $d\underline{x}^T$ , si ottiene la *formula di Nanson*

$$\underline{n} da = J \underline{F}^{-T} \underline{N} dA. \quad (1.17) \quad \boxed{7}$$

Alternativamente, ricordando che una generica superficie sarà rappresentata in forma parametrica da  $\underline{S} = \underline{X}(\xi, \eta)$ , si ha:

$$\underline{N} dA = \underline{X}_{/\xi} \times \underline{X}_{/\eta} d\xi d\eta; \quad (1.18) \quad \boxed{8}$$

sostituendo quest'ultima nella (1.17) si avrà

$$\underline{n} da = J \underline{F}^{-T} \underline{X}_{/\xi} \times \underline{X}_{/\eta} d\xi d\eta. \quad (1.19) \quad \boxed{9}$$

D'altro canto, usando la (1.1) la superficie  $\underline{S}$  nella posizione deformata diventerà  $\underline{S} = \underline{x}(\underline{\phi}(\underline{X}(\xi, \eta)))$ , per cui

$$\underline{n} da = \underline{F} \underline{X}_{/\xi} \times \underline{F} \underline{X}_{/\eta} d\xi d\eta, \quad (1.20) \quad \boxed{10}$$

che operativamente è analoga alla (1.19) ma non richiede l'inversione del tensore gradiente di deformazione. Generalmente quest'ultima formula, che permette di riferirsi comunque sempre alla configurazione iniziale, è di pratica utilità quando si devono effettuare i conti sulle superfici deformate, in particolar modo in relazione alla maggior facilità di scriverne le relative relazioni

incrementali necessarie per la soluzione numerica di problemi non lineari, ad esempio con forze superficiali distribuite di tipo “follower”, la pressione ad esempio, mentre la formula di Nanson meglio si presta alle dimostrazioni delle trasformazioni da Euleriano a Lagrangiano e viceversa. È comunque utile averle presenti entrambe in modo da poter scegliere l’utensile che meglio si adatta alle particolari esigenze del momento.

Si può però rilevare che in tal modo è stato dimostrata l’interessante proprietà

$$\underline{\underline{F}} \underline{\underline{X}}_{/\xi} \times \underline{\underline{F}} \underline{\underline{X}}_{/\eta} = J \underline{\underline{F}}^{-T} \underline{\underline{X}}_{/\xi} \times \underline{\underline{X}}_{/\eta}. \quad (1.21)$$

Quest’ultima può essere generalizzata a un qualsiasi prodotto dello stesso tipo:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{A}} \underline{\underline{c}} = \det(\underline{\underline{A}}) \underline{\underline{A}}^{-T} \underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{c}} = \text{CmpAlg}(\underline{\underline{A}}) \underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{c}}, \quad (1.22)$$

in cui si è abusato, un po’ liberamente, della possibilità di confondere i tensori doppi in coordinate cartesiane ortogonali con la loro rappresentazione matriciale <sup>2</sup>.

### 1.3 BILANCIO DI MASSA

La conservazione della massa si può semplicemente stabilire dicendo che la massa contenuta in un generico volume iniziale  $V$ , che evolve a causa del movimento nel volume  $v$  ad un istante generico  $t$ , deve sempre essere la stessa, si scriverà quindi:

$$\int_v \rho(\underline{\underline{x}}, t) dv = \int_V \rho_0 dV = \text{const.}, \quad (1.23) \quad \text{massa3}$$

dove  $\rho_0$  è la densità del corpo nella condizione indeformata. Applicando alla (1.23) la trasformazione di coordinate si ottiene:

$$\int_v \rho(\underline{\underline{x}}, t) dv = \int_V J \rho(\underline{\underline{X}}, t) dV = \int_V \rho_0 dV, \quad (1.24) \quad \text{massa4}$$

Dovendo tale espressione integrale valere qualunque sia  $V$  (principio di localizzazione <sup>3</sup>) l’equazione di continuità nel caso Lagrangiano si può scrivere

$$\rho_0(\underline{\underline{X}}) = J \rho(\underline{\underline{X}}, t). \quad (1.25) \quad \text{massa5}$$

Si noti che in termini Lagrangiani l’incomprimibilità si esprime affermando che  $J = J(\underline{\underline{X}}, t) = 1$ . Lo Jacobiano rappresenta infatti il rapporto fra il volume dell’elementino infinitesimo in condizione deformata e quello in condizione indeformata, e quindi sarà sempre  $J > 0$ . Pertanto, nel caso incomprimibile,  $J$  deve essere necessariamente pari a 1.

La forma Euleriana di tale legge si ottiene derivando (1.25) e ricordando la (1.12). Sarà pertanto:

$$\frac{D\rho_0}{Dt} = 0 = \frac{DJ}{Dt} \rho + J \frac{D\rho}{Dt} = J \rho \text{ div}(\underline{\underline{v}}) + J \frac{D\rho}{Dt} = J \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{ div}(\underline{\underline{v}}) \right). \quad (1.26) \quad \text{bilmassaEul1}$$

ossia (essendo  $J > 0$ ):

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{ div}(\underline{\underline{v}}) = 0 \quad (1.27) \quad \text{bilmassaEul2}$$

Tale formula può essere anche riscritta nella forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho(\underline{\underline{x}}, t) \underline{\underline{v}}) = 0 \quad (1.28) \quad \text{massa2}$$

<sup>2</sup>Su alcuni testi con notazione anglosassone il  $\text{CmpAlg}(\underline{\underline{A}})$  è anche chiamato “adjugate” di  $\underline{\underline{A}}$

<sup>3</sup>Il Principio di Localizzazione asserisce che per una qualunque funzione tensoriale  $\underline{\underline{\alpha}}$  continua, quindi sia essa scalare, vettoriale o tensoriale, se  $\int_{\Delta} \underline{\underline{\alpha}} d\Delta = 0$ , qualunque sia  $\Delta$ , allora  $\underline{\underline{\alpha}} = 0$  ovunque

Nella rappresentazione Euleriana l'eventuale ulteriore condizione di incomprimibilità  $\rho(\underline{x}, t) = \text{const.}$ , comporta che  $\text{div}(\rho(\underline{x}, t)\underline{v}) = 0$ , ossia la ben nota:  $\text{div} \underline{v} = 0$ .  
Nel seguito ci si troverà spesso a valutare la derivata di espressioni del tipo:

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho \underline{\alpha} dv, \quad (1.29) \quad \text{derivintrho}$$

essendo  $\underline{\alpha}$  un generico tensore, quindi anche uno scalare o un vettore. Tenendo presente la conservazione della massa tale espressione si può calcolare, per un qualsiasi ente  $\underline{\alpha}$ , una volta per tutte, sia in forma Lagrangiana che Euleriana. Infatti sarà:

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho \underline{\alpha} dv = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \underline{\alpha} J dV = \frac{D}{Dt} \int_V \rho_0 \underline{\alpha} dV, \quad (1.30) \quad \text{dimintrho1}$$

a questo punto è evidente che la derivata si può portare sotto il segno di integrale e che l'unica grandezza che varia col tempo è  $\underline{\alpha}$ , per cui:

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho \underline{\alpha} dv = \int_V \rho_0 \frac{D \underline{\alpha}}{Dt} dV \quad (\text{formula Lagrangiana}). \quad (1.31) \quad \text{dimintrho2}$$

D'altro canto, una volta dimostrato quanto sopra, si potrà tornare anche indietro, cioè allo schema Euleriano, ottenendo:

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho \underline{\alpha} dv = \int_V \rho_0 \frac{D \underline{\alpha}}{Dt} dV = \int_V J \rho \frac{D \underline{\alpha}}{Dt} dV = \int_v \rho \frac{D \underline{\alpha}}{Dt} dv \quad (\text{formula Euleriana}). \quad (1.32) \quad \text{dimintrho3}$$

## 1.4 BILANCIO DI QUANTITÀ DI MOTO

Definiamo: l'accelerazione  $\underline{a} = \frac{D \underline{v}}{Dt}$ , le forze per unità di massa (o forze di campo)  $\underline{b}$  e le forze per unità di superficie  $\underline{p}$ , e ricordando che vale la relazione di Cauchy  $\underline{p} = \underline{\sigma}^T \underline{n}$ <sup>4</sup>, il bilancio globale della quantità di moto per la generica quantità di materia contenuta in un volume generico  $v$  ad un generico istante di tempo si scrive:

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho(\underline{x}) \underline{v} dv = \int_v \rho(\underline{x}) \underline{b} dv + \int_a \underline{p} da, \quad (1.33) \quad \text{qdm4}$$

o, ricordando la (1.30):

$$\int_V \rho \frac{D \underline{v}}{Dt} dV = \int_v \rho(\underline{x}) \underline{b} dv + \int_a \underline{p} da, \quad (1.34) \quad \text{qdm4b}$$

dove, come già richiamato precedentemente:  $\underline{a} = \frac{D \underline{v}}{Dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = \underline{\dot{v}}$ , e  $a = \partial v$  è la superficie di contorno di  $v$ . Chiaramente non può esserci confusione fra  $\underline{a}$  e  $a$  essendo rispettivamente uno un vettore e l'altro uno scalare.

Applichiamo ora la trasformazione di coordinate (1.1), utilizzando la formula di Nanson per trasformare il prodotto  $\underline{n} da$  dell'ultimo integrale della (1.34)

$$\int_a \underline{p} da = \int_A \underline{\sigma}^T \underline{n} da = \int_A \underline{\sigma}^T J \underline{F}^{-T} \underline{N} dA = \int_A (J \underline{F}^{-1} \underline{\sigma})^T \underline{N} dA = \int_A \underline{P} dA. \quad (1.35) \quad \text{qdm5}$$

<sup>4</sup>Si noti che la formula di Cauchy presenta la trasposta del tensore degli sforzi. Se si è usi alla stessa senza trasposizione non bisogna collegare tale fatto alla simmetria del tensore di Cauchy degli sforzi. Infatti, anche se è vero che tale tensore è simmetrico, la formula di Cauchy è stata dimostrata, nei già citati corsi di Fluidodinamica, Scienza delle Costruzioni e Strutture, prima di aver dimostrato tale proprietà. Per cui la trasposizione, o meno, è legata solo alla definizione del tensore stesso. Infatti tale tensore, del secondo ordine, implica due indici: uno relativo alle componenti del vettore sforzo e uno relativo alla faccia a cui lo stesso è applicato. È a seconda del fatto che sia il primo o il secondo indice a indicare la faccia che la relazione di Cauchy presenta o meno la trasposizione del tensore degli sforzi. Nel nostro caso vale la convenzione che il primo indice indica la direzione della faccia e il secondo la direzione della componente dello sforzo su di essa agente. Se non ci si è mai accorti del fatto andare a ripassare quanto già studiato

La (1.34) diventa

$$\int_V \rho(\underline{X}) \underline{a} J dV = \int_V \rho(\underline{X}) \underline{B} J dV + \int_A (J \underline{F}^{-1} \underline{\sigma})^T \underline{N} dA. \quad (1.36) \quad \text{qdm6}$$

Introducendo il tensore degli sforzi nominali

$$\underline{\underline{\Sigma}}_n = J \underline{F}^{-1} \underline{\sigma}, \quad (1.37)$$

applicando il teorema della divergenza all'ultimo membro della (1.36) <sup>5</sup>, ossia

$$\int_A \underline{\underline{\Sigma}}_n^T \underline{N} dA = \int_V \text{Div } \underline{\underline{\Sigma}}_n dV, \quad (1.38)$$

$$\int_A \underline{\underline{\Sigma}}_{n_{ki}} N_k dA = \int_V \underline{\underline{\Sigma}}_{n_{ki}/k} dV, \quad (1.39) \quad \text{qdm6-1}$$

e ricordando la conservazione della massa (1.25) e il principio di localizzazione, si ottiene il bilancio di quantità di moto in termini differenziali Lagrangiani

$$\rho_0 \underline{a} = \rho_0 \underline{B} + \text{Div } \underline{\underline{\Sigma}}_n, \quad (1.40) \quad \text{qdm7}$$

essendo  $\underline{B}(\underline{X}, t)$  il vettore delle forze di campo definito in termini delle coordinate Lagrangiane  $\underline{X}$ . Si noti che nella (1.35) si è definito il carico superficiale  $\underline{P}$  riferito alla configurazione Lagrangiana di riferimento, per il quale vale la relazione:

$$\underline{P} = \underline{\underline{\Sigma}}_n^T \underline{N} \quad (1.41)$$

equivalente a quella di Cauchy:  $\underline{p} = \underline{\sigma}^T \underline{n}$ .

L'equazione differenziale di bilancio di quantità di moto in termini Euleriani si può ottenere nello stesso modo e porta alla già nota relazione:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho \underline{a} = \rho(\underline{x}, t) \underline{b} + \text{div } (\underline{\sigma}) \quad (1.42) \quad \text{qdm1}$$

Il simbolo per l'accelerazione è rimasto il medesimo in entrambe le formulazioni (Lagrangiana ed Euleriana) perché il valore è lo stesso, così come per la velocità. Infatti  $\frac{D\underline{x}}{Dt} = \frac{D\underline{\phi}(\underline{X}, t)}{Dt} = \frac{\partial \underline{\phi}(\underline{X}, t)}{\partial t}$ , non essendo  $\underline{X}$  funzione del tempo.

Il tensore degli sforzi nominali ha una definizione simile al tensore di Cauchy eccetto per il fatto che è espresso in termini dell'area e della normale della superficie di riferimento, ossia quella indeformata. Il tensore degli sforzi nominali non è in generale simmetrico. Risulta inoltre utile definire altre due misure di sforzo: il primo tensore di Piola-Kirchhoff (PKI), che è semplicemente il tensore trasposto di quello nominale

$$\underline{\underline{\Sigma}}_I = J \underline{\sigma} \underline{F}^{-T}, \quad (1.43) \quad \text{qdm8}$$

e quindi non simmetrico. Si noti che nella formula (1.43), così come nelle seguenti (1.45, 1.46), il tensore di sforzo di Cauchy dovrebbe essere trasposto; poiché però, come dimostrato nel paragrafo 1.5, il tensore di sforzo di Cauchy è, in genere, simmetrico, il trasposto non è stato riportato. Per il tensore di sforzo nominale e per il primo tensore di Piola-Kirchhoff (PKI) valgono la seguenti relazioni:

$$\underline{F} \underline{\underline{\Sigma}}_n = \underline{\underline{\Sigma}}_n^T \underline{F}^T \quad e \quad \underline{\underline{\Sigma}}_I \underline{F}^T = \underline{F} \underline{\underline{\Sigma}}_I^T. \quad (1.44) \quad \text{propnomPKI}$$

Il secondo tensore di Piola-Kirchhoff (PKII) che viene ottenuto semplicemente moltiplicando l'inversa del gradiente di deformazione per il PKI  $\underline{F}^{-1} \underline{\underline{\Sigma}}_I = \underline{\underline{\Sigma}}$

$$\underline{\underline{\Sigma}} = J \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}^{-T}. \quad (1.45) \quad \text{qdm9}$$

---

<sup>5</sup>In notazione indiciale la divergenza di un generico tensore  $\underline{\alpha}$  si scrive come:  $\text{div } \underline{\alpha} = \alpha_{ik/i}$ .

è invece simmetrico essendo  $\underline{\underline{\sigma}}$  simmetrico (vedi bilancio del momento delle quantità di moto, par. 1.5). È inoltre un ente tensoriale materialmente oggettivo, infatti:<sup>6</sup>

$$\underline{\underline{\Sigma}} = J \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{F}}^{-T} = J (\underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{R}}^T) (\underline{\underline{R}} \underline{\underline{\sigma}}^T \underline{\underline{R}}^T) (\underline{\underline{R}} \underline{\underline{F}}^{-T}) = J \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{F}}^{-T} = \underline{\underline{\Sigma}}. \quad (1.46)$$

qdmogg

Come noto, e già richiamato precedentemente, è necessario collegare lo stato di sforzo locale alle deformazioni con una relazione costitutiva che garantisce l'*oggettività materiale*. Noi ci occuperemo solo di sistemi lineari elastici, anche per grandi spostamenti ma sempre con piccole deformazioni, per cui tale requisito è garantito dalla classica relazione dei continui elastici lineari, anche con deformazioni non infinitesime:

$$\Sigma_{ik} = C_{ikrs} \epsilon_{rs} - \beta_{ik} (T - T_0), \quad (1.47)$$

leggecostlin

legge ricavabile a partire dall'energia elastica per cui  $\Sigma_{ik} = \partial E_e / \partial \epsilon_{ik}$ . Nella (1.47)  $C_{ikrs}$  è il tensore (quadruplo) elastico,  $\beta_{ik}$  il tensore (doppio) degli sforzi termici, che come noto combina  $C_{ikrs}$  con il tensore di dilatazione termica, mentre  $T$  rappresenta la temperatura (assoluta) di un generico punto  $\underline{\underline{X}}$  in un generico istante di tempo e  $T_0$  la temperatura di riferimento all'istante iniziale, in cui il continuo elastico è assunto libero da ogni presforzo.

Si noti che tale legge costitutiva collega una rappresentazione oggettiva della deformazione e dello sforzo,  $\underline{\underline{\Sigma}}$  e  $\underline{\underline{\epsilon}}$ , che, come vedremo, sono anche coniugati energeticamente.

## 1.5 BILANCIO DEL MOMENTO DELLE QUANTITÀ DI MOTO

sec: bilqmoto

Ripetiamo qui una dimostrazione, già vista più volte nei già citati corsi di base, relativa al bilancio del momento delle quantità di moto, nell'ipotesi che ogni superficie elementare scambi solo delle forze e non delle coppie con le parti adiacenti. Dimostrazione che ben sappiamo porta semplicemente a scrivere che il tensore degli sforzi di Cauchy è simmetrico, ossia  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T$ .

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho(\underline{\underline{x}}) \underline{\underline{x}} \times \underline{\underline{v}} dv = \int_v \rho(\underline{\underline{x}}) \underline{\underline{x}} \times \underline{\underline{b}} dv + \int_a \underline{\underline{x}} \times \underline{\underline{p}} da, \quad (1.48)$$

mqdm1

ma, sempre per la (1.32),

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho(\underline{\underline{x}}) \underline{\underline{x}} \times \underline{\underline{v}} dv = \int_v \rho(\underline{\underline{x}}) \frac{D\underline{\underline{x}}}{Dt} \times \underline{\underline{v}} dv + \int_v \rho(\underline{\underline{x}}) \underline{\underline{x}} \times \frac{D\underline{\underline{v}}}{Dt} dv = \int_v \rho(\underline{\underline{x}}) \underline{\underline{x}} \times \underline{\underline{a}} dv \quad (1.49)$$

mqdm2

Inoltre tenendo conto della relazione di Cauchy e del teorema della divergenza si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} \int_a \underline{\underline{x}} \times \underline{\underline{p}} da &= \int_a \underline{\underline{x}} \times \underline{\underline{\sigma}}^T \underline{\underline{n}} da = - \int_a (\underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{x}})^T \underline{\underline{n}} da = \\ &- \int_v \operatorname{div} (\underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{x}}) dv = \int_v \underline{\underline{x}} \times \operatorname{div} (\underline{\underline{\sigma}}) dv - \int_v (\sigma)_{ik} (\underline{\underline{x}} \times)_{kj/i} dv \end{aligned} \quad (1.50)$$

mqdm3

Sostituendo la (1.49) e la (1.50) nella (1.48) e raccogliendo, avremo:

$$\int_v \underline{\underline{x}} \times (\rho(\underline{\underline{x}}) \underline{\underline{a}} - \rho(\underline{\underline{x}}) \underline{\underline{b}} - \operatorname{div} (\underline{\underline{\sigma}})) dv + \int_v (\sigma)_{ik} (\underline{\underline{x}} \times)_{kj/i} dv = 0 \quad (1.51)$$

mqdm4

<sup>6</sup>Se non si ricorda la trasformazione di tensori da un sistema di coordinate a un altro per comprendere la relazione  $\underline{\underline{\bar{\sigma}}} = (\underline{\underline{R}} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{R}}^T)$  ce la si può cavare rammentando almeno la trasformazione fra vettori:  $\underline{\underline{\bar{p}}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{p}}$ ,  $\underline{\underline{p}} = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{\bar{p}}}$ . Combinando tale relazione con quella di Cauchy si potrà scrivere:  $\underline{\underline{\bar{p}}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{p}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{\Sigma}}^T \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{\Sigma}}^T \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{\bar{n}}} = \underline{\underline{\bar{\Sigma}}} \underline{\underline{\bar{n}}}$ . Se non si ricordano neanche le trasformazioni fra vettori sarà opportuno un attento ripasso.

Il primo integrale della relazione di cui sopra è identicamente nullo, vedi bilancio quantità di moto, ragion per cui, per il principio di localizzazione non potrà che essere<sup>7</sup>:

$$(\sigma)_{ik} (\underline{x} \times)_{kj/i} = 0 \quad (1.52) \quad \text{mqdm5}$$

Definendo con  $\underline{i}_i$  i versori del sistema di riferimento Cartesiano ortogonale, tale relazione si può scrivere estesamente come:

$$\underline{\sigma} \underline{i}_1 \times + \underline{\sigma} \underline{i}_2 \times + \underline{\sigma} \underline{i}_3 \times = 0 \quad (1.53) \quad \text{mqdm6}$$

da cui:

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \quad (1.54) \quad \text{mqdm7}$$

e quindi con notazione sintetica tensoriale:

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^T \quad (1.55) \quad \text{mqdm8}$$

Ovviamente, come già detto, essendo  $\underline{\sigma}$  simmetrico lo sarà anche il PKII, mentre per il nominale e il PKI, non simmetrici, vale la citata relazione (1.44).

Attenzione però che se si dovessero considerare dei materiali, cosiddetti *polari*, in cui ogni superficie elementare scambia anche delle coppie di sforzo con gli elementi adiacenti, il bilancio delle quantità di moto darebbe una nuova relazione vettoriale di equilibrio locale alla rotazione e il tensore degli sforzi non sarebbe più simmetrico. Infatti il bilancio delle quantità di moto porterebbe ad un'ulteriore equazione di equilibrio, alle derivate parziali, relativa ai momenti locali e contenente: le coppie di sforzo scambiate fra i vari elementi del continuo, le coppie specifiche volumetriche assegnate e la matrice d'inerzia locale del continuo stesso. In pratica il bilancio delle quantità di moto e del momento delle quantità di moto non sarebbero più, in generale, disaccoppiati. Un ulteriore accoppiamento deriverà poi dalle relazioni costitutive che richiederanno, oltre alla definizione di deformazioni lineari già viste anche opportune definizioni di deformazioni angolari, accoppiando le stesse sia agli sforzi che alle coppie di sforzo.

Per un primo semplice approfondimento dei concetti relativi ai continui polari, con piccole deformazioni lineari e angolari, si può fare riferimento a: L.A. Scipio, Principles of Continua, with applications, Wiley, 1967; S. Forest, Cosserat Media, ed. by K.H.J. Buschow, R.W. Cahn, M.C. Flemings, B. Ilshner, E.J. Kramer and S. Mahajan, Encyclopedia of Materials : Science and Technology, Elsevier, 2001; S. Forest, Mechanics of Cosserat Media, an introduction, [www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iwrmr/media/cosserat.pdf](http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iwrmr/media/cosserat.pdf).

## 1.6 TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA PER IL CONTINUO (Bilancio dell'energia meccanica)

Prima di trattare il primo principio della termodinamica, bilancio di energia, può essere propedeuticamente utile scrivere il teorema dell'energia cinetica per il continuo. Il relativo sviluppo anticipa infatti, anche se in ordine inverso, passaggi comuni al bilancio dell'energia, e permette quindi un miglior "allenamento" alla manipolazione delle relative relazioni tensoriali e vettoriali. Il teorema dell'energia cinetica è, lapalissianamente, un teorema e non un principio fisico, esso è quindi derivabile dal bilancio della quantità di moto attraverso una combinazione lineare delle equazioni scalari dello stesso con la velocità di un generico punto del continuo. Infatti si potrà scrivere:

$$\underline{v}^T \rho_0 \underline{a} = \underline{v}^T \rho_0 \underline{B} + \underline{v}^T \text{Div} (\underline{\Sigma}_n). \quad (1.56) \quad \text{enercin1}$$

---

<sup>7</sup>Si ricordi che, per un generico vettore  $\underline{v}$ ,  $\underline{v} \times$  sta ad indicare il tensore emisimmetrico del secondo ordine associato a  $\underline{v}$  tale che:  $\underline{v} \times = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}$

È facile verificare che quanto scritto sopra ha le dimensioni di una potenza specifica volumetrica (potenza per unità di volume). Allora, dopo aver constatato che:

$$\underline{v}^T \rho_0 \underline{a} = \rho_0 \underline{v}^T \frac{D\underline{v}}{Dt} = \rho_0 \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} |\underline{v}|^2 \right), \quad (1.57) \quad \text{enercin2}$$

integrando su un generico volume  $V$  avremo:

$$\int_V \rho_0 \frac{D}{Dt} \frac{1}{2} |\underline{v}|^2 dV = \frac{D}{Dt} \int_V \rho_0 \frac{1}{2} |\underline{v}|^2 dV = \int_V \rho_0 \underline{v}^T \underline{B} dV + \int_V \underline{v}^T \text{Div}(\underline{\Sigma}_n) dV \quad (1.58) \quad \text{enercin3}$$

Passando alla notazione indiciale per l'ultimo integrale contenente il tensore nominale di sforzo scriveremo <sup>8</sup>:

$$\begin{aligned} \int_V (v_j (\Sigma_n)_{ij/i}) dV &= \int_V (v_j (\Sigma_n)_{ij})_{/i} dV - \int_V (v_{j/i} (\Sigma_n)_{ij}) dV = \\ &= \int_A v_j N_i (\Sigma_n)_{ij} dA - \int_V (v_{j/i} (\Sigma_n)_{ij}) dV = \int_A \underline{v}^T \underline{\Sigma}_n^T \underline{N} dA - \int_V \text{Grad}(\underline{v}) : \underline{\Sigma}_n dV = \\ &= \int_A \underline{v}^T \underline{P} dA - \int_V \text{Grad}(\underline{v}) : \underline{\Sigma}_n dV \end{aligned} \quad (1.59) \quad \text{enercin4}$$

Si noti che  $\text{Grad}(\underline{v}) = \frac{D\underline{F}}{Dt}$  rappresenta la velocità di deformazione energeticamente coniugata al tensore nominale di sforzo, per cui la potenza specifica interna, cioè l'ultimo termine della formula precedente, si può scrivere direttamente come:  $\frac{D\underline{F}}{Dt} : \underline{\Sigma}_n = \underline{\dot{F}} : \underline{\Sigma}_n$ . Scriveremo quindi:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho_0 \frac{1}{2} |\underline{v}|^2 dV = \int_V \underline{v}^T \rho_0 \underline{B} dV + \int_A \underline{v}^T \underline{P} dA - \int_V \underline{\dot{F}} : \underline{\Sigma}_n dV \quad (1.60) \quad \text{enercin5}$$

che dimostra appunto che: la derivata dell'energia cinetica  $\frac{D}{Dt} \int_V \rho_0 \frac{1}{2} |\underline{v}|^2 dV$  è uguale alla somma delle potenze di tutto le forze esterne  $(\int_V \underline{v}^T \rho_0 \underline{B} dV + \int_A \underline{v}^T \underline{P} dA)$  e interne  $(-\int_V \underline{\dot{F}} : \underline{\Sigma}_n dV)$ . Una derivazione simile si può eseguire anche dal punto di vista Euleriano e porta a:

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho \frac{1}{2} |\underline{v}|^2 dv = \int_v \rho \underline{v}^T \underline{b} dv + \int_a \underline{v}^T \underline{p} da - \int_v \text{grad}(\underline{v}) : \underline{\sigma} dv \quad (1.61) \quad \text{enercin6}$$

Grazie alla simmetria del tensore di Cauchy sarà possibile scrivere:

$$\int_v \text{grad}(\underline{v}) : \underline{\sigma} dv = \int_v \frac{1}{2} (\text{grad}(\underline{v}) + \text{grad}(\underline{v})^T) : \underline{\sigma} dv = \int_v \underline{d} : \underline{\sigma} dv \quad (1.62) \quad \text{enercin7}$$

essendo  $\underline{d} = \frac{1}{2} (\text{grad}(\underline{v}) + \text{grad}(\underline{v})^T)$  la ben nota velocità di deformazione Euleriana.

È importante constatare che mentre dal punto di vista Euleriano abbiamo una sola rappresentazione dello sforzo dal punto di vista Lagrangiano ne abbiamo due,  $\underline{\Sigma}$  e  $\underline{\Sigma}_I$ ,  $\underline{\Sigma}_n$  e  $\underline{\Sigma}_I$  essendo concettualmente analoghi.

Saranno pertanto possibili due rappresentazioni equivalenti della potenza specifica volumetrica interna, infatti, a meno del segno inessenziale per le eguaglianze che seguono, sarà:

$$\underline{\dot{F}} : \underline{\Sigma}_n = \text{Tr}(\underline{\dot{F}} \underline{\Sigma}_n) = \text{Tr}(\underline{\dot{F}} \underline{\Sigma}_n \underline{F}^{-T} \underline{F}^T) = \text{Tr}(\underline{\dot{F}} \underline{\Sigma} \underline{F}^T) = \text{Tr}(\underline{F}^T \underline{\dot{F}} \underline{\Sigma}), \quad (1.63) \quad \text{enercin8}$$

<sup>8</sup>Nella formula seguente si fa uso del simbolo ':' che denota il prodotto scalare fra tensori del secondo ordine, un'operazione tensoriale di contrazione su una coppia di indici ripetuti. In questo caso si è usata la definizione:  $\underline{A} : \underline{B} = A_{ik} B_{ki} = \underline{B} : \underline{A} = \text{Tr}(\underline{A} \underline{B})$ . Si noti che alcuni testi usano una definizione diversa per cui:  $\underline{A} : \underline{B} = A_{ik} B_{ik} = \text{Tr}(\underline{A} \underline{B}^T)$ , in tal caso per ottenere lo stesso risultato bisognerà scrivere:  $\underline{A}^T : \underline{B}$ . Si ricorda che l'operatore traccia,  $\text{Tr}$ , indica la somma degli elementi diagonali di una matrice (tensore). Poiché verrà utilizzato estesamente anche nel seguito si richiamano alcune utili proprietà di tale operatore:  $\text{Tr}(\underline{A} \underline{B}) = \text{Tr}(\underline{B} \underline{A})$ , già implicita nella definizione precedente (attenzione però che  $\underline{A} \underline{B}$  non è uguale a  $\underline{B} \underline{A}$ ),  $\text{Tr}(\underline{A}) = \text{Tr}(\underline{A}^T)$ , da cui  $\text{Tr}(\underline{A} \underline{B}^T) = \text{Tr}(\underline{A}^T \underline{B})$ ,  $\text{Tr}(a\underline{A} + b\underline{B}) = a\text{Tr}(\underline{A}) + b\text{Tr}(\underline{B})$  (linearità della traccia).



Per la simmetria di  $\underline{\underline{\Sigma}}$  l'ultima espressione si può scrivere:

$$\text{Tr}\left(\frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{\dot{F}}} + \underline{\underline{\dot{F}}}^T \underline{\underline{F}})\underline{\underline{\Sigma}}\right) = \text{Tr}(\underline{\underline{\dot{\Sigma}}} : \underline{\underline{\Sigma}}) \quad (1.64) \quad \text{enercin9}$$

e quindi:

$$\underline{\underline{\dot{F}}} : \underline{\underline{\Sigma}}_n = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{\Sigma}}}. \quad (1.65) \quad \text{enercin10}$$

Con passaggi analoghi si può completare il tutto nella seguente:

$$\underline{\underline{\dot{F}}} : \underline{\underline{\Sigma}}_n = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{\Sigma}}} = J \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}. \quad (1.66) \quad \text{enercin11}$$

## 1.7 BILANCIO DI ENERGIA

Introducendo il calore generato per unità di massa  $r$  e il flusso di calore attraverso le superfici di contorno  $\underline{q}$ , il bilancio energetico in forma integrale si scrive come

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho(\underline{x}) \left( e + \frac{1}{2} |\underline{v}|^2 \right) dv = \int_V \rho(\underline{x}) \underline{v}^T \underline{b} dv + \int_a \underline{v}^T \underline{p} da + \int_V \rho(\underline{x}) r dv - \int_a \underline{q}^T \underline{n} da. \quad (1.67) \quad \text{en1}$$

Questa equazione rappresenta un bilancio di potenze dove si è scritto che la variazione nel tempo dell'energia specifica interna  $e$  e di quella cinetica deve eguagliare la potenza delle forze esterne e la potenza dovuta alle sorgenti interne di calore  $r$  e ai flussi scambiati  $\underline{q}$ . Questo non è niente altro che il primo principio della termodinamica. Il flusso è con segno negativo perché un flusso positivo è uscente dal corpo e quindi sottrae energia. Passiamo in coordinate Lagrangiane

$$\int_V \rho_0 \left( \dot{E} + \underline{v}^T \underline{a} \right) dV = \int_V \rho_0 \underline{v}^T \underline{B} dV + \int_V \left( \underline{v}^T \text{Div} \underline{\underline{\Sigma}}_n + \underline{\underline{\dot{F}}} : \underline{\underline{\Sigma}}_n \right) dV + \int_V \rho_0 R dV - \int_V \text{Div} \underline{Q} dV. \quad (1.68) \quad \text{en2}$$

Il terzo termine della (1.68) è stato ottenuto utilizzando la formula di Nanson per cui

$$\begin{aligned} \int_A v_j N_i(\Sigma_n)_{ij} dA &= \int_V (v_j(\Sigma_n)_{ij})_{/i} dV = \int_V (v_{j/i}(\Sigma_n)_{ij} + v_j(\Sigma_n)_{ij/i}) dV \\ &= \int_V \left( \frac{\partial F_{ji}}{\partial t}(\Sigma_n)_{ij} + v_j(\Sigma_n)_{ij/i} \right) dV = \int_V \left( \underline{\underline{\dot{F}}} : \underline{\underline{\Sigma}}_n + \underline{v}^T \text{Div} \underline{\underline{\Sigma}}_n \right) dV. \end{aligned} \quad (1.69) \quad \text{en3}$$

$$(1.70)$$

L'ultimo termine si ottiene applicando la formula di Nanson all'integrale del flusso di calore, definendo  $\underline{Q}(\underline{X}, t) = J \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{q}$  e applicando il teorema della divergenza. Il vettore  $\underline{Q}(\underline{X}, t)$  rappresenta il flusso di calore per unità di area di riferimento. Analogamente  $R(\underline{X}, t)$  e  $E(\underline{X}, t)$  rappresentano, rispettivamente, la generazione interna di calore e l'energia interna specifica, riferita entrambe alla configurazione iniziale. I termini che permangono moltiplicati scalarmente per il vettore velocità sono quelli dell'equazione della quantità di moto e possono essere eliminati. Il bilancio di energia in termini Lagrangiani si scrive quindi come

$$\rho_0 \dot{E} = \rho_0 R - \text{Div} \underline{Q} + \underline{\underline{\Sigma}}_n : \underline{\underline{\dot{F}}}, \quad (1.71) \quad \text{en4}$$

tenendo conto del fatto che  $\underline{\underline{\Sigma}}_n : \underline{\underline{\dot{F}}} = \underline{\underline{\dot{F}}} : \underline{\underline{\Sigma}}_n$  e rammentando che, ove fosse necessario, vedi (1.65), tale termine può essere sostituito da  $\underline{\underline{\dot{\Sigma}}} : \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{\Sigma}}}$ , che contiene solo enti oggettivi. Ricordiamo, ancora una volta, che quest'ultima relazione ci dice che il tensore di sforzo nominale è coniugato energeticamente alla derivata temporale del gradiente di deformazione  $\underline{\underline{F}}$ , mentre il secondo tensore di Piola-Kirchhoff è coniugato energeticamente alla derivata temporale del tensore di deformazione di Green-Lagrange  $\underline{\underline{E}}$ .

Il vettore  $\underline{Q}$  può essere espresso in funzione della temperatura come  $\underline{Q} = -\underline{K} \text{Grad} T$ , la ben nota legge di Fourier per la conduzione. Inoltre il tensore di conduttività Lagrangiana  $\underline{K}$  è legato al

suo corrispondente Euleriano tramite la trasformazione:  $J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{k} = \mathbf{F}^{-T}$ , si noti la corrispondenza con la trasformazione del tensore di Cauchy nel secondo tensore di Piola-Kirchhoff. Sarà anche utile rimarcare che  $T(\mathbf{X}, t) = T(\mathbf{x}, t)$ , essendo la temperatura di un punto materiale indipendente da trasformazioni rigide di coordinate, cioè una grandezza scalare oggettiva.

La corrispondente forma differenziale nel caso delle coordinate Euleriane porta all'equazione:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho r - \operatorname{div} \mathbf{q} + \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{\sigma}}, \quad (1.72)$$

dove  $\underline{\underline{d}}$  è il, già citato, tensore della velocità di deformazione definito come

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \mathbf{v} + (\operatorname{grad} \mathbf{v})^T). \quad (1.73)$$

Un utile e sintetico riferimento sui paragrafi precedenti è: Chadwick, *Continuum Mechanics*, Dover. Un riferimento più recente, simile al precedente nei contenuti, è: Botsis e Deville, *Mecanique des milieux continus: une introduction*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. Su tale libro si può vedere l'uso di una convenzione diversa per la definizione del tensore di Cauchy, della divergenza e della contrazione di tensori.

Utile anche la dispensa: V. Giavotto, *Strutture Aeronautiche*, Città Studi, per la presentazione dei vari tensori di sforzo e deformazione in modo chiaro e sintetico, accompagnata da una buona elucidazione sulle leggi costitutive elastiche lineari per materiali generici.

## 1.8 BILANCIO DI ENTROPIA

In termini Euleriani, quindi nella configurazione attuale deformata, la diseuguaglianza entropica, che esprime il secondo principio della termodinamica, si scrive

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho(\mathbf{x}) s \, dv \geq \int_v \rho(\mathbf{x}) \frac{r}{T} \, dv - \int_a \frac{\mathbf{q}^T \mathbf{n}}{T} \, da, \quad (1.74) \quad \text{ent1}$$

s entropia specifica, da cui, coi soliti passaggi più volte usati precedentemente, si può ricavare l'espressione differenziale Lagrangiana:

$$\rho_0 \dot{S} \geq \rho_0 \frac{R}{T} - \operatorname{Div} \left( \frac{\mathbf{Q}}{T} \right). \quad (1.75) \quad \text{ent2}$$

$S(\mathbf{X}, t)$  e  $R(\mathbf{X}, t)$  rappresentano, rispettivamente, l'entropia specifica e la generazione di calore nel continuo riferite alla configurazione iniziale.

In coordinate Euleriane si ha la corrispondente:

$$\rho \dot{s} \geq \rho \frac{r}{T} - \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right). \quad (1.76) \quad \text{ent21}$$

L'equazione (1.75) si può riscrivere come

$$\rho_0 \dot{S} \geq \rho_0 \frac{R}{T} - \frac{\operatorname{Div} \mathbf{Q}}{T} + \frac{\mathbf{Q}}{T^2} \cdot \operatorname{Grad} T, \quad (1.77) \quad \text{ent3}$$

mentre, ricordando che  $\underline{\underline{\Sigma}}_n : \dot{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{\Sigma}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}$ , l'equazione dell'energia si riscrive a sua volta come:

$$\rho_0 \dot{E} = \rho_0 R - \operatorname{Div} \mathbf{Q} + \underline{\underline{\Sigma}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}. \quad (1.78) \quad \text{en5}$$

Sostituendo nella (1.77) l'espressione di  $\rho_0 R - \operatorname{Div} \mathbf{Q}$  tratta dalla (1.78) si ottiene

$$\rho_0 (T \dot{S} - \dot{E}) \geq -\underline{\underline{\Sigma}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} + \frac{\mathbf{Q}}{T} \cdot \operatorname{Grad} T, \quad (1.79) \quad \text{ent4}$$

La diseuguaglianza entropica non entra direttamente nella soluzione delle equazioni di bilancio ma impone dei vincoli fisici assai importante sulle relative soluzioni e sulle leggi costitutive. Vincoli

che devono essere assolutamente soddisfatti per non perdere la compatibilità fisica delle soluzioni ottenute. Per una semplice esemplificazione delle implicazioni della disuguaglianza entropica introduciamo la funzione energia libera  $\Psi = E - TS$  da cui  $\dot{\Psi} = \dot{E} - \dot{T}S - T\dot{S}$ . Sappiamo che possiamo determinare una qualunque grandezza termodinamica in funzione di una qualunque coppia di grandezze termodinamiche indipendenti atte a caratterizzare lo stato termodinamico del sistema. Supponiamo di poter esprimere quindi l'energia libera come funzione della temperatura, del tensore di GL e del gradiente di temperatura  $\underline{\Gamma} = \text{Grad } T$ . Si ha che

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\Gamma}} \cdot \underline{\dot{\Gamma}}. \quad (1.80) \quad \boxed{\text{e1}}$$

Si noti che  $\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\Gamma}}$  è Grad di  $\Psi$  rispetto a  $\underline{\Gamma}$ . Per evitare un appesantimento notazionale, con lieve abuso, riteniamo Grad implicito nella notazione della derivata di uno scalare rispetto a un vettore. Sostituendo queste espressioni nella (1.79) otteniamo

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial T} + S \right) \dot{T} + \left( \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} - \underline{\underline{\Sigma}} \right) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\Gamma}} \cdot \underline{\dot{\Gamma}} + \frac{Q}{T} \cdot \underline{\Gamma} \leq 0. \quad (1.81)$$

Questa disequazione deve valere per qualunque scelta delle variabili di stato, quindi necessariamente devono valere le seguenti quattro relazioni

ent5

$$S = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}, \quad (1.82a)$$

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}}, \quad (1.82b)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\Gamma}} = 0, \quad (1.82c)$$

$$\frac{Q}{T} \cdot \underline{\Gamma} \underbrace{=}_{\text{legge di Fourier}} -\frac{1}{T} \underline{\Gamma}^T \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\Gamma} \leq 0. \quad (1.82d)$$

La terza ci dice che lo stato termodinamico è definito solo da  $T$  e  $\underline{\underline{\epsilon}}$ . La seconda relazione contiene la definizione termodinamica degli sforzi, mentre dalla quarta si deduce che o la temperatura è uniforme, e quindi non c'è conduzione di calore, o il tensore di conduttività di Fourier  $\underline{\underline{K}}$  deve essere simmetrico e definito positivo. Questo indica semplicemente che il calore passa spontaneamente dal caldo al freddo.

## 1.9 LEGGE COSTITUTIVA

Esprimendo nella (1.71) l'energia interna in funzione dell'entropia, della temperatura e dell'energia libera ( $E = \Psi + TS$ ), e quest'ultima in termini delle grandezze di stato ( $T, \underline{\underline{\epsilon}}$ ), e ricordando le (1.82) si ottiene

$$\rho_0 T \dot{S} = \rho_0 R - \text{Div } \underline{\underline{Q}}. \quad (1.83) \quad \boxed{\text{lc1}}$$

Ma la derivata dell'entropia è uguale a

$$\dot{S} = \frac{\partial S}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial S}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} \dot{T} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T \partial \underline{\underline{\epsilon}}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} \dot{T} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \underline{\underline{\Sigma}}}{\partial T} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} \dot{T} + \frac{\underline{\underline{B}}}{\rho_0} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}, \quad (1.84) \quad \boxed{\text{e12}}$$

dove il tensore  $\underline{\underline{B}}$  è il tensore di componenti  $\beta_{ik}$ . Sostituendo la (1.84) nella (1.83) si ottiene

$$-\rho_0 T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} \dot{T} + T \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \rho_0 R - \text{Div } \underline{\underline{Q}}. \quad (1.85) \quad \boxed{\text{lc2}}$$

Definendo il calore specifico a volume costante  $C_v = -T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} = T \frac{\partial S}{\partial T}$ , la (1.85) si può riscrivere come

$$\rho_0 C_v \dot{T} \left( 1 + \frac{T \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}{\rho_0 C_v \dot{T}} \right) = \rho_0 R - \text{Div } \underline{\underline{Q}}. \quad (1.86) \quad \boxed{\text{lc3}}$$

Si vede quindi che se vale la:

$$\left| \frac{T\underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\dot{C}}}}{\rho_0 C_v \dot{T}} \right| \ll 1. \quad (1.87) \quad \boxed{\text{lc21}}$$

e la (1.86) si può ben approssimare con la seguente:

$$\rho_0 C_v \dot{T} = \rho_0 R - \text{Div } \underline{Q}. \quad (1.88) \quad \boxed{\text{lc4}}$$

In questo caso si vede come l'equazione dell'energia risulti disaccoppiata da quella della quantità di moto; è quindi possibile risolvere il problema termico in maniera indipendente da quello strutturale, come di solito viene fatto nell'ambito ingegneristico. Attenzione, però: se le temperature in gioco sono molto alte il secondo termine tra parentesi nella (1.86) può rientrare in gioco. In quest'ultimo caso il modello presenta una intrinseca non linearità.

In caso di trasformazione adiabatica e in assenza di generazione interna di calore la variazione di temperatura è sufficientemente rapida da non comportare alcun scambio termico, quindi i termini a secondo membro della (1.86) sono nulli. Se si considera una piccola variazione di temperatura nell'intorno di una temperatura di riferimento tale per cui:  $T = T_0 + \Delta T$ , e quindi  $\dot{T} = \Delta \dot{T}$ , l'equazione (1.86) diventa:

$$\rho_0 C_v \Delta \dot{T} + T_0 \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\dot{C}}} = 0, \quad (1.89) \quad \boxed{\text{lc5}}$$

che integrata, porta ad ottenere un'espressione che mostra una variazione di temperatura associata alla deformabilità

$$\Delta T = - \frac{T_0}{\rho_0 C_v} \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{C}}. \quad (1.90) \quad \boxed{\text{lc6}}$$

È ora possibile confrontare la legge costitutiva, isoterma e statica, implicitamente sottintesa nelle usuali e più comuni analisi dinamiche:  $\Sigma_{ik} = C_{ikrs} \epsilon_{rs} - \beta_{ik} \Delta T$ , con la sua equivalente adiabatica per cui

$$\Sigma_{ik} = \left( C_{ikrs} + \beta_{ik} \frac{T_0 \beta_{rs}}{\rho_0 C_v} \right) \epsilon_{rs}. \quad (1.91) \quad \boxed{\text{lc7}}$$

Si vede allora che, se non si trascura la dinamica termoelastica, la parte elastica equivalente a un comportamento isotermico è diversa dalla corrispondente adiabatica e la (1.91) giustifica, almeno in piccolo, le rilevazioni sperimentali che danno un incremento del modulo elastico statico equivalente all'aumentare della velocità di deformazione. Per avere un'idea dell'ordine di grandezza di tale variazione consideriamo il caso di un materiale lineare elastico soggetto a sola trazione. Si può allora scrivere  $\beta = E\alpha$ , dove  $E$  è il modulo elastico e  $\alpha$  è il coefficiente di dilatazione termica. In questo caso il modulo elastico adiabatico sarà uguale a

$$E \left( 1 + \frac{T_0 \alpha^2 E}{\rho_0 C_v} \right). \quad (1.92)$$

In particolare, nel caso di una lega leggera di alluminio

$$E \left( 1 + \frac{300 \cdot 6.25 \cdot 10^{-10} \cdot 7 \cdot 10^{10}}{2800 \cdot 960} \right) \approx E(1 + 0.0049), \quad (1.93)$$

e quindi un effetto spesso trascurabile. Questo risultato giustifica ulteriormente la possibilità di separare il calcolo termico da quello strutturale in molte analisi di pratica utilità, anche in condizioni non strettamente approssimabili come isoterme. Va però notato che anche se fosse accettabile l'approssimazione della separazione delle risposte termoelastiche ciò non implica, necessariamente, che non possano esistere, come sarà evidenziato nel paragrafo seguente, accoppiamenti termoelastici legati alle condizioni al contorno.

Per questo paragrafo può essere utile consultare il classico: Boley-Weiner, Theory of Thermal Stresses, Dover. Approfondimenti di base sul concetto di oggettività e sui vincoli posti dal

bilancio entropico alle leggi costitutive si possono trovare nei citati Chadwik e Botsis-Deville. Su quest'ultimo si riprendono anche in visione unificata esempi e applicazioni già viste in corsi precedenti.

Un altro ottimo libro di termoelasticità è: W. Nowacki, Thermoelasticity, Oxford, 1986. Tale libro presenta un'interessante derivazione, ripresa anche in Botsis-Deville e altri, dei bilanci di massa, quantità di moto e momento delle quantità di moto partendo dal bilancio energetico e utilizzando il principio di oggettività.

## 1.10 CONDIZIONI AL CONTORNO

Le equazioni di bilancio sono equazioni alla derivate parziali che necessitano di condizioni iniziali e al contorno.

Per quanto riguarda il problema elastico le condizioni al contorno possono essere assegnate in termini di:

1. forze assegnate su una superficie  $A_p$ , si ricordi la condizione di Cauchy  $\underline{p} = \underline{\sigma}^T \underline{n}$  per il caso Euleriano la sua corrispondente  $\underline{P} = \underline{\Sigma}_n^T \underline{N}$  per il caso Lagrangiano;
2. spostamenti imposti su una superficie  $A_s$ ;
3. 1 e 2 insieme.

Si noti che  $A_p$  e  $A_s$  dovranno essere insieme disgiunti. Infatti non è possibile assegnare sia le forze che gli spostamenti sullo stesso insieme di punti. La cosa è ben nota in quanto già si sa che laddove si assegnino degli spostamenti ci sarà bisogno di attuare delle forze per ottenere il risultato voluto. Tali forze altro non sono che le ben note reazioni vincolari, che non possono quindi essere assegnate assieme agli spostamenti desiderati, ma dovranno essere ottenute come risultato della soluzione del problema. Può anche essere utile ricordare che un problema con condizioni al contorno di tipo 1, logicamente combinato anche con eventuali forze di volume, si definisce di meccanica diretta. Un problema di meccanica inversa richiederebbe strettamente l'assegnazione di tutto il campo di spostamenti del continuo, per cui non è propriamente inquadrabile come un problema di tipo 2. Pertanto i problemi inversi sono rari nel caso dei continui, ma possono essere assai utili per la ricerca di soluzioni di base di interesse, come fatto nel caso di Saint Venant. Problemi di tipo 3 si definiscono misti e sono i più comuni.

Aggiungiamo che l'imposizione di spostamenti si può effettuare anche nel volume del corpo e non solo sul suo contorno. È però evidente che si può togliere la parte del corpo interna al continuo su cui sono assegnati gli spostamenti, perché la relativa soluzione è nota, applicando poi l'imposizione degli stessi solo sul suo contorno e riconducendosi così a problemi di tipo 2.

Per quanto riguarda invece il problema termico avremo condizioni di tipo:

1. flussi assegnati su una superficie  $A_q$ , si ricordi la condizione  $\underline{q} = -\underline{k} \text{grad}(T)$  per il caso Euleriano e la corrispondente relazione  $\underline{Q} = -\underline{K} \text{Grad}(T)$  per il caso Lagrangiano;
2. temperatura assegnata su una superficie  $A_T$ ;
3. 1 e 2 assieme.

È evidente l'analogia con il caso elastico, basta scambiare  $\underline{\sigma} - \underline{\Sigma}_n$  con  $\underline{q} - \underline{Q}$  e  $\underline{s}$  con  $\underline{T}$ , ragion per cui si possono qui ripetere tutte le considerazioni e le classificazioni su riportate.

Il problema termico di tipo 1 in forma Lagrangiana ben evidenzia un accoppiamento strutturale grazie alla presenza del tensore  $\underline{F}$ . Fisicamente ciò può essere spiegato dal fatto che la deformazione del contorno provoca una variazione delle superfici sia in estensione che in orientamento e, dunque, una variazione dei flussi termici nelle strutture anche quando  $\underline{q}$  ha una direzione assegnata e fissa nel tempo (es. irraggiamento solare). Quindi il problema termo-elastico, anche se approssimabile come disaccoppiato dal punto di vista delle equazioni di bilancio interne in molte approssimazioni ingegneristiche, ritorna spesso a essere accoppiato attraverso le condizioni al contorno, specie nelle strutture spaziali.

A miglior chiarimento di quanto appena asserito richiamiamo ora alcune relazioni relative ai termini di contorno utili per le più comuni applicazioni termoelastiche, aerospaziali e non.

Il flusso di calore è la somma di quello per convezione e quello per irraggiamento, e si può scrivere come

$$q = h(T_s - T_a) + \sigma(\varepsilon T_s^4 - \alpha T_a^4), \quad (1.94) \quad \text{cc1}$$

dove  $T_a$  è la temperatura dell'ambiente e  $T_s$  è la temperatura della struttura,  $\sigma$  è la costante di Stefan-Boltzmann,  $\varepsilon$  è il coefficiente di emissione e  $\alpha$  è il coefficiente di assorbimento. Tali coefficienti sono in generale funzioni delle frequenze di emissione, ma per corpi grigi possiamo prendere dei valori medi. Inoltre per corpi grigi spesso  $\varepsilon = \alpha$ .

Le cose si complicano ulteriormente quando si ha irraggiamento tra parti della struttura. In questo caso il flusso netto di calore per irraggiamento viene ottenuto come

$$q = \sigma \varepsilon T_s^4 - \alpha R_i - \alpha \cos \gamma q_\infty, \quad (1.95) \quad \text{cc2}$$

dove  $R_i$  è la radiazione incidente generata dai corpi circostanti che irradiano sul corpo in questione,  $q_\infty$  è il flusso irradiato da sorgenti lontane, tanto lontane da non essere influenzabili dalle radiazioni emesse localmente, la radiazione solare ad esempio, lungo una direzione che forma un angolo  $\gamma$  con la normale locale al corpo. La radiazione emessa da ciascun corpo presenterà anche un contributo dovuto alla riflessione della radiazione incidente, quindi

$$R_e = \sigma \varepsilon T_s^4 + (1 - \alpha) R_i. \quad (1.96) \quad \text{cc3}$$

Si noti che nella formula precedente manca la riflessione diffusa associata a  $q_\infty$ , si è pertanto assunto che se  $\alpha < 1$  l'energia da fonti lontane che non viene assorbita si ritiene persa ai fini degli scambi per irraggiamento fra superfici radianti interagenti fra di loro.

L'energia radiata incidente in funzione di quella emessa e dei parametri geometrici, è data da

$$R_i = \int_{a_e} \frac{\cos \gamma_i \cos \gamma_e}{\pi r_{ie}^2} R_e da_e, \quad (1.97) \quad \text{cc4}$$

che è l'energia incidente sul corpo  $i$  dovuta all'energia irradiata dal corpo  $e$ ;  $\gamma_i$  e  $\gamma_e$  sono gli angoli formati fra le normali locali alle superfici e la congiungente il punto ricevente con il punto emittente. Inserendo la (1.96) nella (1.97), e chiamando  $K = \frac{\cos \gamma_i \cos \gamma_e}{\pi r_{ie}^2}$ , si ottiene

$$R_i = \int_{a_e} \sigma \varepsilon K T_s^4 da_e + \int_{a_e} (1 - \alpha) K R_i da_e, \quad (1.98) \quad \text{cc5}$$

oppure

$$R_e = \sigma \varepsilon T_s^4 + (1 - \alpha) \int_{a_e} \frac{\cos \gamma_i \cos \gamma_e}{\pi r_{ie}^2} R_e da_e, \quad (1.99) \quad \text{cc6}$$

equazioni integrali che permettono di trovare le energie incidenti da inserire nella (1.95) per ottenere i flussi netti. I termini in  $\cos \gamma$  e  $r_{ie}$  indicano la dipendenza delle energie scambiate per irraggiamento dagli orientamenti e delle distanze delle superfici in gioco e quindi, ancora una volta, dipendono dallo spostamento  $\underline{s}$  e dal corrispondente tensore  $\underline{F}$ , si ricordino le (1.19, 1.20), con conseguente ulteriore accoppiamento con il movimento. Si noti che, anche mancando l'accoppiamento radiante, il flusso di calore è pur sempre dipendente dall'orientamento della superficie per cui l'accoppiamento termo strutturale è spesso non trascurabile se si è in presenza di significativi movimenti.

La presenza di equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari unita alla presenza di condizioni al contorno, anche di natura integrale come le (1.98) appena scritte, che accoppiano tutte le equazioni in maniera non lineare, non permette in generale di trovare agevolmente una soluzione in forma chiusa. Si deve perciò ricorrere ad un approccio numerico.

Per questo paragrafo può essere utile rivedere alcuni concetti di Fisica Tecnica su un qualunque testo della materia che contenga anche i fondamenti di trasmissione del calore.



## Capitolo 2

# PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) può essere considerato un principio “primigenio” che permette di scrivere le equazioni che governano la dinamica di un sistema attraverso l'imposizione dell'annullamento dei lavori virtuali. In meccanica è possibile postulare il bilancio della quantità di moto e da esso far discendere il PLV, oppure si può dare come postulato il PLV e da esso far discendere il bilancio della quantità di moto. Le due formulazioni non sono però equivalenti per ciò che riguarda il grado di regolarità richiesto alle funzioni che descrivono gli andamenti delle grandezze in gioco. Più in generale, tutte le formulazioni basate su un principio variazionale hanno il vantaggio di richiedere minori vincoli di regolarità sulle grandezze in gioco. In particolare l'approccio variazionale abbassa l'ordine delle derivazioni necessarie alla formulazione del problema e inoltre richiede la sola integrabilità delle funzioni presenti nell'equazione.

Gli spostamenti virtuali  $\delta \underline{s}$  rappresentano spostamenti arbitrari, infinitesimi, regolari (continui) e compatibili con i vincoli (cioè congruenti). Il principio dei lavori virtuali ricavato dall'equazione di bilancio della quantità di moto (1.40) si scrive come

$$\int_V \Sigma_{ik} \delta \epsilon_{ki} dV - \int_A P_i \delta s_i dA = \int_V \rho_0 B_i \delta s_i dV - \int_V \rho_0 a_i \delta s_i dV. \quad (2.1) \quad \text{plv1}$$

I termini a secondo membro si ottengono semplicemente moltiplicando i rispettivi termini dell'equazione della quantità di moto (1.40) per lo spostamento virtuale e integrando sul volume. Il termine a sinistra deriva dalla moltiplicazione dello spostamento virtuale con la divergenza del tensore nominale degli sforzi, e dalla applicazione del teorema della divergenza ossia

$$\int_V \delta s_k \Sigma_{ik/i} dV = \int_V \left( \left( \delta s_k \Sigma_{ik} \right)_{/i} - \delta s_{k/i} \Sigma_{ik} \right) dV = \int_A \delta s_k \Sigma_{ik} N_i dA - \int_V \delta s_{k/i} \Sigma_{ik} dV. \quad (2.2) \quad \text{plv2}$$

Come discusso nel paragrafo sulle condizioni al contorno sulla superficie esterna del continuo  $A$  ci sarà una parte in cui lo spostamento è vincolato ed un'altra su cui sono assegnate le forze superficiali; essendo gli spostamenti virtuali delle variazioni fra posizioni ammissibili, il loro valore nella parte di superficie di contorno il cui spostamento è vincolato sarà nullo. L'integrale sull'area  $A$  sarà quindi semplicemente uguale al prodotto delle forze di superficie assegnate al contorno per lo spostamento virtuale come mostra la (2.1). Per il termine di volume si utilizza la relazione che lega il tensore di sforzo nominale al secondo tensore di Piola-Kirchhoff (PKII)  $\underline{\underline{\Sigma}}_n = \underline{\underline{\Sigma}} \underline{\underline{F}}^T$  e il fatto che  $\delta s_{k/i} = \frac{\partial \delta s_k}{\partial X_i} = \delta \frac{\partial s_k}{\partial X_i} = \delta F_{ki}$ , si ottiene<sup>1</sup>

$$\int_V \delta s_{k/i} \Sigma_{ik} dV = \int_V \delta F_{ki} \Sigma_{i\ell} F_{k\ell} dV = \int_V \delta F_{ki} F_{k\ell} \Sigma_{i\ell} dV = \int_V \delta \epsilon_{i\ell} \Sigma_{i\ell} dV = \int_V \delta \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\Sigma}} dV. \quad (2.3) \quad \text{plv3}$$

Ancora una volta, si ricordi quanto già visto nei paragrafi sul teorema dell'energia cinetica e sul bilancio dell'energia per constatare che la dimostrazione precedente altro non è che la ripetizione

<sup>1</sup>In questo caso sia il tensore  $\underline{\underline{\Sigma}}$  che il tensore  $\underline{\underline{\epsilon}}$  sono simmetrici per cui  $\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}} = \Sigma_{ik} \epsilon_{ik} = \Sigma_{ik} \epsilon_{ki}$ .



in forma indiciale delle dimostrazioni fatte precedentemente. Ancora una volta si può notare che il tensore di sforzo nominale è energeticamente coniugato con il gradiente di deformazione, mentre il PKII è coniugato al tensore di deformazione di Green-Lagrange (GL). Il PKII ha il vantaggio di poter essere collegato attraverso una legge costitutiva che garantisce l'oggettività, ossia l'indipendenza da moti rigidi, al tensore di GL, risulta quindi opportuno operare con tale tensore. Nel caso statico di sistemi elastici soggette a forze conservative, il PLV può essere interpretato come ricerca della condizione di stazionarietà (che corrisponde alla minimizzazione) del funzionale energia totale composto dall'energia elastica (o interna) e dall'energia delle forze esterne.

Una analoga procedura può essere utilizzata per l'equazione dell'energia (1.88) nella approssimazione ingegneristica di equazione del calore (oppure per la corrispondente (1.86) nel caso più generale). Il principio variazionale termico corrispondente si ottiene utilizzando una variazione virtuale della temperatura, ossia una variazione di temperatura nulla su tutte le parti del contorno su cui la temperatura è assegnata, e sufficientemente regolare da permettere la valutazione delle derivate richieste e l'integrazione finita dei termini relativi.

$$\int_V \delta T (\rho_0 C_v \dot{T} - \rho_0 R + \text{Div } \underline{Q}) dV = 0 \quad (2.4)$$

Per i primi due termini si procede come nel caso precedente, mentre per il termine della divergenza dei flussi termici si ha

$$\int_V \delta T \text{Div } \underline{Q} dV = \int_V ((\delta T Q_i)_{/i} - \delta T_{/i} Q_i) dV = \int_A \delta T \underline{Q}^T \underline{N} dA + \int_V \delta T_{/i} K_{ik} T_{/k} dV, \quad (2.5) \quad \text{plvt1}$$

avendo utilizzato la relazione che ci dà  $\underline{Q}$  in funzione di  $\Gamma$  delle (1.82). Assemblando i diversi termini si ottiene:

$$\int_V \delta T \rho_0 C_v \dot{T} dV = \int_V \delta T \rho_0 R dV - \int_A \delta T \underline{Q}^T \underline{N} dA - \int_V (\text{Grad } \delta T)^T \underline{K} \text{Grad } T dV. \quad (2.6) \quad \text{plvt2}$$

Chiaramente si possono unire le due equazioni in un unico principio variazionale unificato. La formulazione variazionale dell'equazione del calore tempo stazionaria può essere ottenuta definendo il funzionale

$$E(\underline{X}, T) = \frac{1}{2} \int_V (\text{Grad } T)^T \underline{K} \text{Grad } T dV - \int_V T \rho_0 R dV + \int_A T \underline{Q}^T \underline{N} dA \quad (2.7)$$

da cui si può ottenere la forma differenziale attraverso la ricerca delle condizioni di stazionarietà del funzionale.

## 2.1 TECNICHE DI APPROSSIMAZIONE NUMERICA

L'idea generale qui utilizzata è quella dei metodi cosiddetti alla "Ritz", che consistono nel cercare una soluzione approssimata nella forma

$$\underline{s} = \sum_{i=1}^n \underline{N}_i(\underline{X}) u_i(t) = \underline{N}(\underline{X}) \underline{u}(t), \quad (2.8) \quad \text{ritz}$$

ove le  $\underline{N}_i$  sono funzioni della sola posizione  $\underline{X}$ , scelte a priori, che soddisfano le condizioni al contorno essenziali, mentre i parametri  $\underline{u}$  sono le coordinate libere del problema, incognite, funzione del solo tempo, adottando cioè la separazione delle variabili. La matrice delle funzioni di forma  $\underline{N}(\underline{X})$  è in generale una matrice  $3 \times n$ , essendo  $\underline{s}$  una grandezza vettoriale nello spazio a tre dimensioni. Perché una siffatta soluzione possa convergere all'aumentare di  $n$ , le funzioni di forma devono appartenere ad uno sviluppo completo, ossia essere una "base" di funzioni indipendenti dello spazio funzionale delle soluzioni del problema derivabili sino all'ordine  $m - 1$ , dove  $m$  è l'ordine massimo delle derivate presenti nel problema variazionale (quindi funzioni semplicemente continue nel caso tridimensionale). A stretto rigore di termini il metodo di Ritz richiederebbe l'esistenza di un funzionale da rendere stazionario. Noi abbiamo usato il termine alla "Ritz" per indicare che ci riferiamo direttamente ad una condizione variazionale di stazionarietà, indipendentemente

dall'esistenza di un funzionale di cui essa è una possibile variazione. Per parlare di metodi di Ritz in senso stretto dovremmo pertanto poter vedere il PLV come condizione di stazionarietà dell'energia totale, il che implicherebbe un sistema conservativo. L'approccio variazionale diretto tramite il PLV è quindi un po' più flessibile. Da un punto di vista numerico il PLV non è altro che il metodo di Galerkin, per il quale si usa il termine "funzione sonda" (test function in inglese) per indicare la variazione virtuale, così che il metodo di Galerkin, eventualmente anche con una o più integrazioni per parti, altro non è che un metodo alla "Ritz", venendo i due approcci a coincidere qualora esista un funzionale da rendere stazionario. In tal senso il metodo di Galerkin può essere visto come una forma astratta e puramente numerica di generalizzazione del principio dei lavori virtuali a formulazioni differenziali generiche. Si noti anche che la variazione virtuale è qui sempre assunta essere una variazione della soluzione, la qual cosa non è strettamente necessaria, né nel PLV né in Galerkin. Va però notato che, nel caso del PLV termo-strutturale, l'utilizzazione di una variazione virtuale diversa da quella della variazione della soluzione approssimante può portare alla perdita di simmetria dell'approssimazione, cosa che noi riteniamo sconsigliata.

La stessa cosa non si può dire per il metodo di Galerkin applicato a problemi diversi da quelli qui affrontati, per i quali, al contrario, tale perdita di simmetria serve spesso a garantire una maggior "fisicità" all'approssimazione numerica della soluzione. In tal senso si usa spesso la notazione: Bubnov-Galerkin, quando si utilizzano variazioni virtuali dell'approssimazione della soluzione; Petrov-Galerkin quando le variazioni sono funzioni diverse dall'approssimazione utilizzata.

In relazione alle considerazioni precedenti nel seguito useremo anche il termine "Galerkin-Ritz".

Le coordinate libere del sistema divengono le  $q_i$  presenti nella (2.8), ossia le ampiezze associate alle funzioni di forma utilizzate. Analogamente per il caso termico è possibile esprimere la temperatura attraverso uno sviluppo  $T = \underline{\underline{N}}(X)\underline{\underline{\theta}}(t)$  dove  $\underline{\underline{N}}(X)$  è in questo caso una matrice riga in quanto la temperatura è una grandezza scalare.

Nel caso particolare della cosiddetta approssimazione ad elementi finiti nulla cambia se non le particolari funzioni di forma utilizzate, le cui ampiezze  $\underline{q}$  corrispondono esattamente ai valori nodali della grandezza approssimata, con la conseguente possibilità di imporre le condizioni al contorno essenziali a posteriori e una maggior flessibilità nel trattare domini di geometria arbitraria.

Applichiamo questo approccio all'equazione (2.1), per cui  $\underline{s} = \underline{\underline{N}}_s \underline{u}$ ,  $T = \underline{\underline{N}}_t \underline{\theta}$ . Le variazioni dello spostamento e della temperatura si scriveranno come

$$\begin{aligned}\delta \underline{s} &= \underline{\underline{N}}_s \delta \underline{u} = \underline{\underline{N}}_{s_i} \delta u_i, \\ \delta T &= \underline{\underline{N}}_t \delta \underline{\theta} = \underline{\underline{N}}_{t_i} \delta \theta_i,\end{aligned}$$

dove  $\underline{\underline{N}}_{s_i}$  rappresenta la colonna  $i$ -esima della matrice  $\underline{\underline{N}}_s$ . La variazione del tensore di deformazione (1.7) potrà allora essere espressa come

$$\begin{aligned}\delta \underline{\underline{\epsilon}} &= \frac{1}{2} (\text{Grad } \underline{\underline{N}}_{s_i} + (\text{Grad } \underline{\underline{N}}_{s_i})^T + (\text{Grad } \underline{\underline{N}}_{s_i})^T \text{Grad } \underline{s} + (\text{Grad } \underline{s})^T \text{Grad } \underline{\underline{N}}_{s_i}) \delta u_i = \\ &= \underline{\underline{B}}_i(\underline{s}) \delta u_i,\end{aligned}\tag{2.9}$$

dove  $\underline{\underline{B}}_i(\underline{s})$  è un matrice riga, nel senso di lista ordinata, di tensori doppi dipendenti dalla configurazione corrente  $\underline{s}$ . Essi possono a loro volta essere scomposti in una parte lineare  $\underline{\underline{B}}_i^L$  ed una non lineare  $\underline{\underline{B}}_i^{NL}$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{B}}_i^L &= \frac{1}{2} (\text{Grad } \underline{\underline{N}}_{s_i} + (\text{Grad } \underline{\underline{N}}_{s_i})^T), \\ \underline{\underline{B}}_i^{NL} &= \frac{1}{2} (\text{Grad } \underline{\underline{N}}_{s_i} (\text{Grad } \underline{s})^T + \text{Grad } \underline{s} (\text{Grad } \underline{\underline{N}}_{s_i})^T).\end{aligned}$$

In ogni caso va sottolineato come tali variazioni siano sempre lineari in  $\delta \underline{u}$  e  $\delta \underline{\theta}$ . Ne consegue che è possibile definire le seguenti forze generalizzate: di volume  $\underline{F}_v$ , di superficie  $\underline{F}_s$ , elastiche  $\underline{F}_e$ , e

termiche  $\underline{F}_t$ , e la matrice di massa  $\underline{M}$  come

$$\int_V \rho_0 \delta \underline{s}^T \underline{B} dV = \int_V \rho_0 \delta \underline{u}^T \underline{N}_s^T \underline{B} dV = \delta \underline{u}^T \int_V \rho_0 \underline{N}_s^T \underline{B} dV = \delta \underline{u}^T \underline{F}_v \quad (2.10a) \quad \text{fv}$$

$$\int_A \delta \underline{s}^T \underline{P} dA = \int_A \delta \underline{u}^T \underline{N}_s^T \underline{P} dA = \delta \underline{u}^T \int_A \underline{N}_s^T \underline{P} dA = \delta \underline{u}^T \underline{F}_s \quad (2.10b) \quad \text{fs}$$

$$\begin{aligned} \int_V \delta \epsilon_{ki} \Sigma_{ik} dV &= \int_V \delta \epsilon_{ki} (C_{ikrs} \epsilon_{rs} - \beta_{ik} (T - T_0)) dV \\ &= \int_V \delta u_j B_{kij} (C_{ikrs} \epsilon_{rs} - \beta_{ik} (T - T_0)) dV = \delta \underline{u}^T (\underline{F}_e + \underline{F}_t) \end{aligned} \quad (2.10c) \quad \text{left}$$

$$\int_V \rho_0 \delta \underline{s}^T \underline{a} dV = \delta \underline{u}^T \int_V \underline{N}_s^T \rho_0 \underline{N}_s dV \underline{\ddot{u}} = \delta \underline{u}^T \underline{M} \underline{\ddot{u}}. \quad (2.10d) \quad \text{massa}$$

Data l'arbitrarietà di  $\delta \underline{u}^T$ , possiamo quindi scrivere che

$$\underline{M} \underline{\ddot{u}} = -\underline{F}_e - \underline{F}_t + \underline{F}_v + \underline{F}_s. \quad (2.11) \quad \text{explicit}$$

Analogamente per l'equazione (2.6) si ottiene

$$\int_V \delta T^T \rho_0 C_v \dot{T} dV = \delta \underline{\theta}^T \int_V \underline{N}_t^T \rho_0 C_v \underline{N}_t dV \dot{\underline{\theta}} = \delta \underline{\theta}^T \underline{C}_T \dot{\underline{\theta}} \quad (2.12a)$$

$$\int_A \delta T^T \underline{Q}^T \underline{N} dA = \delta \underline{\theta}^T \int_A \underline{N}_t^T \underline{Q}^T \underline{N} dA = \delta \underline{\theta}^T \underline{Q}_s \quad (2.12b)$$

$$\int_V \delta T^T \rho_0 R dV = \delta \underline{\theta}^T \int_V \underline{N}_t^T \rho_0 R dV = \delta \underline{\theta}^T \underline{Q}_r \quad (2.12c)$$

$$\int_V \delta T_{/i} K_{ij} T_{/k} dV = \delta \underline{\theta}^T \underline{Q}_{\text{cond}}, \quad (2.12d)$$

da cui, per l'arbitrarietà di  $\delta \underline{\theta}^T$  si ha

$$\underline{C}_T \dot{\underline{\theta}} = -\underline{Q}_s + \underline{Q}_r - \underline{Q}_{\text{cond}} \quad (2.13) \quad \text{explicitT}$$

Se è presente anche irraggiamento tra le parti della struttura per il relativo contributo al termine  $\underline{Q}_s$  valgono le relazioni già viste:

$$R_e = \sigma \epsilon T_s^4 + (1 - \alpha) R_i, \quad (2.14) \quad \text{rem}$$

$$R_i = \int_{a_e} \frac{\cos \gamma_i \cos \gamma_e}{\pi r_{ie}^2} R_e da_e. \quad (2.15) \quad \text{rad-ie}$$

Può essere utile, mantenendo la rappresentazione Euleriana per evitare appesantimenti nella notazione, vedere come impostare la risoluzione di questo problema con condizioni al contorno di irraggiamento utilizzando una approssimazione a pannelli di ordine zero, cioè a valori costanti su ogni pannello, sia per le energie radiate  $R_e$ ,  $R_i$ , sia per le temperature  $T$ . Per lo schema discreto si definiscono due nuove matrici 1)  $\underline{A} = \text{Diag} \{a_i\}$ , delle aree dei pannelli con cui si discretizzano le superfici irraggiate, e 2)  $\underline{F}$ , dei fattori di vista fra i pannelli<sup>2</sup>

$$F_{ij} = \int_{a_i} \int_{a_j} \frac{\cos \gamma_i \cos \gamma_j}{\pi r_{ij}^2} da_i da_j. \quad (2.16)$$

Definiti i due vettori  $\underline{R}_i$  ed  $\underline{R}_e$  delle radiazioni incidente ed emessa, è possibile scrivere la versione discretizzata della (2.15)

$$\underline{A} \underline{R}_i = \underline{F} \underline{R}_e. \quad (2.17) \quad \text{Fvista}$$

Scrivendo la (2.14) in forma discretizzata vettoriale  $\underline{R}_e = \sigma \text{Diag} \{\epsilon_i\} \underline{T}_s^4 + \text{Diag} \{(1 - \alpha_i)\} \underline{R}_i$  e sostituendola nella (2.17) si ottiene

$$\underline{A} \underline{R}_i = \underline{F} \underline{R}_e = \sigma \underline{F} \text{Diag} \{\epsilon_i\} \underline{T}_s^4 + \underline{F} \text{Diag} \{(1 - \alpha_i)\} \underline{R}_i, \quad (2.18) \quad \text{Fvista2}$$

<sup>2</sup>In realtà il fattore di vista dimensionalmente corretto sarebbe il rapporto  $F_{ij}/a_j$ .

da cui si può esplicitare il vettore della radiazione assorbita in funzione delle temperature delle superfici discretizzate:

$$\underline{R}_i = \sigma [\underline{A} - \underline{F}\text{Diag}\{(1 - \alpha_i)\}]^{-1} \underline{F}\text{Diag}\{\varepsilon_i\} \underline{T}_s^4. \quad (2.19) \quad \text{Fvista3}$$

La (2.19) lega la radiazione incidente alla temperatura della struttura. La matrice che moltiplica il vettore delle temperature in (2.19) è simmetrica se  $\alpha_i$  ed  $\varepsilon_i$  sono costanti. Nota la radiazione incidente, è possibile ricavare per sostituzione dalla (2.14) il valore della radiazione emessa nella forma vettoriale riportata precedentemente. Analogamente dalla (1.95) si ricava il valore dei flussi termici netti su ogni elemento superficiale,

$$\underline{q} = \sigma [\text{Diag}\{\varepsilon_i\} - \text{Diag}\{\alpha_i\} [\underline{A} - \underline{F}\text{Diag}\{(1 - \alpha_i)\}]^{-1} \underline{F}\text{Diag}\{\varepsilon_i\}] \underline{T}_s^4 - \text{Diag}\{\alpha_i \cos \gamma_i\} \underline{q}_\infty. \quad (2.20) \quad \text{flussi-pan}$$

che, definendo la *matrice di radiazione*:

$$\underline{R} = \sigma [\text{Diag}\{\varepsilon_i\} - \text{Diag}\{\alpha_i\} [\underline{A} - \underline{F}\text{Diag}\{(1 - \alpha_i)\}]^{-1} \underline{F}\text{Diag}\{\varepsilon_i\}] \quad (2.21)$$

permette di scrivere più brevemente:

$$\underline{q} = \underline{R} \underline{T}_s^4 - \text{Diag}\{\alpha_i \cos \gamma_i\} \underline{q}_\infty \quad (2.22)$$

La matrice di radiazione  $\underline{R}$  e le temperature  $\underline{T}_s$  nella (2.20) sono relative ai pannelli superficiali con cui si sono discretizzate le condizioni di irraggiamento. Per esprimerle in funzione delle variabili originarie utilizzate nel modello, ossia in funzione dei coefficienti moltiplicativi delle funzioni di forma<sup>3</sup> si ricorre ad uno schema di interpolazione lineare, che nel caso più semplice può essere generato dicendo che la temperatura del pannello è pari alla media pesata sulle singole aree delle temperature associate alle singole funzioni di forma. Introducendo la matrice di interpolazione  $\underline{W}$ , e interpolando direttamente le temperature elevate alla quarta potenza, si ottiene

$$\underline{T}_{s\text{Pann}}^4 = \underline{W} \underline{T}_{s\text{Nod}}^4 \quad (2.23)$$

$$\underline{q}_{s\text{Pann}} = \underline{R} \underline{W} \underline{T}_{s\text{Nod}}^4 \quad (2.24)$$

$$\underline{q}_{s\text{Nod}} = \underline{W}^T \underline{q}_{s\text{Pann}} = \underline{W}^T \underline{R} \underline{W} \underline{T}_{s\text{Nod}}^4 \quad (2.25)$$

Quanto sopra è applicato alla sola matrice di radiazione, ma un discorso analogo varrà anche per la matrice di radiazione diagonale associata al flusso  $q_\infty$ . Quest'ultima espressione ci dice che in caso di irraggiamento tra le parti della struttura, ci può essere un accoppiamento tra le variabili strutturali e quelle termiche dovuto alla matrice dei fattori di vista all'interno della matrice di radiazione, la quale contenendo i termini in  $\cos \gamma$  e  $r$ , quindi le direzioni normali alle superfici e le distanze fra i punti delle stesse, viene a dipendere dagli spostamenti del contorno.

La (2.11) e la (2.13) costituiscono un sistema di equazioni differenziali ordinarie accoppiate nelle incognite  $\underline{u}$  e  $\underline{\theta}$  e rappresentano l'approccio semi esplicito alla Galerkin-Ritz. Semi esplicito sta ad indicare che le derivate temporali massime non sono disponibili esplicitamente ma compaiono comunque linearmente, pre moltiplicate da matrici sicuramente invertibili:  $\underline{M}$  e  $\underline{C}_T$ , perché definite positive. Il passaggio alla forma esplicita è pertanto sempre concettualmente possibile, anche se non sempre agevole nel caso di problemi di grandi dimensioni. Si ricorda poi che, specialmente con approssimazioni di ordine elevato,  $\underline{M}$  e  $\underline{C}_T$  si possono valutare ad elementi concentrati, cioè sono diagonali, nel qual caso l'esplicitazione delle derivate massime è davvero banale. Queste equazioni possono allora essere agevolmente integrate nel tempo utilizzando un qualunque integratore esplicito, ricordando che i vari termini non sono costanti, bensì dipendenti dalla configurazione e vanno quindi in generale aggiornati ad ogni nuovo istante, ponendo attenzione alla scelta del passo di integrazione che deve essere in grado di cogliere anche le costanti di tempo più veloci presenti nel sistema per rispettare la condizione di stabilità CFL (Courant-Friedrichs-Lewy). Tale condizione non rappresenta altro che il fatto che l'integrazione numerica esplicita non può mai essere incondizionatamente stabile, per cui si è vincolati all'utilizzo di passi temporali che devono tenere conto

<sup>3</sup>Per gli elementi finiti tali coefficienti sono esattamente le temperature assunte dal sistema ai nodi.

delle costanti di tempo più veloci, anche se le frequenze di interesse del problema non dipendono da esse.

Si noti che noi abbiamo sviluppato le equazioni della nostra approssimazione numerica procedendo per applicazione variazionale diretta. È però possibile un approccio alternativo, spesso usato in letteratura. Infatti la nostra approssimazione, una volta troncata, riconduce il continuo ad un sistema olonoma a un numero finito di gradi di libertà, ragion per cui è possibile sviluppare a priori la discretizzazione dei termini energetici, ad esempio: energia cinetica, elastica e forze conservative, applicando poi a essi le usuali equazioni di Lagrange.

## 2.2 FORMULAZIONE LAGRANGIANA TOTALE ED AGGIORNATA

Le equazioni di bilancio per strutture elastiche soggette a spostamenti e deformazioni infinitesime sono delle equazioni alle derivate parziali di tipo lineare. In questo caso si può affermare che gli spostamenti e le deformazioni sono così piccoli da non influenzare il modo in cui si instaura l'equilibrio, per cui è possibile scrivere i bilanci nella configurazione indeformata. In questo caso le due formulazioni Euleriana e Lagrangiana risultano identiche.

Nel caso di grandi spostamenti, le equazioni di bilancio scritte in formulazione Euleriana sono automaticamente scritte nella configurazione deformata mentre nel Capitolo 1 abbiamo visto come è possibile scrivere le stesse equazioni in formulazione Lagrangiana, cioè facendo riferimento alla configurazione iniziale. Le equazioni che si ottengono sono in generale di tipo non lineare.

La formulazione Lagrangiana è quella più utilizzata nell'ambito del calcolo strutturale perché permette di trattare facilmente domini con contorni complessi e tutti i casi in cui si hanno leggi costitutive che dipendono dalla storia del materiale. Per la risoluzione numerica delle equazioni attraverso l'iterazione di soluzioni incrementali ottenute per linearizzazione (tipo Newton-Raphson) si possono utilizzare due formulazioni Lagrangiane differenti. Nella prima, detta *Lagrangiana Totale*, tutte le grandezze sono descritte nella configurazione originaria, ossia quella iniziale. Nella seconda, detta *Lagrangiana Aggiornata*, la configurazione di riferimento è quella corrente. In quest'ultimo caso, la configurazione di riferimento viene modificata ad ogni passo di integrazione. Per la forma Lagrangiana Totale, il cui PLV associato è quello scritto in (2.1), supponendo che lo spostamento possa essere scritto come la somma della posizione di riferimento più una variazione della stessa e analogamente per la temperatura

$$\underline{s} = \underline{s}^0 + \Delta \underline{s}, \quad T = T^0 + \Delta T, \quad (2.26) \quad \text{slin}$$

per cui si ha che

$$\delta \underline{s} = \delta \Delta \underline{s}, \quad \delta T = \delta \Delta T.$$

linBP I termini (2.10a) e (2.10b) diverranno allora

$$\int_V \rho_0 \delta \Delta \underline{s}^T (\underline{B}^0 + \Delta \underline{B}) dV = \int_V \rho_0 \delta \Delta \underline{s}^T \underline{B}^0 dV + \int_V \rho_0 \delta \Delta \underline{s}^T \Delta \underline{B} dV \quad (2.27a)$$

$$\int_A \delta \Delta \underline{s}^T (\underline{P}^0 + \Delta \underline{P}) dA = \int_A \delta \Delta \underline{s}^T \underline{P}^0 dA + \int_A \delta \Delta \underline{s}^T \Delta \underline{P} dA \quad (2.27b)$$

slin-1 La linearizzazione del termine elastico (2.10c) è invece un po' più elaborata in quanto richiede di linearizzare il tensore di deformazione di Green-Lagrange. In questo caso infatti, utilizzando la (2.26)

$$\begin{aligned} \epsilon_{ik} &= \frac{1}{2} \left( s_{i/k}^0 + \Delta s_{i/k} + s_{k/i}^0 + \Delta s_{k/i} + s_{r/i}^0 s_{r/k}^0 + s_{r/i}^0 \Delta s_{r/k} + s_{r/k}^0 \Delta s_{r/i} + \Delta s_{r/i} \Delta s_{r/k} \right) \\ &= \epsilon_{ik}^0 + \Delta \epsilon_{ik} = \epsilon_{ik}^0 + \Delta \epsilon_{1ik} + \Delta \epsilon_{2ik}, \end{aligned} \quad (2.28a)$$

dove i tre termini esplicitati corrispondono rispettivamente alla parte costante, quella lineare in  $\Delta \underline{s}$ , e quella quadratica, ossia

$$\underline{\epsilon}_{0\,ik} = \frac{1}{2} \left( s_{i/k}^0 + s_{k/i}^0 + s_{r/i}^0 s_{r/k}^0 \right), \quad (2.28b) \quad \text{eps0}$$

$$\Delta \underline{\epsilon}_{1\,ik} = \frac{1}{2} \left( \Delta s_{i/k} + \Delta s_{k/i} + s_{r/i}^0 \Delta s_{r/k} + s_{r/k}^0 \Delta s_{r/i} \right), \quad (2.28c)$$

$$\Delta \underline{\epsilon}_{2\,ik} = \frac{1}{2} \left( \Delta s_{r/i} \Delta s_{r/k} \right). \quad (2.28d)$$

Il termine (2.10c), tenuto conto che anche  $\Sigma_{ik} = \Sigma_{ik}^0 + \Delta \Sigma_{ik}$  e  $\Delta \Sigma_{ik} = C_{ikrs} \Delta \epsilon_{rs} - \beta_{ik} \Delta T$ , e che la variazione del termine in (2.28b) è nulla, si può allora scrivere come

$$\begin{aligned} \int_V (\Sigma_{ik}^0 + \Delta \Sigma_{ik}) \left( \delta \Delta \underline{\epsilon}_{1\,ik} + \delta \Delta \underline{\epsilon}_{2\,ik} \right) dV \\ = \int_V \left( \Sigma_{ik}^0 \delta \Delta \underline{\epsilon}_{1\,ik} + \Sigma_{ik}^0 \delta \Delta \underline{\epsilon}_{2\,ik} + \Delta \Sigma_{ik} \delta \Delta \underline{\epsilon}_{1\,ik} + \Delta \Sigma_{ik} \delta \Delta \underline{\epsilon}_{2\,ik} \right) dV \end{aligned} \quad (2.29) \quad \text{SigmaTL}$$

Per il termine di inerzia si ha

$$\int_V \rho_0 \delta \Delta \underline{s}^T (\underline{a}^0 + \Delta \underline{a}) dV = \int_V \rho_0 \delta \Delta \underline{s}^T \ddot{\underline{s}}^0 dV + \int_V \rho_0 \delta \Delta \underline{s}^T \Delta \ddot{\underline{s}} dV, \quad (2.30) \quad \text{massaUL}$$

Essendo  $\underline{s}^0$  una posizione per cui il bilancio di quantità di moto è verificato, i primi due termini delle (2.27) assieme al primo della (2.30) si annullano con il primo termine della (2.29), che è l'unico che contiene i termini lineari in  $\delta \Delta \underline{s}$ . Il relativo residuo è infatti:

$$\underline{R}_s = \int_V \Sigma_{ik}^0 \delta \Delta \underline{\epsilon}_{1\,ik} dV + \int_V \rho_0 \delta \Delta \underline{s}^T \ddot{\underline{s}}^0 dV - \int_V \rho_0 \delta \Delta \underline{s}^T \underline{B}^0 dV - \int_A \delta \Delta \underline{s}^T \underline{P}^0 dA \quad (2.31)$$

che è nullo per le soluzioni che soddisfano l'approssimazione adottata del bilancio del quantità di moto. Tutti i termini quadratici nella variazione dello spostamento  $\Delta \underline{s}$  vanno mantenuti, in quanto sappiamo che i termini lineari vengono ottenuti dalla variazione dei termini quadratici dell'energia. L'ultimo termine della (2.29) e il termine derivante dal prodotto del  $\Delta \underline{\epsilon}_{2\,ik}$  con  $\delta \Delta \underline{\epsilon}_{1\,ik}$  compreso nel terzo termine della (2.29) vanno eliminati in quanto termini cubici, e quindi infinitesimi di ordine superiore. Si noti che per la stessa ragione non si è tenuto in conto dei termini quadratici dell'approssimazione della legge costitutiva, in quanto dovendo essere moltiplicati almeno per la variazione virtuale  $\delta \Delta \underline{\epsilon}_{1\,ik}$  avrebbero dato origine a termini cubici e di ordine superiore. I termini rimanenti costituiscono il PLV linearizzato nella forma Lagrangiana Totale.

Nel caso della formulazione Lagrangiana Aggiornata le nuove coordinate Lagrangiane di riferimento  $\tilde{\underline{X}}$  divengono pari alla configurazione corrente  $\underline{X}$ . È quindi necessario ad ogni passo aggiornare tutte le grandezze rispetto al nuovo sistema di riferimento. Di conseguenza nelle nuove coordinate il termine  $\ddot{\underline{s}}^0$  è per definizione nullo. Nel nuovo stato di riferimento lo stato di sforzo iniziale sarà non nullo, essendoci in generale un  $\underline{\Sigma}(\underline{X})$  diverso da zero nelle coordinate originarie. Questo sforzo andrà riportato nel nuovo sistema di riferimento. Ricordando che nella condizione iniziale la configurazione coincide con quella di riferimento e il tensore PKII coincide con il tensore di Cauchy, si può scrivere che

$$\underline{\Sigma}^0(\tilde{\underline{X}}) = \underline{\sigma}^0(\tilde{\underline{X}}) = \frac{1}{J} \underline{F} \underline{\Sigma}(\underline{X}) \underline{F}^T. \quad (2.32)$$

Nella nuova formulazione allora si ha  $\Sigma_{ik} = \sigma_{ik}^0 + \Delta \Sigma_{ik}$ ; il termine  $\underline{\epsilon}_{0\,ik} = 0$  mentre si possono trascurare i termini del secondo ordine in  $\Delta \underline{\epsilon}_{1\,ik}$  scrivendo:

$$\Delta \underline{\epsilon}_{1\,ik} = \frac{1}{2} \left( \Delta s_{i/k} + \Delta s_{k/i} \right). \quad (2.33)$$

A questo punto procedendo nel medesimo modo, eliminando i termini che si equilibrano si ottengono le equazioni del moto in forma variazionale per la formulazione Lagrangiana Aggiornata. Si noti che la linearizzazione della parte termica non è stata qui trattata in quanto presenta un'unica possibilità di linearizzazione che verrà presentata nel paragrafo seguente.



## Capitolo 3

# SVILUPPO DEL PLV PER LA FORMULAZIONE LAGRANGIANA AGGIORNATA

Qui di seguito verranno dettagliati i passaggi per la costruzione di un modello discretizzato linearizzato per il caso della formulazione Lagrangiana Aggiornata. Al fine di facilitare operativamente la scrittura dei modelli discretizzati a partire dal PLV è utile esprimere gli enti vettoriali e tensoriali sino ad ora utilizzati in termini di matrici e vettori, in modo da poter operare usando l'algebra matriciale. Gli enti verranno quindi ridefiniti basandosi sull'equivalenza del risultato delle operazioni algebriche e non attraverso somiglianze formali. Sfruttando la simmetria dei tensori di sforzo e deformazione, che ci dice che le componenti indipendenti sono solo sei per ciascuno di essi, è possibile esprimere questi ultimi utilizzando i seguenti vettori

$$\underline{\Sigma} = \{\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{33}, \Sigma_{12}, \Sigma_{13}, \Sigma_{23}\}^T, \quad (3.1)$$

$$\underline{\epsilon} = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{12}, 2\epsilon_{13}, 2\epsilon_{23}\}^T. \quad (3.2)$$

Gli incrementi di spostamento e di temperatura,  $\Delta \underline{s}$  e  $\Delta T$  vengono scritti in funzione delle funzioni di forma come

$$\Delta \underline{s} = \underline{\underline{N}}_s \Delta \underline{u}, \quad (3.3)$$

$$\Delta T = \underline{\underline{N}}_t \Delta \theta. \quad (3.4)$$

Sappiamo che solo i termini quadratici in  $\Delta \underline{s}$  della (2.29) devono essere espressi nelle equazioni linearizzate, perché quelli lineari si elidono grazie alla condizione di equilibrio dinamico nella configurazione iniziale, e i termini cubici vengono trascurati in quanto infinitesimi di ordine superiore. L'operatore differenziale che permette di esprimere la parte lineare del tensore di deformazione rappresentato come vettore  $\underline{\epsilon}$  è il seguente

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Potremo allora dire che

$$\Delta \underline{\epsilon} = \underline{\underline{B}} \Delta \underline{s} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{N}}_s \Delta \underline{u} = \underline{\underline{B}} \Delta \underline{u}. \quad (3.6)$$



Chiamiamo  $\underline{\sigma}^0 = \underline{\Sigma}^0$  il vettore di sforzo nello stato iniziale <sup>1</sup>. Il corrispondente vettore degli sforzi PKII linearizzato è pari a:  $\underline{\Sigma} = \underline{\Sigma}^0 + \Delta\underline{\Sigma}$ , per cui nella trascrizione vettoriale  $\Delta\underline{\Sigma}$  sarà dato da:

$$\Delta\underline{\Sigma} = \underline{D} \Delta\underline{\epsilon} - \underline{\beta} \Delta T, \quad (3.7)$$

dove  $\underline{D}$  è la matrice che contiene le componenti indipendenti del tensore quadruplo  $C_{ikrs}$ , e  $\underline{\beta}$  è il vettore che rappresenta il tensore doppio che lega la deformazione al salto di temperatura. La parte quadratica del terzo termine della (2.29) è allora pari a

$$\int_V \delta \Delta \underline{\epsilon}^T \Delta \underline{\Sigma} dV = \delta \Delta \underline{u}^T \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \Delta \underline{u} = \delta \Delta \underline{u}^T \underline{K} \Delta \underline{u}, \quad (3.8)$$

dove  $\underline{K}$  è la matrice elastica di rigidezza. Il termine quadratico dovuto al presforzo, corrispondente al secondo termine della (2.29), si ottiene definendo la seguente matrice  $9 \times 9$

$$\underline{\tilde{\Sigma}}^0 = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^0 \underline{I}_3 & \sigma_{12}^0 \underline{I}_3 & \sigma_{13}^0 \underline{I}_3 \\ \sigma_{21}^0 \underline{I}_3 & \sigma_{22}^0 \underline{I}_3 & \sigma_{23}^0 \underline{I}_3 \\ \sigma_{31}^0 \underline{I}_3 & \sigma_{32}^0 \underline{I}_3 & \sigma_{33}^0 \underline{I}_3 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

dove  $\underline{I}_3$  è la matrice identità di dimensione  $3 \times 3$ , e l'operatore differenziale  $\underline{\mathcal{G}}$  che rappresenta l'operazione di gradiente sul vettore  $\underline{s}$

$$\underline{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \underline{I}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \underline{I}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \underline{I}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Se chiamiamo allora

$$\underline{g} = \underline{\mathcal{G}} \Delta \underline{s} = \underline{\mathcal{G}} \underline{N}_s \Delta \underline{u} = \underline{G} \Delta \underline{u}, \quad (3.11)$$

possiamo dire che

$$\int_V \Sigma_{ik}^0 \delta \Delta \underline{\epsilon}_{ik} dV = \int_V \delta \underline{g}^T \underline{\tilde{\Sigma}}^0 \underline{g} dV = \delta \Delta \underline{u}^T \int_V \underline{G}^T \underline{\tilde{\Sigma}}^0 \underline{G} dV \Delta \underline{u} = \delta \Delta \underline{u}^T \underline{K}_{\sigma} \Delta \underline{u}, \quad (3.12) \quad \text{pre-stress}$$

dove  $\underline{K}_{\sigma}$  è la matrice di presforzo o rigidezza geometrica, dove il termine “geometrica” forse meglio evidenzia che tale matrice è sì legata allo stato di presforzo ma richiede la “geometria” della posizione deformata, comunque poco ma pur sempre deformata, della struttura. Il contributo dovuto alle variazioni di temperatura si scrive come

$$\int_V \delta \Delta \underline{\epsilon}^T \underline{\beta} \Delta T dV = \delta \Delta \underline{u}^T \int_V \underline{B}^T \underline{\beta} \underline{N}_t dV \Delta \underline{\theta} = \delta \Delta \underline{u}^T \underline{K}_{u\theta} \Delta \underline{\theta}. \quad (3.13)$$

Infine rimane da definire la matrice di massa seguendo l'equazione (2.30) come

$$\underline{M} = \int_V \underline{N}_s^T \rho_0 \underline{N}_s dV \quad (3.14)$$

I termini  $\underline{F}_v$  ed  $\underline{F}_s$  vengono definiti utilizzando esattamente le (2.10a) e (2.10b), sostituendo a  $\underline{u}$  il termine  $\Delta \underline{u}$ . Data l'arbitrarietà di  $\delta \Delta \underline{u}$ , l'espressione finale del PLV linearizzato diviene pari a

$$\underline{M} \Delta \ddot{\underline{u}} + \left( \underline{K} + \underline{K}_{\sigma} \right) \Delta \underline{u} - \underline{K}_{u\theta} \Delta \underline{\theta} - \Delta \underline{F}_v - \Delta \underline{F}_s = \underline{R}_s(\underline{u}, \underline{\theta}). \quad (3.15) \quad \text{expl-lin}$$

<sup>1</sup>Si ricorda che nella condizione di riferimento il tensore di Cauchy e il PKII sono uguali.

Il vettore  $\underline{R}_s$  è detto *residuo*, e nel caso in cui il sistema sia lineare è nullo. Nel caso generale il residuo sarà pari a

$$\underline{R}_s = \int_V \underline{B}^T \underline{\Sigma} dV + \int_V \underline{N}_s^T \rho_0 \underline{N}_s dV \ddot{\underline{u}} - \int_V \underline{N}_s^T \rho_0 \underline{B} dV - \int_A \underline{N}_s^T \underline{P} dA. \quad (3.16) \quad \text{rs}$$

Per problemi dinamici prima di passare alla risoluzione numerica si dovrà rendere algebrica l'espressione differenziale dell'accelerazione utilizzando un metodo di integrazione numerica.

Nel caso più generale il PLV linearizzato rispetto alla condizione di equilibrio dinamico  $\underline{s}^0$  costituisce la base su cui costruire un metodo iterativo per la risoluzione del sistema non lineare. Il sistema di equazioni algebriche potrà essere descritto come un insieme di equazioni vettoriali del tipo  $\underline{f}(\underline{u}) = 0$ , per la cui risoluzione si potrà, ad esempio, usare l'algoritmo di Newton-Raphson, o sue variazioni, che dice semplicemente

**inizializza:**  $\underline{R} = -\underline{f}(\underline{u}_0)$   
**loop: if**  $\underline{R} \neq 0$   
 $\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}} \Delta \underline{u} = \underline{R}$   
 $\underline{u}_{n+1} = \underline{u}_n + \Delta \underline{u}$   
 $\underline{R} = -\underline{f}(\underline{u}_{n+1})$   
**else** convergenza.

In quest'ultimo caso il residuo non sarà più nullo, bensì uguale ai termini contenuti nella (2.11) calcolati in maniera completa senza linearizzare. Le forze superficiali e di volume possono dipendere dalla posizione e dalla velocità e potranno dunque contribuire allo Jacobiano fornendo equivalenti alla "rigidezza" (se dipendono dalla posizione) o "smorzamento" (se dipendono dalla velocità). Al momento non è stato introdotto alcun termine di smorzamento strutturale. Se, ad esempio, si introducesse uno smorzamento di tipo proporzionale, comparirà nel primo membro della (3.15) un termine del tipo

$$\underline{C} \Delta \dot{\underline{u}} = \left[ \alpha \underline{M} + \gamma \left( \underline{K} + \underline{K}_\sigma \right) \right] \Delta \dot{\underline{u}}. \quad (3.17) \quad \text{damp-prop}$$

Una trattazione più approfondita dello smorzamento strutturale verrà data in seguito, ad ogni modo possiamo fin d'ora dire che lo smorzamento proporzionale al presforzo  $\underline{K}_\sigma$  potrebbe non comparire.

Il termine termico è invece lineare se il tensore di conduzione di Fourier  $\underline{K}_F$  non dipende dalla temperatura  $T$ . Definendo

$$\underline{K}_T = \int_V \text{Grad } \underline{N}_t^T \underline{K}_F \text{Grad } \underline{N}_t dV. \quad (3.18)$$

Nel caso in cui  $\underline{K}_F$  dipenda dalla temperatura, si preferisce non modificare la definizione di  $\underline{K}_T$  e utilizzare un aggiornamento esplicito definendo un  $\underline{K}_T(T)$ . La ragione di tale scelta risiede nella possibilità di conservare la simmetria della matrice di conduzione, infatti la corretta linearizzazione dovrebbe invece essere fatta come

$$\underline{K}_T = \int_V \text{Grad } \underline{N}_t^T \underline{K}_F \text{Grad } \underline{N}_t dV + \int_V \text{Grad } \underline{N}_t^T \left( \frac{\partial \underline{K}_F}{\partial T} \text{Grad } (T) \right) \underline{N}_t dV. \quad (3.19)$$

per la quale è facile constatare la perdita di simmetria causata dal secondo termine. Utilizzando le quantità già definite in (2.13) si ottiene

$$\underline{C}_T \Delta \dot{\underline{\theta}} = -\underline{K}_T \Delta \underline{\theta} + \Delta \underline{Q}_s + \Delta \underline{Q}_r + \underline{R}_T(\underline{u}, \underline{\theta}), \quad (3.20) \quad \text{explT-lin}$$

con  $\underline{R}_T$  il vettore residuo, in questo caso definito come

$$-\underline{R}_T(\underline{u}, \underline{\theta}) = \int_V \text{Grad } \underline{N}_t^T \underline{K}_F \text{Grad } T dV + \int_V \underline{N}_t^T \rho_0 R dV + \int_A \underline{N}_t^T \underline{Q}^T \underline{N} dA - \int_V \underline{N}_t^T \rho_0 C_v \dot{T} dV. \quad (3.21) \quad \text{Rt}$$

Il vettore di flussi di calore (convettivo e radiante) può dipendere dal movimento del contorno, e nel caso della parte radiante ci può anche essere irraggiamento tra parti della struttura. Questo

porta ad un accoppiamento della parte termica con quella strutturale attraverso le condizioni al contorno anche quando le equazioni di bilancio sono disaccoppiate. Senza esplicitare lo sviluppo dei calcoli per l'ottenimento di questi termini, in generale si può dire che il vettore dei flussi di calore è composto da una parte di flusso dipendente dalle condizioni al contorno, e quindi dal movimento, più una parte di flussi assegnati

$$\Delta \underline{Q}_s = \frac{\partial Q_s}{\partial \underline{u}} \Delta \underline{u} + \frac{\partial Q_s}{\partial \theta} \Delta \theta + \Delta \underline{Q}_a = \underline{K}_{\theta u} \Delta \underline{u} + \underline{K}_{\theta \theta} \Delta \theta + \Delta \underline{Q}_a. \quad (3.22)$$

explT-lin2

Pur potendoci esimere dai troppi dettagli computazionali relativi alle matrici Jacobiane di cui sopra, notiamo che le difficoltà di gran lunga maggiori sono relative alla  $\underline{K}_{\theta u}$ , riducendosi la  $\underline{K}_{\theta \theta}$  all'affiancamento delle colonne della matrice di irraggiamento  $R$  moltiplicate ciascuna per il termine  $4T^3$ , del corrispondente termine di temperatura del vettore  $\underline{T}$ , associato alla discretizzazione del campo di temperatura superficiale. Combinando la (3.15) e la (3.20) con la (3.22) e le opportune condizioni al contorno si ottiene l'espressione finale del Principio dei Lavori Virtuali linearizzato in forma discreta per un sistema termoelastico

$$\begin{bmatrix} \underline{M} & 0 \\ 0 & \underline{C}_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \ddot{\underline{u}} \\ \Delta \underline{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K} + \underline{K}_\sigma & -\underline{K}_{u\theta} \\ -\underline{K}_{\theta u} & \underline{K}_T - \underline{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{u} \\ \Delta \underline{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \underline{F} \\ \Delta \underline{Q} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

termoel

Resta sottinteso che l'equazione di cui sopra, con i relativi sviluppi precedenti, potrà essere scritta senza nessun  $\Delta$  qualora ci riferissimo a sistemi termoelastici intrinsecamente lineari. Così, per semplicità di notazione, nel seguito si eviterà l'uso di  $\Delta$  ogniqualevolta che dal contesto si potrà capire se ci si sta riferendo a problemi lineari o linearizzati.

La nuova matrice di "rigidezza" del sistema termoelastico non è in generale, definita positiva, mentre generalmente lo è quella contenente le matrici di massa e di capacità termica. Il "generalmente" della frase precedente si riferisce principalmente al fatto nei modelli a elementi finiti con molti nodi, e quindi molto precisi, si può spesso concentrare ai nodi masse e capacità termiche così che le relative matrici risultano diagonali. In tale ambito spesso la matrice di massa contiene solo i termini diagonali traslazionali risultando così anch'essa semidefinita positiva. È quindi possibile che in alcune condizioni si creino delle instabilità termoelastiche del sistema (flutter termoelastico) dovute alle interazioni termo-strutturali attraverso le condizioni al contorno. Instabilità termoelastiche si sono verificate su alcuni satelliti in orbita che sono stati persi a causa di dette interazioni. In alcuni casi infatti, i tempi caratteristici della dinamica termica non sono sufficientemente veloci per smaltire (per irraggiamento) il calore ricevuto per irraggiamento solare, il cui flusso varia a seconda della deformata assunta dalla struttura. Di conseguenza, ad ogni rivoluzione attorno alla terra la deformata dovuta alla interazione con i flussi di calore cresce, conducendo in alcuni casi ad instabilità con conseguente perdita del sistema.

Per le tecniche di risoluzione approssimata si ripassi il materiale del/i corso/i di matematica numerica già seguiti. Può però essere utile rivedere le stesse cose da un punto di vista più "ingegneristico" e prossimo a quello qui utilizzato. Allo scopo si possono utilmente consultare:

Bathe, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall;

Taylor, Zienkiewicz, The Finite Element Method, McGraw-Hill.

Per l'approssimazione numerica dell'irraggiamento diffuso qui presentata si vedano i manuali di NASTRAN relativi alla parte termica.

### 3.1 APPROSSIMAZIONE ELASTO-ACUSTICA, INTRODUZIONE FLUSSO POTENZIALE LINEARIZZATO

Come ulteriore esercizio di applicazione della generalizzazione del PLV, o del metodo di (Bubnov) Galerkin che dir si voglia, qualora il termine si percepisse come più gradevole e/o appropriato, ne presentiamo l'applicazione a problemi elasto-acustici, finendo con l'approffitarne per introdurre l'approssimazione di flussi potenziali comprimibili linearizzati. Approssimazione a cui arriveremo anche nel bigino di aeroelasticità, però con una modalità leggermente diversa da quella qui utilizzata. Chiaramente riferendoci alla stessa problematica, anche se passando per vie diverse, alla fine

del percorso non si potrà che giungere alle stesse conclusioni. Rimarchiamo che non c'è qui alcuna pretese di parlare realmente di elasto-acustica ma semplicemente e soltanto di esercitarsi nella linearizzazione e nell'applicazione di alcune tecniche di approssimazione, che abbiamo genericamente già chiamato alla Ritz. Nel rivedere quanto segue si consiglia di leggere inizialmente quanto basta per agganciarsi al contesto, cercando poi di proseguire, il più possibile, autonomamente.

### 3.1.1 Linearizzazione delle equazioni di Eulero attorno a una soluzione di quiete

Partendo dalle equazioni di Eulero per flussi inviscidi e omentropici:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p \\ dp = c^2 d\rho \end{cases} \quad (3.24)$$

dove  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  è la densità del fluido,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  il campo di velocità,  $p = p(\mathbf{x}, t)$  la pressione e  $c = c(\mathbf{x}, t)$  la velocità del suono, è possibile eseguirne una linearizzazione per variazioni attorno a una condizione di fluido in quiete uniforme con stato a valori costanti per:  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $c_0$ , e con  $\mathbf{u}_0 = 0$ , in tutto il campo. Riutilizzando poi i simboli:  $p$ ,  $\rho$ ,  $c$  e  $\mathbf{u}$ , per indicare piccole variazioni rispetto alla su menzionata condizione di quiete di riferimento, possiamo riscrivere le equazioni di Eulero incrementate:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u} + \rho \mathbf{u}) = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_0 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p \\ d(p_0 + p) = (c_0^2 + c^2)d(\rho_0 + \rho) \end{cases} \quad (3.25)$$

dalle quali, trascurando i termini contenenti variazioni di ordine superiore alla prima, abbiamo:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p \\ p = c_0^2 \rho \quad (dp = c_0^2 d\rho) \end{cases} \quad (3.26)$$

ossia un sistema di cinque equazioni lineari, del primo ordine, quattro alle derivate parziali e una algebrica, nelle cinque incognite:  $p$ ,  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$ , che, una volta completato con le opportune condizioni al contorno e iniziali, ci permette di affrontare problemi di vibroacustica linearizzata attorno a condizioni medie di quiete. È però possibile ricondursi assai più semplicemente a equazioni lineari scalari, in  $p$  o  $\rho$ , alle derivate parziali del secondo ordine, in modo tale che determinata  $p$  o  $\rho$ ,

quindi  $\rho$  o  $p$  usando la:  $p = c_0^2 \rho$ , si può ricavare  $\mathbf{u}$  integrando nel tempo la:  $\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p$ .

Illustreremo ora un possibile sviluppo di tale procedimento determinando l'equazione dinamica di base, sia in pressione che nel potenziale di perturbazione, con le relative condizioni al contorno.

- Dividendo i termini dell'equazioni linearizzata della  $c$  per  $dt$  abbiamo:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t}$  che

sostituita nella prima equazione linearizzata permette di ottenere:  $\frac{\partial p}{\partial t} + c_0^2 \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , da cui:

$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{c_0^2 \rho_0} \frac{\partial p}{\partial t}$ . Calcolando poi la divergenza di entrambi i termini della seconda equazione

linearizzata e scambiando l'ordine di derivazione spazio-temporale si ottiene:  $\rho_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial t} =$

$-\nabla^2 p$  dalla quale, sostituendo l'espressione di  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  prima ricavata, abbiamo l'equazione in  $p$  delle onde acustiche:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 p \quad (3.27)$$

A tale equazione si possono associare condizioni al contorno essenziali (alla Dirichelet) laddove  $p$  è assegnato, mentre in corrispondenza di diaframmi, pareti, componenti strutturali la condizione al contorno potrà essere controllata dal comportamento di detti elementi. Per ricavare le condizioni associate a generici movimenti al contorno basterà applicare il bilancio di quantità di moto a un volumetto cilindrico di fluido con basi normali alla parete ottenendo:  $\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_0 a_n$ , condizione naturale (alla Neuman), ossia già presente nelle equazioni della dinamica del fluido, infatti da lì l'abbiamo ricavata, essendo  $n$  il versore normale alla superficie diretto verso il fluido. Si noti che in caso di componenti rigidi, o comunque in assenza di movimento sul contorno, si ha semplicemente la condizione omogenea  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ .

Il PLV-Galerkin corrispondente all'equazione appena sviluppata sarà dato da:

$$\int \delta p^T \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dV = \int \delta p^T \nabla^2 p dV = \int \delta p^T \frac{\partial p}{\partial n} dS - \int \nabla \delta p^T \cdot \nabla p dV \quad (3.28)$$

in modo che, aggiungendo euristicamente, arbitrariamente e senza ulteriori approfondimenti possibili sorgenti acustiche  $a_s$ , e.g. effetti viscosi, turbolenti, getti, etc., nel dominio di interesse, superfici incluse tramite possibili distribuzioni spazialmente impulsive su di esse, alla fine scriveremo la seguente formulazione variazionale:

$$\int \delta p^T \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dV + \int \nabla \delta p^T \cdot \nabla p dV = \int \delta p^T a_s dV - \int \delta p^T \rho_0 a_n dS \quad (3.29)$$

a cui assoceremo un verace PLV strutturale:

$$\int \delta \mathbf{s}^T \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} dV + \int \delta \epsilon^T \sigma dV = \int \delta \mathbf{s}^T \mathbf{f} dV - \int \delta \mathbf{s}^T \mathbf{n} p dS \quad (3.30)$$

Prima di proseguire notiamo il cambiamento di segno del termine di contorno della formulazione variazionale della pressione associato all'interfaccia strutturale. Tale cambiamento è dovuto al fatto che tale termine è sempre riferito a una normale diretta verso l'esterno della struttura. Così che nella sua derivazione risultava entrante nel dominio del fluido, mentre ora, nell'applicazione del teorema della divergenza, risulta uscente. Per la loro soluzione approssimata sceglieremo i soliti sviluppi completi, imponendo che già soddisfino le condizioni al contorno essenziali:

$$p = N_p(\mathbf{x}) \mathbf{q}_p(t) \quad \mathbf{s} = \mathbf{N}_s(\mathbf{x}) \mathbf{q}_s(t) \quad (3.31)$$

che sostituiti nelle due equazioni variazionali permettono di scrivere:

$$\frac{1}{c_0^2} \int N_p^T N_p dV \cdot \ddot{\mathbf{q}}_p + \int \nabla N_p^T \cdot \nabla N_p dV \cdot \mathbf{q}_p = -\rho_0 \int N_p^T \mathbf{n}^T \mathbf{N}_s^T dS \cdot \ddot{\mathbf{q}}_s + \int N_p^T a_s dV \quad (3.32)$$

$$M_{ss} \ddot{\mathbf{q}}_s + K_{ss} \mathbf{q}_s = - \int \mathbf{N}_s^T \mathbf{n} N_p dS \cdot \mathbf{q}_p + \int \mathbf{N}_s^T \mathbf{f} dV \quad (3.33)$$

in cui ci si è permessi di esprimere direttamente le ormai ben note discretizzazioni dei termini inerziali ed elastici della struttura. Pertanto, dopo aver definito:

$$\begin{cases} K_{sp} = \int N_s^T \mathbf{n} N_p dS & M_{pp} = \int N_p^T N_p dV \\ K_{pp} = \int \nabla N_p^T \cdot \nabla N_p dV & M_{ps} = \int N_p^T \mathbf{n}^T N_s dS \\ S_a = \int N_p^T a_s dV & F_s = \int \mathbf{N}_s^T \mathbf{f} dV \end{cases} \quad (3.34)$$

arriveremo al seguente modello semianalitico del nostro problema vibroacustico:

$$\begin{bmatrix} M_{ss} & 0 \\ \rho_0 M_{ps} & \frac{1}{c_0^2} M_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_s \\ \ddot{\mathbf{q}}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ss} & -K_{sp} \\ 0 & K_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_s \\ \mathbf{q}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s \\ S_a \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

- Assumendo ora l'irrotazionalità del campo di velocità associato alle perturbazioni acustiche, possiamo ipotizzare per esso l'esistenza di un potenziale di perturbazione,  $\phi$ . Potremo così scrivere:  $\mathbf{u} = \nabla\phi$ , riscrivendo poi le equazioni di perturbazione linearizzate nella forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla^2 \phi = 0 \\ \rho_0 \nabla \dot{\phi} = -\nabla p \\ p = c_0^2 \rho \quad (dp = c_0^2 d\rho) \end{cases} \quad (3.36)$$

essendo  $\rho_0$  costante. Dalla seconda si ricava:  $\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -p$ , che derivata ulteriormente rispetto al tempo darà:  $\rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial t} = -c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial t}$ , da cui  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ , che sostituita nella prima equazione linearizzata fornisce l'equazione del potenziale di perturbazione:  $\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \nabla^2 \phi$ , formalmente corrispondente a quella in pressione precedentemente sviluppata. Riassumendo il quadro risolutivo della linearizzazione basata sul potenziale di perturbazione sarà:

$$\begin{cases} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \nabla^2 \phi \\ p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \rho = -\frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{cases} \quad (3.37)$$

Dopo aver rimarcato che le ultime due equazioni altro non sono che il teorema di Bernoulli linearizzato, aggiungiamo che per quanto riguarda le condizioni al contorno, possiamo constatare che all'assegnazione della pressione corrisponde l'imposizione di  $-\rho_0 \dot{\phi}$ , mentre per quella associata a contorni, fermi o in movimento, la:  $\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_0 a_n$ , sulla base delle relazioni al potenziale precedentemente trovate, si trasforma nella:  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \nabla \phi \cdot \mathbf{n}$ , che altro non è che la relazione di impenetrabilità:  $\mathbf{u}_n = \frac{\partial \phi}{\partial n}$ . Stante la già citata analogia formale fra l'equazione della perturbazione in pressione e al potenziale è chiaro che si può ripetere anche la formulazione variazionale associabile al potenziale di perturbazione. Pertanto scriviamo direttamente la forma finale:

$$\int \delta \phi^T \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} dV + \int \nabla \delta \phi^T \cdot \nabla \phi dV = \int \delta \phi^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int \delta \phi^T a_s dS \quad (3.38)$$

accoppiandola al solito verace PLV strutturale:

$$\int \delta \mathbf{s}^T \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} dV + \int \delta \epsilon^T \sigma dV = \int \delta \mathbf{s}^T \mathbf{f} dV - \int \delta \mathbf{s}^T \mathbf{n} p dS \quad (3.39)$$

Proseguiamo quindi, come precedentemente fatto, a una soluzione approssimata scegliendo i soliti sviluppi completi e soddisfacenti le condizioni al contorno essenziali:

$$\phi = N_\phi(\mathbf{x}) \mathbf{q}_\phi(t) \quad \mathbf{s} = \mathbf{N}_s(\mathbf{x}) \mathbf{q}_s(t) \quad (3.40)$$

così che sostituendoli nelle due equazioni variazionali possiamo scrivere:

$$\int N_\phi^T \frac{1}{c_0^2} N_\phi dV \cdot \ddot{\mathbf{q}}_\phi + \int \nabla N_\phi^T \cdot \nabla N_\phi dV \cdot \mathbf{q}_\phi = - \int N_\phi^T \mathbf{n}^T \mathbf{N}_s dS \cdot \dot{\mathbf{q}}_s + \int N_\phi^T a_s dV \quad (3.41)$$

$$M_{ss} \ddot{\mathbf{q}}_s + K_{ss} \mathbf{q}_s = - \int \mathbf{N}_s^T \mathbf{n} \rho_0 N_\phi dS \cdot \dot{\mathbf{q}}_\phi + \int \mathbf{N}_s^T \mathbf{f} dV \quad (3.42)$$

essendoci ancora una volta permessi di utilizzare direttamente le discretizzazioni dei temini inerziali ed elastici della struttura, e di aggiungere, sempre a posteriori, possibili sorgenti acustiche. Definendo ancora una volta alcune delle matrici delle precedenti discretizzazioni:

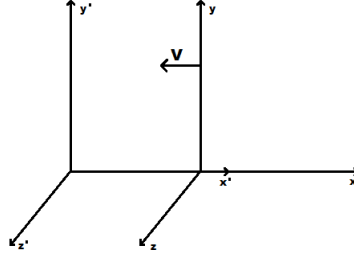
$$\begin{cases} C_{s\phi} = \int N_s^T \mathbf{n} N_\phi dS \\ K_{\phi\phi} = \int \nabla N_\phi^T \cdot \nabla N_\phi dV \\ S_a = \int N_\phi^T a_s dV \end{cases} \quad \begin{cases} M_{\phi\phi} = \int N_\phi^T N_\phi dV \\ C_{\phi s} = \int N_\phi^T \mathbf{n}^T N_s dS \\ F_s = \int \mathbf{N}_s^T \mathbf{f} dV \end{cases} \quad (C_{\phi s} = C_{s\phi}^T) \quad (3.43)$$

possiamo concludere con il sistema accoppiato della discretizzazione delle equazioni vibroacustiche al potenziale di perturbazione:

$$\begin{bmatrix} M_{ss} & 0 \\ 0 & \frac{\rho_0}{c_0^2} M_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_s \\ \ddot{\mathbf{q}}_\phi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \rho_0 C_{s\phi} \\ \rho_0 C_{\phi s} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_s \\ \dot{\mathbf{q}}_\phi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ss} & 0 \\ 0 & \rho_0 K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_s \\ \mathbf{q}_\phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s \\ \rho_0 S_a \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

Si noti che tutte le su definite sottomatrici diagonali risultano essere simmetriche, mentre per le uniche due fuori dalla diagonale vale la già richiamata  $C_{\phi s} = C_{s\phi}^T$ . Sulla base di tale considerazione si sono moltiplicate per  $\rho_0$  tutte le equazioni discretizzate dell'acustica, così da mantenere la simmetria di tutto il sistema.

A completamento di questa applicazione di impostazione di soluzioni approssimate alla Ritz per problemi elasto-acustici vogliamo mostrare come la formulazione al potenziale trovata, anche se sotto mentite spoglie, non sia altro che la solita formulazione al potenziale di perturbazione linearizzata vista in aerodinamica, anticipando così un aggancio con quanto useremo in aeroelasticità.



A tale scopo, per mantenere il sistema di coordinate con simbolo  $\mathbf{x}$  disponibile per le equazioni finali che andremo ora a sviluppare, supponiamo le equazioni al potenziale precedentemente sviluppate siano scritte rispetto a un sistema di coordinate  $\mathbf{x}'$ , che facciamo ora muovere nella direzione negativa dell'asse  $x'$  con velocità  $V_\infty$ . Definiamo ora la relazione fra i due sistemi di coordinate tramite le seguenti relazioni:

$$x' = x - Vt \quad y' = y \quad z' = z \quad (3.45)$$

Data poi una generica grandezza  $\square = \square$ , funzione dello spazio e del tempo, è allora facile constatare che per tutte le derivate spaziali sarà  $\frac{\partial \square}{\partial x_i} = \frac{\partial \square}{\partial x'_i}$ , mentre per la derivata temporale, avremo:

$$\frac{\partial \square(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \square(\mathbf{x}', t)}{\partial t} - V_\infty \frac{\partial \square}{\partial x} \quad \text{da cui} \quad \frac{\partial \square(\mathbf{x}', t)}{\partial t} = \frac{\partial \square(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial \square}{\partial x} \quad (3.46)$$

con la conseguente trasformazione delle derivate seconde temporali:

$$\frac{\partial^2 \square(\mathbf{x}', t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \square(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} + 2V_\infty \frac{\partial^2 \square(\mathbf{x}, t)}{\partial x \partial t} + V_\infty^2 \frac{\partial^2 \square(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2} \quad (3.47)$$

Inoltre per ottenere una scrittura delle equazioni che sia immediatamente omogenea a quella che useremo in aeroelasticità scaliamo il potenziale di perturbazione  $\phi$  ridefinendolo con la seguente  $\phi = V_\infty \varphi$ . Supponiamo anche che la condizione iniziale di quiete si estenda fino all'infinito, per cui possiamo scrivere  $\rho_0 = \rho_\infty$  e  $c_0^2 = c_\infty^2$ . Riprendendo, per una comoda esposizione, il quadro risolutivo della linearizzazione basata sul potenziale di perturbazione:

$$\begin{cases} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \nabla^2 \phi \\ p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{cases} \quad \rho = -\frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (p = c_\infty^2 \rho) \quad (3.48)$$

e applicandogli tutte le trasformazioni e le ridefinizioni sopra presentate, avremo:

$$\begin{cases} \frac{1}{c_\infty^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2V_\infty \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + V_\infty^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = \nabla^2 \varphi \\ p = -\rho_\infty V_\infty \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad \rho = -\frac{\rho_\infty V_\infty}{c_\infty^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (p = c_\infty^2 \rho) \end{cases} \quad (3.49)$$

Naturalmente le equazioni dovranno essere completate dalle condizioni al contorno, trasformate coerentemente alle stesse modalità precedentemente utilizzate. In considerazione dell'estensione della nostra condizione di quiete a infinito avremo:  $\varphi_\infty = 0$ , mentre l'originaria condizione di impenetrabilità,  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{u}_n$ , diventerà:  $V_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \left( \frac{\partial s_n}{\partial t} - V_\infty \cdot \mathbf{n} \right)$ .

A questo punto, come ben sappiamo, notiamo che nulla cambia se la trasformazione di coordinate su riportata viene interpretata vedendo il movimento verso sinistra dovuto a  $V_\infty$  come un flusso asintotico  $V_\infty$  proveniente da sinistra. In tal modo le nostre equazioni possono ora rappresentare le perturbazioni acustiche causate da un corpo (molto) sottile immerso in un flusso imperturbato caratterizzato da:  $V_\infty, c_\infty^2, \rho_\infty$ . Ne consegue che l'aerodinamica basata sul potenziale di perturbazione linearizzato altro non è che l'acustica, con piccole, ma significative, variazioni di velocità, pressione e densità. In tale prospettiva ricordiamo anche che comunemente si preferisce rappresentare i carichi aerodinamici dovuti alla pressione tramite scalatura della pressione dinamica asintotica,  $q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2$ , con un coefficiente, detto di pressione,  $c_p$ <sup>2</sup>. Seguendo tale convenzione scriveremo quindi la nostra pressione di perturbazione come:  $p = q_\infty c_p$ , in modo che, chiamando il numero di Mach asintotico:  $M_\infty = \frac{V_\infty}{c_\infty}$ , possiamo riscrivere:

$$\begin{cases} M_\infty^2 \left( \frac{1}{V_\infty^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{2}{V_\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = \nabla^2 \varphi \\ c_p = -\frac{2}{V_\infty} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (3.50)$$

Definendo anche quello che chiameremo derivata sostanziale linearizzata, ossia:  $\frac{d\Box(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \Box(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial \Box}{\partial x}$ , avremo la ancor più sintetica forma:

$$\begin{cases} \frac{1}{c_\infty^2} \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \nabla^2 \varphi \\ c_p = -\frac{2}{V_\infty} \frac{d\varphi}{dt} \end{cases} \quad (3.51)$$

a cui aggiungiamo la su richiamata condizione di impenetrabilità riscritta in forma adimensionale:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{V_\infty} \frac{ds_n}{dt} = \left( \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial s_n}{\partial t} - \mathbf{n}_x \right) \quad (3.52)$$

---

<sup>2</sup>Ricordiamoci che tale coefficiente di pressione è qui da intendersi come quello di perturbazione. Infatti, detta  $p$  la vera pressione attuale, la definizione del coefficiente di pressione è:  $c_p = (p - p_\infty)/q_\infty$ , per cui noi avremmo dovuto scrivere  $\Delta c_p = (p_\infty + \Delta p - p_\infty)/q_\infty$ . Da cui si vede che, come già per l'uso di  $p$  al posto di  $\Delta p$ , non abbiamo fatto altro che evitare  $\Delta$  anche per  $c_p$





## Capitolo 4

# RISOLUZIONE NUMERICA ATTRAVERSO L'ESPANSIONE MODALE

Per la risoluzione numerica di sistemi lineari governati dalla (3.23), eventualmente con l'aggiunta di un termine di smorzamento strutturale, si possono utilizzare metodi di tipo implicito od esplicito. In considerazione della stabilità condizionata dei metodi espliciti, che ci obbligherebbe a risolvere piccole scale temporali che non ci interessano ma che sono sempre presenti in modelli spazialmente molto precisi, che invece ci interessano, è gioco forza utilizzare metodi di integrazione temporale di tipo implicito, per i quali ci siamo già attrezzati con le linearizzazioni precedentemente presentate. Fra i metodi impliciti verranno preferiti quelli che, a parità di precisione, sono in grado di smorzare rapidamente le frequenze alte contenute nel modello numerico ma la cui risoluzione non è richiesta. A questa classe appartengono ad esempio alcuni metodi di tipo LMM-BDF (Linear Multistep Methods e Backward Differentiation Formulæ), per il cui uso rimandiamo a quanto verrà presentato in modo generale in successive lezioni. Per un approccio alternativo ci occuperemo inizialmente della sola parte meccanica dei modelli, rilevando però che per la parte termica è possibile fare discorsi analoghi a quelli che vedremo qui di seguito. È anche possibile ipotizzare di risolvere il sistema in maniera algebrica, passando attraverso la trasformazione nel dominio delle frequenze con le trasformate di Laplace o Fourier. Se il sistema in analisi è asintoticamente stabile e le forzanti limitate in ampiezza e tempo, è possibile procedere alla sua analisi in frequenza tramite trasformazione secondo Fourier <sup>1</sup>. La soluzione diretta del problema nelle coordinate fisiche originarie attraverso le trasformate risulta estremamente gravosa, tanto da renderla inefficiente dal punto di vista numerico. Tale metodologia mantiene una certa validità come metodo di risoluzione di modelli di piccole dimensioni, quindi in tutti i casi in cui è possibile utilizzare una opportuna tecnica di riduzione dell'ordine del sistema. Sarà ampiamente usata nello studio delle risposte, sia deterministiche che casuali, in aeroelasticità classica, a cui rimandiamo per i dettagli operativi abbozzandone qui solo la formulazione concettuale di base, anche per rendersi conto dei costi di tale approccio per problemi di grandi dimensioni. Assumendo che le forzanti  $\underline{F}(t)$  siano trasformabili secondo Fourier ne calcoliamo le relative trasformate  $\underline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(t)e^{-j\omega t}dt$  nel modo più adatto al caso che stiamo analizzando, principalmente per via analitica o numerica.

---

<sup>1</sup>Si noti che utilizzando un approccio energetico alla Lyapunov, detta  $E$  l'energia generalizzata, è necessario verificare che  $\frac{dE}{dt} < 0$ , ossia

$$\begin{aligned}\underline{M}\ddot{\underline{u}} + \underline{C}\dot{\underline{u}} + \underline{K}\underline{u} &= 0 \\ E &= \frac{1}{2}\dot{\underline{u}}^T \underline{M}\dot{\underline{u}} + \frac{1}{2}\underline{u}^T \underline{K}\underline{u} \\ \frac{dE}{dt} &= \dot{\underline{u}}^T (\underline{M}\ddot{\underline{u}} + \underline{K}\underline{u}) = -\dot{\underline{u}}^T \underline{C}\dot{\underline{u}}\end{aligned}$$

Affinché il sistema sia asintoticamente stabile è quindi necessario che la matrice di smorzamento sia definita positiva.

Il problema trasformato sarà allora:

$$(-\omega^2 \underline{\underline{M}} + j\omega \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{K}}) \underline{u}(\omega) = \underline{F}(\omega) \quad \underline{u}(\omega) = (-\omega^2 \underline{\underline{M}} + j\omega \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{K}})^{-1} \underline{F}(\omega) \quad (4.1)$$

intendendosi che l'inversione è praticamente solo un'espressione simbolica per indicare: fattorizzazione, passo avanti e passo indietro. Calcolato  $\underline{u}(\omega)$  si può quindi antitrasformarlo:  $\underline{u}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{u}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ . La stessa cosa si dovrà fare per il recupero degli sforzi e di ogni altra risposta di interesse. Tale antitrasformazione è eseguibile analiticamente solo per piccoli esercizi, ragion per cui è gioco forza effettuarla numericamente. Si vede allora che per risolvere numericamente e con una buona approssimazione l'integrale improprio di inversione, sono necessarie molte risoluzioni di sistemi lineari a coefficienti complessi, con costose rifattorizzazione della matrice del sistema, che varia ad ogni frequenza. Un possibile guadagno si ha solo in presenza di molte, ma veramente molte, forzanti. Si deve però provvedere una memoria sufficiente per la memorizzazione di un numero notevole di fattorizzazioni, anche migliaia, nel caso in cui le analisi su più forzanti non siano tutte effettuabili simultaneamente. Le linee risolutive su spiegate dovrebbe rendere possibile, almeno in linea di principio, giudicare la pratica applicabilità, o inapplicabilità, dell'uso dell'analisi in frequenza per lo studio diretto della risposta di sistemi meccanici di grandi dimensioni. Ricordiamo però l'anticipazione di un esteso uso di tale tecnica risolutiva per il calcolo di stabilità e risposte, sia deterministiche che causali, nella formulazione classica su basi ridotte dell'aeroelasticità classica.

Utilizzare una tecnica di riduzione significa, nel caso di un modello lineare come quello qui analizzato, andare alla ricerca di funzioni di forma globali con le quali è possibile rappresentare correttamente la soluzione del problema con una combinazione ottimale di relativamente pochi termini dello sviluppo (2.8) scelto per determinare il modello preciso di partenza. Stante l'importanza dei problemi menzionati si dovrebbe iniziare a intuire l'importanza della ricerca di basi di sviluppo ridotte che mantengano una adeguata precisione del modello matematico da esse ottenibile. In tale visione una metodologia spesso utilizzata, perché efficace in moltissimi casi, è quella basata sulla riduzione tramite modi propri di vibrare, o semplicemente modi propri. I modi propri vengono ottenuti risolvendo il problema omogeneo con condizioni al contorno omogenee e altro non sono che le autofunzioni, autovettori nella discretizzazione, associate alle frequenze proprie ottenute dagli autovalori associati alle soluzioni dell'equazione caratteristica del sistema. Il metodo di soluzione quindi consiste nel costruire un primo modello sufficientemente preciso utilizzando un numero, anche elevato, di semplici funzioni di forma, spesso a supporto locale come nel caso degli elementi finiti; su questo modello calcolare le autosoluzioni, autovalori e autovettori, del sistema omogeneo corrispondente; infine nell'utilizzare un numero relativamente piccolo di autovettori come funzioni di forma con cui riproiettare il modello su un ridotto insieme di gradi di libertà. Il metodo è praticamente simile alla tecnica utilizzata per ottenere per via analitica la soluzione di equazioni alle derivate parziali tramite separazione delle variabili, come si vedrà in alcuni esempi nel seguito. Il sistema ottenuto alla fine di questo procedimento risulta di dimensioni molto contenute, ma grazie alla elevata efficienza delle funzioni di forma modali proprie, permette di risolvere efficacemente numerosi casi non omogenei. È necessario quindi studiare le caratteristiche di convergenza per definire il numero minimo di modi da utilizzare per ottenere buone approssimazioni delle soluzioni "esatte", cioè assai prossime a quelle ottenibili del modello preciso di partenza.

Il problema strutturale omogeneo discretizzato è il seguente

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{u}} + \underline{\underline{K}} \underline{u} = 0. \quad (4.2)$$

la cui equazione modale è il seguente autoproblema generalizzato:

$$\omega^2 \underline{\underline{M}} \underline{u} = \underline{\underline{K}} \underline{u}. \quad (4.3) \quad \text{mod-autov}$$

I modi propri saranno allora gli autovettori associati agli autovalori  $\omega^2$ , soluzione del problema (4.3), i quali possono essere riuniti in una matrice  $\underline{U}$ . Possiamo allora passare nel nuovo sistema di coordinate generalizzate modali  $\underline{q}$  utilizzando la  $\underline{U}$  come matrice di trasformazione, per cui  $\underline{u} = \underline{U} \underline{q}$ . Gli spostamenti saranno pertanto espressi come

$$\underline{s} = \underline{N}_s(\underline{x}) \underline{U} \underline{q}, \quad (4.4) \quad \text{moda10}$$

dove  $\underline{N}_s(\underline{x}) \underline{U}$  sono le autofunzioni associate. Avendo già calcolato gli integrali relativi a  $\underline{N}_s$  e sue derivate possiamo procedere al calcolo delle nuove matrici di massa e di rigidità generalizzate

con le solite trasformazioni che mantengono invariato il lavoro virtuale equivalente delle forze. Pertanto, ricordando le proprietà di ortogonalità dei modi propri, otterremo le seguenti matrici diagonali:

$$\text{Diag} \{m_i\} = \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{U}}, \quad (4.5)$$

$$\text{Diag} \{k_i\} = \text{Diag} \{m_i \omega_{0_i}^2\} = \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}}. \quad (4.6)$$

Il nuovo sistema in coordinate modali, tenendo conto dell'eventuale presenza di uno smorzamento proporzionale del tipo (3.17), la cui matrice caratteristica  $\underline{\underline{C}} = \alpha \underline{\underline{M}} + \gamma \underline{\underline{K}}$  proiettata in coordinate modali risulta anch'essa diagonale,  $\text{Diag} \{c_i\} = \text{Diag} \{2m_i \xi_i \omega_{0_i}\} = \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{U}} = \alpha \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{U}} + \gamma \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}} = \alpha \text{Diag} \{m_i\} + \gamma \text{Diag} \{k_i\}$ , diviene il seguente

$$\begin{aligned} \text{Diag} \{m_i\} \ddot{\underline{q}} + \text{Diag} \{c_i\} \dot{\underline{q}} + \text{Diag} \{k_i\} \underline{q} &= \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{F}}(t) = \underline{\underline{Q}}_F \\ \text{Diag} \{m_i\} \ddot{\underline{q}} + \text{Diag} \{2m_i \xi_i \omega_{0_i}\} \dot{\underline{q}} + \text{Diag} \{m_i \omega_{0_i}^2\} \underline{q} &= \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{F}}(t) = \underline{\underline{Q}}_F. \end{aligned} \quad (4.7)$$

L'integrazione analitica di queste equazioni è assai facile per quanto riguarda il loro integrale generale, mentre l'integrale particolare dipende dalla specifica forzante da analizzare e non è sempre agevole ottenerlo analiticamente. È pertanto giocoforza utilizzare metodi numerici di integrazione. Fra i più usati vi sono l'integrazione numerica delle corrispondenti convoluzioni e l'integrazione diretta. Ambedue gli approcci sono comunque di facile e immediata applicazione. Dobbiamo solo notare che nel caso di integrazione diretta delle equazioni si può adottare qualunque metodo opportuno e di agevole uso. Infatti, in generale, non si pongono problemi di stabilità numerica, perché l'esigenza di una minima precisione che renda validi i risultati ottenibili garantisce sempre la stabilità. Dovrebbe pertanto risultare evidente che l'uso di metodi espliciti, anche di elevata precisione, diviene probabilmente l'approccio risolutivo più efficiente, qualunque sia la precisione desiderata. Non rimane quindi altro da fare che ricollegarsi alle più che sufficienti cognizioni acquisite nel/i corso/i di calcolo numerico. In relazione all'insieme delle autosoluzioni che generano le equazioni modali bisogna ricordare anche le seguenti relazioni, utili nel seguito:

$$\underline{\underline{M}} \underline{\underline{U}} \text{Diag} \{(2\xi_i^2 - 1)\omega_{0_i}^2\} - \underline{\underline{C}} \underline{\underline{U}} \text{Diag} \{\xi_i \omega_{0_i}\} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}} = 0 \quad (4.8)$$

$$\underline{\underline{M}} \underline{\underline{U}} \text{Diag} \{2\xi_i \omega_{0_i}\} - \underline{\underline{C}} \underline{\underline{U}} = 0 \quad (4.9)$$

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}} - \underline{\underline{M}} \underline{\underline{U}} \text{Diag} \{\omega_{0_i}^2\} = 0 \quad (4.10)$$

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}} - \underline{\underline{C}} \underline{\underline{U}} \text{Diag} \left\{ \frac{\omega_{0_i}}{2\xi_i} \right\} = 0 \quad (4.11)$$

Si noti che le prime due non sono altro che la parte reale e immaginaria di tutte le autosoluzioni smorzate, unificate in una sola rappresentazione matriciale tramite affiancamento (perché a destra?). La terza altro non è che il problema non smorzato equivalente, naturalmente ottenibile per smorzamento proporzionale, la quarta consegue dalla combinazione della terza con la seconda. Nonostante il rischio di apparire un po' ripetitivi è importante ricordare che, anche se noi vediamo i modi come vettori discreti, la (4.4) ci ricorda che a ciascuno di essi è associata una funzione di spostamento e quindi i modi sono autofunzioni, ancorché approssimate, del corrispondente problema omogeneo del continuo. La matrice di rigidezza sarà singolare tante volte quanti sono i gradi di libertà non vincolati, cioè tante volte quanti sono i moti rigidi del sistema, ossia quelli con autovalore associato nullo. I modi rigidi avranno pertanto rigidezze generalizzata nulle e saranno anche autovettori della sola matrice  $\underline{\underline{K}}$ . Si noti che i modi rigidi, così come tutti i modi/autovettori associati ad autovalori multipli, non sono necessariamente ortogonali a massa e rigidezze. Infatti, mentre per problemi simmetrici, del tipo (4.3), è garantito che ad autovalori multipli corrispondono autovettori multipli in pari numero, molteplicità algebrica sempre uguale a quella geometrica, non è affatto detto che tali autovettori siano ortogonali rispetto a massa e rigidezza, poiché una qualsiasi loro combinazione lineare sarà ancora un autovettore. Di fatto la dimostrazione delle relative proprietà di ortogonalità vale solo per autovalori distinti, lasciando indeterminati i valori di  $\underline{u}_i^T \underline{\underline{M}} \underline{u}_k$  e  $\underline{u}_i^T \underline{\underline{K}} \underline{u}_k$  per soluzioni multiple. Pertanto il calcolo numerico dei modi propri associati a autovalori multipli produce raramente soluzioni ortogonali in tali casi. Si può però imporre comunque l'ortogonalità delle autosoluzioni applicando a posteriori un procedimento di ortogonalizzazione al sottospazio corrispondente, Gram-Schmidt ad esempio. Pertanto

noi assumeremo comunque soddisfatta l'ortogonalità, rispetto a massa e rigidezza, di tutti i modi propri utilizzati.

La matrice delle funzioni di forma  $\underline{\underline{N}}_s$  idealmente dovrebbe rappresentare uno sviluppo in serie composto da infiniti termini (2.8). In realtà però la si tronca usando solo un numero assegnato di termini. Quanto più rapidamente la serie converge tanto minore sarà il numero di termini necessari per ottenere la soluzione con la dovuta precisione. È utile allora studiare nel dominio delle trasformate le caratteristiche di convergenza delle serie basate sui modi propri per una qualsiasi frequenza assegnata, in modo da poter stabilire quanti modi  $n$  sono sufficienti a raggiungere la convergenza per un modello ad  $N$  gradi di libertà di partenza. Il metodo è effettivamente efficiente se  $n \ll N$ ; in tal modo è possibile ridurre le dimensioni del modello della dinamica di un sistema continuo a ordini di grandezza più manipolabili, “ammortizzando” anche il costo computazionale relativo alla loro abbastanza costosa determinazione.

Seppur nel seguito di questa parte sulla risoluzione modale dei problemi di risposta ci atterremo a uno schema con la possibilità di diagonalizzazione simultanea di  $\underline{\underline{M}}$ ,  $\underline{\underline{C}}$  e  $\underline{\underline{K}}$ , rimarchiamo che ciò che conta nella riduzione modale non è tanto la diagonalizzazione ma l'ottenimento di un modello ridotto e sufficientemente preciso. In tale visione sappiamo che la presenza di uno smorzamento di tipo strutturale, pur producendo modi smorzati e complessi (nel senso dei numeri), non inficia generalmente la possibile bontà delle forme modali proprie reali ottenute con la soluzione di (4.3). È pertanto spesso possibile applicare la relativa condensazione modale  $\underline{u} = \underline{\underline{U}}\underline{q}$  a un'equazione del tipo (3.17), con  $\underline{\underline{C}}$  non necessariamente proporzionale, ottenendo:

$$\text{Diag} \{m_i\} \ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{q}} + \text{Diag} \{k_i\} \underline{q} = \underline{\underline{U}}^T \underline{F}(t) = \underline{Q}_F$$

con  $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{U}}$ . Tanto basta a rendere disponibile un modello preciso su cui calcolare una buona approssimazione delle autosoluzioni smorzate, seguite da possibili calcoli di risposte temporali ottenute con metodi di integrazione diretta. Il tutto con un'efficienza che, stante l'elevata riduzione dell'ordine del modello, sarà assai simile a quella di una piena diagonalizzazione. A conferma dell'importanza non tanto della diagonalizzazione ma di una buona condensazione modale notiamo che tale approccio rimane assai valido anche nel caso aeroelastico, in cui le forze aerodinamiche distruggono comunque ogni eventuale diagonalizzazione del solo modello elasto-meccanico. Un ulteriore esempio di tale modo di procedere lo troveremo nel seguito per il caso termoelastico pienamente accoppiato. Proseguiamo pertanto col dimostrare alcune proprietà di convergenza di modelli modali diagonali, con smorzamento proporzionale, fiduciosi di poter estrapolare i relativi risultati anche ai casi di mancata piena diagonalizzazione. Affrontiamo quindi le relative valutazioni concettuali ritenendo che, grazie alla “riduzione a un sistema algebrico” dell'analisi resa possibile dall'uso delle trasformate, sia più facile dimostrare le proprietà di convergenza in modo generale, anche a dispetto delle limitazioni operative che si troverebbero nell'applicare tale approccio a sistemi di relativamente grandi dimensioni, già richiamate precedentemente, che rendono tale metodologia di scarso interesse operativo nel caso generale di sistemi elasto-meccanici di grandi dimensioni. Chiaramente ci si dovrebbe assicurare che siano valide tutte le condizioni necessarie affinché la convergenza in frequenza garantisca anche quella nel tempo, condizioni che si possono assumere comunque garantite per una vasta gamma di applicazioni pratiche. Si noti che il fatto che ci limiteremo a formule associabili a un modello di smorzamento proporzionale è dovuto principalmente alla necessità di semplificazione della presentazione. Una formulazione più generale è comunque disponibile in altro materiale attinente il corso. Ciò che è importante è che le conclusioni ottenute sulla base di una tale limitazione rimangono sostanzialmente valide anche per altri modelli di smorzamento viscoso, purché associato a valori quantitativamente simili, quindi relativamente bassi, a quelli dello smorzamento strutturale. L'equazione (4.7) trasformata in frequenza  $s$  secondo Laplace diviene

$$\text{Diag} \{s^2 m_i + s 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2\} \underline{q}(s) = \underline{\underline{U}}^T \underline{F}(s). \quad (4.12)$$

Le coordinate generalizzate saranno quindi uguali a

$$\underline{q}(s) = \text{Diag} \left\{ \frac{1}{s^2 m_i + s 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2} \right\} \underline{\underline{U}}^T \underline{F}(s), \quad (4.13)$$

da cui per le coordinate originarie  $\underline{u}$  si ottiene

$$\begin{aligned}\underline{u}(s) &= \underline{U} \text{Diag} \left\{ \frac{1}{s^2 m_i + s \, 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2} \right\} \underline{U}^T \underline{F}(s) = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\underline{U}_i \underline{U}_i^T}{s^2 m_i + s \, 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2} \underline{F}(s).\end{aligned}\quad (4.14)$$

Anticipiamo subito che il termine  $\text{Diag} \left\{ \frac{1}{s^2 m_i + s \, 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2} \right\} \underline{U}^T \underline{F}(s)$ , o simili, comparirà anche negli sviluppi che seguiranno e ci dice che la trasformata della risposta è legata al prodotto della trasformata della risposta impulsiva (comprendere e verificare) di un oscillatore smorzato con quella delle forzanti. Tale fatto indica che la risposta impulsiva del sistema è data dalla combinazione delle risposte impulsive dei singoli modi, da cui consegue che la risposta nel dominio del tempo sarà imperniata su convoluzioni fra funzioni armoniche smorzate, le risposte impulsive, e le forzanti stesse.

L'ultima espressione ci dice che i termini della serie che compongono la soluzione, per ogni frequenza  $s$  assegnata, confinata a valori relativamente bassi a causa dell'assunto limitato contenuto in frequenza per le forzanti di nostro interesse, convergono come  $1/\omega_{0_i}^2$ . Quindi ci si può aspettare una convergenza relativamente rapida con un numero di termini  $n \ll N$ . Si rammenta infatti che  $\omega_{0_i}$  indica il fatto che  $\omega_0 = \omega_0(i)$ , ossia che la frequenza dei modi propri dipende da potenze dell'indice  $i$ ; per cui nella (4.14) i termini convergono almeno come  $1/\omega_0(i)^2$ . Inoltre, anche la forzante può contribuire ad accelerare la convergenza attraverso le forze generalizzate in forma modale,  $\underline{U}^T \underline{F}$ . Se i carichi applicati sono abbastanza regolari in termini di distribuzione spaziale, ovvero se non ci sono carichi modellabili come forze concentrate, le corrispondenti forze generalizzate tenderanno ad essere praticamente ortogonali ai modi ad alta frequenza, che sono invece caratterizzati da un elevato numero di onde nello spazio, e quindi non contribuiranno significativamente alla risposta.

Può essere di un qualche interesse analizzare la soluzione nel dominio del tempo corrispondente all'Eq. (4.14). A tale scopo notiamo che l'antitrasformata del vettore delle forze generalizzate  $\underline{Q}(t) = \underline{U}^T \underline{F}(s)$  darà semplicemente  $\underline{Q}(t) = \underline{U}^T \underline{F}(t)$ , mentre quella di  $\text{Diag} \left\{ \frac{1}{s^2 m_i + s \, 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2} \right\}$  corrisponderà alla risposta impulsiva dell'oscillatore armonico smorzato:  $m_i \ddot{h}_i + 2m_i \xi_i \omega_{0_i} \dot{h}_i + m_i \omega_{0_i}^2 h_i = \delta(t)$ . Ricordando poi che l'antitrasformata nel tempo del prodotto di trasformate è una convoluzione, avremo:

$$\underline{u}(t) = \underline{U} \int_0^t \text{Diag} \{h_i(t-\tau)\} \underline{U}^T \underline{F}(\tau) d\tau = \underline{U} \int_0^t \text{Diag} \{h_i(\tau)\} \underline{U}^T \underline{F}(t-\tau) d\tau \quad (4.15)$$

$$\underline{u}(t) = \underline{U} \int_0^t \text{Diag} \{h_i(t-\tau)\} \underline{Q}(\tau) d\tau = \underline{U} \int_0^t \text{Diag} \{h_i(\tau)\} \underline{Q}(t-\tau) d\tau \quad (4.16)$$

a cui corrisponderà la seguente esplicitazione in sommatoria;

$$\underline{u}(t) = \sum_{i=1}^N \underline{U}_i \int_0^t h_i(t-\tau) \underline{U}_i^T \underline{F}(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^N \underline{U}_i \int_0^t h_i(\tau) \underline{U}_i^T \underline{F}(t-\tau) d\tau \quad (4.17)$$

$$\underline{u}(t) = \sum_{i=1}^N \underline{U}_i \int_0^t h_i(t-\tau) Q_i(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^N \underline{U}_i \int_0^t h_i(\tau) Q_i(t-\tau) d\tau \quad (4.18)$$

La determinazione di  $h_i(t)$  potrà essere effettuata o tramite una semplice scorsa a una tabella di trasformate di Laplace o risolvendo l'equazione differenziale per  $h_i$  su riportata. Nel caso scegliessimo la seconda opzione basterà ricordare che il calcolo della risposta impulsiva<sup>2</sup>, si riduce alla

<sup>2</sup>Dalla meccanica sappiamo che una forza impulsiva è una sollecitazione del sistema di durata brevissima e di intensità tanto elevata da cancellare, per la sua durata, l'effetto di ogni altra forza regolare, quali quelle di smorzamento ed elastiche. Pertanto, siccome l'integrale su un tempo arbitrario assegnato di tutte le forze applicate a una massa deve eguagliarne la variazione della quantità di moto, ne consegue che, se l'integrazione è effettuata per la breve durata della forza impulsiva, essa sola contribuirà a detta variazione. Quindi, se si assume il sistema

soluzione della seguente equazione, omogenea con relative condizioni iniziali:

$$m\ddot{h} + 2m\xi\omega_0\dot{h} + m\omega_0^2 h = 0 \quad h(0) = 0 \quad \dot{h}(0) = \frac{1}{m} \quad (4.19)$$

soluzione che è data <sup>3</sup> da:

- $\xi_i < 1$ , smorzamento sub critico:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega t) \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (4.20)$$

- $\xi_i = 1$ , smorzamento critico:

$$h(t) = \frac{1}{m} t e^{-\omega_0 t} \quad (4.21)$$

- $\xi_i > 1$ , smorzamento super critico:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_0(\xi_1 - \xi_2)} (e^{\xi_1\omega_0 t} - e^{\xi_2\omega_0 t}) \quad \xi_1 = -\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \quad \xi_2 = -\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (4.22)$$

- moto rigido:

$$h(t) = \frac{1}{m} t \quad (4.23)$$

Focalizzando l'Eq. (4.15) e (4.16) sul nostro caso di maggior interesse,  $\xi_i < 1$ , esemplificando tramite la seconda espressione, possiamo scrivere:

$$\underline{u}(t) = \underline{U} \text{Diag} \left\{ \frac{1}{m_i \omega_{0_i} \sqrt{1 - \xi^2}} \right\} \int_0^t \text{Diag} \{ e^{-\xi_i \omega_i \tau} \sin(\omega_{0_i} \tau) \} \underline{U}^T \underline{F}(t - \tau) d\tau \quad (4.24)$$

$$\underline{u}(t) = \underline{U} \text{Diag} \left\{ \frac{1}{m_i \omega_{0_i} \sqrt{1 - \xi^2}} \right\} \int_0^t \text{Diag} \{ e^{-\xi_i \omega_i \tau} \sin(\omega_{0_i} \tau) \} \underline{Q}(t - \tau) d\tau \quad (4.25)$$

la cui esplicitazione in sommatoria dà:

$$\underline{u}(t) = \sum_{i=1}^N \underline{U}_i \frac{1}{m_i \omega_{0_i} \sqrt{1 - \xi^2}} \int_0^t e^{-\xi_i \omega_i \tau} \sin(\omega_{0_i} \tau) \underline{U}_i^T \underline{F}(t - \tau) d\tau \quad (4.26)$$

$$\underline{u}(t) = \sum_{i=1}^N \underline{U}_i \frac{1}{m_i \omega_{0_i} \sqrt{1 - \xi^2}} \int_0^t e^{-\xi_i \omega_i \tau} \sin(\omega_{0_i} \tau) Q_i(t - \tau) d\tau \quad (4.27)$$

espressioni che, a prima vista, propongono una convergenza modale del movimento del tipo di  $1/\omega_{0_i}$ , rispetto all' $1/\omega_{0_i}^2$  presentato dall'analisi in frequenza. Chiaramente le due cose sono assolutamente analoghe ma la formulazione nel tempo richiede una qualche considerazione ulteriore sull'andamento temporale della forzante per esplicitare ciò che in frequenza risultava in una più immediata conclusione. Infatti basterebbe pensare a un'approssimazione della forzante come costante a tratti per constatare come l'integrazione di  $e^{-\xi_i \omega_i \tau} \sin(\omega_{0_i} \tau)$  metta in gioco il mancante  $1/\omega_{0_i}$ . Più sofisticate approssimazioni polinomiali a tratti, spesso usate per un più preciso calcolo ricorsivo della convoluzione di cui sopra, non cambierebbero la situazione. Infatti le relative integrazioni per parti dei vari termini polinomiali porterebbero a una sommatoria in  $1/\omega_{0_i}^k$ , con  $k = 1, \dots$ , che non muterebbe il tipo di convergenza. Ancora una volta ricordiamo poi la possibilità di un ulteriore miglioramento della convergenza per distribuzioni regolari di  $\underline{F}$ , intrinsecamente prodotte dalle forze generalizzate  $Q_i = \underline{U}_i^T \underline{F}$ .

in quiete prima dell'applicazione di una forzante impulsiva,  $I$ , di durata  $-\epsilon < t < \epsilon$  e avente integrale unitario, sarà  $\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} I dt = mv(0^+)$ , senza produrre alcun apprezzabile spostamento di  $m$  a causa della brevità dell'impulso. Tanto basta per giustificare le condizioni iniziali da utilizzare per la determinazione della risposta impulsiva associata al nostro oscillatore smorzato, rimandando a più avanti per una generalizzazione che applicheremo alla determinazione delle condizioni iniziali, sia fisiche che modali.

<sup>3</sup>Sarà utile verificare se si è capaci di ricavarle, ricordando quanto imparato in analisi e dinamica dei sistemi aerospaziali.



## 4.1 METODO DI ACCELERAZIONE DEI MODI

È interessante ora analizzare la convergenza delle forze elastiche, le quali possono essere utilizzate come indicatori per verificare la convergenza dei gradienti degli spostamenti e quindi degli sforzi (o sollecitazioni). Utilizzando direttamente lo sviluppo modale ottenuto le forze elastiche si scrivono come

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{u}}(s) = \underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}} \text{Diag} \left\{ \frac{1}{s^2 m_i + s \, 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2} \right\} \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{F}}(s), \quad (4.28) \quad \text{recdir}$$

che rappresenta il cosiddetto *recupero diretto*. Ricordando che

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{U}} \text{Diag} \{ \omega_{0_i}^2 \}, \quad (4.29) \quad \text{recdir1}$$

si ottiene

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{u}}(s) = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{U}} \text{Diag} \left\{ \frac{\omega_{0_i}^2}{s^2 m_i + s \, 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2} \right\} \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{F}}(s). \quad (4.30) \quad \text{recdir2}$$

Constatando che asintoticamente i termini dello sviluppo delle forze elastiche tendono addirittura a uno, diventa evidente che, a differenza degli spostamenti, aggiungendo termini allo sviluppo delle forze elastiche la serie può convergere solo se si hanno distribuzioni di carico spazialmente regolari e senza variazioni eccessive che, come già menzionato, tendono a essere ortogonali ai modi di vibrare ad alta frequenza. Nel caso in cui siano presenti delle azioni esterne concentrate ci si aspettano quindi ulteriori problemi di convergenza. Inoltre, nell'espressione (4.30), compare anche un termine inerziale, rappresentato dalla matrice di massa  $\underline{\underline{M}}$ ; pertanto se la distribuzione di massa non è sufficientemente regolare (ovvero quando sono presenti delle sostanziose masse concentrate) si possono avere ulteriori problemi nella convergenza delle forze elastiche. La cosa non dovrebbe comunque sorprendere in quanto i modi propri sono la soluzione generale del problema omogeneo, quindi con struttura scarica per definizione. È allora evidente che la loro sovrapposizione non potrà che riprodurre tale condizione, anzi più precisi sono più non devono essere in grado di rappresentare le soluzioni con carichi applicati, che però si è visto che a volte sono i soli ad aiutare la convergenza, se regolari e non eccessivamente variabili spazialmente. Avvisando che un po' più avanti potremo meglio capire che tipo di convergenza si può instaurare tramite il recupero diretto, al momento si può quindi perlomeno affermare che l'approssimazione modale diretta certamente non rappresenta il modo più efficiente/efficace per ottenere una buona convergenza nel recupero degli sforzi. Conclusione che si collega al fatto che una cosa è garantire la convergenza della soluzione altra cosa quella delle sue derivate rispetto alle coordinate spaziali. Infatti la convergenza delle forze elastiche implica la convergenza degli sforzi, quindi delle deformazioni e quindi delle derivate spaziali della soluzione. Esiste un'altra possibilità che in realtà è stata spesso utilizzata in maniera naturale per ricavare le azioni interne in corsi precedenti. In Dinamica dei Sistemi Aerospaziali ad esempio lo studio della dinamica dei corpi veniva effettuato utilizzando l'ipotesi che i corpi in gioco fossero rigidi. I risultati ottenuti in tal modo venivano poi utilizzati per ricostruire, a posteriori, le sollecitazioni all'interno degli elementi, che a questo punto non erano più necessariamente considerati come corpi rigidi. Trattandosi per lo più di modelli riconducibili a schemi a travi le sollecitazioni venivano calcolate attraverso equazioni di equilibrio, eventualmente previo calcolo di reazioni vincolari, che nel caso di schemi iperstatici imponevano appunto di tenere in conto la deformabilità. È facile interpretare tale modo di procedere come un'approssimazione che utilizza un modello semplificato per il calcolo della distribuzione delle forze, concentrate e distribuite, dipendenti dal movimento, quelle d'inerzia in primis, procedendo poi, istante per istante, al recupero delle sollecitazioni imponendo correttamente il soddisfacimento sia dell'equilibrio che della congruenza al sistema originale con forze assegnate. Nell'ambito di un metodo matriciale raffinato di analisi della dinamica strutturale, quale il metodo ad elementi finiti con grigliatura fine o un qualsiasi sviluppo alla Ritz di ordine elevato, tale approccio corrisponde sostanzialmente alla soluzione della

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\ddot{u}}}_* - \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\dot{u}}}_*, \quad (4.31)$$

dove le accelerazioni e le velocità,  $\underline{\underline{\ddot{u}}}_*$  e  $\underline{\underline{\dot{u}}}_*$ , sono ottenute considerando il corpo come rigido. Nell'ambito di molti programmi di comune uso nell'industria aerospaziale tale modalità operativa va



spesso sotto il nome di *scarico inerziale*, *inertia relief* in inglese. Dal punto di vista modale questo corrisponde a calcolare le accelerazioni utilizzando i soli modi rigidi, che sono quelli a frequenza più bassa (in particolare nulla), per poi utilizzarle per recuperare gli sforzi che sollecitano la struttura, attraverso le equazioni di equilibrio, il più possibile esatte, del corpo deformabile. Possiamo quindi provare a generalizzare la stessa procedura utilizzando non più solo i modi rigidi ma anche un certo numero di modi deformabili, cioè le derivate temporali,  $\underline{\ddot{u}}_* = \underline{\underline{U}} \underline{\ddot{q}}$  e  $\underline{\dot{u}}_* = \underline{\underline{U}} \underline{\dot{q}}$ , relative alla soluzione  $\underline{u}_* = \underline{\underline{U}} \underline{q}$  della (4.7), scrivendo più in generale:

$$\underline{\underline{K}} \underline{u} = \underline{F} - \underline{\underline{M}} \underline{\ddot{u}}_* - \underline{\underline{C}} \underline{\dot{u}}_* = \underline{F} - \underline{\underline{M}} \underline{\underline{U}} \underline{\ddot{q}} - \underline{\underline{C}} \underline{\underline{U}} \underline{\dot{q}}, \quad (4.32)$$

accelmodigrezza

la cui corrispondente espressione in frequenza diviene

$$\underline{\underline{K}} \underline{u}(s) = \underline{F} - (s^2 \underline{\underline{M}} + s \underline{\underline{C}}) \underline{\underline{U}} \underline{q}(s) = \quad (4.33)$$

$$\underline{F}(s) - (s^2 \underline{\underline{M}} + s \underline{\underline{C}}) \underline{\underline{U}} \text{Diag} \left\{ \frac{1}{s^2 m_i + s 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2} \right\} \underline{\underline{U}}^T \underline{F}(s) = \quad (4.34)$$

$$\underline{F}(s) - \underline{\underline{M}} \underline{\underline{U}} \text{Diag} \left\{ \frac{s(s + 2\xi_i \omega_{0_i})}{s^2 m_i + s 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2} \right\} \underline{\underline{U}}^T \underline{F}(s), \quad (4.35)$$

Questa modalità viene di solito indicata come recupero degli sforzi attraverso l'*accelerazione dei modi*, mentre il calcolo diretto delle sollecitazioni, valido essenzialmente per schemi a travi come prima illustrato, viene spesso chiamato *somma diretta delle forze*, mutuandolo dalla traduzione della corrispondente dicitura inglese *direct summation of forces*. Con un po' di abuso di terminologia viene qui spesso usato il termine *modi di accelerazione* per indicare l'accelerazione dei modi. Tale abuso è giustificato dal fatto che, a causa del basso smorzamento, l'accelerazione dei modi è principalmente legata al termine  $\underline{\underline{M}} \underline{\underline{U}} \underline{\ddot{q}}$ , quindi a  $\underline{\underline{U}} \underline{\ddot{q}}$ , che sono appunto i modi di accelerazione. Come spesso accade una volta che si abusa di qualcosa anche nel nostro caso l'abuso notazionale potrà estendersi anche un po' oltre un suo uso giustificato. Una lettura non troppo grossolana potrà nondimeno permettere di rendere tale abuso sempre intelleggibile, perlomeno confinandolo nell'ambito del contesto d'uso. Dovrebbe quindi essere chiaro che se le forze dipendenti dal movimento sono principalmente quelle d'inerzia approssimate tramite movimenti rigidi *scarico inerziale*, *accelerazione dei modi*, *modi di accelerazione*, *somma diretta delle forze* sono tutti sinonimi. Ciò detto ritorniamo all'Eq. (4.33) e notiamo che in presenza di smorzamento il comportamento asintotico è del tipo  $1/\omega_{0_i}$ , di conseguenza la convergenza potrebbe apparire dubbia, mentre sarebbe buona, come  $1/\omega_{0_i}^2$ , senza smorzamento. In pratica per i valori usuali dello smorzamento strutturale, abbastanza bassi, poco cambia rispetto alla sua totale assenza. Infatti il peso relativo dei termini di smorzamento, pur abbassando l'ordine asintotico dello sviluppo, è poco significativo. Inoltre esiste sempre l'aiuto del comportamento asintotico, in diminuzione, delle forze generalizzate e la separazione delle frequenze proprie, che non è detto essere solo proporzionale a  $\omega_{0_i}$ .

Tuttavia, anche al limite di un comportamento asintotico come  $1/\omega_{0_i}$ , la convergenza potrebbe non essere rigorosamente puntuale ma palesarsi in altro modo. Tenendo conto dei commenti fatti una lettura attenta dell'Eq. (4.33) mostra che l'accelerazione dei modi combina la semplice soluzione statica, il primo termine  $\underline{F}(s)$  a destra, che recupera le condizioni al contorno naturali, con un termine che, essendo la sovrapposizione di termini associati a condizioni al contorno omogenee, non può che tendere a zero su tale contorno, servendo pertanto a garantire la convergenza nel resto della struttura. Si vede allora che la convergenza garantita dall'accelerazione dei modi è associata al corretto recupero delle condizioni naturali tramite la statica a cui si sovrappone la differenza della sola parte dinamica. Nonostante ciò nella pratica spesso anche il solo recupero diretto dà risultati soddisfacenti, che vanno oltre la possibile convergenza associata a distribuzioni regolari di carico. Ciò è dovuto al fatto che, come vedremo specificamente in un successivo esempio, la possibile convergenza del recupero diretto è del tipo associato alle serie di Fourier, cioè in media quadratica in mancanza di sufficiente regolarità della soluzione, con possibili oscillazioni di Gibbs. Su una discretizzazione, anche raffinata, non è sempre possibile verificare, anche tramite successivi raffinamenti della discretizzazione, se constatando empiricamente una convergenza nell'intorno di un punto essa sia in media o rigorosamente puntuale. Infatti per dimensionamenti e verifiche poco conta se un valore limite viene raggiunto in punto o molto vicino a esso. In generale si ha quindi sempre un beneficio nell'uso dell'accelerazione dei modi, anche in presenza di smorzamenti significativi e di altre importanti forze dipendenti dal movimento, e.g. aerodinamiche.

Per un'ulteriore, più diretta, verifica di quanto detto e per meglio comprendere il significato dei modi di accelerazione rappresentiamo specificamente lo spostamento come sovrapposizione di due termini  $\underline{u} = \underline{u}_{st} + \underline{u}_{din}$ : un termine di spostamento “statico”  $\underline{u}_{st}$  più uno spostamento “dinamico”  $\underline{u}_{din}$ . La componente statica viene calcolata annullando tutti i termini relativi alle forze dipendenti dal movimento, e.g. quelle d'inerzia e di smorzamento nel nostro caso, scrivendo quindi,  $\underline{K} \underline{u}_{st}(t) = \underline{F}(t)$ , che significa calcolare lo spostamento del sistema ipotizzando che la struttura si adegui istantaneamente all'applicazione di forze esterne, assegnate e variabili nel tempo, ossia che la sua dinamica sia talmente veloce rispetto a quella della forzante  $\underline{F}(t)$  da poter trascurare la dinamica del sistema rispetto a quella della forzante. Riscriviamo ora l'equazione della dinamica del sistema utilizzando questa rappresentazione dello spostamento

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}}_{st} + \underline{M} \ddot{\underline{u}}_{din} + \underline{C} \dot{\underline{u}}_{st} + \underline{C} \dot{\underline{u}}_{din} + \underline{K} \underline{u}_{st} + \underline{K} \underline{u}_{din} = \underline{F}(t). \quad (4.36)$$

Sostituendo in questa espressione la definizione di spostamento statico

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}}_{din} + \underline{C} \dot{\underline{u}}_{din} + \underline{K} \underline{u}_{din} = -\underline{M} \underline{K}^{-1} \ddot{\underline{F}}(t) - \underline{C} \underline{K}^{-1} \dot{\underline{F}}(t), \quad (4.37)$$

che trasformata secondo Laplace diventa

$$(s^2 \underline{M} + s \underline{C} + \underline{K}) \underline{u}_{din}(s) = -(s^2 \underline{M} + s \underline{C}) \underline{K}^{-1} \underline{F}(s). \quad (4.38)$$

Trasformando le equazioni in coordinate modali  $\underline{u}_{din}(s) = \underline{U} \underline{q}_{din}(s)$ , si potrà ottenere la componente dinamica dello spostamento modale come

$$\underline{q}_{din}(s) = -\text{Diag} \left\{ \frac{s(s + 2\xi_i \omega_{0_i})}{s^2 m_i + s 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2} \right\} \underline{U}^T \underline{M} \underline{K}^{-1} \underline{F}(s). \quad (4.39) \quad \text{posacc0}$$

Riportando il tutto in coordinate fisiche potremo allora scrivere lo spostamento  $\underline{u}(s)$  come

$$\underline{u}(s) = \left( \underline{K}^{-1} - \underline{U} \text{Diag} \left\{ \frac{s(s + 2\xi_i \omega_{0_i})}{s^2 m_i + s 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2} \right\} \underline{U}^T \underline{M} \underline{K}^{-1} \right) \underline{F}(s). \quad (4.40) \quad \text{posacc1}$$

È facile verificare che utilizzando le formule viste e le proprietà dei modi questa equazione è equivalente allo spostamento che si otterrebbe dalla (4.33) o, moltiplicandola per la matrice di rigidità, che si ha lo stesso recupero delle forze elastiche. Utilizzare i modi di accelerazione corrisponde quindi ad approssimare le dinamiche veloci del sistema in maniera “statica”, ossia come se fossero in grado di adeguarsi istantaneamente alle variazioni di condizioni di carico sul sistema. In questo modo, considerando il fatto che in pratica non si usa mai un numero infinito di termini (modi) bensì un numero limitato, risulta chiaro come si ottengano risultati migliori attraverso la tecnica di accelerazione dei modi, di quanto si otterrebbe trascurando semplicemente le dinamiche veloci, ossia attraverso il recupero diretto. Tale considerazione è assolutamente generale e corrisponde, appunto, a una residualizzazione statica delle dinamiche veloci, alternativa al loro troncamento, che invece non recupera la statica.

Sapendo che  $\underline{U}^T \underline{K} \underline{U} = \text{Diag} \{m_i \omega_{0_i}^2\}$ , invertendo le matrici si verifica facilmente che<sup>4</sup>

$$\underline{K}^{-1} = \underline{U} \text{Diag} \left\{ \frac{1}{m_i \omega_{0_i}^2} \right\} \underline{U}^T, \quad (4.41) \quad \text{kmen1}$$

Dalla (4.40), sostituendo l'espressione (4.41) si ottiene la seguente espressione per lo spostamento recuperato con i modi di accelerazione

$$\begin{aligned} \underline{u}(s) &= \underline{u}_{st}(s) - \underline{U} \text{Diag} \left\{ \frac{s(s + 2\xi_i \omega_{0_i})}{s^2 m_i + s 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2} \right\} \underline{U}^T \underline{M} \underline{U} \text{Diag} \left\{ \frac{1}{m_i \omega_{0_i}^2} \right\} \underline{U}^T \underline{F}(s) \\ &= \underline{u}_{st} - \underline{U} \text{Diag} \left\{ \frac{s(s + 2\xi_i \omega_{0_i})}{\omega_{0_i}^2 (s^2 m_i + s 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2)} \right\} \underline{U}^T \underline{F}(s), \end{aligned} \quad (4.42) \quad \text{posacc2}$$

---

<sup>4</sup>  $\underline{U}^T \underline{K} \underline{U} = \text{Diag} \{m_i \omega_{0_i}^2\}$  quindi  $\underline{U}^{-1} \underline{K}^{-1} \underline{U}^{-T} = \text{Diag} \{1/m_i \omega_{0_i}^2\}$  da cui  $\underline{K}^{-1} = \underline{U} \text{Diag} \{1/m_i \omega_{0_i}^2\} \underline{U}^T$  cioè la (4.41).

che dimostra come anche lo spostamento converge molto più rapidamente con i modi di accelerazione ( $1/\omega_{0_i}^3$ ) rispetto al recupero diretto ( $1/\omega_{0_i}^2$ ). Valgono però i commenti già fatti per il recupero delle forze elastiche, i.e. azioni interne e sforzi, per cui in pratica la convergenza è sostanzialmente del tipo  $1/\omega_{0_i}^4$ , o superiore. Si noti che una dimostrazione alternativa poteva essere ottenuta ricorrendo alla trasposta di (4.29):  $\underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{K}} = \text{Diag} \{ \omega_{0_i}^2 \} \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{M}}$ , che permette di scrivere  $\underline{\underline{U}}^T = \text{Diag} \{ \omega_{0_i}^2 \} \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{K}}^{-1}$  da cui si può ottenere l'espressione  $\underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{K}}^{-1} = \text{Diag} \{ 1/\omega_{0_i}^2 \} \underline{\underline{U}}^T$  che sostituita nella (4.39) porta direttamente alla (4.42).

Convien quindi utilizzare l'analisi modale per la risoluzione delle equazioni differenziali alle derivate parziali combinata con il metodo dell'accelerazione dei modi quando non c'è un'abbastanza soddisfacente convergenza spaziale degli sforzi, in senso generalizzato, col recupero diretto e/o si vuole una convergenza più veloce di quella ottenibile col recupero diretto degli spostamenti. Va però tenuto anche in considerazione che il costo della soluzione del sistema di equazioni lineari relativo allo schema molto preciso usato per i modi di accelerazione, da effettuarsi ad ogni istante di tempo di interesse, può risultare tutt'altro che trascurabile. Infatti, anche tenendo conto che si può effettuare la relativa fattorizzazione una sola volta, ci si trova spesso nella condizione di risolvere migliaia, a volte decine di migliaia e più, condizioni di carico.

Come utile esercizio si potrà verificare che dalla (4.33) si può ricavare la (4.42) e viceversa, verificando così l'equivalenza dei due modi di presentare i modi di accelerazione.

Rileviamo infine che se si avessero combinazioni di sforzi e/o spostamenti fra le uscite del sistema il recupero diretto produrrebbe un sistema strettamento proprio mentre il recupero coi modi di accelerazione risulterebbe in un sistema semplicemente proprio. Inoltre, prima di procedere e se già non è avvenuto, si dovrebbe essere insinuato, lo insuiamo ora comunque, il dubbio sulla risolubilità del sistema di equazioni lineari per una struttura libera, quali sono quelle aerospaziali, cercando di dare una risposta adeguata.

## 4.2 TRONCAMENTO E RESIDUALIZZAZIONE DINAMICA

È ora utile interpretare la semplice risposta modale e l'accelerazione dei modi in una visione unificata della riduzione dell'ordine di un modello sulla base delle sue componenti spettrali (modali) lente e veloci. In tale approccio si trasforma tutto il sistema portandolo in uno spazio in cui sia possibile distinguere le sue componenti lente, associate agli autovalori, alias frequenze proprie, lenti, alias di module minore, da quelle veloci, ossia tutte le rimanenti di modulo più alto. Vedremo nel seguito come tale ragionamento, affatto generale, si possa applicare a qualsiasi sistema lineare tempo invariante, anche non diagonalizzabile, limitandoci per ora alla sua applicazione all'analisi strutturale modale con bassi smorzamenti proporzionali. Supponendo quindi di aver calcolato tutti i modi li partizioniamo nei relativi sottospazi lento e veloce, scrivendo  $\underline{\underline{U}} = [\underline{\underline{U}}_l \quad \underline{\underline{U}}_v]$  e notando anche che negli sviluppi modali precedenti  $\underline{\underline{U}}$  non era altro che  $\underline{\underline{U}}_l$ . Possiamo così scrivere:

$$\underline{\underline{q}}_l(s) = \text{Diag} \left\{ \frac{1}{s^2 m_i + s \, 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2} \right\}_l \underline{\underline{U}}_l^T \underline{\underline{F}}(s), \quad (4.43)$$

$$\underline{\underline{q}}_v(s) = \text{Diag} \left\{ \frac{1}{s^2 m_i + s \, 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2} \right\}_v \underline{\underline{U}}_v^T \underline{\underline{F}}(s), \quad (4.44)$$

recuperando poi gli spostamenti fisici:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{u}}(s) &= \underline{\underline{U}}_l \text{Diag} \left\{ \frac{1}{s^2 m_i + s \, 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2} \right\}_l \underline{\underline{U}}_l^T \underline{\underline{F}}(s) + \\ &\quad \underline{\underline{U}}_v \text{Diag} \left\{ \frac{1}{s^2 m_i + s \, 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2} \right\}_v \underline{\underline{U}}_v^T \underline{\underline{F}}(s) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Chiaramente, non essendoci alcuna approssimazione ma solo il recupero di una soluzione ottenuta, senza approssimazioni, in un altro spazio, la soluzione così ottenuta non può che essere, a parte i diversi errori numerici, la stessa di quella calcolabile per integrazione diretta. Una soluzione

approssimata si può allora ottenere trascurando la parte veloce, ottenendo così quanto già visto per il recupero modale senza accelerazione dei modi, coi relativi problemi di convergenza sulle sollecitazioni-sforzi. Alternativamente possiamo pensare di procedere non al troncamento ma alla residualizzazione della parte veloce, intendendo con tale termine il considerare solo la sua parte statica:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{u}}(s) &= \underline{\underline{U}}_l \text{Diag} \left\{ \frac{1}{s^2 m_i + s \, 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2} \right\}_l \underline{\underline{U}}_l^T \underline{\mathbf{F}}(s) + \\ &\quad \underline{\underline{U}}_v \text{Diag} \left\{ \frac{1}{m_i \omega_{0_i}^2} \right\}_v \underline{\underline{U}}_v^T \underline{\mathbf{F}}(s)\end{aligned}\quad (4.46)$$

Sommando e sottraendo la parte statica lenta abbiamo:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{u}}(s) &= \underline{\underline{U}}_l \text{Diag} \left\{ \frac{1}{s^2 m_i + s \, 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2} - \frac{1}{m_i \omega_{0_i}^2} \right\}_l \underline{\underline{U}}_l^T \underline{\mathbf{F}}(s) + \\ &\quad \underline{\underline{U}} \text{Diag} \left\{ \frac{1}{m_i \omega_{0_i}^2} \right\} \underline{\underline{U}}^T \underline{\mathbf{F}}(s)\end{aligned}\quad (4.47)$$

Proseguendo coi calcoli e riconoscendo nel secondo termine la più volte vista espressione dell'inversa di  $\underline{\underline{K}}$  in termini modali, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{u}}(s) &= \underline{\underline{U}}_l \text{Diag} \left\{ \frac{1}{s^2 m_i + s \, 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2} - \frac{1}{m_i \omega_{0_i}^2} \right\}_l \underline{\underline{U}}_l^T \underline{\mathbf{F}}(s) + \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{\mathbf{F}}(s) \\ &= - \underline{\underline{U}}_l \text{Diag} \left\{ \frac{s(s + 2\xi_i \omega_{0_i})}{\omega_{0_i}^2 (s^2 m_i + s \, 2m_i \xi_i \omega_{0_i} + m_i \omega_{0_i}^2)} \right\}_l \underline{\underline{U}}_l^T \underline{\mathbf{F}}(s) + \underline{\mathbf{u}}_{st}\end{aligned}\quad (4.48)$$

toccofinale

ossia quanto già visto con l'utilizzo dell'accelerazione dei modi. Va però notato che nel caso di modelli di grandi(ssime) dimensioni la coincidenza dell'accelerazione dei modi con la residualizzazione statica della parte veloce non si tramuta in una possibile intercambiabilità operativa. Infatti per tali sistemi, nonostante la potenza di calcolo oggi disponibile, è ancora praticamente impossibile calcolare tutti i modi, come richiederebbe l'Eq. (4.46), mentre risulta praticabile il calcolo anche di una relativamente estesa parte lenta e la soluzione ripetuta delle equazioni lineari per tutti gli istanti di tempo di interesse. Infatti tale soluzione non necessita altro che una fattorizzazione di  $\underline{\underline{K}}$ , già disponibile, come vedremo fra poco, dal calcolo della base lenta, seguita da ripetuti passi avanti-indietro. Ciò nonostante la lettura dell'accelerazione dei modi come residualizzazione è concettualmente e fisicamente assai utile, anche in vista della già citata possibile estensione dei relativi concetti a generici sistemi lineari tempo invarianti. Riprendendo la prima parte della (4.48) notiamo che si può riscrivere nel modo seguente:

$$\underline{\mathbf{u}}(s) = \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{\mathbf{F}}(s) + \underline{\underline{U}}_l \left( \underline{\mathbf{q}}_l(s) - \text{Diag} \left\{ \frac{1}{m_i \omega_{0_i}^2} \right\}_l \underline{\underline{U}}_l^T \underline{\mathbf{F}}(s) \right) \quad (4.49)$$

dove si riconosce che  $\text{Diag} \left\{ \frac{1}{m_i \omega_{0_i}^2} \right\}_l \underline{\underline{U}}_l^T \underline{\mathbf{F}}(s) = \text{Diag} \{k_i\}_l^{-1} \underline{\mathbf{Q}}_l(s)$ , espressione che è facilmente riportabile nel dominio del tempo come:

$$\underline{\mathbf{u}}(t) = \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{\mathbf{F}}(t) + \underline{\underline{U}}_l \left( \underline{\mathbf{q}}_l(t) - \text{Diag} \left\{ \frac{1}{m_i \omega_{0_i}^2} \right\}_l \underline{\underline{U}}_l^T \underline{\mathbf{F}}(t) \right) \quad (4.50)$$

$$= \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{\mathbf{F}}(t) + \underline{\underline{U}}_l \left( \underline{\mathbf{q}}_l(t) - \text{Diag} \left\{ \frac{1}{k_i} \right\}_l \underline{\mathbf{Q}}_l(t) \right) \quad (4.51)$$

L'equazione di cui sopra ben mostra come i modi di accelerazione portano al recupero modale dello spostamento,  $\underline{\underline{U}}_l \underline{\mathbf{q}}_l(t)$ , più il recupero statico totale, lento più veloce,  $\underline{\underline{K}}^{-1} \underline{\mathbf{F}}(t)$ , meno il recupero statico modale,  $\text{Diag} \{k_i\}_l^{-1} \underline{\mathbf{Q}}_l(t)$ , essendo lo stesso già contenuto nel recupero statico totale. Oltre che essere significativa dal punto fisico l'equazione (4.51) è quella più usata praticamente, al posto della (4.32), sia perchè meno onerosa computazionalmente sia perchè evita l'utilizzo della  $\underline{\underline{C}}$ , permettendo così un più facile uso dell'accelerazione dei modi, pur di assumere la diagonalizzabilità

di  $\underline{\underline{C}}$ , anche senza che sia proporzionale, cosa che abbiamo dimostrato essere plausibile per piccoli smorzamenti.

Un modo alternativo per ottenere la (4.51), utile sia come ulteriore chiarificazione che come esercizio di manipolazione matriciale, consiste nell'utilizzare la ben nota  $\underline{\underline{K}}^{-1} = \underline{\underline{U}} \text{Diag}\{1/k_i\} \underline{\underline{U}}^T$  direttamente nella (4.32), riscrivendola nella forma:

$$\underline{u} = \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{F} - \underline{\underline{K}}^{-1} (\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{u}}_* - \underline{\underline{C}} \dot{\underline{u}}_*) = \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{F} - [\underline{\underline{U}}_l \quad \underline{\underline{U}}_v] \text{Diag}\{1/k_i\} \begin{bmatrix} \underline{\underline{U}}_l^T \\ \underline{\underline{U}}_v^T \end{bmatrix} (\underline{\underline{M}} \underline{\underline{U}}_l \ddot{\underline{q}}_l + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{U}}_l \dot{\underline{q}}_l) \quad (4.52)$$

ovvero, ricordando la proprietà di ortogonalità dei modi rispetto alla massa e assumendo la diagonalizzabilità modale di  $\underline{\underline{C}}$ :

$$\underline{u} = \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{F} - [\underline{\underline{U}}_l \quad \underline{\underline{U}}_v] \begin{bmatrix} \text{Diag}\{1/k_i\}_l & 0 \\ 0 & \text{Diag}\{1/k_i\}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Diag}\{m_i\}_l \ddot{\underline{q}}_l + \text{Diag}\{c_i\}_l \dot{\underline{q}}_l \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

o anche più semplicemente:

$$\underline{u} = \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{F} - \underline{\underline{U}}_l \text{Diag}\{1/k_i\}_l (\text{Diag}\{m_i\}_l \ddot{\underline{q}}_l + \text{Diag}\{c_i\}_l \dot{\underline{q}}_l) \quad (4.54)$$

Dovrebbe quindi essere facile notare che ricavando il termine  $(\text{Diag}\{m_i\}_l \ddot{\underline{q}}_l + \text{Diag}\{c_i\}_l \dot{\underline{q}}_l) = (\underline{Q}_l - \text{Diag}\{k_i\}_l \underline{q}_l)$  dall'equazione modale  $\text{Diag}\{m_i\}_l \ddot{\underline{q}}_l + \text{Diag}\{c_i\}_l \dot{\underline{q}}_l + \text{Diag}\{k_i\}_l \underline{q}_l = \underline{Q}_l$  e sostituendolo nella formula precedente si ha ancora la (4.51).

### 4.3 TRATTAMENTO DEI MOTI RIGIDI

Il recupero degli spostamenti attraverso il metodo dei modi di accelerazione, ossia attraverso l'equazione (4.33), o (4.40), richiede l'inversione della matrice di rigidezza  $\underline{\underline{K}}$ . Se la struttura non è vincolata almeno isostaticamente, assieme ai modi di deformazione della struttura saranno presenti alcuni modi rigidi. In questo caso la matrice  $\underline{\underline{K}}$  sarà singolare tante volte quanti sono i gradi di libertà rigidi, che permettono cioè movimenti che non ingenerano sforzi per i quali, detto  $\underline{u}_r$  un generico movimento rigido, sarà  $\underline{\underline{K}} \underline{u}_r = 0$ . Per risolvere questo problema si può ricorrere all'uso di un vincolo di tipo isostatico con cui bloccare la struttura senza alterare la soluzione del problema elastico. Questo è possibile se il carico con cui la struttura è sollecitata è autoequilibrato, e cioè tale per cui le reazioni vincolari siano nulle per un qualunque sistema di vincoli isostatici. Per ottenere una sollecitazione autoequilibrata si dovranno applicare alla struttura le forze d'inerzia dovute alle accelerazioni dei modi rigidi, che andranno quindi sempre inclusi nella base modale ridotta. Un'ulteriore problema riguarda il calcolo degli sforzi, che nei modelli ad elementi finiti si ottengono a partire dagli spostamenti. Per un sistema libero gli spostamenti saranno composti da una componente di spostamento rigido più una parte dovuta alla deformazione. Gli sforzi interni però non dipendono dal movimento rigido e saranno quindi, per carichi autoequilibrati, sempre indipendenti dalla condizione di vincolo isostatico imposta per impedire i movimenti rigidi.<sup>5</sup> Per esplicitare/evidenziare le componenti rigide e deformabili dei modi scriviamo:

$$\underline{u} = \underline{\underline{U}} \underline{q} = [\underline{\underline{U}}_r \quad \underline{\underline{U}}_d] \begin{Bmatrix} \underline{q}_r \\ \underline{q}_d \end{Bmatrix} \quad (4.55)$$

proiettando poi le equazioni originali della risposta sul sottospazio dei soli modi rigidi

$$\underline{\underline{U}}_r^T \underline{\underline{K}} \underline{u} = \underline{\underline{U}}_r^T \underline{F} - \underline{\underline{U}}_r^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{U}}_r \ddot{\underline{q}}_r - \underline{\underline{U}}_r^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{U}}_d \ddot{\underline{q}}_d - \underline{\underline{U}}_r^T \underline{\underline{C}} \dot{\underline{u}} \quad (4.56)$$

Sfruttando la proprietà di ortogonalità dei modi rispetto alla matrice di massa possiamo dire che  $\underline{\underline{U}}_r^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{U}}_d \ddot{\underline{q}}_d = 0$  e, essendo identicamente  $\underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}}_r = 0$ , per definizione, e  $\underline{\underline{C}} \underline{\underline{U}}_r = 0$  perché la matrice di

<sup>5</sup>Per un utile approfondimento sulla soluzione statica di strutture libere e autoequilibrate, approfondimento che sarà comunque fatto in aeroelasticità, si veda il seguente: Tutorial on Attached-Mean Axes and Their Use in the Calculation of Deformable Static and Damped-Undamped Vibration Modes of a Free-Free Structure, liberamente ottenibile al seguente collegamento: [www.asdjournals.org](http://www.asdjournals.org).

smorzamento strutturale  $\underline{\underline{C}}$  gode di proprietà analoghe alla  $\underline{\underline{K}}$ , sarà anche  $\underline{\underline{U}}_r^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{u}} = 0$  e  $\underline{\underline{U}}_r^T \underline{\underline{C}} \dot{\underline{\underline{u}}} = 0$ , ottenendo quindi

$$0 = \underline{\underline{U}}_r^T \underline{\underline{F}} - \text{Diag} \{m_i\} \ddot{\underline{\underline{q}}}_r, \quad (4.57)$$

$$\ddot{\underline{\underline{q}}}_r = \text{Diag} \left\{ \frac{1}{m_i} \right\} \underline{\underline{U}}_r^T \underline{\underline{F}}. \quad (4.58)$$

L'equazione qui sopra altro non è che l'equazione dei modi rigidi che, come abbiamo detto, deve essere sempre inclusa nel sistema ridotto e garantisce che i carichi, compresi naturalmente quelli d'inerzia e quelli interni dovuti allo smorzamento, sono sempre autoequilibrati. Si vede quindi che, come già indicato, è possibile utilizzare i modi di accelerazione anche per strutture libere. Si ricorda che la scrittura delle forme modali rigide è facilmente ottenibile partendo dalla conoscenza dei movimenti rigidi permessi alla struttura in analisi. Inoltre la, sempre possibile, separazione e diagonalizzazione dei modi rigidi di una struttura libera implica che gli stessi siano traslazioni e rotazioni attorno a assi baricentrici principali d'inerzia, così che le relative masse generalizzate avranno i valori della massa totale e dei momenti principali d'inerzia della struttura se i modi di traslazione sono normalizzati a spostamento unitario mentre i modi di rotazione sono normalizzati a rotazione unitaria. Attenzione però che, essendo modi multipli per autovalori nulli multipli, i metodi numerici di calcolo producono generalmente combinazioni dei modi di pura traslazione e rotazione, con le relative masse generalizzate dipendenti dalla normalizzazione adottata. Ragion per cui risulta spesso difficile collegarle con immediatezza ai valori fisici delle inerzie del corpo, se non provvedendo a posteriori all'eventuale imposizione delle ortogonalità modali di massa mancanti ai modi rigidi resi disponibili dal calcolo, accompagnandola anche con le su menzionate normalizzazioni.

## 4.4 MOVIMENTI IMPOSTI

La trattazione del caso in cui le forzanti siano associate, oltre che all'applicazione di forze date, anche all'imposizione del movimento di una o più parti della struttura, si veda il commento generale già fatto sui problemi misti diretti-inversi, non modifica di molto quanto già detto. La verifica di tale asserzione è banale una volta che si partizioni il problema, ossia le matrici e i vettori a esso associati, nelle relative parti libere,  $l$ , e vincolate-imposte  $v$ :

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{ll} & \underline{\underline{M}}_{lv} \\ \underline{\underline{M}}_{vl} & \underline{\underline{M}}_{vv} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{\underline{u}}}_l \\ \ddot{\underline{\underline{u}}}_v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{C}}_{ll} & \underline{\underline{C}}_{lv} \\ \underline{\underline{C}}_{vl} & \underline{\underline{C}}_{vv} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\underline{\underline{u}}}_l \\ \dot{\underline{\underline{u}}}_v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{ll} & \underline{\underline{K}}_{lv} \\ \underline{\underline{K}}_{vl} & \underline{\underline{K}}_{vv} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\underline{u}}_l \\ \underline{\underline{u}}_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{F}}_l \\ (\underline{\underline{F}}_v + \underline{\underline{R}}_v) \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

essendo  $\underline{\underline{R}}_v$  le forze, incognite, necessarie per imporre  $\underline{\underline{u}}_v$  e/o le sue derivate. È facile vedere come riscrivendo la prima partizione per righe dell'equazione precedente nel seguente modo

$$\underline{\underline{M}}_{ll} \ddot{\underline{\underline{u}}}_l + \underline{\underline{C}}_{ll} \dot{\underline{\underline{u}}}_l + \underline{\underline{K}}_{ll} \underline{\underline{u}}_l = \underline{\underline{F}}_l - \underline{\underline{M}}_{lv} \ddot{\underline{\underline{u}}}_v - \underline{\underline{C}}_{lv} \dot{\underline{\underline{u}}}_v - \underline{\underline{K}}_{lv} \underline{\underline{u}}_v \quad (4.60)$$

ci si riconduce al problema standard, con forze eccitanti che sono la combinazione di quelle applicate e di quelle d'inerzia-smorzanti-elastiche dovute ai movimenti imposti  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_l - \underline{\underline{M}}_{lv} \ddot{\underline{\underline{u}}}_v - \underline{\underline{C}}_{lv} \dot{\underline{\underline{u}}}_v - \underline{\underline{K}}_{lv} \underline{\underline{u}}_v$ . Risolto tale problema, dalla seconda partizione per righe, si ricavano le forze necessarie a imporre i movimenti desiderati con la seguente.

$$\underline{\underline{R}}_v = \underline{\underline{M}}_{vl} \ddot{\underline{\underline{u}}}_l + \underline{\underline{M}}_{vv} \ddot{\underline{\underline{u}}}_v + \underline{\underline{C}}_{vl} \dot{\underline{\underline{u}}}_l + \underline{\underline{C}}_{vv} \dot{\underline{\underline{u}}}_v + \underline{\underline{K}}_{vl} \underline{\underline{u}}_l + \underline{\underline{K}}_{vv} \underline{\underline{u}}_v - \underline{\underline{F}}_v \quad (4.61)$$

Poiché il problema del calcolo della risposta rimane formalmente identico a quello già trattato con solo forzanti assegnate, concettualmente nulla cambia dal punto di vista della sua soluzione per via modale. È però evidente che i modi da utilizzare rimangono gli stessi solo se si cambia la legge temporale di  $\underline{\underline{F}}$  mantenendo invariate le parti della struttura a cui si impone il movimento, mentre vanno ricalcolati per ogni cambiamento delle parti a movimento imposto. Pertanto, essendo il costo di calcolo dei modi affatto trascurabile, si impone di prestare una particolare attenzione al rapporto costi-benefici rispetto al calcolo della risposta per integrazione numerica diretta delle equazioni associate alla partizione dei movimenti delle parti libere.

## 4.5 CONDIZIONI INIZIALI

Assegnate delle condizioni iniziali su spostamenti e velocità espresse in coordinate fisiche,  $\underline{u}_0$  e  $\dot{\underline{u}}_0$ , è necessario determinare come tali condizioni si trasferiscono alle coordinate modali. Come sappiamo è possibile scrivere che

$$\underline{u}_0 = \underline{\underline{U}} \underline{q}_0. \quad (4.62) \quad \text{cond-ini}$$

Questa relazione non è in generale invertibile perché la matrice  $\underline{\underline{U}}$  è una matrice rettangolare (sappiamo infatti che spesso utilizziamo le coordinate modali  $\underline{q}$  per ridurre l'ordine del sistema così che il loro numero è in generale molto minore del numero di coordinate fisiche  $\underline{u}$ ). Se interpretiamo quindi la (4.62) come un sistema di equazioni lineari esso risulterà un sistema sovradeterminato per il quale non esiste in generale una sola soluzione. Valutiamo pertanto alcune ragionevoli possibilità di soluzione, cercando di capire il modo più appropriato per ottenere una soluzione non solo formale ma fisicamente consistente del problema postoci.

### 4.5.1 Condizioni iniziali come problema ai minimi quadrati

Una possibile soluzione può essere determinata utilizzando il metodo dei minimi quadrati. Data una soluzione del problema  $\underline{q}_0$ , l'equazione (4.62) non sarà esattamente rispettata per cui ci sarà un residuo  $\underline{\varepsilon}$  pari a

$$\underline{u}_0 - \underline{\underline{U}} \underline{q}_0 = \underline{\varepsilon}(\underline{q}_0). \quad (4.63)$$

La soluzione ai minimi quadrati si ottiene attraverso la ricerca del minimo del funzionale

$$E(\underline{q}_0) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}(\underline{q}_0)^T \underline{\varepsilon}(\underline{q}_0) = \frac{1}{2} \left( \underline{u}_0^T - \underline{q}_0^T \underline{\underline{U}}^T \right) \left( \underline{u}_0 - \underline{\underline{U}} \underline{q}_0 \right), \quad (4.64)$$

che corrisponde alla condizione

$$\frac{\partial E}{\partial \underline{q}_0} = -\underline{\underline{U}}^T \underline{u}_0 + \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{U}} \underline{q}_0 = 0. \quad (4.65)$$

Le condizioni iniziali ottenute minimizzando il modulo al quadrato del residuo sono quindi pari a

$$\underline{q}_0 = \left( \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{U}} \right)^{-1} \underline{\underline{U}}^T \underline{u}_0. \quad (4.66)$$

Un'altra possibile soluzione, che per mantenere il funzionale definito positivo è valida però solo per strutture vincolate, si può ottenere cercando di minimizzare l'energia elastica residua, pari a

$$E_e(\underline{q}_0) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}(\underline{q}_0)^T \underline{\underline{K}} \underline{\varepsilon}(\underline{q}_0). \quad (4.67)$$

Utilizzando la medesima procedura su questo nuovo funzionale, si ottiene il seguente risultato per le condizioni iniziali

$$\underline{q}_0 = \left( \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}} \right)^{-1} \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{K}} \underline{u}_0 = \text{Diag} \left\{ \frac{1}{m_i \omega_{0_i}^2} \right\} \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{K}} \underline{u}_0. \quad (4.68)$$

che, a causa della presenza di possibili frequenze proprie nulle al denominatore, conferma l'applicabilità dell'idea al solo caso di strutture non libere. Si può però verificare che trasponendo la (4.29) e ricordando che le matrici di rigidezza e di massa sono simmetriche, si avrà:

$$\underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{K}} = \text{Diag} \{ \omega_{0_i}^2 \} \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{M}}, \quad (4.69)$$

che permetterà di scrivere:

$$\underline{q}_0 = \text{Diag} \left\{ \frac{1}{m_i} \right\} \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{M}} \underline{u}_0. \quad (4.70) \quad \text{eq-proj-q}$$



È facile constatare che tale risultato annulla la singolarità, generando una trasformazione di validità generale. Esso corrispondere a utilizzare direttamente  $\underline{\underline{M}}$  come pesatura dell'errore di posizione, facendo però perdere il significato fisico associato alla corrispondente minimizzazione. Per le velocità iniziali si è naturalmente portati alla minimizzazione dell'energia cinetica. Pertanto:

$$E_c(\dot{\underline{q}}_0) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}(\dot{\underline{q}}_0)^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\dot{\underline{q}}_0), \quad (4.71) \quad \text{eq-proj-qp}$$

che porta al risultato

$$\dot{\underline{q}}_0 = (\underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{U}})^{-1} \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{M}} \dot{\underline{u}}_0 = \text{Diag} \left\{ \frac{1}{m_i} \right\} \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{M}} \dot{\underline{u}}_0. \quad (4.72)$$

Per motivi numerici, la matrice di massa è, specie per grandi problemi, spesso approssimata a masse concentrate. Nel caso di strutture vincolate si preferisce pertanto utilizzare la formula basata su detta matrice anche per il trasferimento delle condizioni iniziali sulla posizione. Per quanto riguarda il caso termico non vi sono sostanziali differenze, sostituendo alla  $\underline{\underline{M}}$  la matrice  $\underline{\underline{C}}_T$  e alla  $\underline{\underline{K}}$  la matrice  $\underline{\underline{K}}_t$ .

## 4.5.2 Risposta a forzanti impulsive

Si può notare che le soluzioni “energetiche” sono interpretabili come minimi quadrati pesati. Nonostante l'interpretazione energetica sopra data renda plausibile utilizzare trasformazioni delle condizioni iniziali più coerenti con un'approssimazione ottenuta tramite il PLV, la trasformazione delle condizioni iniziali dalle coordinate fisiche a quelle modali proprie troncate su presentata sembra comunque mostrare ancora una certa arbitrarietà, dovuta al suo inquadramento come sistema di equazioni sovradeterminate. Potremmo risolvere ogni dubbio interpretando il tutto in termini di proiezione di sottospazi, tali sono le formule “energetiche”, utilizzando un prodotto scalare generalizzato del tipo  $\underline{x}^T \underline{\underline{M}} \underline{x}$ . Anche se tale visione è assolutamente univoca e corretta, dovrebbe essere facile vederne la totale analogia col calcolo dei coefficienti delle serie di Fourier<sup>6</sup>, con essa si viene però a perdere quel poco di visione fisica che avevamo cercato di mettere nella determinazione delle nostre trasformazioni. Così, almeno per strutture vincolate, potrebbe rimanere ancora il dubbio del perché sia meglio minimizzare il residuo associabile all'energia cinetica e non quello della funzione di dissipazione  $E_d(\dot{\underline{q}}_0) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}(\dot{\underline{q}}_0)^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\dot{\underline{q}}_0)$ . Cercando allora di mantenere una interpretazione totalmente fisica di quanto stiamo facendo, l'algebra deve essere il più “fisica” possibile, vogliamo ora mostrare invece come il tutto sia anche riconducibile alla determinazione delle forze generalizzate modali corrispondenti a opportune forzanti impulsive temporali e, pertanto, in totale coerenza con la genesi delle equazioni approssimanti dal PLV. Il valore aggiunto di questo nuovo approccio sarà

<sup>6</sup>Breve richiamo di comodo; si consiglia comunque di ripassare i relativi concetti sul materiale specifico ai corsi già seguiti. Data una funzione  $\underline{s}(x)$  definita su  $D$ , con prodotto scalare del tipo  $\int_D \underline{y}(x)^T \underline{W}(x) \underline{z}(x) dD = \int_D \underline{z}(x)^T \underline{W}(x) \underline{y}(x) dD$ ,  $\underline{W}(x) > 0$ , supponiamo di approssimarla con uno sviluppo  $\underline{s}(x) = \underline{N}(x) \underline{q}$ . Si noti che l'usuale prodotto scalare si ha per  $\underline{W}(x) = \underline{I}$  e che tale prodotto si può leggere sia come la proiezione di  $\underline{y}$  su  $\underline{z}$  che di  $\underline{z}$  su  $\underline{y}$ . L'analogia con le proiezioni, a meno di un possibile fattore di normalizzazione, è chiaramente collegabile all'usuale prodotto scalare fra vettori, che implica il coseno dell'angolo fra gli stessi. L'estensione della definizione con  $W$  non cambia significativamente l'idea sottintesa. I valori di  $\underline{q}$  si possono allora ottenere per proiezione, alias prodotto scalare, di  $\underline{s}$  su tutti i termini di  $\underline{N}$ , riconducendosi così al calcolo delle componenti vettoriali sullo spazio delle relative funzioni tramite la soluzione del sistema  $\int_D \underline{N}(x)^T \underline{W}(x) \underline{N}(x) dD \underline{q} = \int_D \underline{N}(x)^T \underline{W}(x) \underline{s}(x) dD$ . Se le componenti di  $\underline{N}$  sono ortogonali,  $\int_D \underline{N}(x)^T \underline{W}(x) \underline{N}(x) dD = \text{Diag} \{n_i\}$  o, eventualmente attraverso una possibile riscalatura, perfino ortonormate,  $\int_D \underline{N}(x)^T \underline{W}(x) \underline{N}(x) dD = \underline{I}$ , il sistema avrà la matrice dei coefficienti diagonale (identità), e la soluzione per una componente potrà ottenersi indipendentemente da ogni altra. La proiezione diretta di cui sopra porta a un risultato analogo a quello di un'approssimazione ai minimi quadrati del residuo  $\underline{\varepsilon}(x) = \underline{s}(x) - \underline{N}(x) \underline{q}$ :  $\min_{\underline{q}} \int_D \underline{\varepsilon}(x)^T \underline{W}(x) \underline{\varepsilon}(x) dD$ . Dovrebbe quindi essere facile vedere l'analogia con l'approccio alla Fourier:  $\underline{s}$  periodica,  $D$  dominio associato a un qualsiasi suo periodo,  $\underline{N}$  funzioni armoniche di periodi  $D$  e suoi sottomultipli interi. Si vede anche che tale approccio non è altro che quanto abbiamo fatto, usando:  $\underline{W}(x) = \rho(x) \underline{I}$ ,  $\underline{N}$  le forme modali,  $\underline{s}$  lo sviluppo con le funzioni di forma nodali degli elementi finiti; con la differenza che si è operato direttamente, in forma algebrico-matriciale sulle proprietà di ortogonalità relative alla matrice di massa, utilizzando le matrici ottenute tramite la discretizzate associata agli integrali dell'approssimazione a elementi finiti ottenuta col PLV. Il PLV stesso può infatti essere interpretato come una proiezione di tutte le forze, interne-esterne, nelle direzioni ammissibili di moto.



la capacità di risolvere problemi con forzanti impulsive. Prima di procedere notiamo che le condizioni iniziali necessarie per l'integrazione sono quelle corrispondenti al limite al tempo zero della soluzione da destra,  $0^+$ , mentre le condizioni iniziali fisiche disponibili sono quelle corrispondenti alle condizioni a  $0^-$ . Per le generiche forzanti usualmente utilizzate, contenenti al più discontinuità di prima specie, anche all'origine, la soluzione può ritenersi continua al tempo zero per cui non ci preoccupiamo di specificare quanto sopra, ma parliamo semplicemente di condizioni iniziali all'istante zero. Nel caso di forzanti impulsive all'istante zero sono invece possibili discontinuità dello stato all'istante iniziale e pertanto bisognerà determinare le condizioni iniziali da utilizzare nella soluzione, a  $0^+$ , che dovranno essere ricavate in modo appropriato dalle condizioni iniziali assegnate, a  $0^-$ . Di fatto la determinazione di tali condizioni di raccordo riconduce la determinazione della risposta a forzanti impulsive all'integrazione del sistema omogeneo per assegnate condizioni iniziali, a  $0^+$  per l'appunto. A tale scopo, con maggior generalità di quanto richiesto nel nostro caso, partiamo dal più generale sistema lineare meccanico rappresentato dalla seguente equazione:

$$\underline{\underline{M}} \ddot{u} + \underline{\underline{C}} \dot{u} + \underline{\underline{K}} u = \underline{\underline{B}}_0 \delta(t) + \underline{\underline{B}}_1 \dot{\delta}(t) \quad (4.73)$$

eq-proj-sistema-

da cui per successive integrazioni indeterminate ricaviamo:

$$\underline{\underline{M}} \dot{u} + \underline{\underline{C}} u + \underline{\underline{K}} \int u dt = \underline{\underline{B}}_0 \text{sca}(t) + \underline{\underline{B}}_1 \delta(t) + \underline{\underline{C}}_1 \quad (4.74)$$

eq-proj-integ1

e

$$\underline{\underline{M}} u + \underline{\underline{C}} \int u dt + \underline{\underline{K}} \int \left( \int u dt \right) dt = \underline{\underline{B}}_0 \text{ramp}(t) + \underline{\underline{B}}_1 \text{sca}(t) + \underline{\underline{C}}_1 t + \underline{\underline{C}}_2 \quad (4.75)$$

eq-proj-integ2

L'integrazione determinata fra  $0^+$  e  $0^-$  della (4.73) corrisponde alla differenza della (4.74) valutata negli stessi istanti e conduce alla seguente:

$$\underline{\underline{M}} (\dot{u}(0^+) - \dot{u}(0^-)) + \underline{\underline{C}} (u(0^+) - u(0^-)) + \underline{\underline{K}} 0 = \underline{\underline{B}}_0 \quad (4.76)$$

Analogamente l'integrazione determinata fra  $0^+$  e  $0^-$  della (4.74) corrisponde alla differenza della (4.75) valutata negli stessi istanti e conduce alla seguente:

$$\underline{\underline{M}} (u(0^+) - u(0^-)) + \underline{\underline{C}} 0 + \underline{\underline{K}} 0 = \underline{\underline{B}}_1 \quad (4.77)$$

Dalla soluzione del sistema formato dalle due equazioni precedenti che, dopo aver eliminato i termini nulli si riscrivono

$$\underline{\underline{M}} (u(0^+) - u(0^-)) = \underline{\underline{B}}_1 \quad (4.78)$$

impb1

$$\underline{\underline{M}} (\dot{u}(0^+) - \dot{u}(0^-)) + \underline{\underline{C}} (u(0^+) - u(0^-)) = \underline{\underline{B}}_0 \quad (4.79)$$

impb2

si possono ricavare le condizioni a  $0^+$  da quelle a  $0^-$  con le seguenti:

$$u(0^+) = u(0^-) + \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{B}}_1 \quad (4.80)$$

$$\dot{u}(0^+) = \dot{u}(0^-) + \underline{\underline{M}}^{-1} (\underline{\underline{B}}_0 - \underline{\underline{C}} (u(0^+) - u(0^-))) \quad (4.81)$$

Ripetiamo ora quanto appena esposto al nostro sistema modale assumendo, per semplicità, condizioni omogenee a  $0^-$ . Come sappiamo la trasformazione in coordinate modali si scriverà:

$$\text{Diag} \{m_i\} \ddot{q} + \text{Diag} \{2m_i \xi_i \omega_{0i}\} \dot{q} + \text{Diag} \{m_i \omega_{0i}^2\} q = \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{B}}_0 \delta(t) + \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{B}}_1 \dot{\delta}(t) \quad (4.82)$$

Applicando quindi lo stesso procedimento alle equazioni modali proprie, rappresentate dall'equazione precedente, anche qui assumendo condizioni iniziali omogenee a  $0^-$ , abbiamo:

$$q(0^+) = \text{Diag} \left\{ \frac{1}{m_i} \right\} \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{B}}_1 \quad (4.83)$$

$$\dot{q}(0^+) = \text{Diag} \left\{ \frac{1}{m_i} \right\} (\underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{B}}_0 - \text{Diag} \{2m_i \xi_i \omega_{0i}\} q(0^+)) \quad (4.84)$$

da cui, ricordando le equazioni (4.79) e (4.78), qui ritrascritte con le assunzioni su fatte:

$$\underline{\underline{M}} \dot{\underline{u}}(0^+) + \underline{\underline{C}} \underline{u}(0^+) = \underline{\underline{B}}_0 \quad (4.85)$$

$$\underline{\underline{M}} \underline{u}(0^+) = \underline{\underline{B}}_1 \quad (4.86)$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \underline{q}(0^+) &= \text{Diag} \left\{ \frac{1}{m_i} \right\} \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{M}} \underline{u}(0^+) \\ \dot{\underline{q}}(0^+) &= \text{Diag} \left\{ \frac{1}{m_i} \right\} (\underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{M}} \dot{\underline{u}}(0^+) + \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{C}} \underline{u}(0^+) - \text{Diag} \{ 2m_i \xi_i \omega_{0i} \} \underline{q}(0^+)) = \\ &\quad \text{Diag} \left\{ \frac{1}{m_i} \right\} (\underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{M}} \dot{\underline{u}}(0^+) + \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{C}} \underline{u}(0^+) - \text{Diag} \{ 2\xi_i \omega_{0i} \} \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{M}} \underline{u}(0^+)) = \\ &\quad \text{Diag} \left\{ \frac{1}{m_i} \right\} \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{M}} \dot{\underline{u}}(0^+) \end{aligned} \quad (4.87)$$

cioè le equazioni (4.70) e (4.71). Possiamo quindi vedere che l'equivalenza delle condizioni iniziali a forzanti impulsive permette una precisa, generale e univoca, trasformazione delle condizioni iniziali fisiche in quelle modali grazie alla proiezione, fisicamente e energeticamente corretta, associata al PLV. Si rileva ancora una volta che la stessa dimostrazione si può specializzare al problema termico modale proprio, facendo attenzione al fatto che, essendo lo stesso del primo ordine, basterà utilizzare solo sorgenti impulsive e non quelle derivate nel tempo.

Pedantemente, ma all'utile scopo di aiutare nella manipolazione "ingegneristica" delle condizioni di raccordo associate a funzioni impulsive, come abbiamo visto essere il caso delle condizioni iniziali, rivediamo in un altro modo quanto sopra detto. Estendiamo inoltre il procedimento alla presenza di forzanti impulsive con derivate anche superiori alle più alte che appaiono nell'equazione di moto. Per semplicità ci fermeremo alla terza, ma sarà facile estendere il procedimento a qualunque ordine di derivazione si voglia far apparire nelle eccitazioni impulsive:

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{u}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{u}} + \underline{\underline{K}} \underline{u} = \underline{\underline{B}}_0 \delta(t) + \underline{\underline{B}}_1 \dot{\delta}(t) + \underline{\underline{B}}_2 \ddot{\delta}(t) + \underline{\underline{B}}_3 \dddot{\delta}(t) \quad (4.88)$$

dinamica\_delta3

Tenendo quindi conto della causalità di  $\underline{u}$  e della presenza di derivate fino alla terza della funzione impulsiva, che dovranno riflettersi in corrispondenti termini generati dalla soluzione, ne cercheremo una del tipo:

$$\underline{v}(t) = \underline{u}_0 \delta(t) + \underline{u}_1 \dot{\delta}(t) + \text{sca}(t) \underline{u}(t) \quad (4.89)$$

soluzconimpul

le cui derivate temporali, prima e seconda, sono <sup>7</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{v}}(t) &= \underline{u}_0 \dot{\delta}(t) + \underline{u}_1 \ddot{\delta}(t) + (\underline{u}(0^+) - \underline{u}(0^-)) \delta(t) + \text{sca}(t) \dot{\underline{u}}(t) \\ \ddot{\underline{v}}(t) &= \underline{u}_0 \ddot{\delta}(t) + \underline{u}_1 \dddot{\delta}(t) + (\dot{\underline{u}}(0^+) - \dot{\underline{u}}(0^-)) \delta(t) + (\underline{u}(0^+) - \underline{u}(0^-)) \dot{\delta}(t) + \text{sca}(t) \ddot{\underline{u}}(t). \end{aligned}$$

Sostituendo nella (4.88) si avrà:

$$\begin{aligned} &\underline{\underline{M}} \underline{u}_1 \dddot{\delta}(t) + (\underline{\underline{M}} \underline{u}_0 + \underline{\underline{C}} \underline{u}_1) \ddot{\delta}(t) + (\underline{\underline{M}} (\underline{u}(0^+) - \underline{u}(0^-)) + \underline{\underline{C}} \underline{u}_0 + \underline{\underline{K}} \underline{u}_1) \dot{\delta}(t) + \\ &(\underline{\underline{M}} (\dot{\underline{u}}(0^+) - \dot{\underline{u}}(0^-)) + \underline{\underline{C}} (\underline{u}(0^+) - \underline{u}(0^-)) + \underline{\underline{K}} \underline{u}_0) \delta(t) + \text{sca}(t) (\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{u}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{u}} + \underline{\underline{K}} \underline{u}) = \\ &\underline{\underline{B}}_0 \delta(t) + \underline{\underline{B}}_1 \dot{\delta}(t) + \underline{\underline{B}}_2 \ddot{\delta}(t) + \underline{\underline{B}}_3 \dddot{\delta}(t) \end{aligned}$$

da cui, confrontando i termini di destra e sinistra, si può scrivere:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}} \ddot{\underline{u}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{u}} + \underline{\underline{K}} \underline{u} &= 0 \\ \underline{\underline{M}} \underline{u}_1 &= \underline{\underline{B}}_3 \\ \underline{\underline{M}} \underline{u}_0 + \underline{\underline{C}} \underline{u}_1 &= \underline{\underline{B}}_2 \\ \underline{\underline{M}} (\underline{u}(0^+) - \underline{u}(0^-)) + \underline{\underline{C}} \underline{u}_0 + \underline{\underline{K}} \underline{u}_1 &= \underline{\underline{B}}_1 \\ \underline{\underline{M}} (\dot{\underline{u}}(0^+) - \dot{\underline{u}}(0^-)) + \underline{\underline{C}} (\underline{u}(0^+) - \underline{u}(0^-)) + \underline{\underline{K}} \underline{u}_0 &= \underline{\underline{B}}_0 \end{aligned} \quad (4.90)$$

<sup>7</sup>Si noti che nella derivazione di  $\text{sca}(t) \underline{u}(t) = \text{sca}(t) \dot{\underline{u}}(t) + \underline{u}(t) \delta(t)$  si è applicata immediatamente la proprietà  $\underline{u}(t) \delta(t) = (\underline{u}(0^+) - \underline{u}(0^-)) \delta(t)$ , facilitando in tal modo il calcolo della derivata successiva. Infatti se si fosse applicata l'alternativa di proseguire direttamente derivando  $\text{sca}(t) \dot{\underline{u}}(t) + \dot{\underline{u}}(t) \delta(t)$  avremmo invece avuto  $\text{sca}(t) \ddot{\underline{u}}(t) + \dot{\underline{u}}(t) \delta(t) + \underline{u}(t) \delta(t)$ , con la conseguente necessità di caratterizzare  $\underline{u}(t) \delta(t)$ , in maniera analoga a quanto fatto per  $\underline{u}(t) \delta(t)$  ma in presenza di  $\dot{\delta}(t)$ . Senza dilungarci oltre rileviamo che tale esplicitazione non avrebbe fatto altro che riportarci al risultato già visto, ma attraverso un percorso un po' più lungo.

Ricordando l'Eq. (4.89) si vede quindi che la soluzione per forzanti impulsive consiste nei termini impulsivi a  $t = 0$ :

$$\begin{aligned}\underline{u}_1 &= \underline{M}^{-1} \underline{B}_3 \\ \underline{u}_0 &= \underline{M}^{-1}(\underline{B}_2 - \underline{C} \underline{u}_1) = \underline{M}^{-1}(\underline{B}_2 - \underline{C} \underline{M}^{-1} \underline{B}_3)\end{aligned}$$

sommati all'usuale soluzione, per  $t > 0$ , dell'equazione omogenea:

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}} + \underline{C} \dot{\underline{u}} + \underline{K} \underline{u} = 0 \quad (4.91)$$

risolta per le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned}\underline{u}(0^+) &= \underline{u}(0^-) + \underline{M}^{-1}(\underline{B}_1 - \underline{C} \underline{u}_0 - \underline{K} \underline{u}_1) \\ \dot{\underline{u}}(0^+) &= \dot{\underline{u}}(0^-) + \underline{M}^{-1}(\underline{B}_0 - \underline{C} (\underline{u}(0^+) - \underline{u}(0^-)) - \underline{K} \underline{u}_1)\end{aligned}$$

### 4.5.3 Trasformata di Laplace applicata al problema scalare

Un ulteriore modo per arrivare alle stesse conclusioni consiste nell'utilizzo della trasformata di Laplace, a zero meno<sup>8</sup>, con il relativo teorema del valore iniziale a zero più. Suggeriamo a questo punto di non proseguire oltre ma di cimentarsi personalmente in tale esercizio su un oscillatore smorzato scalare, usando il seguito come verifica prima dell'estensione al più generale problema vettoriale.

Si consideri ad esempio il problema scalare

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = b_0\delta(t) + b_1\dot{\delta}(t) \quad (4.92)$$

La trasformata di Laplace a “zero meno” è

$$\mathcal{L}_-(f(t)) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (4.93)$$

Si ricava

$$\mathcal{L}_-(u(t)) = u(s) \quad (4.94a)$$

$$\mathcal{L}_-(\dot{u}(t)) = s\mathcal{L}_-(u(t)) - u(0^-) = su(s) - u(0^-) \quad (4.94b)$$

$$\mathcal{L}_-(\ddot{u}(t)) = s\mathcal{L}_-(\dot{u}(t)) - \dot{u}(0^-) = s^2u(s) - su(0^-) - \dot{u}(0^-) \quad (4.94c)$$

Dimostrazione della derivata prima:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_-(\dot{u}(t)) &= \int_{0^-}^{\infty} \dot{u}(t)e^{-st}dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} \left( \frac{d}{dt} (u(t)e^{-st}) + su(t)e^{-st} \right) dt \\ &= [u(t)e^{-st}]_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} u(t)e^{-st}dt \\ &= -u(0^-) + s\mathcal{L}_-(u(t))\end{aligned} \quad (4.95)$$

La derivata seconda ne è immediata conseguenza. Inoltre

$$\mathcal{L}_-\left(\frac{d^n \delta(t)}{dt^n}\right) = s^n \quad (4.96)$$

<sup>8</sup>Per noi semplicemente la ‘trasformata di Laplace’, unica e vera trasformata unilatera poiché contiene tutte le altre. Spesso infatti la trasformata di Laplace viene presentata come l'integrazione da  $0^+$ , o, ancor più indeterministicamente  $0$ , a  $+\infty$ . Tuttavia, tale definizione non consente ad esempio di considerare correttamente la trasformata dell'impulso  $\delta(0)$ . Per una discussione sull'opportunità di definire la trasformata di Laplace a partire da  $0^-$ , mentre il teorema del valore iniziale può essere comunque definito rispetto a  $0^+$ . Per un qualche approfondimento si vedano: “Initial Conditions, Generalized Functions, and the Laplace Transform. Troubles at the origin”. Kent H. Lundberg, Haynes R. Miller, and David L. Trumper, disponibile in bacheca, e si riguardino gli appunti sulla funzione impulsiva nella dispensa di dinamica dei sistemi aerospaziali.

si lascia al lettore la dimostrazione a partire dalla definizione della trasformata di Laplace a “zero meno” (e la constatazione di come la trasformata di Laplace a “zero più” renda nulla la trasformata dell’impulso nell’origine).

Quindi il problema diventa

$$(s^2m + sc + k) u(s) = (b_0 + m\dot{u}(0^-) + cu(0^-)) + s(b_1 + mu(0^-)) \quad (4.97)$$

Il teorema del valore iniziale, che dovrebbe essere noto da qualche corso precedente, applicato a una generica trasformata  $F(s) = \mathcal{L}_-(h(t))$  ci dice che:

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)_{\text{sp}} \quad (4.98)$$

ove il pedice  $(\cdot)_{\text{sp}}$  si riferisce alla sola parte strettamente propria della funzione. Si noti infatti che qualora  $F(s)$  non fosse semplicemente propria potrebbe sempre, con una semplice divisione fra polinomi, essere scomposta in un polinomio in  $s$  più una parte strettamente propria. Poiché la parte polinomiale corrisponde alle trasformate della funzione impulsiva e delle sue derivate temporali, tutte nulle a  $0^+$ , dovrebbe risultare evidente che l’unico contributo finito a  $0^+$  non può che derivare dalla parte strettamente propria.

L’utilizzo di quanto sopra detto per la posizione porta a scrivere

$$\begin{aligned} u(0^+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s(\mathcal{L}_-(u(t)))_{\text{sp}} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} su(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(b_0 + m\dot{u}(0^-) + cu(0^-)) + s^2(b_1 + mu(0^-))}{s^2m + sc + k} \\ &= u(0^-) + \frac{b_1}{m} \end{aligned} \quad (4.99)$$

Ne consegue che

$$u(0^+) - u(0^-) = \frac{b_1}{m} \quad (4.100)$$

Il teorema del valore iniziale applicato alla velocità porta a scrivere

$$\begin{aligned} \dot{u}(0^+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s(\mathcal{L}_-(\dot{u}(t)))_{\text{sp}} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s(su(s) - u(0^-))_{\text{sp}} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \left( \frac{s(b_0 + m\dot{u}(0^-) + cu(0^-)) + s^2(b_1 + mu(0^-)) - (s^2m + sc + k)u(0^-)}{s^2m + sc + k} \right)_{\text{sp}} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \left( \frac{-ku(0^-) + s(b_0 + m\dot{u}(0^-)) + s^2b_1}{s^2m + sc + k} \right)_{\text{sp}} \end{aligned} \quad (4.101)$$

Per mettere in luce la parte strettamente propria della relazione tra parentesi occorre svolgere la divisione tra polinomi

$$\frac{s^2b_1}{s^2m + sc + k} = \frac{b_1}{m} - \frac{sc + k}{s^2m + sc + k} \frac{b_1}{m} \quad (4.102)$$

proprioerestvel

da cui si ricava

$$\begin{aligned} \dot{u}(0^+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \left( \frac{-ku(0^-) - kb_1/m + s(b_0 + m\dot{u}(0^-) - cb_1/m)}{s^2m + sc + k} + \frac{b_1}{m} \right)_{\text{sp}} \\ &= \dot{u}(0^-) + \frac{b_0}{m} - \frac{c}{m^2}b_1 \\ &= \dot{u}(0^-) + \frac{b_0}{m} - \frac{c}{m}(u(0^+) - u(0^-)) \end{aligned} \quad (4.103)$$

ovvero

$$\dot{u}(0^+) - \dot{u}(0^-) = \frac{b_0}{m} - \frac{c}{m}(u(0^+) - u(0^-)) \quad (4.104)$$

Può essere interessante notare che il termine costante alla destra della (4.102) corrisponde a un termine impulsivo della velocità che, integrato nel tempo, produrrà un gradino di posizione di intensità  $b_1/m$ , corrispondente per l'appunto al salto  $(u(0^+) - u(0^-))$ . Dovrebbe allora risultare intuitivo aspettarsi che proseguendo nel calcolo della trasformata dell'accelerazione dovremmo trovare, sommati a una parte strettamente propria, un termine in  $s$  e uno costante corrispondenti alle già trovate condizioni iniziali a  $0^+$  di posizione e velocità. Avremmo infatti:

$$\ddot{u}(s) = \frac{b_1}{m}s + \frac{-s(ku(0^-) - kb_1/m) + s^2(b_0 + m\dot{u}(0^-) - cb_1/m)}{s^2m + sc + k} + \dot{u}(0^-) \quad (4.105)$$

$$= \frac{b_1}{m}s + \frac{k\dot{u}(0^-) - s(ku(0^-) - kb_1/m + c\dot{u}(0^-)) + s^2(b_0 - cb_1/m)}{s^2m + sc + k} \quad (4.106)$$

che, dopo un'ulteriore divisione fra polinomi, a conferma della precedente congettura, darà:

$$\ddot{u}(s) = \frac{b_1}{m}s + \frac{b_0}{m} - \frac{c}{m} \frac{b_1}{m} + \text{frazione strettamente propria} \quad (4.107)$$

$$= (u(0^+) - u(0^-))s + \frac{b_0}{m} - \frac{c}{m}(u(0^+) - u(0^-)) + \text{frazione strettamente propria} \quad (4.108)$$

Infatti una prima integrazione porterà, per la velocità, a un impulso,  $(u(0^+) - u(0^-))$ , senza nessun contributo a  $0^+$ , più un gradino,  $b_0/m - c(u(0^+) - u(0^-))/m$ , corrispondente al salto di velocità precedentemente trovato. Procedendo nell'integrazione il gradino porterà, per la posizione, a una rampa, senza nessun contributo a  $0^+$ , più un gradino,  $(u(0^+) - u(0^-))$ , corrispondente al salto di posizione precedentemente trovato.

Dovrebbe così risultare evidente che questo ribaltamento della determinazione delle condizioni iniziali a  $0^+$  alla parte impropria della derivata successiva, invece dell'uso della parte strettamente propria della funzione di interesse, altro non è, almeno per trasformate razionali, che una possibile dimostrazione dell'uso del limite ad infinito della parte strettamente propria della funzione di interesse moltiplicata per  $s$ . Infatti tale moltiplicazione non corrisponde ad altro se non alla trasformata della derivata, mentre il limite ad infinito non fa che estrarre la parte immediatamente semplicemente propria.

#### 4.5.4 Trasformata di Laplace applicata al problema generico

Possiamo generalizzare quanto visto scalarmente al caso vettoriale. Allo scopo si consideri il problema

$$\underline{M}\ddot{\underline{u}}(t) + \underline{C}\dot{\underline{u}}(t) + \underline{K}\underline{u}(t) = \underline{B}_0\delta(t) + \underline{B}_1\dot{\delta}(t) + \underline{B}_2\ddot{\delta}(t) + \underline{B}_3\dddot{\delta}(t) \quad (4.109)$$

Si assume una soluzione

$$\underline{v}(t) = \underline{u}(t)\text{sca}(t) + \underline{u}_0\delta(t) + \underline{u}_1\dot{\delta}(t) \quad (4.110)$$

Utilizzando la trasformata di Laplace a “zero meno” si ottiene

$$\mathcal{L}_-(\underline{v}(t)) = \underline{u}(s) + \underline{u}_0 + s\underline{u}_1 \quad (4.111a)$$

$$\mathcal{L}_-(\dot{\underline{v}}(t)) = s\mathcal{L}_-(\underline{v}(t)) - \underline{u}(0^-) = s\underline{u}(s) - \underline{u}(0^-) + s\underline{u}_0 + s^2\underline{u}_1 \quad (4.111b)$$

$$\mathcal{L}_-(\ddot{\underline{v}}(t)) = s\mathcal{L}_-(\dot{\underline{v}}(t)) - \dot{\underline{u}}(0^-) = s^2\underline{u}(s) - s\underline{u}(0^-) - \dot{\underline{u}}(0^-) + s^2\underline{u}_0 + s^3\underline{u}_1 \quad (4.111c)$$

Il problema diventa

$$\begin{aligned} (s^2\underline{M} + s\underline{C} + \underline{K})\underline{u}(s) &= \left(\underline{B}_0 + \underline{M}\dot{\underline{u}}(0^-) + \underline{C}\underline{u}(0^-) - \underline{K}\underline{u}_0\right) \\ &+ s\left(\underline{B}_1 + \underline{M}\underline{u}(0^-) - \underline{C}\underline{u}_0 - \underline{K}\underline{u}_1\right) \\ &+ s^2\left(\underline{B}_2 - \underline{M}\underline{u}_0 - \underline{C}\underline{u}_1\right) \\ &+ s^3\left(\underline{B}_3 - \underline{M}\underline{u}_1\right) \end{aligned} \quad (4.112)$$

I contributi a termine noto che moltiplicano  $s^2$  e  $s^3$  danno sicuramente un contributo non strettamente proprio sia alla posizione che alla velocità, quindi devono annullarsi autonomamente, da cui si ricava

$$\underline{u}_1 = \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{B}}_3 \quad (4.113a)$$

$$\underline{u}_0 = \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{B}}_2 - \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{C}} \underline{u}_1 \quad (4.113b)$$

Rimane la relazione

$$\begin{aligned} (s^2 \underline{\underline{M}} + s \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{K}}) \underline{u}(s) &= \left( \underline{\underline{B}}_0 + \underline{\underline{M}} \dot{\underline{u}}(0^-) + \underline{\underline{C}} \underline{u}(0^-) - \underline{\underline{K}} \underline{u}_0 \right) \\ &+ s \left( \underline{\underline{B}}_1 + \underline{\underline{M}} \underline{u}(0^-) - \underline{\underline{C}} \underline{u}_0 - \underline{\underline{K}} \underline{u}_1 \right) \end{aligned} \quad (4.114)$$

che, in vista dell'applicazione del teorema del valore iniziale alla posizione, si può riscrivere come

$$\begin{aligned} \left( \underline{\underline{M}} + \frac{1}{s} \underline{\underline{C}} + \frac{1}{s^2} \underline{\underline{K}} \right) \underline{u}(s) &= \frac{1}{s^2} \left( \underline{\underline{B}}_0 + \underline{\underline{M}} \dot{\underline{u}}(0^-) + \underline{\underline{C}} \underline{u}(0^-) - \underline{\underline{K}} \underline{u}_0 \right) \\ &+ \frac{1}{s} \left( \underline{\underline{B}}_1 + \underline{\underline{M}} \underline{u}(0^-) - \underline{\underline{C}} \underline{u}_0 - \underline{\underline{K}} \underline{u}_1 \right) \end{aligned} \quad (4.115)$$

Ne consegue che

$$\underline{\underline{M}} \underline{u}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \underline{\underline{M}} + \frac{1}{s} \underline{\underline{C}} + \frac{1}{s^2} \underline{\underline{K}} \right) s \underline{u}(s) = \underline{\underline{B}}_1 + \underline{\underline{M}} \underline{u}(0^-) - \underline{\underline{C}} \underline{u}_0 - \underline{\underline{K}} \underline{u}_1 \quad (4.116)$$

da cui si ricava

$$\underline{u}(0^+) - \underline{u}(0^-) = \underline{\underline{M}}^{-1} \left( \underline{\underline{B}}_1 - \underline{\underline{C}} \underline{u}_0 - \underline{\underline{K}} \underline{u}_1 \right) \quad (4.117)$$

Analogamente, per la velocità si ricava

$$\begin{aligned} \left( \underline{\underline{M}} + \frac{1}{s} \underline{\underline{C}} + \frac{1}{s^2} \underline{\underline{K}} \right) (s \underline{u}(s) - \underline{u}(0^-)) &= \frac{1}{s} \left( \underline{\underline{B}}_0 + \underline{\underline{M}} \dot{\underline{u}}(0^-) + \underline{\underline{C}} \underline{u}(0^-) - \underline{\underline{K}} \underline{u}_0 \right) \\ &+ \left( \underline{\underline{B}}_1 + \underline{\underline{M}} \underline{u}(0^-) - \underline{\underline{C}} \underline{u}_0 - \underline{\underline{K}} \underline{u}_1 \right) - \left( \underline{\underline{M}} + \frac{1}{s} \underline{\underline{C}} + \frac{1}{s^2} \underline{\underline{K}} \right) \underline{u}(0^-) \\ &= -\frac{1}{s^2} \underline{\underline{K}} \underline{u}(0^-) + \frac{1}{s} \left( \underline{\underline{B}}_0 + \underline{\underline{M}} \dot{\underline{u}}(0^-) - \underline{\underline{K}} \underline{u}_0 \right) + \left( \underline{\underline{B}}_1 - \underline{\underline{C}} \underline{u}_0 - \underline{\underline{K}} \underline{u}_1 \right) \\ &= -\frac{1}{s^2} \underline{\underline{K}} \underline{u}(0^-) + \frac{1}{s} \left( \underline{\underline{B}}_0 + \underline{\underline{M}} \dot{\underline{u}}(0^-) - \underline{\underline{K}} \underline{u}_0 \right) + \underline{\underline{M}} (\underline{u}(0^+) - \underline{u}(0^-)) \\ &= -\frac{1}{s^2} \underline{\underline{K}} \underline{u}(0^-) + \frac{1}{s} \left( \underline{\underline{B}}_0 + \underline{\underline{M}} \dot{\underline{u}}(0^-) - \underline{\underline{K}} \underline{u}_0 \right) \\ &+ \left( \underline{\underline{M}} + \frac{1}{s} \underline{\underline{C}} + \frac{1}{s^2} \underline{\underline{K}} \right) (\underline{u}(0^+) - \underline{u}(0^-)) - \left( \frac{1}{s} \underline{\underline{C}} + \frac{1}{s^2} \underline{\underline{K}} \right) (\underline{u}(0^+) - \underline{u}(0^-)) \\ &= -\frac{1}{s^2} \underline{\underline{K}} \underline{u}(0^+) + \frac{1}{s} \left( \underline{\underline{B}}_0 + \underline{\underline{M}} \dot{\underline{u}}(0^-) - \underline{\underline{C}} (\underline{u}(0^+) - \underline{u}(0^-)) - \underline{\underline{K}} \underline{u}_0 \right) \\ &+ \left( \underline{\underline{M}} + \frac{1}{s} \underline{\underline{C}} + \frac{1}{s^2} \underline{\underline{K}} \right) (\underline{u}(0^+) - \underline{u}(0^-)) \end{aligned} \quad (4.118)$$

in cui l'ultimo addendo dà un contributo non strettamente proprio. Il teorema del valore iniziale applicato alla parte strettamente propria della velocità dà

$$\underline{\underline{M}} \dot{\underline{u}}(0^+) = \underline{\underline{B}}_0 + \underline{\underline{M}} \dot{\underline{u}}(0^-) - \underline{\underline{C}} (\underline{u}(0^+) - \underline{u}(0^-)) - \underline{\underline{K}} \underline{u}_0 \quad (4.119)$$

da cui si ricava

$$\dot{\underline{u}}(0^+) - \dot{\underline{u}}(0^-) = \underline{\underline{M}}^{-1} \left( \underline{\underline{B}}_0 - \underline{\underline{C}} (\underline{u}(0^+) - \underline{u}(0^-)) - \underline{\underline{K}} \underline{u}_0 \right) \quad (4.120)$$

ovvero lo stesso risultato ottenuto in precedenza nel dominio del tempo.

Si lascia al lettore l'estensione sia dell'uso dello schema sulla parte impropria del vettore delle accelerazioni che l'utilizzo della trasformata di Laplace per determinare le condizioni a  $0^+$  del problema termico che, essendo del primo ordine, fornirà un risultato applicabile anche a una generica rappresentazione agli stati di un sistema dinamico soggetto a forzanti impulsive.



## Capitolo 5

# CONDENSAZIONE MODALE: IL METODO DELLE POTENZE

Sino ad ora si è lasciato in sospeso il problema del calcolo di un numero limitato di modi a partire da un modello raffinato, con uno sviluppo fatto da un numero di termini che al limite tende ad infinito. Sfruttando infatti la buona convergenza della base modale precedentemente dimostrata, ai fini pratici basterà risolvere il problema del calcolo di un numero finito, e relativamente piccolo, di modi propri (autosoluzioni), che verranno poi utilizzati per l'analisi della dinamica del sistema. È però necessario che i modi da utilizzare come funzioni di base siano calcolati con una buona precisione, ragion per cui va immediatamente rilevata la necessità di disporre di modelli in grado di permettere un calcolo dei modi necessari in maniera accurata; tali modelli non potranno che essere composti da un elevato numero di termini di sviluppo (ossia di gradi di libertà). Nel caso dei modelli ad elementi finiti, che vengono spesso utilizzati come base di partenza, il numero di incognite può anche variare da alcune centinaia di migliaia a alcuni, magari anche decine di, milioni di equazioni nodali. Una soluzione accurata di un problema di risposta dinamica può essere invece facilmente ottenuta con alcune centinaia, se non decine di modi propri. Ora, se per problemi con un numero di equazioni inferiore a qualche migliaio è spesso possibile, pratico e accettabile, utilizzando un qualunque PC, adottare i classici metodi di utilizzo generale per il calcolo delle autosoluzioni, e.g. QR, Jacobi e simili, determinando quindi tutte le autosoluzioni per poi utilizzarne solo un numero limitato, per problemi di maggiori dimensioni, tale approccio non risulta più praticabile, anche con l'elevata potenza computazionale oggi disponibile. È pertanto necessario ricorrere a metodi che permettano il calcolo del solo sottoautospazio (sottospazio delle autosoluzioni) desiderato, che generalmente è quello associato alle frequenze più basse comprese nello spettro del problema. Nella maggior parte dei problemi ingegneristici è necessario determinare la risposta dinamica a problemi con forzanti regolari, finite e di durata limitata, o al più tendenti ad un valore costante, il cui contenuto in frequenza, teoricamente infinito, si può praticamente ritenere limitato. Si ricordi che il comportamento asintotico delle trasformate in frequenza è del tipo  $1/\omega^{n+1}$ , dove  $n$  è l'ordine di continuità della forzante temporale. È possibile quindi utilizzare modelli composti da un numero limitato di modi propri, quelli a frequenza più bassa, proprio grazie al fatto che i modi ad alta frequenza non partecipano significativamente alla risposta, se non per la loro parte statica recuperabile, come visto, tramite il metodo di accelerazione dei modi. Si noti infine che, nel caso di sistemi lineari, non è di alcun interesse il calcolo della risposta del sistema quando questi sono instabili mentre, nel caso siano stabili, non è di alcun interesse la ricerca di soluzioni per forzanti di durata infinita e crescenti nel tempo, in quanto tali soluzioni comportano di fatto o l'insorgenza di un fenomeno di "rottura" delle componenti strutturali del sistema, o soluzioni di nessun interesse, o l'invalidazione delle ipotesi di linearità e l'intervento di fenomeni non lineari, e.g. saturazioni delle forzanti, che modificano la natura del modello.

Ricordiamo che il metodo di base che si presta alle necessità di calcolare un numero ridotto di autosoluzioni è il *metodo delle potenze*. Per il problema agli autovalori espresso in forma canonica  $\underline{A}\underline{x} = \lambda\underline{x}$ , tale metodo permette di calcolare l'autovalore di modulo massimo. Partendo da un



vettore iniziale di tentativo  $\underline{z}^{(0)}$  arbitrario, si costruisce la successione

$$\underline{z}^{(k+1)} = \underline{A} \underline{z}^{(k)} \Rightarrow \underline{z}^{(k)} = \underline{A}^k \underline{z}^{(0)}. \quad (5.1)$$

Se utilizziamo gli autovettori di  $\underline{A}$  come una base dello spazio  $\mathbb{R}^n$ , possiamo scrivere  $\underline{z}^{(0)}$  come combinazione lineare degli elementi di tale base

$$\underline{z}^{(0)} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \underline{x}_j, \quad (5.2)$$

e quindi, ricordando che  $\underline{A} \underline{x} = \lambda \underline{x} \Rightarrow \underline{A}^k \underline{x} = \lambda^k \underline{x}$

$$\underline{z}^{(k)} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \underline{A}^k \underline{x}_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j^k \underline{x}_j. \quad (5.3)$$

Se chiamiamo  $\lambda_1$  l'autovalore di modulo massimo, possiamo quindi scrivere che

$$\underline{z}^{(k)} = \lambda_1^k \left( \alpha_1 \underline{x}_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j \left( \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^k \underline{x}_j \right), \quad (5.4) \quad \text{met-pot}$$

da cui si vede che la successione  $\underline{z}^{(k)}$  per  $k \rightarrow \infty$  si allinea lungo la direzione del primo autovettore  $\underline{x}_1$ , a meno che il vettore iniziale di tentativo  $\underline{z}^{(k)}$  non sia ortogonale al primo autovettore, ossia tale per cui  $\alpha_1 = 0$ , cosa improbabile, comunque facilmente risolvibile. La (5.4) ci dice anche che la velocità di convergenza della successione al valore desiderato dipende dal rapporto  $\lambda_2/\lambda_1$ . Tanto più il primo autovalore è ben separato dagli altri, tanto più rapida sarà la convergenza. In ogni caso il metodo delle potenze opera come un filtro “passa alto”, perché tende a far emergere la parte alta dello spettro della matrice  $\underline{A}$ . Il calcolo dell'autovalore viene effettuato utilizzando il rapporto

$$\frac{|\underline{z}^{(k+1)}|}{|\underline{z}^{(k)}|} \approx \frac{\lambda_1^{k+1} \alpha_1 |\underline{x}_1|}{\lambda_1^k \alpha_1 |\underline{x}_1|} = \lambda_1. \quad (5.5)$$

Si noti che le proprietà del metodo delle potenze non dipendono in alcun modo dal fatto che la matrice  $\underline{A}$  sia o meno simmetrica o a coefficienti reali o immaginari. Se si è interessati agli autovalori di modulo minimo, si utilizza il metodo delle potenze inverse ossia il metodo delle potenze applicato alla matrice  $\underline{A}^{-1}$ . In questo caso

$$\underline{A}^{-1} \underline{x} = \frac{1}{\lambda} \underline{x}, \quad (5.6)$$

e quindi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{z}^{(k)} = \alpha_n \left( \frac{1}{\lambda_n} \right)^k \underline{x}_n, \quad (5.7) \quad \text{conv-potenz}$$

dove  $\lambda_n$  è l'autovalore più piccolo. Nel caso dei modi propri di vibrare di una struttura il problema agli autovalori da risolvere è il seguente

$$\omega^2 \underline{M} \underline{u} = \underline{K} \underline{u}. \quad (5.8) \quad \text{pot-str}$$

Essendo qui interessati agli autovalori di modulo minimo, utilizziamo il metodo delle potenze inverse, e quindi riscriviamo la (5.8) nella forma

$$\underline{M} \underline{u} = \frac{1}{\omega^2} \underline{K} \underline{u}, \quad (5.9)$$

Ricordiamo che la matrice di rigidità è simmetrica definita o semidefinita positiva, mentre la matrice di massa, generalmente definita positiva, può essere consistente (cioè ottenuta utilizzando lo stesso sviluppo completo adottato per la matrice di rigidità), oppure resa diagonale tramite

un'opportuna concentrazione delle masse, cosa possibile per mancanza di ogni derivazione spaziale nell'integrale che la determina. Si è detto che la matrice di massa è generalmente, cioè non sempre, definita positiva. Essendo l'energia cinetica intrinsecamente una quantità positiva per qualunque atto di moto, la mancata definizione positiva della matrice di massa può essere associata solamente all'uso di particolari schemi con matrici di massa concentrate non consistenti. Tali matrici si ritrovano spesso in modelli con elevati gradi di libertà in cui ci si accontenta di approssimare il sistema utilizzando solo le masse traslazionali, anche in presenza di gradi di libertà di rotazione. Va da sé che la mancata definizione positiva della matrice di massa altro non implica che la possibilità di recuperare una parte dei gradi di libertà per la sola via statica. Potremo infatti scrivere

$$\begin{bmatrix} \underline{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_d \\ \ddot{x}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K}_{dd} & \underline{K}_{ds} \\ \underline{K}_{sd} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_d \\ x_s \end{Bmatrix} = 0 \quad (5.10)$$

da cui è possibile ricavare, senza alcuna approssimazione ulteriore

$$\underline{x}_s = -\underline{K}_{ss}^{-1} \underline{K}_{sd} \underline{x}_d, \quad (5.11)$$

riducendo il problema a

$$\underline{M} \ddot{x}_d + \left( \underline{K}_{dd} - \underline{K}_{ds} \underline{K}_{ss}^{-1} \underline{K}_{sd} \right) x_d = 0, \quad (5.12)$$

dove la matrice di massa è definita positiva.

Assumendo dapprima che la matrice  $\underline{K}$  sia definita positiva, il metodo delle potenze applicato al problema in esame diviene

$$\underline{K}^{-1} \underline{M} u = \frac{1}{\omega^2} u, \quad (5.13)$$

$$\underline{z}^{(k+1)} = \underline{K}^{-1} \underline{M} \underline{z}^{(k)}. \quad (5.14)$$

pot-str2

È importante rilevare che l'iterazione viene applicata in più passi, moltiplicando prima  $\underline{M}$  per  $\underline{z}^{(k)}$ , e poi risolvendo il sistema lineare  $\underline{K} \underline{z}^{(k+1)} = \underline{M} \underline{z}^{(k)}$ . L'uso di  $\underline{K}^{-1}$  nella (5.13) è fatto solo per sinteticità formale e corrisponde in pratica a fattorizzare la matrice  $\underline{K}$  stessa, con l'algoritmo di Cholesky o LDL (stabili anche senza pivotaggio) una volta per tutte, per poi eseguire i passi avanti e indietro della soluzione sui termini noti via via disponibili ad ogni iterazione. Si rileva qui una ragione per l'utilizzo di masse condensate per migliorare l'efficienza di calcolo senza, dato l'elevatissimo numero di gradi di libertà, intaccare significativamente la bontà della soluzione; con tali matrici difatti il costo del prodotto  $\underline{M} \underline{z}^{(k)}$  si riduce significativamente.

Come già visto, nel caso di strutture libere, o contenenti cinematismi, la matrice inversa della matrice  $\underline{K}$  non esiste perché la matrice è semi-definita, infatti ci saranno tanti autovalori nulli quanti sono i modi liberi rigidi. Per un velivolo libero, ad esempio, ci saranno almeno sei autovalori coincidenti a zero<sup>1</sup>, che rappresentano i modi rigidi del velivolo, più tanti altri per quante sono le superfici di comando (se non vengono bloccate). Un modo pratico per ovviare a tale problema nella ricerca numerica dei modi è quello di applicare un cambio di origine degli autovalori in questo modo

$$(\omega^2 + \alpha) \underline{M} u = (\underline{K} + \alpha \underline{M}) u, \quad (5.15)$$

$$\bar{\omega}^2 \underline{M} u = \bar{K} u \quad (5.16)$$

con  $\alpha > 0$  per non rendere la matrice  $\bar{K}$  definita negativa, la quale quindi non è più semi-definita. Per ragioni numeriche sarà anche opportuno che tale valore sia approssimativamente dell'ordine dell'autovalore minimo non rigido.<sup>2</sup> Una tecnica analoga, ma con  $\alpha$  negativo, può essere utilizzata per portare ad una migliore separazione delle frequenze proprie, ma non verrà qui perseguita in quanto inefficiente perché richiede una non facile decisione sul valore di spostamento dell'origine e su

<sup>1</sup>Molteplicità algebrica e geometrica saranno però coincidenti e quindi il sistema sarà ancora diagonalizzabile.

<sup>2</sup>Per un modo alternativo e altre informazioni utili alla soluzione di strutture libere si veda: P. Mantegazza, Tutorial on Attached-Mean Axes and Their Use in the Calculation of Deformable Static and Undamped Vibration Modes of a Free-Free Structure, Vol. 2, n. 1, 2010, pp. 81-98.

quando vada applicato, aggravata dal costo di dover rifattorizzare la matrice  $\underline{\underline{K}}$  ad ogni iterazione. Per il caso termico il problema agli autovalori si scrive come

$$\lambda \underline{\underline{C}}_T \theta = \underline{\underline{K}}_T \theta. \quad (5.17)$$

Anche in questo caso essendo interessati solo agli autovalori di modulo minimo, si utilizzerà il metodo delle potenze inverse sul problema

$$\underline{\underline{C}}_T \theta = \frac{1}{\lambda} \underline{\underline{K}}_T \theta. \quad (5.18)$$

Si ricordi che se le matrici del sistema sono simmetriche e definite positive, eventualmente semidefinita positiva la  $\underline{\underline{K}}$ , come quelle di cui sopra, gli autovalori, a parte quelli relativi ai modi rigidi, saranno reali e positivi. Inoltre se multipli porteranno ad una corrispondente molteplicità degli autovettori. Perciò tali matrici saranno sempre diagonalizzabili. Se invece le matrici non sono simmetriche, come nel caso termoelastico integrato, non è garantito che ad autovalori multipli siano associati autovettori di pari molteplicità (cioè la molteplicità algebrica potrà essere maggiore di quella geometrica). L'impossibilità di calcolare tutti gli autovettori rende le matrici non diagonalizzabili. In questi casi ci si può ancora ridurre ad una rappresentazione "minima" che non è perfettamente diagonale e che conterrà dei sotto-blocchi a cavallo della diagonale del tipo

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

La matrice risultante "quasi diagonale" viene detta forma di Jordan.

Il metodo delle potenze calcola un solo autovalore, perciò si deve ricorrere ad una qualche tecnica di deflazione per calcolare i successivi. Per fare questo, noto il primo autovettore  $\underline{x}_1$ , si parte da un vettore iniziale di tentativo  $\underline{z}_2$  e dalla considerazione che gli autovettori sono ortogonali attraverso la matrice di massa<sup>3</sup> e quindi  $\underline{x}_2^T \underline{\underline{M}} \underline{x}_1 = 0$ . Ad ogni iterazione del metodo delle potenze si proietta il nuovo vettore  $\underline{z}_2^{(k+1)}$  in modo da ottenere un vettore che sia sempre ortogonale all'autovettore  $\underline{x}_1$ , ossia

$$\underline{z}_2^{(k+1)T} = \underline{z}_2^{(k)T} - \alpha \underline{x}_1^T, \quad (5.20)$$

$$\underline{z}_2^{(k+1)T} \underline{\underline{M}} \underline{x}_1 = \underline{z}_2^{(k)T} \underline{\underline{M}} \underline{x}_1 - \alpha \underline{x}_1^T \underline{\underline{M}} \underline{x}_1, \quad (5.21)$$

$$\alpha = \frac{\underline{z}_2^{(k)T} \underline{\underline{M}} \underline{x}_1}{\underline{x}_1^T \underline{\underline{M}} \underline{x}_1}. \quad (5.22)$$

Tale procedimento va applicato ad ogni passo, o comunque dopo un certo numero ridotto di passi, perché spesso gli errori numerici di arrotondamento possono rendere non perfetta l'ortogonalità. L'algoritmo non è niente altro che una estensione, modificata, del classico metodo di ortogonalizzazione di *Gram-Schmidt*, e si estende facilmente al calcolo dell'autosoluzione  $n + 1$  una volta disponibili le prime  $n$ .

Nel caso non simmetrico, quale quello che occorrerebbe risolvere se si volesse arrivare ad una condensazione modale del modello termoelastico accoppiato, non si possono utilizzare le proprietà di ortogonalità del caso simmetrico<sup>4</sup> ma si possono recuperare proprietà analoghe utilizzando le autosoluzioni sinistre, cioè quelle associate al problema

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{y} = \lambda \underline{y}. \quad (5.23)$$

autv-sin

<sup>3</sup> Lo sono anche rispetto alla matrice di rigidezza, ma se la massa è diagonale i calcoli risultano più rapidi. Inoltre l'ortogonalizzazione rispetto alla rigidezza richiederebbe attenzione in presenza di modi rigidi.

<sup>4</sup> Si ricorda che nel caso di matrice  $A$  simmetrica la matrice diagonale degli autovalori è pari a  $\underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}}$ , mentre nei casi generali  $\underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{X}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}}$ , ossia per il caso simmetrico la matrice degli autovettori è ortogonale e quindi  $\underline{\underline{X}}^{-1} = \underline{\underline{X}}^T$ .

La denominazione “sinistri” si riferisce al fatto che il problema (5.23), può essere riformulato come  $\underline{y}^T \underline{A} = \lambda \underline{y}^T$ , cioè senza trasporre la matrice e utilizzando dei vettori riga, che però adesso sono a sinistra della matrice  $\underline{A}$ . I due problemi

$$\underline{A} \underline{x} = \lambda \underline{x}, \quad (5.24)$$

$$\underline{A}^T \underline{y} = \lambda \underline{y}, \quad (5.25)$$

posseggono i medesimi autovalori, perciò moltiplicando la prima equazione per  $\underline{y}^T$ , la seconda per  $\underline{x}$  e facendo la differenza delle due si dimostra che per autovalori distinti gli autovettori sinistri sono ortogonali a quelli destri, sia fra di loro che rispetto alla matrice  $\underline{A}$ . A tutti gli effetti si possono quindi utilizzare i trasposti di tali vettori laddove verrebbero utilizzati i trasposti degli autovettori del problema simmetrico, che sono ovviamente sia destri che sinistri. Assumiamo qui che il sistema sia diagonalizzabile così che, nel caso fosse possibile calcolare tutte le autosoluzioni sinistre, è chiaro che la corrispondente matrice trasposta altro non sarebbe che l'inversa della matrice degli autovettori destri, ossia  $\underline{Y}^T = \underline{X}^{-1}$  e viceversa  $\underline{Y}^{-1} = \underline{X}^T$ . Pertanto la conoscenza degli autovettori sinistri corrispondenti al sottospazio degli autovettori destri di interesse permette di determinare il pezzo dell'inversa della matrice degli autovettori necessaria ad ottenere la trasformazione di similarità richiesta per la condensazione di un sistema dinamico non simmetrico. È evidente come sia molto meno costoso calcolare un sottoinsieme di autovettori destri e i corrispondenti autovettori sinistri piuttosto che fare il calcolo della matrice completa degli autovettori destri e poi invertirla per ottenere gli autovettori sinistri che ortogonalizzano il problema nel sottospazio di interesse. È quindi di fondamentale importanza utilizzare una doppia iterazione con il metodo delle potenze, una per il sottospazio destro, e una per il sottospazio sinistro

$$\underline{z}_d^{(k+1)} = \underline{A}^{-1} \underline{z}_d^{(k)}, \quad (5.26)$$

$$\underline{z}_s^{(k+1)} = \underline{A}^{-T} \underline{z}_s^{(k)}. \quad (5.27)$$

Le proprietà di convergenza e la necessità di separazione saranno le stesse per entrambi i problemi, mentre le formule per l'ortogonalizzazione necessaria al fine di calcolare delle autosoluzioni successive alla prima, per il caso degli autovettori saranno

$$\underline{z}_d^{(k+1)T} = \underline{z}_d^{(k)T} - \alpha_d \underline{x}_1^T, \quad (5.28)$$

$$\underline{z}_d^{(k+1)T} \underline{y}_1 = \underline{z}_d^{(k)T} \underline{y}_1 - \alpha_d \underline{x}_1^T \underline{y}_1, \quad (5.29)$$

$$\alpha_d = \frac{\underline{z}_d^{(k)T} \underline{y}_1}{\underline{x}_1^T \underline{y}_1}, \quad (5.30)$$

$$\underline{z}_s^{(k+1)T} = \underline{z}_s^{(k)T} - \alpha_s \underline{y}_1^T, \quad (5.31)$$

$$\underline{z}_s^{(k+1)T} \underline{x}_1 = \underline{z}_s^{(k)T} \underline{x}_1 - \alpha_s \underline{y}_1^T \underline{x}_1, \quad (5.32)$$

$$\alpha_s = \frac{\underline{z}_s^{(k)T} \underline{x}_1}{\underline{y}_1^T \underline{x}_1}, \quad (5.33)$$

$$(5.34)$$

## 5.1 METODO DELLE POTENZE A BLOCCHI

Come già rilevato nel calcolo dei modi propri è tutt'altro che raro trovare autovalori vicini o addirittura coincidenti; senza pensare al già citato caso dei modi rigidi, si pensi semplicemente a casi per cui si sia in presenza di simmetrie geometriche, inerziali o elastiche. In questi casi il metodo delle potenze così come è stato presentato sembrerebbe di scarsa utilità pratica. Come già accennato, in passato si utilizzavano tecniche di cambiamento dell'origine, per portare ad una separazione dei modi una volta raggiunta la convergenza sul sottospazio dei modi vicini. Tale tecnica è però assai onerosa in quanto richiede ripetute rifattorizzazioni della matrice  $\underline{K} - \alpha \underline{M}$ , che deve anche essere assoggettata a tecniche di pivoting per garantirne la stabilità numerica

non essendo più definita positiva. Si preferisce quindi utilizzare altre tecniche che sono venute evolvendosi in modi numericamente raffinati con codici liberi, altamente efficienti e facilmente reperibili, in rete. Molti di questi metodi iterativi appartengono alla classe dei metodi ai sottospazi di *Krylov*, fra cui ricordiamo il metodo di Arnoldi, di Lanczos, semplice e a blocchi, come i più diffusi. Noi presenteremo qui un metodo più classico, ossia il metodo delle potenze a blocchi o iterazione su sottospazi (detto anche *Stodola/Vianello* a blocchi), attualmente un po' meno "di moda" di un tempo ma comunque numericamente assai efficiente e stabile, facilmente utilizzabile anche per la condensazione di problemi non simmetrici e di sicura validità. Tale metodo risulta comunque propedeutico anche per gli altri metodi più sofisticati sopra citati <sup>5</sup>. Il metodo delle potenze a blocchi permette di estendere il calcolo effettuato con il metodo delle potenze a tutti gli autovettori/autovalori che si vogliono calcolare sostituendo all'espressione vettoriale

$$\underline{u}^{(k+1)} = \underline{K}^{-1} \underline{M} \underline{u}^{(k)}, \quad (5.35)$$

l'espressione matriciale

$$\underline{U}^{(k+1)} = \underline{K}^{-1} \underline{M} \underline{U}^{(k)}, \quad (5.36)$$

pot-blok

in cui la matrice  $\underline{U}^0$  di partenza può essere scelta arbitrariamente, purché al solito non manchi di componenti nel sottospazio degli autovettori che si vogliono determinare. La matrice  $\underline{U}^{(k+1)}$  non potrà che arricchirsi sempre più del sottospazio corrispondente allo spettro di bassa frequenza d'interesse, grazie alle caratteristiche filtranti del metodo delle potenze evidenziate dalla (5.7). Al fine di garantire anche la corretta proiezione sui corrispondenti autovettori, e non solo il raggiungimento di una base di bassa frequenza, introduciamo il *coefficiente di Rayleigh*, che esprime il rapporto tra l'energia elastica e un parente di quella cinetica <sup>6</sup>

$$\lambda_R = \frac{\underline{u}^T \underline{K} \underline{u}}{\underline{u}^T \underline{M} \underline{u}}. \quad (5.37)$$

Rayl

È facile vedere che se al posto di un vettore  $\underline{u}$  generico si inserisce un autovettore  $\underline{x}$ , il coefficiente di Rayleigh diviene pari a  $\omega^2$ , ossia l'autovalore corrispondente (moltiplicando l'equazione (5.8) per l'autovettore trasposto). Il valore di questo coefficiente nell'intorno di un autovettore gode di una interessante proprietà che andiamo a determinare operativamente. Definiamo un vettore  $\underline{u}$  costituito dall'autovettore  $\underline{x}$  in esame più una piccola perturbazione, che possiamo rappresentare come una combinazione lineare delle colonne della matrice di tutti gli autovettori meno  $\underline{x}$ , che chiameremo  $\underline{X}$ . Allora  $\underline{u} = \underline{X} \underline{\alpha} + \underline{x}$ , con  $\underline{\alpha}$  un vettore di coefficienti adeguatamente piccoli. Il coefficiente di Rayleigh calcolato per  $\underline{u}$  diventa

$$\lambda_R = \frac{\underline{x}^T \underline{K} \underline{x} + 2 \underline{x}^T \underline{K} \underline{X} \underline{\alpha} + \underline{\alpha}^T \underline{X}^T \underline{K} \underline{X} \underline{\alpha}}{\underline{x}^T \underline{M} \underline{x} + 2 \underline{x}^T \underline{M} \underline{X} \underline{\alpha} + \underline{\alpha}^T \underline{X}^T \underline{M} \underline{X} \underline{\alpha}} = \frac{\underline{x}^T \underline{K} \underline{x} + \underline{\alpha}^T \text{Diag} \{k_i\} \underline{\alpha}}{\underline{x}^T \underline{M} \underline{x} + \underline{\alpha}^T \text{Diag} \{m_i\} \underline{\alpha}}, \quad (5.38)$$

in cui il doppio prodotto è nullo per l'ortogonalità tra gli autovettori rispetto alle matrici di massa e rigidezza. Pertanto, risultando dipendente dalla sola variazione quadratica, il coefficiente di Rayleigh è stazionario in prossimità di un autovettore. Difatti

$$\lambda_R \approx \frac{1}{\underline{x}^T \underline{M} \underline{x}} (\underline{x}^T \underline{K} \underline{x} + \underline{\alpha}^T \text{Diag} \{k_i\} \underline{\alpha}) \left( 1 - \frac{\underline{\alpha}^T \text{Diag} \{m_i\} \underline{\alpha}}{\underline{x}^T \underline{M} \underline{x}} \right) = \frac{\underline{x}^T \underline{K} \underline{x}}{\underline{x}^T \underline{M} \underline{x}} + O(|\underline{\alpha}|^2) \quad (5.39)$$

da cui si vede che non ci sono termini lineari in  $\alpha$  e che quindi, a meno di infinitesimi di ordine superiore, il gradiente  $\frac{\partial \lambda_R}{\partial \alpha}$  è nullo e quindi  $\lambda_R$  è stazionario nell'intorno di una forma modale. Questo spiega perché, anche a partire da forme modali approssimate con errori significativi, attraverso il coefficiente di Rayleigh, si ottengono errori piccoli sul valore dell'autovalore. Il coefficiente di Rayleigh ci permette anche di valutare la sensibilità di una certa frequenza relativa ad una forma

<sup>5</sup>Si rimanda il lettore interessato al buon testo: Y. Saad, Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems, 2011.

<sup>6</sup> Asserto sbagliato dimensionalmente ma utile come promemoria.

modale per piccole variazioni della matrice di massa o di rigidità. Difatti esso ci dice che anche se la forma modale cambia significativamente la frequenza relativa si sposta di poco.

Essendo ragionevole supporre che ci siano zone di separazione fra le frequenze proprie, l'uso delle iterazioni a blocchi del tipo (5.36), grazie alle proprietà di filtraggio del metodo delle potenze, farà emergere il sottospazio degli autovettori cercati. Ciascuna delle colonne del blocco  $\underline{\underline{U}}^{(k)}$  che emergerà non sarà però pari ad un autovettore, bensì una combinazione lineare dei modi che fanno parte della sottospazio che si vuole far emergere: il metodo non separa i modi. Per separarli utilizziamo il coefficiente di Rayleigh. Se infatti diciamo che il generico modo proprio sia rappresentabile come  $\underline{u} = \underline{\underline{U}}^{(k)} \underline{\alpha} = \underline{\underline{U}} \underline{\alpha}$

$$\lambda_R = \frac{\underline{u}^T \underline{\underline{K}} \underline{u}}{\underline{u}^T \underline{\underline{M}} \underline{u}} = \frac{\underline{\alpha}^T \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}} \underline{\alpha}}{\underline{\alpha}^T \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{U}} \underline{\alpha}} = \frac{\underline{\alpha}^T \underline{\underline{\tilde{K}}} \underline{\alpha}}{\underline{\alpha}^T \underline{\underline{\tilde{M}}} \underline{\alpha}}. \quad (5.40)$$

Al procedere delle iterazioni la matrice  $\underline{\underline{U}}$  tende ad essere sempre di più la matrice delle forme modali e le matrici  $\underline{\underline{\tilde{K}}}$  e  $\underline{\underline{\tilde{M}}}$  saranno sempre più simili a matrici diagonali. Sfruttando ancora una volta la stazionarietà del coefficiente di Rayleigh possiamo scrivere che

$$\frac{\partial \lambda_R}{\partial \underline{\alpha}} = 2 \frac{\underline{\underline{\tilde{K}}} \underline{\alpha} \underline{\alpha}^T \underline{\underline{\tilde{M}}} \underline{\alpha} - \underline{\alpha}^T \underline{\underline{\tilde{K}}} \underline{\alpha} \underline{\underline{\tilde{M}}} \underline{\alpha}}{\left( \underline{\alpha}^T \underline{\underline{\tilde{M}}} \underline{\alpha} \right)^2} = 0, \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial \lambda_R}{\partial \underline{\alpha}} = 2 \frac{\underline{\underline{\tilde{K}}} \underline{\alpha} - \frac{\underline{\alpha}^T \underline{\underline{\tilde{K}}} \underline{\alpha}}{\underline{\alpha}^T \underline{\underline{\tilde{M}}} \underline{\alpha}} \underline{\underline{\tilde{M}}} \underline{\alpha}}{\underline{\alpha}^T \underline{\underline{\tilde{M}}} \underline{\alpha}} = 0, \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial \lambda_R}{\partial \underline{\alpha}} = 2 \frac{\underline{\underline{\tilde{K}}} \underline{\alpha} - \lambda_R \underline{\underline{\tilde{M}}} \underline{\alpha}}{\underline{\alpha}^T \underline{\underline{\tilde{M}}} \underline{\alpha}} = 0, \quad (5.43)$$

da cui si ottiene il cosiddetto problema agli autovalori ridotto

$$\underline{\underline{\tilde{K}}} \underline{\alpha} = \lambda_R \underline{\underline{\tilde{M}}} \underline{\alpha} \quad (5.44)$$

Determinati gli autovettori di questo problema  $\underline{\alpha}_v$ , che ricordiamo è di dimensioni ridotte rispetto al problema originario, potremo ottenere i modi propri del problema originario come

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{U}}^{(k)} \underline{\alpha}_v. \quad (5.45)$$

Il metodo delle potenze a blocchi consiste quindi nei seguenti passi:

1. calcolare i fattori di Choleski di  $\underline{\underline{K}}$ , scrivendo  $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}}$ ;
2. scelta della base iniziale  $\underline{\underline{U}}^{(0)}$ ;
3. applicazione di uno o più passi del metodo delle potenze a blocchi,  $\underline{\underline{U}}^{(k+1)} = \underline{\underline{R}}^{-1}(\underline{\underline{R}}^{-T}(\underline{\underline{M}} \underline{\underline{U}}^{(k)}))$  solitamente uno solo;
4. calcolo della matrici  $\underline{\underline{\tilde{K}}}$  e  $\underline{\underline{\tilde{M}}}$ , dei coefficienti di Rayleigh e risoluzione del problema agli autovalori ridotto,  $\lambda_R$  e  $\underline{\alpha}_v$ ;
5. rivalutazione della base in modo che  $\underline{\underline{U}}^{(k+1)} = \underline{\underline{U}}^{(k+1)} \underline{\alpha}_v$  e sua normalizzazione;
6. se le matrici  $\underline{\underline{\tilde{K}}}$  e  $\underline{\underline{\tilde{M}}}$  non sono sufficientemente diagonali si itera di nuovo, ripetendo la procedura dal passo (3).

È utile rilevare che il numero di termini da utilizzare per l'iterazione a blocchi dovrà essere in numero leggermente più elevato delle autosoluzioni richieste. Una regola empirica spesso utilizzata consiste nel raddoppiare il numero richiesto se inferiore a venti mentre per sottospazi più ampi si raggiunge il doppio del raggruppamento di autovalori più vicini al sottospazio di interesse, e in mancanza di informazioni si sceglie un numero fra dieci e venti. Tali considerazioni sono di

massima e vanno utilizzate con un po' di cautela. Allo scopo di poter valutare se non si è persa alcuna autosoluzione del sottospazio di interesse si richiama, senza dimostrazione e per il solo caso simmetrico, il metodo di *Sturm*. Esso permette di effettuare tale verifica e consiste nel valutare la fattorizzazione LDL della matrice  $(\underline{\underline{K}} - \bar{\omega}^2 \underline{\underline{M}})$  dopodiché il numero di termini negativi della matrice diagonale  $\underline{\underline{D}}$  corrisponde al numero di frequenze proprie minori di  $\bar{\omega}$ . Naturalmente tale tecnica si può applicare a priori, per determinare il numero di autosoluzioni necessarie, o a posteriori per verificare che non si siano perse soluzioni nell'iterazione a blocchi. In realtà sarebbe meglio utilizzarla sia prima che dopo ma va rilevato che tale operazione, a causa delle fattorizzazioni che richiede, ha un costo computazionale percentualmente rilevante rispetto al calcolo delle autosoluzioni richieste.

Una formulazione alternativa, sostanzialmente di pari costo, vedi esemplificazione in bacheca didattica, consiste nel:

- calcolare i fattori di Choleski di  $\underline{\underline{K}}$ , scrivendo  $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}}$  e definire  $\underline{\underline{y}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{u}}$  onde, per semplice sostituzione, ricondursi al problema simmetrico standard  $\lambda \underline{\underline{y}} = \underline{\underline{R}}^{-T} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{R}}^{-1} \underline{\underline{y}}$ ;
- eseguire l'iterazione  $\underline{\underline{Y}}^{(k+1)} = \underline{\underline{R}}^{-T} (\underline{\underline{M}} (\underline{\underline{R}}^{-1} \underline{\underline{Y}}^{(k)}))$ , ricordandosi che le inverse di  $\underline{\underline{R}}$  corrispondono a passi avanti-indietro, utilizzando il coefficiente di Rayleigh  $\lambda_R = \underline{\underline{y}}^T \underline{\underline{R}}^{-T} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{R}}^{-1} \underline{\underline{y}} / (\underline{\underline{y}}^T \underline{\underline{y}})$ , mantenendo  $\underline{\underline{Y}}$  ortonormato,  $\underline{\underline{Y}}^T \underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{I}}$  durante l'iterazione, così da operare con un problema ridotto, simmetrico, standard  $(\underline{\underline{Y}}^T \underline{\underline{R}}^{-T} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{R}}^{-1} \underline{\underline{Y}}) \underline{\underline{\alpha}} = \lambda_R \underline{\underline{\alpha}}$ , a cui abbineremo la proiezione ottimale di Rayleigh:  $\underline{\underline{Y}} \underline{\underline{\alpha}}$ ;
- a convergenza avvenuta calcolare  $\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{R}}^{-1} \underline{\underline{Y}}$ .

Nel caso di matrici non simmetriche la definizione del coefficiente di Rayleigh necessita degli autovettori sinistri ed è, per il più generale problema  $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}} = \lambda \underline{\underline{B}} \underline{\underline{x}}$ , la seguente

$$\lambda_R = \frac{\underline{\underline{y}}^T \underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}}}{\underline{\underline{y}}^T \underline{\underline{B}} \underline{\underline{x}}}, \quad (5.46)$$

per cui grazie all'ortogonalità degli autovettori sinistri rispetto ai destri, tramite le matrici  $\underline{\underline{A}}$  e  $\underline{\underline{B}}$ , ossia per pseudo prodotti scalari del tipo  $\underline{\underline{y}}_i^T \underline{\underline{B}} \underline{\underline{x}}_k$  o  $\underline{\underline{y}}_i^T \underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}}_k$ , viene mantenuta la proprietà di stazionarietà. In questo caso quindi, previa fattorizzazione  $\underline{\underline{L}} \underline{\underline{U}}$  di  $\underline{\underline{A}}$ ,  $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{U}}$ , verranno risolti ad ogni passo due metodi delle potenze a blocchi

$$\underline{\underline{X}}^{(k+1)} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{X}}^{(k)} = \underline{\underline{U}}^{-1} (\underline{\underline{L}}^{-1} (\underline{\underline{B}} \underline{\underline{X}}^{(k)})) \quad (5.47)$$

$$\underline{\underline{Y}}^{(k+1)} = \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^{-T} \underline{\underline{Y}}^{(k)} = \underline{\underline{B}}^T (\underline{\underline{L}}^{-T} (\underline{\underline{U}}^{-T} \underline{\underline{Y}}^{(k)})). \quad (5.48)$$

Il generico modo è dato da  $\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{X}}^{(k)} \underline{\underline{\alpha}}_d$  e  $\underline{\underline{y}} = \underline{\underline{Y}}^{(k)} \underline{\underline{\alpha}}_s$ , per cui il coefficiente di Rayleigh si scrive come

$$\lambda_R = \frac{\underline{\underline{y}}^T \underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}}}{\underline{\underline{y}}^T \underline{\underline{B}} \underline{\underline{x}}} = \frac{\underline{\underline{\alpha}}_s^T \underline{\underline{Y}}^T \underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} \underline{\underline{\alpha}}_d}{\underline{\underline{\alpha}}_s^T \underline{\underline{Y}}^T \underline{\underline{B}} \underline{\underline{X}} \underline{\underline{\alpha}}_d} = \frac{\underline{\underline{\alpha}}_s^T \tilde{\underline{\underline{A}}} \underline{\underline{\alpha}}_d}{\underline{\underline{\alpha}}_s^T \tilde{\underline{\underline{B}}} \underline{\underline{\alpha}}_d}, \quad (5.49)$$

Scrivendo la stazionarietà di  $\lambda_R$  rispetto ad  $\underline{\underline{\alpha}}_s$  si ottiene il problema ridotto destro

$$\tilde{\underline{\underline{A}}} \underline{\underline{\alpha}}_d = \lambda_R \tilde{\underline{\underline{B}}} \underline{\underline{\alpha}}_d, \quad (5.50)$$

mentre la stazionarietà rispetto ad  $\underline{\underline{\alpha}}_d$  fornisce il problema ridotto sinistro

$$\underline{\underline{\alpha}}_s^T \tilde{\underline{\underline{A}}} = \lambda_R \underline{\underline{\alpha}}_s^T \tilde{\underline{\underline{B}}}, \quad (5.51)$$

pari a

$$\tilde{\underline{\underline{A}}}^T \underline{\underline{\alpha}}_s = \lambda_R \tilde{\underline{\underline{B}}}^T \underline{\underline{\alpha}}_s. \quad (5.52)$$

Si noti che basta risolvere solo il problema ridotto per le autosoluzioni destre, in quanto calcolare l'insieme degli autovettori sinistri tramite l'inversione della matrice dell'insieme degli autovettori



destri costa meno che non ricalcolare ex novo le autosoluzioni sinistre. Questi due problemi ridotti verranno utilizzati per aggiornare le due basi ad ogni passo.

Come dovrebbe apparire da quanto presentato, le stesse considerazioni valgono per la parte termica, previa opportuna sostituzione delle matrici di massa e rigidezza con le matrici di capacità e conduzione termica. Il problema risulterà però simmetrico solo in assenza dello Jacobiano dei termini radianti, in generale non lineare, anche se la matrice di radiazione è simmetrica, per la presenza dei termini  $4\tilde{T}^3$ . La condensazione nel caso termoelastico può avvenire sia attraverso un doppio calcolo modale distinto della parte elastomeccanica e di quella termica, generalmente utilizzato nel caso in cui anche il problema delle autosoluzioni termiche è simmetrico, sia attraverso la risoluzione di un problema agli autovalori non simmetrico unificato termoelastodinamico.

Anche per il caso non simmetrico è applicabile una formulazione alternativa, sostanzialmente di pari costo, vedi esemplificazione in bacheca didattica, consistente nel:

- calcolare la fattorizzazione  $\underline{\underline{L}}\underline{\underline{U}}$  di  $\underline{\underline{A}}$ , scrivendo  $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\underline{\underline{U}}$ , definire  $\underline{z} = \underline{\underline{U}} \underline{x}$  e  $\underline{w} = \underline{\underline{L}}^T \underline{y}$  onde, per semplice sostituzione, ricondursi al problema non simmetrico standard  $\lambda \underline{z} = \underline{\underline{L}}^{-T} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{U}}^{-1} \underline{z}$ ;
- eseguire le iterazioni  $\underline{\underline{Z}}^{(k+1)} = \underline{\underline{L}}^{-1}(\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{U}}^{-1} \underline{\underline{Z}}^{(k)}))$  e  $\underline{\underline{W}}^{(k+1)} = \underline{\underline{U}}^{-T}(\underline{\underline{B}}^T(\underline{\underline{L}}^{-T} \underline{\underline{W}}^{(k)}))$ , ricordandosi che le inverse di  $\underline{\underline{L}}$  e  $\underline{\underline{U}}$  corrispondono a passi avanti-indietro, utilizzando il coefficiente di Rayleigh  $\lambda_R = \underline{w}^T \underline{\underline{L}}^{-1} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{U}}^{-1} \underline{z} / (\underline{w}^T \underline{z})$ , mantenendo  $\underline{\underline{W}}$  e  $\underline{\underline{Z}}$  ortonormati,  $\underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{I}}$  durante l'iterazione, così da operare con un problema ridotto, non simmetrico, standard  $(\underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{L}}^{-1} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{U}}^{-1} \underline{\underline{Z}})_{\alpha_d} = \lambda_{R\alpha_d}$ , a cui abbineremo le proiezioni ottimali di Rayleigh:  $\underline{\underline{Z}}_{\alpha_d}$  e  $\underline{\underline{W}}_{\alpha_d}^{-T}$ ;
- a convergenza avvenuta calcolare  $\underline{X} = \underline{\underline{U}}^{-1} \underline{\underline{Z}}$  e  $\underline{Y} = \underline{\underline{L}}^{-T} \underline{\underline{W}}$ . Si ricordi che, oltre che per le proiezioni ottimali di Rayleigh,  $\underline{\underline{Y}}$  serve anche per ogni eventuale successiva condensazione modale di modelli aventi matrici non simmetriche.

Nel caso non simmetrico è però spesso preferibile utilizzare un'iterazione a blocchi su sottospazio di Schur, vedi esemplificazione in bacheca didattica. Come abbiamo già notato il calcolo di un autosottospazio di condensazione non ci interessa tanto per la possibilità di diagonalizzare ma per la sua efficienza nell'ottimizzare un'approssimazione di ordine ridotto. Va da se quindi che quel che conta è la determinazione di una base qualunque che lo ricopra, meglio se determinabile in maniera numericamente efficiente e stabile, con l'ulteriore vantaggio di operare comunque su numeri reali, senza dover prestare particolari attenzioni anche in presenza di autovalori complessi e coniugati. Tutte cose che spesso non sono associabili alle autosoluzioni. Se però non si volesse proprio rinunciare agli autovettori, una volta determinato il relativo sottospazio di Schur si potrà facilmente trasformarlo in quello delle autosoluzioni desiderate. Così che se la cosa fallisse ci convinceremmo che è meglio utilizzare un sottospazio di Schur, senza aver sprecato tempo inutilmente con iterazioni su blocchi di autovettori malcondizionati. Lo schema di massima, un po' ripetitivo, potrebbe essere:

- calcolare la fattorizzazione  $\underline{\underline{L}}\underline{\underline{U}}$  di  $\underline{\underline{A}}$ , scrivendo  $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\underline{\underline{U}}$ , definire  $\underline{z} = \underline{\underline{U}} \underline{x}$  e  $\underline{w} = \underline{\underline{L}}^T \underline{y}$  onde, per semplice sostituzione, ricondursi al problema non simmetrico standard  $\lambda \underline{z} = \underline{\underline{L}}^{-T} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{U}}^{-1} \underline{z}$ ;
- eseguire l'iterazione  $\underline{\underline{Z}}^{(k+1)} = \underline{\underline{L}}^{-1}(\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{U}}^{-1} \underline{\underline{Z}}^{(k)}))$  e  $\underline{\underline{W}}^{(k+1)} = \underline{\underline{U}}^{-T}(\underline{\underline{B}}^T(\underline{\underline{L}}^{-T} \underline{\underline{W}}^{(k)}))$ , ricordandosi che le inverse di  $\underline{\underline{L}}$  e  $\underline{\underline{U}}$  corrispondono a passi avanti-indietro, utilizzando il coefficiente di Rayleigh  $\lambda_R = \underline{w}^T \underline{\underline{L}}^{-1} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{U}}^{-1} \underline{z} / (\underline{w}^T \underline{z})$ , mantenendo  $\underline{\underline{W}}$  e  $\underline{\underline{Z}}$  ortonormati,  $\underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{I}}$ , durante l'iterazione, così da operare con un problema ridotto, non simmetrico, con matrice  $\underline{\underline{A}}_r = \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{L}}^{-1} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{U}}^{-1} \underline{\underline{Z}}$ , della quale calcoleremo sia la forma di Schur,  $\underline{\underline{A}}_s$ , che la relativa matrice ortonormata di trasformazione,  $\underline{\underline{T}}_s$ , a cui abbineremo le proiezioni ottimali di Rayleigh:  $\underline{\underline{Z}}_{\underline{\underline{T}}_s}$  e  $\underline{\underline{W}}_{\underline{\underline{T}}_s}^T$ ;
- a convergenza avvenuta calcoleremo i sottospazi di Schur sullo spazio di partenza  $\underline{X} = \underline{\underline{U}}^{-1} \underline{\underline{Z}}$  e  $\underline{Y} = \underline{\underline{L}}^{-T} \underline{\underline{W}}$ . Si ricordi che, oltre che per le proiezioni ottimali di Rayleigh,  $\underline{\underline{Y}}$  serve anche per ogni eventuale successiva condensazione modale di modelli aventi matrici non simmetriche.



- se si volesse tentare comunque l'ottenimento della relativa base di autovettori basterà calcolare le autosoluzioni del problema condensato:  $(\underline{Y}^T \underline{A} \underline{X})_{\underline{\alpha}} = (\underline{Y}^T \underline{B} \underline{X})_{\underline{\alpha}} \text{Diag}\{\lambda\}$ , calcolando poi gli autovettori finali, destri e sinistri, con le:  $\underline{X}_d = \underline{X} \underline{\alpha}$  e  $\underline{Y}_s = \underline{Y} \underline{\alpha}^{-T}$ .

## 5.2 PROVE DI VIBRAZIONE AL SUOLO

In ambito aerospaziale i calcoli modali sono, praticamente sempre, spesso per imposizione dalla normativa di certificazione, verificati con opportune prove di vibrazione al suolo del velivolo, e/o di sue parti. Non intendiamo qui entrare nei particolari di tali prove sperimentali, che sono una parte importante di un altro corso, ma solo informare che con esse si cerca di ricostruire gli stessi risultati dei calcoli sui modelli numerici, cioè: frequenze, masse generalizzate (quindi anche le relative rigidezze), forme modali discretizzate (nei punti e nelle direzioni in cui sono posti un numero di sensori di movimento adeguati a rappresentare, per interpolazione dei risultati sperimentali, il troncamento di una sottintesa base completa di funzioni di spostamento). Le prove permettono inoltre valutazioni plausibili del “mitico” smorzamento modale e della sua “struttura matriciale”.<sup>7</sup> La loro esecuzione risulta fondamentale per validare e eventualmente correggere i modelli elasto-meccanici di calcolo. Sarà così possibile utilizzare con fiducia questi ultimi nelle fasi più avanzate delle analisi di progetto. Anche se in modo un po' approssimativo è facile intuire che, grazie anche alla possibile disponibilità dei risultati delle prove statiche, in ambito aeroelastico un modello elasto-meccanico validato permette di limitare le, numerose e onerosissime, analisi di sensibilità ai parametri di modellazione numerica sostanzialmente agli aspetti aerodinamici e non lineari, contribuendo efficientemente a una più spedita esecuzione dei calcoli finali di stabilità (flutter) e risposta nella critica fase di pre-certificazione del velivolo. Rimarchiamo infine che tali prove di vibrazione al suolo comprendono anche i modi rigidi, ottenuti grazie all'uso di sistemi di supporto-sospensione che fanno corrispondere ai modi rigidi del velivolo modi deformabili, ma con deformabilità concentrata nei soli elementi di supporto. Aggiungiamo che tale modalità operativa è facilmente realizzabile se la frequenza della sospensione risulta ben separata rispetto alla più bassa deformabile. Tale condizione può generare però dei problemi pratici nel caso che quest'ultima sia molto bassa, come accade per le strutture “jumbo”, in quanto per mantenere i modi rigidi della struttura lasciando deformare solo la sospensione occorrono supporti estremamente deformabili, con conseguenti grandi spostamenti associati allo stabilirsi della condizione di equilibrio sospesa, condizione che può essere irrealizzabile per mancanza di spazio nell'edificio di prova. Utilizzando un programma tipo ScicosLab o Octave si suggerisce di verificare quanto sopra ripetendo il seguente semplice esercizio (di Dinamica dei Sistemi Aerospaziali) per diversi valori delle masse e della molla:

- analisi completa dei modi di vibrare di due masse, in moto unidirezionale, collegate fra loro da una molla ma libere rispetto al riferimento;
- vincolare una massa al suolo con una molla di sospensione e valutare come variano, al variare della rigidezza del supporto, i modi rispetto al modello precedente;
- trovata una soluzione con risultati del sistema supportato praticamente uguali a quello libero applicare le forze peso e calcolare la posizione di equilibrio.
- valutare la risposta attorno alla posizione di equilibrio per alcune forzanti tipiche, in termini di movimento assoluto e relativo delle due masse. Usando come forzanti quelle armoniche (come spesso accadeva in Dinamica dei Sistemi Aerospaziali) si potrà ricostruire la funzione di trasferimento, esercitandosi poi anche a un semplice utilizzo della precedentemente menzionata analisi in frequenza alla Fourier.

---

<sup>7</sup>Per un esempio, semplice e didatticamente utile, di una possibile tecnica di conduzione delle prove di vibrazione al suolo con appropriazione modale si potrà anche leggere il capitolo relativo nelle vecchie, ma sempre buone, dispense del Prof. Giavotto (Strutture Aeronautiche, Parte Seconda, pg. 37-43. Si noti che l'insieme della parte seconda di tali dispense è sicuramente utile anche per il nostro corso).

## Capitolo 6

# SMORZAMENTO STRUTTURALE

Finora abbiamo considerato problemi di risposta di sistemi strutturali dissipativi e elastici lineari, basati cioè su equazioni del tipo  $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F$ , con smorzamento strutturale modale assunto diagonale, basandoci, a priori, sostanzialmente sull'assunzione di smorzamento proporzionale. Vogliamo ora dire qualcosa di più proprio sullo smorzamento strutturale. Tale smorzamento è un fenomeno alquanto complesso, per la cui valutazione si deve spesso ricorrere a rilevazioni sperimentali.

Nel campo delle strutture aeronautiche è noto che il fattore di smorzamento  $\xi \simeq \frac{\sigma}{\omega}$  è dell'ordine dei millesimi/centesimi per singoli componenti, di centesimi/decimi per le strutture assemblate con giunzioni rivettate. Questo aumento del fattore di smorzamento è dovuto alla dissipazione coulombiana che si genera dallo scorrimento relativo fra le parti delle giunzioni. Tale dissipazione è generata da forze del tipo:  $\underline{R} = -f(|\underline{v}|) N \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$ , ovvero è legata alla velocità da una relazione non lineare, i cui parametri costituenti sono valutabili in modo assai approssimato, anche quando vengono usate macchine rivettatrici automatiche, comunque ben diversa da  $\underline{R} = -C\underline{v}$  che è la relazione spesso utilizzata praticamente, con poche o nulle giustificazioni (fisiche) se non la linearità.

Ciononostante si deve spesso comunque ricorrere per convenienza di calcolo a rappresentazioni dell'attrito, lineari e viscose, valutate con coefficienti di proporzionalità atti a rappresentare una dissipazione energeticamente equivalente alla dissipazione media reale.

D'altro canto i dati sperimentali evidenziano spesso una rappresentazione del sistema strutturale in coordinate modali sostanzialmente reali con smorzamento significativamente diagonale, cioè gli smorzamenti dei singoli modi sono praticamente disaccoppiati. Essendo la formulazione modale ottenibile da un modello "esatto", tipicamente basato su una approssimazione ad elementi finiti ad elevato numero di nodi, sarà derivabile tramite la:  $U^T M U \ddot{q} + U^T C U \dot{q} + U^T K U q = Q$ , in cui le matrici di massa e rigidezza sono state diagonalizzate dalle proprietà di ortogonalità dei modi, mentre la matrice di smorzamento è posta diagonale sulla base dell'evidenza sperimentale. Si evidenzia quindi la necessità di poter comprendere sulla base di quali meccanismi, possibilmente fisici e non solo matematici, la matrice originaria  $C$  possa soddisfare le stesse condizioni di ortogonalità proprie di  $M$  e  $K$ .

### 6.1 SMORZAMENTO PROPORZIONALE

È facile constatare che utilizzando un termine di smorzamento proporzionale del tipo:  $C = \alpha M + \beta K$  si ottiene una forma modale dello smorzamento che è diagonale. Si potrà dunque scrivere:

$$\begin{aligned} (Ms^2 + Cs + K)u &= 0 \\ (Ms^2 + \alpha Ms + \beta Ks + K)u &= 0 \\ (M(s^2 + \alpha s) + K(\beta s + 1))u &= 0 \\ (-M\bar{\omega}^2 + K)u &= 0 \\ \bar{\omega}^2 &= -\frac{s^2 + \alpha s}{\beta s + 1} \end{aligned}$$

Si può allora vedere che tale problema porta ad autovettori reali con  $\bar{\omega}$  reale, ricavato il quale è poi possibile ottenere gli autovalori smorzati originali  $s$ ,

$$s = -\frac{\alpha + \bar{\omega}^2\beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha + \bar{\omega}^2\beta}{2}\right)^2 - \bar{\omega}^2}$$

Sebbene considerare lo smorzamento di tipo proporzionale rifletta la possibilità di diagonalizzare la matrice di smorzamento modale, resta da definire il senso fisico di tale legame con la massa e la rigidità. Inoltre dall'ultima relazione scritta si ottengono tante uguaglianze quanti sono i modi, ma sperimentalmente non si verifica quasi mai che ad ogni frequenza siano associati gli stessi parametri  $\alpha$  e  $\beta$ .

Perciò si possono trarre le seguenti conclusioni: l'approccio modale è vantaggioso perché condensando i modi si ottiene uno smorzamento verificabile sperimentalmente, se si introduce uno smorzamento proporzionale non si riescono ad avere risultati totalmente concordi con gli esperimenti. In generale, quando si adotta uno schema a smorzamento proporzionale è quindi gioco forza accettare un'approssimazione di  $C$ , che può correlarsi solo grossolanamente ai dati sperimentali, ad esempio con un'approssimazione ai minimi quadrati. Sono state ipotizzate anche formulazioni proporzionali a più parametri, in grado quindi di correlarsi meglio alle risultanze sperimentali, ma tali approssimazioni fanno intervenire le potenze delle matrici di massa e rigidità, perdendo sparsità e simmetria del sistema e diventando quindi di dubbia utilità in grossi problemi per cui si voglia utilizzare l'integrazione numerica diretta, cioè senza condensazione modale.

Ritornando comunque alla ricerca di meccanismi fisici che giustificano lo smorzamento proporzionale, si deve, perlomeno, dimostrare che è sensato legare il valore di smorzamento a quello delle masse e delle rigidità.

Per quanto riguarda la proporzionalità alla rigidità, se si ipotizza che la legge costitutiva del materiale sia di tipo visco-elastica, lineare e senza memoria:  $\sigma = D_0\varepsilon + D_1\dot{\varepsilon}$ , ovvero che gli sforzi dipendano anche dalle velocità di deformazione, si può riscrivere il contributo del lavoro interno nel P.L.V. come:

$$\begin{aligned} \delta L_i &= \iiint_V \delta\varepsilon^T \sigma dV = \iiint_V \delta\varepsilon^T D_0 \varepsilon dV + \iiint_V \delta\varepsilon^T D_1 \dot{\varepsilon} dV = \\ &= \delta u^T \left( \iiint_V B^T D_0 B dV \right) u + \delta u^T \left( \iiint_V B^T D_1 B dV \right) \dot{u} = \delta u^T K u + \delta u^T C \dot{u} \end{aligned}$$

Se si può ipotizzare che sia  $D_1 = \beta D_0$  sarà presente la proporzionalità tra smorzamento e rigidità. Anche se questa giustificazione fosse accettabile, nel caso di una struttura non omogenea come accade spesso nel caso aeronautico, se il coefficiente  $\beta$  assumesse, com'è ragionevole pensare, più valori la matrice  $C$  non sarebbe comunque diagonale, così come i modi non sarebbero reali. È pertanto evidente che anche nel caso visco-elastico, lineare e senza memoria, un solo coefficiente di proporzionalità, omogeneo e indipendente dal materiale, appare come una sicura forzatura <sup>1</sup>

Può comunque essere utile comprendere il livello di approssimazione del comportamento visco-elastico, lineare e senza memoria, considerando il materiale come un sistema micromeccanico genericamente lineare per il quale gli sforzi non sono altro che le uscite e le forzanti sono legate all'imposizione di deformazioni. Sarà pertanto possibile scrivere:

$$\sigma(t) = \int_0^\infty d(\tau) \varepsilon(t - \tau) d\tau$$

<sup>1</sup> Avendo usato la stessa notazione, la specializzazione della formula generale su riportata per il caso di pannelli/piastre è banale, si veda il relativo capitolo in questo bigino. Anche per le travi la cosa dovrebbe essere comunque abbastanza semplice. Infatti basta interpretare sforzi e deformazioni, con le relative leggi costitutive, in senso generalizzato. Assumendo che l'interpretazione della simbologia dovrebbe risultare evidente, si avrebbero così le seguenti espressioni:

- Flessione:  $M_f = EJw''$ , diventerà:  $M_f = EJw'' + \beta EJ\dot{w}''$ .
- Torsione:  $M_t = GJ\theta'$ , diventerà:  $M_t = GJ\theta' + \beta GJ\dot{\theta}'$ .
- Azione assiale:  $N = EAu'$ , diventerà:  $N = EAu' + \beta EA\dot{u}'$ .
- Azione tagliente (trave alla Timoshenko):  $T = EA_t(w' - \phi)$ , diventerà:  $T = EA_t(w' - \phi) + \beta EA_t(\dot{w}' - \dot{\phi})$ .

da cui, in frequenza (Laplace), con abuso notazionale avendo mantenuto gli stessi simboli per le funzioni temporali e le loro trasformate:

$$\underline{\sigma}(s) = \underline{d}(s) \underline{\varepsilon}(s) \quad (6.1)$$

Un'approssimazione per residualizzazione dinamica totale, o approssimazione quasi stazionaria, consiste nell'approssimare la matrice di trasferimento costitutiva del materiale, assunta analitica, attraverso uno sviluppo in serie nell'intorno dell'origine ottenendo, ancora con leggero abuso notazionale e avendo definito  $d()/ds = ()'$ :

$$\underline{d}(s) = \underline{d}(0) + \underline{d}'(0)s + \frac{1}{2}\underline{d}''(0)s^2 + \dots \quad (6.2)$$

da cui:

$$\underline{\sigma}(t) = \underline{d}(0)\underline{\varepsilon}(t) + \underline{d}'(0)\dot{\underline{\varepsilon}}(t) + \frac{1}{2}\underline{d}''(0)\ddot{\underline{\varepsilon}}(t) + \dots \quad (6.3)$$

è possibile approssimare la relazione costitutiva viscoelastica come proporzionale alle deformazioni e alle sue derivate temporali. Dopo aver constatato che  $\underline{d}(0)$ ,  $\underline{d}'(0)$  e  $\underline{d}''(0)$ , pur essendo associati a matrici di trasferimento, quindi complesse, sono matrici reali (perché?), si può vedere che la formulazione viscoelastica quasi stazionaria può essere estesa a derivate di ordine superiore al primo. In particolare se l'estensione dello sviluppo si limita al più alle accelerazioni di deformazione non si varia l'ordine delle equazioni differenziali del sistema, aggiungendo però, oltre allo smorzamento, un'inerzia apparente. La possibilità di un'approssimazione quasistazionaria della legge costitutiva è legata alla possibilità di assumere che la risposta del materiale sia assai più rapida della variazione temporale delle deformazioni dinamiche e può essere accettabile per la dinamica a bassa frequenza delle strutture. Tale effetto può apparire macroscopicamente come una variazione del modulo di Young, che aumenterà con la velocità di carico. In ogni caso fermando l'approssimazione quasi stazionaria della visco-elasticità alla velocità di deformazione non si può ottenere nessun termine viscoso proporzionale alla massa.

Sarà quindi necessario cercare una giustificazione diversa per tale termine. Cominciamo col constatare che tale termine si può ricondurre ad una dipendenza dalle velocità assolute. Infatti il termine inerziale compare nel lavoro esterno e in questo compaiono gli spostamenti assoluti:

$$\delta L_e = \iiint_V \delta s^T \rho \dot{s} dV = \delta u^T \left( \iiint_V N^T \rho N dV \right) \ddot{u} = \delta u^T M \ddot{u}$$

Analogamente lo smorzamento porta al P.L.V. un contributo del tipo:

$$\iiint_V \delta s^T c \dot{s} dV = \delta u^T \left( \iiint_V N^T c N dV \right) \dot{u} = \delta u^T C \dot{u}$$

e la presenza di proporzionalità tra massa e smorzamento sarà verificata se  $c = \alpha \rho$ . Ancora una volta si nota che, qualora ciò fosse anche vero, è da ritenere abbastanza improbabile una proporzionalità con un solo valore costante.

Un ulteriore assurdo si avrebbe nel caso di strutture libere poiché, essendo la matrice di massa definita positiva, si avrebbe uno smorzamento associato anche a movimenti rigidi, il che è palesemente improponibile senza alcun collegamento al suolo. Si dovrebbe perciò determinare una proporzionalità associata ai soli modi deformabili, il che, riportato alle coordinate nodali, distruggerebbe ogni sparsità di  $M$ .

Se invece la struttura è vincolata al suolo, allora il problema precedentemente esposto non sussiste, senza però eliminare la dubbia validità fisica della proporzionalità alla massa.

Per garantire una qualche fisicità si può ricorrere alla supposizione di associare uno smorzamento al moto della superficie della struttura, affermando che ogni punto di essa è soggetto alla forza viscosa generata dall'aria:

$$\iint_A \delta s^T c \dot{s} dS = \delta u^T \left( \iint_A N^T c N dS \right) \dot{u}$$

da cui recuperare la proporzionalità alla massa accettando che la relativa distribuzione delle forze d'inerzia non vari significativamente distribuendo le masse sulla superficie della struttura. Tale operazione non è totalmente peregrina per le basse frequenze di strutture diaframmate, ragion per cui la proporzionalità alla massa si può associare ad un'approssimazione delle forze idro/aerodinamiche. Per strutture in aria ferma si tratta di una grossolana approssimazione degli effetti aeroelastici, accettabile solo in quanto mette a disposizione un parametro in più.

Si noti che l'espressione:  $\bar{\omega}^2 = -\frac{s^2 + \alpha s}{\beta s + 1}$ , in cui  $\bar{\omega}$  non è altro che la frequenza circolare dei modi propri non smorzati, permette di ricavare  $s$  risolvendo la:

$$s^2 + (\alpha + \beta \bar{\omega}^2) s + \bar{\omega}^2 = 0 \quad (6.4)$$

Per ottenere il fattore di smorzamento modale  $\xi$  si ricordi che l'equazione qui sopra va letta nella forma:

$$s^2 + (2\xi \bar{\omega}) s + \bar{\omega}^2 = 0 \quad (6.5)$$

da cui si ricava:

$$\xi = \frac{\alpha}{2\bar{\omega}} + \frac{\beta \bar{\omega}}{2} \quad (6.6)$$

Si nota allora che, all'aumentare della frequenza, la proporzionalità alla massa tende a far diminuire lo smorzamento modale e viceversa per la rigidità.

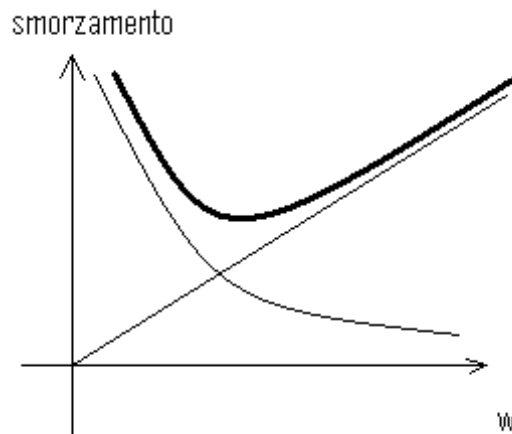


fig1

Lo smorzamento strutturale è spesso rappresentato nel modo seguente:

$$(-\omega^2 M + (1 + jg) K) u(\omega) = F(\omega)$$

introducendo cioè lo smorzamento come parte complessa della matrice di rigidità, tramite un solo valore costante. In questo modo si ottiene uno smorzamento costante nel dominio delle frequenze, che riproduce abbastanza bene le risultanze sperimentali su una certa classe di strutture, quali quelle aeronautiche metalliche costruite con “metodi classici”.

Il problema di questa rappresentazione risiede nel fatto che la matrice di rigidità non è rappresentabile nel tempo e tale artificio è utilizzabile solo per analisi armoniche, leggi anche risposte in frequenza.

Concludiamo ora rimarcando che la già menzionata evidenza sperimentale di una sostanziale diagonalità della matrice di smorzamento modale è dimostrabile, per piccoli smorzamenti e senza l'assunzione di proporzionalità rispetto a  $M$  e  $K$ , con una approssimazione tramite uno sviluppo troncato al primo ordine di perturbazioni attorno ad autosoluzioni reali del solito problema dei modi propri senza alcuna dissipazione strutturale.

Dal problema  $(Ms^2 + K) u = 0$  si calcolano le frequenze proprie. Se si introduce una perturbazione associata alla matrice di smorzamento, si ottiene:  $(Ms^2 + Cs + K) u = 0$  e, se lo si considera

diagonale e moderato, per studiare come esso influisce sulle frequenze proprie si sviluppa in serie l'espressione precedente.

La derivata viene effettuata secondo un generico parametro  $p$  della matrice di smorzamento.

$$\begin{aligned} (Ms^2 + Cs + K)u_{/p} &= 0 \\ ((2Ms + C)s_{/p} + sC_{/p})u + (Ms^2 + Cs + K)u_{/p} &= 0 \end{aligned}$$

Per un immediato calcolo della sola derivata dell'autovalore, assunto distinto da ogni altro, si premoltiplica per  $u^T$  e si traspone il tutto, considerando la simmetria delle tre matrici. Si ottiene:

$$\begin{aligned} (u^T ((2Ms + C)s_{/p} + sC_{/p})u)^T + (u^T (Ms^2 + Cs + K)u_{/p})^T &= 0 \\ u^T ((2Ms + C)s_{/p} + sC_{/p})u + u_{/p}^T (Ms^2 + Cs + K)u &= 0 \\ u^T ((2Ms + C)s_{/p} + sC_{/p})u &= 0 \end{aligned}$$

La derivata di una specifica autosoluzione,  $s_j$ - $u_j$ , calcolata per  $C = 0$  diventa:

$$\begin{aligned} s_{j/p} &= -\frac{s_j u_j^T C_{/p} u_j}{2 s_j u_j^T M u_j} = -\frac{1}{2} \frac{u_j^T C_{/p} u_j}{u_j^T M u_j} = -\frac{1}{2m_j} u_j^T C_{/p} u_j \\ s_{j/C_{ik}} &= -\frac{1}{2m_j} u_{j_i} u_{j_k} \\ \Delta s_j &= \sum_{i,k=1}^n s_{j/C_{ik}} C_{ik} = -\frac{1}{2m_j} \sum_{i,k=1}^n u_{j_i} C_{ik} u_{j_k} = -\frac{1}{2m_i} u_j^T C u_j \end{aligned}$$

Si vede così che per l'espressione precedentemente scritta, troncata al prim'ordine, è ragionevole approssimare la matrice di smorzamento diagonale associata agli usuali modi propri reali come diagonale, per l'appunto anche in assenza dell'assunzione di proporzionalità rispetto a  $M$  e  $K$ .



## Capitolo 7

# ESEMPI DI SOLUZIONI BASATE SU SVILUPPI MODALI PROPRI IN FORMA ANALITICA

cap ex

### 7.1 Torsione trave incastrata sollecitata da un momento all'estremo libero.

Si consideri una trave vincolata con un incastro ad un estremo e libera all'altro, a cui all'istante iniziale viene applicata una coppia torcente concentrata con andamento temporale a gradino all'estremo libero. Si vuole calcolare la deformata torsionale  $\theta(x, t)$  in funzione della posizione e del tempo. L'espressione del PLV ( $\delta\mathcal{L}_i = \delta\mathcal{L}_e$ ) per una trave soggetta alla sola sollecitazione torsionale

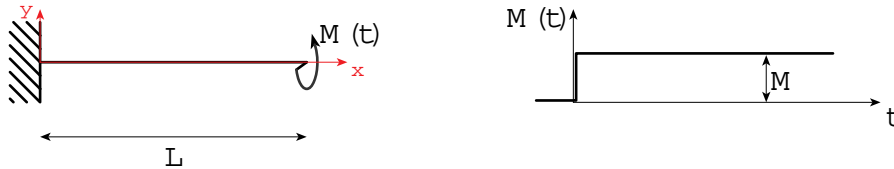


Figura 7.1: trave incastrata con coppia applicata all'estremo libero

è la seguente:

$$\int_0^L GJ\theta' \delta\theta' dx = - \int_0^L I\ddot{\theta}\delta\theta dx + \int_0^L m\delta\theta dx + M\delta\theta(L) \quad (7.1)$$

dove  $GJ$  è la rigidezza torsionale della sezione della trave <sup>1)</sup>,  $I$  è il momento d'inerzia polare per unità di lunghezza ed  $m$  una eventuale distribuzione di coppie torcenti lungo la trave (la mettiamo per generalità anche se nel seguito prenderemo  $m = 0$ ).

Il lavoro interno è dato dal lavoro dell'azione interna (momento torcente), mentre quello esterno è dato dal lavoro delle forze d'inerzia più quello del carico distribuito  $m$  e della coppia applicata all'estremo libero.

Ai fini della soluzione tramite condensazione modale dobbiamo ricavare le forme modali per il problema omogeneo più consono alla soluzione cercata, per utilizzarle poi nel PLV di cui sopra. Volendo ricavare i modi per via analitica passiamo alla formulazione differenziale. Allo scopo un

<sup>1</sup>Si ricorda che la rigidezza torsionale viene convenzionalmente indicata con  $GJ$ , ma per una sezione generica non è pari al prodotto del modulo elastico tangenziale  $G$  per il momento d'inerzia polare della sezione  $J$ . Questo è vero di sicuro solo nel caso di una trave a sezione omogenea circolare costituita da materiale isotropo.



possibile procedimento è il seguente (un altro è la scrittura dell'equilibrio di un concio di lunghezza infinitesima combinato con la relazione sforzo (momento torcente) deformazione (torsione)):

1. **integrare per parti fino ad avere solo  $\delta\theta$  negli integrali, ovvero in modo da far sparire le derivate degli spostamenti virtuali negli integrali.**

$$[GJ\theta'\delta\theta]_0^L - \int_0^L (GJ\theta')'\delta\theta dx = - \int_0^L I\ddot{\theta}\delta\theta dx + \int_0^L m\delta\theta dx + M\delta\theta(L) \quad (7.2)$$

2. **ricavare l'equazione indefinita di equilibrio e le condizioni naturali che sono racchiuse nel principio variazionale sfruttando l'arbitrarietà degli spostamenti virtuali.**

La (7.2) deve essere valida per qualunque spostamento virtuale ammissibile (ossia infinitesimo e congruente). L'arbitrarietà dello spostamento virtuale ci permette di scrivere il seguente sistema:

$$\begin{cases} (GJ\theta')' = I\ddot{\theta} - m & \leftarrow \text{equazione indefinita di equilibrio} \\ GJ\theta'|_L = M & \leftarrow \text{condizione naturale} \\ \theta(0) = 0 & \leftarrow \text{condizione essenziale} \end{cases} \quad (7.3)$$

Si vede che le condizioni al contorno naturali sono già contenute nel PLV, mentre bisogna ricordare che le condizioni al contorno essenziali vanno imposte nel passaggio dalla formulazione variazionale a quella differenziale, naturalmente in relazione alle corrispondenti variazioni virtuali già annullate per garantire il loro soddisfacimento.

Considerando, per semplicità, un caso in cui la trave è omogenea (quindi con caratteristiche costanti lungo l'asse) ed  $m = 0$ , si ottiene la seguente formulazione differenziale del problema:

$$\begin{cases} GJ\theta'' = I\ddot{\theta} \\ GJ\theta'(L) = M \\ \theta(0, t) = 0 \\ \theta(x, 0) = 0 \\ \dot{\theta}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

in cui sono state riportate anche le condizioni iniziali. Dalla formulazione completa in forma differenziale di cui sopra si evince che il problema omogeneo corrispondente è quello che si ha ponendo  $M=0$  qui sopra.

3. **calcolo dei modi propri di vibrare mediante soluzione con separazione delle variabili.**

La tecnica della separazione delle variabili conduce naturalmente alla determinazione per via analitica dei modi di vibrare, forme e frequenze, del sistema e quindi della soluzione come sovrapposizione delle risposte modali.

Rappresentiamo allora la soluzione del problema omogeneo come:

$$\theta(x, t) = f(x)g(t) \quad (7.5)$$

da cui segue:

$$\begin{cases} \theta'(x, t) = f'(x) g(t) \\ \theta''(x, t) = f''(x) g(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\theta}(x, t) = f(x) \dot{g}(t) \\ \ddot{\theta}(x, t) = f(x) \ddot{g}(t) \end{cases} \quad (7.6)$$

sostituendo nella prima del (7.4) si ottiene:

$$GJ \frac{f''}{f} = I \frac{\ddot{g}}{g} \quad (7.7)$$

$$\frac{f''}{f} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\ddot{g}}{g} \quad (7.8)$$

I due membri devono essere costanti in quanto questa è l'unica possibilità che una funzione del solo spazio sia uguale ad una funzione del solo tempo.

Affinché le soluzioni siano limitate nel tempo, ossia stabili e quindi rispettino la fisica del problema in esame, è necessario che la costante sia negativa, per cui scriveremo:

$$\frac{f''}{f} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\ddot{g}}{g} = -\beta^2 \quad (7.9)$$

#### 4. risoluzione del problema spaziale per determinare le forme modali.

$$f'' + \beta^2 f = 0 \quad (7.10)$$

che è un'equazione differenziale ordinaria lineare il cui integrale generale (autofunzione in questo caso) è del tipo:

$$f = A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x) \quad (7.11)$$

Per determinare i modi dobbiamo risolvere il problema omogeneo con condizioni al contorno omogenee, quindi  $\theta(0) = 0$  e  $\theta'(L) = 0$ :

$$\begin{cases} f(0) = 0 & \implies B = 0 \\ f'(L) = 0 & \implies \beta A \cos(\beta L) = 0 \end{cases} \quad (7.12)$$

La seconda equazione è soddisfatta in maniera *non* banale per ogni valore di  $\beta$  (autovalore) del tipo:

$$\beta_i = (2i - 1) \frac{\pi}{2L} \quad (7.13)$$

Una soluzione spaziale ottenuta come sovrapposizione di tutti i termini,

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin\left((2i - 1) \frac{\pi x}{2L}\right) \quad (7.14)$$

rispetta intrinsecamente tali condizioni. Si noti che  $\beta_i$  assume la valenza di una vera e propria frequenza spaziale, detta numero d'onda, a cui potremo conseguentemente associare una lunghezza d'onda spaziale pari a

$$\lambda_i = \frac{2\pi}{\beta_i} = \frac{4L}{2i - 1}. \quad (7.15)$$

Ciascuna  $f_i(x)$  rappresenta quindi la forma spaziale di un modo di vibrare del sistema qui analizzato. Si noti che, a causa della presenza del termine  $g(t)$ ,  $A_i$  è a questo punto insensibile e viene mantenuto solo per evidenziare la possibilità di normalizzazione della forma modale.

#### 5. analisi del problema temporale associato per la determinazione delle frequenze associate.

$$\ddot{g} + \alpha^2 \beta_i^2 g = 0 \quad (7.16)$$

da cui trasformando si ottiene:

$$s^2 \mathbf{g} + \alpha^2 \beta_i^2 \mathbf{g} = 0 \quad (7.17)$$

$$(-\omega_i^2 + \alpha^2 \beta_i^2) \mathbf{g} = 0 \quad (7.18)$$

$$\omega_i = \alpha \beta_i = (2i - 1) \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{GJ}{I}} \quad (7.19)$$

Quindi:

$$g_i(t) = C_i \sin(\omega_i t) + D_i \cos(\omega_i t) \quad (7.20)$$

6. scrivere la soluzione sviluppata in forma modale

$$\begin{aligned}
 \theta(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) g_i(t) = \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{A_i \sin\left((2i-1) \frac{\pi x}{2L}\right)}_{\underline{N}_i(x)} \underbrace{[C_i \sin(\omega_i t) + D_i \cos(\omega_i t)]}_{q_i(t)} \\
 &= \underline{N}(x) \underline{q}(t)
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

$$\theta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin\left((2i-1) \frac{\pi x}{2L}\right) q_i(t) \tag{7.22}$$

dove:

- $A_i$  è la costante di normalizzazione dei modi,
- $C_i, D_i$  vanno determinati ponendo le condizioni iniziali.

L'espressione di cui sopra, a parte la evidenziazione del termine di normalizzazione  $A_i$  associato alla forma modale, altro non è che lo sviluppo modale proprio cercato. Va sottolineato che l'analisi fin qui effettuata non dipende dalla forzante applicata, rimanendo quindi valida per qualunque andamento temporale della coppia sollecitante. Si noti che in esso non compare  $\omega_i$ , anche se noi l'abbiamo ricavata comunque per completare le autosoluzioni. È chiaro che, a causa della proprietà di ortogonalità dei modi propri rispetto alla distribuzione di massa e rigidità, le frequenze proprie riemergeranno dalla sostituzione della serie modale appena calcolata quando la stessa verrà utilizzata per scrivere le equazioni delle risposte modali tramite il PLV.

7. determinare le costanti di normalizzazione dei modi.

È possibile ora utilizzare lo sviluppo modale (7.22) per ottenere la soluzione del problema non omogeneo di partenza.

Dobbiamo però scegliere la normalizzazione delle forme modali e quindi decidere i fattori  $A_i$ . Se si sceglie la normalizzazione a massa unitaria si deve verificare che:

$$\int_0^L \underline{N}^T I \underline{N} dx = \underline{I} \tag{7.23}$$

Per un  $i$  generico, data l'ortogonalità delle funzioni armoniche:

$$\int_0^L I N_i^2 dx = 1 \tag{7.24}$$

$$\int_0^L I A_i^2 \sin^2\left((2i-1) \frac{\pi x}{2L}\right) dx = 1 \tag{7.25}$$

l'integrale diventa facile da calcolare operando una sostituzione di variabile. Definiamo  $y \triangleq (2i-1) \frac{\pi x}{2L}$ , da cui segue che il differenziale risulta essere  $dy = (2i-1) \frac{\pi}{2L} dx$ . Esplicitando il  $dx$ , modificando opportunamente gli estremi di integrazione e sostituendo si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{(2i-1)\pi/2} I A_i^2 \sin^2(y) \frac{2L}{\pi} \frac{1}{(2i-1)} dy &= 1 \\
 \frac{2L}{\pi} \frac{I A_i^2}{(2i-1)} \int_0^{(2i-1)\pi/2} \sin^2(y) dy &= \frac{2L}{\pi} \frac{I A_i^2}{(2i-1)} \frac{(2i-1)\pi}{2} = 1
 \end{aligned}$$

da cui, ricavando  $A_i$  si ottiene:

$$A_i = \sqrt{\frac{2}{IL}} \tag{7.26}$$

Si lascia come esercizio la verifica che tutti gli integrali dei termini misti  $N_i N_j$  sono nulli indipendentemente dalle ampiezze  $A_i$  dei modi (ortogonalità dei modi rispetto alla distribuzione di massa).

Siamo dunque arrivati a scrivere:

$$\theta(x, t) = \sqrt{\frac{2}{IL}} \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left((2i-1) \frac{\pi x}{2L}\right) q_i(t) \quad (7.27)$$

#### 8. risoluzione del problema iniziale non omogeneo.

Riscriviamo ora la prima delle (7.1) in termini di variabili modali.

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \text{forza generalizzata} \quad (7.28)$$

La forza generalizzata deriva ovviamente dal lavoro virtuale della coppia applicata all'estremo libero e sarà

$$\begin{aligned} M(t)\delta\theta(L) &= M(t) \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{IL}} \sin\left((2i-1) \frac{\pi}{2}\right) \delta q_i = \\ &= M(t) \sqrt{\frac{2}{IL}} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \delta q_i \end{aligned} \quad (7.29)$$

Il risultato è costituito da tante equazioni differenziali ordinarie lineari, una per ciascuno dei coefficienti  $q_i$  del tipo:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = (-1)^{i-1} \sqrt{\frac{2}{IL}} M(t) \quad (7.30)$$

Dal momento che nel caso in esame,  $M(t) = M_{sc}(t)$ , si ha  $M(t) = M$  per  $t > 0$ , la soluzione del problema per  $t > 0$  sarà data dal solito integrale generale più quello particolare:

$$q_i = C_i \sin(\omega_i t) + D_i \cos(\omega_i t) + (-1)^{i-1} \sqrt{\frac{2}{IL}} \frac{M}{\omega_i^2} \quad (7.31)$$

A questo punto è necessario utilizzare le condizioni iniziali, che sono:

$$\begin{cases} \theta(x, 0) = 0 \implies q_i(0) = 0 \implies D_i + (-1)^{i-1} \sqrt{\frac{2}{IL}} \frac{M}{\omega_i^2} = 0 \\ \dot{\theta}(x, 0) = 0 \implies \dot{q}_i(0) = 0 \implies C_i = 0 \end{cases} \quad (7.32)$$

La soluzione per le  $q_i(t)$  sarà quindi:

$$q_i = (-1)^{i-1} \sqrt{\frac{2}{IL}} \frac{M}{\omega_i^2} (1 - \cos(\omega_i t)) \quad (7.33)$$

e quindi la deformata torsionale  $\theta(x, t)$  sarà pari a:

$$\theta(x, t) = \frac{2M}{IL} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{\omega_i^2} \sin\left((2i-1) \frac{\pi x}{2L}\right) (1 - \cos(\omega_i t)) \quad (7.34)$$

ovvero, sostituendo l'espressione di  $\omega_i$  dalla (7.19),

$$\theta(x, t) = \frac{2M}{GJL} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{\left((2i-1) \frac{\pi}{2L}\right)^2} \sin\left((2i-1) \frac{\pi x}{2L}\right) (1 - \cos(\omega_i t)) \quad (7.35)$$

### 9. recupero tramite i modi di accelerazione.

Nel caso di recupero diretto del momento torcente tramite la soluzione qui sopra riportata, ovvero

$$\begin{aligned} M_{t\text{rd}}(x, t) &= GJ\theta'(x, t) \\ &= \frac{2M}{L} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{\left((2i-1) \frac{\pi}{2L}\right)} \cos\left((2i-1) \frac{\pi x}{2L}\right) (1 - \cos(\omega_i t)) \end{aligned} \quad (7.36)$$

la serie, a segni alterni, converge con velocità inversamente proporzionale all'indice della sommatoria e quindi molto lentamente. Inoltre, come si evidenzierà più avanti, tale convergenza non potrà soddisfare la condizione al contorno naturale relativa alla coppia applicata all'estremo libero. Conseguentemente con quanto visto nella teoria è quindi gioco forza provare a migliorare le cose con l'utilizzo dei modi di accelerazione.

Allo scopo è necessario scrivere la prima equazione del sistema (7.4) sostituendo all'espressione dell'accelerazione la derivata seconda rispetto al tempo della (7.34):

$$\begin{aligned} GJ\theta'' &= I\ddot{\theta} = \\ &= \frac{2M}{L} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \sin\left((2i-1) \frac{\pi x}{2L}\right) \cos(\omega_i t) \end{aligned} \quad (7.37)$$

Integrando due volte questa espressione nello spazio si ottiene:

$$\theta(x, t) = -\frac{2M}{GJL} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{\left((2i-1) \frac{\pi}{2L}\right)^2} \sin\left((2i-1) \frac{\pi x}{2L}\right) \cos(\omega_i t) + E_1 x + E_2 \quad (7.38)$$

Utilizzando le condizioni al contorno si ricavano i valori delle costanti di integrazione:

$$\begin{cases} \theta(0, t) = 0 & \implies E_2 = 0 \\ \theta'(L, t) = \frac{M}{GJ} & \implies E_1 = \frac{M}{GJ} \end{cases} \quad (7.39)$$

per cui la deformata torsionale espressa utilizzando i modi di accelerazione risulta pari a:

$$\theta(x, t) = \underbrace{-\frac{2M}{GJL} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{\left((2i-1) \frac{\pi}{2L}\right)^2} \sin\left((2i-1) \frac{\pi x}{2L}\right) \cos(\omega_i t)}_{\text{contributo dinamico}} + \underbrace{\frac{M(t)}{GJ} x}_{\text{contributo statico}} \quad (7.40)$$

che, come si può vedere, risulta composta da un contributo dinamico più un contributo "statico" che rappresenta la deformazione ottenuta considerando di applicare il carico esterno  $M(t)$  e di adeguare istantaneamente la struttura al carico stesso. Il momento torcente è

$$M_{t\text{ma}}(x, t) = \underbrace{-\frac{2M}{L} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{\left((2i-1) \frac{\pi}{2L}\right)} \cos\left((2i-1) \frac{\pi x}{2L}\right) \cos(\omega_i t)}_{\text{contributo dinamico}} + \underbrace{M(t)}_{\text{contributo statico}} \quad (7.41)$$

Si può verificare che la torsione calcolata con questa nuova serie converge molto più rapidamente della precedente (7.35), dimostrando l'utilità del metodo dei modi di accelerazione ai fini di un miglior recupero delle sollecitazioni/sforzi. A questo punto è utile notare, si

consiglia caldamente di procedere all'esecuzione della relativa verifica, che allo stesso risultato si giunge calcolando direttamente l'azione torcente come si sarebbe fatto nei primissimi esercizi di Scienza delle Costruzioni, proseguendo poi al calcolo della rotazione tramite la linea elastica torsionale. In molte applicazioni, specie quando si è interessati alle sole azioni interne di travi isostatiche, o addirittura libere, tale approccio può risultare più semplice e diretto che non la soluzione della, ancorché banale, equazione differenziale su riportata.

Per ulteriori chiarimenti si veda il paragrafo seguente di confronto dei due risultati.

Equazioni formalmente identiche al caso di semplice sollecitazione torsionale si ottengono anche nel caso di una trave soggetta ad una sollecitazione assiale e per un filo pretensionato soggetto ad una perturbazione, e anche per lo studio della trasmissione del calore monodimensionale. Si lascia come esercizio lo sviluppo delle forme modali in questi casi, ricordando che saranno del tutto analoghe a quanto visto per il caso torsionale.

### 7.1.1 Piccolo Complemento

L'equazione di moto del sistema sopra utilizzata è un'equazione differenziale alle derivate parziali di tipo iperbolico, equivalente ad una equazione delle onde. Potrebbe essere risolta utilizzando la classica tecnica alla d'Alembert per tali equazioni definendo le linee caratteristiche nel dominio spazio-temporale. Se infatti poniamo

$$\theta = f(x \pm ct),$$

sostituendo questa espressione nella (7.4) si ottiene

$$GJ f'' = I f'' c^2,$$

e quindi

$$c = \sqrt{\frac{GJ}{I}}.$$

Data quindi una  $f(x)$  iniziale, la soluzione può essere vista come composta da due onde che viaggiano nello spazio con velocità  $\pm c$ . Qui preferiamo la soluzione per onde stazionarie, tali sono i modi propri di vibrare, perché più consona allo studio di sollecitazioni dinamiche a relativamente limitato contenuto in frequenza. Per altri problemi, es. urti e/o domini non limitati, può essere più utile l'approccio propagativo, come già visto in aerodinamica per il caso di potenziale supersonico linearizzato.

Per un opportuno raccordo fra le due modalità risolutive, almeno nel nostro caso, notiamo comunque che ciascuna  $f_i(x)$  rappresenta la forma spaziale di un modo di vibrare del sistema qui analizzato. Richiamando la formula delle frequenze associate ad un modo:

$$\omega_i = (2i - 1) \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{GJ}{I}}. \quad (7.42)$$

e delle corrispondenti lunghezze d'onda spaziali:

$$\lambda_i = \frac{2\pi}{\beta_i} = \frac{4L}{2i - 1}. \quad (7.43)$$

notiamo che la velocità con cui viaggiano le onde si ottiene come prodotto della lunghezza d'onda spaziale  $\lambda_i$  per la frequenza di oscillazione dell'onda espressa in Hertz  $\omega_i/2\pi$ , e quindi

$$c_i = \frac{\lambda_i \omega_i}{2\pi} = \sqrt{\frac{GJ}{I}}, \quad (7.44)$$

che corrisponde esattamente al risultato sopra ottenuto utilizzando il metodo propagativo alla d'Alembert per la soluzione dell'equazione delle onde. È importante rimarcare che tutte le onde torsionali viaggiano alla stessa velocità  $c$ . Vedremo che così non è nel caso flessionale.

Un'ulteriore conferma è possibile ritornando alla rappresentazione modale della soluzione generale che si ricorda essere del tipo

$$\theta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin \left( (2i-1) \frac{\pi x}{2L} \right) (C_i \sin \omega_i t + D_i \cos \omega_i t), \quad (7.45) \quad \text{soltors}$$

Ricordando quindi le formule di prostaferesi

$$A_i C_i \sin \beta_i x \sin \omega_i t = \frac{1}{2} A_i C_i (\cos (\beta_i x - \omega_i t) - \cos (\beta_i x + \omega_i t)), \quad (7.46a) \quad \text{prostaferesi}$$

$$A_i D_i \sin \beta_i x \cos \omega_i t = \frac{1}{2} A_i D_i (\sin (\beta_i x - \omega_i t) + \sin (\beta_i x + \omega_i t)), \quad (7.46b)$$

e mettendo in evidenza il numero d'onda  $\beta_i$

$$A_i C_i \sin \beta_i x \sin \omega_i t = \frac{1}{2} A_i C_i (\cos \beta_i (x - ct) - \cos \beta_i (x + ct)), \quad (7.47a) \quad \text{prostaferesi2}$$

$$A_i D_i \sin \beta_i x \cos \omega_i t = \frac{1}{2} A_i D_i (\sin \beta_i (x - ct) + \sin \beta_i (x + ct)), \quad (7.47b)$$

si vede come la (7.45) ottenuta attraverso la separazione di variabili corrisponde alla forma propagativa della soluzione ottenuta attraverso l'equazione delle onde.

### 7.1.2 Confronto dei risultati

Consideriamo l'espressione della deformata torsionale  $\theta(x, t)$  ottenuta con il recupero diretto:

$$\theta_{\text{rd}}(x, t) = \frac{2M}{IL} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{\omega_i^2} \sin \left( (2i-1) \frac{\pi x}{2L} \right) (1 - \cos(\omega_i t))$$

e quella ottenuta con i modi di accelerazione:

$$\theta_{\text{ma}}(x, t) = -\frac{2M}{GJL} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{\left( (2i-1) \frac{\pi}{2L} \right)^2} \sin \left( (2i-1) \frac{\pi x}{2L} \right) \cos(\omega_i t) + \frac{M(t)}{GJ} x$$

Rielaboriamo un po' la prima espressione. Ricordando la (7.19) e sostituendo a  $\omega_i$  la sua espressione otteniamo:

$$\begin{aligned} \theta_{\text{rd}}(x, t) &= \frac{2M}{IL} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{\omega_i^2} \sin \left( (2i-1) \frac{\pi x}{2L} \right) (1 - \cos(\omega_i t)) = \\ &= \frac{2M}{IL} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{\left( (2i-1) \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{GJ}{I}} \right)^2} \sin \left( (2i-1) \frac{\pi x}{2L} \right) (1 - \cos(\omega_i t)) = \\ &= \frac{2M}{GJL} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{\left( (2i-1) \frac{\pi}{2L} \right)^2} \sin \left( (2i-1) \frac{\pi x}{2L} \right) (1 - \cos(\omega_i t)) = \\ &= \left[ -\frac{2M}{GJL} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{\left( (2i-1) \frac{\pi}{2L} \right)^2} \sin \left( (2i-1) \frac{\pi x}{2L} \right) \cos(\omega_i t) \right] + \dots \\ &\quad \dots + \left[ \frac{2M}{GJL} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{\left( (2i-1) \frac{\pi}{2L} \right)^2} \sin \left( (2i-1) \frac{\pi x}{2L} \right) \right] \end{aligned}$$

che confrontata con l'espressione di  $\theta(x, t)$  ottenuta con i modi di accelerazione ci dice che la serie trigonometrica compresa nelle seconde parentesi quadre converge alla soluzione statica:

$$\frac{2M(t)}{GJL} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{\left((2i-1) \frac{\pi}{2L}\right)^2} \sin\left((2i-1) \frac{\pi x}{2L}\right) = \frac{M(t)}{GJ} x \quad (7.48)$$

Tale formula è facilmente dimostrabile calcolando i coefficienti di Fourier di una funzione triangolare continua antisimmetrica di periodo  $4L$  e ampiezza  $M/GJ$ . Si noti che la derivata di tale funzione è un'onda quadra di periodo  $2L$  e ampiezza  $M/GJ$ . La serie di Fourier corrispondente, i cui coefficienti sono calcolabili sia direttamente che tramite derivazione della serie di cui sopra, non convergerà con  $(1/i)^2$  ma solo con  $1/i$ . Inoltre in corrispondenza delle discontinuità, e quindi all'estremo della trave, la convergenza puntuale sarà al valor medio della discontinuità stessa, cioè a zero. Si vede allora chiaramente che il recupero diretto non potrà mai soddisfare puntualmente la condizione naturale, ma convergerà ad essa come comanda la serie di Fourier, cioè ai minimi quadrati, con relativo fenomeno di Gibbs. Invece i modi di accelerazione, essendo in grado di recuperare la esatta funzione originale, convergeranno anche puntualmente alla condizione al contorno naturale. Noi sappiamo che fisicamente ciò corrisponde alla residualizzazione della dinamica delle alte frequenze con conseguente recupero corretto della statica, indipendentemente dal troncamento modale utilizzato. Pertanto il recupero diretto, non in grado di recuperare la statica se non con un elevato numero di termini dello sviluppo, convergerà solo lentamente e mai soddisferà la convergenza puntuale alle condizioni naturali associate a carichi concentrati. Ricordiamo che alle stesse conclusioni saremmo arrivati cercando la soluzione come differenza fra la deformata vera e le soluzioni statiche istantanee. Si lascia il corrispondente sviluppo per esercizio.<sup>2</sup>

## 7.2 Torsione di una trave incastrata con rotazione imposta in estremità

Sia data la trave della figura seguente:

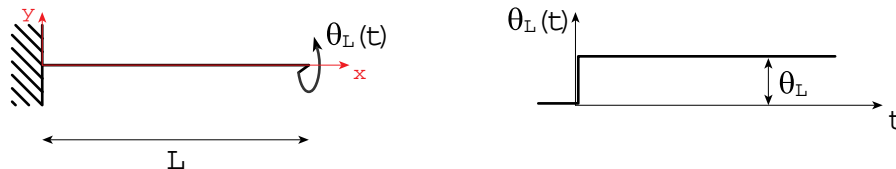


Figura 7.2: trave incastrata con rotazione imposta all'estremo libero

alla quale viene imposta una rotazione a scalino dell'estremo libero. Calcolare la dinamica della trave.

<sup>2</sup>richiami operativi essenziali per le serie di Fourier:

- formule/a coefficienti, in forma trigonometrica/esponenziale, gli integrali basta che coprano il periodo (non interessa da dove)
- i coefficienti asintoticamente vanno con  $(1/i)^{n+2}$ , con  $n$  ordine di continuità della funzione da approssimare
- si ottengono come approssimazione ai minimi quadrati e quindi tale è la convergenza
- convergono puntualmente dove la funzione è regolare
- in corrispondenza di discontinuità di prima specie convergono al valor medio, presentando oscillazioni attorno alla funzione vera che non spariscono mai (fenomeno di Gibbs)
- contrariamente al credo popolare non sono solo per funzioni periodiche, perché quasi tutto è periodico o periodizzabile (il “quasi tutto” si riferisce alle funzioni di “durata” limitata che sono una gran parte di ciò che può servire in pratica)



Scriviamo il PLV:

$$\int_0^L GJ\theta'\delta\theta' dx = - \int_0^L I\ddot{\theta}\delta\theta dx \quad (7.49)$$

$$[GJ\theta'\delta\theta]_0^L - \int_0^L (GJ\theta')'\delta\theta dx = - \int_0^L I\ddot{\theta}\delta\theta dx \quad (7.50)$$

dal momento che la relazione deve essere soddisfatta per qualsiasi variazione virtuale, segue che:

$$\begin{cases} [GJ\theta'\delta\theta]_0^L = 0 \\ (GJ\theta')' = I\ddot{\theta} \end{cases} \quad (7.51)$$

dato che  $\delta\theta(0) = \delta\theta(L) = 0$  allora segue che la prima relazione è sempre verificata per qualunque valore del momento agli estremi della trave (all'incastro sarà pari alla reazione vincolare, mentre all'estremo sarà tale da essere in equilibrio con la rotazione imposta).

Rimane solo la seconda equazione che nel caso di trave omogenea può essere scritta come:

$$GJ\theta'' = I\ddot{\theta} \quad (7.52)$$

Ricordando le condizioni iniziali e al contorno si perviene al sistema:

$$\begin{cases} GJ\theta'' = I\ddot{\theta} \\ \theta(0, t) = 0 \\ \theta(L, t) = \theta_L(t) \\ \theta(x, 0) = 0 \\ \dot{\theta}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (7.53)$$

Sembra quindi che il corrispondente problema omogeneo utile per il calcolo dello sviluppo modale proprio si ottenga semplicemente ponendo  $\theta_L(t) = 0$ . Scegliamo allora una soluzione  $\theta(x, t)$  del tipo  $\theta(x, t) = f(x) g(t)$  da cui:

$$\begin{cases} \theta'(x, t) = f'(x) g(t) \\ \theta''(x, t) = f''(x) g(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\theta}(x, t) = f(x) \dot{g}(t) \\ \ddot{\theta}(x, t) = f(x) \ddot{g}(t) \end{cases} \quad (7.54)$$

ovvero:

$$GJf'' g = If \ddot{g} \quad (7.55)$$

Introducendo la velocità al quadrato di propagazione delle onde  $\alpha^2 = GJ/I$  otteniamo:

$$\frac{f''}{f} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\ddot{g}}{g} \quad (7.56)$$

L'unica possibilità che tale espressione sia valida per ogni  $(x, t)$  è che sia una costante (negativa):

$$\frac{f''}{f} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\ddot{g}}{g} = \text{cost} = -\beta^2 \quad (7.57)$$

$$\begin{cases} f'' + \beta^2 f = 0 \\ \ddot{g} + \alpha^2 \beta^2 g = 0 \end{cases} \quad (7.58)$$

risolvendo la prima otteniamo le forme modali, mentre dalla seconda le frequenze proprie.

Iniziamo dall'equazione in  $f(x)$ :

$$f'' + \beta^2 f = 0 \quad (7.59)$$

da cui:

$$f(x) = A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x) \quad (7.60)$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \implies B = 0 \\ f(L) = 0 \implies A \sin(\beta L) = 0 \implies \beta_i = \frac{i\pi}{L} \end{cases} \quad (7.61)$$

Per determinare le costanti di normalizzazione dei modi  $A_i$  scegliamo di normalizzare a massa unitaria:

$$\int_0^L \underline{N} I \underline{N} dx = \underline{I} \quad (7.62)$$

$$\int_0^L I N_i^2 dx = 1 \quad (7.63)$$

$$\int_0^L I A_i^2 \sin^2(\beta_i x) dx = 1 \quad (7.64)$$

$$\int_0^L I A_i^2 \sin^2\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx = 1 \quad (7.65)$$

$$\int_0^{i\pi} I A_i^2 \sin^2(y) \frac{L}{i\pi} dy = 1 \quad (7.66)$$

$$\frac{I A_i^2 L}{i\pi} \int_0^{i\pi} \sin^2(y) dy = 1 \quad (7.67)$$

$$\frac{I A_i^2 L}{i\pi} \frac{i\pi}{2} = 1 \quad (7.68)$$

In conclusione:

$$A_i = \sqrt{\frac{2}{IL}} \quad (7.69)$$

Per quanto riguarda l'equazione in  $g(t)$  invece:

$$\ddot{g} + \alpha^2 \beta^2 g = 0 \quad (7.70)$$

$$g_i = C_i \sin(\omega_i t) + D_i \cos(\omega_i t) \quad (7.71)$$

dove  $\omega_i = \alpha \beta_i = \frac{i\pi}{L} \sqrt{\frac{GJ}{I}}$ .

Possiamo dunque scrivere la deformata torsionale  $\theta(x, t)$  come:

$$\begin{aligned} \theta(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{IL}} \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) [C_i \sin(\omega_i t) + D_i \cos(\omega_i t)] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{IL}} \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) q_i(t) \end{aligned} \quad (7.72)$$

Per determinare le  $q_i$  dobbiamo utilizzare lo sviluppo di cui sopra nel PLV per risolvere il problema originario non omogeneo.

In questo caso si vede che le equazioni modali *non* hanno il termine di forza generalizzata:

$$\begin{cases} \ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0 \\ q(0) = 0 \\ \dot{q}(0) = 0 \end{cases} \quad (7.73)$$

per cui la cui soluzione è del tipo:

$$q_i(t) = C_i \sin(\omega_i t) + D_i \cos(\omega_i t) \quad (7.74)$$

e ponendo le condizioni iniziali omogenee:

$$\begin{cases} \theta(x, 0) = 0 \implies q_i(0) = 0 \implies D_i = 0 \\ \dot{\theta}(x, 0) = 0 \implies \dot{q}_i(0) = 0 \implies C_i = 0 \end{cases} \quad (7.75)$$

ovvero:

$$\theta(x, t) = 0 \quad (7.76)$$

il che ci lascia perlomeno perplessi! Dove abbiamo sbagliato? Semplicemente non ci siamo ricordati che l'approssimazione da utilizzare deve essere uno sviluppo completo e rispettoso, o che permetta

di imporre, il soddisfacimento delle condizioni al contorno essenziali. Solo le condizioni naturali sono recuperate dal PLV a partire da uno sviluppo completo che non le rispetti a priori. La soluzione è pertanto semplice e consiste nel sovrapporre allo sviluppo trovato una funzione nota opportuna che garantisca la corretta rotazione all'estremo libero, cosa non difficile poiché il nostro sviluppo è identicamente nullo in tale punto. Basterebbe cioè scrivere  $\theta(x, t) = \underline{N}_i(x) \underline{q}(t) + (x/L)\theta_L$  e proseguire nel solito modo nel PLV. Chiaramente una possibile scelta di tale funzione è la soluzione statica del tipo  $(x/L)\theta_L$ , ma anche  $(x/L)^n\theta_L$  (o altro simile). Si noti che, in concordanza con quanto già richiamato precedentemente, in questo caso l'analisi modale viene a dipendere dall'estremo a cui si impone il movimento. Preferiamo però utilizzare ora lo schema dei modi di accelerazione con recupero della statica istantanea a priori e calcolo della soluzione variata rispetto alla stessa, in modo da mostrare che il procedimento è praticamente lo stesso.

Cerchiamo allora la soluzione in termini di uno scostamento da una condizione di equilibrio che soddisfa già le condizioni al contorno:

$$\theta(x, t) = \Delta\theta(x, t) + \bar{\theta}(x, t) \quad (7.77)$$

Consideriamo una deformata lineare del tipo:

$$\bar{\theta}(x, t) = \frac{x}{L} \theta_L(t) \quad (7.78)$$

in quanto, osservando che  $M = GJ\theta'$ , la scelta fatta per  $\bar{\theta}$  (derivata costante) è coerente con la deformata dovuta ad un momento costante applicato in estremità alla trave. Rimarchiamo di nuovo che la scelta della deformata statica è fatta solo per convenienza, ciò che importa è trovare una qualsiasi soluzione che soddisfi le condizioni al contorno essenziali da combinare con la soluzione modale.

Possiamo dunque scrivere che:

$$\theta(x, t) \triangleq \Delta\theta(x, t) + \frac{x}{L} \theta_L(t) \quad (7.79)$$

Ciò che stiamo facendo altro non è che un cambio di origine. Un discorso simile è stato visto nel corso Dinamica dei Sistemi Aerospaziali (capitolo 6, pag. 11) per l'oscillatore armonico dove, scegliendo come origine la posizione di equilibrio statico, eravamo riusciti ad eliminare dalle equazioni il contributo del termine gravitazionale.

La deformata di riferimento scelta soddisfa da sé le condizioni al contorno.

Il problema scritto in termini di  $\Delta\theta(x, t)$  diviene:

$$\begin{cases} \theta' = \Delta\theta' + \frac{1}{L} \theta_L(t) \\ \theta'' = \Delta\theta'' \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\theta} = \Delta\dot{\theta} + \frac{x}{L} \dot{\theta}_L(t) \\ \ddot{\theta} = \Delta\ddot{\theta} + \frac{x}{L} \ddot{\theta}_L(t) \end{cases} \quad (7.80)$$

quindi:

$$\frac{GJ}{I} \theta'' = \ddot{\theta} \quad (7.81)$$

$$\frac{GJ}{I} \Delta\theta'' = \Delta\ddot{\theta} + \frac{x}{L} \ddot{\theta}_L(t) \quad (7.82)$$

$$\frac{GJ}{I} \Delta\theta'' - \Delta\ddot{\theta} = \frac{x}{L} \ddot{\theta}_L(t) \quad (7.83)$$

Il problema completo di condizioni iniziali e al contorno diventa:

$$\begin{cases} \frac{GJ}{I} \Delta\theta'' - \Delta\ddot{\theta} = \frac{x}{L} \ddot{\theta}_L(t) \\ \Delta\theta(0, t) = 0 \\ \Delta\theta(L, t) = 0 \\ \Delta\theta(x, 0) = 0 \\ \Delta\dot{\theta}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (7.84)$$

Andiamo ora a cercare una soluzione del tipo  $\Delta\theta(x, t) = f(x) g(t)$ :

$$\frac{GJ}{I} f'' g - f \ddot{g} = \frac{x}{L} \ddot{\theta}_L(t) \quad (7.85)$$

Per l'analisi modale dobbiamo risolvere il problema omogeneo associato con condizioni al contorno omogenee, quindi è la stessa cosa fatta in precedenza per il problema scritto in termini di  $\theta(x, t)$ . Avremo dunque che:

$$\begin{aligned}\Delta\theta(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{IL}} \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) [C_i \sin(\omega_i t) + D_i \cos(\omega_i t)] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{IL}} \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) q_i(t)\end{aligned}\quad (7.86)$$

L'effetto della combinazione della soluzione modale con una che soddisfi le condizioni essenziali compare ora, nella forma di un termine di forza generalizzata  $Q_i$  associata alla rotazione imposta:

$$\begin{aligned}Q_i &= \frac{\partial}{\partial q_i} \int_0^L \delta\Delta\theta m_t dx = \\ &= -\frac{\partial}{\partial q_i} \int_0^L \delta\Delta\theta I \frac{x}{L} \ddot{\theta}_L dx = \\ &= -\int_0^L \sqrt{\frac{2}{IL}} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) I \frac{x}{L} \ddot{\theta}_L(t) dx = \\ &= -\sqrt{\frac{2I}{L}} \frac{\ddot{\theta}_L(t)}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) x dx = \\ &= -\sqrt{\frac{2I}{L}} \frac{\ddot{\theta}_L(t)}{L} \left(\frac{L}{i\pi}\right)^2 \int_0^L \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) x \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 dx = \\ &= -\sqrt{\frac{2I}{L}} \frac{\ddot{\theta}_L(t)}{L} \left(\frac{L}{i\pi}\right)^2 \left[ \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) - \frac{i\pi x}{L} \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \right]_0^L = \\ &= -\sqrt{\frac{2I}{L}} \frac{\ddot{\theta}_L(t)}{L} \left(\frac{L}{i\pi}\right)^2 \left[ \underbrace{\sin(i\pi)}_0 - i\pi \underbrace{\cos(i\pi)}_{(-1)^i} \right] = \\ &= -\sqrt{\frac{2I}{L}} \frac{\ddot{\theta}_L(t)}{L} \left(\frac{L}{i\pi}\right)^2 i\pi (-1)^{i-1} = \\ &= (-1)^i \sqrt{2LI} \frac{\ddot{\theta}_L(t)}{i\pi}\end{aligned}\quad (7.87)$$

Abbiamo ottenuto che:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = (-1)^i \sqrt{2LI} \frac{\ddot{\theta}_L(t)}{i\pi}\quad (7.88)$$

Sostituendo l'espressione di  $\theta_L(t) = \theta_L \text{ sca}(t)$  allora:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = (-1)^i \sqrt{2LI} \frac{\dot{\delta}(t)\theta_L}{i\pi}\quad (7.89)$$

che equivale (vedasi bigino) al sistema (completato con la condizione iniziale di velocità nulla):

$$\begin{cases} \ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0 \\ q_i(0^+) = (-1)^i \sqrt{2LI} \frac{\theta_L}{i\pi} \\ \dot{q}_i(0) = 0 \end{cases}\quad (7.90)$$

che differisce dalla (7.73) per la condizione su  $q_i(0^+)$ .

Essendo:

$$q_i(t) = C_i \sin(\omega_i t) + D_i \cos(\omega_i t)\quad (7.91)$$

allora:

$$\begin{cases} \dot{q}_i(0) = 0 \\ q_i(0^+) = (-1)^i \sqrt{2LI} \frac{\theta_L}{i\pi} \end{cases} \implies \begin{cases} C_i = 0 \\ D_i = (-1)^i \sqrt{2LI} \frac{\theta_L}{i\pi} \end{cases} \quad (7.92)$$

Pertanto la soluzione è data da:

$$\theta(x, t) = \frac{x}{L} \theta_L - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \left[ (-1)^{i-1} \frac{\theta_L}{i\pi} \cos(\omega_i t) \right] \quad (7.93)$$

dove è stato indicato solo  $\theta_L$  e *non*  $\theta_L \text{sca}(t)$  dal momento che ci troviamo nell'intervallo  $t \in (0, \infty)$  per il quale  $\text{sca}(t) = 1$ . Questa soluzione corrisponde ad una condizione iniziale a “zero più” in cui il solo punto in  $x = L$  all'istante  $t = 0^+$  si trova ruotato di  $\theta_L$ , mentre il resto della barra ha rotazione nulla. A seguito di ciò, tutti i modi propri della barra iniziano ad oscillare con condizioni iniziali tali da far sì che la loro somma, all'istante iniziale, dia la soluzione discontinua appena descritta.

In alternativa, a partire dall'equazione

$$-GJ\Delta\theta'' + I\Delta\ddot{\theta} = -I\frac{x}{L}\ddot{\theta}_L(t) \quad (7.94)$$

che, per  $\theta_L(t) = \theta_L \text{sca}(t)$ , diventa

$$-GJ\Delta\theta'' + I\Delta\ddot{\theta} = -I\frac{x}{L}\theta_L \dot{\delta}(t) \quad (7.95)$$

si ottengono le condizioni iniziali conseguenti ad una forzante data dalla derivata prima dell'impulso

$$\Delta\theta(0^+) = \Delta\theta(0^-) + \frac{-I\frac{x}{L}\theta_L}{I} = -\frac{x}{L}\theta_L \quad (7.96a)$$

$$\Delta\dot{\theta}(0^+) = \Delta\dot{\theta}(0^-) + 0 = 0 \quad (7.96b)$$

e quindi

$$\Delta\theta(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{IL}} \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) [C_i \sin(\omega_i 0) + D_i \cos(\omega_i 0)] = -\frac{x}{L}\theta_L \quad (7.97a)$$

$$\Delta\dot{\theta}(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{IL}} \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \omega_i [C_i \cos(\omega_i 0) - D_i \sin(\omega_i 0)] = 0 \quad (7.97b)$$

Siccome  $\sin(\omega_i 0) \equiv 0$ , la seconda implica  $C_i = 0$ , mentre dalla prima si ricava che i coefficienti  $D_i$  corrispondono a quelli della serie di Fourier che approssima la retta  $\theta_L x/L$  nel dominio  $[-L, L]$ , ovvero

$$\begin{aligned} D_i &= -\frac{\theta_L}{L} \sqrt{\frac{IL}{2}} \left[ \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) x \, dx \right] \\ &= -\theta_L \sqrt{\frac{I}{2L^3}} \left( -\frac{L}{i\pi} \left[ \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) x \right]_{-L}^L + \frac{L}{i\pi} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \, dx \right) \\ &= -\theta_L \sqrt{\frac{I}{2L^3}} \left( -\frac{L}{i\pi} [L(-1)^i + L(-1)^i] + 0 \right) \\ &= -\theta_L \sqrt{2IL} \frac{(-1)^{i-1}}{i\pi} \end{aligned} \quad (7.98)$$

Essendo la funzione  $x$  dispari, i coefficienti dei termini in coseno della serie di Fourier sono nulli per definizione. Da qui si riottiene esattamente la soluzione data dalla (7.93).

Vediamo cosa otteniamo grazie al recupero tramite i modi di accelerazione:

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta}(x, t) &= 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \left[ -(-1)^{i-1} \frac{\theta_L}{i\pi} \omega_i^2 \cos(\omega_i t) \right] = \\
&= 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \left[ -(-1)^{i-1} \frac{\theta_L}{i\pi} \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \frac{GJ}{I} \cos(\omega_i t) \right] = \\
&= \frac{2 \theta_L GJ}{IL^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) [(-1)^i i\pi \cos(\omega_i t)] \quad (7.99)
\end{aligned}$$

quindi, inserendo quanto ottenuto nell'equazione indefinita di equilibrio porta a:

$$GJ\theta'' = I\ddot{\theta} \quad (7.100)$$

$$\theta'' = \frac{2 \theta_L}{L^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) [(-1)^i i\pi \cos(\omega_i t)] \quad (7.101)$$

che integrata due volte nello spazio:

$$\theta(x, t) = \frac{2 \theta_L}{L^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{L}{i\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) [(-1)^{i-1} i\pi \cos(\omega_i t)] + E_1 x + E_2 \quad (7.102)$$

ponendo le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \theta(0, t) = 0 \\ \theta(L, t) = \theta_L \end{cases} \quad (7.103)$$

allora:

$$\begin{cases} E_2 = 0 \\ E_1 = \frac{\theta_L}{L} \end{cases} \quad (7.104)$$

quindi:

$$\theta(x, t) = \theta_L \frac{x}{L} + 2 \theta_L \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) [(-1)^{i-1} i\pi \cos(\omega_i t)] \quad (7.105)$$

$$\theta(x, t) = \theta_L \frac{x}{L} + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \left[ (-1)^{i-1} \frac{\theta_L}{i\pi} \cos(\omega_i t) \right] \quad (7.106)$$

ovvero la stessa identica cosa della (7.93). Nessuna sorpresa ovviamente in quanto, come spiegato nella sceneggiata iniziale dell'esercizio, già quella era scritta in termini di una soluzione statica più una dinamica.

### 7.3 Asta con flusso di calore imposto ad una estremità e temperatura assegnata all'altra

Sia data l'asta della figura seguente:

in cui venga imposto il flusso all'estremo libero e temperatura nulla all'incastro. Si noti che poco cambierebbe se si imponesse una temperatura diversa da zero in quanto, come abbiamo già ampiamente visto, basterebbe aggiungere, uniformemente su tutta l'asta, tale temperatura allo sviluppo a priori o a posteriori. L'esempio che segue sarà proprio specifico per tale caso.

Il PLV termico si scrive come:

$$\int_V \delta T \rho_0 C_v \dot{T} dV + \int_A \delta T \underline{q_L^T} \underline{N} dA - \int_V \delta T \rho_0 R dV + \int_V \delta \text{Grad } T \underline{K} \text{Grad } T dV = 0 \quad (7.107)$$

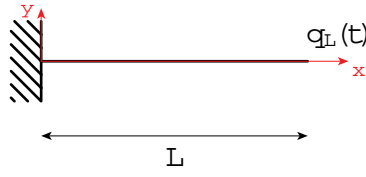


Figura 7.3: asta con flusso imposto ad una estremità

quindi:

$$\int_V \delta T \rho_0 C_v \dot{T} dV - \delta T(L) q_L(t) - \int_V \delta T \rho_0 R dV + \int_V \delta T' K T' dV = 0 \quad (7.108)$$

$$\int_V \delta T \rho_0 C_v \dot{T} dV - \delta T(L) q_L(t) - \int_V \delta T \rho_0 R dV + [\delta T K T']_0^L - \int_V \delta T K T'' dV = 0 \quad (7.109)$$

da cui segue il sistema:

$$\begin{cases} \rho_0 C_v \dot{T} = \rho_0 R + K T'' & \longrightarrow \text{evoluzione della temperatura} \\ K T'(L, t) = q_L(t) & \longrightarrow \text{condizione naturale} \\ T(0, t) = 0 & \longrightarrow \text{condizione essenziale} \\ T(x, 0) = 0 & \longrightarrow \text{condizione iniziale} \end{cases} \quad (7.110)$$

Nel seguito assumeremo, per semplicità, che  $R = 0$ .

Con la solita scelta della soluzione  $T(x, t) = f(x)g(t)$  otteniamo che:

$$\rho_0 C_v \dot{T} = K T'' \quad (7.111)$$

$$\dot{T} = \frac{K}{\rho_0 C_v} T'' \quad (7.112)$$

$$\dot{T} = \alpha^2 T'' \quad (7.113)$$

Dovremo avere che:

$$f \dot{g} = \alpha^2 f'' g \quad (7.114)$$

$$\frac{\dot{g}}{\alpha^2 g} = \frac{f''}{f} = -\beta^2 \quad (7.115)$$

Ricaviamo i modi termici:

$$f'' + \beta^2 f = 0 \quad (7.116)$$

$$f(x) = A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x) \quad (7.117)$$

ma  $f(0) = 0$  e  $f'(L) = 0$  da cui:

$$\begin{cases} f(0) = 0 & \implies B = 0 \\ f'(L) = 0 & \implies \beta A \cos(\beta L) = 0 \implies \beta_i = (2i - 1) \frac{\pi}{2L} \end{cases} \quad (7.118)$$

ovvero:

$$f_i(x) = A_i \sin\left((2i - 1) \frac{\pi x}{2L}\right) \quad (7.119)$$

Passiamo alla parte temporale e determiniamo le costanti termiche:

$$\dot{g} + \alpha^2 \beta_i^2 g = 0 \quad (7.120)$$

$$g(t) = C e^{-\lambda t} \quad (7.121)$$

$$(-\lambda + \alpha^2 \beta_i^2) C e^{-\lambda t} = 0 \quad (7.122)$$

$$\lambda_i = \alpha^2 \beta_i^2 = \left((2i - 1) \frac{\pi}{2L}\right)^2 \frac{K}{\rho_0 C_v} \quad (7.123)$$

$$g_i(t) = C_i e^{-\lambda_i t} \quad (7.124)$$

La soluzione si scrive come:

$$T(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin \left( (2i-1) \frac{\pi x}{2L} \right) [C_i e^{-\lambda_i t}] = \quad (7.125)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin \left( (2i-1) \frac{\pi x}{2L} \right) q_i(t) \quad (7.126)$$

Determiniamo le costanti di normalizzazione dei modi  $A_i$ , normalizzando nel seguente modo:

$$\int_0^L \underline{\underline{N}}_t^T \rho_0 C_v \underline{\underline{N}}_t dx = \underline{\underline{I}} \quad (7.127)$$

$$\int_0^L \rho_0 C_v N_{t,i}^2 dx = 1 \quad (7.128)$$

$$\int_0^L \rho_0 C_v A_i^2 \sin^2 \left( (2i-1) \frac{\pi x}{2L} \right) dx = 1 \quad (7.129)$$

$$\rho_0 C_v A_i^2 \underbrace{\int_0^L \sin^2 \left( (2i-1) \frac{\pi x}{2L} \right) dx}_{L/2} = 1 \quad (7.130)$$

$$A_i = \sqrt{\frac{2}{L \rho_0 C_v}} \quad (7.131)$$

per cui:

$$T(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L \rho_0 C_v}} \sum_{i=1}^{\infty} \sin \left( (2i-1) \frac{\pi x}{2L} \right) q_i(t) \quad (7.132)$$

Per trovare l'equazione modale da risolvere partiamo dalla (7.107) sostituendo lo sviluppo modale  $T(x, t) = \underline{\underline{N}}_t(x) \underline{\underline{q}}(t)$ :

$$\int_0^L \delta T^T \rho_0 C_v \dot{T} dx + \int_A \delta T^T \underline{\underline{q}}_L^T \underline{\underline{N}} dA + \int_0^L \delta \text{Grad } T^T \underline{\underline{K}} \text{Grad } T dx = 0 \quad (7.133a)$$

$$\delta \underline{\underline{q}}^T \underbrace{\left( \int_0^L \underline{\underline{N}}_t^T \rho_0 C_v \underline{\underline{N}}_t dx \right)}_{\underline{\underline{I}} \text{ per la (7.127)}} \dot{\underline{\underline{q}}} - \delta \underline{\underline{q}}^T \underline{\underline{N}}_t^T(L) \underline{\underline{q}}_L(t) + \delta \underline{\underline{q}}^T \left( \int_0^L \underline{\underline{N}}_t'^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{N}}_t' dx \right) \underline{\underline{q}} = 0 \quad (7.133b)$$

$$\dot{\underline{\underline{q}}} + \left( \int_0^L \underline{\underline{N}}_t'^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{N}}_t' dx \right) \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{N}}_t^T(L) \underline{\underline{q}}_L(t) \quad (7.133c)$$

$$\dot{q}_i + \left( \int_0^L N_{t,i}'^T K N_{t,i}' dx \right) q_i = N_{t,i}(L) q_L(t) \quad (7.133d)$$

facendo attenzione a non confondere la generica coordinata modale  $q_i$  con il flusso di calore all'estremo  $x = L$ ,  $q_L$ . Calcoliamo la derivata prima delle funzioni di forma:

$$\underline{\underline{N}}_i = \sqrt{\frac{2}{L \rho_0 C_v}} \sin \left( (2i-1) \frac{\pi x}{2L} \right) \quad (7.134)$$

$$\underline{\underline{N}}_i' = \left( (2i-1) \frac{\pi}{2L} \right) \sqrt{\frac{2}{L \rho_0 C_v}} \cos \left( (2i-1) \frac{\pi x}{2L} \right) \quad (7.135)$$

Osserviamo che:

- data l'ortogonalità delle funzioni trigonometriche il termine:

$$\int_0^L \underline{\underline{N}}_{t,i}'^T K \underline{\underline{N}}_{t,j}' dx \quad (7.136)$$



si riduce a:

$$\begin{aligned}
\int_0^L \underline{N}_{t,i}'^T K \underline{N}_{t,j}' dx &= \int_0^L \underline{N}_{t,i}'^T K \underline{N}_{t,i}' dx \\
&= \int_0^L K \underline{N}_{t,i}'^2 dx \\
&= \left( (2i-1) \frac{\pi}{2L} \right)^2 \frac{2}{L\rho_0 C_v} K \underbrace{\int_0^L \cos^2 \left( (2i-1) \frac{\pi x}{2L} \right) dx}_{L/2} \\
&= \left( (2i-1) \frac{\pi}{2L} \right)^2 \frac{K}{\rho_0 C_v} \\
&= \alpha^2 \beta^2 = \lambda_i
\end{aligned} \tag{7.137}$$

per  $i \equiv j$ , e si annulla per  $i \neq j$ ;

• inoltre:

$$\begin{aligned}
\underline{N}_{t,i}^T(L) q_L(t) &= \sqrt{\frac{2}{L\rho_0 C_v}} \sin \left( (2i-1) \frac{\pi}{2} \right) q_L(t) = \\
&= \sqrt{\frac{2}{L\rho_0 C_v}} (-1)^{i-1} q_L(t)
\end{aligned} \tag{7.138}$$

L'equazione modale da risolvere risulta essere:

$$\dot{q}_i + \lambda_i q_i = \sqrt{\frac{2}{L\rho_0 C_v}} (-1)^{i-1} q_L(t) \tag{7.139}$$

la cui soluzione generale, per  $q_L(t) = q_{Lsca}(t)$ , è del tipo:

$$q_i(t) = C_i e^{-\lambda_i t} + \frac{1}{\lambda_i} \sqrt{\frac{2}{L\rho_0 C_v}} (-1)^{i-1} q_L(t) \tag{7.140}$$

Per determinare la costante di integrazione  $C_i$  poniamo la condizione iniziale:

$$T(x, 0) = 0 \tag{7.141}$$

$$\tag{7.142}$$

e quindi:

$$q_i(0) = 0 \tag{7.143}$$

Vediamo meglio la condizione iniziale:

$$q_i(0) = 0 = C_i + \frac{1}{\lambda_i} \sqrt{\frac{2}{L\rho_0 C_v}} (-1)^{i-1} q_L(0^+) \tag{7.144}$$

che sostituita nell'espressione di  $q_i(t)$ :

$$C_i = -\frac{1}{\lambda_i} \sqrt{\frac{2}{L\rho_0 C_v}} (-1)^{i-1} q_L(0^+) \tag{7.145}$$

$$q_i(t) = q_L \frac{1}{\lambda_i} \sqrt{\frac{2}{L\rho_0 C_v}} (-1)^{i-1} (1 - e^{-\lambda_i t}) \tag{7.146}$$

infine:

$$\begin{aligned}
T(x, t) &= \underline{N}_t \underline{q} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{L\rho_0 C_v}} \sum_{i=1}^{\infty} \sin \left( (2i-1) \frac{\pi x}{2L} \right) \left[ q_L \frac{1}{\lambda_i} \sqrt{\frac{2}{L\rho_0 C_v}} (-1)^{i-1} (1 - e^{-\lambda_i t}) \right] \\
&= \frac{2}{L\rho_0 C_v} \sum_{i=1}^{\infty} \sin \left( (2i-1) \frac{\pi x}{2L} \right) \left[ q_L \frac{1}{\lambda_i} (-1)^{i-1} (1 - e^{-\lambda_i t}) \right]
\end{aligned} \tag{7.147}$$

Si rileva la stessa struttura della soluzione per la trave a torsione con coppia applicata all'estremo libero. L'unico cambiamento significativo è il termine temporale, a esponenziale reale al posto del termine armonico (che altro non è che un esponenziale immaginario). Si può quindi applicare la tecnica dei modi di accelerazione, a posteriori o a priori, anche in questo caso (lo si faccia), arrivando alle stesse conclusioni sulla convergenza della soluzione al flusso imposto all'estremità.

## 7.4 Asta con temperature imposte alle estremità

Sia data l'asta della figura seguente:

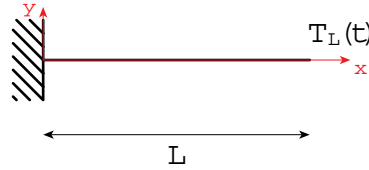


Figura 7.4: asta con temperature imposte alle estremità

Il PLV termico si scrive come:

$$\int_V \delta T^T \rho_0 C_v \dot{T} dV + \int_A \delta T^T \underline{q}_L^T \underline{N} dA - \int_V \delta T^T \rho_0 R dV + \int_V \delta \text{Grad } T^T \underline{\underline{K}} \text{Grad } T dV = 0 \quad (7.148)$$

quindi:

$$\int_V \delta T \rho_0 C_v \dot{T} dV + \int_V \delta T' K T' dV = 0 \quad (7.149)$$

$$\int_V \delta T \rho_0 C_v \dot{T} dV + [\delta T K T']_0^L - \int_V \delta T K T'' dV = 0 \quad (7.150)$$

da cui segue il sistema:

$$\begin{cases} \rho_0 C_v \dot{T} = K T'' & \longrightarrow \text{evoluzione della temperatura} \\ T(0) = T_0 & \longrightarrow \text{condizione essenziale} \\ T(L) = T_L & \longrightarrow \text{condizione essenziale} \end{cases} \quad (7.151)$$

Ci troviamo nel caso analogo al precedente, relativo alla rotazione imposta all'estremità libera, ovvero andando a scrivere l'equazione modale avremmo condizioni al contorno omogenee e termine forzante nullo, il che porta ad una soluzione identicamente nulla! Ancora una volta a causa di uno sviluppo che completo non è, perché non soddisfa le condizioni al contorno essenziali. Quindi, analogamente a quanto già fatto, scriviamo dunque il problema in termini di scostamento rispetto ad una soluzione che rispetta le condizioni al contorno, anche in questo caso, ma non necessariamente, la soluzione statica, o stazionaria che dir si voglia:

$$T(x, t) = \Delta T(x, t) + \left( T_0 + \frac{T_L(t) - T_0}{L} x \right) \quad (7.152)$$

Ancora una volta procediamo per valutazione della soluzione differenziale, al posto di utilizzarla direttamente nel PLV termico. Avremo dunque:

$$\rho_0 C_v \Delta \dot{T} = K \Delta T'' - \rho_0 C_v \frac{x}{L} \dot{T}_L \quad (7.153)$$

$$\rho_0 C_v \Delta \dot{T} - K \Delta T'' = \rho_0 C_v \frac{x}{L} \dot{T}_L \quad (7.154)$$

$$(7.155)$$

Consideriamo l'omogenea associata:

$$\rho_0 C_v f \dot{g} - K f'' g = 0 \quad (7.156)$$

$$\rho_0 C_v \frac{\dot{g}}{g} - K \frac{f''}{f} = 0 \quad (7.157)$$

$$\underbrace{\frac{\rho_0 C_v}{K}}_{1/\alpha^2} \frac{\dot{g}}{g} - \frac{f''}{f} = 0 \quad (7.158)$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\dot{g}}{g} = \frac{f''}{f} = -\beta^2 \quad (7.159)$$

Dalla soluzione del problema in spazio abbiamo:

$$f'' + \beta^2 f = 0 \quad (7.160)$$

$$f = A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x) \quad (7.161)$$

ponendo le condizioni al contorno omogenee:

$$\begin{cases} f(0) = 0 & \implies B = 0 \\ f(L) = 0 & \implies A \sin(\beta L) = 0 \implies \beta_i = \frac{i\pi}{L} \end{cases} \quad (7.162)$$

scegliamo la costante di normalizzazione in modo che:

$$\int_0^L \underline{\underline{N}}^T \rho_0 C_v \underline{\underline{N}} \, dx = \underline{\underline{I}} \quad (7.163)$$

$$\int_0^L N_{t,i}^2 \rho_0 C_v \, dx = 1 \quad (7.164)$$

$$A_i^2 \rho_0 C_v \int_0^L \sin^2(\beta x) \, dx = 1 \quad (7.165)$$

$$A_i^2 \rho_0 C_v \frac{L}{2} = 1 \quad (7.166)$$

$$A_i = \sqrt{\frac{2}{L \rho_0 C_v}} \quad (7.167)$$

Dalla soluzione temporale invece:

$$\dot{g} + \alpha^2 \beta_i^2 g = 0 \quad (7.168)$$

$$g = C e^{-\lambda t} \quad (7.169)$$

$$(-\lambda + \alpha^2 \beta_i^2) e^{-\lambda t} = 0 \quad (7.170)$$

$$\lambda_i = \alpha^2 \beta_i^2 = \frac{K}{\rho_0 C_v} \left( \frac{i\pi}{L} \right)^2 \quad (7.171)$$

Quindi il PLV termico si riscrive come:

$$\int_V \delta T^T \rho_0 C_v \dot{T} dV + \int_V \delta \text{Grad } T^T \underline{\underline{K}} \text{Grad } T dV = 0 \quad (7.172)$$

$$\int_0^L \delta \Delta T^T \rho_0 C_v \left( \Delta \dot{T} + \frac{x}{L} \dot{T}_L \right) dx + \int_0^L \delta \Delta T'^T \underline{\underline{K}} \left( \Delta T' + \frac{T_L(t) - T_0}{L} \right) dx = 0 \quad (7.173)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^L \delta \Delta T^T \rho_0 C_v \Delta \dot{T} dx + \int_0^L \delta \Delta T^T \rho_0 C_v \frac{x}{L} \dot{T}_L(t) dx + \dots \\ & \dots + \int_0^L \delta \Delta T'^T \underline{\underline{K}} \Delta T' dx + \int_0^L \delta \Delta T'^T \underline{\underline{K}} \frac{T_L(t) - T_0}{L} dx = 0 \end{aligned} \quad (7.174)$$

$$\begin{aligned} & \delta \underline{q}^T \underbrace{\left( \int_0^L \underline{\underline{N}}_t^T \rho_0 C_v \underline{\underline{N}}_t dx \right)}_{\underline{\underline{I}}} \underline{\dot{q}} + \delta \underline{q}^T \left( \int_0^L \underline{\underline{N}}_t^T \rho_0 C_v \frac{x}{L} dx \right) \dot{T}_L(t) + \dots \\ & \dots + \delta \underline{q}^T \left( \int_0^L \underline{\underline{N}}_t'^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{N}}_t' dx \right) \underline{q} + \delta \underline{q}^T \left( \int_0^L \underline{\underline{N}}_t'^T \underline{\underline{K}} \frac{T_L(t) - T_0}{L} dx \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.175)$$

$$\begin{aligned} & \underline{\dot{q}} + \left( \int_0^L \underline{\underline{N}}_t^T \rho_0 C_v \frac{x}{L} dx \right) \dot{T}_L(t) + \left( \int_0^L \underline{\underline{N}}_t'^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{N}}_t' dx \right) \underline{q} + \dots \\ & \dots + \left( \int_0^L \underline{\underline{N}}_t'^T \underline{\underline{K}} dx \right) \frac{T_L(t) - T_0}{L} = 0 \end{aligned} \quad (7.176)$$

$$(7.177)$$

calcoliamo i tre integrali:

- primo termine:

$$\begin{aligned} \int_0^L \underline{\underline{N}}_t^T \rho_0 C_v \frac{x}{L} dx &= \frac{\rho_0 C_v}{L} \sqrt{\frac{2}{L \rho_0 C_v}} \int_0^L \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) x dx = \\ &= \frac{\rho_0 C_v}{L} \sqrt{\frac{2}{L \rho_0 C_v}} \left(\frac{L}{i\pi}\right)^2 i\pi (-1)^{i-1} = \\ &= \sqrt{2L \rho_0 C_v} \frac{1}{i\pi} (-1)^{i-1} \end{aligned} \quad (7.178)$$

- secondo termine:

$$\begin{aligned} \int_0^L \underline{\underline{N}}_t'^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{N}}_t' dx &= \frac{2K}{L \rho_0 C_v} \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \int_0^L \cos^2\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx = \\ &= \frac{2K}{L \rho_0 C_v} \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \frac{L}{2} = \\ &= \frac{K}{\rho_0 C_v} \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \end{aligned} \quad (7.179)$$

- terzo termine:

$$\begin{aligned} \int_0^L \underline{\underline{N}}_t'^T \underline{\underline{K}} dx &= \frac{i\pi}{L} K \int_0^L \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7.180)$$

Rimane dunque:

$$\dot{q}_i + \left( \frac{K}{\rho_0 C_v} \left( \frac{i\pi}{L} \right)^2 \right) q_i = - \left( \sqrt{2L\rho_0 C_v} \frac{1}{i\pi} (-1)^{i-1} \right) \dot{T}_L \quad (7.181)$$

$$\dot{q}_i + \lambda_i q_i = - \left( \sqrt{2L\rho_0 C_v} \frac{1}{i\pi} (-1)^{i-1} \right) \dot{T}_L \quad (7.182)$$

$$\dot{q}_i + \lambda_i q_i = - \left( \sqrt{2L\rho_0 C_v} \frac{1}{i\pi} (-1)^{i-1} \right) T_L \delta(t) \quad (7.183)$$

$$\begin{cases} \dot{q}_i + \lambda_i q_i = 0 \\ q_i(0^+) = - \left( \sqrt{2L\rho_0 C_v} \frac{1}{i\pi} (-1)^{i-1} \right) T_L \end{cases} \quad (7.184)$$

$$\begin{cases} q_i = A e^{-\lambda_i t} \\ A = - \left( \sqrt{2L\rho_0 C_v} \frac{1}{i\pi} (-1)^{i-1} \right) T_L \end{cases} \quad (7.185)$$

$$(7.186)$$

La soluzione per  $t > 0$  diventa:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \Delta T(x, t) + \left( T_0 + \frac{T_L(t) - T_0}{L} x \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{L\rho_0 C_v}} \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \left[ - \left( \sqrt{2L\rho_0 C_v} \frac{1}{i\pi} (-1)^{i-1} \right) T_L e^{-\lambda_i t} \right] + \dots \\ &\quad \dots + \left( T_0 + \frac{T_L - T_0}{L} x \right) \end{aligned} \quad (7.187)$$

$$T(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \left[ \left( \frac{2}{i\pi} (-1)^i \right) T_L e^{-\lambda_i t} \right] + \left( T_0 + \frac{T_L - T_0}{L} x \right) \quad (7.188)$$

che è già quindi scritta nella forma “soluzione statica + scostamento” come quella che otterremmo utilizzando i modi di accelerazione a posteriori. Questo approccio si potrebbe combinare con quello dell’esercizio precedente nel caso di flusso + temperature assegnate al contorno. Chiaramente nel caso precedente di assegnazione di una temperatura all’estremo e di flusso all’altro è inutile in quanto la soluzione corrisponde semplicemente alla somma della temperatura assegnata sulla distribuzione di temperatura dovuto al flusso con temperatura nulla all’altro estremo, precedentemente calcolata.

## 7.5 Trave su due appoggi soggetta a flessione

Si calcoli l’andamento della deformata della seguente trave nel tempo:

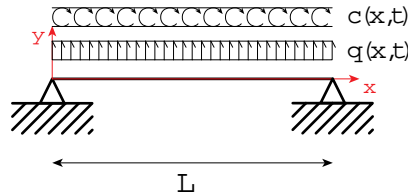


Figura 7.5: trave su due appoggi soggetta a flessione

Se si considerasse una trave con la medesima distribuzione di carico ma vincolata con un carrello e una cerniera a terra si otterrebbe una soluzione identica al caso in esame, in quanto in assenza

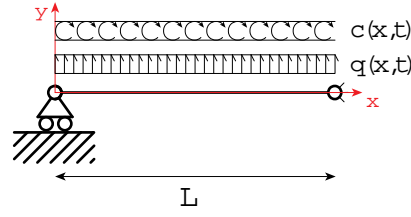


Figura 7.6: trave con vincoli di carrello e cerniera

di forze assiali le condizioni di vincolo sono le stesse.

Il PLV risulta scritto come:

$$\int_0^L EJy''\delta y'' dx = - \int_0^L m\ddot{y}\delta y dx - \int_0^L I\ddot{y}'\delta y' dx + \int_0^L q\delta y dx + \int_0^L c\delta y' dx \quad (7.189)$$

integriamo per parti in modo da far sparire le derivate degli spostamenti virtuali sotto il simbolo di integrale:

$$\begin{aligned} [EJy''\delta y']_0^L - [(EJy'')'\delta y]_0^L + \int_0^L (EJy'')''\delta y dx &= - \int_0^L m\ddot{y}\delta y dx + \dots \\ \dots - [I\ddot{y}'\delta y]_0^L + \int_0^L (I\ddot{y}')'\delta y dx + \int_0^L q\delta y dx + [c\delta y]_0^L - \int_0^L c'\delta y dx & \end{aligned} \quad (7.190)$$

Per la trave appoggiata le condizioni al contorno essenziali ci dicono che  $y(0) = y(L) = 0$ , per cui l'equazione deve valere qualunque siano gli spostamenti virtuali,  $\delta y$  e  $\delta y'$ , che rispettano tali vincoli (ovvero  $\delta y(0) = \delta y(L) = 0$ ). Possiamo dunque semplificare nel seguente modo:

$$\begin{aligned} [EJy''\delta y']_0^L + \int_0^L (EJy'')''\delta y dx &= - \int_0^L m\ddot{y}\delta y dx + \dots \\ \dots + \int_0^L (I\ddot{y}')'\delta y dx + \int_0^L q\delta y dx - \int_0^L c'\delta y dx & \end{aligned} \quad (7.191)$$

e data l'arbitrarietà degli spostamenti virtuali si ottiene il seguente problema differenziale per la trave appoggiata:

$$\begin{cases} (EJy'')'' = -m\ddot{y} + (I\ddot{y}')' + q - c' \\ EJy''(0) = EJy''(L) = 0 \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases} \quad (7.192)$$

in cui le condizioni al contorno naturali ci dicono che il momento flettente deve essere nullo ai due estremi.

Consideriamo ora il caso semplice di trave con solo carico  $q$  uniforme, di rigidezza  $EJ$  costante, per la quale si possa trascurare il termine legato al momento d'inerzia  $I$ , ipotesi accettabile specialmente se si è interessati ai modi a frequenze più basse.

L'equazione differenziale da esaminare risulta essere:

$$EJy^{IV} = -m\ddot{y} + q \quad (7.193)$$

Considerando l'omogenea associata (ovvero con  $q = 0$ ) e utilizzando la separazione di variabili:

$$y(x, t) = f(x) g(t) \quad (7.194)$$

calcoliamo i modi propri:

$$EJy^{IV} = -m\ddot{y} \quad (7.195)$$

$$\frac{f^{IV}}{f} = -\frac{m}{EJ} \frac{\ddot{g}}{g} \quad (7.196)$$

$$\frac{f^{IV}}{f} = -\frac{1}{\alpha^2} \frac{\ddot{g}}{g} \quad (7.197)$$

dove è stato posto  $\alpha^2 = EJ/m$  che ha le dimensioni di una velocità per unità di lunghezza. I due membri devono essere pari a una costante positiva per rispettare il vincolo di stabilità (bisogna guardare la parte temporale, quindi la  $g(t)$ ) della soluzione:

$$\frac{f^{IV}}{f} = -\frac{1}{\alpha^2} \frac{\ddot{g}}{g} = \beta^4 \quad (7.198)$$

L'equazione differenziale con incognita la funzione del solo spazio  $f(x)$  si scrive come:

$$f^{IV} - \beta^4 f = 0 \quad (7.199)$$

la cui equazione caratteristica è:

$$\lambda^4 - \beta^4 = 0 \quad (7.200)$$

$$\lambda^4 = \beta^4 \quad (7.201)$$

$$\lambda^2 = \pm \beta^2 \quad (7.202)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \beta \\ \lambda_2 = -\beta \\ \lambda_3 = i\beta \\ \lambda_4 = -i\beta \end{cases} \quad (7.203)$$

per cui la soluzione è del tipo:

$$f = A_1 \sin(\beta x) + A_2 \cos(\beta x) + A_3 e^{\beta x} + A_4 e^{-\beta x} \quad (7.204)$$

Le condizioni al contorno ci dicono che:

$$\begin{cases} f(0) = 0 & \implies A_2 + A_3 + A_4 = 0 \\ f''(0) = 0 & \implies -A_2 + A_3 + A_4 = 0 \\ f(L) = 0 & \implies A_1 \sin(\beta L) + A_3 e^{\beta L} + A_4 e^{-\beta L} = 0 \\ f''(L) = 0 & \implies -A_1 \sin(\beta L) + A_3 e^{\beta L} + A_4 e^{-\beta L} = 0 \end{cases} \quad (7.205)$$

Dalla differenza delle prime due si ottiene che  $A_2 = 0$ , mentre dalla differenza delle ultime due si ha che  $A_1 \sin(\beta L) = 0$  per cui, per non avere una soluzione identicamente nulla, dovrà essere  $\sin(\beta L) = 0$ . Rimane così un sistema di due equazioni omogenee in  $A_3$  e  $A_4$ , dato da una qualsiasi delle prime due e una qualsiasi delle ultime due, che essendo a determinante non nullo avrà solo la soluzione banale  $A_3 = A_4 = 0$ . Con queste condizioni rimangono da ricavare solo le autosoluzioni di  $\sin(\beta L) = 0$ , da cui:

$$\beta_i = \frac{i\pi}{L} \quad (7.206)$$

La lunghezza d'onda spaziale sarà pari a:

$$\lambda_i = \frac{2\pi}{\beta_i} = \frac{2L}{i} \quad (7.207)$$

Potremo quindi scrivere la generica soluzione come sovrapposizione di modi del tipo:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) q_i(t) \quad (7.208)$$

Determiniamo le costanti di normalizzazione dei modi:

$$\int_0^L \underline{N}^T m \underline{N} dx = \underline{I} \quad (7.209)$$

$$\int_0^L m \underline{N}_i^2 dx = 1 \quad (7.210)$$

$$\int_0^L m A_i^2 \sin^2 \left( \frac{i\pi x}{L} \right) dx = 1 \quad (7.211)$$

$$m A_i^2 \int_0^L \sin^2 \left( \frac{i\pi x}{L} \right) dx = 1 \quad (7.212)$$

$$m A_i^2 \frac{L}{2} = 1 \quad (7.213)$$

$$A_i^2 = \frac{2}{mL} \quad (7.214)$$

$$A_i = \sqrt{\frac{2}{mL}} \quad (7.215)$$

La soluzione dell'equazione differenziale temporale:

$$\ddot{g} + \alpha^2 \beta_i^4 g = 0 \quad (7.216)$$

è del tipo:

$$g(t) = B_i \sin(\omega_i t) + C_i \cos(\omega_i t) \quad (7.217)$$

con:

$$\omega_i = \alpha \beta_i^2 = \sqrt{\frac{EJ}{m}} \frac{i^2 \pi^2}{L^2} \quad (7.218)$$

Ritornando alla rappresentazione modale la soluzione generale sarà quindi del tipo:

$$y(x, t) = \sqrt{\frac{2}{mL}} \sum_{i=1}^{\infty} \sin \left( \frac{i\pi x}{L} \right) [B_i \sin(\omega_i t) + C_i \cos(\omega_i t)] \quad (7.219)$$

Sostituiamo lo sviluppo modale nella (7.189):

$$\begin{aligned} \int_0^L EJ y'' \delta y'' dx &= - \int_0^L m \ddot{y} \delta y dx + \int_0^L q \delta y dx \\ \underline{q}^T \left( \int_0^L EJ \underline{N}''^T \underline{N}'' dx \right) \delta \underline{q} &= - \underbrace{\ddot{\underline{q}}^T \left( \int_0^L m \underline{N}^T \underline{N} dx \right)}_{\underline{I}} \delta \underline{q} + \left( \int_0^L q \underline{N} dx \right) \delta \underline{q} \\ \ddot{\underline{q}}^T \delta \underline{q} + \underline{q}^T \left( \int_0^L EJ \underline{N}''^T \underline{N}'' dx \right) \delta \underline{q} &= \underline{q}^T \left( \int_0^L \underline{N} dx \right) \delta \underline{q} \end{aligned} \quad (7.220)$$

Il primo termine tra parentesi risulta essere:

$$\begin{aligned} \int_0^L EJ \underline{N}''^T \underline{N}'' dx &= EJ \int_0^L \underline{N}''^T \underline{N}'' dx = \\ &= EJ \int_0^L N_i'^2 dx = \\ &= EJ \frac{2}{mL} \left( \frac{i\pi}{L} \right)^4 \int_0^L \sin^2 \left( \frac{i\pi x}{L} \right) dx = \\ &= EJ \frac{2}{mL} \left( \frac{i\pi}{L} \right)^4 \frac{L}{2} = \\ &= \frac{EJ}{m} \left( \frac{i\pi}{L} \right)^4 = \\ &= \omega_i^2 \end{aligned} \quad (7.221)$$



mentre il secondo:

$$\begin{aligned}
\int_0^L \underline{N} dx &= \sqrt{\frac{2}{mL}} \int_0^L \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx = \\
&= \sqrt{\frac{2}{mL}} \frac{L}{i\pi} \int_0^L \frac{i\pi}{L} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx = \\
&= \sqrt{\frac{2}{mL}} \frac{L}{i\pi} \left[ -\cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \right]_0^L = \\
&= \sqrt{\frac{2}{mL}} \frac{L}{i\pi} [1 - \cos(i\pi)] = \\
&= \sqrt{\frac{2}{mL}} \frac{L}{i\pi} [1 - (-1)^i]
\end{aligned} \tag{7.222}$$

La (7.220) diventa:

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i &= q \sqrt{\frac{2}{mL}} \frac{L}{i\pi} [1 - (-1)^i] \\
q_i(t) &= B_i \sin(\omega_i t) + C_i \cos(\omega_i t) + \frac{q}{\omega_i^2} \sqrt{\frac{2}{mL}} \frac{L}{i\pi} [1 - (-1)^i]
\end{aligned} \tag{7.223}$$

poniamo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} q_i(0) = 0 & \Rightarrow C_i = -\frac{q}{\omega_i^2} \sqrt{\frac{2}{mL}} \frac{L}{i\pi} [1 - (-1)^i] \\ \dot{q}_i(0) = 0 & \Rightarrow B_i = 0 \end{cases} \tag{7.224}$$

ovvero:

$$q_i(t) = \left[ \frac{q}{\omega_i^2} \sqrt{\frac{2}{mL}} \frac{L}{i\pi} [1 - (-1)^i] \right] (1 - \cos(\omega_i t)) \tag{7.225}$$

infine:

$$\begin{aligned}
y(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{mL}} \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \left\{ \left[ \frac{q}{\omega_i^2} \sqrt{\frac{2}{mL}} \frac{L}{i\pi} [1 - (-1)^i] \right] (1 - \cos(\omega_i t)) \right\} = \\
&= \frac{2q}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \left\{ \left[ \frac{1}{\omega_i^2} \frac{1}{i\pi} [1 - (-1)^i] \right] (1 - \cos(\omega_i t)) \right\} = \\
&= \frac{2q}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \left\{ \left[ \frac{m}{EJ} \frac{L^4}{i^4 \pi^4} \frac{1}{i\pi} [1 - (-1)^i] \right] (1 - \cos(\omega_i t)) \right\} = \\
&= \frac{2qL^4}{EJ} \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \left\{ \left[ \frac{1}{i^5 \pi^5} [1 - (-1)^i] \right] (1 - \cos(\omega_i t)) \right\}
\end{aligned} \tag{7.226}$$

Si noti la rapidissima convergenza  $(1/i)^5$  di questo sviluppo, dovuta alla combinazione di condizioni totalmente, sia le essenziali che le naturali, omogenee al contorno e alla distribuzione costante del carico, le cui forze generalizzate tendono ad essere nulle per i modi alti.

Ciononostante vediamo comunque cosa otteniamo con i modi di accelerazione:

$$\ddot{y}(x, t) = \frac{2q}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \left\{ \left[ \frac{1}{i\pi} [1 - (-1)^i] \right] \cos(\omega_i t) \right\} \tag{7.227}$$

quindi la:

$$EJy^{IV} + m\ddot{y} = q \tag{7.228}$$

diventa:

$$\begin{aligned}
EJy^{IV} + m \left[ \frac{2q}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \left\{ \left[ \frac{1}{i\pi} [1 - (-1)^i] \right] \cos(\omega_i t) \right\} \right] &= q \\
EJy^{III} - m \left[ \frac{2q}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{L}{i\pi} \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \left\{ \left[ \frac{1}{i\pi} [1 - (-1)^i] \right] \cos(\omega_i t) \right\} \right] &= qx + A \\
EJy^{II} - m \left[ \frac{2q}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{L}{i\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \left\{ \left[ \frac{1}{i\pi} [1 - (-1)^i] \right] \cos(\omega_i t) \right\} \right] &= \frac{q}{2} x^2 + Ax + B \\
EJy^I + m \left[ \frac{2q}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{L}{i\pi}\right)^3 \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \left\{ \left[ \frac{1}{i\pi} [1 - (-1)^i] \right] \cos(\omega_i t) \right\} \right] &= \frac{q}{6} x^3 + \frac{A}{2} x^2 + Bx + C \\
EJy + m \left[ \frac{2q}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{L}{i\pi}\right)^4 \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \left\{ \left[ \frac{1}{i\pi} [1 - (-1)^i] \right] \cos(\omega_i t) \right\} \right] &= \frac{q}{24} x^4 + \frac{A}{6} x^3 + \frac{B}{2} x^2 + Cx + D
\end{aligned} \tag{7.229}$$

ponendo le condizioni al contorno di appoggio:

$$\left\{ \begin{array}{lll} y(0) = 0 & \implies & D = 0 \\ y(L) = 0 & \implies & \frac{q}{24} L^3 + \frac{A}{6} L^2 + \frac{B}{2} L + C = 0 \\ y''(0) = 0 & \implies & B = 0 \\ y''(L) = 0 & \implies & \frac{q}{2} L + A = 0 \end{array} \right. \implies \begin{array}{l} D = 0 \\ C = \frac{qL^3}{24} \\ B = 0 \\ A = -\frac{qL}{2} \end{array} \tag{7.230}$$

determiniamo le costanti di integrazione  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ .

$$\begin{aligned}
EJy + m \left(\frac{L}{i\pi}\right)^4 \left[ \frac{2q}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \left\{ \left[ \frac{1}{i\pi} [1 - (-1)^i] \right] \cos(\omega_i t) \right\} \right] &= \frac{q}{24} x^4 - \frac{qL}{12} x^3 + \frac{qL^3}{24} x \\
y = -\frac{m}{EJ} \left(\frac{L}{i\pi}\right)^4 \left[ \frac{2q}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \left\{ \left[ \frac{1}{i\pi} [1 - (-1)^i] \right] \cos(\omega_i t) \right\} \right] &+ \frac{q}{EJ} \left( \frac{1}{24} x^4 - \frac{L}{12} x^3 + \frac{L^3}{24} x \right) \\
y = -\frac{2qL^4}{EJ} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \left\{ \left[ \frac{1}{i^5 \pi^5} [1 - (-1)^i] \right] \cos(\omega_i t) \right\} \right] &+ \frac{q}{EJ} \left( \frac{1}{24} x^4 - \frac{L}{12} x^3 + \frac{L^3}{24} x \right)
\end{aligned} \tag{7.231}$$

Ancora una volta i modi di accelerazione hanno determinato la funzione a cui converge la serie di Fourier corrispondente alla soluzione statica. Si può infatti verificare che tale è il termine polinomiale sopra riportato, ad esempio con una semplice applicazione della linea elastica. Si noti che il polinomio è del quarto ordine e la conseguente funzione periodica equivalente continua fino alla derivata terza, da cui la serie con  $(1/i)^5$ . Risultano quindi confermate le osservazioni già fatte sulla poca utilità dell'uso dei modi di accelerazione in questo caso. La verifica è comunque significativa e utile a meglio capire l'utilizzo dei modi come sviluppo efficiente per il calcolo di risposte in sistemi più complessi. A costo di annoiare si invita, ancora una volta, a ripetere l'esercizio col calcolo diretto delle azioni interne, come si sarebbe fatto a Scienza delle Costruzioni, proseguendo poi al calcolo della deformata con la linea elastica. Tale verifica permette di constatare che qualora fossimo interessati al solo calcolo del taglio e del momento flettente ci si potrebbe limitare a solo due integrazioni, corrispondenti appunto al calcolo delle citate azioni interne. Le ulteriori due integrazioni per ottenere la deformata non sono altro che la ben nota linea elastica. Ripetiamo insieme: in molte applicazioni, specie quando si è interessati alle sole azioni interne di travi isostatiche, o addirittura libere, tale approccio può risultare più semplice e diretto che non la soluzione della, ancorché banale, equazione differenziale su riportata.

### 7.5.1 Ulteriore Piccolo Complemento

In questo caso si può verificare facilmente che una soluzione a propagazione ondosa simile a quella utilizzata nel caso torsionale, ossia con  $y = f(x \pm ct)$  non soddisfa l'equazione differenziale (7.192). La soluzione propagativa per il caso flessionale si presenta quindi di maggiore complessità.

Senza entrare in eccessivi dettagli notiamo però che sarebbe ancora possibile ottenere le velocità delle singole onde armoniche dalla semplice relazione: “velocità.di.propagazione.onda = periodo.spaziale.onda  $\times$  frequenza.oscillazione.onda”; cioè:

$$c_i = \lambda_i \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{i\pi}{L} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad (7.232)$$

constatando però che ora ad ogni onda armonica è associata una diversa velocità di propagazione. Ciò implica che, con l'avanzare del tempo, nascerà uno sfasamento fra le varie onde armoniche, che permettono di ricostruire la  $f(x)$  quando  $t = 0$ , il quale genererà una distorsione dell'onda stessa. Questo effetto, chiamato dispersione, non era presente nel caso delle onde per il problema torsionale, perché lì la velocità associata a ciascuna onda armonica era la medesima.

Anche in questo caso applicando le formule di prostaferesi (Eq. (7.46a)) all'Eq. (7.219) si può ricostruire la soluzione del problema di tipo ondoso dalle soluzioni per modi propri, con ulteriore conferma che in questo caso la propagazione ondosa sarà caratterizzata da velocità diverse per ciascun coefficiente della serie di Fourier.

Ad ulteriore complemento notiamo che l'esistenza o meno di un'unica velocità di propagazione dipende dalla linearità o meno delle frequenze proprie di vibrare dal loro indice, come verificabile in particolare per i casi qui esemplificati. Per ulteriore informazione, ma senza ulteriori approfondimenti, notiamo che in tale caso si possono poi definire due velocità chiamate: di fase e di gruppo.

Per possibili approfondimenti sulle onde in mezzi elastici si veda, ad esempio:  
K.F.Graff: Wave Motions in Elastic Solids, Dover.

## Capitolo 8

# METODI DI INTEGRAZIONE DIRETTA PER IL PROBLEMA TERMOELASTICO

Nei precedenti capitoli si è visto come il ricorso all'approssimazione modale consentisse di ridurre a un numero limitato di equazioni sistemi di dimensioni molto maggiori, permettendo di conseguenza una soluzione delle equazioni della dinamica strutturale assai efficiente. In alcuni casi però, ad esempio quando il modello ridotto serve solo per la simulazione di risposte e non per fornire i modelli da utilizzare per la progettazione di controllori, una analisi di bilancio globale fra il costo computazionale per ottenere la base modale e quello del numero di condizioni dinamiche da simulare, può consigliare di procedere attraverso una integrazione numerica diretta. Si procede allora all'integrazione del sistema di grandi dimensioni delle equazioni differenziali ordinarie di partenza, ottenuto dopo aver discretizzato spazialmente il sistema attraverso l'uso del metodo ad elementi finiti (o differenze finite, o volumi finiti, o Ritz con numero elevatissimo, buon condizionamento del problema permettendo, di termini).

Nel caso lineare, valutato l'approccio più conveniente, si deve notare che il conseguimento del risultato passa attraverso l'uso di metodi impliciti che richiedono la ripetuta risoluzione di un sistema lineare, generalmente sulla base di una singola fattorizzazione, al più una per ogni cambio del passo d'integrazione <sup>1</sup> risolvendo il sistema tante volte quanti sono i passi temporali considerati. Tale approccio risulta comunque efficiente, anche per milioni di equazioni, grazie alla elevata sparsità delle matrici ottenute con alcuni dei metodi di discretizzazione su menzionati.

Un metodo di integrazione diretta alle differenze, del tipo noto in letteratura attraverso la sigla LMM (Linear Multistep Methods), può essere scritto nella seguente forma

$$x_{k+1} = \sum_{i=k-r}^k \alpha_i x_i + \Delta t \sum_{i=k+1-r}^{k+1} \beta_i \dot{x}_i, \quad (8.1) \quad \text{metlmm}$$

dove con  $x_k$  si è indicato lo stato valutato al tempo  $t_k$ . Se il termine  $x_{k+1}$  non dipende direttamente da se stesso ( $\beta_{k+1} = 0$ ), si dice che il metodo è *esplicito*, intendendo che lo stato al tempo  $k+1$  può essere determinato direttamente noti i vettori di stato ai passi precedenti. In caso contrario il metodo sarà *implicito*. Tale formulazione contiene anche gli schemi a differenze finite, che si possono pertanto considerare come una metodologia particolare di determinazione dei coefficienti  $\alpha$  e  $\beta$ . È noto dal corso di Calcolo Numerico che un metodo esplicito è condizionatamente stabile, ovvero esiste un passo di integrazione massimo utilizzabile, oltre il quale la soluzione risulta instabile. Tale fatto è fortemente limitante nei casi in cui i tempi caratteristici di interesse del sistema siano sensibilmente maggiori del passo d'integrazione permesso della stabilità del metodo esplicito scelto, il dominio temporale abbracciato dell'intera simulazione sia grande, o

---

<sup>1</sup>Anche nel caso di equazioni non lineari, utilizzando il metodo di Newton-Raphson, ci si riduce a risolvere in maniera iterativa il sistema di equazioni linearizzato localmente.

la precisione in virgola mobile usata non consenta di avvertire le variazioni sulla soluzione dovute a passi temporali troppo piccoli.

Per questo motivo si ricorre a metodi impliciti di integrazione, che permettono di scegliere il passo d'integrazione sulla base della precisione richiesta dalle frequenze di interesse. Con tale asserzione si intende affermare che se per la soluzione modale avessimo deciso di integrare esattamente il modo di frequenza massima di interesse  $f_{\max\text{int}}$  con una precisione accettabile garantita da un passo  $1/(kf_{\max\text{int}})$ , essendo  $k$  una frazione del periodo più piccolo necessaria per ottenere una sufficiente precisione della soluzione numerica, tale passo deve essere sostanzialmente lo stesso usato anche per l'integrazione diretta. Oltre a ciò occorre notare che l'integrazione diretta non può non garantire un corretto recupero della statica del sistema. Pertanto la soluzione diretta si avvicinerà intrinsecamente a una corrispondente soluzione modale, nel senso precedentemente illustrato, combinata con l'accelerazione dei modi.

Con riferimento ai metodi LMM è possibile dimostrare che valgono alcune limitazioni, note come *barriere di Dahlquist*. Da esse si desume che nessun metodo esplicito può essere incondizionatamente stabile e non vi sono metodi impliciti LMM incondizionatamente stabili di ordine superiore al secondo; inoltre, fra tutti i metodi impliciti LMM del secondo ordine incondizionatamente stabili la massima precisione è quella ottenibile con il *metodo dei trapezi*, noto anche come metodo di *Crank-Nicolson*. Si noti allora che la condizionata stabilità dei metodi espliciti ci obbligherà a integrare il nostro sistema con  $1/(hf_{\max})$ , essendo  $f_{\max}$  la frequenza del modo più alto in assoluto, nel caso di discretizzazioni raffinate spessissimo assai più grande di  $f_{\max\text{int}}$ , e  $h$  il fattore, dipendente dal metodo, necessario per garantire la stabilità. È importante notare che l'affermazione sulla possibile incondizionata stabilità di metodi impliciti LMM non implica che un qualsiasi metodo implicito LMM sia tale. Risulta allora evidente come l'integrazione diretta con metodi espliciti sia accettabile solo se è effettivamente necessario, possibilmente per tempi di simulazione non troppo lunghi, arrivare alle risoluzioni temporali associate a  $f_{\max}$ , ad esempio nei problemi di impatto ad alta velocità, mentre risulta assolutamente impraticabile per le più usuali simulazioni termoelastiche, per le quali l'unica alternativa praticabile rispetto alla soluzione modale non può che basarsi su metodi LMM impliciti e incondizionatamente stabili. Va però aggiunto che spesso l'impegno di calcolo richiesto per l'avanzamento di un passo temporale con metodo esplicito è significativamente inferiore dell'equivalente implicito, specialmente per problemi non lineari. Di fatto per i metodi espliciti non esiste una sostanziale differenza fra simulazioni lineari e non lineari, se non per possibili ulteriori diminuzioni del passo di integrazione richieste dalle non linearità, e.g. problemi con contatti e leggi costitutive particolarmente 'indurenti'. L'approccio esplicito è inoltre più facilmente parallelizzabile e scalabile su sistemi multiprocessore distribuiti. Ration per cui la scelta, in ragione dell'efficienza computazionale a parità di precisione, fra un metodo implicito e uno esplicito viene a dipendere significativamente dal tipo di problema e dal programma disponibile per la sua soluzione. In generale per la tipologia dei problemi affrontati in questo corso l'uso di metodi impliciti permette, specialmente nel caso di problemi con discretizzazione molto raffinata, l'utilizzo di passi di integrazione significativamente più grandi di quelli dei metodi espliciti, tanto da rendere questi ultimi particolarmente molto più inefficienti.<sup>2</sup> Nel caso lineare, essendo concettualmente possibile una decomposizione modale completa per un qualsiasi sistema di equazioni differenziali a coefficienti costanti, le caratteristiche di un metodo d'integrazione potranno essere studiate molto semplicemente considerando l'equazione:  $\dot{x} = ax$ , avendo cura di tenere in conto di valori, arbitrari, per la costante  $a$  che devono anche appartenere al dominio dei numeri complessi. Il problema dello studio della stabilità del metodo si basa sull'analisi delle soluzioni di una equazione scalare alle differenze. Per risolvere un'equazione alle differenze, si devono studiare le radici  $\rho$  del polinomio caratteristico ad essa associato<sup>3</sup>. Perché la soluzione sia incondizionatamente stabile le soluzioni dell'equazione caratteristica devono avere un modulo minore o uguale ad uno per qualunque passo d'integrazione.

Ad esempio il metodo di *Crank-Nicolson* permette di risolvere il problema  $\dot{x} = f(x)$  attraverso questa semplice espressione

$$x_{k+1} = x_k + \frac{\Delta t}{2} \left( f(x_{k+1}) + f(x_k) \right). \quad (8.2)$$

eq:id:cn

<sup>2</sup>Si noti che i metodi impliciti del tipo Runge-Kutta, che qui non richiamiamo, non sono soggetti a vincoli sul limite di precisione. Tale vantaggio va però soppesato con la maggiore difficoltà nell'impostazione computazionale.

<sup>3</sup>La soluzione generale di una equazione lineare alle differenze è del tipo  $c\rho^k$ .

Nel caso lineare a coefficienti costanti,  $\dot{x} = ax$  l'equazione caratteristica per il metodo di Crank-Nicolson è data da:

$$\rho^{k+1} \left( 1 - \frac{\Delta t}{2} a \right) - \rho^k \left( 1 + \frac{\Delta t}{2} a \right) = 0, \quad (8.3)$$

da cui si ottiene la seguente soluzione

$$\rho = \frac{2 + a\Delta t}{2 - a\Delta t} \quad (8.4) \quad \text{eq:id:cn-rho}$$

Il metodo di Crank-Nicolson può anche essere modificato tramite una parametrizzazione del tipo:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t (\alpha f(x_{k+1}) + (1 - \alpha) f(x_k)). \quad (8.5)$$

a cui corrisponde la seguente soluzione:

$$\rho = \frac{1 + (1 - \alpha)a\Delta t}{1 - \alpha a\Delta t} \quad (8.6) \quad \text{eq:id:cn-alpha-r}$$

che corrisponde a: Crank-Nicolson, il solo con precisione del secondo ordine, per  $\alpha = 0.5$ , Eulero o differenze finite all'indietro per  $\alpha = 1$ , Eulero o differenze finite in avanti, schema esplicito, per  $\alpha = 0$ . Sulla base di quanto richiamato immediatamente nel seguito un metodo intermedio con  $\alpha > 0.5$  permette di ottenere una dissipazione numerica controllata garantendo una stabilità incondizionata. Si può quindi vedere come una dipartita graduale da Crank-Nicolson verso uno schema totalmente all'indietro riduce gradualmente la precisione favorendo però la stabilità, mentre nel verso opposto si ha sempre sia perdita di precisione che di stabilità, con l'unico possibile vantaggio della semplicità di uno schema esplicito per  $\alpha = 0$ .

Se consideriamo un sistema strutturale non smorzato, il valore di  $a$  sarà in generale dato da un numero puramente immaginario. Si può comunque vedere che, qualunque sia  $a$ , il modulo di  $\rho$  dato dalla (8.4) è sempre pari ad 1 per qualsiasi valore del passo temporale  $\Delta t$ , e l'unico errore che si commette è un errore di fase. Il valore di  $\rho$  della (8.4) è un'approssimazione del relativo esponenziale associato all'integrale generale  $e^{a\Delta t}$ . In ogni caso la precisione che si ottiene è del secondo ordine, con coefficiente del residuo minimo fra tutti i metodi incondizionatamente stabili, come garantito da Dahlquist.

*Esercizio: la soluzione analitica del problema  $\dot{x} = ax$  su un passo di integrazione  $\Delta t$  è  $x = e^{a\Delta t}x_0$ ; si calcoli l'approssimazione alla Padé di  $e^{a\Delta t}$  rispetto alla variabile  $\Delta t$ , con ordine di numeratore e denominatore pari a 1,*

$$e^{a\Delta t} \approx \frac{b_1\Delta t + b_0}{\Delta t + a_0}, \quad (8.7)$$

*e la si confronti con il raggio spettrale del metodo di Crank-Nicolson.*

*Esercizio: si confronti l'approssimazione alla Padé di  $e^{a\Delta t}$  con numeratore di ordine 0 e denominatore di ordine 1,*

$$e^{a\Delta t} \approx \frac{b_0}{\Delta t + a_0}, \quad (8.8)$$

*con il raggio spettrale dato dalla (8.6) per  $\alpha = 1$ .*

Notiamo che ci sono vari modi di valutare la precisione di un metodo di integrazione. Nel caso LMM di solito la precisione viene valutata in senso polinomiale, ossia secondo la precisione di un equivalente sviluppo in serie di Taylor. In tal senso un modo molto semplice per valutare la precisione di un metodo LMM, indipendentemente dall'equazione per cui verrà utilizzato, consiste nel verificare che l'Eq. (8.1) produca una identità se applicata a ciascun termine di una base

polinomiale, ossia agli elementi  $1, t, t^2, t^3 \dots t^i \dots$ , e relative derivate  $0, 1, 2t, 3t^2 \dots it^{(i-1)} \dots$ , per valori di  $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t \dots$ . Se l'identità non viene più verificata per la prima volta al termine  $(i+1)$  la precisione sarà di ordine  $i$  e il residuo  $(i+1)$ esimo dà un'idea dell'ordine del relativo errore. Come esempio è facile verificare il metodo di Crank-Nicolson conduce a identità per  $1, t, t^2$  e  $0, 1, 2t$ , risultando così del secondo ordine, mentre il relativo residuo corrispondente a  $t^3$  e  $3t^2$  risulta proporzionale a  $1/2$  che, come stabilito da Dahlquist, è il valore minimo ottenibile per un qualsiasi metodo LMM incondizionatamente stabile.

---

*Esercizio: si verifichi l'accuratezza del metodo di Crank-Nicolson, dato dalla (8.2).*

---

In generale è possibile distinguere due tipi di stabilità incondizionata: la *A-stabilità* e la *L-stabilità*. Si parla di A-stabilità quando, per  $a$  nel semipiano sinistro,  $|\rho| \leq 1$  per qualunque  $|a|\Delta t$  e di L-stabilità se vige la A-stabilità e in aggiunta  $\lim_{|a|\Delta t \rightarrow +\infty} |\rho| = 0$ .

La prima proprietà assicura che il metodo sia incondizionatamente stabile e che sia in grado di integrare il sistema in maniera precisa, sempre in un intervallo ridotto di basse frequenze d'interesse, anche quando gli autovalori hanno valori assoluti grandi (sistemi molto smorzati o con frequenze proprie molto alte). La scelta di un metodo con  $|\rho| < 1$  è spesso opportuna, anche se implica una parziale perdita di precisione, in quanto assicura che i contributi della soluzione con valori di  $a$  in modulo molto elevati, vengono rapidamente eliminati, da un passo all'altro nel caso della L-stabilità ma con più alta perdita di precisione. Di solito questa proprietà è molto importante perché, come già detto, la scelta del passo di integrazione temporale viene fatta sulla base delle frequenze massime contenute nel sistema da simulare che si vogliono rappresentare con precisione. Tutto ciò che è al di fuori di questa banda di frequenza non deve essere rappresentato, se non nella sua parte statica, e non deve disturbare la soluzione. A questo punto è necessario effettuare una scelta di compromesso, in quanto la A-stabilità fornisce un'integrazione più precisa, ma la L-stabilità consente un taglio più deciso delle soluzioni ad alta frequenza (cioè il metodo diventa un filtro passabasso), soluzioni che devono essere appunto smorzate. Alla classe dei metodi L-stabili appartengono i BDF (Backward Differentiation Formulæ), del secondo ordine al più. Riassumendo si è detto che serve un metodo veloce e preciso (quindi del second'ordine), incondizionatamente stabile, consistente per garantire la convergenza, ed abbastanza semplice da usare, ovvero un metodo senza troppi passi, possibilmente con dissipazione numerica, comportamento di  $\rho$  asintotico controllabile, ossia del quale sia possibile controllare il valore assunto da  $\rho$  quando  $|a| \rightarrow \infty$ , al variare di un  $\Delta t$ .

I metodi a più passi necessitano di una procedura di avviamento per generare i primi valori della soluzione, quando non ci sono dati sufficienti ai tempi precedenti. Anticipando che successive considerazioni permetteranno di modificare quanto si dice qui appresso, notiamo preliminarmente che per generare i primi passi è possibile applicare, ad esempio, il metodo di Crank-Nicolson e poi successivamente ripristinare i coefficienti del metodo multipasso utilizzato, ricalcolare la matrice del sistema e ripartire. Questa soluzione è però poco efficiente, richiede la rifattorizzazione della matrice dei coefficienti, perciò si preferisce aggiungere un grado di complicazione, ma partire con un metodo esplicito di precisione maggiore o uguale rispetto a quella del metodo implicito successivamente utilizzato. Essendo utilizzato solo per pochi passi iniziali, spesso uno solo, l'uso di un metodo esplicito non pone particolari problemi, nè di stabilità nè di efficienza, in quanto, ad esempio, per grandi problemi strutturali richiede solo il calcolo delle accelerazioni e le matrici di massa sono solitamente diagonali. Da quanto detto non si deve trarre l'idea che non esistano metodi A-L stabili, necessariamente impliciti, che non possano fornire precisioni superiori al secondo ordine. Tale limite vale infatti per i metodi LMM. Infatti, come già richiamato precedentemente a pie' di pagina, è possibile pertanto ottenere precisioni superiori in modo incondizionatamente stabile ricorrendo a altri metodi, e.g. Runge-Kutta, che qui non vengono presentati.

## 8.1 UN METODO DI INTEGRAZIONE IMPLICITA CON DISSIPAZIONE NUMERICA MODULABILE

Il metodo che verrà ora mostrato è implicito, A-L stabile, a due passi, variabili, per equazioni differenziali del primo ordine, estendibile al secondo ordine:

$$x_{k+1} = a_0 x_k + a_{-1} x_{k-1} + b_1 \dot{x}_{k+1} + b_0 \dot{x}_k + b_{-1} \dot{x}_{k-1}, \quad (8.9)$$

dove, chiamando  $\Delta t_c$  il passo corrente di avanzamento e  $\Delta t_p$  quello precedente, i coefficienti possono essere espressi in funzione dei seguenti;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ , gli ultimi due esprimibili in funzione del  $\rho$  asintotico,  $\rho_\infty$ , associabile alla dissipazione numerica desiderata.

$$\alpha = \Delta t_p / \Delta t_c \quad (8.10)$$

$$\beta = \alpha \frac{(2 + \alpha)(1 - \rho_\infty)^2 + 2(1 + \alpha)(2\rho_\infty - 1)}{2(1 + \alpha) - (1 - \rho_\infty)^2} \quad (8.11)$$

$$\delta = \frac{\alpha^2(1 - \rho_\infty)^2}{2(2(1 + \alpha) - (1 - \rho_\infty)^2)} \quad (8.12)$$

$$a_0 = 1 - \beta$$

$$a_{-1} = \beta$$

$$b_1 = \Delta t_c \left( \frac{\delta}{\alpha} + \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$b_0 = \Delta t_c \left( \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} - (1 + \alpha) \frac{\delta}{\alpha} \right)$$

$$b_{-1} = \Delta t_c \left( \frac{\beta}{2} + \delta \right)$$

Anche se di non immediato interesse in questa presentazione, limitata solo alla soluzioni di equazioni differenziali lineari, notiamo che nel caso non lineare per la soluzione a ogni passo ci si deve ricondurre a una sola incognita, per cui è necessario predire un primo valore di tentativo, ad esempio, per  $\dot{x}_{k+1}$ . È opportuno che tale predizione sia più precisa dell'ordine del metodo corrente. Fra i tanti modi possibili il seguente, associabile a una estrapolazione dell'Hermitiana per due punti, è il seguente:

$$m_0 = -m_{-1} = \frac{-6\alpha(1 + \alpha)}{\Delta t_c}$$

$$n_0 = 1 + 4\alpha + 3\alpha^2$$

$$n_{-1} = \alpha(2 + 3\alpha)$$

coi quali si ricava:

$$\dot{x}_{k+1} = m_0 x_k + m_{-1} x_{k-1} + n_0 \dot{x}_k + n_{-1} \dot{x}_{k-1}, \quad (8.13)$$

Ritornando alla soluzione di equazioni lineari si vede che definendo opportunamente il valore di  $\rho_\infty$  è possibile trovare il giusto compromesso fra la precisione a basse frequenze e le proprietà di filtraggio del metodo alle alte frequenze. Se il passo è costante nel caso in cui questo valore sia unitario, A-stabile senza dissipazione numerica, si ottiene una variante del metodo di Crank-Nicolson espansa a due passi temporali

$$x_{k+1} = x_{k-1} + \Delta t \left( \frac{1}{2} f(x_{k+1}, t_{k+1}) + f(x_k, t_k) + \frac{1}{2} f(x_{k-1}, t_{k-1}) \right). \quad (8.14)$$

Nel caso invece esso tenda a zero si ottiene il metodo BDF del second'ordine (differenze finite all'indietro su due passi) che è L-stabile

$$x_{k+1} = \frac{4}{3} x_k - \frac{1}{3} x_{k-1} + \frac{2}{3} \Delta t f(x_{k+1}, t_{k+1}). \quad (8.15)$$



È relativamente agevole calcolare il residuo del terz'ordine in funzione del raggio spettrale asintotico (lo si lascia come esercizio),

$$O(\Delta t^3) = \frac{4(\rho_\infty + (1 - \rho_\infty)^2)}{4 - (1 - \rho_\infty)^2}; \quad (8.16)$$

la sua minimizzazione si ha per  $\rho_\infty = -4 + \sqrt{21} \approx 0.58$ , un valore che comporta una relativamente rapida cancellazione di disturbi ad alta frequenza e nel contempo dà una buona accuratezza.

Ritornando alla simbologia delle equazioni di moto il metodo di cui sopra si può facilmente estendere a equazioni del secondo ordine definendo  $u_{k,k-1} = a_0 u_k + a_{-1} u_{k-1} + (b_1 a_0 + b_0) \dot{u}_k + (b_1 a_{-1} + b_{-1}) \dot{u}_{k-1} + b_1 b_0 \ddot{u}_k + b_1 b_{-1} \ddot{u}_{k-1}$ . Il metodo che si utilizzerà può essere così riscritto nella forma:  $u_{k+1} = b_1^2 \ddot{u}_{k+1} + u_{k,k-1}$  e analogamente per la velocità:  $\dot{u}_{k+1} = b_1 \ddot{u}_{k+1} + v_{k,k-1}$ ,  $v_{k,k-1} = a_0 \dot{u}_k + a_{-1} \dot{u}_{k-1} + b_0 \ddot{u}_k + b_{-1} \ddot{u}_{k-1}$ .

Il sistema da risolvere risulterà quindi del tipo:  $M\ddot{u}_{k+1} + C\dot{u}_{k+1} + Ku_{k+1} = Q_{k+1}$  che sostituendo diventa :

$$(M + b_1 C + b_1^2 K) \ddot{u}_{k+1} = Q_{k+1} - C v_{k,k-1} - K u_{k,k-1} \quad (8.17)$$

Si noti anche che la possibilità di variare il passo durante l'integrazione può essere utile in vario modo, ad esempio per meglio seguire l'effetto di variazioni brusche delle forzanti, utilizzando passi più piccoli solo nei periodi di tempo in cui ciò avviene. Tale opportunità va però soppesata tenendo conto della necessità di rifattorizzare la matrice dei coefficienti del sistema lineare risolvete. Si noti poi che le discretizzazioni di cui sopra si possono esplicitare anche nelle derivate temporali delle incognite discretizzate, in funzione delle stesse. Procedendo in tal modo l'incognita primaria diventerebbe lo spostamento. Qualunque sia la scelta di tale incognita le formule di discretizzazione ci permetteranno poi di ricavare comunque tutte le incognite di interesse fino alla derivata di ordine massimo. Si può quindi constatare come questo metodo possa essere utilizzato semplicemente sia per sistemi del primo che del secondo ordine o comunque misti. È quindi particolarmente adatto all'integrazione diretta dei problemi termo-strutturali, sia accoppiati che disaccoppiati. Si aggiunga che, anche se non interessa la presente trattazione, esso può essere proficuamente utilizzato anche per l'integrazione di generici sistemi di equazioni algebrico differenziali. Essendo però di fatto un metodo a due passi presenta il già menzionato problema del non auto avviamento a partire dalle sole condizioni iniziali. Come già preannunciato nella precedente evidenziazione di tale problema mostriamo ora come si possa avviare la soluzione, in modo implicito, senza perdita di precisione e con un totalmente trascurabile aggravio di calcolo. A tal fine notiamo come sia possibile risolvere un generico sistema lineare  $Ax = b$  anche utilizzando una matrice dei coefficienti  $\hat{A}$  diversa da  $A$ , attraverso la seguente iterazione:

$$\hat{A}x_{k+1} = (\hat{A} - A)x_k + b \quad (8.18)$$

assimilabile a un sistema dinamico in (pseudo)tempo discreto. In analogia con un similare generico problema dinamico in tempo continuo del tipo  $E\dot{x} + Ax = b$ , la soluzione sarà data dalla combinazione di una soluzione generale con una particolare. Per il sistema discreto la soluzione generale, associata al problema omogeneo  $\hat{A}x_{k+1} = (\hat{A} - A)x_k$ , è del tipo  $x_k = c\rho^k$ , mentre la soluzione particolare,  $x_p$ , corrisponde a quella a regime ottenuta imponendo  $x_{k+1} = x_k$ , ossia  $x_p = A^{-1}b$ . Sarà quindi:

$$x_k = c\rho^k + A^{-1}b \quad (8.19)$$

con  $c$  e  $\rho$  autosoluzioni del problema:

$$\rho c = (I - \hat{A}^{-1}A)c \quad (8.20)$$

da cui, chiamando  $C$  la matrice di tutte le autosoluzioni, sarà:

$$x_k = C \text{Diag}\{\rho\}^k + A^{-1}b \quad (8.21)$$

Si vede allora che  $x_k$  converge alla vera soluzione se  $\max|\rho| < 1$ , con una convergenza tanto più rapida quanto più  $\max|\rho| \ll 1$ . Riferendoci per semplicità a un sistema del primo ordine

$C\dot{x} + Kx = f$ , ma il ragionamento è banalmente estendibile anche a problemi del secondo ordine o misti, vediamo che se pensiamo di applicare il metodo di Crank-Nicolson alla sua integrazione si dovrà risolvere il sistema:

$$\left(C + \frac{\Delta t}{2}K\right)\dot{x}_{k+1} = f_{k+1} - K\left(\frac{\Delta t}{2}\dot{x}_k + x_k\right) \quad (8.22)$$

da cui si vede che la soluzione può essere avviata con la sola conoscenza delle condizioni iniziali,  $x_0$ , in quanto  $\dot{x}_0 = C^{-1}(f_0 - Kx_0)$ . Il metodo con dissipazione controllata a due passi porta invece alla soluzione per ricorsione della seguente:

$$(C + b_1K)\dot{x}_{k+1} = f_{k+1} - K(a_0x_k + a_{-1}x_{k-1} + b_0\dot{x}_k + b_{-1}\dot{x}_{k-1}) \quad (8.23)$$

chiaramente non autopartente. Volendo quindi usare il metodo di Crank-Nicolson per avviare la soluzione utilizzando però la fattorizzazione della matrice del metodo a dissipazione controllata potremo utilizzare la soluzione iterativa precedentemente indicata. Nel caso specifico si scriverà quindi:

$$(C + b_1K)\dot{x}_{k+1} = \left((C + b_1K) - \left(C + \frac{\Delta t}{2}K\right)\right)\dot{x}_k + f_{k+1} - K\left(\frac{\Delta t}{2}\dot{x}_k + x_k\right) \quad (8.24)$$

la cui convergenza sarà garantita se l'autovalore di massimo modulo di  $(I - (I - b_1C^{-1}K)(I - \frac{\Delta t}{2}C^{-1}K))$  sono minori di 1. Di fatto il metodo sarà proficuamente utilizzabile tanto più quanto tale massimo sarà molto minore di uno. Analizzando i valori di  $b_1$  sarà facile constatare che la condizione di convergenza pessima si verificherà per lo schema BDF, per il quale  $b_1 = \frac{2\Delta t}{3}$ , a cui corrisponde un autovalore di massimo modulo di  $\rho = 1 - \Delta t/(2b_1) = 1/4$ , valore che permette di portare l'errore dell'iterazione all'ordine di  $10^{-6}$  in una decina d'iterazioni. Tale numero di iterazioni corrisponde all'incirca al costo di calcolo di meno di una decina di passi temporali, ragion per cui, estendendosi ogni pratica integrazione ad almeno alcune centinaia di passi, il costo computazionale aggiuntivo sarà in pratica assolutamente trascurabile per ogni soluzione di interesse. Si noti che il fatto che il BDF possa portare alla condizione pessima di convergenza dovrebbe risultare abbastanza intuitivo, in considerazione del fatto che ad esso è associato un  $\rho_\infty = 0$ , contro un  $\rho_\infty = 1$  per Crank-Nicolson. In considerazione del fatto che nella maggior parte dei casi, per mantenere la più alta precisione possibile, si tende ad usare dei  $\rho_\infty \leq 0.5$  la situazione risulta sostanzialmente migliore, bastando solo alcune iterazioni per convergere a soluzioni ben approssimate, atte a rendere, in combinazione con le condizioni iniziali, il sistema a due passi con dissipazione controllata superiore a molti metodi analoghi con precisione del secondo ordine.

Chiaramente una volta ottenuti i valori per  $t = 0$ , dalle condizioni iniziali, e per  $t = \Delta t$ , con il procedimento illustrato, si proseguirà col metodo scelto, eseguendo solo il calcolo dei relativi termini noti, seguiti da passi avanti/indietro utilizzando la fattorizzazione della stessissima matrice dei coefficienti già disponibile dalla fase di avviamento. Come rapido completamento, chiamando semplicemente  $\hat{f}_{k+1}$  il termine noto comprendente sia le forze che i vettori ottenuti dai prodotti con  $C$  e  $K$  ai due istanti precedenti riportiamo l'iterazione associata all'avviamento con Crank-Nicolson per il problema della dinamica strutturale:

$$(M + b_1C + b_1^2K)\ddot{x}_{k+1} = \left((M + b_1C + b_1^2K) - \left(M + \frac{\Delta t}{2}C + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2K\right)\right)\ddot{x}_k + \hat{f}_{k+1} \quad (8.25)$$

a cui, sempre per il caso estremo BDF, si associa un valore caratteristico per la convergenza di  $\rho = 1 - (\Delta t/(2b_1))^2 = 7/16$ . Tale valore richiede un po' più di iterazioni iniziali di quelle associate a un sistema del primo ordine per ottenere un'adeguata precisione, rimanendo sempre una trascurabile frazione dei costi di calcolo effettivi. A supportare comunque la bontà di questa procedura di avviamento dell'integrazione vale inoltre il commento già fatto in relazione all'utilizzo pratico di dissipazioni numeriche molto lontane dalla L-stabilità.

## 8.2 SVILUPPO DI METODI DI INTEGRAZIONE COL METODO DEI RESIDUI PESATI

Il metodo precedentemente riportato non è, chiaramente, l'unico modo possibile per sviluppare una tecnica per l'integrazione diretta del problema termoelastico, anche se permette di risolvere facilmente problemi differenziali misti primo/secondo ordine. e.g. il nostro termoelastico integrato, e anche sistemi di equazioni algebrico differenziali arbitrarie. Una possibile tecnica utilizzabile per lo sviluppo di formule di integrazione alternative potrebbe ritrovarsi tramite il metodo dei residui pesati, applicato utilizzando funzioni di Lagrange paraboliche nel tempo.

Definendo  $\xi = (t - t_k)/\Delta t$ , la soluzione si può scrivere:

$$u(\xi) = \frac{1}{2}(\xi + 1)\xi u_{k+1} + (1 + \xi)(1 - \xi)u_k + \frac{1}{2}(\xi - 1)\xi u_{k-1}$$

Passando alla formulazione debole si ottiene:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} w(t) (M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku - Q) dt = 0 \quad (8.26) \quad \text{eq:id:weak}$$

con  $w(t)$  opportune funzioni peso. Se  $w(t)$  è la delta di Dirac nel punto  $t_{k+1}$ ,  $w(t) = \delta(t - t_{k+1})$ , si ottiene un metodo BDF all'indietro, mentre se è la delta di Dirac in  $t_k$ ,  $w(t) = \delta(t - t_k)$ , si ottengono le differenze finite centrate. L'utilizzo di differenti funzioni peso porta alla definizione di un pletora di metodi impliciti a due punti, non tutti necessariamente A-L stabili. Ulteriori commenti sul metodo dei residui pesati come tecnica generale di soluzione di problemi associati a equazioni differenziali e integrali si vedranno in corrispondenza ai problemi di aeroelasticità.

---

*Esercizio: si valuti la (8.26) con  $w(t) = \delta(t - t_{k+1})$  e con  $w(t) = \delta(t - t_k)$ .*

---

## 8.3 METODO DI NEWMARK

Cavallo storico dell'integrazione numerica delle equazioni della dinamica strutturale. Si basa su un'approssimazione in cui la velocità e la posizione al passo  $k + 1$  vengono ottenute dai valori al passo  $k$  tramite un'approssimazione ad accelerazioni costanti valutate sulla pesatura dei valori a  $k + 1$  e  $k$ . Tale pesatura è diversa per l'accelerazione usata nel calcolo della velocità e della posizione e si scrive:

$$u_{k+1} = u_k + \dot{u}_k \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t^2 [(1 - 2\beta) \ddot{u}_k + 2\beta \ddot{u}_{k+1}] \quad (8.27a)$$

$$\dot{u}_{k+1} = \dot{u}_k + \Delta t [(1 - \gamma) \ddot{u}_k + \gamma \ddot{u}_{k+1}] \quad (8.27b)$$

Si può quindi procedere per collocazione come precedentemente fatto ottenendo uno schema ricorsivo simile in cui la scelta dei parametri influisce sull'ordine e la stabilità del metodo. Se  $\gamma \geq \frac{1}{2}$  e  $\beta \geq \frac{1}{4} (\frac{1}{2} + \gamma)^2$  il metodo di Newmark è incondizionatamente stabile. Se  $\gamma = \frac{1}{2}$  e  $\beta = \frac{1}{4}$  non viene introdotto smorzamento numerico e il metodo risulterà del secondo ordine. Di fatto è facile vedere che in tal caso coincide con l'applicazione del metodo di Crank-Nicolson alla velocità e all'accelerazione (costante). Viceversa se  $\gamma > \frac{1}{2}$  allora viene introdotto uno smorzamento numerico e l'approssimazione della velocità non risulterà più del second'ordine, pertanto il metodo risulterà sempre del primo ordine. In ogni caso si rammenta che  $0 \leq \beta \leq 1$  e che un valore tipico<sup>4</sup> è  $\beta = \frac{1}{4}$ .

---

<sup>4</sup>I valori  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/4$  sono quelli con cui Newmark ha formulato originariamente il metodo.

## 8.4 METODO HHT

Evoluzione del metodo di Newmark si può ritenere il nuovo cavallo di battaglia dell'integrazione numerica delle equazioni della dinamica strutturale. Il metodo HHT (Hilbert-Hughes-Taylor), detto anche  $\alpha$ -method, è un'estensione del metodo di Newmark, di cui mantiene inalterate le formule di integrazione sopra riportate. Viene spesso propagandato come un metodo che consente l'introduzione di una dissipazione numerica mantenendosi sempre del second'ordine. Nella sostanza il metodo, come già detto, si basa sulla stessa formulazione del metodo di Newmark, riducendo la scelta dei parametri a uno solo, tramite:

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{2} - \alpha \\ \beta &= \frac{(1 - \alpha)^2}{4} \\ -\frac{1}{3} &\leq \alpha \leq 0\end{aligned}$$

Se si vuole effettuare la scelta della dissipazione numerica sulla base di  $\rho_\infty$  si deve calcolare il corrispondente  $\alpha$  con la seguente:

$$\alpha = \frac{\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}$$

Con l'accortezza di rispettare il su mostrato vincolo sul valore di  $\alpha$  utilizzabile. Ragion per cui deve essere anche rispettato il corrispondente vincolo su  $\rho_\infty$ ,

$$\rho_\infty = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha},$$

ossia:

$$\frac{1}{2} \leq \rho_\infty \leq 1$$

Si vede quindi che il metodo HHT pone una limitazione sulla massima dissipazione numerica ottenibile e non è in grado di garantire la condizione di L-stabilità.

L'equazione integrante che ne deriva viene inoltre discretizzata modificandola come segue:

$$M\ddot{u}_{k+1} + (1 + \alpha)(C\dot{u}_{k+1} + Ku_{k+1}) = (1 + \alpha)F_{k+1} - \alpha F_k + \alpha C(\dot{u}_k + Ku_k) \quad (8.28)$$

eq:id:hht-pb

Tale modifica permette di recuperare una precisione del secondo ordine a partire da una approssimazione che, per  $\alpha \neq 0$ , è solo del primo ordine. Si può interpretare tale 'giochetto' sia come una tecnica a residui pesati, con opportuna integrazione approssimata, sia come un processo di media-filtraggio delle forze interne/esterne. Il 'giochetto' può, più o meno, piacere ma la precisione ottenuta dipende dal tipo di equazione a cui si applica, mentre la formulazione a due passi prima mostrata è del secondo ordine indipendentemente dalla struttura dell'equazione a cui la si applica. Se il problema da risolvere è lineare allora è garantita la incondizionata stabilità. Tipicamente si usa  $\alpha = -0.05$ . Come si vede se  $\alpha$  viene assunto nullo il metodo risultante è ancora quello di Newmark (Crank-Nicolson applicato a equazioni differenziali del secondo ordine). Per valutare il raggio spettrale occorre scrivere il metodo nella forma

$$\begin{Bmatrix} x_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \\ \ddot{x}_{k+1} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{Bmatrix} \quad (8.29)$$

con  $[A]$  ricavata a partire dalle formule del metodo, (8.27), e dalla loro applicazione alla (8.28).

Il miglioramento che si ottiene nell'utilizzo della formula di integrazione di cui sopra è associato a un minor valore dell'errore residuo. In relazione all'avvio del nostro metodo generale primo/secondo ordine l'HHT di pari dissipazione asintotica può essere proficuamente utilizzato al posto del metodo di Crank-Nicolson nell'avvio di soluzioni di risposta dinamica. Si può infatti dimostrare come,

sempre a parità di dissipazione asintotica, il valore caratteristico di convergenza sia nell'intorno di 0.1, permettendo la convergenza della procedura di avviamento in pochissime iterazioni.

---

*Esercizio: si ricavi la matrice  $[A]$  e da essa il raggio spettrale del metodo HHT.*

Traccia: si scriva

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \\ \ddot{x}_{k+1} \end{Bmatrix} &= [B_1] \begin{Bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \\ \ddot{x}_{k+1} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2(1/2 - \beta) & \Delta t^2\beta \\ 0 & 1 & \Delta t(1 - \gamma) & \Delta t\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \\ \ddot{x}_{k+1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (8.30)$$

e

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \\ \ddot{x}_{k+1} \end{Bmatrix} &= [B_2] \begin{Bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -D^{-1}K & -D^{-1}(C + \Delta tK) & -D^{-1}(1 + \alpha)((1 - \gamma)\Delta tC + (1/2 - \beta)\Delta t^2K) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (8.31)$$

con  $D = M + (1 + \alpha)\gamma\Delta tC + (1 + \alpha)\beta\Delta t^2K$ . Quindi  $[A] = [B_1][B_2]$ .

---

## 8.5 CONFRONTO TRA LE PRINCIPALI CARATTERISTICHE DEI METODI

La figura 8.1 mostra il valore assoluto del raggio spettrale di vari metodi A-stabili, L-stabili e A-L stabili in funzione del rapporto tra il passo di integrazione,  $h$ , e il periodo associato al problema,  $T = 2\pi/\omega$ . Il metodo di Crank-Nicolson è A-stabile; il valore assoluto del raggio spettrale è sempre pari a 1. I metodi BDF del primo e del secondo ordine sono L-stabili; il loro raggio spettrale va a zero al crescere di  $h/T$ . Il raggio spettrale del metodo BDF del primo ordine (Eulero implicito) scende al di sotto di 1 con largo anticipo rispetto ai metodi del secondo ordine. Il metodo con dissipazione algoritmica regolabile, con raggio spettrale ottimale, mostra un decadimento molto meno pronunciato del raggio spettrale per  $h/T < 1$ .

La figura 8.2 mostra l'errore di ampiezza, 1 meno il rapporto tra il modulo del raggio spettrale del metodo ed il valore esatto (ovvero 1 per un problema non smorzato). L'errore del metodo di Crank-Nicolson (e di Newmark con  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/4$ ) è esattamente nullo. L'errore dei metodi BDF cresce molto rapidamente con  $h/T$ . L'errore del metodo con dissipazione algoritmica regolabile e raggio spettrale ottimale rimane decisamente limitato per valori relativamente grandi di  $h/T$ . L'errore del metodo HHT, con  $\alpha = -0.264$  in modo da dare raggio spettrale asintotico uguale a quello del metodo precedente, è decisamente superiore.

La figura 8.3 mostra l'errore di fase, ovvero 1 meno il rapporto tra la fase del raggio spettrale del metodo e il valore esatto ( $\omega h$  per un problema non smorzato). L'errore del metodo di Crank-Nicolson (e di Newmark con  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/4$ ) non è più nullo, ma è il più piccolo tra i metodi considerati (solo metodi di ordine superiore, come i metodi di Runge-Kutta impliciti, danno errori inferiori). In ogni caso, l'errore è circa un quarto rispetto a quello che risulta dai metodi BDF, che cresce rapidamente in modo incontrollato. L'errore del metodo con dissipazione algoritmica

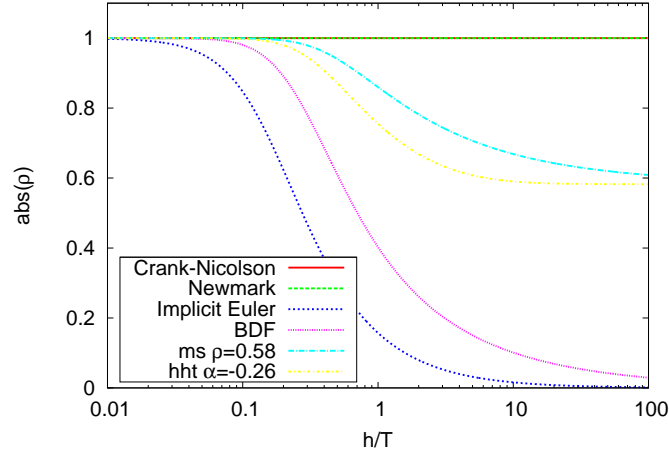


Figura 8.1: Valore assoluto del raggio spettrale,  $\|\rho\|$ , di vari metodi A-stabili, L-stabili e A-L stabili.

fig:di:integr\_pl

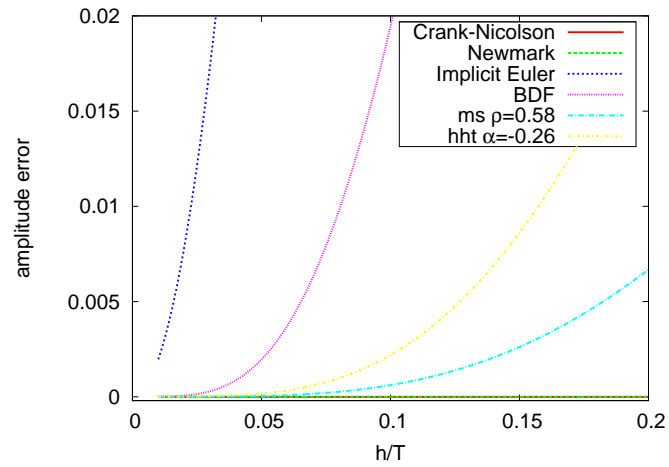


Figura 8.2: Errore di ampiezza,  $1 - \|\rho\|/\|e^{j\omega h}\|$ , di vari metodi A-stabili, L-stabili e A-L stabili (nota:  $\|e^{j\omega h}\| \equiv 1$ ).

fig:di:integr\_pl

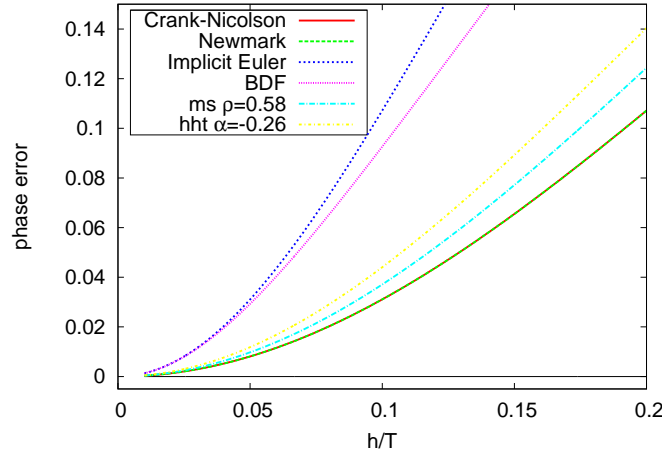


Figura 8.3: Errore di fase,  $1 - \angle(\rho)/(\omega h)$ , di vari metodi A-stabili, L-stabili e A-L stabili.

fig:di:integr\_pl

regolabile e raggio spettrale ottimale è abbastanza prossimo a quello del metodo di Crank-Nicolson, e comunque inferiore all'errore del metodo HHT con uguale raggio spettrale asintotico.

È opportuno notare che  $T/h$  è pari al numero di passi richiesti per un periodo dell'oscillazione associata al problema. Di conseguenza,  $h/T = 0.05$  (20 passi per periodo) sono necessari per mantenere l'errore di fase al di sotto dell'1% con i metodi migliori, mentre  $h/T = 0.01$  (100 passi per periodo) sono necessari per rendere l'errore di fase trascurabile.

## 8.6 METODI ALLE DIFFERENZE CENTRATE, CENNO A INTEGRAZIONE ESPLICITA

Anche se è già stato richiamato che tali metodi possono essere visti come casi LMM particolari, ne presentiamo una esemplificazione come esempio di un uso esplicito e diretto delle differenze finite. Preliminarmente ricordiamo ancora che per l'incondizionata stabilità non possiamo sperare niente di più che una precisione del secondo ordine, ottenuta tramite un metodo implicito. Se non vogliamo usare più di due punti sfortunatamente tali metodi garantiscono l'incondizionata stabilità solo nella versione all'indietro, che non potrà che essere del primo ordine, sia per equazioni differenziali del primo che del secondo ordine. Per ottenere una precisione del secondo ordine non si può che utilizzare schemi collocati a differenze centrali. Si ottiene così il seguente schema per equazioni del primo ordine, tipo quella di trasmissione del calore:

$$\frac{1}{2\Delta t}Cx_{k+1} = f_k + \frac{1}{2\Delta t}Cx_{k-1} - Kx_k \quad (8.32)$$

mentre per quelle della dinamica strutturale si avrà:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}M + \frac{1}{2\Delta t}C\right)u_{k+1} = p_k - \left(K - \frac{2}{\Delta t^2}M\right)u_k - \left(\frac{1}{\Delta t^2}M - \frac{1}{2\Delta t}C\right)u_{k-1} \quad (8.33)$$

Entrambi i metodi risultano sfortunatamente solo condizionatamente stabili e richiedono comunque la fattorizzazione di una matrice e la successiva, ripetuta, soluzione di sistemi di equazioni lineari. Nel caso di sistemi di grandi dimensioni sappiamo che è spesso possibile una facile diagonalizzazione delle matrici di massa e capacità termica, ragion per cui, sempre per il caso termico ma solo se si può trascurare lo smorzamento strutturale nel caso dinamico, tale soluzione risulta banale. Nel caso degli elementi finiti, se esplicitabile, il metodo alle differenze centrali si può combinare con un calcolo diretto delle forze elastiche e dei flussi di conduzione interni, evitando l'assemblaggio delle relative matrici, diventando così un metodo efficace là dove siano da utilizzarsi soluzioni esplicite.

Nella pratica comune l'implementazione dello schema centrato per la dinamica viene leggermente modificato, in modo da permettere anche l'introduzione di forze dipendenti dalla velocità,

in un modo approssimato che mantiene però il secondo ordine. Allo scopo definiamo col solito pedice  $k$  il solito indice di incremento e con  $(k + \frac{1}{2})$  e  $(k - \frac{1}{2})$  l'incremento al centro degli intervalli prima e dopo  $k$ . La procedura consiste quindi nel calcolare esplicitamente l'accelerazione ad un generico istante  $k$ :

$$\ddot{u}_k = M^{-1}(f_k - Ku_k - C\dot{u}_k) \quad (8.34)$$

Si noti che per tale calcolo deve essere noto  $\dot{u}_k$  mentre, come si vedrà immediatamente qui sotto, si conosce soltanto  $\dot{u}_{k-\frac{1}{2}}$ . Ragion per cui si dovrebbe iterare la formula, sempre in modo esplicito, ripetendo il calcolo, per la sola determinazione della velocità  $\dot{u}_k$  e delle relative forze di dissipazione, a partire da  $\dot{u}_{k-\frac{1}{2}}$ , calcolando  $\dot{u}_k^{(i+1)} = \dot{u}_{k-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t_k}{2} \ddot{u}_k^{(i)}$ . Perché l'iterazione converga occorre che  $\Delta t_k < 1/(\xi\omega_0)_{\max}$ , condizione di solito sicuramente soddisfatta per modi poco smorzati dato che di solito risulta più stringente la condizione di stabilità, dell'ordine di  $\Delta t < 1/\omega_{\max}$ . Se gli smorzamenti sono relativamente bassi spesso si evita tale iterazione utilizzando semplicemente:

$$\ddot{u}_k = M^{-1}(f_k - Ku_k - C\dot{u}_{k-\frac{1}{2}}) \quad (8.35)$$

Nota l'accelerazione si avanza l'integrazione con uno schema (noto come Verlet, o Leapfrog, o Eulero simplettico):

$$\dot{u}_{k+\frac{1}{2}} = \dot{u}_{k-\frac{1}{2}} + \frac{(\Delta t_{k+1} + \Delta t_k)}{2} \ddot{u}_k \quad (8.36)$$

$$u_{k+1} = u_k + \Delta t_{k+1} \dot{u}_{k+\frac{1}{2}} \quad (8.37)$$

mantenendo in ogni caso una precisione sostanzialmente del secondo ordine, se manca smorzamento o è basso o si itera, e supportando la possibile variazione di  $\Delta t$  a ogni passo d'integrazione. Essendo di fatto un metodo a due passi richiede una procedura di avviamento, a partire dalle condizioni iniziali  $u_0, v_0$ , di cui un possibile schema potrebbe essere il seguente:

$$\ddot{u}_0 = M^{-1}(f_0 - Ku_0 - C\dot{u}_0) \quad (8.38)$$

$$\dot{u}_{\frac{1}{2}} = \dot{u}_0 + \frac{\Delta t_0}{2} \ddot{u}_0 \quad (8.39)$$

$$u_1 = u_0 + \Delta t_0 \dot{u}_{\frac{1}{2}} \quad (8.40)$$

proseguendo poi con le formule su riportate per ogni successivo istante generico  $k$ . A completamento ricordiamo ancora che il metodo rimane del secondo ordine e, sia la forma appena riportata sia quella basata sulle differenze centrate, hanno come limite di stabilità condizionata:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}} (\sqrt{1 + \xi^2} - \xi) \quad (8.41)$$

dove  $\omega_{\max}$  è la frequenza massima, non quella d'interesse, inerente la schematizzazione utilizzata e  $\xi$  il relativo fattore di smorzamento. Si noti che la presenza di smorzamento penalizza il limite di stabilità rispetto a risposte non smorzate. Come esercizio si potrebbe verificare il, più facile da calcolare, limite di stabilità per lo schema, su riportato, delle differenze centrate applicate a sistemi di equazioni del primo ordine.

## 8.7 STABILITÀ DA UN PUNTO DI VISTA ENERGETICO

Il concetto di A-stabilità si applica a sistemi lineari attorno alla condizione di equilibrio. Per estendere il concetto di stabilità si considera la stabilità alla Lyapunov, seguendo un approccio energetico. Senza ulteriori approfondimenti si applicherà tale concetto al metodo di Crank-Nicolson, ricordando però che è di validità generale e particolarmente utile nel caso di problemi non lineari.

Per Crank-Nicolson valgono le seguenti relazioni:  $u_{k+1} - u_k = \frac{\Delta t}{2} (\dot{u}_{k+1} + \dot{u}_k)$  e  $\dot{u}_{k+1} - \dot{u}_k = \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_{k+1} + \ddot{u}_k)$ .



Dato il sistema :  $M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = Q$  si definiscono le variazioni di energia cinetica ed elastica come:

$$\begin{aligned}\Delta T &= \frac{1}{2}\dot{u}_{k+1}^T M \dot{u}_{k+1} - \frac{1}{2}\dot{u}_k^T M \dot{u}_k = \frac{1}{2}(\dot{u}_{k+1} - \dot{u}_k)^T M (\dot{u}_{k+1} + \dot{u}_k) \\ \Delta E &= \frac{1}{2}u_{k+1}^T K u_{k+1} - \frac{1}{2}u_k^T K u_k = \frac{1}{2}(u_{k+1} - u_k)^T K (u_{k+1} + u_k)\end{aligned}$$

Sostituendo le relazioni valide per Crank-Nicolson si ottiene:

$$\begin{aligned}\Delta T &= \frac{\Delta t}{4}(\dot{u}_{k+1} + \dot{u}_k)^T M (\ddot{u}_{k+1} + \ddot{u}_k) \\ \Delta E &= \frac{\Delta t}{4}(\dot{u}_{k+1} + \dot{u}_k)^T K (u_{k+1} + u_k)\end{aligned}$$

La variazione di energia totale su un passo diventa :

$$\begin{aligned}\Delta T + \Delta E &= \frac{\Delta t}{4}(\dot{u}_{k+1} + \dot{u}_k)^T [(M\ddot{u}_{k+1} + Ku_{k+1}) + (M\ddot{u}_k + Ku_k)] = \\ &= \frac{\Delta t}{4}(\dot{u}_{k+1} + \dot{u}_k)^T (Q_{k+1} + Q_k - C(\dot{u}_{k+1} + \dot{u}_k))\end{aligned}$$

da cui si evince che nel caso di forze esterne e smorzamenti nulli la variazione d'energia è nulla e quindi il metodo è conservativo.

Si può poi vedere che il lavoro delle forze di smorzamento è ottenuto dall'integrazione della potenza relativa alla velocità media sull'intervallo d'integrazione:

$$-\Delta t \frac{1}{2}(\dot{u}_{k+1} + \dot{u}_k)^T C \frac{1}{2}(\dot{u}_{k+1} + \dot{u}_k) \quad (8.42)$$

che corrisponde all'uso della formula dei trapezi. Se sono presenti forze esterne è possibile esprimere la variazione d'energia come il lavoro di queste, infatti:

$$\begin{aligned}\Delta T + \Delta E &= L_{Fext} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} u^T Q dt \\ \frac{\Delta t}{4}(\dot{u}_{k+1} + \dot{u}_k)^T (Q_{k+1} + Q_k) &= \frac{1}{2}(u_{k+1} - u_k)^T (Q_{k+1} + Q_k) \\ &= \frac{1}{2}(u_{k+1} - u_k)^T (Q_{k+1} + Q_k)\end{aligned}$$

Il primo termine dell'ultima espressione è lo spostamento, mentre il secondo è la forza media. Di conseguenza la variazione di energia è pari al lavoro delle forze esterne calcolato, ancora, con la formula dei trapezi.

Perciò il metodo di Crank-Nicolson rappresenta correttamente, al secondo ordine, il teorema dell'energia cinetica.

## Capitolo 9

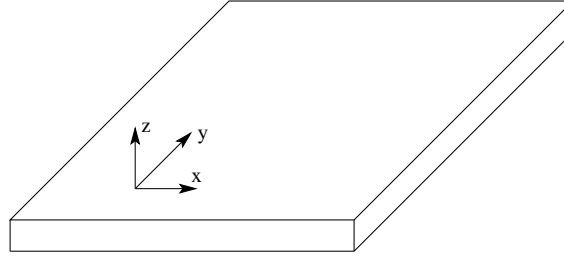
# ESTENSIONE DEI MODELLI PER ELEMENTI STRUTTURALI

### 9.1 MODELLI A PIASTRE

Le piastre sono degli elementi strutturali per cui una delle tre dimensioni, lo spessore  $t$ , risulta molto minore delle altre due, che invece definiscono il piano caratteristico della piastra. Lo spessore dell'elemento risulta comunque sufficiente a fornire le capacità di sopportare sollecitazioni flessionali significative. In questo caso se gli spostamenti elastici in direzione normale al piano della piastra sono abbastanza piccoli rispetto allo spessore  $t$ , i valori degli sforzi normali si annullano in corrispondenza del piano medio della piastra, essendo essi dovuti sostanzialmente alla sola flessione. Se la piastra è molto sottile, e quindi non in grado di resistere significativamente a sollecitazioni flessionali, si ottiene un comportamento che corrisponde a quello di una *membrana*, per cui gli spostamenti nella direzione normale al piano della piastra sono paragonabili allo spessore  $t$  e gli sforzi in corrispondenza del piano medio non sono più nulli. Sono infatti tali sforzi che permettono all'elemento strutturale di equilibrare i carichi applicati attraverso spostamenti trasversali. La rigidità manifestata dalle membrane è quindi legata alla tensione che in essa si genera, e il problema va quindi trattato in maniera non lineare. Ovviamente un modello completo non lineare di piastra può essere in grado di trattare entrambi i fenomeni in maniera congiunta. Nel modello semplificato che andiamo ora a sviluppare si riterranno poco significative, anche se non nulle, le deformazioni nella direzione perpendicolare al piano caratteristico della piastra. Dal punto di vista energetico tali deformazioni, coniugate allo sforzo trasversale normale, contribuiscono in maniera poco significativa all'energia di deformazione, in considerazione del fatto che per carichi trasversali distribuiti gli sforzi trasversali sono abbastanza piccoli. Basti infatti notare che un carico distribuito di 1 MPa sarebbe un carico rilevantissimo per la piastra; localmente però essa sarebbe sollecitata a taglio con un carico che non corrisponde neanche all'1% degli sforzi elastici tipici delle comuni leghe leggere a base di alluminio. Data poi l'esiguità dello spessore  $t$ , tale carico darà origine a sforzi trasversali altrettanto esigui. Per i casi in cui si sia in presenza di carichi concentrati varranno, ai fini del comportamento globale, considerazioni analoghe a quelle fatte nella teoria delle travi alla De Saint Venant: le soluzioni ottenute con questa teoria varranno oltre una certa distanza di diffusione dal punto di applicazione del carico concentrato. Per la determinazione degli effetti locali non ci si potrà esimere dalla ricerca di soluzioni complete tridimensionali del problema elastico strutturale.

Potremo quindi in generale affermare che lo stato di sforzo nei vari strati della piastra sarà quindi essenzialmente piano. In considerazione della trascurabile incidenza degli sforzi/deformazioni trasversali in spessore, si potrà correttamente ritenere lo spessore indeformabile, senza però assumere le relazioni costitutive corrispondenti ad uno stato piano di deformazione.

Il piccolo spessore fa sì che le deformazioni dovute alla flessione siano di gran lunga prevalenti rispetto a quelle a taglio che si possono invece trascurare. Anche per questi elementi quindi si può considerare valida l'ipotesi di Kirchhoff o della conservazione delle normali, già utilizzata nel



caso delle travi. Tale ipotesi afferma che le sezioni piane normali al piano medio indeformato della piastra, rimangono piane e normali al piano medio anche nella posizione deformata, non è quindi presente ingobbamento dovuto a taglio o torsione.

Introduciamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con assi  $x$  e  $y$  giacenti nel piano della piastra e  $z$  normale a questo, e chiamiamo  $w$  lo spostamento verticale. Le ipotesi di comportamento di tipo piastra sopra illustrate ci dicono che i punti del piano medio si muovono solo in direzione normale al piano stesso e gli altri punti subiscono degli spostamenti dovuti alle rotazioni delle sezioni normali al piano medio. Si possono quindi scrivere le seguenti relazioni relative al campo di spostamento tridimensionale nell'intero volume della piastra

spost-pia

$$s_x = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (9.1a)$$

$$s_y = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (9.1b)$$

$$s_z = w(x, y). \quad (9.1c)$$

La piastra è soggetta ad uno stato di sforzo piano, per cui  $\sigma_x \neq 0$ ,  $\sigma_y \neq 0$  e  $\sigma_z = 0$ . Passando alle deformazioni, l'ipotesi di Kirchhoff ci dice che gli scorrimenti  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  sono nulli. È facile infatti vedere che, ricordando le relazioni fra spostamenti e deformazioni nel caso di piccoli spostamenti  $\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (s_{i/k} + s_{k/i})$ , le relazioni (9.1) portano a

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (9.2)$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (9.3)$$

Le deformazioni in direzione  $z$  è trascurabile e non gioca nessun ruolo nella determinazione dell'equilibrio o dell'energia di deformazione, a causa del valore trascurabile dei corrispondenti sforzi  $\sigma_z$ ;  $\varepsilon_z$  è ottenibile a posteriori tenendo conto della legge costitutiva tridimensionale. Si può quindi verificare che per le piastre varranno le seguenti relazioni

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (9.4)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (9.5)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (9.6)$$

Per comodità si possono definire i seguenti vettori di sforzo e deformazione

$$\hat{\underline{\varepsilon}} = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T, \quad (9.7)$$

$$\underline{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T = z \hat{\underline{\varepsilon}}, \quad (9.8)$$

$$\underline{\sigma} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T. \quad (9.9)$$

Nel caso generale di una legge costitutiva ortotropa scriveremo che

$$\sigma_x = E_x \varepsilon_x + E_{xy} \varepsilon_y, \quad (9.10)$$

$$\sigma_y = E_{xy} \varepsilon_x + E_y \varepsilon_y, \quad (9.11)$$

$$\tau_{xy} = G_{xy} \gamma_{xy}, \quad (9.12)$$

che in forma matriciale corrisponde a scrivere

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} E_x & E_{xy} & 0 \\ E_{xy} & E_y & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \underline{\varepsilon} = \underline{\underline{D}} \underline{\varepsilon}. \quad (9.13)$$

Nel caso particolare di un materiale isotropo si ricorda che  $E_x = E_y = E/(1 - \nu^2)$ ,  $E_{xy} = \nu E_x$  e  $G_{xy} = \frac{1}{2}E/(1 + \nu)$ , e quindi

$$\underline{\sigma} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \nu) \end{bmatrix} \underline{\varepsilon} = \underline{\underline{D}} \underline{\varepsilon}. \quad (9.14)$$

Casi più generali di legami costitutivi che accoppiano tutti i termini dei vettori di sforzo e di deformazione si possono ottenere nel caso di piastre formate da vari strati di materiale composito diversamente orientato.

Definiti i vettori di sforzo e di deformazione e il loro legame, è ora possibile scrivere il termine legato all'energia elastica del Principio dei Lavori Virtuali nella solita forma tridimensionale dell'equazione linearizzata (2.29) da cui poi ricavare la corrispondente espressione bidimensionale per le piastre, in funzione delle deformazioni su definite  $\underline{\varepsilon}$

$$\int_v \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dv = \int_v \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\underline{D}} \underline{\varepsilon} dv = \int_a \delta \hat{\underline{\varepsilon}}^T \left( \int_t z^2 \underline{\underline{D}} dz \right) \hat{\underline{\varepsilon}} da = \int_a \delta \hat{\underline{\varepsilon}}^T \hat{\underline{\underline{D}}} \hat{\underline{\varepsilon}} da. \quad (9.15) \quad \boxed{\text{plv-pia}}$$

Nel caso di un materiale generico la matrice di flessibilità  $\hat{\underline{\underline{D}}}$  sarà quindi semplicemente pari a

$$\hat{\underline{\underline{D}}} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 \underline{\underline{D}} dz, \quad (9.16)$$

mentre per un materiale omogeneo e isotropo si ottiene

$$\hat{\underline{\underline{D}}} = \frac{t^3}{12} \underline{\underline{D}}. \quad (9.17)$$

Avendo definito le deformazioni generalizzate  $\underline{\varepsilon}$  della piastra alla Kirchhoff come associate alle curvature ( $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  e  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ ) e alla torsione ( $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ ), risulta ora utile determinare quali sono i corrispondenti sforzi generalizzati, cioè quelli coniugati alle deformazioni generalizzate in termini energetici, e quindi ottenibili applicando la  $\hat{\underline{\underline{D}}}$  al vettore  $\hat{\underline{\varepsilon}}$ . Per capirlo riscriviamo il P.L.V. senza utilizzare da subito la relazione costitutiva

$$\int_v \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dv = \int_v \delta \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} z \underline{\sigma} dv = \int_a \delta \hat{\underline{\varepsilon}}^T \left( \int_t z \underline{\sigma} dz \right) da. \quad (9.18) \quad \boxed{\text{plv-pia2}}$$

Integrando il vettore degli sforzi per la distanza dal piano medio lungo lo spessore si ottengono i momenti per unità di lunghezza, o flussi di momento

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \underline{\underline{\widehat{M}}}. \quad (9.19)$$

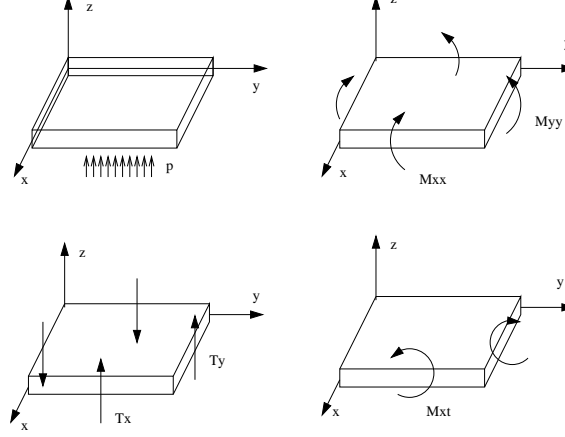
$M_x$  ed  $M_y$  sono flussi di momento flettente mentre  $M_{xy}$  è un flusso di momento torcente. Uguagliando le due espressioni ottenute dalla (9.15) e dalla (9.18) si ha

$$\underline{\underline{\widehat{M}}} = \hat{\underline{\underline{D}}} \hat{\underline{\varepsilon}}, \quad (9.20)$$

che per un materiale omogeneo e isotropo diviene

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \quad (9.21)$$

Come nel caso delle travi con l'ipotesi di Kirchhoff anche in questo caso è possibile recuperare le



azioni di taglio per unità di lunghezza dalle relazioni di equilibrio. Se consideriamo un elemento di piastra di dimensioni  $dx, dy$  l'equilibrio alla rotazione intorno ad una sezione normale ad  $x$  dice che

$$T_x dx dy = \left( M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_x dy + \left( M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - M_{xy} dx, \quad (9.22)$$

da cui si ottiene

$$T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}. \quad (9.23)$$

Analogamente, scrivendo l'equilibrio alla rotazione intorno ad una sezione normale all'asse  $y$  si ottiene

$$T_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (9.24)$$

Conseguentemente, sulle sezioni normali agli assi  $x$  e  $y$  ci saranno degli sforzi di taglio i cui integrali lungo lo spessore saranno pari a tali azioni.

Consideriamo ora il Principio dei Lavori Virtuali nel caso della formulazione Lagrangiana Aggiornata. In questo caso si dovrà tener conto della condizione di precarico nella posizione di riferimento, che darà vita ad un contributo addizionale di presforzo alla matrice di rigidezza del tipo (3.12)

$$\int_v \delta \underline{g}^T \underline{\sigma}_0 \underline{g} dv, \quad (9.25) \quad \text{pre-stress-pia}$$

dove  $\underline{g}$  è l'operatore che rappresenta il gradiente dello spostamento. Assumiamo che il precarico sia associato ad una distribuzione di sforzo nello spessore, così da poter analizzare un primo modello per la descrizione del comportamenento membranale, il termine espresso dall'equazione (9.25)

$$\int_v \delta \begin{Bmatrix} \frac{\partial \underline{s}}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{s}}{\partial y} \\ \frac{\partial \underline{s}}{\partial z} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_x \underline{I}_3 & \tau_{xy} \underline{I}_3 & \underline{0}_3 \\ \tau_{xy} \underline{I}_3 & \sigma_y \underline{I}_3 & \underline{0}_3 \\ \underline{0}_3 & \underline{0}_3 & \underline{0}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \underline{s}}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{s}}{\partial y} \\ \frac{\partial \underline{s}}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (9.26)$$

Possiamo calcolare il gradiente dello spostamento sfruttando le relazioni (9.1)

$$\frac{\partial \underline{s}}{\partial x} = \left\{ 0 \quad 0 \quad \frac{\partial w}{\partial x} \right\}^T \quad (9.27)$$

$$\frac{\partial \underline{s}}{\partial y} = \left\{ 0 \quad 0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T \quad (9.28)$$

$$\frac{\partial \underline{s}}{\partial z} = \left\{ -\frac{\partial w}{\partial x} \quad -\frac{\partial w}{\partial y} \quad 0 \right\}^T. \quad (9.29)$$

Le componenti del vettore  $\frac{\partial \underline{s}}{\partial z}$  risultano in realtà inessenziali in quanto i termini di presforzo che vanno moltiplicati per essi si possono ritenere nulli. Eliminati i termini trascurabili il contributo di presforzo nel P.L.V. è pari a

$$\int_a \delta \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\}^T \left( \int_t \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} dz \right) \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\} da = \int_a \delta \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\}^T \begin{bmatrix} N_x & T_{xy} \\ T_{xy} & N_y \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\} da, \quad (9.30)$$

dove le  $N$  sono i flussi di azione normale lungo le sezioni perpendicolari agli assi  $x$  ed  $y$  e  $T_{xy}$  è il flusso di azioni di taglio nel piano  $xy$ , tutti dovuti al presforzo. Possiamo ora scrivere l'equazione del P.L.V. completa che tiene conto sia dei termini di energia elastica che di quelli legati allo stato di presforzo

$$\int_a \delta \hat{\underline{\varepsilon}}^T \hat{\underline{D}} \hat{\underline{\varepsilon}} da + \int_a \delta \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\}^T \begin{bmatrix} N_x & T_{xy} \\ T_{xy} & N_y \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \right\} da = \int_a \delta w q da - \int_a \delta w m \ddot{w} da \quad (9.31) \quad \text{plv-piastra}$$

dove  $q$  rappresenta il carico distribuito normale alla piastra ed  $m$  è la massa per unità di superficie. Nel caso in cui sia necessario si possono aggiungere i termini relativi a coppie distribuite

$$- \int_a \delta \frac{\partial w}{\partial x} c_y da + \int_a \delta \frac{\partial w}{\partial y} c_x da \quad (9.32)$$

e quelli relativi alle coppie d'inerzia

$$- \int_a \delta \frac{\partial w}{\partial x} I_y \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} da + \int_a \delta \frac{\partial w}{\partial y} I_x \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} da. \quad (9.33)$$

Nel caso espresso dalla (9.31), considerando il materiale omogeneo e isotropo e applicando il teorema della divergenza, si ottiene la seguente espressione differenziale

$$\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (9.34)$$

Fra le possibili condizioni di vincolo si possono incontrare appoggi, che impongono l'annullamento dello spostamento e del momento normale, o incastri che impongono spostamento e rotazione nulli. In ogni caso, come sempre, tutte le condizioni al contorno naturali, ossia quelle associate alle forze trasversali e ai momenti sui contorni, saranno automaticamente rappresentate nel P.L.V. Per i casi in cui la piastra presenti geometrie generali, cioè diverse da un semplice rettangolo o una circonferenza, è difficile trovare soluzioni analitiche in forma chiusa. In tali situazioni si ricorre quasi sempre all'uso di approcci numerici.

Nel caso di piastra omogenea e isotropa rettangolare, avente due lati di lunghezza  $a$  e  $b$ , appoggiata su tutto il contorno e non soggetta a precarichi, le forme modali possono essere ipotizzate estendendo a due dimensioni il risultato ottenuto per la trave appoggiata

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} q_{ik}(t) \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}. \quad (9.35) \quad \text{forme-m-piast}$$

Per le frequenze proprie si ottiene

$$\omega_{ik} = \pi^2 \sqrt{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)m}} \left[ \left( \frac{i}{a} \right)^2 + \left( \frac{k}{b} \right)^2 \right]. \quad (9.36) \quad \text{freq-m-piast}$$

È possibile confermare a posteriori che le (9.35) sono effettivamente forme modali attraverso una semplice verifica di ortogonalità rispetto alla massa, mentre le frequenze espresse nella (9.36) si possono ricavare utilizzando il coefficiente di Rayleigh con le forme modali esatte, che sarà quindi pari alle frequenze circolari al quadrato. La distribuzione quadratica con gli indici delle frequenze modali, può portare, per opportuni rapporti geometrici fra le lunghezze caratteristiche, a minori separazioni fra modi di vibrare successivi rispetto a quanto visto per le travi, e quindi come vedremo a maggiori problemi per il controllo strutturale.

## 9.2 TRAVE CON AZIONE ASSIALE DI PRETENSIONE

Come ulteriore esempio dei modi di un'elemento in presenza di un presforzo vediamo ora una semplice applicazione al caso della trave su due appoggi pretensionata solo assialmente. In questo caso assieme ai termini già presenti nella (7.189) andrà aggiunto il termine di presforzo. Ricordiamo che nel caso di una trave modellata con l'ipotesi di Kirchhoff si ha  $\sigma_x \neq 0$  e  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ , e nel caso piano il campo di spostamento viene espresso come

$$s_x = u(x) - y \frac{\partial v}{\partial x}(x), \quad (9.37a)$$

$$s_y = v(x), \quad (9.37b)$$

dove  $v$  è lo spostamento dell'asse della trave in direzione  $y$ . Con queste ipotesi, utilizzando ancora una volta la (3.12) e ritornando alla convenzione utilizzata in (7.189) di chiamare con  $y$  invece che con  $v$  lo spostamento verticale, e assumendo verificato l'equilibrio in direzione assiale, si ottiene sulla equazione in  $y$  un termine di pre-sforzo dovuto alla azione assiale di trazione lungo la trave  $N$ , che modifica il P.L.V. nel seguente modo

$$\int_0^L EJy''\delta y'' dx + \int_0^L Ny'\delta y' dx = \int_0^L q\delta y dx + \int_0^L c\delta y' dx - \int_0^L (m\ddot{y}\delta y + I\ddot{y}'\delta y') dx, \quad (9.38)$$

che nel caso in cui le inerzie rotazionali e le coppie e le forze distribuite siano trascurabili o nulle, attraverso l'applicazione del teorema della divergenza, si giunge al seguente problema differenziale

$$(EJy'')'' - (Ny')' + m\ddot{y} = 0, \quad (9.39a)$$

$$EJy''(0) = EJy''(L) = 0, \quad (9.39b)$$

$$y(0) = y(L) = 0. \quad (9.39c)$$

beam-pre

Nel caso in cui ci sia un estremo libero, ad esempio per  $x = L$ , il P.L.V. ci dice che le condizioni al contorno saranno del tipo

$$(EJy'')'(L) - (Ny')(L) = F, \quad (9.40)$$

dove  $F$  è la forza di taglio applicata all'estremità (eventualmente nulla). Anche in questo caso, per una trave omogenea, i modi propri avranno una forma sinusoidale del tutto equivalente a quella che si era ottenuta nel caso senza pretensione

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin \frac{i\pi x}{L} q_i(t). \quad (9.41)$$

la cui correttezza è, ancora una volta, facilmente verificabile tramite la verifica dell'ortogonalità rispetto alla distribuzione di massa. Le frequenze proprie si possono ottenere facilmente, senza particolari elaborazioni, sostituendo le forme modali ottenute nella (9.39a), in modo che per ciascun modo vale la relazione

$$m\ddot{q} + \left( \left( \frac{i\pi}{L} \right)^4 \left( EJ + \frac{NL^2}{(i\pi)^2} \right) \right) q_i = 0, \quad (9.42)$$

da cui si ottiene

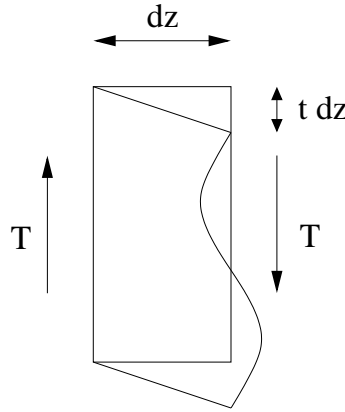
$$\omega_i = \frac{i^2\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{m} \left( 1 + \frac{NL^2}{i^2\pi^2 EJ} \right)} = \frac{i^2\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{m} \left( 1 + \frac{N}{N_{\text{crit}}} \right)}. \quad (9.43)$$

freq-pre-beam

Alternativamente, come fatto per la piastra si potrà utilizzare il coefficiente di Rayleigh, pervenendo allo stesso risultato. È da notare che la frequenza propria dipende dal valore del precarico  $N$ , e che esiste, per ciascuna modo, un valore del precarico che rende la frequenza propria nulla. Il valore di  $N$  che rende la prima frequenza propria nulla corrisponde al primo carico critico della trave soggetta a compressione (perché  $N$  dovrà essere negativo per annullare la (9.43)). L'instabilità cosiddetta "statica" difatti corrisponde ad una divergenza del sistema dinamico, ossia al passaggio di una delle radici caratteristiche nel semi-piano positivo attraverso l'origine degli assi, quindi la condizione limite è quella che si ottiene quando la frequenza propria si annulla.

### 9.3 TRAVE ALLA TIMOSHENKO

Il modello di trave alla Timoshenko abbandona l'ipotesi di Kirchhoff di conservazione delle normali, affermando che ogni sezione pur rimanendo piana può ruotare di una quantità  $\phi$  piccola ma indipendente dalla rotazione dell'asse elastico della trave. In questo modo si tiene conto della possibilità che ci sia scorrimento fra due sezioni vicine a causa della presenza dell'azione di taglio sulle sezioni; la differenza fra la rotazione della sezione  $\phi$  e la rotazione dell'asse elastico  $y'$ , rappresenta lo scorrimento medio  $t$  che è energeticamente coniugato con il taglio. Si hanno dunque due



funzioni indipendenti  $y$  e  $\phi$  che dovranno essere espresse, per la risoluzione numerica del problema, attraverso uno sviluppo completo di funzioni semplicemente continue nello spazio, in quanto nell'espressione del P.L.V. compaiono al massimo derivate di primo grado. Il Principio dei Lavori Virtuali in questo caso si scrive dicendo

$$\begin{aligned} \int_0^L (EJ\phi'\delta\phi' + GA_T(y' - \phi)\delta(y' - \phi)) dx \\ = \int_0^L q\delta y dx + \int_0^L c\delta\phi dx - \int_0^L (m\ddot{y}\delta y + I\ddot{\phi}\delta\phi) dx, \end{aligned} \quad (9.44)$$

dove  $GA_T$  rappresenta la rigidezza a taglio della sezione e dipende anche dalla geometria della sezione. Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} [EJ\phi'\delta\phi]_0^L + [GA_T(y' - \phi)\delta y]_0^L - \int_0^L (EJ\phi')'\delta\phi dx - \int_0^L GA_T(y' - \phi)\delta\phi dx \\ - \int_0^L (GA_T(y' - \phi))'\delta y dx = \int_0^L q\delta y dx + \int_0^L c\delta\phi dx - \int_0^L (m\ddot{y}\delta y + I\ddot{\phi}\delta\phi) dx \end{aligned} \quad (9.45)$$

Nel caso di una trave appoggiata agli estremi si ha  $\delta y(0) = \delta y(L) = 0$ , per cui si ottiene il seguente problema differenziale

$$(EJ\phi')' + GA_T(y' - \phi) = I\ddot{\phi} - c, \quad (9.46a)$$

$$EJ\phi'(0) = EJ\phi'(L) = 0, \quad (9.46b)$$

$$(GA_T(y' - \phi))' = m\ddot{y} - q, \quad (9.46c)$$

$$y(0) = y(L) = 0. \quad (9.46d)$$



Anche in questo caso se al posto del vincolo di appoggio abbiamo degli estremi liberi le condizioni al contorno naturali ci dicono che

$$GA_T(y'(L) - \phi(L)) = F(L), \quad (9.47)$$

con  $F(L)$  forza di taglio all'estremità, eventualmente nulla.

La modellazione dei vari elementi strutturali qui presentata non dovrebbe essere che l'estensione dinamica alla d'Alembert di ciò che si conosce già da altri corsi. L'uso del PLV come base sia per l'approssimazione che per ricavare le equazioni differenziali, ivi comprese le condizioni al contorno naturali, dovrebbe essere sufficientemente evidenziato in questo bigino. Se interessa complementare quanto qui presentato può essere utile consultare: Finlayson, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press. Per la determinazione analitica dei modi e delle frequenze proprie di vibrare su fili, membrane, travi e piastre basta consultare un qualsiasi libro di dinamica delle strutture. Si riportano, per comodità, solo alcuni riferimenti. Un simpatico vecchio, ma utile, libro potrebbe essere: Belluzzi, *Scienza delle Costruzioni*, vol. 4, Zanichelli. Un'altro vecchio classico, più vecchi meglio sono, è: Meirovitch, *Analytical Methods in Vibrations*, MacMillan; o il più recente: Meirovitch, *Dynamics and Control of Structures*, John Wiley; che sarà utile, insieme ad altri poi richiamati, anche per la parte di controllo delle strutture. Per l'utilizzo di basi modali per la soluzione dei problemi di dinamica e trasmissione del calore si vedano i libri già consigliati per le tecniche di approssimazione.

## Capitolo 10

# CONDIZIONI di STAZIONARIETÀ VINCOLATA

Verranno qui brevemente richiamate due tecniche per ottimizzare (minimizzare/massimizzare) una funzione a più variabili sottoposta a dei vincoli di uguaglianza. La differenza rispetto al caso non vincolato è legata alla non indipendenza delle variazioni delle coordinate libere, che non sono più tali quando vengono implicitamente legate fra di loro dalle equazioni che compongono i vincoli di uguaglianza. Tali vincoli impongono infatti anche l'impossibilità di annullare indipendentemente tutte le componenti del gradiente della funzione stessa. Per presentare la prima tecnica, prendiamo come esempio il caso di una funzione obiettivo dell'ottimizzazione,  $z = f(x, y)$ , assieme ad un unico vincolo di uguaglianza fra le variabili,  $g(x, y) = 0$ . La condizione di stazionarietà della funzione obiettivo corrisponde all'annullamento della seguente variazione prima

$$\delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y = 0. \quad (10.1) \quad \text{var-prim}$$

La condizione di vincolo impone però che le variazioni delle variabili indipendenti,  $\delta x$  e  $\delta y$ , non siano arbitrarie, bensì tali da soddisfare la seguente relazione di uguaglianza, imposta dal vincolo  $g(x, y) = 0$ :

$$\frac{\partial g}{\partial x} \delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \delta y = 0. \quad (10.2) \quad \text{lin-cos}$$

Supponendo  $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$  si potrà esprimere  $\delta y$  in funzione di  $\delta x$  tramite la (10.2), per poi sostituire la relazione risultante nella (10.1), ottenendo:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g / \partial x}{\partial g / \partial y} \right) \delta x = 0 \quad (10.3) \quad \text{moltipagr0}$$

Questa relazione dovrà essere valida qualunque sia la variazione  $\delta x$ , essendo la  $x$  stessa diventata ora una vera variabile indipendente. Si vede quindi che il problema di ottimizzazione vincolata porta al seguente sistema di equazioni nelle due incognite  $x$  e  $y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g / \partial x}{\partial g / \partial y} = 0, \quad (10.4)$$

$$g(x, y) = 0, \quad (10.5)$$

la cui soluzione definisce i(1) punti(o) di stazionarietà della funzione  $f$ . Qualora fosse  $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$  basterà ripetere il procedimento assumendo  $y$  come vera variabile indipendente, verificando che  $\frac{\partial g}{\partial x} \neq 0$ . Se poi così non fosse ci troveremmo in un caso di vincolo degenerare per il quale si possono ritenere indipendenti, ma solo localmente, sia  $x$  che  $y$ . Generalizzando il procedimento al caso della ricerca della condizione di stazionarietà di una generica funzione  $f$  di  $n$  variabili indipendenti, soggetta a  $m$  vincoli di uguaglianza, risulta evidente come sarà possibile esprimere  $m$  variazioni di opportune

variabili dipendenti in funzione delle rimanenti  $n - m$  variabili indipendenti. La determinazione delle  $n - m$  variazioni indipendenti richiederà la soluzione di un sistema sottodeterminato di  $m$  equazioni lineari. Tale soluzione sarà in generale possibile, a patto di scegliere opportunamente le variazioni dipendenti. Infatti, l'eventuale non risolubilità di tale sistema di equazioni è legata al fatto che il rango della matrice del sistema è inferiore ad  $m$ , ossia che i vincoli scelti non sono indipendenti, ovvero si ha la generalizzazione del banale caso di degenerazione precedentemente accennato. Sarà quindi necessario modificare, in un modo che può localmente variare per ogni punto di degenerazione, il numero di variabili dipendenti  $m$ . Sostituendo le relazioni che legano le  $m$  variazioni dipendenti a quelle delle  $n - m$  indipendenti nella espressione della variazione prima della funzione  $f$  e ricordandosi che l'arbitrarietà delle variazioni implica l'annullarsi di ciascuno dei termini che moltiplicano le  $n - m$  variazioni, si ottengono  $n - m$  equazioni indipendenti, che abbinate alle  $m$  equazioni di vincolo forniscono il sistema di  $n$  equazioni in  $n$  incognite, generalmente non lineari, la cui soluzione determinerà i punti di stazionarietà del problema di ottimizzazione vincolata. Dovranno essere chiaramente soddisfatte tutte le condizioni atte a garantire che le operazioni richieste siano matematicamente possibili. Inoltre ci accontentiamo qui della determinazione dei punti di stazionarietà senza curarci del tipo di stazionarietà (minimi, massimi, selle) ad essi associati, il cui studio richiede il calcolo delle variazioni seconde.

Il metodo sopra delineato è efficiente e di applicabilità generale. Esiste però una seconda tecnica di risoluzione altrettanto generale e di più facile utilizzo nota con il nome di metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Essa trasforma il problema di ottimizzazione vincolato iniziale in uno non vincolato attraverso l'aggiunta di ulteriori incognite, dette appunto moltiplicatori di Lagrange  $\lambda$ , in numero,  $m$ , pari a quello dei vincoli, che permettono di ritenere indipendenti sia tutte le coordinate del problema che i neo aggiunti moltiplicatori, che così posso variare liberamente, pagando però lo scotto di un aumento di incognite, pari al numero di moltiplicatori di Lagrange. Riprendiamo l'esempio di una sola funzione  $z = f(x, y)$  e un solo vincolo  $g(x, y) = 0$ . Essendo ancora valide le relazioni (10.1) e (10.2) sarà vera anche una loro generica combinazione lineare per qualunque valore di  $\delta x$  e  $\delta y$  che le soddisfi entrambe, quindi possiamo scrivere che

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \lambda \left( \frac{\partial g}{\partial x} \delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \delta y \right) = 0. \quad (10.6)$$

Raccogliendo a fattor comune le variazioni si ottiene

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \right) \delta x + \left( \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \right) \delta y = 0. \quad (10.7)$$

Potendo ora ritenere  $\delta x$  e  $\delta y$  indipendenti si ottiene il seguente sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0; \quad g(x, y) = 0. \quad (10.8)$$

moltiplicatori

Come si può notare ora si ha un'equazione in più ma anche una incognita in più, il moltiplicatore, il cui valore si aggiusta in modo da soddisfare il vincolo fra le variabili. È facile constatare come ricavando  $\lambda$  dalla prima delle (10.8) e sostituendolo nella seconda delle stesse si ottiene la (10.3), così come definendo  $\lambda = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial g / \partial x}$  nella (10.3) si possono ottenere le prime due delle (10.8).

In conclusione questo metodo si riconduce a trovare la condizione di stazionarietà non vincolata della funzione

$$z(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y), \quad (10.9)$$

rispetto alle tre variabili indipendenti  $x$ ,  $y$  e  $\lambda$  tramite la scrittura della variazione:

$$\delta z(x, y, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \lambda \left( \frac{\partial g}{\partial x} \delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \delta y \right) + \delta \lambda g(x, y) = 0 \quad (10.10)$$

da cui consegue il sistema non lineare su riportato, (10.8). L'approccio è facilmente estendibile al caso di più variabili, per cui ci si riconduce a ricercare la condizione di stazionarietà della funzione non vincolata

$$z(\underline{x}) = f(\underline{x}) + \underline{\lambda}^T \underline{g}(\underline{x}) = f(\underline{x}) + \sum \lambda_i g_i(\underline{x}), \quad (10.11)$$

rispetto a  $\underline{x}$  e  $\underline{\lambda}$ . Si fa infine notare la similitudine del primo metodo con la scelta delle coordinate libere di sistemi olonomi con vincoli lisci (equazioni di Lagrange di secondo tipo), mentre il secondo metodo è simile alla tecnica di calcolo delle reazioni vincolari normali ai vincoli degli stessi sistemi (equazioni di Lagrange di primo tipo). Non per niente appare il nome di Lagrange.



## Capitolo 11

# CONTROLLO OTTIMO

<sup>1</sup> Un sistema dinamico lineare-linearizzato tempo invariante può essere rappresentato nella seguente forma agli stati:

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_d d, \quad (11.1a)$$

$$y = C_y x + D_{yu} u + D_{yd} d + D_{yr} r, \quad (11.1b)$$

$$z = C_z x + D_{zu} u + D_{zd} d. \quad (11.1c)$$

Si noti che possibili linearizzazioni generatrici di tale rappresentazione non devono essere necessariamente legate a uno sviluppo in serie troncato al primo ordine, ma possono derivare da opportune ridefinizioni di termini non lineari. Ad esempio una qualsiasi funzione non lineare di uno specifico ingresso, ad esempio una forza di controllo  $u = F(p)$ , essendo  $p$  la vera grandezza manipolabile, caratterizzante fisicamente il controllo, non necessita di nessuna linearizzazione, del tipo  $\Delta u = (dF/dp)\Delta p$ . Basterà assumere  $u$  come direttamente manipolabile, provvedendo poi alla determinazione di  $p = F^{-1}(u)$  al momento dell'implementazione, cosa spesso non difficile, specie in un controllore digitale. Si pensi, per esempio, a una superficie aerodinamica di cui si può comandare la rotazione e per la quale l'azione di controllo sia  $u = qC(\beta)$ , essendo  $q$  la pressione dinamica. È facile capire che si può utilizzare direttamente  $u$  per il progetto e comandare poi  $\beta = C^{-1}(u)/q$ . Analogamente se una misura  $y$  è collegata fisicamente alla grandezza acquisita  $p$  da una relazione  $y = y(p)$ , basterà utilizzare la precedente relazione per la determinazione di  $y$  nella realizzazione del controllore, senza necessariamente dover scrivere  $\Delta p = (1/(dy/dp))\Delta y$ . Così, per esempio, se si progetta assumendo la disponibilità di una misura di posizione  $d$  ma questa è fisicamente ottenuta attraverso la misura della capacità di un condensatore  $C = \epsilon A/d$  basterà ricavare  $d = C/(\epsilon A)$ , quando si realizza il controllore. Qualora le relazioni non lineari fossero un po' più complicate, ad esempio del tipo:  $u = F(f(x), p)$  e/o  $y = y(f(x), p)$ , è chiaro che per l'inversione bisognerà o disporre di una misura di  $f(x)$ , nel qual caso nulla cambia rispetto a ciò che è già stato detto, o direttamente dello stato, con cui calcolare  $f(x)$ . Una possibile soluzione per quest'ultimo caso si può trovare nell'uso degli osservatori dello stato, di cui si parlerà nel seguito, anche se a volte dovrebbero essere già noti dai precedenti corsi di controllo.

Inoltre rispetto alla trattazione agli stati mediante quadrupla di matrici, sicuramente già vista in corsi precedenti, si sono aggiunti esplicitamente al sistema i disturbi  $d$  non accessibili e le uscite di prestazione  $z$  con le relative matrici. Il vettore  $x$  rimane il vettore degli stati del sistema, il vettore  $u$  è il vettore degli ingressi manipolabili, generalmente ai fini del controllo e il vettore  $y$  è il vettore delle uscite di misura. Si noti l'aggiunta di un rumore di misura  $r$  mentre un possibile rumore, additivo, sull'ingresso di controllo può ritenersi inglobabile in  $d$  semplicemente definendo una nuova matrice  $B_d$  costituita dall'affiancamento di  $B_u$  e  $B_d$ , cioè  $[B_u B_d]$ . Onde rimarcare l'importanza di quest'ultima strutturazione anticipiamo subito che vedremo più avanti come la modellazione di un disturbo esterno strutturato su  $B_u$  possa aiutare a irrobustire il controllore.

Rileviamo che nel seguito ci occuperemo della progettazione delle leggi di controllo, cioè di come collegare  $u$  a  $y$  per soddisfare richieste su  $z$ , leggi prestazioni, garantendo stabilità e insensibilità

---

<sup>1</sup>NOTA: Nel seguito di questo bigino, per non appesantire troppo la notazione, salvo quando diversamente specificato, si utilizzeranno le lettere minuscole per indicare i vettori e le lettere maiuscole per indicare le matrici.

alla faccia di variazioni, anche significative, del modello, leggi i valori che mettiamo nelle matrici. Ebbene quanto andremo a descrivere non deve però nascondere il fatto che la progettazione del sistema di controllo non consiste solo nella determinazione del controllore ma anche delle matrici associate a  $y$  e  $u$  ( $B_u, C_y, D_{yu}, D_{yd}, D_{yr}$ ), cioè dove/cosa/come misuriamo e attuiamo per controllare il nostro sistema onde soddisfare le specifiche di progetto. Concetti che si riflettono in quelli di raggiungibilità/osservabilità, che non sono pertanto solo criteri di analisi e/o verifica ma anche di progetto. In realtà la progettazione di un sistema si deve intendere estesa anche alla matrice  $A$ , in campo aerospaziale leggasi, ad esempio: forma, materiali, dimensioni elementi strutturali, distribuzione masse, etc., cioè tutto ciò che chiamiamo progettazione passiva, che è altrettanto importante di quella attiva (controlli). Ci si tolga dalla testa che i sistemi di controllo, poiché introducono quello che sempre più spesso viene indicato come “intelligenza” (intelligent/smart active systems), possano risolvere i problemi legati a una cattiva progettazione passiva. Potrebbe essere possibile, magari anche a costi ragionevoli, in alcuni casi ma è sempre meglio vedere la progettazione di un sistema controllato in una visione attiva-passiva integrata.

Nei casi che verranno trattati in questa prima parte del controllo ottimo non si considererà la presenza dei disturbi generici ma solamente di perturbazioni associate all'imposizione di condizioni iniziali,  $x(0) = x_0$ , che però sappiamo anche essere fisicamente riconducibili all'applicazione di appropriati disturbi impulsivi sugli ingressi. Inoltre, si supporrà, almeno inizialmente, di conoscere in maniera completa lo stato del sistema. Tenendo in conto solo le uscite di prestazione, il sistema precedente viene riscritto nella ben nota forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (11.2a)$$

$$z = Cx + Du. \quad (11.2b)$$

semplificata dei pedici per comodità di notazione. Immaginiamo pertanto di dover controllare un sistema di ordine  $n$  con  $m$  ingressi e di cui si suppone di conoscere ad ogni istante l'intero stato. La tecnica del controllo per posizionamento dei poli ci dice che abbiamo  $n \times m$  parametri da determinare (i coefficienti della matrice dei guadagni) ma solo  $n$  possibili posizioni da assegnare per i poli del sistema in anello chiuso. Fatte salve le condizioni di raggiungibilità dai vari ingressi ci saranno quindi, per  $m > 1$ , parecchie infinità di possibili combinazioni dei parametri che permettono di ottenere lo stesso risultato. La scelta fra le diverse possibili soluzioni andrà fatta cercando di soddisfare, oltre al posizionamento dei poli, anche altri possibili obiettivi di progetto. Tali obiettivi potranno riguardare le prestazioni del sistema (che non sono esclusivamente dominate dalla posizione dei poli), la limitazione dei segnali generati dal controllore al fine di evitare che essi superino i limiti fisici dei sistemi reali atti a realizzare effettivamente quanto richiesto, la riduzione dell'incidenza del rumore di misura sul sistema di controllo, insensibilità e mantenimento della stabilità e delle prestazioni in presenza di variazioni dei parametri del sistema, margini di guadagno/fase e così via. Lo strumento che qui utilizziamo per cercare di raggiungere questi obiettivi è fornito dalla teoria del controllo ottimo. L'idea di base è quella di poter soddisfare obiettivi di progetto attraverso un opportuno indice di merito temporale e di procedere poi alla ricerca dei parametri, leggasi i guadagni del controllore, che forniscano la soluzione ottima, ossia quella che minimizza l'indice di merito stesso.

Infatti il problema del controllo ottimo viene di solito formulato come la minimizzazione di un funzionale composto da tre termini quadratici pesati noto il vettore degli stati all'istante iniziale. Tale funzionale si scrive come

$$F = \frac{1}{2} \left( x_f^T P_f x_f + \int_0^T (z^T W_{zz} z + u^T W_{uu} u) dt \right), \quad (11.3)$$

cont-ott

dove  $t$  è l'istante di tempo attuale,  $x_f$  rappresenta lo stato al tempo finale  $T$  e le matrici  $P_f$ ,  $W_{zz}$  e  $W_{uu}$  sono simmetriche, con  $P_f$  e  $W_{zz}$  al più semidefinite positive e, per la ragione che vedremo fra poco,  $W_{uu}$  assolutamente definita positiva. Tale funzionale viene di solito denominato indice di merito o funzione di costo ed è composto dai seguenti contributi: il primo termine rappresenta la penalizzazione da applicare allo stato finale  $x_f$ , attraverso la matrice di peso  $P_f$ ; il secondo termine è una funzione che pesa il valore attribuito agli indici di prestazione, e quindi alla risposta del sistema durante tutto il tempo in cui si intende applicare il controllo; il terzo termine pesa i segnali di controllo ed è quindi destinato a mantenere gli stessi entro limiti accettabili. In tal modo

si cerca di ottenere un compromesso fra le diverse funzionalità del controllo usando degli opportuni pesi di penalizzazione. Più alti saranno i pesi, in valore relativo, di ciascun termine della (11.3) meno sarà possibile far variare la quantità ad essi associata, a parità di minimo del funzionale. In sostanza cerchiamo, per quanto possibile, di mantenere, a seguito di una perturbazione delle condizioni iniziali, lo stato più prossimo possibile a zero limitando nel contempo l'azione di controllo. La realizzazione del controllo ottimo si riconduce dunque alla scelta opportuna delle matrici dei pesi. Tali pesi non devono però essere visti come delle entità assolute a cui associare un significato universale, bensì solo come degli strumenti atti a conseguire obiettivi di controllo espressi da specifiche di progetto multiple<sup>2</sup>, spesso non direttamente associabili alla funzione obiettivo qui sopra descritta. A questo approccio viene comunemente associata la sigla LQR (Linear Quadratic Regulator).

Vediamo ora come è possibile procedere per determinare il minimo da tale funzionale. Prima di tutto è opportuno manipolare la (11.3) in maniera da ottenere una espressione in termini dei vettori di stato e di ingresso

$$\begin{aligned} z^T W_{zz} z &= (Cx + Du)^T W_{zz} (Cx + Du) = \begin{Bmatrix} x \\ u \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} W_{zz} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ u \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} x \\ u \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} C^T W_{zz} C & C^T W_{zz} D \\ D^T W_{zz} C & D^T W_{zz} D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ u \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Chiamando  $Q = C^T W_{zz} C$ ,  $S = C^T W_{zz} D$  e  $R = D^T W_{zz} D + W_{uu}$ , è possibile riscrivere la  $F$  come

$$F = \frac{1}{2} \left( x_f^T P_f x_f + \int_0^T \begin{Bmatrix} x \\ u \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ u \end{Bmatrix} dt \right). \quad (11.5) \quad \text{cont-ott2}$$

La minimizzazione del funzionale  $F$  è vincolata dall'equazione dinamica agli stati. Potremo allora risolvere il problema di minimizzazione vincolato come uno libero introducendo il vettore dei moltiplicatori di Lagrange  $\lambda$

$$F = \frac{1}{2} \left( x_f^T P_f x_f + \int_0^T \left( \begin{Bmatrix} x \\ u \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ u \end{Bmatrix} + 2\lambda^T (Ax + Bu - \dot{x}) \right) dt \right). \quad (11.6) \quad \text{cont-ott3}$$

Per procedere con la minimizzazione si deve necessariamente ricercare una condizione di stazionarietà attraverso la scrittura delle variazioni prime<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \delta F &= \delta x_f^T P_f x_f + \int_0^T (\delta x^T Q x + \delta x^T S u + \delta u^T S^T x + \delta u^T R u) dt \\ &\quad + \int_0^T (\delta \lambda^T (Ax + Bu - \dot{x}) + \lambda^T (A \delta x + B \delta u - \delta \dot{x})) dt \\ &= \delta x_f^T P_f x_f + \int_0^T (\delta x^T Q x + \delta x^T S u + \delta u^T S^T x + \delta u^T R u) dt \\ &\quad + \int_0^T (\delta \lambda^T (Ax + Bu - \dot{x}) + \delta x^T A^T \lambda + \delta u^T B^T \lambda - \delta \dot{x}^T \lambda) dt = 0. \end{aligned} \quad (11.7) \quad \text{cont-ott3.1}$$

L'ultimo termine  $\delta \dot{x}^T \lambda$  può essere integrato per parti

$$\begin{aligned} \delta F &= \delta x_f^T P_f x_f + \int_0^T (\delta x^T Q x + \delta x^T S u + \delta u^T S^T x + \delta u^T R u) dt \\ &\quad - \delta x_f^T \lambda_f + \int_0^T (\delta \lambda^T (Ax + Bu - \dot{x}) + \delta x^T A^T \lambda + \delta u^T B^T \lambda + \delta x^T \dot{\lambda}) dt = 0. \end{aligned} \quad (11.8) \quad \text{cont-ott3.2}$$

<sup>2</sup>Come vedremo sia in tempo che in frequenza.

<sup>3</sup>A parte l'uso dei moltiplicatori di Lagrange e lo scambio della coordinata spaziale col tempo, ci si sforzi di notare l'analogia di quanto appresso sviluppato con l'uso del PLV per ricavare le equazioni differenziali e al contorno di sistemi elastici. In particolare, in relazione alla presenza delle sole derivate prime, per le sollecitazioni torsionali, assiali, per i fili e per la determinazione delle condizioni finali per  $\lambda_f$  come condizioni 'naturali'.



L'espressione appena scritta deve essere valida per qualunque variazione delle quattro variabili. Si ottiene perciò il seguente sistema di equazioni

$$\lambda_f = P_f x_f, \quad (11.9a)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (11.9b)$$

$$\dot{\lambda} = -Qx - A^T \lambda - Su, \quad (11.9c)$$

$$u = -R^{-1} (S^T x + B^T \lambda), \quad (11.9d)$$

ott-ing

a cui va aggiunta la condizione iniziale  $x(0) = x_0$ . Per risolvere questo problema è quindi necessario in generale che la matrice  $R$  di pesatura delle forze di controllo sia non singolare e quindi definita positiva perché, in caso contrario, le forze di controllo tenderebbero a crescere indefinitamente, mentre la matrice  $Q$  potrà essere semidefinita positiva. I casi con  $R$  non invertibile portano a problemi di controllo ottimo singolare che non verranno qui trattati. Si noti che nel caso della presenza di una pesatura incrociata  $S$ , ovvero di indici di prestazione non strettamente propri, ad esempio accelerazioni, la precedentemente anticipata condizione sulla definizione positiva di  $W_{uu}$  risulta un po' più restrittiva del dovuto, in quanto l'aggiunta ad essa del termine  $D^T W_{zz} D$  potrebbe rendere  $R$  strettamente positivo anche per una  $W_{uu}$  non tale. Ciò nonostante, anche se in presenza di  $S$  ciò non risultasse strettamente necessario dal punto di vista matematico, è però generalmente opportuno garantire comunque la stretta definizione positiva di  $W_{uu}$ . Sostituendo l'espressione degli ingressi (11.9d) nelle equazioni differenziali del sistema, si ottiene il seguente problema:

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}S^T)x - BR^{-1}B^T \lambda, \quad (11.10a)$$

$$\dot{\lambda} = -(Q - SR^{-1}S^T)x - (A^T - SR^{-1}B^T)\lambda, \quad (11.10b)$$

$$\lambda_f = P_f x_f, \quad (11.10c)$$

$$x(0) = x_0, \quad (11.10d)$$

la cui risoluzione porta alla definizione del controllo ottimo in anello aperto. Rinominando i termini fra parentesi come

$$\bar{A} = A - BR^{-1}S^T \quad (11.11a)$$

$$\bar{R} = BR^{-1}B^T \quad (11.11b)$$

$$\bar{Q} = Q - SR^{-1}S^T \quad (11.11c)$$

ott-cl

otteniamo il seguente sistema omogeneo di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = \bar{A}x - \bar{R}\lambda, \quad (11.12a)$$

$$\dot{\lambda} = -\bar{Q}x - \bar{A}^T \lambda, \quad (11.12b)$$

$$\lambda_f = P_f x_f, \quad (11.12c)$$

$$x(0) = x_0. \quad (11.12d)$$

È noto che un sistema lineare omogeneo  $\dot{v} = Av$  ha per soluzione

$$v(t) = \Phi(t, \tau)v(\tau), \quad (11.13)$$

dove è stata introdotta la più generale matrice di transizione  $\Phi(t, \tau)$  per sistemi lineari tempo varianti, uguale a  $e^{A(t-\tau)}$  per i sistemi lineari tempo invarianti da noi considerati, che lega il vettore di stato a due istanti generici,  $t$  e  $\tau$ , quest'ultimo inteso come un tempo iniziale arbitrario, non necessariamente precedente  $t$  qualora si vogliano soluzioni all'indietro, ed è ottenibile come soluzione del problema

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(t, \tau)}{dt} &= A(t)\Phi(t, \tau), \\ \Phi(\tau, \tau) &= I. \end{aligned} \quad (11.14)$$

In questo caso ( $v = \{x, \lambda\}^T$ ), partizionando la  $\Phi$

$$\Phi(t, \tau) = \begin{bmatrix} \Phi_{xx}(t, \tau) & \Phi_{x\lambda}(t, \tau) \\ \Phi_{\lambda x}(t, \tau) & \Phi_{\lambda\lambda}(t, \tau) \end{bmatrix}, \quad (11.15)$$

è possibile scrivere la soluzione del sistema come

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi_{xx}(t, \tau)x(\tau) + \Phi_{x\lambda}(t, \tau)\lambda(\tau), \\ \lambda(t) &= \Phi_{\lambda x}(t, \tau)x(\tau) + \Phi_{\lambda\lambda}(t, \tau)\lambda(\tau). \end{aligned} \quad (11.16)$$

La soluzione deve valere anche per la scelta di  $\tau = T$ , per cui

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi_{xx}(t, T)x_f + \Phi_{x\lambda}(t, T)\lambda_f = \Phi_{xx}(t, T)x_f + \Phi_{x\lambda}(t, T)P_f x_f, \\ \lambda(t) &= \Phi_{\lambda x}(t, T)x_f + \Phi_{\lambda\lambda}(t, T)\lambda_f = \Phi_{\lambda x}(t, T)x_f + \Phi_{\lambda\lambda}(t, T)P_f x_f. \end{aligned} \quad (11.17) \quad \text{cott-sis1}$$

Si può così vedere che per completare la soluzione bisogna determinare  $x_f$ , cosa ottenibile imponendo la condizione iniziale  $x_0$ , tramite la prima equazione risolvente. Si avrà pertanto:

$$x_0 = (\Phi_{xx}(0, T) + \Phi_{x\lambda}(0, T)P_f)x_f \quad x_f = (\Phi_{xx}(0, T) + \Phi_{x\lambda}(0, T)P_f)^{-1}x_0 \quad (11.18)$$

Si può giungere così alla soluzione completa:  $x(t)$ ,  $\lambda(t)$  e  $u(t) = R^{-1}(S^T x(t) + B^T \lambda(t))$ , semplicemente integrando il sistema all'indietro in  $t$ , partendo da  $T$ . Si noti che sarà opportuno evitare di assegnare  $x_0 = 0$ , in quanto ciò equivarrebbe a imporre la condizione  $(\Phi_{xx}(0, T) + \Phi_{x\lambda}(0, T)P_f)x_f = 0$  che, per essere valida qualunque sia  $x_f$ , non permette di scegliere  $P_f$  liberamente, soggiacendolo alla condizione:  $\Phi_{xx}(0, T) + \Phi_{x\lambda}(0, T)P_f = 0$ . Si vede allora che, soddisfatta tale condizione,  $x_f$  risulterà determinato, ma senza alcun vincolo o pesatura, dalla sola soluzione di  $x(t)$  all'istante finale  $T$ .

Per la determinazione del controllo è però possibile procedere anche in un altro modo. Infatti, sostituendo nella seconda delle (11.17) l'espressione di  $x_f$  ottenuta dalla prima, per un istante generico  $t$ , si ottiene

$$\lambda(t) = (\Phi_{\lambda x}(t, T) + \Phi_{\lambda\lambda}(t, T)P_f)(\Phi_{xx}(t, T) + \Phi_{x\lambda}(t, T)P_f)^{-1}x(t) = P(t)x(t), \quad (11.19) \quad \text{ott-lambda}$$

dove  $P$  sarà una matrice in generale simmetrica e semidefinita positiva. Proprietà che al momento devono essere prese per vere in buona fede, ma che dimostreremo un po' oltre, con più facilità di quanto non sia possibile a questo punto. Chiaramente tale operazione ha senso solo se si può pensare di avere disponibile  $x(t)$  non dalla soluzione ma da misure indipendenti di tutto lo stato stesso. Ricordando quindi l'espressione che permette di ricavare gli ingressi (11.9d), si ottiene

$$u(t) = -R^{-1}(S^T + B^T P(t))x(t) = -G(t)x(t). \quad (11.20) \quad \text{ott-ing1}$$

dove  $G(t) = R^{-1}(S^T + B^T P(t))$  è a questo punto una matrice di guadagni tempovarianti. Pertanto il controllo ottimo risulta essere semplicemente di tipo proporzionale sullo stato, con guadagni variabili nel tempo. Si noti che tale relazione di proporzionalità allo stato può apparire solo come una diversa soluzione del problema, che permette di eliminare  $\lambda$  dal calcolo dell'azione di controllo ottimale. In realtà essa conduce a un'implementazione della legge di controllo in ciclo chiuso, essendo quella precedente in ciclo aperto, con i relativi vantaggi di tale soluzione, in quanto, come già rimarcato,  $u(t)$  non viene calcolato utilizzando  $x(t)$  e  $\lambda(t)$  ottenuti dalla soluzione delle (11.17), bensì dalla sola misura, istante per istante, di  $x(t)$  durante il movimento.

Facciamo ora un po' di pratica su quanto detto con la progettazione del controllo ottimo per il seguente, semplice, problema:

$$\dot{x} = ax + bu \quad x(0) = 1 \quad (11.21)$$

con cifra di merito:

$$F = \frac{1}{2} \left( w_f x_f^2 + \int_0^1 (x - u)^2 dt \right)$$

Al posto di usare direttamente le formule risolutive già trovate le riricaviamo, applicando i relativi passaggi allo specifico problema sottomano, riscrivendo:

$$F = \frac{1}{2} \left( w_f x_f^2 + \int_0^1 \left[ (x-u)^2 + 2\lambda(ax+bu-\dot{x}) \right] dt \right)$$

da cui ricaviamo la relativa variazione:

$$\delta F = \delta x_f w_f x_f + \int_0^1 \left[ (\delta x - \delta u)(x-u) + \delta \lambda(ax+bu-\dot{x}) + \delta x \lambda a + \delta u \lambda b + \delta x \dot{\lambda} \right] dt - \delta x_f \lambda(1)$$

seguita dalle associate equazioni risolutive:

$$\dot{x} = ax + bu \quad \dot{\lambda} = u - x - a\lambda \quad u = x - b\lambda \quad x(0) = 1 \quad \lambda(1) = w_f x_f \quad (11.22)$$

ricombinate come:

$$\dot{x} = (a+b)x - b^2\lambda \quad \dot{\lambda} = -(a+b)\lambda \quad u = x - b\lambda \quad x(0) = 1 \quad \lambda(1) = w_f x_f \quad (11.23)$$

L'equazione in  $\lambda$  è disaccoppiata da quella in  $x$  e può essere risolta immediatamente, dando:

$$\lambda(t) = w_f x_f e^{(a+b)(1-t)}$$

così che l'equazione in  $x$  diventa:

$$\dot{x} = (a+b)x - b^2 w_f x_f e^{(a+b)(1-t)}$$

la cui soluzione è:

$$x(t) = e^{(a+b)t} + \frac{b^2 w_f x_f}{2(a+b)} e^{(a+b)} \left( e^{-(a+b)t} - e^{(a+b)t} \right)$$

Il tutto produce la seguente legge di controllo in ciclo aperto:

$$u(t) = e^{(a+b)t} + b w_f x_f e^{(a+b)} \left[ \frac{b}{2(a+b)} \left( e^{-(a+b)t} - e^{(a+b)t} \right) - e^{-(a+b)t} \right]$$

Per ottenere la corrispondente realizzazione in ciclo chiuso è più appropriato, come si è visto, procedere a ritroso dall'istante finale  $t = 1$  ottenendo:

$$x(t) = \left( e^{(a+b)(t-1)} + \frac{b^2 w_f}{2(a+b)} \left( e^{-(a+b)(t-1)} - e^{(a+b)(t-1)} \right) \right) x_f$$

Dopo aver verificato che tale equazione garantisce che  $x(1) = x_f$ , si ricordi che  $x_f$  non è noto ma si può ricavare, sia in questo caso che nella precedente soluzione a ciclo aperto, valutando la  $x(t)$  per  $x(0) = 1$ . Chiaramente sia le due soluzioni di  $x(t)$  trovate che il valore di  $x_f$  devono risultare identici in tutti e due i modi di procedere. Come però precedentemente visto, ai fini del calcolo del controllo in ciclo chiuso,  $x_f$  può rimanere momentaneamente indeterminato. Infatti, assumendo di disporre della misura di  $x(t)$ , si può ricavarlo, in qualunque istante, direttamente dalla precedente:

$$x_f = \frac{2(a+b)}{2(a+b)e^{(a+b)(t-1)} + b^2 w_f (e^{-(a+b)(t-1)} - e^{(a+b)(t-1)})} x(t) \quad (11.24)$$

da cui:

$$\lambda(t) = \frac{2w_f(a+b)e^{2(a+b)}}{2(a+b)e^{2(a+b)t} + b^2 w_f (e^{2(a+b)} - e^{2(a+b)t})} x(t) = p(t)x(t) \quad (11.25)$$

finendo con l'ottenere il controllore in ciclo chiuso sullo stato:

$$u(t) = (1 - bp(t))x(t) \quad (11.26)$$

Dopo aver verificato che si ha comunque:  $p(t) \geq 0$ , se si vuole si può notare che in questo modo si ottiene, grazie alla semplicità dell'esercizio, quanto precedentemente dimostrato attraverso il calcolo della matrice di transizione.

Tornando ora al sistema (11.12) e sostituendo l'espressione (11.19) di  $\lambda(t)$  si ha:

$$\dot{\lambda} = \dot{P}x + P\dot{x} = -\bar{Q}x - \bar{A}^T Px, \quad (11.27)$$

e, sostituendo l'espressione di  $\dot{x}$ , si ottiene la relazione:

$$\dot{P}x + P(\bar{A}x - \bar{R}Px) = -\bar{Q}x - \bar{A}^T Px, \quad (11.28)$$

che, per essere soddisfatta qualunque sia  $x$ , fornisce la seguente equazione differenziale detta *equazione di Riccati*:

$$\begin{aligned} \dot{P} + P\bar{A} + \bar{A}^T P - P\bar{R}P + \bar{Q} &= 0, \\ P(T) &= P_f. \end{aligned} \quad (11.29)$$

Il problema della determinazione del controllo ottimo può quindi anche essere ricondotto <sup>4</sup> alla soluzione dell'equazione differenziale qui sopra scritta, risolta all'indietro nel tempo, a partire dal suo valore all'istante finale  $P_f$ . Determinata la matrice  $P$ , si otterrà la matrice dei guadagni sfruttando la relazione (11.20). Si noti che, anche se ci si occuperà sempre di sistemi lineari tempo invarianti, quanto finora sviluppato può essere applicato anche a sistemi lineari tempo varianti.

Va infine sottolineato come un generico funzionale da minimizzare, come quello riportato nella (11.5), in cui sono presenti i termini di pesatura accoppiata  $S$  fra stato  $x$  e ingressi  $u$ , può essere trasformato in un problema disaccoppiato a patto di utilizzare una opportuna trasformazione di coordinate. Se prendiamo una trasformazione del tipo

$$\begin{Bmatrix} x \\ u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ T & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{Bmatrix}, \quad (11.30)$$

eq\_trasf\_control

dove rimane da definire l'espressione della matrice  $T$  (da non confondere con il tempo finale), il sistema  $\dot{x} = Ax + Bu$  diviene quindi

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + BT\bar{x} + B\bar{u} = (A + BT)\bar{x} + B\bar{u}. \quad (11.31)$$

La matrice di pesatura diviene

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ T & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ T & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q + ST + T^T RT + T^T S^T & S + T^T R \\ S^T + RT & R \end{bmatrix}. \quad (11.32)$$

Se scegliamo  $T$  in modo da annullare i termini di accoppiamento nella matrice dei pesi trasformata, ossia  $T = -R^{-1}S^T$ , otteniamo una matrice dei pesi diagonale a blocchi del tipo

$$\begin{bmatrix} Q - SR^{-1}S^T & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}. \quad (11.33)$$

peso-F-diag

Questo implica che formulando il problema del controllo ottimo attraverso il funzionale

$$F = \frac{1}{2} \left( x_f^T P_f x_f + \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt \right), \quad (11.34)$$

F-cott-genel

si riesce a rappresentare un qualunque problema, anche quelli con termini di accoppiamento fra stati e ingressi. In considerazione di ciò e ricordando che in fondo i pesi non sono delle entità di interesse assoluto, bensì solo degli "strumenti" per il soddisfacimento delle specifiche progettuali,

<sup>4</sup>È possibile anche lo sviluppo di una via diretta all'equazione di Riccati, in tutto simile all'approccio di Hamilton-Jacobi alla meccanica analitica, rivisto anche da un altro punto di vista tramite il principio di ottimalità e la programmazione dinamica di Bellman; formulazione nota appunto come equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman.

per comodità da qui in avanti ci riferiremo spesso a questa formulazione, con piena coscienza di non imporre nessuna limitazione alle nostre soluzioni, grazie alla (11.30) e alla (11.33) <sup>5</sup>.

Inoltre, riferendoci alla cifra di merito semplificata di cui sopra, siamo ora in grado di dimostrare, con facilità e senza limitazioni di sorta, le prima enunciate proprietà di simmetria e, almeno, semipositività della matrice  $P$ . Richiamando la relativa equazione di Riccati ad essa associata e la dinamica del sistema in ciclo chiuso:

$$\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad P(T) = P_f \quad \dot{x} = (A - BR^{-1}B^T P)x \quad (11.35)$$

risulta infatti evidente che a partire dall'assegnata  $P_f$  simmetrica l'integrazione all'indietro nel tempo dell'equazione di Riccati non farà altro che variarla sulla base di una derivata temporale di  $P$  che è anch'essa simmetrica, per cui  $P$  non potrà che rimanere simmetrica. Per rendersene conto immediatamente e intuitivamente si pensi di integrare all'indietro l'equazione di Riccati usando il metodo di Eulero esplicito. Per quanto riguarda la semipositività notiamo subito che alla cifra di merito di cui sopra è associata, istante per istante, una forma quadratica almeno semidefinita positiva se tale è  $Q$ , addirittura positiva se anche  $Q$  lo è. Ricordando che il controllo ottimo è dato da  $u = R^{-1}B^T P x$  vediamo che la prestazione ottima può essere riscritta come:  $F = \frac{1}{2} \left[ x_f^T P_f x_f + \int_0^T x^T (Q + PBR^{-1}B^T P) x dt \right]$  e poi modificata nella:  $F = \frac{1}{2} \left[ x_f^T P_f x_f + \int_0^T x^T (Q - PBR^{-1}B^T P + 2PBR^{-1}B^T P) x dt \right]$ , per cui, ricavando  $(Q - PBR^{-1}B^T P)$  dall'equazione di Riccati avremo:  $F = \frac{1}{2} \left[ x_f^T P_f x_f + \int_0^T x^T (-\dot{P} - PA - A^T P + 2PBR^{-1}B^T P) x dt \right]$ . Integrandone per parti il termine  $-x^T \dot{P} x$  si avrà:  $F = \frac{1}{2} \left[ x_0^T P_0 x_0 + \int_0^T (\dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + x^T (-PA - A^T P + 2PBR^{-1}B^T P) x) dt \right]$ . In tal modo, ricordando l'equazione della dinamica del sistema in ciclo chiuso, si potrà sostituire  $(A - BR^{-1}B^T P)x$  a  $\dot{x}$ , finendo così con l'avere  $F = \frac{1}{2} x_0^T P_0 x_0$ . Siccome abbiamo visto che  $F$  è definita semi o positiva in ragione di  $Q$  è allora chiaro che  $P_0$  lo sarà altrettanto. Da tale risultato, notando che integrando all'indietro a partire da  $T$  potremmo fermarci a un qualsiasi istante  $t$ , dovrebbe essere evidente che quanto dimostrato vale per ogni  $P(t)$ , qualunque sia  $t < T$ .

Ritornando al semplice esercizio precedentemente risolto si può vedere che la corrispondente equazione differenziale di Riccati sarà:

$$\dot{p} = b^2 p^2 - 2(a+b)p \quad (11.36)$$

F-cott-genel

Tale equazione si può facilmente risolvere tramite separazione delle variabili, scrivendo:

$$\int \frac{dp}{b^2 p^2 - 2(a+b)p} = t + C \quad (11.37)$$

$C$  costante d'integrazione da ricavarsi assegnando  $p(1) = w_f$ . Essendo l'integrale indefinito una semplice funzione razionale a coefficienti costanti la sua determinazione risulta assai semplice e, tramite decomposizione in frazioni elementari, si avrà:

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{b^2 p^2 - 2(a+b)p} &= \frac{1}{2(a+b)} \int \left( \frac{b^2}{b^2 p - 2(a+b)} - \frac{1}{p} \right) dp = \\ &= \frac{1}{2(a+b)} \ln \left[ \frac{b^2 p - 2(a+b)}{p} \right] \end{aligned} \quad (11.38)$$

<sup>5</sup>A questo punto, per ottenere lo stesso disaccoppiamento, ci si potrebbe interrogare sulla possibilità di utilizzare una trasformazione del tipo:

$$\begin{Bmatrix} x \\ u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & T \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{Bmatrix}, \quad \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + (AT + B)\bar{u} - T\dot{\bar{u}}.$$

in alternativa alla (11.30) La risposta risulta abbastanza semplice ed è sì, ma sotto vincoli tali da non renderla conveniente. Per capire che tale scelta non è certo la più appropriata basta infatti pensare alla, immediatamente evidente, introduzione della derivata temporale di  $u$ , per proseguire poi l'esercizio finendo col verificare la necessità di una  $Q$  strettamente definita positiva.

da cui, definendo una nuova costante d'integrazione  $D$ :

$$b^2 p - 2(a+b) = D p e^{2(a+b)t} \quad b^2 w_f - 2(a+b) = D w_f e^{2(a+b)t} \quad (11.39)$$

dalle quali si ha:

$$p(t) = \frac{2w_f (a+b) e^{2(a+b)t}}{2(a+b) e^{2(a+b)t} + b^2 w_f (e^{2(a+b)t} - e^{2(a+b)t})} \quad u(t) = (1 - bp(t))x(t) \quad (11.40)$$

ossia quanto già trovato passando attraverso l'integrazione diretta tramite la matrice di transizione.

N.B. pro memoria per ulteriori esercizi: in generale l'equazione di Riccati associata a una cifra di merito con pesi costanti e a una singola equazione di stato tempo invariante è sempre riconducibile a un integrale generale del tipo:

$$\int \frac{dp}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2} = t + C \quad (11.41)$$

coinvolge cioè l'integrale indefinito di una semplice funzione razionale, scomponibile in termini elementari che danno origine a frazioni, logaritmi, arcotangenti ...; ergo ... bisogna saperla integrare anche senza averne mai vista una identica durante le esercitazioni.

## 11.1 SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE ALGEBRICA DI RICCATI

Per sistemi tempo invarianti si può semplificare il problema nel caso in cui si voglia realizzare un cosiddetto controllo ad *orizzonte infinito*, ponendo cioè il tempo finale  $T$  pari ad infinito e richiedendo che la posizione finale sia nulla. In questo modo si ottiene un controllo che cerca sostanzialmente di migliorare la stabilità del sistema a fronte di perturbazioni arbitrarie delle condizioni iniziali. Il funzionale da minimizzare in questo caso diventa

$$F = \frac{1}{2} \int_0^\infty \begin{Bmatrix} x \\ u \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ u \end{Bmatrix} dt. \quad (11.42)$$

cont-ott4

Assumendo che il sistema controllato risulterà asintoticamente stabile, a regime varrà  $\dot{P} = 0$  per cui l'equazione di Riccati perde il termine differenziale, divenendo una equazione puramente algebrica, comunemente denominata ARE (Algebraic Riccati Equation) o CARE (Continuous Algebraic Riccati Equation), per distinguerla da quella associata al controllo ottimo di sistemi lineari discreti e tempo invarianti DARE (Discrete Algebraic Riccati Equation).

$$P\bar{A} + \bar{A}^T P - P\bar{R}P + \bar{Q} = 0. \quad (11.43)$$

Essendo un'equazione nonlineare in  $P$ , i fondamenti di calcolo numerico acquisiti nei corsi di base ci dovrebbero prontamente suggerire di ricercarne una soluzione tramite l'utilizzo del metodo di Newton-Raphson <sup>6</sup>. Mettendo quindi in campo il relativo approccio incrementale linearizzato cercheremo una soluzione basandoci su una iterazione del tipo  $P_{i+1} = P_i + \Delta P$ , con un  $P_i$  iniziale da stabilirsi opportunamente e  $\Delta P$  ottenuta dalla seguente incrementazione linearizzata:

$$\Delta P(A - \bar{R}P) + (A - \bar{R}P)^T \Delta P + PA + A^T P - P\bar{R}P + Q = 0 \quad (11.44)$$

<sup>6</sup>Come già visto per l'equazione di Lyapunov, nei semplici esercizi risolti a mano la soluzione si effettua calcolando la matrice, quadrata e simmetrica di ordine  $n$ , risultante alla sinistra, equagliando poi a zero gli  $n(n+1)/2$  termini del triangolo superiore, o inferiore, diagonale inclusa. Nello sviluppo dei calcoli ricordarsi di evidenziare la simmetria di  $P$ , scrivendola esplicitamente usando i soli simboli,  $n(n+1)/2$ , del triangolo superiore, o inferiore, riflessi specularmente attorno attorno alla diagonale. Così facendo non ha nessuna importanza la preferenza che viene data in relazione al calcolo del triangolo superiore o inferiore della matrice risultante alla sinistra. Si avranno infatti, comunque e sempre,  $n(n+1)/2$  equazioni non lineari, nelle altrettante incognite della matrice  $P$ .

per la quale ci siamo riferiti a una cifra di merito nelle sole  $Q$  e  $R$ , con  $S = 0$ , cosa che abbiamo dimostrato non essere limitativa, per cui  $\bar{A} \equiv A$ . Riscrivendo tale equazione con la sostituzione  $\Delta P = P_{i+1} - P_i$ , e ricordando che  $\bar{R} \equiv BR^{-1}B^T$ , otteniamo:

$$G_i = R^{-1}B^T P_i \quad P_{i+1}(A - B G_i) + (A - B G_i)^T P_{i+1} + G_i^T R G_i + Q = 0 \quad (11.45)$$

ossia un'equazione algebrica di Lyapunov in  $P_{i+1}$ , che ci fornisce un semplice e diretto schema di soluzione iterata. Quanto illustrato è noto sotto il nome di metodo di Kleinman <sup>7</sup>, metodo tuttora di grande interesse, specie per la soluzione di problemi di grandi dimensioni e/o con matrici  $A$  aventi particolari strutturazioni, come dimostrato dalla letteratura ancora prodotta sul metodo. Come dimostreremo tra breve la soluzione dell'equazione di Riccati garantisce la stabilità asintotica della matrice di stato in ciclo chiuso,  $A - B G$ , condizione richiesta anche per la risolubilità dell'equazione di Lyapunov. Pertanto Kleinman ha dimostrato che la convergenza del metodo è garantita se  $A$  è asintoticamente stabile, nel qual caso basterà assumere  $G_0 = 0$ , oppure partendo da una matrice di primo tentativo  $G_0$  in grado di garantire la stabilità asintotica di  $A - B G$ . Mentre nel caso della prima ipotesi non si pongono problemi, la scelta di una  $G_0$  stabilizzante risulta tutt'altro che banale. Sarà infatti necessaria una preliminare assegnazione iniziale di un insieme di autovalori stabilizzanti, presenteremo nel seguito un possibile metodo, assegnazione che può influenzare significativamente la rapidità di convergenza, ma per la quale è assai difficile stabilire dei valori atti a non penalizzare eccessivamente il numero di iterazioni. Un semplicissimo metodo euristico che permette di evitare una stabilizzazione iniziale tramite assegnazione degli autovalori consiste nell'utilizzare l'algoritmo disponibile in bacheca (ScicosLab), per il quale  $n$  è l'ordine di  $A$  e  $m$  numero di ingressi:

```
alpha = 1.1;
beta = 0.9;
e = max(real(spec(A)));
if e >= 0
    stable = 0;
    shift = alpha*e;
    As = A - shift*eye(n, n);
    G = zeros(m, n);
    shfttrcv = 0;
else
    stable = 1;
end
for iter = 1 : 1000
    Gp = G;
    G = inv(R)*B'*lyap(As - B*G, - Q - G'*R*G, 'c');
    if norm(G - Gp, 'inf')/norm(G, 'inf') < 1.0e-4;
        break;
    end
    if stable <= 0
        // ricalcolo degli autovalori perche' la stupida lyap non li ritorna, pur conoscendoli
        e = beta*min(abs(real(spec(As - B*G))));
        shfttrcv = shfttrcv + e;
        if shfttrcv > shift
            stable = 1;
            As = A;
        else
            As = As + e*eye(n, n);
        end
    end
end
end
```

Come si dovrebbe ben vedere il metodo consiste in una stabilizzazione iniziale di  $A$  tramite il semplice spostamento dell'origine degli autovalori, sfruttando poi l'aumento di stabilità man mano

<sup>7</sup>D.L. Kleinman, On an Iterative Technique for Riccati Equation Computations. IEEE Trans. Autom. Control AC-13(1), 1968, pp. 114-115. Si veda la bacheca per un esempio della sua realizzazione in ScicosLab.

introdotto dalle iterazioni per ritornare all'origine iniziale. Il controllo di tali operazioni è associato alle 'manopole', non critiche,  $\alpha$  e  $\beta$ .

Notiamo infine che su tale base abbiamo implicitamente stabilito che la soluzione di Riccati richiede, perlomeno, che il sistema sia stabilizzabile, se già non è stabile.

Quanto detto in precedenza partiva in sostanza dall'assunto che risolvendo il problema del controllo ottimo per un sistema tempo invariante su un tempo abbastanza lungo si potesse arrivare a  $\dot{P} = 0$  indipendentemente dal valore assegnato a  $P_f$ . Anche se le conclusioni a cui siamo in tal modo arrivati non sono sbagliate cerchiamo ora di verificare in un modo un po' più rigoroso la validità di quanto visto attraverso la costruzione di uno schema di soluzione non iterato del problema. Allo scopo riscriviamo il sistema (11.12) come

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & -\bar{R} \\ -\bar{Q} & -\bar{A}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \lambda \end{Bmatrix} = H \begin{Bmatrix} x \\ \lambda \end{Bmatrix} \quad (11.46) \quad \text{cott-ham}$$

La matrice  $H$ , detta matrice Hamiltoniana, gode dell'importante proprietà di essere simile a  $-H^T$ . Tale proprietà implica che  $-H^T$  è ottenibile dalla  $H$  attraverso una trasformazione di similarità con una matrice  $T$  non singolare

$$-H^T = T^{-1}HT. \quad (11.47)$$

Si dimostra facilmente infatti che questa proprietà è soddisfatta prendendo come matrice  $T$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad (11.48)$$

e ricordando che  $\bar{Q}$  e  $\bar{R}$  sono matrici simmetriche. La trasformazione di similarità non modifica gli autovalori, per cui gli autovalori di  $H$  devono essere gli stessi di  $-H^T$ ; allo stesso tempo sappiamo che gli autovalori di  $-H^T$  devono essere pari a quelli di  $H$  cambiati di segno. Queste due proprietà saranno entrambe vere solo se gli autovalori di  $H$  sono tutti presenti a coppie, in modo tale che se  $\lambda$  è un autovalore di  $H$  allora lo è anche  $-\lambda$ . Pertanto la  $H$  avrà  $n$  autovalori con parte reale negativa e  $n$  autovalori opposti, con  $n$  la dimensione del vettore degli stati. È possibile rappresentare in forma spettrale  $H$  scrivendo

$$HV = V\Lambda, \quad (11.49)$$

$$H = V\Lambda V^{-1} = V\Lambda U, \quad (11.50)$$

dove  $V$  è la matrice degli autovettori di  $H$ ,  $U$  è la sua inversa, e  $\Lambda$  è la matrice diagonale degli autovalori ordinati in modo tale che nel blocco superiore ci siano gli autovalori a parte reale negativa, e i restanti, a parte reale positiva, siano nel blocco inferiore. Si noti che di fatto abbiamo quindi assunto che non è possibile che ci siano autovalori sull'asse immaginario. Tale assunzione è garantita dalle condizioni di risolubilità che, pur senza dimostrazione, riporteremo in seguito. Pertanto la matrice di transizione diviene

$$e^{Ht} = Ve^{\Lambda t}U \quad (11.51)$$

dove

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\Lambda^- t} & 0 \\ 0 & e^{\Lambda^+ t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^- & 0 \\ 0 & \Phi^+ \end{bmatrix}. \quad (11.52)$$

Partizionando le matrici  $V$  ed  $U$  in modo analogo a quanto fatto con  $\Lambda$  ed utilizzando le relazioni appena scritte, la soluzione di (11.46) diventa

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{x\lambda} \\ V_{\lambda x} & V_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^-(t, \tau) & 0 \\ 0 & \Phi^+(t, \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xx} & U_{x\lambda} \\ U_{\lambda x} & U_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(\tau) \\ \lambda(\tau) \end{Bmatrix}, \quad (11.53)$$

e quindi

$$x(t) = V_{xx}\Phi^-(U_{xx}x(\tau) + U_{x\lambda}\lambda(\tau)) + V_{x\lambda}\Phi^+(U_{\lambda x}x(\tau) + U_{\lambda\lambda}\lambda(\tau)). \quad (11.54) \quad \text{sol-cott}$$



Il secondo termine nell'espressione della soluzione di  $x$  è moltiplicato per la matrice degli autovalori a parte reale positiva, quindi è un termine crescente nel tempo. Se la soluzione deve tendere a zero per tempi elevati è gioco forza imporre che questo termine sia nullo. Si ottiene così una relazione tempo invariante tra i moltiplicatori di Lagrange e il vettore degli stati:

$$\lambda = -U_{\lambda\lambda}^{-1}U_{\lambda x}x, \quad (11.55)$$

e quindi una relazione di proporzionalità come per l'equazione di Riccati con  $P = -U_{\lambda\lambda}^{-1}U_{\lambda x}$ , ma con  $P$  costante. Utilizzando  $UV = I$  si può poi dimostrare che  $P = V_{\lambda x}V_{xx}^{-1}$ . Formula che ha il vantaggio di richiedere, semplicemente e solamente, gli autovettori associati agli autovalori stabili della matrice  $H$ , autovalori che, come più avanti dimostrato, sono gli stessi del sistema controeazionato sullo stato. Anche l'esistenza delle inverse qui richieste, così come la simmetria della  $P$  così ottenuta sono garantite dalle condizioni di risolubilità riportate successivamente.

Pur essendo questa una tecnica di soluzione possibile va notato che, basandosi sulle autosoluzioni, in generale potrebbe richiedere una rappresentazione spettrale Jordanizzata della  $H$ , un'operazione che ben sappiamo essere numericamente assai difficoltosa ogni qualvolta non si traduca di fatto in una diagonalizzazione. In questi casi si preferisce perciò utilizzare una rappresentazione alla *Schur*, la quale data una generica matrice  $A$  permette di trasformarla in una matrice triangolare superiore a blocchi

$$S = Z^T A Z = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \cdots & * \\ 0 & 0 & \gamma & \delta & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (11.56) \quad \text{schur}$$

in cui gli autovalori reali di  $A$  giacciono sulla diagonale principale, e quelli complessi formano dei blocchetti  $2 \times 2$  come riportato nella (11.56). Inoltre la forma di Schur può essere convenientemente ottenuta usando matrici ortogonali, ragion per cui possiamo tranquillamente assumere:  $ZZ^T = I$ . Si determina allora la scomposizione di Schur della  $H$  ordinando gli autovalori in modo che tutti quelli con parte reale negativa siano nel triangolo superiore

$$H = ZSZ^T = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{x\lambda} \\ Z_{\lambda x} & Z_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{--} & S_{-+} \\ 0 & S_{++} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{xx}^T & Z_{\lambda x}^T \\ Z_{x\lambda}^T & Z_{\lambda\lambda}^T \end{bmatrix}. \quad (11.57) \quad \text{schur2}$$

Le prime  $n$  colonne della matrice  $Z$  non saranno altro che una combinazione degli autovettori associati agli autovalori stabili della  $H$  per cui si potrà determinare la matrice soluzione dell'equazione di Riccati come  $P = Z_{\lambda x}Z_{xx}^{-1}$ . Si veda la bacheca per una possibile realizzazione dei due metodi.

Tornando all'espressione della soluzione del sistema (11.54), ricordando che il secondo termine è nullo, che  $\lambda = Px$  e prendendo  $t = \tau = 0$  possiamo scrivere che

$$x(0) = V_{xx}\Phi^-(0,0)(U_{xx} - U_{x\lambda}U_{\lambda\lambda}^{-1}U_{\lambda x})x(0) = V_{xx}I(U_{xx} - U_{x\lambda}U_{\lambda\lambda}^{-1}U_{\lambda x})x(0), \quad (11.58)$$

che implica

$$V_{xx}(U_{xx} - U_{x\lambda}U_{\lambda\lambda}^{-1}U_{\lambda x}) = I \quad (11.59)$$

e quindi

$$(U_{xx} - U_{x\lambda}U_{\lambda\lambda}^{-1}U_{\lambda x}) = V_{xx}^{-1}. \quad (11.60)$$

La soluzione ad un istante generico in funzione della  $x(0) = x_0$  si scriverà allora come

$$x(t) = V_{xx}\Phi^-V_{xx}^{-1}x_0 = V_{xx}e^{\Lambda^-t}V_{xx}^{-1}x_0. \quad (11.61)$$

Essendo il sistema in anello chiuso, sappiamo che la sua soluzione potrà anche essere scritta come

$$x(t) = e^{(A-BG)t}x_0 \quad (11.62)$$

e quindi

$$V_{xx}e^{\Lambda^{-1}t}V_{xx}^{-1} = e^{(A-BG)t} \quad (11.63)$$

per cui si può vedere che gli autovalori stabili della matrice di transizione sono anche gli autovalori del sistema controllato che pertanto sarà sempre asintoticamente stabile. È ora facile verificare che la soluzione così ottenuta corrisponde alla soluzione dell'equazione algebrica di Riccati. Infatti, tenendo conto della prima delle equazioni del sistema appena risolto avremo:  $\dot{\lambda} = P\dot{x} = PAx - P\bar{R}Px$ , che usata nella seconda da:  $PAx - P\bar{R}Px = -\bar{Q}x - A^T Px$ , ossia  $(PA + A^T P - P\bar{R}P + \bar{Q})x = 0$ , che dovendo essere valida per ogni  $x$  produce appunto l'equazione algebrica di Riccati.

Possiamo ora fare alcuni semplici commenti in relazione al metodo di Kleinman e a quanto appena presentato, da ritenersi uno standard per la soluzione dell'equazione algebrica di Riccati. Iniziamo col notare che tutte e due gli approcci utilizzano, ai fini di una efficace soluzione numerica, o la rappresentazione spettrale o la forma di Schur. La prima porta a una soluzione più semplice ed efficiente delle equazioni trasformate, ma non garantisce una adeguata stabilità numerica in un utilizzo generale, si pensi ad autovalori coincidenti o molto vicini e al problema dello stabilire la coincidenza, o meno, di possibili molteplicità algebriche e geometriche, con la conseguente difficoltà di calcolo degli autovettori, comunque sempre difficili da determinare per autovalori molto prossimi l'un l'altro. Quanto appena detto ben giustifica un uso generalizzato della forma di Schur, a meno che la conoscenza del problema alla mano non permetta un utilizzo, stabile e sicuro, di una semplice decomposizione spettrale. In ogni caso il costo della soluzione sarà proporzionale al cubo dell'ordine delle matrici in gioco. Ration per cui, essendo quella Hamiltoniana il doppio delle dimensioni di  $A$ , ogni singola iterazione di Kleinman costerà un ottavo della relativa soluzione non iterata. Ne consegue che, molto grossolanamente, il metodo iterativo potrebbe risultare vantaggioso qualora convergesse in un numero di iterazioni minori, o al più uguali, a otto. Tale condizione dipende moltissimo dalla soluzione di partenza, ma può essere spesso ottenuta in condizione di continuazione di soluzioni già acquisite e modificate da una variazione continua dei parametri del modello utilizzato. Cosa abbastanza comune durante la progettazione, che, come già accennato, integra spesso elementi attivi e passivi. Assai frequentemente è inoltre più semplice sfruttare la particolare struttura di  $A$  risolvendo un'equazione di Lyapunov o, ancora, provvedere a soluzioni adeguatamente approssimate ma accettabili. Quanto appena accennato, insieme ad altri significativi dettagli applicativi al di fuori dello scopo di questo bigino, giustificano spesso l'utilizzo del metodo di Kleinman, come evidenziato dal già menzionato continuo interesse sullo stesso evidenziato da tanta letteratura corrente.

Prima di proseguire oltre vogliamo far notare come la ricerca del controllo ottimo su tempo finito, tramite la determinazione delle equazioni differenziali, con le relative condizioni al contorno, atte a esprimere le necessarie condizioni di stazionarietà del funzionale di progetto, abbia portato operativamente, al di là della variabile indipendente tempo al posto di una coordinata spaziale, a passaggi e operazioni assai simili a quelli visti per determinare tramite il PLV le equazioni differenziali della risposta e le condizioni al contorno di strutture, delle travi in particolare. Infatti, rivedendone i passaggi, risulterà evidente come le condizioni iniziali sullo stato assomiglino a quelle essenziali, mentre le condizioni finali sui moltiplicatori si presentano come condizioni naturali. L'analogia sarebbe ancora più pregnante nel caso di sistemi elastici lineari soggetti a forze conservative qualora, invece di utilizzare il PLV, di per se già una condizione di stazionarietà, cercassimo la soluzione equilibrata fra tutte quelle congruenti minimizzando il funzionale dell'energia totale. Il tutto non è per niente strano se si fa notare che quanto abbiamo fatto, in modo relativamente semplice, altro non è che una applicazione del calcolo variazionale, ossia della disciplina matematica che si occupa delle tecniche di ottimizzazione di funzionali. Facendo vomitare i matematici, sarebbe a dire quelle funzioni che contengono funzioni incognite da determinarsi sulla base di opportuni criteri, non necessariamente di solo ottimalità. Come esercizio, per controllare la nostra capacità di 'manipolazione' di tali problemi, proviamo ora a verificare a cosa porterebbe la specializzazione del controllo ottimo applicandolo direttamente a un sistema differenziale non agli stati ma in coordinate libere, ossia alla ben nota:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = Bu \quad (11.64)$$

con  $M$ ,  $C$  e  $K$  generiche, con funzione di merito:

$$F = \frac{1}{2} \left( q_f^T P_{qq} q_f + \dot{q}_f^T P_{\dot{q}\dot{q}} \dot{q}_f + \int_0^{t_f} (q^T Q_{qq} q + \dot{q}^T Q_{\dot{q}\dot{q}} \dot{q} + u^T R u + 2\lambda^T (M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq - Bu)) dt \right). \quad (11.65)$$

essendo  $P_{qq}$ ,  $P_{\dot{q}\dot{q}}$ ,  $Q_{qq}$  e  $Q_{\dot{q}\dot{q}}$  almeno semidefinite positive e  $R$  strettamente definita positiva. Facciamo notare la semplificazione di non aver incrociato né  $q$  con  $\dot{q}$ , sia nella penalizzazione finale, con una possibile pesatura  $P_{\dot{q}q} = P_{q\dot{q}}^T$ , che nell'integrale, tramite i termini associati a  $Q_{\dot{q}q} = Q_{q\dot{q}}^T$ , né  $q$  e  $\dot{q}$  con  $u$ , evitando di introdurre termini del tipo  $S_{qu}$  e  $S_{\dot{q}u}$ . Tale possibilità viene lasciata al lettore come ulteriore verifica. Per procedere con la minimizzazione si deve ora, come già precedentemente fatto, variare il funzionale in modo tale da determinare le condizioni necessarie per la sua stazionarietà:

$$\begin{aligned} \delta F &= \delta q_f^T P_{qq} q_f + \delta \dot{q}_f^T P_{\dot{q}\dot{q}} \dot{q}_f + \int_0^{t_f} (\delta q^T Q_{qq} q + \delta \dot{q}^T Q_{\dot{q}\dot{q}} \dot{q} + \delta u^T R u) dt \\ &+ \int_0^{t_f} (\delta \lambda^T (M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq - Bu) + \lambda^T (M\delta \ddot{q} + C\delta \dot{q} + K\delta q - B\delta u)) dt \\ &= \delta q_f^T P_{qq} q_f + \delta \dot{q}_f^T P_{\dot{q}\dot{q}} \dot{q}_f + \int_0^{t_f} (\delta q^T Q_{qq} q + \delta \dot{q}^T Q_{\dot{q}\dot{q}} \dot{q} + \delta u^T R u) dt \\ &+ \int_0^{t_f} (\delta \lambda^T (M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq - Bu) + \delta \dot{q}^T M\lambda + \delta \dot{q}^T C\lambda + \delta q^T K\lambda - \delta u^T B^T \lambda) dt \end{aligned} \quad (11.66)$$

Effettuiamo ora tutte le integrazioni per parti atte a far sparire le variazioni delle derivate rispetto al tempo dall'integrale<sup>8</sup>. Avremo quindi:

$$\begin{aligned} \delta F &= \delta q_f^T (P_{qq} q_f - M\dot{\lambda}_f + C\lambda_f + Q_{\dot{q}\dot{q}} \dot{q}_f) + \delta \dot{q}_f^T (P_{\dot{q}\dot{q}} \dot{q}_f + M\lambda_f) + \\ &+ \int_0^{t_f} (\delta q^T (Q_{qq} q - Q_{\dot{q}\dot{q}} \ddot{q}) + \delta u^T R u) dt + \\ &+ \int_0^{t_f} (\delta \lambda^T (M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq - Bu) + \delta \dot{q}^T (M\ddot{\lambda} - C\dot{\lambda} + K\lambda) - \delta u^T B^T \lambda) dt = 0. \end{aligned} \quad (11.67)$$

L'espressione appena scritta deve essere valida ad ogni istante e per qualunque variazione delle funzioni incognite, indipendenti, per cui si può scrivere:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq - Bu = 0 \quad (11.68a)$$

$$M\ddot{\lambda} - C\dot{\lambda} + K\lambda + Q_{qq} q - Q_{\dot{q}\dot{q}} \ddot{q} = 0 \quad (11.68b)$$

$$u = R^{-1} B^T \lambda \quad (11.68c)$$

$$P_{qq} q_f - M\dot{\lambda}_f + C\lambda_f + Q_{\dot{q}\dot{q}} \dot{q}_f = 0 \quad (11.68d)$$

$$P_{\dot{q}\dot{q}} \dot{q}_f + M\lambda_f = 0 \quad (11.68e)$$

a cui vanno aggiunte le condizione iniziali:  $q(0) = q_0$  e  $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ . Sostituendo l'espressione degli ingressi di controllo  $u$  nelle equazioni differenziali del sistema, si ottiene il seguente problema, del secondo ordine, implicito in  $q$  e  $\lambda$ , ma esplicitabile rispetto alle derivate massime essendo  $M$  non singolare:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq + BR^{-1}B^T \lambda = 0 \quad (11.69a)$$

$$M\ddot{\lambda} - C\dot{\lambda} + K\lambda + Q_{qq} q - Q_{\dot{q}\dot{q}} \ddot{q} = 0 \quad (11.69b)$$

<sup>8</sup> Si noti che, essendosi in presenza di derivate seconde, le integrazioni per parti sono anche doppie. Pertanto, mentre con la rappresentazione agli stati l'analogia col PLV era simile alla sua applicazione al caso di travi sottoposte a torsione o azione assiale, in questo caso si è assai più vicini a quanto visto per travi sollecitate flessionalmente

con le condizioni al contorno, rispettivamente in forma esplicita e implicita, ma con  $\lambda_f$  e  $\dot{\lambda}_f$  facilmente risolvibili come funzioni esplicite di  $\dot{q}_f$  e  $q_f$ :

$$q(0) = q_0 \quad (11.70a)$$

$$\dot{q}(0) = \dot{q}_0 \quad (11.70b)$$

$$P_{qq} q_f - M\dot{\lambda}_f + C\lambda_f + Q_{\dot{q}\dot{q}} \dot{q}_f = 0 \quad (11.70c)$$

$$P_{\dot{q}\dot{q}} \dot{q}_f + M\lambda_f = 0 \quad (11.70d)$$

la cui risoluzione porta alla definizione del controllo ottimo, in ciclo aperto. Come già suggerito si noti che le condizioni iniziali su  $q(0)$  e  $\dot{q}(0)$  si possono ritenere condizioni al contorno essenziali, mentre le successive due sono fornite dalla variazione del funzionale e sono quindi analoghe a quelle naturali viste in ambito PLV. L'approccio di cui sopra non è molto usato, nonostante presenti il vantaggio di presentare la metà delle equazioni della corrispondente formulazione agli stati nel caso di una possibile soluzione numerica del problema al contorno a esso associato. In analogia con quanto già visto per la formulazione agli stati, aggiungiamo che quanto sopra presentato si può, con uno sviluppo alquanto noioso, ulteriormente estendere in modo da ottenere una soluzione in ciclo chiuso. Malgrado ciò, a beneficio dei coraggiosi che ci vogliano provare, accenniamo comunque la traccia che conduce a una formulazione simil equazione instazionaria di Riccati. Si assuma una soluzione  $\lambda = P_q q + P_{\dot{q}}\dot{q}$ , la si sostituisca nell'equazione di moto, ottenendo  $M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq + BR^{-1}B^T(P_q q + P_{\dot{q}}\dot{q}) = 0$ , si derivi la stessa in modo da avere  $M\ddot{\ddot{q}} + \dot{M}\ddot{q} + \dot{C}\dot{q} + \dot{C}\ddot{q} + \dot{K}\dot{q} + \dot{K}\ddot{q} + (BR^{-1}B^T)(P_q q + P_{\dot{q}}\dot{q}) + BR^{-1}B^T(\dot{P}_q q + P_q\dot{q} + \dot{P}_{\dot{q}}\dot{q} + P_{\dot{q}}\ddot{q}) = 0$ . Si vede così che dalla prima si può ricavare  $\ddot{q}$  in funzione di  $\dot{q}$  e  $q$ , in modo che sostituendola nella seconda si può pure ottenere  $\ddot{\ddot{q}}$  in funzione di  $\dot{q}$  e  $q$ , con le matrici  $P_q$  e  $P_{\dot{q}}$  che compaiono al più come derivate seconde. Con tali espressioni si potranno anche ottenere  $\lambda$ ,  $\dot{\lambda}$  e  $\ddot{\lambda}$  come funzioni solo di  $\dot{q}$  e  $q$ . Finalmente, sostituendo  $\lambda$ ,  $\dot{\lambda}$ ,  $\ddot{\lambda}$  e  $\ddot{q}$ , sempre espresse come funzioni solo di  $\dot{q}$  e  $q$ , nell'equazione, lineare del secondo ordine, dei moltiplicatori di Lagrange si potranno raccogliere tutti i termini in due blocchi moltiplicanti  $\dot{q}$  e  $q$ . Dovendo essere tale equazione identicamente nulla a ogni istante di tempo nell'intervallo di interesse, saranno pure identicamente nulle le espressioni che moltiplicano  $\dot{q}$  e  $q$ . Si arriverà così a un sistema di equazioni del secondo ordine che accoppiano implicitamente  $P_q$ ,  $P_{\dot{q}}$  e le loro derivate. Imponendo a tali equazioni di soddisfare le condizioni naturali sopra riportate al tempo finale,  $t_f$ , integrandole all'indietro nel tempo, si avrà la soluzione in ciclo chiuso, in analogia con quella ottenibile risolvendo l'equazione instazionaria di Riccati della formulazione agli stati. Pensando alle difficoltà di manipolazione e alla complessità del sistema risolvibile appena ottenuto, specie se si considerassero le ulteriori matrici di accoppiamento della cifra di merito che abbiamo trascurato, si può comprendere perché venga di solito preferita la più usuale formulazione agli stati, accettandone anche il raddoppio delle equazioni nel caso di soluzioni numeriche, ossia praticamente sempre per problemi appena appena significativi. Le ragioni di tale scelta si collegano anche ad ulteriori possibili considerazioni, citandone alcune: la maggior generalità della formulazione agli stati, con la conseguente ricchezza di metodologie di soluzione, relativamente facili e efficienti, il fatto che spesso non ci sono problemi puramente meccanici ma, ad esempio a causa della modellazione di sensori e attuatori, formulazioni multidisciplinari, basate su modelli con equazioni differenziali di vario ordine, che sono più semplicemente riconducibili a una formulazione unificata agli stati.

Un'ulteriore variazione sulla ricerca delle condizioni di ottimalità potrebbe consistere nell'imporre una posizione finale desiderata,  $x_f$ , a partire da una iniziale assegnata,  $x_0$ . A tal fine potremmo ancora usare la matrice di transizione dai valori finali, ma preferiamo esercitarci usando quella associata all'istante iniziale, scrivendo:

$$x(t) = \Phi_{xx}(t, 0)x_0 + \Phi_{x\lambda}(t, 0)\lambda_0 \quad \lambda(t) = \Phi_{\lambda x}(t, 0)x_0 + \Phi_{\lambda\lambda}(t, 0)\lambda_0 \quad (11.71)$$

Per completare la soluzione bisogna determinare  $\lambda_0$ , cosa ottenibile imponendo la condizione finale  $x_f$ , tramite la prima equazione risolvibile. Si avrà pertanto:

$$x_f = \Phi_{xx}(T, 0)x_0 + \Phi_{x\lambda}(T, 0)\lambda_0 \quad \lambda_0 = \Phi_{\lambda x}(T, 0)^{-1}x_f - \Phi_{\lambda x}(T, 0)^{-1}\Phi_{xx}(T, 0)x_0 \quad (11.72)$$

assumendo chiaramente che  $\Phi_{x\lambda}(T, 0)$  non sia singolare, cosa che chiariremo un po' nel seguente esercizio. Sostituendo tale risultato nelle equazioni di partenza avremo:

$$\begin{aligned} x(t) &= (\Phi_{xx}(t, 0) - \Phi_{x\lambda}(t, 0)\Phi_{x\lambda}(T, 0)^{-1}\Phi_{xx}(T, 0))x_0 + \Phi_{x\lambda}(t, 0)\Phi_{x\lambda}(T, 0)^{-1}x_f \\ \lambda(t) &= (\Phi_{\lambda x}(t, 0) - \Phi_{\lambda\lambda}(t, 0)\Phi_{x\lambda}(T, 0)^{-1}\Phi_{xx}(T, 0))x_0 + \Phi_{\lambda\lambda}(t, 0)\Phi_{x\lambda}(T, 0)^{-1}x_f \end{aligned} \quad (11.73)$$

giungendo così alla soluzione completa, in ciclo aperto:  $x(t)$ ,  $\lambda(t)$  e  $u(t) = R^{-1}(S^T x(t) + B^T \lambda(t))$ . È ovviamente possibile anche una realizzazione equivalente in ciclo chiuso, ad esempio definendo:  $\tilde{\Phi}(t, T) = (\Phi_{xx}(t, 0) - \Phi_{x\lambda}(t, 0)\Phi_{x\lambda}(T, 0)^{-1}\Phi_{xx}(T, 0))^{-1}$  e ricavando  $x_0$  in funzione di  $x(t)$  e  $x_f$  dalla prima:  $x_0 = \tilde{\Phi}(t, T)x(t) - \tilde{\Phi}(t, T)\Phi_{x\lambda}(t, 0)\Phi_{x\lambda}(T, 0)^{-1}x_f$  per sostituirlo nell'espressione di  $\lambda(t)$  ottenendo:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= [\Phi_{\lambda x}(t, 0) - \Phi_{\lambda\lambda}(t, 0)\Phi_{x\lambda}(T, 0)^{-1}\Phi_{xx}(T, 0)] \tilde{\Phi}(t, T) x(t) + \\ &\quad [\Phi_{\lambda\lambda}(t, 0) - (\Phi_{\lambda x}(t, 0) - \Phi_{\lambda\lambda}(t, 0)\Phi_{x\lambda}(T, 0)^{-1}\Phi_{xx}(T, 0)) \tilde{\Phi}(t, T)\Phi_{x\lambda}(t, 0)] \\ &\quad \Phi_{x\lambda}(T, 0)^{-1} x_f \end{aligned} \quad (11.74)$$

usando la solita  $u(t) = R^{-1}(S^T x(t) + B^T \lambda(t))$ , otterremo un controllo, in generale tempo variante, che dipende solo dalla condizione desiderata finale assegnata e dalla misura dello stato istante per istante, quindi una realizzazione in ciclo chiuso. Come applicazione sviluppiamo ora un esempio semplificato basato sulla minimizzazione della sola azione di controllo, ossia:

$$F = \int_0^T u^T R u dt \quad (11.75)$$

Ripetendo i passaggi già visti nei precedenti sviluppo variazionali sul controllo ottimo si arriva al seguente sistema di equazioni differenziali e di controllo:

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T \lambda \quad \dot{\lambda} = -A^T \lambda \quad u = -R^{-1}B^T \lambda \quad (11.76)$$

con le associate condizioni al contorno:

$$x(0) = x_0 \quad x(T) = x_f \quad (11.77)$$

L'equazione omogenea in  $\lambda$  risulta essere disaccoppiata da quella in  $x$  e può essere risolta separatamente fornendo l'integrale generale  $\lambda(t) = e^{-A^T t} c$ , essendo  $c$  un vettore costante da determinarsi tramite l'assegnazione delle condizioni al contorno su riportate. Pertanto, sostituendo l'espressione di  $\lambda$  trovata nell'equazione in  $x$ :

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T e^{-A^T t} c$$

si vede come  $-R^{-1}B^T e^{-A^T t} c$  assuma il significato di termine forzante della dinamica di  $x$ . Sarà quindi facile trovare  $x(t)$  usando la ben nota formula di Lagrange, ottenendo:

$$\begin{aligned} x(t) - e^{At} x_0 &= - \int_0^t e^{A(t-\tau)} BR^{-1}B^T e^{-A^T \tau} d\tau c = \\ &= - \int_0^t e^{A(t-\tau)} BR^{-1}B^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau e^{-A^T t} c \end{aligned} \quad (11.78)$$

e quindi:

$$x_f - e^{AT} x_0 = - \int_0^T e^{A(T-\tau)} BR^{-1}B^T e^{A^T(T-\tau)} d\tau e^{-A^T T} c \quad (11.79) \quad \text{eq: } x(t)$$

da cui, definendo  $G_C(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} BR^{-1}B^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau$ , si avrà:  $c = -e^{A^T T} G_C(T)^{-1}(x_f - e^{AT} x_0)$  e quindi la legge di controllo:

$$u(t) = R^{-1}B^T e^{A^T(T-t)} G_C(T)^{-1}(x_f - e^{AT} x_0) \quad (11.80)$$

Si vede che tale formula ci mostra un modo per portare lo stato da una arbitraria condizione iniziale a una finale su un tempo finito qualunque, e, non avendo posto limitazioni su  $u$  a parte una pesatura tutta interna alle sue componenti, al limite anche brevissimo. Possiamo pertanto ritenerla come una definizione operativa della raggiungibilità da  $x_0$ , inclusa quella più usuale da 0 se  $x_0 = 0$ . Chiaramente  $G_C(T)$  non dovrà essere singolare e tale condizione si potrebbe assumere come criterio proprio della raggiungibilità. Di fatto si può dimostrare che ne è condizione necessaria e sufficiente e noi la useremo più avanti, per  $T = \infty$ , nella riduzione dei sistemi lineari tempo invarianti e asintoticamente stabili. Notiamo infine che, a pari  $x_0$  e  $x_f$  niente ci impedisce di leggere la precedente formula dei controlli come la legge atta a portare da  $x_f$  a  $x_0$ , e quindi alla determinazione della controllabilità del sistema a qualunque  $x_0$  da un qualunque  $x_f$ , con  $x_0 = 0$  come caso particolare. Con tale interpretazione vediamo quindi l'equivalenza delle condizioni di controllabilità e raggiungibilità per i sistemi lineari tempo invarianti.

La legge di controllo sopra riportata è chiaramente in ciclo aperto. Volendo invece determinarne una realizzazione ciclo chiuso, che cerchi cioè di raggiungere  $x_f$  a  $T$  tenendo in conto  $x(t)$ , riscriviamo la soluzione  $x(t)$  a partire da  $T$  tramite la:

$$x(t) - e^{A(t-T)}x_f = \int_T^t e^{A(t-\tau)}BR^{-1}B^Te^{A^T(t-\tau)}d\tau e^{-A^Tt}c \quad (11.81)$$

dalla quale, ricavando  $c = e^{A^Tt}G_C^{-1}(x(t) - e^{A(t-T)}x_f)$ , otteniamo:

$$u(t) = -R^{-1}B^TG_C(t)^{-1}(x(t) - e^{A(t-T)}x_f) \quad (11.82)$$

che è la legge di controllo in ciclo chiuso cercata.

Nella dimostrazione della modalità di soluzione del problema di controllo ottimo nulla è stato detto sulle condizioni di risolubilità atte a garantire tutte le assunzioni operative fin qui fatte, anche in relazione all'ottenimento di una soluzione asintoticamente stabile. Inoltre, a parte la menzionata proprietà di stabilità non si è fornita nessuna ulteriore proprietà del controllore così ottenuto. Ovviamente ora, pur senza dimostrazioni, a tali mancanze, ricordando però che il metodo di Kleinman ci ha già suggerito la necessità di operare su un sistema perlomeno stabilizzabile.<sup>9</sup>

Riferendoci dapprima ad un controllo ottimo mancante della matrice  $S$  nella cifra di merito si può dimostrare che la soluzione stabilizzante è ottenibile sotto il vincolo, restrittivo, di asintotica stabilità del sistema non controllato mentre, mancando tale proprietà, si dovranno avere raggiungibilità rispetto a  $B_u$  e osservabilità rispetto alla matrice  $C_z$  delle uscite di prestazione; si ricordi che  $Q = C_z^TW_{zz}C_z$ . Mentre la condizione di raggiungibilità sembra essere intuitiva, la necessità dell'osservabilità lo è meno. Si noti però che se al limite estremo di  $Q = 0$  è possibile trovare una soluzione stabilizzante di un sistema instabile e raggiungibile, senza autovalori sull'asse immaginario, si otterrà infatti un sistema controllato con gli autovalori stabili inalterati mentre quelli instabili saranno ribaltati attorno all'asse immaginario, per un sistema semplicemente stabile non sarà possibile spostare eventuali autovalori sull'asse immaginario. Ecco allora che in tale caso diventa importante una pesatura appropriata delle prestazioni, che si riflette appunto nella citata condizione di osservabilità. In realtà, ma questo dovrebbe risultare intuitivo, si possono rilassare ulteriormente le condizioni di risolubilità richiedendo solo che il sistema sia stabilizzabile su  $B_u$  e rilevabile su  $C_z$ . Bisogna aggiungere però che il rilassamento della condizione di raggiungibilità in quella di stabilizzabilità, pur permettendo la risoluzione del problema, non è sempre accettabile dal punto di vista pratico poiché la parte asintoticamente stabile ma non raggiungibile potrebbe non permettere il soddisfacimento delle specifiche di progetto. Questa osservazione ci rimanda al fatto, già rilevato, che la progettazione del sistema di controllo non consiste nel solo progetto della legge del controllore.

<sup>9</sup>Si ricorda, invitando eventualmente a un ripasso del materiale di Controlli Automatici, che per un sistema lineare tempo invariante i termini raggiungibilità/controlabilità (raggiungibile/controlabile) sono interscambiabili, così come i loro duali di osservabilità/ricostruibilità (osservabile/ricostruibile). Su tale base bisognerà ricordare anche la possibilità di decomposizione nei relativi quattro sottospazi canonici: raggiungibile, non raggiungibile, osservabile, non osservabile. Vanno inoltre ricordati i concetti di stabilizzabilità (stabilizzabile), quando l'eventuale parte non raggiungibile è asintoticamente stabile; e il duale di rilevabilità (rilevabile), quando l'eventuale parte non osservabile è asintoticamente stabile.

Qualora  $S$  non sia nulla le condizioni precedenti dovranno valere ancora ma bisognerà aggiungere anche il soddisfacimento di condizioni analoghe sulle matrici  $\bar{A}$ ,  $B$  e su una possibile  $\bar{C}_z$  ottenibile da fattorizzazione di  $\bar{Q} = \bar{C}_z^T W_{zz} \bar{C}_z$ .

Abbiamo quindi visto che il controllo ottimo permette un certo tipo di ottimizzazione delle prestazioni del sistema.

La scelta di tali prestazioni non è però univoca e viene lasciata al progettista che deve essere in grado di trovare, nell'ambito del sistema in esame, la combinazione delle matrici peso che permette di soddisfare al meglio le specifiche di progetto.

Fra tali specifiche vengono spesso annoverati i margini di guadagno e di fase, in grado di garantire implicitamente alcune caratteristiche di robustezza del controllo, quali buon smorzamento e una certa insensibilità alla variazione dei parametri che caratterizzano il modello utilizzato per il progetto.

È possibile però dimostrare che il controllore ottimo proporzionale allo stato completo garantisce sia un buon margine di fase di  $60^\circ$  che di guadagno, fra 0.5 e  $\infty$ , ossia fra -6 e  $\infty$  dB. Come noto tali valori sono indicativi di un buon livello di prestazioni e robustezza, sia in termini di smorzamento che di insensibilità alla variazione dei parametri del sistema.

Una dimostrazione rigorosa di tale proprietà sarebbe troppo onerosa nell'ambito di questo corso. È pur tuttavia possibile una dimostrazione euristica semplificata nel dominio del tempo, che porta però a una conclusione corretta <sup>10</sup>

L'idea è quella di inserire nel sistema una perturbazione indipendente su tutti gli ingressi di controllo, per poi stimarne l'entità massima relativa che permette il mantenimento dell'asintotica stabilità del generico movimento del sistema. Allo scopo occorre ricordare che è possibile stabilire direttamente, senza cioè risolvere il sistema, una condizione sufficiente di stabilità tramite un approccio energetico generalizzato, noto come secondo metodo (o metodo diretto) di Lyapunov. Tale metodo generalizza il concetto ben noto (che utilizzeremo anche nel seguito) per cui in un sistema meccanico conservativo perturbato nelle condizioni iniziali l'energia totale deve decrescere nel tempo (stabilità asintotica) o al più rimanere costante (stabilità semplice). La relativa generalizzazione passa per la definizione di un'energia generalizzata, detta funzione di Lyapunov, definita da una forma quadratica positiva dello stato:

$$V = \frac{1}{2} x^T P x \quad (11.83) \quad \text{Lyapunov2}$$

da cui:

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x = x^T P \dot{x} = x^T A^T P x = x^T P A x = \frac{1}{2} x^T (A^T P + P A) x \quad (11.84) \quad \text{Lyapunov3}$$

Riprendendo il caso di un sistema meccanico di coordinate libere  $x$ , vincolato almeno isotaticamente,  $V$  potrebbe pertanto essere l'energia totale:

$$V = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \quad (11.85)$$

da cui si vede che  $P$  è costituita dalle matrici di massa e rigidezza,  $M$  e  $K$ . Applicando allora il criterio energetico all'equazione  $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0$  si ottiene (verificare) che  $\dot{V} = -\dot{x}^T C \dot{x}$ , da cui consegue che l'asintotica stabilità è garantita per  $C > 0$ .

È poi valida la proprietà inversa per cui se  $A$  è asintoticamente stabile esiste almeno una  $P$  definita positiva per la quale  $\dot{V} < 0$ . Di fatto si potranno utilizzare tutte le  $P$  che soddisfano l'equazione di Lyapunov:  $A^T P + P A + Q = 0$ , con  $Q$  restrittivamente definita positiva.

Per sviluppare l'idea di determinazione della robustezza prima accennata modelliamo perturbazioni indipendenti sugli ingressi di controllo ottimo:  $u = -R^{-1} B^T P x$ , premoltiplicando gli stessi per una matrice  $M$ , che assumeremo diagonale, scrivendo quindi:  $u = -MR^{-1} B^T P x$ . Ragon per cui sarà:

$$\dot{x} = (A - BMR^{-1} B^T P) x \quad (11.86) \quad \text{sist_din2}$$

<sup>10</sup>Michael Triantafyllou, 2-154/13.49, Maneuvering and Control of Surface and Underwater Vehicles, Fall 2004. MIT OpenCourseWare: Massachusetts Institute of Technology, <http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Mechanical-Engineering/2-154Fall-2004/CourseHome/index.htm>. License: Creative Commons BY-NC-SA.



Scriviamo ora la funzione  $V$  utilizzando per  $P$ , definita positiva, la stessa matrice che determina il guadagno sullo stato, soluzione dell'equazione algebrica di Riccati, col termine noto  $Q$  assunto definito positivo in modo da garantire la definizione positiva di  $P$ , ipotesi indebitamente restrittiva ma adeguata all'approccio un po' euristico che stiamo seguendo. Affinché il generico movimento in ciclo chiuso, col sistema perturbato tramite  $M$ , sia asintoticamente stabile deve allora valere la seguente:

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = x^T P \dot{x} = x^T P A x - x^T P B M R^{-1} B^T P x < 0 \quad (11.87) \quad \text{Lyapunov4}$$

Ricordando l'equazione algebrica di Riccati:

$$P A + A^T P - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (11.88) \quad \text{riccati}$$

premultiplicandola per  $\frac{1}{2}x^T$  e postmultiplicandola per  $x$ , otteniamo:

$$x^T P A x = \frac{1}{2} (x^T P B R^{-1} B^T P x - x^T Q x) \quad (11.89) \quad \text{riccati2}$$

Sostituendola nell'eq. 11.87 otteniamo:

$$\frac{1}{2} x^T P B R^{-1} B^T P x - \frac{1}{2} x^T Q x - x^T P B M R^{-1} B^T P x < 0 \quad (11.90)$$

$$-x^T P B \left( \frac{1}{2} - M \right) R^{-1} B^T P x + \frac{1}{2} x^T Q x > 0 \quad (11.91)$$

Possiamo poi togliere il termine  $\frac{1}{2}x^T Q x$  poiché, essendo  $Q$  definita positiva, tale termine costituisce una maggiorazione che tralasciata garantisce un peggioramento della possibile stabilità.

Quindi, dovendo il termine restante:

$$-x^T P B \left( \frac{1}{2} - M \right) R^{-1} B^T P x > 0 \quad (11.92) \quad \text{last}$$

essere definito positivo dovrà essere:

$$M > \frac{1}{2} \quad (11.93) \quad \text{marg\_guad}$$

Assumendo  $M$  come una scalatura della matrice di guadagno (ovvero, con abuso di notazione,  $M = MI$ ) possiamo interpretare la disuguaglianza di cui sopra asserendo che il controllore ottimo è in grado di mantenere l'asintotica stabilità per variazione dei guadagni di maglia minori di  $\frac{1}{2}$ , possibilmente anche uguali o maggiori a causa della maggiorazione adottata.

Analogamente, interpretando  $M$  come il coseno di una variazione di fase del segnale di controllo, possiamo garantire un margine di fase di almeno  $60^\circ$ .

Notiamo infine che il fattore  $\frac{1}{2}$  della funzione di Lyapunov  $V$  è assolutamente inessenziale. Di fatto è stato utilizzato primariamente per mantenere, nel caso meccanico, una piena analogia con la definizione di energia totale. Pertanto  $V$  è spesso definito da:

$$V = x^T P x \quad (11.94) \quad \text{Lyapunov5}$$

Nel seguito ci riserviamo, senza eccessivi dogmatismi, di utilizzare l'una o l'altra definizione secondo convenienza, caso per caso.

Per chiarimenti e approfondimenti sul problema del controllo ottimo si veda, ad esempio: B. Friedland, Control System Design: An Introduction to State-Space Methods, Dover; utile anche per un ripasso e per alcuni sviluppi presentati nel seguito; la soluzione dell'equazione algebrica di Riccati qui presentata segue la traccia di un esercizio di tale libro.





## Capitolo 12

# RIVISITAZIONE CONTROLLO OTTIMO E REALIZZAZIONE TRAMITE OSSERVATORE OTTIMALE

Come abbiamo visto il controllo ottimo con disponibilità completa dello stato si riduce a un semplice controllo proporzionale multivariabile sullo stato stesso:  $u = -Gx$ . Vogliamo ora mostrare un procedimento alternativo per calcolare  $G$  che utilizzeremo estesamente anche in seguito. Assumendo quindi una legge di controllo proporzionale allo stato riprendiamo il modello del nostro sistema, le relative prestazioni e la funzione obbiettivo:

revcontott1

$$\dot{x} = (A - B_u G) x + B_d d = \bar{A} x + B_d d, \quad (12.1a)$$

$$z = (C_z - D_{zu} G) x + D_{zd} d = \bar{C}_z x + D_{zd} d. \quad (12.1b)$$

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (z^T W_{zz} z + u^T W_{uu} u) dt \quad (12.2)$$

revcontott2

Espandendo l'integrando si avrà:

$$\begin{aligned} z^T W_{zz} z + u^T W_{uu} u &= (\bar{C}_z x)^T W_{zz} (\bar{C}_z x) + (\bar{C}_z x)^T W_{zz} (D_{zd} d) + (D_{zd} d)^T W_{zz} (\bar{C}_z x) + \\ &\quad (D_{zd} d)^T W_{zz} (D_{zd} d) + (G x)^T W_{uu} (G x) \end{aligned} \quad (12.3)$$

revcontott3

Per poter proseguire dobbiamo ora stabilire una modellazione dei possibili disturbi. Assumeremo allora la possibilità di perturbazione delle condizioni iniziali combinate con generici disturbi di tipo impulsivo. La ragione di tale scelta sta principalmente nella semplicità di manipolazione degli sviluppi successivi. Va però notato che l'orizzonte temporale infinito della cifra di merito è in pratica, per un sistema che in ciclo chiuso risulterà ben smorzato, corrispondente con l'esaurimento dei transitori associati ai disturbi sopra scelti e sarà quindi associabile a tempi sufficientemente brevi. Ragion per cui si può pensare non a singole perturbazioni ma un treno delle stesse che si susseguono a una frequenza dell'ordine della banda passante del sistema in ciclo chiuso. È inoltre possibile modellare nello stato del sistema opportune dinamiche aggiuntive, che chiameremo filtri di forma, rappresentative di una vasta gamma di disturbi transitori generabili o tramite assegnazione di condizioni iniziali o impulsi. Va pure evidenziato immediatamente che la scelta di disturbi impulsivi impedisce di mantenere gli stessi nelle prestazioni. Infatti il termine  $(D_{zd} d)^T W_{zz} D_{zd} d = d^T (D_{zd}^T W_{zz} D_{zd}) d$  porterebbe a una espressione contenente il prodotto di impulsi, operazione impossibile nell'usuale concezione delle forzanti impulsive (la formalizzazione del

prodotto di distribuzioni è però un argomento di ricerca importante). D'altro canto tale condizione non è da ritenersi limitativa. Basterebbe infatti considerare l'integrale della cifra di merito a partire da  $0^+$  per non dovere considerare i disturbi impulsivi, trasferendo tutti i loro effetti sulle condizioni iniziali a  $0^+$ , che sappiamo essere date da  $x_d(0^+) = B_d d$ .

Pertanto, indipendentemente dalla sua eliminazione, tramite l'uso di filtri di forma o strutturazione delle condizioni iniziali, l'eliminazione del termine in  $d$  non sembra essere limitativa e ci permette di scrivere la cifra di merito come segue:

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^T (\bar{C}_z^T W_{zz} \bar{C}_z + G^T W_{uu} G) x dt \quad (12.4) \quad \text{revcontott4}$$

o definendo:

$$W(G) = \bar{C}_z^T W_{zz} \bar{C}_z + G^T W_{uu} G \quad (12.5) \quad \text{revcontott5}$$

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^T W(G) x dt \quad (12.6) \quad \text{revcontott6}$$

Se il sistema è perturbato tramite l'imposizione di condizioni iniziali  $x_0$  e forzanti impulsive di intensità  $d$  la sua risposta sarà:

$$x = e^{\bar{A}t} (x_0 + B_d d) \quad (12.7) \quad \text{revcontott7}$$

da cui<sup>1</sup>:

$$F = \frac{1}{2} (x_0 + B_d d)^T \left( \int_0^{+\infty} e^{\bar{A}^T t} W(G) e^{\bar{A}t} dt \right) (x_0 + B_d d) = \quad (12.8) \quad \text{revcontott8}$$

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \left( \int_0^{+\infty} (e^{\bar{A}^T t} W(G) e^{\bar{A}t} dt) (x_0 x_0^T + B_d d x_0^T + x_0 d^T B_d^T + B_d d d^T B_d^T) \right) \quad (12.9)$$

Si vede pertanto che per poter proseguire nell'ottimizzazione sarà necessario fornire informazioni su come assegnare le interazioni fra le varie componenti della condizione iniziale  $M_{x_0 x_0} = x_0 x_0^T$ , della condizione iniziale e del disturbo  $M_{x_0 d} = x_0 d^T = (M_{d x_0} = d x_0^T)^T$ , e dei disturbi con se stessi  $M_{dd} = d d^T$ . Chiaramente tali matrici sono dati che devono essere assegnati dal progettista in modo da soddisfare i requisiti di progetto del controllore. In generale si assegna una media fra tutte le possibili combinazioni, solitamente con  $M_{x_0 x_0}$  e  $M_{dd}$  diagonali e con  $M_{x_0 d} = M_{d x_0}^T$  nulla, ritenendo cioè che  $x_0$  e  $d$  possano variare senza nessun vincolo reciproco. Come già notato se si fa partire l'integrale della cifra di merito da  $0^+$  sarà possibile considerare solo un termine in  $x_0$ . Inoltre, come vedremo fra poco, l'entità dei disturbi non influenza il risultato della progettazione del controllore algebrico proporzionale allo stato, ma solo il suo valore ottimo. Per cui, senza particolari limitazioni, possiamo definire una opportuna matrice onnicomprensiva di quantizzazione dei disturbi  $X_0 = x_0 x_0^T + B_d d x_0^T + x_0 d^T B_d^T + B_d d d^T B_d^T$  e ritenere senz'altro l'integrale definito a partire da  $0^+$ . Rimane ora da calcolare  $P = \int_0^{+\infty} e^{\bar{A}^T t} W(G) e^{\bar{A}t} dt$ , una matrice sicuramente simmetrica. Tale tipo di integrale, che apparirà spesso in questi appunti, si calcola per via indiretta. È facile constatare che esso soddisfa la seguente equazione, detta di Lyapunov:

$$\bar{A}^T P + P \bar{A} + W(G) = 0 \quad (12.10) \quad \text{revcontott9}$$

<sup>1</sup>un generale prodotto scalare  $x^T W x$ , con  $W$  simmetrica e definita positiva, si potrà anche scrivere  $\text{Tr}(x^T W x)$ , perché chiaramente la traccia di uno scalare è lo scalare stesso. Quindi, essendo commutabili i termini della traccia sarà  $x^T W x = \text{Tr}(x^T W x) = \text{Tr}(W x x^T)$

Infatti, ricordando che assumiamo che  $\bar{A}$  sia asintoticamente stabile:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \bar{A}^T e^{\bar{A}^T t} W(G) e^{\bar{A} t} dt + \int_0^{+\infty} e^{\bar{A}^T t} W(G) e^{\bar{A} t} \bar{A} dt + W(G) = \\ & \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} (e^{\bar{A}^T t} W(G) e^{\bar{A} t}) dt + W(G) = \left[ e^{\bar{A}^T t} W(G) e^{\bar{A} t} \right]_0^{+\infty} + W(G) \\ & = -W(G) + W(G) = 0 \end{aligned} \quad (12.11) \quad \text{revcontott10}$$

Il problema di ottimizzazione del controllo diventa allora quello di minimizzare, rispetto a  $P$  e  $G^2$ :

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(P X_0) \quad (12.12) \quad \text{revcontott11}$$

sotto il vincolo:

$$\bar{A}^T P + P \bar{A} + W(G) = 0 \quad (12.13) \quad \text{revcontott12}$$

Problema che si può ricondurre al corrispondente non vincolato, scritto in forma estesa:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \text{Tr}(P X_0 + \\ & \Lambda((A^T - G^T B_u^T)P + P(A - B_u G) + (C_z^T - G^T D_{zu}^T)W_{zz}(C_z - D_{zu}G) + (G^T W_{uu}G))) \end{aligned} \quad (12.14) \quad \text{revcontott13}$$

essendo  $\Lambda$  una matrice simmetrica di moltiplicatori di Lagrange. La soluzione richiede il calcolo della relativa condizione di stazionarietà, condizione che si può stabilire abbastanza agevolmente utilizzando la seguente relazione:

$$\frac{\partial}{\partial B} \text{Tr}(AB^T) = A, \quad (12.15) \quad \text{revcontott14}$$

dove con la  $\partial B$  si intende la derivazione della traccia rispetto a tutti i coefficienti della matrice  $B$ <sup>3</sup>. È infatti facile verificare che  $B_{/B_{ik}}^T = [1_{ki}]^4$ ; conseguentemente  $\frac{\partial}{\partial B_{ik}} \text{Tr}(A[1_{ki}]) = A_{ik}$ . Applicandola rispetto alle variabili  $P$ ,  $G$  e  $\Lambda$  si otterranno le seguenti condizioni di stazionarietà:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \Lambda} = & (A^T - G^T B_u^T)P + P(A - B_u G) + \\ & (C_z^T - G^T D_{zu}^T)W_{zz}(C_z - D_{zu}G) + (G^T W_{uu}G) = 0 \end{aligned} \quad (12.16a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial P} = (A - B_u G)\Lambda + \Lambda(A^T - G^T B_u^T) + X_0 = 0 \quad (12.16b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial G} = (W_{uu} + D_{zu}^T W_{zz} D_{zu})G - (B_u^T P + D_{zu}^T W_{zz} C_z) = 0, \quad (12.16c)$$

da cui

$$G = (W_{uu} + D_{zu}^T W_{zz} D_{zu})^{-1} (B_u^T P + D_{zu}^T W_{zz} C_z) \quad (12.17)$$

Constatiamo immediatamente che la matrice dei guadagni non dipende né dai valori delle condizioni iniziali né da quelli dei disturbi, come già visto per il controllo ottimo su orizzonte infinito determinato per via variazionale. Ragion per cui questi influenzano solo il valore dell'ottimo, infatti

<sup>2</sup>Si noti che tornando all'indietro si ha:  $F = \frac{1}{2} \text{Tr}(P X_0) = \frac{1}{2} \text{Tr}(x_0^T P x_0) = \frac{1}{2} x_0^T P x_0$ , ossia quanto già visto nell'introduzione del controllo ottimo.

<sup>3</sup>Attenzione che l'uso di tale formula per la derivazione di matrici sotto traccia è inderogabile. Sono quindi assolutamente da evitare analogie col semplice caso scalare. Pertanto, utilizzando se necessario le proprietà di commutazione e trasposizione sotto traccia, portare la matrice rispetto a cui si deriva sempre a destra e in forma trasposta. A tal proposito, per evitare di commettere "delitti matriciali" durante l'esame, si noti che valendo la:  $\text{Tr}(XY) = \text{Tr}(YX)$ , si può scrivere:  $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB) = \text{Tr}(BCA)$ , ma non:  $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(ACB) = \text{Tr}(BAC)$ .

<sup>4</sup> $[1_{ik}]$  è una matrice nulla con un unico termine diverso da zero e pari all'unità in posizione  $(i, k)$

la matrice dei guadagni coincide con quella già trovata per via variazionale. Il sistema di equazioni (12.16) è non lineare e accoppiato nelle equazioni in  $P$  e  $G$ . Per la sua soluzione si può sostituire l'espressione di  $G$  trovata nell'equazione in  $P$ , utilizzando i simboli  $R = W_{uu} + D_{zu}^T W_{zz} D_{zu}$  e  $S = C_z^T W_{zz} D_{zu}$ , già adottati nella dimostrazione variazionale, otteniamo:

$$P(A - B_u R^{-1} S^T) + (A^T - S R^{-1} B_u^T)P - P B_u R^{-1} B_u^T P + C_z^T W_{zz} C_z - S R^{-1} S^T = 0 \quad (12.18)$$

revcontott14b

cioè la stessa equazione stazionaria di Riccati vista precedentemente.

Disponendo ora di uno strumento agevole e puramente algebrico per l'ottimizzazione di matrici di guadagno sullo stato completo di sistemi lineari tempo invarianti possiamo procedere, nell'ambito della stessa impostazione del problema e degli stessi disturbi, alla determinazione di un osservatore ottimo, senza il quale il controllo ottimo sarebbe di rara utilizzabilità, essendo pochi i problemi reali in cui si può disporre della conoscenza completa dello stato, specialmente nell'ambito del controllo della dinamica dei continui termoelelastici.

## 12.1 OSSERVATORE OTTIMO DETERMINISTICO

Scriviamo allora le equazioni del sistema soggetto ai soliti disturbi esterni sullo stato  $d$ , aggiungendo però un rumore di tipo impulsivo anche sulle misure  $r$

ossdet1

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_d d, \quad (12.19a)$$

$$y = C_y x + D_{yu} u + D_{yd} d + D_{yr} r, \quad (12.19b)$$

Le equazioni del sistema dinamico dell'osservatore possono essere scritte come

$$\begin{aligned} \dot{o} &= A_o + B_u u + L(y - y_o) \\ y_o &= C_y o + D_{yu} u \end{aligned} \quad (12.20)$$

e quindi

$$\dot{o} = (A - LC_y)o + B_u u + LC_y x + LD_{yd} d + LD_{yr} r \quad (12.21)$$

L'equazione dell'errore di osservazione  $e = x - o$  sarà quindi la seguente

$$\dot{e} = (A - LC_y)e + (B_d - LD_{yd})d - LD_{yr} r = \bar{A}e + \bar{B}_d d - LD_{yr} r \quad (12.22)$$

Adotteremo come, logico, criterio di osservatore ottimo deterministico il seguente:

$$O = \int_0^{+\infty} e^T W_e e dt \quad (12.23)$$

revcontott16

Rispetto a disturbi impulsivi in  $d$  e  $r$ . Trascuriamo invece i disturbi sulle condizioni iniziali dell'errore  $e_0$  sia perché ridondanti, lo abbiamo visto per il controllore e sappiamo che opportuni impulsi sono equivalenti ad assegnare condizioni iniziali, sia per un alleggerimento degli sviluppi successivi. Allora, ripetendo passaggi analoghi a quelli già visti nella rivisitazione del controllo ottimo, scriveremo:

$$e = e^{\bar{A}t} (\bar{B}_d d - LD_{yr} r) \quad (12.24)$$

revcontott17

da cui:

$$\begin{aligned} O &= (\bar{B}_d d - LD_{yr} r)^T \left( \int_0^{+\infty} e^{\bar{A}^T t} W_e e^{\bar{A}t} dt \right) (\bar{B}_d d - LD_{yr} r) = \\ &\text{Tr} \left( \int_0^{+\infty} (e^{\bar{A}^T t} W_e e^{\bar{A}t} dt) (\bar{B}_d (dd^T) \bar{B}_d^T - \bar{B}_d (dr^T) (LD_{yr})^T - \right. \\ &\quad \left. LD_{yr} (rd^T) \bar{B}_d^T + LD_{yr} (rr^T) (LD_{yr})^T) \right) \end{aligned} \quad (12.25)$$

revcontott18

Anche in questi caso per proseguire nell'ottimizzazione è necessario fornire informazioni su come assegnare le interazioni fra le varie componenti dei disturbi  $d$  e  $r$ :  $M_{dd} = dd^T$ ,  $M_{dr} = dr^T = (M_{rd} = rd^T)^T$  e  $M_{rr} = rr^T$ , ancora una volta dati disponibili al progettista.

Pertanto il calcolo dell'osservatore ottimo richiede la minimizzazione libera della seguente funzione, scritta in forma estesa, rispetto a:  $L$ ,  $P$ ,  $\Lambda$ :

$$\begin{aligned} O = & \text{Tr}(P((B_d - LD_{yd})M_{dd}(B_d - LD_{yd})^T - (B_d - LD_{yd})M_{dr}(LD_{yr})^T - \\ & LD_{yr}M_{rd}(B_d - LD_{yd})^T + LD_{yr}M_{rr}(LD_{yr})^T) + \\ & \Lambda(P(A - LC_y) + (A^T - C_y^T L^T)P + W_e) \end{aligned} \quad (12.26)$$

revcontott19

Le corrispondenti condizioni di stazionarietà sono:

$$\frac{\partial f}{\partial \Lambda} = P(A - LC_y) + (A^T - C_y^T L^T)P + W_e = 0 \quad (12.27a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial P} = & (A - LC_y)\Lambda + \Lambda(A^T - C_y^T L^T) + \\ & (B_d - LD_{yd})M_{dd}(B_d - LD_{yd})^T - (B_d - LD_{yd})M_{dr}(LD_{yr})^T - \\ & LD_{yr}M_{rd}(B_d - LD_{yd})^T + LD_{yr}M_{rr}(LD_{yr})^T = 0 \end{aligned} \quad (12.27b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial L} = & L(D_{yd}M_{dd}D_{yd}^T + D_{yd}M_{dr}D_{yr}^T + D_{yr}M_{rd}D_{yd}^T + D_{yr}M_{rr}D_{yr}^T) \\ & + (-\Lambda C_y^T - B_d(M_{dd}D_{yd}^T + M_{dr}D_{yr}^T)) = 0, \end{aligned} \quad (12.27c)$$

da cui

$$\begin{aligned} L = & (\Lambda C_y^T + B_d(M_{dd}D_{yd}^T + M_{dr}D_{yr}^T)) \\ & (D_{yd}M_{dd}D_{yd}^T + D_{yd}M_{dr}D_{yr}^T + D_{yr}M_{rd}D_{yd}^T + D_{yr}M_{rr}D_{yr}^T)^{-1} \end{aligned} \quad (12.28)$$

revcontott20

È subito importante notare la dualità del risultato dell'osservatore rispetto al controllore ottimo. Infatti la matrice dei guadagni  $L$  dipende da  $\Lambda$ , e non da  $P$ , e per la soluzione occorrono le matrici duali del controllore:  $A^T$  al posto di  $A$  e  $C_y^T$  al posto di  $B_u$ . Duale risulterà anche l'equazione di Riccati risolvibile, ottenuta sostituendo l'espressione di  $L$  nell'equazione di Lyapunov in  $\Lambda$ . Mostriamo quest'ultima, semplificando un poco i termini, sia allo scopo di un minor appesantimento dei passaggi sia per un più immediato confronto con il controllore ottimo agli stati. Allo scopo definiamo  $R = D_{yd}M_{dd}D_{yd}^T + D_{yd}M_{dr}D_{yr}^T + D_{yr}M_{rd}D_{yd}^T + D_{yr}M_{rr}D_{yr}^T$  e  $S = B_d(M_{dd}D_{yd}^T + M_{dr}D_{yr}^T)$ . Possiamo allora riscrivere l'equazione in  $\Lambda$  di (12.27) e la soluzione  $L$  (12.28) nel modo seguente:

revcontott21

$$(A - LC_y)\Lambda + \Lambda(A^T - C_y^T L^T) + B_d M_{dd} B_d^T - S L^T - L S^T + L R L^T = 0 \quad (12.29a)$$

$$L = (\Lambda C_y^T + S) R^{-1} \quad (12.29b)$$

Sostituendo  $L$  nell'equazione di Lyapunov si otterrà:

$$(A - S R^{-1} C_y)\Lambda + \Lambda(A^T - C_y^T R^{-1} S^T) - \Lambda C_y^T R^{-1} C_y \Lambda + B_d M_{dd} B_d^T - S R^{-1} S^T = 0 \quad (12.30)$$

che è l'equazione algebrica di Riccati duale della (12.18).

Sulla base della dualità possiamo garantire all'osservatore ottimo le stesse proprietà di robustezza già enunciate per il controllore ottimo. In particolare sarà quindi sufficiente garantire la rilevabilità del sistema, e non la sua completa osservabilità. Va però ricordato, anche in questo caso, quanto abbiamo già detto per il controllo sullo stato, cioè che la parte non osservabile ma asintoticamente stabile potrebbe non essere sufficiente a garantire la realizzazione di un osservatore appropriato e è quindi essenziale progettare adeguatamente cosa/dove/come misurare.



## Capitolo 13

# COMBINAZIONE CONTROLLORE- OSSERVATORE

Una volta progettato il controllore e l'osservatore ottimi possiamo combinarli per ottenere un sistema di controllo utilizzabile praticamente, anche se non c'è disponibilità dello stato. Tale approccio non si differenzia da quanto visto nel corso di Controlli Automatici, se non per la modalità di progettazione. È importante però notare che il controllore finale risultante, che richiamiamo esplicitamente nell'espressione da realizzarsi praticamente, sia tramite digitalizzazione che in modo analogico, cosa quest'ultima oggi poco probabile, specie nel caso di un numero anche solo relativamente elevato di stati:

ervatore completo

$$\dot{o} = (A - LC_y - B_u G + LDG)o + Ly \quad (13.1a)$$

$$u = -G o \quad (13.1b)$$

non è generalmente in grado di garantire le stesse proprietà di robustezza associate separatamente ai componenti su cui si basa, controllo e osservatore ottimi, proprietà che possono infatti essere completamente cancellate nel momento in cui si accoppiano i due sistemi<sup>1</sup>. Come già accennato un modo per riuscire ad ottenere dei controllori che mantengano buone proprietà di robustezza anche in seguito al collegamento controllore/osservatore ottimi è quello di aggiungere dei pesi del tipo  $x^T C_y^T C_y x$ , ossia pesare anche le misure nella progettazione del controllore come se fossero parte delle prestazioni. Un discorso analogo si può fare per il problema duale dell'osservatore; in questo caso si aggiungerà ai disturbi anche un possibile rumore sul controllo, strutturando quindi la matrice  $B_d$  come  $[B_u B_d]$ . Una dimostrazione, con le relative condizioni di applicabilità, di quanto qui accennato sarà riportata nel seguito del corso.

Va anche notato che noi progettiamo sistemi di controllo attivo su un modello ridotto del nostro continuo mentre il controllore finirà per operare sul continuo stesso, che ha infiniti gradi di libertà. Non possiamo allora esimerci dal domandarci che conseguenze avrà questo stato di cose. Chiaramente possiamo effettuare una “vera” verifica solo sul “vero” continuo, e quindi sperimentalmente, mentre una verifica analitico/numerica non potrà che essere fatta su un sistema con un numero elevato di stati, o gradi di libertà. “Elevato” va inteso nel senso di un numero di stati maggiore, molto maggiore, di quelli utilizzati nel modello ridotto per produrre un controllore di dimensioni tali da poter essere implementato in modo da soddisfare i vincoli progettuali impostici. Le dimensioni del modello di verifica dovranno essere decise da noi e, al limite, si potrà arrivare al modello

---

<sup>1</sup> Si veda commento nel già citato Friedland e in: Doyle, J.C. and Stein, G., Robustness with observers, IEEE Trans Auto Cont, AC-24, (4), 607-611, 1981, così come il paragrafo sul recupero dei margini di maglia in questo bigino.



ad elementi finiti utilizzato per la generazione del modello ridotto. Noi preferiamo qui riferirci a modelli di verifica in stati/coordinate modali, per i quali possiamo scrivere:

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u, \quad (13.2a)$$

$$\dot{x}_v = A_v x_v + B_v u, \quad (13.2b)$$

$$y = C_p x_p + C_v x_v + D_u u. \quad (13.2c)$$

I pedici  $p$  e  $v$  indicano rispettivamente il modello di progetto e l'estensione di verifica. Si noti che il sistema completo risulta accoppiato solo dall'ingresso di controllo, come ci si deve attendere avendo usato coordinate modali. Inoltre si sono trascurati tutti i disturbi in quanto inessenziali ai fini di quanto vogliamo mostrare. Ci chiediamo ora cosa succede se applichiamo la nostra legge di controllo  $u = -Gx_p$  al sistema esteso a un numero di stati maggiori di quello usato per il progetto. Per la risposta basta sostituire la legge di controllo nel modello esteso ottenendo:

$$\dot{x}_p = (A_p - B_p G) x_p, \quad (13.3a)$$

$$\dot{x}_v = -B_v G x_p + A_v x_v. \quad (13.3b)$$

Come si vede niente di particolarmente pericoloso. La parte modale di progetto risponderà come dal progetto stesso, mentre il resto del sistema verrà perturbato dal controllo mantenendo le proprie condizioni di stabilità originali. Il termine  $B_v G x_p$  viene generalmente indicato come travaso/trabocco del controllo (control spillover in inglese). In poche parole il controllo agirà come un disturbo sulla parte non modellata, disturbo che si smorzerà nel tempo in accordo con gli autovalori di  $A_v$ . Va da sé che in  $A_v$  non possiamo lasciare nessuna instabilità in quanto dobbiamo garantire la stabilità del sistema, ragion per cui tutte le possibili parti instabili devono essere in  $A_p$ .

Un discorso analogo varrà per l'osservatore preso a sé stante. La struttura dell'osservatore non potrà che rimanere invariata. Potremo infatti scrivere la solita formula usata nella sua implementazione:

$$\dot{o} = (A_p - LC_p) o + (B_p - LD_u) u + Ly \quad (13.4)$$

che sembra non mostrare alcun effetto di travaso. In realtà tale effetto diventa visibile se ricordiamo l'espressione di  $y$  estesa alla parte di verifica:

$$\dot{o} = (A_p - LC_p) o + B_p u + LC_p x_p + LC_v x_v \quad (13.5)$$

che mostra l'entrata in gioco del termine  $LC_v x_v$ . Ancora un volta però nulla sembra cambiare dal punto di vista della stabilità, se non per l'aggiunta di tale ingresso ulteriore che sembra agire come un termine di disturbo.

Bisogna quindi verificare l'effetto di travaso non per i singoli componenti ma per la loro combinazione di lavoro. Sarà quindi:

$$\dot{x}_p = A_p x_p - B_p G o, \quad (13.6a)$$

$$\dot{x}_v = A_v x_v - B_v G o \quad (13.6b)$$

$$\dot{o} = (A_p - LC_p - B_p G) o + LC_p x_p + LC_v x_v \quad (13.6c)$$

o

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{x}_v \\ \dot{o} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & 0 & -B_p G \\ 0 & A_v & -B_v G \\ LC_p & LC_v & A_p - LC_p - B_p G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_p \\ x_v \\ o \end{Bmatrix} \quad (13.7)$$

da cui si vede che gli effetti di travaso di controllo provano un accoppiamento completo con le dinamiche trascurate nel progetto e quindi la possibilità di un funzionamento del controllo diverso

da quello di progetto, con un possibile peggioramento delle prestazioni, la già accennata riduzione di robustezza e la possibilità di un sistema controllato instabile.

Un'ulteriore significativa conferma può venire dalla riscrittura del modello esteso del sistema trasformando le equazioni in modo da far comparire il solito errore di osservazione  $e = x_p - o$ , valutato logicamente solo sulla parte di progetto. Si scriverà allora:

$$\dot{x}_p = (A_p - B_p G) x_p + B_p G e, \quad (13.8a)$$

$$\dot{x}_v = A_v x_v - B_v G x_p + B_v G e, \quad (13.8b)$$

$$\dot{e} = (A_p - LC_p) e - LC_v x_v \quad (13.8c)$$

o

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{x}_v \\ \dot{e} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p - B_p G & 0 & B_p G \\ 0 & A_v & B_v G \\ 0 & -LC_v & A_p - LC_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_p \\ x_v \\ e \end{Bmatrix} \quad (13.9)$$

in cui si vede chiaramente come il travaso di controllo  $B_v G e$  e di osservazione  $LC_v x_v$  impediscono, accoppiando errore e stato stimato, che gli autovalori del sistema controllato siano quelli di progetto, cioè quelli di:  $(A_p - B_p G)$ ,  $(A_p - LC_p)$  e  $A_v$ .

Da quanto detto si può vedere come una possibile soluzione per cercare di limitare gli effetti di travaso di controllo potrebbe essere quella di aggiungere un termine  $u^T B_v^T W_{vv} B_v u$ , corrispondente a  $G^T B_v^T W_{vv} B_v G$  in  $W(G)$ , alla cifra di merito della progettazione del controllore. Analogamente l'aggiunta del disturbo  $C_v x_v$  nell'osservatore porterebbe a un termine  $LC_v M_{vv} C_v^T L^T$  nella cifra di merito relativa all'errore di osservazione, per cui scegliendo opportunamente  $M_{vv}$  si avrebbe una pesatura  $C_v M_{vv} C_v^T$  atta a cercare di diminuire l'effetto di travaso di osservazione. Un'utile tecnica di limitazione degli effetti di travaso è poi l'utilizzo di opportuni filtri, in genere passa basso o passa banda, inquadrabili nell'ambito della pesatura in frequenza che vedremo nel seguito.

Si noti infine che è possibile combinare un controllore ottimo sullo stato con un osservatore progettato tramite altre tecniche, leggasì assegnazione dei poli come appreso da precedenti corsi.

### 13.1 Combinazione osservatore-controllore con imposizione di uscite desiderate

A parte possibili considerazioni di robustezza, che vedremo nel seguito, abbiamo visto che il controllore:

$$\dot{o} = (A - LC_{yx} - B_u G)o + Ly \quad (13.10a)$$

$$u = -G o \quad (13.10b)$$

è adatto alla stabilizzazione e al mantenimento di un comando a zero, in presenza di brevi disturbi e/o variazioni delle condizioni iniziali. Più in generale però vorremmo essere in grado di seguire un comando specificato atto a tracciare una prestazione di riferimento del tipo:

$$r = C_r x \quad (13.11)$$

con  $r$ , costante, assegnato, possibilmente, ma non necessariamente, contenuto o nelle prestazioni o nelle misure, forse anche in entrambe, considerate per la progettazione. Vogliamo perciò vedere se questo è possibile utilizzando una semplice modifica del controllore con osservatore sullo stato, indipendentemente da come sia progettato, ossia con assegnazione dei poli o, come qui presentato, attraverso condizioni di ottimalità, non escludendo modalità miste. Ci limiteremo però al soddisfacimento di comandi costanti, a gradino, anticipando comunque che con un'adeguata banda passante del controllore il sistema così ottenuto ben si presta a tracciare comandi il cui contenuto in frequenza sia sufficientemente inferiore a detta banda. Allo scopo, abbastanza intuitivamente, decidiamo di associare al comando in controreazione sullo stato osservato un comando di anticipo a ciclo aperto (feedforward)  $u_r$ , avendo così:

$$u = -G o - u_r \quad (13.12)$$

con  $u_r$  da determinarsi in modo da soddisfare la relazione  $r = C_r x$  asintoticamente. Si noti che il segno meno è inessenziale, forse perfino contro intuitivo, ma è scelto come tale per omogeneità con il termine di controreazione. Avremo quindi il controllore:

$$\dot{o} = (A - LC_{yx} - B_u G)o - B_u u_r + Ly \quad (13.13a)$$

$$u = -Go - u_r \quad (13.13b)$$

Il processo sistema-controllore in ciclo chiuso sarà quindi:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{o} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B_u G \\ LC_{yx} & (A - LC_{yx} - B_u G) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ o \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} B_u \\ B_u \end{bmatrix} u_r \quad (13.14)$$

Sostituendo a  $o$ , come già visto, l'errore di stima  $e = x - o$  avremo:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - B_u G) & B_u G \\ 0 & (A - LC_{yx}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ e \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix} u_r \quad (13.15)$$

che meglio evidenzia come la variazione della legge di controllo utilizzata mantenga la struttura e le precedentemente illustrate proprietà di stabilità del controllo a zero e azzeramento asintotico dell'errore di stima. Infatti la soluzione asintotica:

$$\begin{bmatrix} (A - B_u G) & B_u G \\ 0 & (A - LC_{yx}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix} u_r \quad (13.16)$$

sarà data da  $e = 0$ , quindi  $o = x$ , con:

$$x = (A - B_u G)^{-1} B_u u_r \quad (13.17)$$

garantita dall'asintotica stabilità del controllo ottimo sullo stato, che implica naturalmente essere  $(A - B_u G)$  non singolare. Si può allora ottenere  $u_r$  imponendo che  $r = C_r x$  sia soddisfatta a regime, qualunque sia  $r$  assegnato, ottenendo:

$$r = C_r (A - B_u G)^{-1} B_u u_r = S u_r \quad (13.18)$$

essendo chiaramente  $S = C_r (A - B_u G)^{-1} B_u$ . Sarà pertanto possibile soddisfare esattamente tale equazione solo con un numero di controlli pari o maggiore al numero delle prestazioni assegnate. Avremo quindi semplicemente  $u_r = S^{-1} r = G_r r$  nel caso di un numero di comandi pari al numero di controlli, mentre dovremo ricorrere a un opportuno criterio di ottimizzazione nel caso di sottodeterminazione del problema. Si noti anche che il comando di feedforward alla fine si presenta nei termini di una relazione proporzionale a una matrice di guadagni  $G_r = S^{-1}$ . Tornando al problema della sua determinazione nel caso sottodeterminato notiamo che si potrebbe approfittare della possibile sovrabbondanza di controlli per minimizzare un'opportuna norma quadratica, con matrice di pesi  $W_{rr}$  similmente a quanto già fatto per il controllo ottimo non singolare, sotto il vincolo di soddisfacimento della  $r - S u_r = 0$ . Allo scopo, detto  $\lambda$  il vettore dei moltiplicatori di Lagrange associato a tale vincolo, potremo scrivere:

$$F = \frac{1}{2} u_r^T W_{rr} u_r + \lambda^T (r - S u_r) \quad (13.19)$$

a cui sono associate le condizioni di stazionarietà:

$$W_{rr} u_r - S^T \lambda = 0 \quad (13.20)$$

$$r - S u_r = 0 \quad (13.21)$$

la cui soluzione produrrà:

$$u_r = W_{rr}^{-1} S^T (S W_{rr}^{-1} S^T)^{-1} r \quad (13.22)$$

$$G_r = W_{rr}^{-1} S^T (S W_{rr}^{-1} S^T)^{-1} \quad (13.23)$$

che nel caso di variabili tracciate pari al numero dei controlli si ridurrà comunque, indipendentemente da  $W_{rr}$ , alla semplice  $G_r = S^{-1}$ . Alternativamente si noti che, nel caso di sovrabbondanza

di controlli, sarà sempre possibile rendere il problema strettamente determinato aggiungendo alcune prestazioni non strettamente di interesse, avendo però l'accortezza di sceglierle in modo da non aggravare inutilmente le richieste sui controlli. Nell'ambito della metodologia di progetto presentata l'ottenimento e il mantenimento di  $r$  sarà così garantito in presenza delle stesse perturbazioni utilizzate per la progettazione del controllo a zero. Non è però difficile modificare la procedura appena vista così da garantire il tracciamento costante quando si sia in presenza anche di disturbi costanti o, al solito, lentamente variabili rispetto alla banda passante del controllore. Possiamo quindi riassumere il controllore in termini di matrici di guadagno di controreazione/anticipo come:

$$\dot{o} = (A - LC_{yx} - B_u G) o - B_u G_r r + Ly \quad (13.24a)$$

$$u = -G o - G_r r \quad (13.24b)$$

## 13.2 Uso osservatore per possibile compensazione di disturbi costanti

Proseguiamo quindi con un simile e utile esercizio sugli osservatori, mostrandone una semplice estensione che può permettere la compensazione di disturbi costanti annullandone gli effetti su un insieme di prestazioni assegnate  $r$  mediante anticipazione degli stessi in ciclo aperto. Allo scopo supponiamo di avere il sistema:

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_d d \quad (13.25)$$

$$y = C_{yx} x \quad (13.26)$$

$$r = C_r x \quad (13.27)$$

per il quale desideriamo appunto essere  $r = 0$  a dispetto della presenza di disturbi costanti  $d$  ignoti. Possiamo pensare di stimare tali disturbi tramite un osservatore aggiungendo  $d$  allo stato del sistema, con  $\dot{d} = 0^2$  essendo lo stesso costante. Scriveremo allora il seguente sistema per un osservatore esteso a  $d$ :

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{d} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (13.28)$$

sistemaesteso

Se sono soddisfatte le condizioni di rilevanza del sistema aumentato possiamo pertanto progettare un osservatore che fornirà  $\begin{Bmatrix} x \\ d \end{Bmatrix}$ , per cui potremmo utilizzare  $x$  per il controllo sullo stato e  $d$  per cancellare i disturbi costanti. Precisiamo, senza dimostrazioni<sup>3</sup>, che in generale tali condizioni sono soddisfatte, indipendentemente dal metodo di progetto adottato per l'osservatore dello stato, assegnazione dei poli/autovalori o osservatore ottimo, se la coppia  $A, C_{yx}$  è rilevabile e se il rango della matrice  $\begin{bmatrix} A & B_d \\ C_{yx} & 0 \end{bmatrix}$  è almeno pari al numero di equazioni di  $A$  più il numero di colonne di  $B_d$ , che sarà opportuno corrisponda al rango per colonne della stessa. Quest'ultima condizione contiene implicitamente, e ovviamente, anche quella intuitiva che il numero di misure indipendenti  $y$ , rango per righe di  $C_{yx}$ , debba essere uguale o maggiore al numero di disturbi indipendenti, rango per colonne di  $B_d$ . Sarà poi plausibile ritenere che un tale approccio, oltre a essere in grado di stimare disturbi costanti, saprà valutare anche quelli variabili abbastanza lentamente in relazione alla rapidità, leggi poli/autovalori, di stima dell'osservatore, rapidità che sappiamo però essere legata alla capacità di attenuazione dei disturbi variabili di stato e misura. Per meglio corroborare tale intuizione si pensi alla possibilità di ben approssimare un disturbo lentamente variabile con una successione di scalini di durata appropriatamente più lunga dei tempi di transitorio dell'osservatore sollecitato da detta sequenza di scalini. Purtroppo noi possiamo modellare la matrice di distribuzione  $B_d$  del disturbo ma, fatto salvo il caso che lo stesso sia applicato direttamente al controllo  $u$ ,

<sup>2</sup>Si può facilmente estendere quanto detto a strutture più complesse di disturbi, come quelle ottenibili perturbando il sistema attraverso opportuni filtri di forma deterministici del tipo:  $\dot{x}_d = A_d x_d; d = C_d x_d$ , eccitati da impulsi o condizioni iniziali.

<sup>3</sup>Basta applicare per dualità quanto reperibile nelle dispense richiamate nel successivo paragrafo sul controllo integrale.

quindi  $B_d = B_u$ , nel qual caso potremmo addirittura annullarne l'effetto indipendentemente dalla prestazione, non possiamo in generale manipolarlo liberamente perché  $B_d$  non è accessibile. Anche se il caso di disturbo sull'ingresso di controllo può sembrare banale si noti che si può essere in tali condizioni in alcuni sistemi a un ingresso e un'uscita.

Per evidenziare fisicamente il problema suddetto pensiamo a un aeromobile di cui siamo in grado di modellare le forze aerodinamiche dovute al moto dell'atmosfera, raffiche/turbolenza. Il nostro metodo permette allora di stimare una raffica costante, comunque direzionata, ma noi non siamo purtroppo in grado di generare una perturbazione atmosferica opposta a quella modellata, e poi stimata, che la cancelli. Possiamo però agire sui comandi di volo cercando di posizionarli in modo tale da opporsi all'effetto della raffica, se possibile annullandone gli effetti su una o più prestazioni di interesse. È quello che il pilota cerca di fare diventando lui stesso l'osservatore e il controllore sulla base della lettura degli strumenti di bordo, delle sue sensazioni e del suo intuito/allenamento/esperienza, non riuscendoci però, a causa dei suoi limiti di "banda passante", se non nei casi di raffiche veramente costanti o raffiche/turbolenze variabili molto lentamente. Vedremo ora che, algebricamente parlando, l'operazione che il pilota tenta di fare in tempo reale corrisponde alla soluzione di un sistema di equazioni lineari e ad alcuni prodotti matriciali, che portano a un controllo a ciclo aperto, realizzabile abbastanza fedelmente disponendo di un sistema di controllo e attuazione adeguato.

Per poter sfruttare la stima di  $d$  resa possibile dal suddetto osservatore esteso, in analogia con quanto già visto nel paragrafo precedente, utilizzeremo il controllore:

$$\begin{Bmatrix} \dot{o} \\ \dot{o}_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - L_x C_{yx} - B_u G) & B_d \\ -L_d C_{yx} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} o \\ o_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} L_x \\ L_d \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix} u_d \quad (13.29a)$$

$$u = -G o - u_d \quad (13.29b)$$

dove  $L = \begin{bmatrix} L_x \\ L_d \end{bmatrix}$  è la matrice dell'osservatore progettato sul sistema esteso (13.28), come già detto con uno qualsiasi degli usuali metodi di progettazione di osservatori completi dello stato.

Il processo sistema-controllore in ciclo chiuso sarà quindi:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{o} \\ \dot{o}_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B_u G & 0 \\ L_x C_{yx} & (A - L_x C_{yx} - B_u G) & B_d \\ L_d C_{yx} & -L_d C_{yx} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ o \\ o_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d - \begin{bmatrix} B_u \\ B_u \\ 0 \end{bmatrix} u_d \quad (13.30)$$

Sostituendo, come già più volte visto,  $o$  con l'errore di stima  $e = x - o$ , scriveremo:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \\ \dot{o}_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - B_u G) & B_u G & 0 \\ 0 & (A - L_x C_{yx}) & B_d \\ 0 & L_d C_{yx} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ e \\ o_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_d \\ -B_d \\ 0 \end{bmatrix} d - \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_d \quad (13.31)$$

che evidenzia come la legge di controllo utilizzata mantenga la struttura e le proprietà di stabilità già viste del controllo a zero, con azzeramento asintotico dell'errore di stima. Infatti la soluzione asintotica:

$$\begin{bmatrix} (A - B_u G) & B_u G & 0 \\ 0 & (A - L_x C_{yx}) & B_d \\ 0 & L_d C_{yx} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ e \\ o_d \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_d \\ -B_d \\ 0 \end{bmatrix} d + \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_d \quad (13.32)$$

sarà data da  $e = 0$ , quindi  $o = x$ ,  $o_d = d$  con:

$$x = (A - B_u G)^{-1} (B_u u_d - B_d d) \quad (13.33)$$

garantita dall'asintotica stabilità del controllo ottimo sullo stato, che implica naturalmente essere  $(A - B_u G)$  non singolare. Si vede così che una totale soppressione dell'effetto di un disturbo costante a livello di tutto lo stato sarà, indipendentemente dal suo valore, possibile solo se lo stesso è applicato agli ingressi di controllo. In tal caso sarebbe infatti  $B_d = B_u$ , per cui basterà porre  $u_d = d$ , ossia anticipare all'ingresso di controllo il disturbo osservato, annullandolo in toto, salvo le imprecisioni/approssimazioni insite nel modello utilizzato. In mancanza di tale condizione ci

si dovrà accontentare di annullare l'effetto del disturbo solo su un insieme opportuno di uscite  $C_r x = 0$ , ancora una volta in numero minore o uguale a quello dei controlli, ottenendo:

$$C_r (A - B_u G)^{-1} (B_u u_d - B_d d) = 0 \quad (13.34) \quad \text{distrbi\_a\_zero}$$

riscrivibile come:

$$S u_d = S_d d \quad (13.35)$$

con, come già definita,  $S = C_r (A - B_u G)^{-1} B_u$  e  $S_d = C_r (A - B_u G)^{-1} B_d$ . Ancora una volta è pertanto possibile determinare il controllo in anticipo come proporzionale al disturbo identificato a regime soddisfacendo esattamente tale equazione solo con un numero di controlli pari o maggiore al numero delle prestazioni da soddisfare, ottenendo semplicemente  $u_d = S^{-1} S_d d = G_d d$ , quindi proporzionale a  $d$ , per il caso strettamente determinato. Nel caso sovradeterminato si potrà utilizzare ancora una volta l'approccio di ottimizzazione precedentemente visto arrivando alla:

$$G_d = W_{rr}^{-1} S^T (S W_{rr}^{-1} S^T)^{-1} S_d \quad (13.36)$$

che nel caso strettamente determinato produrrà la più semplice  $G_d = S^{-1} S_d$ , indipendentemente da  $W_{rr}$ . Ancora una volta si ricorda, nel caso di sovrabbondanza di controlli, l'alternativa di aggiungere ulteriori prestazioni, anche di non stretto interesse, esercitando l'usuale accortezza di scelta per non aggravare l'attività di controllo.

Combinando poi la stima dei disturbi costanti con l'assegnazione di prestazioni di riferimento costanti, sempre sotto la condizione che sia i disturbi che i riferimenti da ottenere sono minori o uguali al numero di controlli, si può allora ottenere il soddisfacimento delle condizioni desiderate in presenza di disturbi, entrambi rigorosamente costanti o lentamente variabili in relazione alla banda passante del sistema, con il seguente controllore:

$$\begin{Bmatrix} \dot{o} \\ \dot{o}_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - L_x C_{yx} - B_u G) & (B_d - B_u G_d) \\ -L_d C_{yx} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} o \\ o_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} L_x \\ L_d \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix} G_r r \quad (13.37a)$$

$$u = -G o - G_d o_d - G_r r \quad (13.37b)$$

con  $G_d$  e  $G_r$  valutati come precedentemente illustrato.

Anche se il funzionamento atteso di tale controllore dovrebbe essere intuibile dalla linearità, leggi sovrapposizione degli effetti, del sistema e del controllore, si suggerisce, prima di proseguire nella lettura, di verificare il tutto per conto proprio, lungo le linee presentate separatamente per tracciamento e disturbi, possibilmente anche in modo più semplice.

Per una semplice verifica della validità del controllore sopra presentato basterà usare il termine  $u_{rd}$  al posto di  $u_d$ , imponendo direttamente il soddisfacimento di  $r = C_r x$ , al posto di  $C_r x = 0$ , scrivendo quindi:

$$r = C_r (A - B_u G)^{-1} B_u u_{rd} - C_r (A - B_u G)^{-1} B_d d = S u_{rd} - S_d d \quad (13.38) \quad \text{tracciamento\_com}$$

al posto della (13.34), da cui, nel caso semplicemente determinato si avrà immediatamente:

$$u_{rd} = S^{-1} r + S^{-1} S_d d = G_r r + G_d d \quad (13.39)$$

Nel caso sottodeterminato dovrebbe essere facile verificare che il problema dell'ottimizzazione di:

$$F = \frac{1}{2} u_r^T W_{rr} u_r + \lambda^T (r + S_d d - S u_r) \quad (13.40)$$

produce le stesse matrici precedentemente riportate. Va quindi da sé che il controllore (13.37) contiene i due parziali, su  $r$  e  $d$ , prima presentati.

Come ulteriore utile esercizio di manipolazione matriciale si provi a estendere quanto presentato, sia in questo paragrafo che nel precedente, a misure e prestazioni semplicemente proprie, cioè contenenti le opportune matrici  $D$ .

### 13.3 Attenuazione disturbi e imposizione uscite desiderate, costanti, mediante controllo ottimo integrale

Riprendendo il discorso relativo a particolari prestazioni a regime,  $r$ , che si vogliono acquisire e mantenere a un valore costante assegnato, anche in presenza di disturbi esterni costanti si potrà ricorrere a un'azione integrale, così come già presentata nel corso di Controlli Automatici della laurea. Supponiamo pertanto di avere il sistema:

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_d d \quad (13.41)$$

$$r = C_r x \quad (13.42)$$

basterà modificarlo aggiungendo degli integratori, il cui stato chiameremo  $s$ , dell'errore delle prestazioni,  $e_r = C_r x - r$ , nel seguente modo:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C_r & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ s \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix} d. \quad (13.43)$$

Assumendo che il sistema, con  $A$  e  $B$  aumentate come sopra, soddisfi i criteri di risolubilità tramite progettazione ottimale o assegnazione dei poli, ottenuta la relativa matrice dei guadagni sullo stato la potremo ritenere partizionata come  $G = \begin{bmatrix} G & G_i \end{bmatrix}$ , per cui il sistema in ciclo chiuso sarà:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B_u G & -B_u G_i \\ C_r & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ s \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix} d. \quad (13.44)$$

controllo\_ottimo

Essendo il sistema controllato asintoticamente stabile, in presenza di un disturbo  $d$  costante, si raggiungerà sicuramente uno stato di regime con:  $\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{s} \end{Bmatrix} = 0$ , da cui si può vedere che, indipendentemente da  $d$ , la condizione  $C_r x = r$  è identicamente soddisfatta. Bisogna però rimarcare immediatamente che perché l'azione integrale sia efficace e robusta, cioè il più possibilmente non legata alla bontà del modello di progetto,  $r$  deve essere misurato e quindi o coincidere con  $C_{yx}$  in toto o esserne un sottoinsieme associato a una particolare partizione delle misure disponibili  $y$ . Ration per cui, chiamando  $P_r$  la relativa matrice di partizione sarà:  $r = P_r y = P_r C_{yx} x = C_r x$ . Rileviamo anche che nei due precedenti paragrafi tale posizione, usualmente comunque verificata, non era assolutamente necessaria, in quanto il tracciamento di  $r$  era ottenuto in ciclo aperto e quindi dipendeva solo dalla bontà del modello. Come noto dai precedenti corsi di controllo tali integratori oltre ad annullare l'effetto di disturbi costanti a regime sarà in grado di attenuare significativamente, agli effetti delle prestazioni desiderate, anche disturbi a relativamente bassa frequenza (a frequenza nulla l'integratore ha un guadagno infinito che decade solo come  $1/s$  all'aumentare della frequenza), essendo il "relativamente" da valutarsi in relazione alla banda passante del sistema in ciclo chiuso.

Precisiamo ulteriormente, senza dimostrazioni<sup>4</sup>, che la condizione di risolubilità in presenza di integratori, indipendentemente dal metodo di progetto adottato per il controllo sugli stati, ad esempio tramite assegnazione dei poli/autovalori, si esplicita nella stabilizzabilità della coppia  $A$ ,  $B_u$  e nella necessità che il rango della matrice  $\begin{bmatrix} A & B_u \\ C_r & 0 \end{bmatrix}$  sia almeno pari al numero di equazioni di  $A$  più il numero di righe di  $C_r$ , che sarà opportuno corrisponda al rango per righe di  $C_r$ . Quest'ultima condizione contiene implicitamente, e ovviamente, anche quella intuitiva che il numero di controlli indipendenti  $u$ , rango per colonne di  $B_u$ , sia maggiore o uguale al numero di integratori indipendenti, rango per righe di  $C_r$ .

Non essendo generalmente disponibile lo stato del sistema, in vista della realizzazione delle equazioni degli integratori nel sistema di controllo tramite un osservatore sarà utile che questo sia esteso alla ricostruzione dei disturbi costanti modellati con la modalità precedentemente illustrata. Si noti inoltre che per una implementazione robusta per l'integratore non si dovrà utilizzare nessuna grandezza osservata. Ripetiamo che per essere quindi in grado di realizzare correttamente l'azione integrale bisognerà misurare le uscite corrispondenti alla tracciatura dei riferimenti desiderati e, come appunto già richiamato, fra le misure  $y$  ci dovrà essere un opportuna partizione di termini,

<sup>4</sup>Si vedano le dispense del corso di controllo della laurea triennale.

$y_r = C_r x$  che permetta di stimare correttamente l'errore di tracciatura,  $y_r - r$ . Si potrà pertanto definire il seguente controllore integrale, esteso coi termini di feedforward:

$$\dot{s} = y_r - r \quad (13.45a)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{o} \\ \dot{o}_d \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} (A - L_x C_{yx} - B_u G) & (B_d - B_u G_d) \\ L_d C_{yx} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} o \\ o_d \end{Bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix} G_r s + \begin{bmatrix} L_x \\ L_d \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix} G_r r \end{aligned} \quad (13.45b)$$

$$u = -G_i s - G o - G_r r - G_d o_d \quad (13.45c)$$

dove  $G_r$  e  $G_d$  sono calcolati come indicato nei precedenti paragrafi, chiaramente con la matrice guadagno di stato  $G$  ottenuta come in (13.44). Si noti che, grazie al controllore integrale sulle vere misure dei riferimenti, i termini in  $G_r$  e  $G_d$  si potrebbero ritenere ridondanti agli effetti del corretto tracciamento in presenza di disturbi costanti. Ciò nonostante noi preferiamo mantenerli in quanto il loro utilizzo è in grado di alleviare l'effetto della sola azione integrale, limitandone il compito alla garanzia di tracciamento a seguito delle imprecisioni insite nei termini di feedforward, permettendo così al controllore una maggiore prontezza di tracciatura e attenuazione dei disturbi. Chiaramente quanto sopra può essere sempre semplificato alla sola azione integrale eliminando, in tutto o in parte, l'equazione di  $o_d$  e i termini contenenti  $G_r$  e  $G_d$ .

Il processo sistema-controllore in ciclo chiuso sarà quindi:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{s} \\ \dot{o} \\ \dot{o}_d \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & -B_u G_i & -B_u G & -B_u G_d \\ C_r & 0 & 0 & 0 \\ L_x C_{yx} & -B_u G_i & (A - L_x C_{yx} - B_u G) & (B_d - B_u G_d) \\ L_d C_{yx} & 0 & -L_d C_{yx} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ s \\ o \\ o_d \end{Bmatrix} \\ &\quad - \begin{Bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \\ B_u \\ 0 \end{bmatrix} G_r r + \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d \end{aligned} \quad (13.46a)$$

Sostituendo, come già più volte visto, a  $o$  l'errore di stima  $e = x - o$ , avremo:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{s} \\ \dot{e} \\ \dot{o}_d \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} (A - B_u G) & -B_u G_i & -B_u G & -B_u G_d \\ C_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (A - L_x C_{yx} - B_u G) & B_d \\ 0 & 0 & -L_d C_{yx} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ s \\ e \\ o_d \end{Bmatrix} \\ &\quad - \begin{Bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} G_r r + \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \\ -B_d \\ 0 \end{bmatrix} d \end{aligned} \quad (13.47a)$$

la cui soluzione asintotica:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} (A - B_u G) & -B_u G_i & -B_u G & -B_u G_d \\ C_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (A - L_x C_{yx} - B_u G) & B_d \\ 0 & 0 & -L_d C_{yx} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ s \\ e \\ o_d \end{Bmatrix} = \\ &\begin{Bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} G_r r - \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \\ -B_d \\ 0 \end{bmatrix} d \end{aligned} \quad (13.48a)$$

produrrà  $e = 0$  e  $o_d = d$ . In tal modo, data la struttura della matrice dei coefficienti del sistema della soluzione asintotica, si vede che i corrispondenti valori di  $x$  e  $s$ , anche se non esattamente come dalla soluzione asintotica del controllo integrale ottimo sullo stato (13.44), a causa del termine  $B_u G_d$ , permettono di soddisfare esattamente la tracciatura asintotica anche in presenza di  $d$ ,



come indicato dalla seconda riga dell'equazione algebrica sopra scritta. Si noti che in tal modo si ottiene la tracciatura delle uscite costanti arbitrarie desiderate in presenza di altrettanto arbitrari disturbi costanti. Va rilevato che il fatto che il termine  $B_u G_d$  impedisca l'esatta equivalenza con la soluzione asintotica ottima sullo stato della (13.44) non deve essere visto negativamente se, grazie ad esso, viene migliorata la prestazione di tracciatura. Dall'analisi sopra fatta viene quindi confermata anche la precedentemente menzionata possibilità di omissione totale o parziale dei termini di feedforward, che devono essere pertanto visti come dei possibili e utili strumenti di miglioramento del progetto. Se infatti ricordiamo che  $e = 0$ , quindi  $x = o$ , e  $o_d = d$ , e ricaviamo  $x$  dalla prima delle (13.48), otteniamo:

$$x = (A - B_u G)^{-1} (B_u G_i s + B_u G_d d + B_u G_r r - B_d d) \quad (13.49)$$

che sostituita nella  $r = C_r x$  darà:

$$r = C_r (A - B_u G)^{-1} (B_u G_i s + B_u G_r r + (B_u G_d - B_d) d) \quad (13.50)$$

$$= S G_i s + S G_r r + S G_d d - S_d d = S G_i s + S u_{rd} - S_d d \quad (13.51)$$

che, ricordando la (13.38), dà  $S G_i s = 0$ . Essendo  $S G_i$  non singolare, altrimenti non sarebbe asintoticamente stabile il controllo ottimo integrale sullo stato, cosa che invece sappiamo essere garantita, avremo  $s = 0$ . In tale modo si vede che l'integrale dell'errore di tracciatura è nullo nel caso dell'anticipazione di  $r$  e stima di  $d$  perfette. La cosa è chiaramente impossibile ma in tal modo viene demandato all'azione integrale solo l'effetto di correzione delle imprecisioni di modello, giustificando così i precedentemente menzionati vantaggi.

Infine, ancora una volta come utile esercizio di manipolazione matriciale, si provi ad estendere lo sviluppo ad una prestazione non strettamente propria, cioè contenente  $D$ .

Con riferimento ai controllori, e.g. (13.37) e (13.45), notiamo che in caso di riduzione del loro ordine con le metodologie suggerite nel seguito, ai fini di una economizzazione della realizzazione, sarà essenziale evitare un semplice troncamento ma procedere alla loro residualizzazione. In tal modo si garantirà il corretto recupero della risposta in continua, essenziale per non invalidare le soluzioni asintotiche atte al corretto annullamento di disturbi e tracciatura di riferimenti costanti. Inoltre per la (13.45) bisognerà mantenere inalterate le equazioni degli integrali, residualizzando solo quelle relative a  $o$  e  $o_d$ , ossia il blocco:  $\begin{bmatrix} (A - L_x C_{yx} - B_u G) & (B_d - B_u G_d) \\ -L_d C_{yx} & 0 \end{bmatrix}$ , a meno del termine  $-B_u G_d$ , comune alle (13.37). Come riferimento per l'accettabilità di un certo livello di riduzione si potrà utilizzare un opportuno confronto fra la matrice di trasferimento originale:

$$G \left( sI - \begin{bmatrix} (A - L_x C_{yx} - B_u G) & B_d \\ -L_d C_{yx} & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} L_x \\ L_d \end{bmatrix} \quad (13.52)$$

e la sua equivalente ridotta. Così nel caso scalare si potranno confrontare i moduli delle relative funzioni di trasferimento, confronto che potrà essere sostituito dai relativi valori singolari nel caso multivariabile.

Per ogni altra struttura dei controllori presentati si potrà agire in analogia con quanto appena suggerito.

Non dovrà poi mancare l'usuale estesa serie di verifiche necessarie sulla realizzazione completa in ciclo chiuso, ossia includente: modello di verifica sistema con estensione degli stati, controllore ridotto, dinamiche sensori e attuatori con relative saturazioni, altre possibili non linearità, realizzazione controllore. In relazione alla realizzazione del controllore notiamo che, prendendo ad esempio la (13.45), non è detto che la si debba utilizzare esattamente come presentata. Infatti la rappresentazione data assume una completa linearità ed è pertanto estremamente utile per tutti gli sviluppi su fatti. Nella realtà il termine integrale, sempre attivo anche in fase di transitorio, può tendere a crescere indebitamente saturando, da solo, il controllo con conseguente comportamento non lineare del sistema. Spesso poi, anche senza che si ingenerino instabilità, la possibile successiva desaturazione può portare ad un allungamento del transitorio e alla produzione di eccessive sovraelongazioni. Inoltre, anche in assenza di veri e propri integratori, il controllore-osservatore presenta sempre poli lenti e, spesso, anche instabili, che possono anch'essi causare saturazioni degli attuatori, anche per solo relativamente brusche variazioni di comando. Tali saturazioni, siano esse

associate agli integratori o all'osservatore, vanno esplicitamente tenute in conto nella realizzazione del controllore complessivo, mai comandare le uscite di controllo con i valori ottenuti senza effettuare tale verifica, e può anche essere causa di instabilità e cicli limite, come già detto creando, anche senza arrivare a tal punto, problemi a causa di successive desaturazioni, ossia recupero del funzionamento lineare, troppo lente. Il problema si chiama in gergo "windup" e può essere causato dal fatto che le scritture presentate non tengono affatto conto di tali saturazioni. Il problema del windup è ampiamente trattato nella letteratura, dalla quale si possono evincere una pletora di possibili soluzioni,<sup>5</sup>, forse anche già visto nei corsi di controllo precedentemente seguiti.

## 13.A Riduzione dell'ordine di un sistema lineare, con un po' di praticaccia sull'uso di autosoluzioni

Vogliamo brevemente generalizzare le tecniche di condensazione modale utilizzate per la riduzione di sistemi elastodinamici agli usuali sistemi lineari tempo invarianti:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \qquad (13.53)$$

Si tratterà quindi di ridurre l'ordine sulla base del loro contenuto in frequenza, mantenendo l'intera dinamica di un opportuno sottospazio dello stato caratterizzato dai soli autovalori di interesse, scartando poi la parte rimanente mediante un semplice troncamento del modello, oppure recuperandola quasi stazionariamente fino ad un ordine assegnato attraverso una residualizzazione dinamica opportuna. Quest'ultima opzione sarà facilmente interpretabile come una generalizzazione estesa dell'accelerazione dei modi vista per i sistemi elastomeccanici. In tale visione facciamo inoltre notare che una possibile totale residualizzazione della dinamica del sistema altro non sarebbe che la sua approssimazione quasi stazionaria, già utilizzata per la giustificazione dello smorzamento proporzionale a partire dalla dinamica viscoelastica e che sarà ripresa in aeroelasticità per una analoga approssimazione delle forze aerodinamiche instazionarie dovute al moto strutturale, alle raffiche e alla turbolenza<sup>6</sup>. Ricordando che la riduzione basata sul contenuto in frequenza del sistema richiede la separazione fra una parte dello stato, supposta lenta, e la sua parte veloce, notiamo anche che se tale separazione può essere alcune volte determinata direttamente tramite un'opportuna definizione delle componenti dello stato, nel caso elastomeccanico di fatto delle coordinate libere che lo generano, sulla base di considerazioni e/o intuito sulla fisica del problema, tale approccio non è generalmente possibile per sistemi appena un po' complessi. Analogamente a quanto già visto nel caso elastomeccanico sarà pertanto giocoforza basare la nostra riduzione su una rappresentazione dello stato che permetta di stabilire facilmente il contenuto lento-veloce in frequenza riconducendosi a una rappresentazione spettrale del nostro sistema.

### Decomposizione spettrale

Come ben sappiamo tale approccio richiede la determinazione della matrice  $\mathbf{X}$  degli autovettori, semplici e generalizzati, quest'ultimi, come noto, associati ad autovalori con molteplicità algebrica diversa da quella geometrica. Applicando quindi una trasformazione di stato basata su  $\mathbf{x} = \mathbf{X} \mathbf{w} = [\mathbf{X}_l \quad \mathbf{X}_v] \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_l \\ \mathbf{w}_v \end{Bmatrix}$ , con le autosoluzioni ordinate in modo da presentare per prime quelle associate agli autovalori di modulo più basso, che indicheremo col pedice  $l$ , lento, seguite da tutte le altre, con pedice  $v$ , veloce, avremo:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{w}}_l \\ \dot{\mathbf{w}}_v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_l \\ \mathbf{w}_v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_l \\ \mathbf{G}_v \end{bmatrix} \mathbf{u} \qquad \mathbf{y} = [\mathbf{H}_l \quad \mathbf{H}_v] \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_l \\ \mathbf{w}_v \end{Bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u} \qquad (13.54)$$

<sup>5</sup>Per una presentazione operativa un po' più estesa, utile anche se non recentissima, ci si potrà riferire a: Astrom, Wittenmark, Computer Controlled Systems, Theory and Design, Prentice-Hall, 1984; M. V. Kothare, P. J. Campo, M. Morari, C. N. Nett, A unified framework for the study of anti-windup designs, Vol. 30, n. 12, Dec. 1994, pp. 1869-1883 (disponibile anche come CALTECH-TM-CIT-CDS-93.011).

<sup>6</sup>Per un ripasso sull'approssimazione quasi stazionaria delle equazioni di stato si può proficuamente rivedere la dispensa del corso di Dinamica dei Sistemi Aerospaziali

con:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_l = (\mathbf{X}^{-1})_l \mathbf{A} \mathbf{X}_l \\ \mathbf{G}_l = (\mathbf{X}^{-1})_l \mathbf{B} \\ \mathbf{H}_l = \mathbf{C} \mathbf{X}_l \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{F}_v = (\mathbf{X}^{-1})_v \mathbf{A} \mathbf{X}_v \\ \mathbf{G}_v = (\mathbf{X}^{-1})_v \mathbf{B} \\ \mathbf{H}_v = \mathbf{C} \mathbf{X}_v \end{cases} \quad (13.55)$$

In considerazione della possibile presenza di autosoluzioni multiple aventi diversa molteplicità algebrica e geometrica chiameremo la struttura diagonale, scalare e con blocchi di Jordan  $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$ ,

lenta-veloce così ottenuta col termine: forma di Jordan, mentre il corrispondente procedimento si definirà di “Jordanizzazione”. Naturalmente tale nomenclatura contiene anche la più semplice forma totalmente diagonale, con il corrispondente procedimento di diagonalizzazione. Va da sé che la separazione lenta-veloce non deve separare né possibili autosoluzioni multiple né alcuna coppia complessa e coniugata, che riterremo sempre consecutive sia nell’ordinamento degli autovalori che delle corrispondenti colonne di  $\mathbf{X}$ . Quindi, tutti gli autovalori nello stesso semipiano complesso che hanno un modulo che li qualifica come lenti o veloci devono stare o da una parte o dall’altra<sup>7</sup>.

La riduzione per semplice troncamento sarà allora data da:

$$\dot{\mathbf{w}}_l = \mathbf{F}_l \mathbf{w}_l + \mathbf{G}_l \mathbf{u} \quad \mathbf{w}_v = 0 \quad \mathbf{y} = \mathbf{H}_l \mathbf{w}_l + \mathbf{D} \mathbf{u} \quad (13.56)$$

mentre la residualizzazione dinamica di ordine  $n$  si otterrà derivando  $n$  volte la parte veloce rispetto al tempo e, indicando con  $^{(i)}$  la derivata  $i$ -esima rispetto al tempo, ponendo  $\mathbf{w}_v^{(n+i)} = 0$ . In tal modo, sostituendo all’indietro in tutte le derivate di ordine inferiore la derivata  $i$ -esima così ottenuta, si potranno eliminare tutte le derivate di ordine inferiore a  $n$ , arrivando a:  $\mathbf{w}_v = -\sum_{i=0}^n \mathbf{F}_v^{-(i+1)} \mathbf{G}_v \mathbf{u}^{(i)}$ . Pertanto la residualizzazione dinamica di ordine  $n$  sarà:

$$\dot{\mathbf{w}}_l = \mathbf{F}_l \mathbf{w}_l + \mathbf{G}_l \mathbf{u} \quad \mathbf{w}_v = -\mathbf{F}_v^{-1} \mathbf{G}_v \mathbf{u} - \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_v^{-(i+1)} \mathbf{G}_v \mathbf{u}^{(i)} \quad (13.57)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}_l \mathbf{w}_l + (\mathbf{D} - \mathbf{H}_v \mathbf{F}_v^{-1} \mathbf{G}_v) \mathbf{u} - \mathbf{H}_v \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_v^{-(i+1)} \mathbf{G}_v \mathbf{u}^{(i)} \quad (13.58)$$

Si noti che si è messo in evidenza il termine zero della sommatoria in modo da enfatizzare la semplice condensazione statica che, come già visto, nel caso elastomeccanico corrisponde all’accelerazione dei modi. Va anche rimarcato che, se si vuole evitare la presenza di termini impulsivi con le loro derivate sulle uscite<sup>8</sup>, la residualizzazione dinamica richiede una adeguata regolarità dell’ingresso  $\mathbf{u}$ . Di fatto spesso una residualizzazione di ordine superiore a quella statica può risultare assai utile nel caso in cui il sistema debba essere accoppiato con altri, come nel caso che vedremo in aeroelasticità. Naturalmente se si desiderasse recuperare lo stato fisico iniziale basterà ricordare la:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} \mathbf{w} = [\mathbf{X}_l \quad \mathbf{X}_v] \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_l \\ \mathbf{w}_v \end{Bmatrix} \quad (13.59)$$

Una riduzione basata sullo spettro delle autosoluzioni porta però a una serie di problematiche operative di cui alcune, quelle associate ad autosoluzioni complesse e coniugate, facilmente risolvibili, mentre altre, autovalori molto vicini o coincidenti e blocchi di Jordan, porteranno a suggerire, o perfino preferire, la scelta di un metodo di riduzione alternativo. Iniziando con la prima è infatti facile constatare che se  $\mathbf{X}$  contiene colonne complesse e coniugate tali saranno i termini diagonali

<sup>7</sup>Si tratta di ‘o’ esclusivi

<sup>8</sup>In particolare, per le forzanti vere e proprie,  $\mathbf{u}$  potrebbe anche essere un insieme di uscite di sottosistemi accoppiati con quello che vogliamo residualizzare, ricordiamo che in relazione alla regolarità di forzanti deterministiche possiamo sopportare senza problemi residualizzazioni dinamiche di ordine tale da produrre al più impulsi temporali, che sappiamo manipolare come variazioni di condizioni iniziali. Per ingressi stocastici l’ordine della residualizzazione accettabile senza particolari problemi dipenderà invece dall’andamento asintotico della densità spettrale di potenza, in quanto in generale le derivazioni di  $\mathbf{u}$  non dovranno eccedere la generazione di densità spettrali di potenza, si ricordi la  $\Phi_{u^{(i)}u^{(i)}} = \omega^{2i} \Phi_{uu}$ , al più asintoticamente costanti, pena l’inaccettabile derivazione del rumore bianco.

delle  $\mathbf{F}$ , le righe delle  $\mathbf{G}$  e le colonne delle  $\mathbf{H}$ . Ora, se il maggior onere computazionale associato alla necessità di operare con numeri complessi nella soluzione dei problemi di risposta è in parte ovviabile integrando solo ogni singolo stato complesso e coniugandone il risultato, la stessa cosa non si può dire per molte altre operazioni, ad esempio la progettazione di sistemi di controllo e la loro realizzazione. Pertanto, anche se la presenza di autosoluzioni complesse e coniugate non porta nessun impedimento di principio alla condensazione modale, risulta estremamente opportuno cercare di evitare la stranezza di trovarsi a operare con ingressi reali che generano stati complessi e coniugati e con relazioni di uscita a matrici complesse che li ricombinano in modo da produrre tutte le risposte di interesse in termini di numeri reali. Sarà quindi opportuno cercare di ricombinare lo stato modale tramite trasformazioni che portino a operare con sistemi definiti temporalmente nel campo dei soli numeri reali.

1. <sup>9</sup> Considerando due generiche colonne di  $\mathbf{X}$  associate a una coppia di possibili autosoluzioni complesse e coniugate, come già detto da affiancare nell'ordinamento delle autosoluzioni, si esemplificano le stesse come:

$$\mathbf{X} = [\dots | \quad | \quad \dots \quad (\boldsymbol{\Sigma} + j\boldsymbol{\Omega}) \quad (\boldsymbol{\Sigma} - j\boldsymbol{\Omega}) \quad \dots \quad | \quad | \dots]$$

con  $j = \sqrt{-1}$ . In tal modo si può banalmente verificare che i due autovettori complessi e coniugati, semplici o generalizzati, si possono leggere come banali combinazioni di  $\boldsymbol{\Sigma}$  e  $\boldsymbol{\Omega}$ , per cui la base di trasformazione non perderebbe nulla se si usasse la più semplice seguente trasformazione reale:

$$\mathbf{X} = [\dots | \quad | \quad \dots \quad \boldsymbol{\Sigma} \quad \boldsymbol{\Omega} \quad \dots \quad | \quad | \dots]$$

Nell'intraprendere tale scelta sarà però anche utile verificarne l'effetto sulla Jordanizzazione ad essa associata. Allo scopo è facile constatare che la trasformazione:  $\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} 1/2 & -j/2 \\ 1/2 & +j/2 \end{bmatrix}$ , permette di scrivere:

$$[\boldsymbol{\Sigma} \quad \boldsymbol{\Omega}] = [(\boldsymbol{\Sigma} + j\boldsymbol{\Omega}) \quad (\boldsymbol{\Sigma} - j\boldsymbol{\Omega})] \mathbf{T}_r$$

In tal modo si può altrettanto facilmente vedere che definendo la nuova matrice di trasformazione:

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{X} \mathbf{T} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \mathbf{T}_r & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mathbf{T}_r & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

con i blocchi due per due di  $\mathbf{T}$  associati alla posizione degli autovettori, semplici o generalizzati, complessi e coniugati, la nuova matrice di stato trasformata,  $\mathbf{F}_n$ , sarà data da:

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{X}_n^{-1} \mathbf{A} \mathbf{X}_n = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma + j\omega & 0 & \\ & & & 0 & \sigma - j\omega & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{T}$$

---

<sup>9</sup>Per tutto quanto segue si veda programmino dimostrativo nella bacheca didattica (per ScicosLab).

da cui si evince che ciascuna coppia di autovalori complessi e coniugati risultanti dall'uso di  $\mathbf{X}$  viene assoggettata alla ulteriore trasformazione:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -j/2 \\ 1/2 & j/2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -j/2 \\ 1/2 & j/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

Con facile induzione è possibile verificare che con operazioni matriciali altrettanto semplici, ma un po' più lunghe e noiose, si può ottenere un'analoga struttura a blocchi diagonali pseudoantisimmetrici due per due anche per i blocchi di Jordan. Infatti, esemplificando con una coppia di blocchi associati a due soluzioni complesse e coniugate coincidenti, gli associati blocchi di Jordan sarebbero:

$$\begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + j\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - j\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix}$$

che, per produrre il necessario affiancamento a coppie complesse e coniugate, devono però essere riorganizzati come:

$$\begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix}$$

In tal modo sarà facile verificare la seguente:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{j}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{j}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{j}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{j}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{j}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{j}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

Da quanto sopra dovrebbe essere facile indurre come si trasformano i blocchi di Jordan più estesi. In conclusione utilizzando le parti reali e immaginarie degli autovalori si sostituiscono le coppie complesse e coniugate, affiancate e puramente diagonali, con blocchi diagonali pseudoantisimmetrici due per due del tipo:  $\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$ .

2. Una volta stabilita la regola precedente sull'uso delle parti reali e immaginarie di soluzioni complesse diventa facile utilizzare altre forme di blocchetti due per due.

Così si potrebbe verificare che sostituendo la coppia di colonne:  $[(\mathbf{\Sigma} - \sigma/\omega\mathbf{\Omega}) \quad 1/\omega\mathbf{\Omega}]$  a  $[\mathbf{\Sigma} \quad \mathbf{\Omega}]$  si otterrà il blocco canonico due per due di raggiungibilità-controllabilità:

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\sigma^2 + \omega^2) & 2\sigma \end{bmatrix}$ . Si noti che qualora la parte della matrice degli ingressi avesse una struttura del tipo  $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * \end{bmatrix}$ , tale blocchetto corrisponderebbe a un'equazione differenziale del

second'ordine:  $\ddot{w} - 2\sigma\dot{w} + (\sigma^2 + \omega^2)w = [* \cdots *]\mathbf{u}$ . Ossia non sarebbe niente altro che la più semplice e naturale strutturazione diagonale che utilizzeremmo per mettere agli stati reali le condensazioni modali elastomeccaniche. Va evidenziato che quanto sopra è facilmente deducibile assumendo la risultante forma di raggiungibilità come quella desiderata, per la quale gli autovalori sono dati da  $\sigma \pm j\omega$  e a cui corrispondono gli autovettori:  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (\sigma + j\omega) & (\sigma - j\omega) \end{bmatrix}$ .

Sappiamo ora che per produrre un blocchetto pseudoantisimmetrico due per due basterà usare la trasformazione associata alla sola parte reale e immaginaria del primo:  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & \omega \end{bmatrix}$  di cui,

volendo invece passare dal blocchetto pseudoantisimmetrico due per due alla forma di raggiungibilità, dovremo calcolare l'inversa per applicarla alla coppia reale  $\Sigma - \Omega$ . Tale inversa può essere scritta come:  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sigma/\omega & 1/\omega \end{bmatrix}$ , da cui:  $\begin{bmatrix} \Sigma & \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sigma/\omega & 1/\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Sigma - \sigma/\omega\Omega) & 1/\omega\Omega \end{bmatrix}$ , ossia quanto presentato precedentemente.

Analogamente usando  $\begin{bmatrix} (\Sigma + \sigma/\omega\Omega) & 1/\omega\Omega \end{bmatrix}$  al posto di  $\begin{bmatrix} \Sigma & \Omega \end{bmatrix}$  si otterrà il blocco canonico due per due di osservabilità-ricostruibilità:  $\begin{bmatrix} 2\sigma & 1 \\ -(\sigma^2 + \omega^2) & 0 \end{bmatrix}$ .

Due ulteriori possibili scelte, con una qualche struttura significativa, si possono ricavare per semplice scambio delle due colonne reali degli autovettori, ottenendo che:

- $\begin{bmatrix} 1/\omega\Omega & (\Sigma - \sigma/\omega\Omega) \end{bmatrix}$  produce il blocchetto due per due:  $\begin{bmatrix} 2\sigma & -(\sigma^2 + \omega^2) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .
- $\begin{bmatrix} 1/\omega\Omega & (\Sigma + \sigma/\omega\Omega) \end{bmatrix}$  produce il blocchetto due per due:  $\begin{bmatrix} 0 & -(\sigma^2 + \omega^2) \\ 1 & 2\sigma \end{bmatrix}$ .

## Decomposizione di Schur

Come già enfatizzato più volte, nel caso in cui ci siano autovalori con molteplicità geometrica diversa da quella algebrica, la matrice  $\mathbf{A}$  non è più diagonalizzabile, ma conterrà alcuni blocchi diagonali nella forma di Jordan. A ciascun autovalore di una data molteplicità algebrica corrisponderanno tanti sottoblocchi di Jordan quanti sono gli autovettori linearmente indipendenti associati all'autovalore multiplo trovato. È però difficile stabilire quale sia la forma corretta tra tutte le possibili forme di Jordan. Ad esempio a una molteplicità algebrica di 5 con 3 autovettori, potranno corrispondere combinazioni di blocchi di Jordan di ordine: 1,1,3; 2,2,1; ..., di incerta determinazione numerica. Problematico è spesso anche il caso in cui gli autovalori non siano ben separati tra loro, con la conseguente difficoltà nel calcolare i corrispondenti autovettori necessari per la diagonalizzazione. In questi casi si preferisce evitare la decomposizione spettrale come metodo per la riduzione dell'ordine del sistema dinamico, preferendo un qualsiasi possibile approccio alternativo che permetta di determinare sottospazi, anche non diagonalizzati, ma sicuramente associabili agli autovalori lenti e veloci. Per un tale approccio si può sfruttare la decomposizione ordinata e reale di Schur, che consente sempre la riduzione dell'ordine del sistema sulla base del suo contenuto in frequenza, evitando però il calcolo degli autovettori. Essa porta la matrice  $\mathbf{A}$  in una forma quasi-triangolare superiore, con una diagonale costituita dagli autovalori reali di  $\mathbf{A}$  e da blocchi a coefficienti reali 2x2 attorno alla diagonale, caratterizzanti gli autovalori complessi coniugati di  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{U}^T \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \cdots & * \\ 0 & 0 & \gamma & \delta & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

dove la matrice  $\mathbf{U}$  è ortonormata,  $\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$ . Per problemi dell'ordine di centinaia, o anche di poche migliaia di equazioni, l'attuale potenza di calcolo dei comuni calcolatori personali permette generalmente una efficiente determinazione numerica di  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{S}$  tramite la solita iterazione QR. Sarà anche utile ricordare che il passaggio alla forma di Schur è comunque il metodo più usuale di calcolo degli autovalori, mentre i corrispondenti autovettori vengono calcolati tramite il metodo delle potenze inverse, con spostamento dell'origine in prossimità di una piccola perturbazione degli autovalori disponibili, o sulla forma di Schur stessa o su una precedente condensazione intermedia di Hessenberg, riportandoli poi allo spazio originario applicando loro la trasformazione di similarità usata per ottenere Hessenberg-Schur. Si noti che lo spostamento dell'origine è fatto per accelerare la convergenza e porta a un costo proporzionale al quadrato dell'ordine della matrice, grazie all'uso delle forme di Hessenberg-Schur. La perturbazione dell'autovalore serve invece sia ad evitare una singolarità per le potenze inverse che una convergenza ripetuta sempre sullo stesso autovettore nel

caso di molteplicità algebriche e geometriche giudicate numericamente coincidenti, ossia non associate a blocchi di Jordan. Nel caso di blocchi di Jordan la situazione può invece ritenersi disperata, se non nei casi particolari per cui si sa a priori cosa si deve ottenere<sup>10</sup>. Si vede quindi che di fatto, non dovendo calcolare gli autovettori, la forma di Schur ordinata può risultare più efficiente della completa e difficoltosa Jordanizzazione. La perdita della diagonalizzazione, quasi diagonalizzazione, che ne consegue non è grave. Si ricordi infatti che quello che ci serve è primariamente una riduzione efficiente dell'ordine del sistema sulla base del suo spettro. Va inoltre considerato il fatto che molto spesso su tale sistema ridotto finiremo comunque col perdere la Jordanizzazione, ad esempio per l'attivazione di controlli o per l'aggiunta di altri sottosistemi dinamici, vedi il caso aeroelastico. Pertanto l'unica cosa importante è la possibilità di una determinazione ordinata della  $\mathbf{S}$ , in grado cioè di posizionare tutti gli autovalori di interesse associati nel suo blocco quasi triangolare posto in alto a sinistra. In tal modo, in completa similarità con quanto fatto con autovettori e autovettori generalizzati, sarà possibile trasformare il sistema lineare nelle nuove variabili di stato,  $\mathbf{z}$ , attraverso la trasformazione  $\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{z} = [\mathbf{U}_l \quad \mathbf{U}_v] \begin{Bmatrix} \mathbf{z}_l \\ \mathbf{z}_v \end{Bmatrix}$ , ottenendo:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_l \\ \dot{\mathbf{z}}_v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_l & \mathbf{F}_{lv} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{z}_l \\ \mathbf{z}_v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_l \\ \tilde{\mathbf{G}}_v \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_l & \tilde{\mathbf{H}}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{z}_l \\ \mathbf{z}_v \end{Bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (13.60)$$

con:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_l = \mathbf{U}_l^T \mathbf{A} \mathbf{U}_l & \mathbf{F}_{lv} = \mathbf{U}_l^T \mathbf{A} \mathbf{U}_v & \mathbf{F}_v = \mathbf{U}_v^T \mathbf{A} \mathbf{U}_v \\ \tilde{\mathbf{G}}_l = \mathbf{U}_l^T \mathbf{B} & \tilde{\mathbf{G}}_v = \mathbf{U}_v^T \mathbf{B} & \\ \tilde{\mathbf{H}}_l = \mathbf{C} \mathbf{U}_l & \tilde{\mathbf{H}}_v = \mathbf{C} \mathbf{U}_v & \end{cases} \quad (13.61)$$

Ancora una volta enfatizziamo che, a causa della sua associazione agli autovalori del triangolo superiore di  $\mathbf{S}$ , la sola  $\mathbf{U}_l$  ricopre solamente il sottospazio degli autovettori, semplici e generalizzati,  $\mathbf{X}_l$ . Infatti, a causa della presenza della  $\mathbf{F}_{lv}$ ,  $\mathbf{U}_v$  contiene componenti della  $\mathbf{X}$  tutta. È quindi essenziale utilizzare un metodo di Schur capace di forzare l'ordinamento richiesto.

Come si vede, la forma di Schur non consente in maniera immediata di disaccoppiare il sottospazio della dinamica che vogliamo mantenere dal sottospazio della dinamica che vogliamo troncare o residualizzare. Da questo punto di vista la Jordanizzazione spettrale è migliore ma, come richiamato molte volte, la presenza di autovalori poco separati o coincidenti rende il calcolo degli autovettori, semplici e generalizzati, problematico. Inoltre  $\mathbf{S}$  non presenta lo svantaggio, come abbiamo visto rimediabile, di produrre di primo acchito matrici di stato e degli ingressi a coefficienti complessi coniugati. D'altra parte la questione di non separabilità dei sottospazi è risolvibile attraverso un'ulteriore trasformazione di similarità, che conduce alla forma di Schur modificata, diagonale a blocchi. Infatti applicando al sistema ridotto a  $\mathbf{S}$  un'ulteriore trasformazione di stato del tipo:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{z}_l \\ \mathbf{z}_v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_l \\ \mathbf{w}_v \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

avremo:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{w}}_l \\ \dot{\mathbf{w}}_v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_l & \mathbf{F}_l \mathbf{T} - \mathbf{T} \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_{lv} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_l \\ \mathbf{w}_v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_l - \mathbf{T} \tilde{\mathbf{G}}_v \\ \tilde{\mathbf{G}}_v \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_l & \tilde{\mathbf{H}}_l \mathbf{T} + \tilde{\mathbf{H}}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_l \\ \mathbf{w}_v \end{Bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Si può così vedere che per disaccoppiare  $\mathbf{w}_l$  da  $\mathbf{w}_v$  basterà determinare  $\mathbf{T}$  risolvendo la seguente equazione matriciale lineare di Sylvester:

$$\mathbf{F}_l \mathbf{T} - \mathbf{T} \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_{lv} = \mathbf{0}$$

Senza dimostrazione riportiamo che la soluzione  $\mathbf{T}$  di tale equazione esiste ed è unica nel momento in cui le matrici  $\mathbf{F}_l$  e  $\mathbf{F}_v$  non hanno autovalori in comune, come è appunto nel nostro caso. Dunque,

<sup>10</sup>Si provi a calcolare con ScicosLab-Octave-Matlab le autosoluzioni della semplice:  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$



anticipando le seguenti definizioni:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_l \\ \mathbf{G}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_l - \mathbf{T}\tilde{\mathbf{G}}_v \\ \tilde{\mathbf{G}}_v \end{bmatrix} \quad [\mathbf{H}_l \quad \mathbf{H}_v] = [\tilde{\mathbf{H}}_l \quad \tilde{\mathbf{H}}_l\mathbf{T} + \tilde{\mathbf{H}}_v]$$

si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{w}}_l \\ \dot{\mathbf{w}}_v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_l \\ \mathbf{w}_v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_l \\ \mathbf{G}_v \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = [\mathbf{H}_l \quad \mathbf{H}_v] \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_l \\ \mathbf{w}_v \end{Bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

la cui struttura, come prontamente evidenziato dal mantenimento degli stessi simboli finali, a parte la forma dei sottoblocchi diagonali della matrice di stato, è la stessa di quella basata sulla Jordanizzazione precedentemente illustrata. La qual cosa è anche più facilmente evidenziata notando che si può arrivare direttamente alla forma finale combinando la trasformazione di Schur con quella che porta alla sua diagonalizzazione a blocchi, in modo da generare un'unica trasformazione di stato che, rappresentandola ancora con la  $\mathbf{X}$ , si otterrà alla fine dei seguenti passaggi:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{U}_l \quad \mathbf{U}_v] \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_l \\ \mathbf{w}_v \end{Bmatrix} = [\mathbf{U}_l \quad \mathbf{U}_l\mathbf{T} + \mathbf{U}_v] \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_l \\ \mathbf{w}_v \end{Bmatrix} = [\mathbf{X}_l \quad \mathbf{X}_v] \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_l \\ \mathbf{w}_v \end{Bmatrix} = \mathbf{X}\mathbf{w}$$

Pur non essendo più  $\mathbf{X}$  la matrice degli autovettori, bisogna però ora notare che  $\mathbf{X}_l$  e  $\mathbf{X}_v$  ricoprono comunque esattamente i sottospazi degli autovettori associati, rispettivamente, agli autovalori lenti e veloci. Pertanto l'unica differenza che quest'ultima  $\mathbf{X}$  ha con la precedente è la sua incapacità di Jordanizzare i sottoblocchi  $\mathbf{F}_l$  e  $\mathbf{F}_v$ , lasciandoli nella loro forma di Schur originaria. Possiamo quindi concludere asserendo che nulla vi è da aggiungere sulla riduzione-residualizzazione a partire dalla forma di Schur diagonalizzata a blocchi come sopra riportato. Basterà infatti riutilizzare quanto precedentemente detto per la forma Jordanizzata.

Per finire può essere interessante notare come la decomposizione di Schur e la tecnica di disaccoppiamento presentata possano essere ulteriormente sfruttate per quasi diagonalizzare la  $\mathbf{S}$ , arrivando a una struttura diagonale con piccoli sottoblocchi diagonali in forma di Schur, che ci permetteremo di chiamare simil o quasi Jordan, o semplicemente quasi Jordanizzata. Infatti poiché il problema della decomposizione spettrale Jordanizzata è collegato essenzialmente al calcolo degli autovettori relativi ad autovalori con molteplicità algebrica maggiore di uno o poco e mal separati, possiamo sfruttare la diagonalizzabilità degli autovalori ben separati, raggruppandoli in alto a sinistra grazie alla capacità di ottenere una forma di Schur ordinata a piacimento, applicando poi la trasformazione di disaccoppiamento, tramite soluzione dell'associata equazione di Sylvester, in modo da disaccoppiare tutti gli autovalori singoli e ben separati da quelli multipli o molto vicini. In altre parole, ordinando la  $\mathbf{S}$  in modo da avere gli autovalori ben separati da una parte e gruppi di autovalori poco separati o coincidenti dall'altra, possiamo applicare più volte la trasformazione utilizzata in precedenza per disaccoppiare i suddetti vari gruppi di autovalori, ottenendo così un primo disaccoppiamento del tipo  $\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}$  con  $\mathbf{P}_1$ , matrice quasi-triagonale di Schur superiore, caratterizzata dagli autovalori di  $\mathbf{S}$  ben separati, mentre la matrice  $\mathbf{P}_2$ , avente la stessa struttura di  $\mathbf{P}_1$ , conterrà i gruppi di autovalori poco separati tra loro o gruppi di autovalori coincidenti. Proseguendo con un procedimento analogo sulla matrice  $\mathbf{P}_2$  si potrà applicare più volte la trasformazione che permette di disaccoppiare i suoi vari sottospazi, in modo da ottenere una matrice trasformata diagonale a blocchi di Schur più piccoli, blocchi che saranno in numero pari al numero di gruppi con cui è stato suddiviso lo spettro di  $\mathbf{P}_2$ , ottenendo:

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{P}}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{P}}_n & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \tilde{\mathbf{P}}_n \end{bmatrix}$$

con  $\tilde{\mathbf{P}}_i$  matrici quasi-triagonali superiori di Schur. Poiché  $\mathbf{P}_1$  contiene autovalori ben separati, si potrà procedere tranquillamente alla sua diagonalizzazione attraverso il calcolo dei suoi autovettori,



mentre le matrici  $\tilde{\mathbf{P}}_i$  saranno mantenute come sono, in quanto caratterizzate da autovalori poco separati o coincidenti, con le relative colonne della matrice finale di trasformazione che copriranno comunque il sottospazio dei relativi autovettori semplici e generalizzati. In tal modo si finirà con l'avere una matrice trasformata con una struttura del tipo:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{\mathbf{P}}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \tilde{\mathbf{P}}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \tilde{\mathbf{P}}_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \tilde{\mathbf{P}}_n \end{bmatrix}$$

con il risultato di sostituire possibili blocchi di Jordan associati ad autovalori coincidenti con corrispondenti forme di Schur, da cui il termine quasi Jordanizzazione <sup>11</sup>.

### Breve commento operativo finale

La riduzione dell'ordine sulla base della separazione spettrale lenta-veloce alcune volte deve essere modificata per tener conto delle parti instabili, o solo semplicemente stabili, del sistema, parti che possono, evidentemente, essere né troncate né residualizzate. Pertanto sarà necessario includere nella cosiddetta parte lenta anche ogni parte instabile o semplicemente stabile del sistema. Una tale opzione è sicuramente garantita dalla possibilità di ordinamento e separazione dei relativi sottospazi, sia tramite Jordanizzazione che quasi Jordanizzazione, al livello desiderato, tramite forma di Schur e successivo(i) disaccoppiamento(i). Pertanto potremmo dare sempre per certo che ogni sottospazio instabile o semplicemente stabile dello stato venga incluso nella matrice  $\mathbf{F}_l$ , con l'ulteriore sicurezza di poter ulteriormente disaccoppiarvi la parte instabile o semplicemente stabile dalla parte asintoticamente stabile lenta.

## 13.B Richiami di raggiungibilità-controllabilità e osservabilità-rilevabilità

Lo scopo di questa appendice è quello di richiamare i concetti attinenti al suo titolo, riprendendo quanto già noto e complementandolo con ulteriori aspetti, di interesse sia concettuale che operativo, così da rendere possibile, qualora fosse necessario, un rapido e, per quanto possibile, semplice ripasso/riapprendimento di ciò che serve a supporto dei precedenti capitoli. In tale inquadramento, pur cercando di dare completa plausibilità a quanto presentato, si eviteranno dimostrazioni e formalismi eccessivamente rigorosi.

Dato il sistema lineare:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

è interessante interrogarsi sulla capacità di  $\mathbf{u}$  di portare liberamente a spasso nel tempo lo stato  $\mathbf{x}$ . In tal senso ci si può chiedere quali stati sono raggiungibili in un intervallo di tempo  $T$ , finito e liberamente assegnato, a partire da uno stato iniziale arbitrario, quando non si pongono limitazioni su  $\mathbf{u}$ . In breve diremo che tali stati sono raggiungibili dallo stato iniziale assegnato. Per i sistemi

<sup>11</sup>Le operazioni illustrate vanno effettuate con opportuna attenzione, perchè possono portare a una trasformazione finale non ben condizionata, specialmente quando, per forzare al massimo la sparsità, si cerca di separare blocchi con autovalori abbastanza vicini. Per un approfondimento si consiglia: G.H. Golub and C. F. Van Loan, Matrix computations, The Johns Hopkins University Press, e i riferimenti ivi riportati. Può essere infine utile notare che in Matlab e Scicoslab-Scilab esistono, rispettivamente, le funzioni `bdschur` e `bdiag`, che permettono sia la determinazione di una trasformazione diagonale a blocchi che garantisce un condizionamento accettabile, assegnato dall'utente, che, ma solo in Matlab, una trasformazione con struttura assegnata dei blocchi, lasciando però all'utilizzatore la responsabilità del condizionamento così ottenibile.

lineari lo stato di partenza, inessenziale in quanto un cambiamento dell'origine nulla muta nella rappresentazione del sistema, viene assunto nullo e si parla di raggiungibilità da zero. Se invece si preferisce il ragionamento opposto, ossia verificare da quali stati si possa raggiungere, sempre in tempo finito arbitrario e senza limitazioni sui controlli, un preciso stato assegnato si parla di controllabilità allo stato assegnato. Ancora una volta si assume come stato finale di riferimento lo zero e si parla di controllabilità a zero. Per un sistema lineare tempo continuo e invariante raggiungibilità e controllabilità sono chiaramente la stessa cosa. Si pensi infatti alla possibilità di scambiare la risposta a un istante generico con la condizione iniziale nella formula ottenuta dalla determinazione di una legge di controllo fra arbitrari stati iniziali e finali, presentata nella relativa illustrazione sull'applicazione del controllo ottimo. Da tale formula si può anche desumere che raggiungibilità e controllabilità sono proprietà che dipendono dalle sole matrici  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . In corrispondenza si dirà anche che il sistema è raggiungibile-controllabile. Infine, se raggiungibilità e controllabilità sono appurabili indipendentemente dal tempo e dallo stato di partenza si possono fregiare dell'appellativo di completezza, ossia si dirà: completa raggiungibilità-controllabilità e sistema completamente raggiungibile-controllabile.

Se raggiungibilità e controllabilità ci dicono qualcosa sulla relazione fra ingressi di controllo e stato può essere utile interrogarci su analoghe proprietà fra stato e uscite di misura. Ad esempio potrebbe essere interessante chiedersi se risulta possibile ricostruire lo stato a un tempo  $T$  arbitrario sulla base della conoscenza dei controlli e delle uscite di misura, attuali e future, proprietà che chiameremo osservabilità. In altri casi potrebbe essere di interesse studiare la possibilità di ricostruire lo stato a un generico tempo  $T$  sulla base dei su detti controlli e uscite precedenti  $T$ , fino a  $T$  incluso, proprietà che chiameremo ricostruibilità. Si può vedere che le due proprietà si riferiscono, rispettivamente, alla determinazione dello stato del sistema dalle misure attuali e alla sua previsione sulla base di misure precedentemente acquisite. Ancora una volta le due proprietà coincidono nel caso di sistemi lineari tempo continui e invarianti. Anticipiamo ora che osservabilità-ricostruibilità dipendono solo da  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$ , cosa che potrebbe risultare un po' meno intuitiva della dipendenza della raggiungibilità-controllabilità dalle sole  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Infatti mentre l'equazione differenziale della dinamica del sistema coinvolge solo queste ultime matrici la relazione di uscita, nel caso di misure non strettamente proprie, quali quelle ideali relative alla derivata dello stato, ad esempio le accelerazioni, coinvolge anche la matrice  $\mathbf{D}$ . Il dubbio su una possibile ingerenza di quest'ultima sull'osservabilità-ricostruibilità del sistema può però essere facilmente cancellato notando che, essendo l'ingresso di controllo,  $\mathbf{u}$ , da noi completamente manipolabile e quindi, come precedentemente assunto, totalmente noto, la vera uscita si può ritenere essere  $\mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{u}$ , da cui la dipendenza dalla sola  $\mathbf{C}$ . Analogamente a quanto precedentemente visto potremo anche parlare di sistema osservabile-ricostruibile, come pure, se osservabilità-ricostruibilità sono appurabili indipendentemente dal tempo e dallo stato di partenza si possono fregiare dell'appellativo di completezza, ossia si dirà: completa osservabilità-ricostruibilità e sistema completamente osservabile-ricostruibile.

Anticipiamo anche che tutte le su menzionate proprietà sono strutturali al sistema, ossia non dipendono da trasformazioni dello stato, cosa facilmente verificabile dai criteri che andremo a richiamare brevemente. Notiamo anche che l'apparente analogia delle definizioni presentate si formalizza nella definizione del sistema duale:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{x} + \mathbf{C}^T \mathbf{u} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{B}^T \mathbf{x} + \mathbf{D}^T \mathbf{u}$$

che permette di asserire che raggiungibilità-controllabilità su  $\mathbf{A}-\mathbf{B}$  corrispondono a osservabilità-ricostruibilità su  $\mathbf{A}^T-\mathbf{B}^T$  e, viceversa, osservabilità-ricostruibilità su  $\mathbf{A}-\mathbf{C}$  corrispondono a raggiungibilità-controllabilità su  $\mathbf{A}^T-\mathbf{C}^T$ . Tale dualità risulta estremamente utile in quanto ci permette di non perdere tempo in inutili ripetizioni e dimostrazioni. Pertanto nel seguito ci focalizzeremo principalmente su raggiungibilità e controllabilità, limitandoci a elencare a posteriori le corrispondenti proprietà in termini di osservabilità-ricostruibilità. Notiamo subito che, nonostante i dubbi che si instilleranno a proposito delle modalità di verifica dell'esistenza o meno di tutte le proprietà strutturali presentate, un qualche loro accertamento quantitativo, come già più volte detto, risulta spesso indispensabile per evitare di cercare di progettare controllori sostanzialmente fasulli.

Elenchiamo di seguito quattro possibili metodi per verificare la controllabilità di un sistema.

1. Verifica di Kalman: Un sistema è raggiungibile-controllabile se la matrice, matrice di raggiungibilità-controllabilità,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

ha rango pari all'ordine del sistema,  $n$ . Trattasi di una verifica di grande rilevanza teorica globale ma di pratica utilità solo per sistemi piccoli e/o molto ben condizionati. Questo a causa del malcondizionamento insito in una verifica che implica una estesa elevazione a potenza di una matrice, col conseguente malcondizionamento causato dal distanziamento del modulo degli autovalori estremi, cosa che rende assai difficile la determinazione del rango nei termini di una risposta del tipo si-no. Un tale approccio finisce così col basarsi su un criterio di zero di difficile valutazione quantitativa nell'ambito di verifiche computazionali, anche se basate su calcoli in virgola mobile in doppia precisione. Inoltre risulta generalmente difficile associare a tale verifica una valutazione quantitativa di quanto il sistema sia o non sia raggiungibile, anche sostituendo al controllo del rango quello di stima del condizionamento. Una semplice conferma di quanto su detto la si può avere nel controllo attivo strutturale verificando su base modale la perdita di tali proprietà anche usando pochi modi distinti con frequenze abbastanza distanziate fra di loro, pur in presenza di significativi termini diversi da zero nella matrice degli ingressi associati alle forze generalizzate modali di controllo. Quanto detto vale anche per le proprietà di osservabilità-ricostruibilità, verificabili con la seguente matrice duale, detta appunto di osservabilità-ricostruibilità:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T & \mathbf{A}^{T^2}\mathbf{C}^T & \dots & \mathbf{A}^{T^{n-1}}\mathbf{C}^T \end{bmatrix}$$

oppure tramite il rango per colonne della:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^T$$

A conclusione di questi brevi commenti sul criterio di Kalman notiamo che da esso è facile dedurre la strutturalità delle proprietà di cui stiamo discutendo. Assegnando infatti una qualunque matrice  $\mathbf{T}$  regolare (non singolare) di trasformazione dello stato, risulta semplice verificare che applicando tale criterio alle matrici trasformate,  $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$  e  $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$ , si ha una continua semplificazione di  $\mathbf{T}$  con  $\mathbf{T}^{-1}$  nei termini interni, sia all'elevazione a potenza di  $\mathbf{A}$  che ai relativi prodotti con  $\mathbf{B}$ , finendo con l'avere semplicemente:

$$\mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

che, stante la regolarità di  $\mathbf{T}$ , dimostra che il sistema trasformato mantiene quanto pertiene al suo generatore. Allo stesso modo sarà facile verificare la strutturalità dell'osservabilità.

2. Verifica modale: si applichi al sistema la trasformazione:  $\mathbf{x} = \mathbf{Xz}$ , con  $\mathbf{X}$  matrice degli autovettori e degli, eventuali, vettori principali, ottenendo:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Jz} + \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Bu}$$

essendo  $\mathbf{J} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX}$  una matrice di Jordan, ossia diagonale in corrispondenza di autosoluzioni distinte o di molteplicità algebrica pari alla geometrica, con blocchi di Jordan laddove molteplicità algebrica e geometrica non coincidono. Per i termini diagonali, ossia per le parti completamente disaccoppiate dello stato modale, la raggiungibilità risulterà banalmente determinabile semplicemente controllando se le relative righe di  $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}$ , ossia i controlli modali, non sono nulle, prestandosi inoltre una norma qualunque di tali righe a una valutazione anche quantitativa, perlomeno di prima approssimazione, del livello di controllabilità ottenibile per quei modi. Ci si riferiva appunto a questa condizione, assai fisica e a cui siamo molto abituati in ambito strutturale quando parliamo di forze generalizzate in relazione alla posizione di nodi e ventri modali, nel commento sopra fatto a proposito della verifica sul rango

della matrice raggiungibilità-controllabilità. È però pure importante notare che ogni combinazione di tutti gli autovettori associabili ad autovalori multipli è un autovettore. Ragion per cui bisognerà porre cura al fatto che la verifica dell'ottenimento di righe non nulle per la matrice degli ingressi modali debba valere per un qualsiasi autovettore ottenibile in tal caso. Come vedremo nel prossimo schema di verifica tale condizione fa sì che non si possa ritenere controllabile nessun modo associabile a un autovalore multiplo nel caso di un solo ingresso di controllo. Come già ricordato, in presenza di molteplicità algebriche e geometriche non coincidenti saranno presenti blocchi di Jordan, ossia sottomatrici diagonali del tipo:

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Nel caso di singoli blocchi di Jordan associati ad autovalori multipli, ossia quando si ha un solo autovettore per ogni autovalore multiplo, molteplicità geometrica pari a uno, tali blocchi rappresentano sottosistemi disaccoppiati, su cui si può effettuare la verifica di controllabilità singolarmente. Infatti la relativa sottomatrice rappresenta un sistema in cascata, in cui l'ultima equazione del blocco non risente delle altre equazioni, mentre tutte le altre equazioni al di sopra risentono del comportamento dell'ultima, a causa dell'accoppiamento dato dagli 1 dalla prima sovra diagonale in poi. È allora facile verificare, intuitivamente o applicando la verifica di Kalman, che il relativo sottosistema disaccoppiato risulterà completamente raggiungibile se l'ultima equazione lo è, ossia se la relativa riga di  $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}$  non è nulla, senza che abbia nessuna rilevanza se le righe sopra di esse siano nulle o meno. In tal senso i termini scalarmente diagonali, precedentemente trattati, possono anche considerarsi blocchi di Jordan di dimensioni  $1 \times 1$ . Le cose si complicano un poco quando a un autovalore multiplo di molteplicità geometrica inferiore a quella algebrica si associano più autovettori, e quindi più blocchi di Jordan. In tal caso oltre alla già menzionata necessità che le righe inferiori di ogni blocco di Jordan non sia nulla bisogna aggiungere la condizione che per tutti i blocchi tali righe siano non solo non nulle ma anche linearmente indipendenti. Grazie alla dualità la traduzione di quanto sopra illustrato in termini di osservabilità-ricostruibilità si effettua applicando alle colonne di  $\mathbf{C}\mathbf{X}$  quanto detto per le righe di  $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}$ . Si noti che le verifiche modali, grazie alla struttura diagonale, o quasi, e al fatto che le proprietà che stiamo verificando sono strutturali, ossia indipendenti dal tipo di stato scelto, permetterebbero una facile dimostrazione del corrispondente criterio di Kalman. In pratica questo tipo di verifica è operativamente utilizzabile, con una certa tranquillità, nel caso in cui si è significativamente sicuri della diagonalizzabilità. Infatti abbiamo già spesso citato le difficoltà associate alla determinazione di veri blocchi di Jordan. Per mantenerne la validità anche quando si conosce, o si sospetta, la presenza di detti blocchi sarà meglio procedere con la riduzione, presentata precedentemente, agli autovettori associati agli autovalori distinti e ai sottoblocchi diagonali di Schur di quegli autovalore giudicati troppo vicini o coincidenti, controllandone la proprietà tramite la verifica di Kalman. Si noti infatti che sia l'esiguità del loro ordine che la vicinanza/coincidenza degli autovalori aiutano significativamente a mantenere un buon condizionamento della relativa matrice. Si noti comunque che la possibilità di trasformare il sistema in uno spazio degli stati associato ad autovalori disaccoppiati, singolarmente o in blocchi, permette una immediata, importante, distinzione fra quei sottospazi che non godono della proprietà strutturale cercata. Sarà infatti possibile controllare immediatamente se ad essi corrispondono o meno autovalori stabili permettendo così le definizioni-verifiche di stabilizzabilità e rilevabilità, quando i sottospazi non raggiungibili-controllabili e non osservabili-ricostruibili sono associati ad autovalori asintoticamente stabili. Facciamo notare, senza ulteriori approfondimenti, che una rigorosa formulazione formale di tali distinzioni, con la conseguente classificazione, è possibile anche a partire dalle basi associabili alle relative matrici di Kalman.

Si noti anche che spesso il criterio modale viene enunciato usando la trasformazione  $\mathbf{Y}^T\mathbf{B}$ , con  $\mathbf{Y}$  matrice degli autovettori sinistri, col che nulla cambia, perché ben sappiamo essere  $\mathbf{Y}^T = \mathbf{X}^{-1}$ .

3. Verifica rango autoproblema aumentato da matrici ingresso-uscita: il sistema è

completamente raggiungibile se la matrice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - s\mathbf{I} & | & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

ha rango pieno,  $n$ , per righe  $\forall s$ . Siccome la controllabilità non dipende da cambiamenti di stato, si può verificare che per un sistema ridotto alla forma diagonale, prendendo  $s = \lambda_i$  ( $\lambda_i$  autovalore di  $\mathbf{A}$ ), la matrice  $[\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}]$  ha riga e colonna  $i$ -esime nulle. È quindi necessario che almeno un elemento della riga  $i$ -esima di  $\mathbf{B}$  sia non nullo, affinché non si abbia un decadimento di rango. In tal caso il modo  $i$ -esimo risulta raggiungibile. Ripetendo questa analisi per tutti gli autovalori  $\lambda_i$  si ottiene una dimostrazione della completa raggiungibilità. Nel caso il sistema venga ridotto ad una forma di Jordan, si consideri il blocco relativo all'autovalore  $\lambda_i$ . Questo può essere a sua volta suddiviso in un numero di miniblocchi pari alla molteplicità geometrica dell'autovalore. Nella matrice

$$[\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}]$$

la diagonale del blocco in questione si annulla. Come visto nel metodo modale (2.) è sufficiente che le righe della matrice  $\mathbf{B}$  relative ai miniblocchi  $1 \times 1$  e agli ultimi elementi dei restanti miniblocchi siano diverse da zero per garantire la completa raggiungibilità. Infatti non si avranno righe nulle per la matrice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - s\mathbf{I} & | & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

e il rango non decade. Resta possibile che delle righe di  $\mathbf{B}$  siano nulle ove si abbiano degli uni sulla prima sovra diagonale di  $\mathbf{A}$ .

Si noti che è facile verificare che in presenza di autovalori multipli e di un singolo ingresso il sistema non potrà mai essere completamente raggiungibile, in quanto il rango di  $\begin{bmatrix} \mathbf{A} - s\mathbf{I} & | & \mathbf{B} \end{bmatrix}$  risulterà certamente minore di  $n$ , tante volte quanto la molteplicità meno uno. Risulta così evidente che in generale una condizione necessaria per la completa raggiungibilità è che il numero di ingressi di un sistema sia maggiore o uguale alla massima molteplicità geometrica degli autovalori. Ancora una volta, per dualità, sarà facile verificare che in termini di osservabilità-ricostruibilità la suddetta verifica diventa:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T - s\mathbf{I} & | & \mathbf{C}^T \end{bmatrix}$$

oppure tramite il rango per colonne della:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - s\mathbf{I} & | & \mathbf{C} \end{bmatrix}^T$$

Quanto presentato è di certo interesse teorico ma si presta anche a una semplice applicazione pratica che stiamo per presentare nell'immediato seguito.

4. Verifica di assegnabilità autovalori; un sistema è completamente raggiungibile, se è possibile trovare una matrice di guadagno  $\mathbf{G}$ , proporzionale allo stato, ossia  $\mathbf{u} = -\mathbf{G}\mathbf{x}$ , che permette di assegnare liberamente gli autovalori del sistema in anello chiuso:

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A} - \mathbf{BG}] \mathbf{x}$$

La stessa cosa, per dualità, varrà allora per l'osservabilità, nella forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T\mathbf{G}] \mathbf{x} \qquad \dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A} - \mathbf{G}^T\mathbf{C}] \mathbf{x}$$

Sviluppiamo ora una dimostrazione costruttiva della possibilità di assegnare arbitrariamente gli autovalori utilizzando la precedentemente citata proprietà sul rango della matrice aumentata:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - s\mathbf{I} & | & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} = 0$$

Evitando per semplicità l'uso di un indice di assegnazione, leggiamo ora tale formula ritenendola associata a ciascun autovalore desiderato in ciclo chiuso  $s_i$ , al corrispondente autovettore,

$x_i$ , e comando,  $u_i$ . Essendo chiaro che ogni autovettore è definito a meno di una costante moltiplicativa decidiamo di normalizzarlo imponendo a 1 la componente  $m$ . Potremo così scrivere:

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c} (\mathbf{A} - s\mathbf{I})_{1,m-1} & (\mathbf{A} - s\mathbf{I})_m & (\mathbf{A} - s\mathbf{I})_{m+1,n} & \mathbf{B} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x}_{1,m-1} \\ 1 \\ \mathbf{x}_{m+1,n-1} \\ \mathbf{u} \end{array} \right\} = 0$$

ossia il seguente sistema lineare:

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} (\mathbf{A} - s\mathbf{I})_{1,m-1} & (\mathbf{A} - s\mathbf{I})_{m+1,n} & \mathbf{B} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x}_{1,m-1} \\ \mathbf{x}_{m+1,n} \\ \mathbf{u} \end{array} \right\} = (\mathbf{A} - s\mathbf{I})_m \mathbf{x}_m \quad \mathbf{A}_{xu} \mathbf{x}_{xu} = \mathbf{a}_m$$

che è garantito essere non singolare per quanto stabilito nella verifica precedente, ossia sotto condizione di raggiungibilità. Tale sistema è così immediatamente risolubile nel caso di un solo ingresso. Nel caso di più ingressi risulterà sottodeterminato per cui si aprono più opzioni per una possibile sua soluzione, come dimostrato dalla vasta letteratura sull'argomento dell'assegnazione degli autovalori con controreazione proporzionale allo stato. Notiamo che un modo per togliere la sottodeterminazione potrebbe essere quella di assegnare anche parte dell'autovettore, aprendo così la più vasta problematica del possibile controllo dell'autostruttura in ciclo chiuso, cosa che va ben oltre le nostre attuali necessità. Per quanto ci interessa basterà però semplicemente riutilizzare la soluzione a minima norma, già vista per il controllo con ottenimento di una o più uscite desiderate con sovrabbondanza di controlli. Assegneremo quindi una pesatura diagonale  $\mathbf{W}_{xu}$  per la quale, non volendo forzare la struttura dell'autovettore, useremo pesi uguali per tutti le componenti dell'autovettore,  $\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x}_{1,m-1} \\ \mathbf{x}_{m-1,n} \end{array} \right\}$ , ritenendoci invece liberi di scalare la parte associata ai controlli, finendo con lo scrivere:

$$\mathbf{x}_{xu} = \mathbf{W}_{xu}^{-1} \mathbf{A}_{xu}^* (\mathbf{A}_{xu} \mathbf{W}_{xu}^{-1} \mathbf{A}_{xu}^*)^{-1} \mathbf{a}_m$$

dove \* indica trasposizione con coniugazione, in modo da garantire una soluzione di minima norma anche nel caso di assegnazione di autovalori complessi e coniugati. In tal modo per

ogni soluzione  $i$  avremo un  $\mathbf{u}_i$  e un  $\mathbf{x}_i = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x}_{1,m-1} \\ 1 \\ \mathbf{x}_{m-1,n} \end{array} \right\}_i$ , che potremo affiancare, per colonne,

in due matrici:  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n]$  e  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n]$ . Volendo allora imporre che ciascuna delle rispettive colonne rispetti la relazione  $\mathbf{u}_i = -\mathbf{G}\mathbf{x}_i$  avremo  $\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{X}$ , da cui  $\mathbf{G} = \mathbf{U}\mathbf{X}^{-1}$ . Si noti che la scelta di fissare una sola componente dell'autovettore in ciclo chiuso per risolvere in minima norma il possibile sistema sottodeterminato risultante, è stata fatta solo per rendere il procedimento di soluzione più facile, intuitivo e immediato. In tal senso è arbitrario, forse addirittura sbagliato, ma sicuramente improprio, l'aver asserito che il sistema con un solo ingresso è ben determinato. Sarebbe stato meglio infatti dire che avendo solo una componente delle incognite da fissare avremmo comunque ottenuto sempre la stessa, unica, soluzione per la matrice riga dei guadagni, qualunque componente avessimo assegnato. In realtà, supponendo di avere  $m$  ingressi di controllo e avendo a che fare con un sistema omogeneo sottodeterminato di  $n + m$  incognite, di sicuro rango  $n$ , è possibile trovare una soluzione assegnando arbitrariamente un numero qualsiasi  $m$  di incognite, o una loro combinazione opportunamente scelta. La scelta della combinazione delle incognite indipendenti potrebbe essere addirittura fatta dal solutore stesso, ad esempio al fine di migliorare il condizionamento del sistema, mentre rimarrebbe sempre da assegnare un opportuno fattore di scala per ciascuna di esse. La cosa non è molto dissimile dalla scelta delle iperstatiche in una soluzione strutturale a elementi discreti, laddove si avrebbero  $n$  equazioni di equilibrio e  $n + m$  reazioni e si lasciasse al solutore la determinazione automatica delle  $m$  iperstatiche, un tema di grande interesse nell'ormai desueto calcolo strutturale matriciale computerizzato basato sul metodo delle forze. La differenza con il nostro caso sta nella indeterminazione della condizione finale di scalatura opportuna da assegnare per chiudere il problema, nel presente caso alquanto

arbitraria, mentre è invece fissata nel caso strutturale: garantire la congruenza. In tal senso il nostro controllo ottimo, che ottimo non è perché dobbiamo sempre un po' giocare con i pesi per soddisfare i criteri di progetto, può anche essere visto come una soluzione a tale problema. Come promemoria ricordiamo che altri problemi sottodeterminati simili si hanno nella: scelta delle coordinate libere e di variazioni virtuali di moto, a partire dalle equazioni di vincolo; riduzione a una forma puramente differenziale di problemi algebrico differenziali; determinazione automatica delle correnti indipendenti di maglia a partire dalle connessioni circuitali, problema simile a quello della determinazione delle iperstatiche ma risolvibile solo con operazioni logiche su zeri e uni; chi più ne ha più metta. Di fatto, nello spirito di ripasso di questa sezione, ricordiamo che, a parte gli importanti aspetti numerici delle applicazioni pratiche, non stiamo parlando d'altro che del vecchio e buon teorema di Rouché-Capelli.

Riportiamo di seguito un semplice esempio per un sistema a due stati e un ingresso:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \{u\} \qquad \{u\} = - \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

Si noti che la scelta di una matrice  $A$  diagonale non intacca la generalità del metodo, ma serve solo a facilitare la soluzione dei sistemi 2x2 che seguono. Si vogliano allora assegnare gli autovalori  $s_1 = -2$  ed  $s_2 = -5$ . I sistemi da risolvere risultano essere:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \{u\} = \{0\} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \{u\} = \{0\}$$

Imponendo per entrambi  $x_1 = 1$ , si otterrà:

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{1}{16} \\ \frac{3}{20} & \frac{3}{16} \end{bmatrix}$$

da cui:

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{1}{16} \\ \frac{3}{20} & \frac{3}{16} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{4} & 20 \end{bmatrix}$$

Risulta poi facile verificare che gli autovalori del sistema in anello chiuso:  $\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G}] \mathbf{x}$  sono proprio:  $-2$  e  $-5$ .

Ne consegue che in tal modo è sempre possibile progettare un sistema di controllo stabilizzante proporzionale allo stato, per la cui realizzazione, sfruttando la dualità, si potrà ricorrere a un osservatore determinato in modo analogo. Abbiamo quindi un metodo alternativo di progettazione di un controllore avente la stessa struttura di quelli ottenibili tramite il controllo ottimo. Anche se abbiamo già fornito una soluzione alternativa, ricordiamo che una tale progettazione può anche essere utile per avviare l'iteratore di Kleinman, utilizzabile per la soluzione delle equazioni di Riccati quando si parta da sistemi in ciclo aperto non asintoticamente stabili.

Nella progettazione del controllore tramite assegnazione degli autovalori si consiglia di agire con cautela, mantenendo quelli già accettabili in ciclo aperto e muovendo quelli che non lo sono quanto basta per soddisfare le specifiche di rapidità e buon smorzamento del sistema controllato. Si ricordi infatti che, contrariamente al controllo ottimo, l'assegnazione degli autovalori non tiene per niente in conto i limiti fisici insiti in  $\mathbf{u}$ . Va però da sé che richieste eccessive sullo spostamento degli autovalori non possono che finire con l'imporre insostenibili richieste alla fisica sottintesa alle varie componenti di  $\mathbf{u}$ . Un discorso analogo vale per la progettazione dell'osservatore, laddove una eccessiva rapidità di stima associabile agli autovalori assegnati può portare a: una eccessiva sensibilità al rumore, una inutile richiesta di potenza di calcolo per la realizzazione digitale, necessità di sensori di banda inutilmente ampia, margini inadeguati. Sarà quindi necessario complementare tale metodologia di progetto con estese simulazioni/analisi di verifica.

Può essere interessante notare che il procedimento di assegnazione degli autovalori presentato permette anche la possibilità di una assegnazione mediante controreazione diretta sulle



misure  $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ . Logicamente in tal caso non si potranno assegnare tutti gli autovalori ma solamente un numero pari alle misure disponibili. Inoltre non si potrà garantire dove finiranno i rimanenti autovalori non assegnati dalla controreazione diretta, ragion per cui si potrebbe anche instabilizzare il sistema. Nondimeno tale possibilità potrebbe risultare di interesse in alcune significative applicazioni. In tal caso, supponendo di disporre di  $k$  misure, basterà procedere nel modo illustrato ma, come detto, assegnando solo  $k$  autovalori, opportunamente scelti in modo da ottenerne di assai prossimi a quelli desiderati salvaguardando i rimanenti in modo da mantenerli accettabili, cosa che, ripetiamo, potrebbe anche essere impossibile. In tal modo finiremo con il determinare le due matrici:  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_k]$  e  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_k]$ , da cui, imponendo che ciascuna delle rispettive colonne rispetti la relazione, di controreazione diretta:  $\mathbf{u}_i = -\mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{x}_i$ , avremo  $\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{X}$  e quindi  $\mathbf{G} = \mathbf{U}(\mathbf{C}\mathbf{X})^{-1}$ . Se le misure non fossero strettamente proprie,  $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$ , basterà poi ricavare la matrice operativa dei guadagni, procedendo nel modo già illustrato per la controreazione diretta sub ottimale.

Concludiamo notando che numericamente l'algoritmo di assegnazione presentato si comporta generalmente meglio dei metodi di Ackerman e Bass-Gura, ampiamente spiegati nei testi di controllo agli stati. Non va però comunque sottaciuto che al suo pregio di una semplicità concettuale non si può abbinare una altrettanto apprezzabile robustezza numerica. Ciò è dovuto all'utilizzo di una soluzione basata sulla determinazione di autovettori, cosa che sappiamo essere numericamente delicata.

Per quanto possibile si può alleviare un po' dei problemi insiti nel metodo adottando le seguenti precauzioni:

- Evitare di assegnare autovalori coincidenti, non si sa come andranno a finire le relative molteplicità algebriche e geometriche. Distanziare gli autovalori che si vorrebbero coincidenti di quanto basta numericamente per garantire un sicuro calcolo dei relativi autovettori. In tal modo si assicura la diagonalizzazione spettrale in ciclo chiuso e si migliora il condizionamento numerico del procedimento di assegnazione illustrato.
- Se la soluzione di assegnazione di un autovalore fallisse ripeterla normalizzando un'altra componente  $m$ .
- Verificare se alcune componenti di ciascun  $\mathbf{x}_i$  sono eccessivamente grandi, tale condizione è un sintomo che la componente di normalizzazione  $m$  potrebbe essere prossima a zero, ragion per cui sarà meglio ripetere la soluzione normalizzando quella di modulo massimo dell' $\mathbf{x}_i$  appena trovato.
- Se si vuol conservare un'autosoluzione  $k$  del sistema in ciclo aperto, usare direttamente il corrispondente autovettore, noto,  $\mathbf{x}_k$  in anello aperto, mettendo a zero il relativo  $\mathbf{u}_k$ .
- Se si assegnano autovalori  $s_k$  complessi e coniugati, ricordarsi di risolvere per  $\mathbf{u}_k$  e  $\mathbf{x}_k$  una sola volta, usando i corrispondenti coniugati per l'altra assegnazione. Risolvere il sistema sotto forma complessa, non vale la pena di metterlo in forma reale. Se si vuole evitare una soluzione  $\mathbf{U}\mathbf{X}^{-1}$  utilizzando numeri complessi, mettere in  $\mathbf{u}_k$ ,  $\mathbf{u}_{k+1}$ ,  $\mathbf{x}_k$  e  $\mathbf{x}_{k+1}$  le rispettive parti reali e immaginarie della soluzione, saltando completamente l'uso di quella coniugata.
- Rendere  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sparse, per quanto possibile, tramite un'opportuna trasformazione di stato. In tal modo si possono sveltire le soluzioni di assegnazione rendendo il metodo più efficiente. Ad esempio se si trasforma  $\mathbf{A}$  in forma reale di Schur  $\mathbf{S} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}$ , con  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ , e si assegnano gli autovalori usando  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{Q}^T \mathbf{B}$ , si possono risolvere le soluzioni di ogni singola assegnazione con operazioni nell'ordine di  $n^2$ , mantenendo tutta la procedura nell'ordine di  $n^3$ . Alla fine ricordarsi di riassegnare  $\mathbf{G}$  allo spazio degli stati originario:  $\mathbf{G} = \mathbf{G} \mathbf{Q}^T$ .

Tale procedura è, più o meno, quella implementata nella funzione ScicosLab dimostrativa presente in bacheca. Si noti che tale funzione, pur basandosi sempre e solo sul mantenimento di un solo termine noto, con conseguente soluzione a minima norma, qualunque sia il numero dei controlli, contiene anche un metodo per la scelta automatica del termine noto sulla base del miglior condizionamento numerico di una speciale fattorizzazione QR, termine che non risulterà essere necessariamente una delle componenti dell'autovettore in ciclo chiuso.



Una semplice generalizzazione di tale metodo permetterebbe quindi di operare nel modo più generale precedentemente suggerito.<sup>12</sup>

5. Definizione positiva del Gramiano: un sistema asintoticamente stabile è raggiungibile-controllabile se il relativo Gramiano di raggiungibilità-controllabilità:

$$\mathbf{G}_C := \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} dt \quad (13.62)$$

è definito positivo. La definizione di Gramiano e la relativa verifica è già stata accennata nell'esercizio sul controllo ottimo della sola azione di controllo, ai fini di spostare lo stato tra due valori qualsiasi su un tempo finito. Viene qui applicato col vincolo di asintotica stabilità a causa dell'estensione su orizzonte infinito. Si noti che il basare la verifica delle proprietà strutturali su una matrice definita positiva permette anche una possibile valutazione del quanto tale proprietà sia assicurata, ad esempio valutando il modulo degli autovalori e i relativi sottospazi, ottenibili trasformando il sistema tramite la matrice degli autovettori del Gramiano. Non ci dilunghiamo qui oltre in quanto il tutto verrà ripreso abbastanza approfonditamente più tardi, in relazione alla riduzione dell'ordine di un sistema lineare tempo invariante e asintoticamente stabile sulla base delle sue proprietà strutturali. Ancora una volta per dualità potremo utilizzare allo stesso modo il Gramiano di osservabilità-ricostruibilità:

$$\mathbf{G}_O := \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} dt \quad (13.63)$$

ai fini della verifica delle relative proprietà.

---

<sup>12</sup>Nota di richiamo del suggerimento, sovente dimenticato, dato a lezione per rendere più facile passare l'esame. Nella soluzione di semplici esercizi con un solo ingresso di controllo è spesso assai più comodo e facile calcolare l'espressione simbolica del determinante  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{G})$ , espressione che darà un polinomio caratteristico i cui coefficienti conterranno i termini di  $\mathbf{G}$  solo linearmente. Infatti, per il noto lemma del determinante di una matrice (vedi testi di algebra matriciale, i già menzionati 'The Matrix Cookbook' e 'The Matrix Reference Manual', Wikipedia), si ha:  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{G}) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})(1 + \mathbf{G}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B})$ , espressione che ben mostra quanto appena asserito. Ciò fatto basterà scrivere il polinomio caratteristico associato agli autovalori desiderati, per poi ricavare  $\mathbf{G}$  con una semplice soluzione del sistema lineare ottenuto eguagliando i coefficienti del polinomio incognito con i corrispondenti termini del polinomio caratteristico desiderato. Per i semplici esercizi su sistemi di basso ordine che solitamente s'incontrano negli esami, orali o scritti che siano, si consiglia di eseguire il calcolo del polinomio caratteristico incognito tramite i soliti giochini elementari imparati nei primi anni di laurea e non usando il lemma precedentemente riportato. Così, per l'esercizio a due stati visto precedentemente, si avrà il polinomi incognito:  $s^2 + (4g_1 + g_2 - 4)s + (-12g_1 - g_2 + 3)$ , mentre il polinomio desiderato sarà:  $s^2 + 7s + 10$ , da cui il sistema lineare:  $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -12 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 7 \end{Bmatrix}$ , la cui soluzione fornisce la stessa matrice di guadagno precedentemente trovata. Come ulteriore dritta, si noti che nel caso di sistemi di equazioni differenziali di ordine superiore al primo, e.g. elettromeccanici, ma anche altri, spesso non conviene ricondursi a una rappresentazione agli stati, risultando meno soggetto a errori, più comodo, semplice e rapido il procedere al calcolo del determinante incognito direttamente sulle equazioni originali. Infatti, drammatizzando un po' per eccesso la semplicità di quanto si è appena suggerito, si può vedere come per il semplice caso massa-molla-smorzatore, ad esempio  $\ddot{x} + x = u$ , una controreazione sullo stato, del tipo  $u = -g_1 \dot{x} - g_2 x$ , darebbe  $\ddot{x} + g_2 \dot{x} + (1 + g_1)x = 0$ , il cui il polinomio caratteristico è immediatamente scrivibile come  $s^2 + g_2 s + (1 + g_1)$ .

## Capitolo 14

# CONTROLLO (SUB-OTTIMO) PER CONTROREAZIONE DIRETTA DELLE MISURE

Il controllo ottimo, così come è stato presentato nei precedenti capitoli richiede, per poter essere effettivamente realizzato, la conoscenza dello stato, ovvero la sua ricostruzione tramite un osservatore. Esiste però una possibile soluzione alternativa nel caso in cui tutto lo stato non sia disponibile, spesso proficuamente applicabile. Essa si basa sull'idea di generare una controreazione  $u$  che sia direttamente proporzionale alle sole misure disponibili, secondo una relazione del tipo

$$u = -Gy. \quad (14.1)$$

In questo modo l'osservatore non è più necessario e si può ottenere una significativa semplificazione del controllore<sup>1</sup>. La maggiore semplicità porta generalmente, a parità di cifra di merito, ad un valore più elevato di uno stesso indice ottimale di progetto, cosa logica in quanto si riducono i parametri che si hanno a disposizione per modificare le caratteristiche del sistema tramite controreazione. Per questa ragione si parla allora di controllo *sub-ottimo* per controreazione diretta delle misure disponibili o, più semplicemente, solo di controllo *sub-ottimo*. Come vedremo non è più possibile, o meglio può essere difficoltoso e troppo vincolante, risolvere il problema di minimizzazione della funzione (12.14), attraverso il sistema (12.16), o una corrispondente equazione di Riccati (12.18), bensì si dovrà procedere o a una soluzione numerica del sistema o a un'ottimizzazione numerica diretta della funzione (12.14), attraverso appropriati metodi iterativi. Prima di illustrare alcuni dettagli computazionali sarà utile fare alcune considerazioni analizzando l'applicazione di un controllo *sub-ottimo* a un sistema elasto-meccanico modellato dall'equazione

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = Bu. \quad (14.2)$$

Supponendo di effettuare delle misure indipendenti di posizione, velocità e accelerazione potremo scrivere

$$\begin{Bmatrix} y_p \\ y_v \\ y_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_p & 0 & 0 \\ 0 & C_v & 0 \\ 0 & 0 & C_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix}. \quad (14.3)$$

Per cui una possibile controreazione diretta potrà essere determinata come

$$u = -(G_p y_p + G_v y_v + G_a y_a) = -(G_p C_p x + G_v C_v \dot{x} + G_a C_a \ddot{x}). \quad (14.4)$$

---

<sup>1</sup>L'osservatore non è strettamente necessario però anche in questo caso, come vedremo più avanti, è possibile pensare di utilizzare un compensatore che generi altri stati da inviare poi in contro-reazione al sistema. In generale il controllo sub-ottimo va visto come un controllo con struttura imposta a priori dal progettista, ma comunque di architettura estremamente generale.

Sostituendo quest'ultima relazione nell'equazione del sistema si ottiene

$$(M + BG_a C_a) \ddot{x} + (D + BG_v C_v) \dot{x} + (K + BG_p C_p) x = 0. \quad (14.5)$$

sub-ott-mec

L'equazione (14.5) ci dice che:

1. A seconda della disponibilità di misure di: posizione, velocità, accelerazione, la controreazione diretta può produrre pseudo matrici di: rigidità, smorzamento, massa. Si è usato il termine 'pseudo' perché pur appearing come tali generalmente esse non hanno, per  $B$ ,  $G_p$ ,  $G_v$ ,  $G_a$  e  $C$  generiche, le proprietà delle loro controparti passive  $K$ ,  $D$ ,  $M$ .
2. Se il controllo è *co-locato*, ossia se tutte le misure vengono effettuate esattamente negli stessi punti e direzioni in cui si va ad agire con le forze di attuazione, si avrà che  $C_p = C_v = C_a = B^T$ . In questo modo le 'pseudo' matrici di rigidità, smorzamento e massa in anello chiuso, rispettivamente:  $BG_p B^T$ ,  $BG_v B^T$  e  $BG_a B^T$ , potranno essere simmetriche e definite positive, se  $G_p$ ,  $G_v$  e  $G_a$ , sono tali <sup>2</sup>. Questa caratteristica può essere imposta grazie alla libertà di assegnare una struttura desiderata alle matrici dei guadagni e può garantire che attraverso il controllo attivo si possano ottenere 'vere' matrici di: rigidità, smorzamento e massa, con la conseguenza che il controllore risultante risulterà sempre stabile, qualunque sia il valore delle matrici utilizzate per il progetto. Non solo, la stabilità verrà mantenuta anche con l'eventuale rottura di alcuni sensori e attuatori, perché tale rottura non farà mancare almeno la semidefinizione positiva delle matrici di controllo. Un'ulteriore interessante possibilità offerta da tale soluzione consiste nel poter diminuire la massa, utilizzando guadagni di accelerazione definiti negativi, aumentando nel contempo smorzamento e rigidità, cosa impossibile per via puramente passiva. Le asserzioni precedenti vanno comunque temperate perché non tengono conto di altri aspetti della realtà realizzativa, ad esempio: le dinamiche dei sensori e degli attuatori; i ritardi di possibili realizzazioni digitali; non linearità varie, nella pratica sono sempre possibili almeno forme di saturazione; che, con l'innalzamento dei guadagni, possono portare comunque a instabilità, sia con "esplosione" del sistema che con vibrazioni indesiderate e sostenute (ciclo limite). Anche se, di fatto, una co-localizzazione ideale praticamente non esiste rimane comunque valida l'indicazione di buona robustezza del controllore così progettato.
3. Si può imporre una decentralizzazione delle matrici dei guadagni, sia parziale, annullando simmetricamente solo alcuni termini delle matrici  $G$ , o totale, matrici  $G$  diagonali.

Assumendo, preliminarmente, che la relazione di misura sia strettamente propria,  $y = C_y x$ , il funzionale, equivalente alla (12.14) da minimizzare in questo caso, ricordiamo che  $u = -Gy$ , diventa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \text{Tr}(P(M_{x_0 x_0} + B_d M_{d x_0} + M_{x_0 d} B_d^T + B_d M_{d d} B_d^T) + \\ & \Lambda((A^T - C_y^T G^T B_u^T)P + P(A - B_u G C_y) + (C_z^T - C_y^T G^T D_{zu}^T) \\ & W_{zz}(C_z - D_{zu} G C_y) + (C_y^T G^T W_{uu} G C_y))) \end{aligned} \quad (14.6)$$

subott1

Le corrispondenti condizioni di stazionarietà rispetto alle variabili  $P$ ,  $G$  e  $\Lambda$  saranno le seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \Lambda} = & (A^T - C_y^T G^T B_u^T)P + P(A - B_u G C_y) + \\ & (C_z^T - C_y^T G^T D_{zu}^T)W_{zz}(C_z - D_{zu} G C_y) + (C_y^T G^T W_{uu} G C_y) = 0 \end{aligned} \quad (14.7a)$$

LyaperP

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial P} = & (A - B_u G C_y)\Lambda + \Lambda(A^T - C_y^T G^T B_u^T) \\ & + (M_{x_0 x_0} + B_d M_{d x_0} + M_{x_0 d} B_d^T + B_d M_{d d} B_d^T) = 0 \end{aligned} \quad (14.7b)$$

LyaperLambda

$$\frac{\partial f}{\partial G} = (W_{uu} + D_{zu}^T W_{zz} D_{zu})G C_y \Lambda C_y^T - (B_u^T P + D_{zu}^T W_{zz} C_z) \Lambda C_y^T = 0, \quad (14.7c)$$

LyaperG

$$(14.7d)$$

<sup>2</sup>La simmetria e la definizione positiva delle matrici dei guadagni è una proprietà "naturale" in questo caso, ma non viene in generale ottenuta a meno che non sia esplicitamente imposta durante la procedura di ottimizzazione.

da cui

$$G = ((W_{uu} + D_{zu}^T W_{zz} D_{zu})^{-1} (B_u^T P + D_{zu}^T W_{zz} C_z) \Lambda C_y^T (C_y \Lambda C_y^T)^{-1} \quad (14.8)$$

Come si vede la matrice dei guadagni dipende ora sia da  $P$  che da  $\Lambda$  per cui il sistema, per le cui risolubilità si possono assumere le stesse condizioni del controllo ottimo, risulta totalmente accoppiato e nonlineare. Non si può più quindi ricondurre a un singola equazione algebrica di Riccati ed è pertanto necessario ricorrere a una soluzione iterativa dello stesso, soluzione comunque non totalmente libera ma sottoposta al vincolo di minimizzazione dell'obbiettivo e di stabilità di  $A - B_u G C_y$ . Si noti che anche nel caso sub-ottimo è essenziale una pesatura, diretta o indiretta, dell'azione di controllo  $u$  onde evitare di cadere nell'ambito di un controllore singolare.

Anche se è generalmente preferibile utilizzare un buon metodo generale di ottimizzazione numerica, con le modalità che spiegheremo fra breve, nel caso che non si pongano vincoli di struttura sulla controreazione diretta può risultare utile anche il più semplice procedimento iterativo qui appresso indicato, i cui controlli di terminazione e valori assegnati possono (dovrebbero) essere migliorati, che consiste nel seguente:

- Determinare una matrice iniziale  $G$  stabilizzante
- Calcolare  $P$  con la (14.7a)
- 1 -  $F = 1.0e30$ ,  $\alpha_{min} = 0.0001$
- 2 - Calcolare  $\Lambda$  con la (14.7b)
- 3 -  $G_0 = G$
- 4 -  $\Delta G = ((W_{uu} + D_{zu}^T W_{zz} D_{zu})^{-1} (B_u^T P + D_{zu}^T W_{zz} C_z) \Lambda C_y^T (C_y \Lambda C_y^T)^{-1} - G_0$
- 5 -  $\alpha = 1$
- 6 -  $G = G_0 + \alpha \Delta G$
- 7 - Calcolare  $P$  con la (14.7a) ,
- 8 -  $J = \frac{1}{2} \text{Tr}(P \bar{M})$
- 9 - Se il sistema è asintoticamente stabile e  $J < F$  allora  $F = J$  altrimenti vai a 2
- 10 -  $\alpha = \alpha/2$ , se  $\alpha < \alpha_{min}$  allora TERMINA altrimenti vai a 6

Si rilevi che la verifica dell'asintotica stabilità è un sottoprodotto della soluzione dell'equazione di Lyapunov.

Notiamo che nulla cambia nel caso di una relazione di misura, accelerometrica per esempio, non strettamente propria,  $y = C_y x + D_{yu} u$ , che stabilisce una relazione di vincolo algebrico sulla controreazione diretta. Infatti, essendo  $u$  completamente disponibile e manipolabile dal sistema di controllo basterà progettare come sopra illustrato, ossia semplicemente ritendendo  $y = C_y x$ , ricordando poi nella realizzazione che il vero  $y$  altro non è che:  $y - D_{yu} u$ . Bisognerà quindi soddisfare la  $u = -G(y - D_{yu} u)$ , da cui risulterà che l'espressione da programmare nel controllore è:  $u = -(I - G D_{yu})^{-1} G y$ .

Nel caso di vincoli arbitrari sulla struttura della  $G$  risulta difficile una soluzione diretta del sistema non lineare matriciale come quella su presentata, ragion per cui usualmente si preferisce l'approccio alternativo di una ottimizzazione numerica diretta, se necessario anche vincolata, della funzione obbiettivo tramite la minimizzazione di:

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(P \bar{M}) \quad (14.9)$$

essendo  $P$  soluzione di:

$$(A - B_u G C_y)^T P + P(A - B_u G C_y) + W(G) = \bar{A}^T P + P \bar{A} + W(G) = 0. \quad (14.10) \quad \boxed{\text{lya1}}$$

In tale ambito è generalmente possibile l'utilizzo di un'ottimizzazione numerica non vincolata in quanto, assumendo che l'inizializzazione dei guadagni sia in grado di assicurare l'asintotica stabilità, condizione richiesta qualunque sia il metodo di soluzione adottato, ogni perdita di stabilità durante le iterazioni dell'ottimizzatore produrrà un peggioramento della funzione obbiettivo, ragion per cui l'ottimizzatore stesso potrà provvedere al mantenimento della stabilità, semplicemente limitando le variazioni dei guadagni utilizzabili ad ogni iterazione, opzione disponibile in tutti gli algoritmi allo stato dell'arte usualmente utilizzati.

Il mantenimento della condizione di asintotica stabilità ci assicura l'univoca risolubilità dell'equazione (14.10), così che per inizializzare la procedura iterativa di ottimizzazione nel caso di sistemi non asintoticamente stabili, si richiede di assegnare una matrice  $G$  di tentativo che assicuri la stabilità di  $A - BGC$ . Qualora tale inizializzazione non sia facilmente realizzabile si potrà utilizzare una qualche tecnica di traslazione degli autovalori di una quantità che li porti ad essere tutti con parte reale negativa <sup>3</sup>. Una volta partiti con tutti gli autovalori stabili, si seguirà allora una tecnica di continuazione tramite ottimizzazioni ripetute. Poiché ogni ciclo di ottimizzazione porterà il sistema sempre più lontano dall'instabilità sarà possibile rilassare la traslazione degli autovalori al raggiungimento della soluzione di ogni ciclo di continuazione, fino a giungere al problema finale di ottimizzazione vera e propria del sistema iniziale.

I più efficienti algoritmi di ottimizzazione numerica richiedono però, oltre al calcolo della funzione, anche il calcolo dei suoi gradienti rispetto alle variabili di progetto  $G_{ik}$ :

$$\text{Grad } F = \frac{1}{2} \frac{\partial \text{Tr}(P\bar{M})}{\partial G_{ik}} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \frac{\partial P}{\partial G_{ik}} \bar{M} \right). \quad (14.11) \quad \boxed{\text{gradF}}$$

Per rendersi conto della necessità della conoscenza dei gradienti di  $F$  rispetto ai guadagni nell'ambito di una ottimizzazione numerica si noti <sup>4</sup> che a partire da una  $G_i$  assegnata, all'iterazione  $i$ , il miglioramento di  $F_i$  viene ricercato variando  $G_i$  lungo una direzione ottimale  $\Delta$  in modo che:  $G_{i+1} = G_i + \alpha \Delta$ , con  $\alpha > 0$ , sia in grado di garantire che  $F_{i+1} < F_i$ . Potendo scrivere  $F_{i+1} = F_i + \text{Tr}(\text{Grad } F_i^T \Delta)$ , si vede che  $\Delta$  dovrà soddisfare la relazione di diminuzione:  $\text{Tr}(\text{Grad } F_i^T \Delta) < 0$ , fino al raggiungimento dell'ottimo per il quale si avrà:  $\text{Grad } F_i = 0$ . La scelta di  $\Delta$  dà origine a una serie di metodi su cui non possiamo-vogliamo dilungarci. Notiamo però che la direzione più semplice, generalmente non la più efficiente, che permette di garantire una diminuzione della funzione obiettivo è  $\Delta = -\text{Grad } F_i$ , per la quale vale, fino al raggiungimento dell'ottimo, la:  $-\text{Tr}(\text{Grad } F_i^T \text{Grad } F_i) < 0$ , da cui  $G_{i+1} = G_i - \alpha \text{Grad } F_i$ . La scelta del valore di  $\alpha$  viene poi fatta o con la ricerca numerica dell'ottimo monodimensionale lungo  $\text{Grad } F_i$  o con una ricerca che garantisca semplicemente che  $F_{i+1} < F_i$ , fermandosi quando si è apprezzabilmente vicini all'ottimo, la funzione non varia, e/o il  $\text{Grad } F_i$  è prossimo a zero. In generale ci si accontenta di una semplice ricerca in diminuzione nei passi iniziali, passando poi alla determinazione dell'ottimo locale solo quando ci si è avvicinati sensibilmente alla condizione ottimale cercata. Per maggiori dettagli si veda la nota bibliografica su richiamata. Si noti anche l'analogia con il semplice schema iterativo precedentemente presentato.

Il gradiente di  $P$  rispetto ai parametri può essere ottenuto attraverso l'equazione (14.10) come

$$\bar{A}_{/G_{ik}}^T P + \bar{A}^T P_{/G_{ik}} + P_{/G_{ik}} \bar{A} + P \bar{A}_{/G_{ik}} + W_{/G_{ik}} = 0, \quad (14.12)$$

$$\bar{A}^T P_{/G_{ik}} + P_{/G_{ik}} \bar{A} + \left( \bar{A}_{/G_{ik}}^T P + P \bar{A}_{/G_{ik}} + W_{/G_{ik}} \right) = 0. \quad (14.13) \quad \boxed{\text{lya2}}$$

Data la matrice  $P$  è quindi necessario per determinare ciascuna delle derivate  $P_{/G_{ik}}$  (che sono tante quanti i coefficienti di  $G$ ) risolvere un'equazione di Lyapunov, la (14.13). Nonostante tutte le equazioni di Lyapunov da risolvere per il calcolo dei gradienti mantengano invariate le matrici  $\bar{A}$ , e quindi anche la loro costosa riduzione a una forma canonica che ne renda efficiente la soluzione, il calcolo del gradiente attraverso questa procedura può risultare in ogni caso estremamente oneroso dal punto di vista computazionale. Si preferisce allora procedere attraverso un metodo alternativo che prevede la risoluzione dell'equazione di Lyapunov aggiunta, cioè quella in  $\Lambda$ :

$$\bar{A}\Lambda + \Lambda \bar{A}^T + \bar{M} = 0. \quad (14.14) \quad \boxed{\text{lya3}}$$

In questo modo possiamo riscrivere la (14.11) come

$$\text{Grad } F = \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \frac{\partial P}{\partial G_{ik}} \bar{M} \right) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left( P_{/G_{ik}} \left( \bar{A}\Lambda + \Lambda \bar{A}^T \right) \right). \quad (14.15)$$

<sup>3</sup>Si veda in proposito la parte relativa nelle tecniche di pesatura descritte nel capitolo successivo.

<sup>4</sup>Volendo approfondire la conoscenza dei metodi di ottimizzazione numerica, oltre la semplice visione elementare qui adottata, ci si rivolga a uno dei tanti buoni libri disponibili in letteratura, ad es.: Philip E. Gill, Walter Murray, Margaret H. Wright: *Practical optimization*, Academic Press, 1981.

Sfruttando le proprietà dell'operatore traccia "Tr", possiamo riscrivere quest'ultima espressione come

$$\text{Grad } F = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left( \Lambda \left( \bar{A}^T P_{/G_{ik}} + P_{/G_{ik}} \bar{A} \right) \right). \quad (14.16)$$

Usando ora la (14.13) si ottiene

$$\text{Grad } F = \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \Lambda \left( \bar{A}_{/G_{ik}}^T P + P \bar{A}_{/G_{ik}} + W_{/G_{ik}} \right) \right) \quad (14.17)$$

terminigradF

$$\text{Grad } F = \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \Lambda \left( 2\bar{A}_{/G_{ik}}^T P + W_{/G_{ik}} \right) \right). \quad (14.18)$$

terminigradF

In questo modo per il calcolo del gradiente è richiesta la determinazione delle sole derivate  $\bar{A}_{/G_{ik}}^T$  e  $W_{/G_{ik}}$ , da valutare qualunque sia la procedura di calcolo adottata, senza dover passare dalla risoluzione di tante equazioni di Lyapunov quanti sono i coefficienti di  $G$ , bensì solo attraverso la soluzione della equazione (14.14).

La flessibilità, anche se non scevra da problemi numerici, offerta da tale approccio è notevole e permette al progettista di porre ulteriori vincoli sulla struttura del controllore. Tali vincoli potranno essere dettati da considerazioni sulla facilità di implementazione, ad esempio decentralizzazione parziale o totale, o da considerazioni fisiche. Inoltre sarà possibile integrare ottimizzazione passiva, progetto dei termini di  $A$ , scelta di sensori e attuatori, in posizione e tipo, matrici  $B$  e  $C$ , con il progetto dei guadagni.

Si noti ora che il calcolo di  $P_{/G_{ik}}$  non deve nascondere il fatto che corrisponde al calcolo di  $F_{/G_{ik}}$ . Di conseguenza ciascun termine  $F_{/G_{ik}}$ , calcolato con la formula di cui sopra, corrisponde al termine  $i, k$  della matrice ottenuta con la (14.7c), con l'avvertenza di azzerarne i termini corrispondenti a quelli di  $G$  aventi valore assegnato, tipicamente nullo. Nella pratica di fatto si utilizza la (14.7c) quando non vengono imposti vincoli di struttura sulla  $G$  mentre in presenza di termini di  $G$  di valore assegnato, tipicamente nullo, generalmente conviene l'uso delle (14.18), poiché permette di evitare il calcolo di termini inutili. L'uso della (14.18) è poi praticamente obbligatorio nel caso dell'ottimizzazione integrata sopra accennata.

Va richiamata infine la possibilità dell'utilizzo di una approssimazione al secondo ordine della funzione di merito. Tale approssimazione richiede naturalmente il calcolo del relativo Hessiano e quindi delle derivate seconde, con tecniche del tutto analoghe a quelle precedentemente presentate. In tal caso va però rimarcato che non si può evitare di risolvere tante equazioni (14.13) quanti sono i parametri liberi, sviluppando le formule si può verificare che non si sanno calcolare le derivate seconde senza conoscere tutte le derivate prime. Ragion per cui si dovrà soppesare il vantaggio di una possibile più rapida convergenza, generalmente offerta dalla conoscenza dell'Hessiano con il relativo costo, computazionale e di sviluppo del programma, non di rado superiore all'utilizzo di metodi basati sulla conoscenza del solo gradiente (per un possibile approfondimento si veda il riferimento bibliografico già menzionato).

Per i possibili problemi numerici, oltre alla stabilizzazione di sistemi instabili, ricordiamo l'esistenza di condizioni multiple di stazionarietà, con la conseguente possibilità di convergenza su ottimi locali, da cui la necessità di ripetere l'ottimizzazione partendo da diverse e disparate soluzioni iniziali, almeno per una verifica di quanto ottenuto; condizioni di stazionarietà 'piatte', cioè con soluzioni che variano di poco il valore della cifra di merito anche con significative variazioni dei parametri di progetto.

Notiamo infine che, in analogia con quanto già presentato per la più semplice controreazione diretta delle misure, si può procedere, in linea di principio, con le stesse modalità alla progettazione di un controllore dinamico definendo il sistema aumentato:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ u_c \end{Bmatrix} \quad (14.19)$$

$$\begin{Bmatrix} y \\ y_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{yu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ u_c \end{Bmatrix} \quad (14.20)$$

Su tale sistema si potrà quindi progettare una matrice dei guadagni:

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{yy} & G_{yc} \\ G_{cy} & G_{cc} \end{bmatrix} \quad (14.21)$$

trascurando dapprima il termine non strettamente proprio,  $D_{yu} = 0$ , per poi passare alla realizzazione del controllore dinamico:

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \quad (14.22)$$

$$u = -G_c x_c - G_y y \quad (14.23)$$

con:

$$A_c = -(I - G_{cy} D_{yu})^{-1} G_{cc} \quad B_c = -(I - G_{cy} D_{yu})^{-1} G_{cy} \quad (14.24)$$

$$G_c = (I - G_{yy} D_{yu})^{-1} G_{yc} \quad G_y = (I - G_{yy} D_{yu})^{-1} G_{yy} \quad (14.25)$$

Si noti che, tramite l'utilizzo di una ottimizzazione vincolata, sarà possibile formulare  $A_c$ , sempre quadrata, in modo da garantire la stabilità asintotica del compensatore in ciclo aperto. Il su detto "in linea di principio" sta ad indicare che quanto sopra illustrato non può essere utilizzato facilmente con forza bruta a causa delle possibili difficoltà nel determinare una  $G$  iniziale stabilizzante, che deve per forza contenere anche dei termini  $G_{cy}$  e  $G_{yc}$ , mancando i quali la soluzione numerica non accoppierà mai il compensatore con il sistema da controllare. Inoltre, anche se è vero che all'aumento dell'ordine del compensatore aumentano i "gradi di libertà" di progetto, compensatori di ordine eccessivamente elevato sono costosi in termini di impegno di calcolo e portano spesso a molti minimi relativi appiattiti che possono rendere difficoltosa la convergenza della procedura di ottimizzazione.

A giustificazione di quanto già fatto nell'introduzione del presente capitolo, quando si sono controreazionate le misure di accelerazione modificando direttamente la matrice di massa, ricordiamo infine che spesso la presenza del termine  $D_{yu}$  deriva da misure contenenti la derivata dello stato, tipicamente accelerazioni ma non solo, cioè da relazioni d'uscita del tipo:  $y = C_y x + C_{\dot{y}} \dot{x}$ , previa sostituzione di  $\dot{x}$  con la:  $\dot{x} = Ax + B_u u$ . L'approccio sub-ottimale qui presentato permetterebbe di scrivere direttamente:  $(I + B_u G C_{\dot{y}}) \dot{x} = (A - B_u G C_y) x$ . Si potrebbe poi procedere o invertendo la  $(I + B_u G C_{\dot{y}})$ , per ricondursi alla forma standard, o modificando l'equazione di Lyapunov nel seguente modo, forma generalizzata di detta equazione, che riportiamo senza dimostrazione, per i più interessati/curiosi:

$$(A - B_u G C_y)^T P (I + B_u G C_{\dot{y}}) + (I + B_u G C_{\dot{y}})^T P (A - B_u G C_y) + W(G) = 0 \quad (14.26)$$

Non ci dilunghiamo oltre su questo piccolo chiarimento, anche se potrebbe essere vantaggioso in alcune applicazioni particolari.

Concludiamo facendo notare che, contrariamente al controllore dinamico osservatore 13.1, precedentemente visto, il controllore 14.22 risulta essere semplicemente proprio. Chiaramente, omettendo gli opportuni termini matriciali, nulla impedisce però di progettare anche quest'ultimo in forma strettamente propria, cosa sempre possibile stante la possibilità di assegnare un'opportuna struttura desiderata del controllore. D'altro canto, come già accennato, per i controllori-osservatori di elevate dimensioni, onde ridurre gli oneri computazionali, si procede spesso ad una loro realizzazione in forma ridotta, sia sulla base del loro contenuto in frequenza che sui loro aspetti di bassa controllabilità-osservabilità, che si vedranno nel seguito al Cap. 19. Come ben sappiamo tale riduzione si può effettuare sia per troncamento, quindi mantenendo la proprietà stretta, che con residualizzazione statica, onde soddisfare il recupero dei termini in continua (a frequenza nulla). In quest'ultimo caso il controllore così ridotto risulterà solo semplicemente proprio. In tal senso, non è raro che alcune volte la progettazione del controllore a struttura vincolata qui presentato parta da un controllore-osservatore ridotto, sia esso strettamente o semplicemente propria.



## Capitolo 15

# ALCUNE TECNICHE PER LA SCELTA DEI PESI/OBIETTIVI NEL CONTROLLO OTTIMO

In questa sezione verrà brevemente presentata una rassegna di alcune possibili tecniche per la scelta dei pesi da assegnare alle prestazioni utilizzate nella funzione obiettivo del controllo ottimo/sub-ottimo. Ricordiamo però che alcuni criteri sono già stati dati in relazione ai travasi di controllo/osservazione e alla possibilità di migliorare la robustezza del controllo sullo stato con osservatore.

### 15.1 Pesatura attraverso i valori massimi attesi

La scelta più semplice che si può pensare di effettuare è quella di assegnare a ciascuna misura di prestazione e a ciascun segnale di controllo un peso pari all'inverso del quadrato del valore massimo che si può ritenere accettabile. In questo modo si ottengono delle matrici di peso diagonali con dei valori che sono tanto più grandi quanto più piccola è la variabilità che si vuole ottenere con il controllo attivo per una determinata misura di prestazione/segnale di controllo. Si ricorda infatti che i pesi non hanno senso in valore assoluto; quello che conta è bensì il valore relativo che essi assumono all'interno dell'espressione dell'indice di merito. È allora spesso utile introdurre un ulteriore fattore di scala  $\rho$  che fornisce il rapporto fra le ampiezze dei controlli rispetto a quelle degli stati

$$F = \frac{1}{2} \int_0^\infty (z^T W_{zz} z + \rho u^T W_{uu} u) dt. \quad (15.1)$$

Tanto più  $\rho \rightarrow \infty$  tanto minore sarà il valore dei segnali introdotti per controllare il sistema e quindi l'autorità del controllore. Al contrario per  $\rho \rightarrow 0$  si ottengono dei segnali sempre più ampi e delle frequenze proprie del sistema in anello chiuso che tendono sempre più verso  $-\infty$ . Usare  $\rho = 0$  significa non porre alcun limite alle forze di controllo; tale scelta non è però possibile nel controllo ottimo classico perché abbiamo visto che è necessario poter invertire la matrice dei pesi  $\rho W_{uu}$  per poter ottenere la matrice dei guadagni. Dall'espressione della  $F$  in funzione delle misure di prestazione  $z$  bisogna poi passare a quella classica in funzione degli stati attraverso le relazioni di uscita

$$F = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T C^T W_{zz} C x + 2u^T D^T W_{zz} C x + u^T (D^T W_{zz} D + \rho W_{uu}) u) dt. \quad (15.2)$$

F-trasf-misu

In questo caso la nuova matrice di peso dello stato  $Q = C^T W_{zz} C$ , non sarà in generale di forma diagonale, e inoltre comparirà il termine di accoppiamento fra stato e ingressi.



## 15.2 Traslazione autovalori in direzione dell'asse reale

È possibile garantire che gli autovalori del sistema controllato siano tutti con parte reale al di là di una certa soglia  $\alpha$ . Allo scopo prendiamo come funzione obiettivo la seguente

$$F = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{2\alpha t} (x^T W_{zz} x + u^T W_{uu} u) dt, \quad (15.3)$$

$$F = \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^{\alpha t} x^T W_{zz} x e^{\alpha t} + e^{\alpha t} u^T W_{uu} u e^{\alpha t}) dt \quad (15.4)$$

Questo corrisponde a minimizzare la classica funzione obiettivo

$$F = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\bar{x}^T W_{zz} \bar{x} + \bar{u}^T W_{uu} \bar{u}) dt \quad (15.5)$$

dove le variabili soprassegnate sono legate a quelle originarie attraverso la seguente trasformazione

$$\bar{x} = x e^{\alpha t}. \quad (15.6)$$

$$\bar{u} = u e^{\alpha t}. \quad (15.7)$$

Essendo allora:

$$\dot{\bar{x}} = e^{\alpha t} (\dot{x} + \alpha x). \quad (15.8)$$

possiamo scrivere:

$$\dot{\bar{x}} e^{-\alpha t} = (A + \alpha I)x + Bu, \quad (15.9)$$

$$\dot{\bar{x}} e^{-\alpha t} = (A + \alpha I)\bar{x} e^{-\alpha t} + B\bar{u} e^{-\alpha t}, \quad (15.10)$$

$$\dot{\bar{x}} = (A + \alpha I)\bar{x} + B\bar{u}. \quad (15.11)$$

Il sistema con le variabili soprassegnate ha una matrice degli stati  $(A + \alpha I)$  e quindi i suoi autovalori sono ottenuti semplicemente traslando di una quantità  $\alpha$  verso destra in direzione dell'asse reale quelli del sistema originario. L'applicazione del controllo ottimo sul sistema soprassegnato garantisce che tutti gli autovalori dello stesso sistema saranno nel semipiano sinistro. Riportandosi nelle variabili originarie, tutti gli autovalori saranno quindi a sinistra dell'asse parallelo all'asse immaginario e passante per  $-\alpha$ .

## 15.3 Inseguimento dei modelli in forma implicita: approssimazione di autosoluzioni desiderate

Parleremo di inseguimento dei modelli in forma implicita quando vogliamo imporre delle autosoluzioni, ossia delle nuove coppie autovalori/autovettori, o comunque più in generale una certa matrice di stato  $A_d$ , in modo da conferire al nostro sistema, tramite il sistema di controllo, una dinamica il più possibile prossima a un modello di comportamento desiderato. Qui privilegeremo un po' la presentazione verso il caso in cui si impone l'autostruttura, differenziandosi il caso generico solo per le diverse modalità con cui si sceglie il modello di sistema desiderato. Assegnate le autosoluzioni desiderate  $\lambda_d$  e  $\Phi_d$  si può assemblare la matrice di stato desiderata per il sistema in anello chiuso  $A_d = \Phi_d \Lambda_d \Phi_d^{-1}$ . La qualificazione di "implicito" è invece associata al fatto che l'inseguimento del modello non avviene cercando di minimizzare le differenze di risposta a livello di stato, ma delle derivate temporali dello stesso. Come indice di merito da minimizzare prendiamo pertanto la differenza fra lo stato derivato del sistema originario e quello desiderato

$$F = \frac{1}{2} \int_0^\infty ((\dot{x} - \dot{x}_d)^T W_{zz} (\dot{x} - \dot{x}_d) + \rho u^T W_{uu} u) dt. \quad (15.12)$$

Ricordando che

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (15.13)$$

imponiamo al modello da inseguire che la derivata dello stato desiderato sia data da:

$$\dot{x}_d = A_d x, \quad (15.14)$$

forzando così implicitamente anche l'inseguimento dello stato. Possiamo allora scrivere:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( ((A - A_d)x + Bu)^T W_{zz} ((A - A_d)x + Bu) + \rho u^T W_{uu} u \right) dt, \\ F &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( x^T (A - A_d)^T W_{zz} (A - A_d)x + x^T (A - A_d)^T W_{zz} Bu + u^T B^T W_{zz} (A - A_d)x \right. \\ &\quad \left. + u^T (B^T W_{zz} B + \rho W_{uu}) u \right) dt. \end{aligned} \quad (15.15)$$

Da quanto sopra dovrebbe risultare evidente che l'inseguimento implicito si può combinare, tramite opportuna pesatura, con le altre prestazioni semplicemente aggiungendo ad esse:

$$z = (A - A_d)x + Bu \quad (15.16)$$

In questo modo si ottiene un problema di controllo ottimo in cui sono presenti i termini di accoppiamento fra stato e ingressi. La scelta degli autovalori desiderati viene solitamente effettuata sulla base di esigenze di progetto che possono richiedere l'aumento dello smorzamento del sistema o lo spostamento di alcune frequenze, ponendo attenzione nel non richiedere una impossibile azione di controllo a causa di richieste eccessive. Per gli autovettori si può invece scegliere di mantenere le forme invariate oppure di selezionarli in modo da cercare di insensibilizzare il valore del corrispondente autovalore rispetto ad un parametro  $p$ . Sappiamo infatti che data una matrice di stato  $A$  non simmetrica, avente autovettori destri  $x_i$  e autovettori sinistri  $y_i$ , è facile verificare che

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p} = y_i^T \frac{\partial A}{\partial p} x_i. \quad (15.17)$$

Infine si ricorda che quando si modella un sistema strutturale agli stati, gli autovalori,  $\lambda_i = \sigma + j\omega$ , e gli autovettori,  $\underline{\Phi}_i$ , saranno in generale complessi e coniugati. Inoltre gli autovettori sono sempre composti da una parte relativa alle coordinate di posizione ed una relativa alle coordinate di velocità. Quest'ultima sarà sempre pari al prodotto  $\lambda_i \underline{\Phi}_i$ . Questa struttura dovrà essere rispettata se si vuole rappresentare un classico modello meccanico, matrici di massa-smorzamento-rigidezza, per cui, se si vogliono modificare gli autovalori ma non gli autovettori, la rappresentazione spettrale della matrice di stato desiderata, comunque sempre reale a causa delle coppie coniugate di autosoluzioni, sarà scritta come:

$$A_d = \begin{bmatrix} \underline{\Phi}_i \\ \lambda_i \underline{\Phi}_i \end{bmatrix} \text{Diag} \{ \lambda_i \} \begin{bmatrix} \underline{\Phi}_i \\ \lambda_i \underline{\Phi}_i \end{bmatrix}^{-1} \quad (15.18)$$

Ricordiamo inoltre che chiamando  $\underline{x}_i^T = [\underline{\Phi}_i \quad \lambda_i \underline{\Phi}_i]^T$  l'autovettore, definendo  $Re$  e  $Im$  le parti, reale e immaginaria, di numeri complessi, associando ad ogni autovalore la matrice  $\Lambda_i = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$ , lo stesso risultato si otterrà operando con la seguente forma completamente reale:

$$A_d = [Re(\underline{x}_i) \quad Im(\underline{x}_i)] \text{Diag} \{ \Lambda_i \} [Re(\underline{x}_i) \quad Im(\underline{x}_i)]^{-1} \quad (15.19)$$

Concludiamo notando che spesso, specie per grandi modelli, non si è interessati a inseguirne tutto lo stato ma solo una opportuna combinazione di alcune sue componenti  $y = Cx$ . In tal caso scriveremo:

$$F = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( (C\dot{x} - \dot{x}_d)^T W_{zz} (C\dot{x} - \dot{x}_d) + \rho u^T W_{uu} u \right) dt. \quad (15.20)$$

$$\dot{x}_d = A_d Cx, \quad (15.21)$$

$$F = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( ((CA - A_d C)x + CBu)^T W_{zz} ((CA - A_d C)x + CBu) + \rho u^T W_{uu} u \right) dt,$$

da cui, con un semplice svolgimento dei calcoli relativi, ci si ricondurrà alla solita formulazione di un controllo ottimo con cifra di merito accoppiante  $x$  e  $u$ . Anche in questo caso si può vedere come l'inseguimento implicito parziale si può combinare, sempre tramite opportuna pesatura, con le altre prestazioni aggiungendo ad esse:

$$z = (CA - A_d C)x + CBu \quad (15.22)$$

## 15.4 Pesatura in frequenza

Nell'affrontare il problema di sintesi di un sistema di controllo si parte sovente da specifiche di progetto, in termini di banda passante, prestazioni e robustezza, espresse nel dominio delle frequenze. Data la natura intrinsecamente legata al dominio del tempo del controllo ottimo sembrerebbe apparentemente arduo tradurre queste specifiche in scelte dei parametri di progetto per il controllore attraverso LQR. In linea di principio potrebbe essere utile risolvere il problema del controllo ottimo in frequenza in modo da utilizzare matrici di pesatura  $W_{zz}$  e  $W_{uu}$  che variano in funzione di  $\omega$ . Si potrebbe ad esempio pensare di attenuare i controlli ad alta frequenza utilizzando una  $W_{uu}$  avente valori opportunamente crescenti con  $\omega$ . È però possibile dimostrare che una pesatura di questo tipo è ottenibile operando direttamente con l'algoritmo LQR nel dominio del tempo su un sistema dinamico modificato rispetto all'originale attraverso l'introduzione di appropriati filtri sulle prestazioni e sul controllo. Allora, volendo attuare il sistema con un controllo filtrato, si progetterà un controllo intermedio  $u_f$  applicando poi le sue componenti, opportunamente filtrate, ossia:

$$\dot{x}_u = A_{uf}x_u + B_{uf}u_f \quad (15.23)$$

$$u = C_{uf}x_u + D_{uf}u_f \quad (15.24)$$

nel dominio del tempo e, definendo  $H_u(\omega) = C_{uf}(j\omega I - A_{uf})^{-1}B_{uf} + D_{uf}$ :

$$u(\omega) = H_u(\omega)u_f(\omega) \quad (15.25)$$

in frequenza. Così i filtri sulle prestazioni,  $z = C_zx + D_zu$ , avranno una rappresentazione del tipo:

$$\dot{x}_z = A_{zf}x_z + B_{zf}(C_zx + D_zu) = A_{zf}x_z + B_{zf}(C_zx + D_zC_{uf}x_u + D_zD_{uf}u_f) \quad (15.26)$$

$$z_f = C_{zf}x_z + D_{zf}(C_zx + D_zu) = C_{zf}x_z + D_{zf}(C_zx + D_zC_{uf}x_u + D_zD_{uf}u_f) \quad (15.27)$$

nel dominio del tempo e, definendo  $H_z(\omega) = C_{zf}(j\omega I - A_{zf})^{-1}B_{zf} + D_{zf}$ :

$$z_f(\omega) = H_z(\omega)z(\omega) \quad (15.28)$$

in frequenza o, volendo anche i dettagli:

$$z_f(\omega) = H_z(\omega)(C_zx(\omega) + D_zu(\omega)) = H_z(\omega)(C_zx(\omega) + D_zC_{uf}x_u(\omega) + D_zD_{uf}u_f(\omega)) \quad (15.29)$$

Il nuovo sistema aumentato avrà la seguente struttura:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_z \\ \dot{x}_u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & BC_{uf} \\ B_{zf}C_z & A_{zf} & B_{zf}D_zC_{uf} \\ 0 & 0 & A_{uf} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_z \\ x_u \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} BD_{uf} \\ B_{zf}D_zD_{zf} \\ B_{uf} \end{bmatrix} u_f. \quad (15.30)$$

Sarà utile notare che, applicandosi un filtro a ogni prestazione e/o controllo, le matrici di stato dei filtri saranno diagonali a blocchi. Su questo nuovo sistema andiamo ad ottimizzare la funzione obiettivo

$$F = \frac{1}{2} \int_0^\infty (z_f^T W_{zz} z_f + \rho u_f^T W_{uu} u_f) dt. \quad (15.31)$$

timew

Per comprendere come mai la strutturazione sopra sviluppata può corrispondere a una pesatura in frequenza ricordiamo il teorema di Parseval<sup>1</sup>, che, per generiche funzioni  $\underline{w}(t)$  causali, come le nostre prestazioni e controlli, e una generica pesatura reale  $W$ , simmetrica e al più semidefinita positiva, si può scrivere:

$$\int_0^{+\infty} \underline{w}^T(t) W \underline{w}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{w}^T(t) W \underline{w}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{w}}^H(j\omega) W \underline{\mathbf{w}}(j\omega) d\omega, \quad (15.32)$$

dove con  $\underline{\mathbf{w}}$  si è indicata la trasformata di Fourier della  $\underline{w}$  e con  $()^H$  l'operazione di trasposizione e coniugazione nel campo complesso. L'equazione (15.31) in frequenza diviene allora:

$$F = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (z_f(\omega)^H W_{zz} z_f(\omega) + \rho u_f(\omega)^H W_{uu} u_f(\omega)) d\omega. \quad (15.33)$$

Tenendo conto delle matrici di trasferimento dei filtri su controllo e prestazioni possiamo riscrivere:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (z(\omega)^H H_z(\omega)^H W_{zz} H_z(\omega) z(\omega) + \rho u(\omega)^H H_u(\omega)^{-H} W_{uu} H_u^{-1}(\omega) u(\omega)) d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (z(\omega)^H \overline{W}_{zz}(\omega) z(\omega) + \rho u(\omega)^H \overline{W}_{uu}(\omega) u(\omega)) d\omega \end{aligned} \quad (15.34)$$

essendo le matrici  $\overline{W}_{zz} = \overline{W}_{zz}^H = H_z(\omega)^H W_{zz} H_z(\omega)$  e  $\overline{W}_{uu} = \overline{W}_{uu}^H = H_u(\omega)^{-H} W_{uu} H_u^{-1}(\omega)$  hermitiane. L'ultima formula qui sopra dimostra appunto che l'applicazione dell'usuale progettazione LQR al modello esteso coi filtri di prestazioni e controlli corrisponde a una pesatura in frequenza dell'obiettivo originale. Così applicando un filtro passa basso alle prestazioni si potrà garantire che le stesse vengano pesate di più nella relativa banda di interesse con limitazioni tendenti a zero, per un filtro strettamente proprio, o a un valore costante desiderato, filtro semplicemente proprio, al di fuori di essa. Se al posto del passa basso, o in combinazione con esso, si utilizzasse un filtro passa banda stretta si avrebbe una forte pesatura sulla relativa banda passante, con conseguente effetto trappola (notching) sulla prestazione corrispondente. La presenza delle funzioni di trasferimento inverse nella pesatura in frequenza del controllo permette invece o di limitare in modo crescente l'azione del controllo alle alte frequenze, per un filtro strettamente proprio, o di limitarla tramite una pesatura tendente a un valore costante, per un filtro semplicemente proprio. Ricordando poi che le funzioni di trasferimento degli attuatori sono solitamente passa basso, sarà utile notare che l'effetto di pesatura del controllo è ottenuto automaticamente includendo la loro dinamica nel modello di progetto. In tal caso la possibile ulteriore aggiunta di una pesatura sui controlli servirà ad ottenere una ancor più alta attenuazione della loro azione alle alte frequenze. Considerazioni analoghe valgono per le misure, ovviamente qualora queste siano parte delle prestazioni. Si vede così che un filtro passa basso strettamente proprio e di ordine opportuno può risultare utile per evitare effetti di travaso di controlli. Come ultima annotazione rileviamo che, siccome il filtro è costruito da noi, il suo stato, sia esso analogico, cosa rara al giorno d'oggi, che digitale, sarà completamente accessibile, per cui non è necessario realizzare un osservatore per il sistema aumentato completo, ma soltanto quello usuale relativo alla sola ricostruzione dello stato  $x$ . Si noti però che la citata inclusione della pesatura in frequenza, implicitamente ottenuta includendo le dinamiche di sensori e attuatori nel modello di progetto, non permetterà di fruire di tale beneficio, salvo una possibile successiva riduzione dell'ordine del controllore realizzato sulla base delle tecniche che illustreremo nel seguito. Anticipiamo poi immediatamente che un effetto analogo si può ottenere nella progettazione degli osservatori, ossia mediante la generazione di disturbi e di condizioni iniziali applicate indirettamente al sistema tramite l'aggiunta di opportune dinamiche filtranti<sup>2</sup>. Tale concetto fa capo all'idea di filtri di forma atti a meglio caratterizzare le caratteristiche dinamiche dei disturbi

<sup>1</sup>  $\int_{-\infty}^{\infty} \underline{w}^T(t) W \underline{w}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{w}}^T(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega W \underline{w}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{w}}(j\omega)^T d\omega W \int_{-\infty}^{\infty} \underline{w}(t) \exp(-(-j\omega)t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{w}}(j\omega)^T W \underline{\mathbf{w}}(-j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{w}}(j\omega)^T W \underline{\mathbf{w}}(j\omega)^* d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{w}}(j\omega)^*{}^T W \underline{\mathbf{w}}(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{w}}(j\omega)^H W \underline{\mathbf{w}}(j\omega) d\omega$ ; dove  $(.)^*$  indica coniugazione e  $(.)^H$   $((.)^*)^T$  trasposizione e coniugazione. Si noti anche che le trasformate di Fourier possono interscambiabilmente apparire sia come funzioni di  $j\omega$  che, più semplicemente, di  $\omega$ .

<sup>2</sup> La comprensione immediata del senso di questa frase sarà una buona indicazione di maturazione delle proprie conoscenze

e sarà ancor meglio precisata nell'ambito della modellazione stocastica stazionaria che vedremo nel seguito <sup>3</sup>.

## 15.5 SWLQR

La sigla SWLQR indica la procedura nota come Sensitivity Weighted LQR, ovvero controllo ottimo con pesatura delle sensitività. L'obiettivo di tale tecnica è quello di scegliere i pesi da utilizzare in modo da ridurre la sensibilità delle risposte del sistema in anello chiuso rispetto a certi parametri. In tal modo, anche nei casi in cui si abbia una grande incertezza sul valore che assumeranno taluni parametri del sistema durante la vita operativa, è possibile sintetizzare dei controllori che siano sufficientemente robusti. L'idea è quella di aggiungere alla funzione obiettivo un termine del tipo  $x_{/p}^T W_p x_{/p}$

$$F = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( x^T W_{zz} x + u^T W_{uu} u + \frac{\partial x^T}{\partial p} W_p \frac{\partial x}{\partial p} \right) dt. \quad (15.35) \quad \text{swlqr-f}$$

Pesando molto questi termini, il processo di minimizzazione ci assicura di raggiungere un sistema finale in cui le variazioni dello stato al variare del parametro  $p$  sono contenute. Per ottenere la derivata del vettore di stato rispetto al parametro  $p$  possiamo scrivere che

$$\dot{x}_{/p} = A_{/p} x + A x_{/p} + B_{/p} u, \quad (15.36)$$

$$\dot{x}_{/p} = A x_{/p} + (A_{/p} x + B_{/p} u). \quad (15.37) \quad \text{sys-devp}$$

L'equazione (15.37) ci dice che la derivata si ottiene come soluzione di un sistema dinamico forzato dai vettori  $x$  e  $u$ . A regime si otterrà che

$$x_{/p} = -A^{-1} (A_{/p} x + B_{/p} u), \quad (15.38)$$

Sostituendo questa espressione nella (15.35) si ottiene una funzione di peso che contiene anche i termini di accoppiamento fra stato e ingressi.

---

<sup>3</sup>In dipendenza dell'andamento del corso potrebbe essere anche già stata vista

## Capitolo 16

# CONTROLLO OTTIMO IN PRESENZA DI DISTURBI STOCASTICI (LQG)

Sviluppiamo ora un controllore ottimo sullo stato assumendo disturbi stocastici. Il modello, sistema e relative prestazioni sarà il solito, con la differenza però che il vettore disturbo  $d$  sul sistema è costituito da rumori bianchi ergodici a media nulla e matrice di intensità  $W_{dd}$ :

ottgauss1

$$\dot{x} = (A - B_u G) x + B_d d = \bar{A} x + B_d d, \quad (16.1a)$$

$$z = (C_z - D_{zu} G) x = \bar{C}_z x. \quad (16.1b)$$

Si noti che tale formulazione è di validità più ampia, in quanto facilmente estendibile a disturbi stocastici non rappresentabili come rumori bianchi tramite aumento del sistema con la definizione di opportuni filtri di forma, aventi in ingresso un rumore bianco e in uscita il disturbo effettivamente applicato.

Ci riferiremo quindi a un sistema asintoticamente stabile, in  $\bar{A}$ , disturbato da una forzante ergodica, pertanto la cifra di merito sarà ancora di tipo quadratico ma, per assumere un valore finito, andrà valutata in media, secondo la solita definizione di valore atteso lungo la storia temporale:

$$F = \frac{1}{2} \int_0^\infty (z^T W_{zz} z + u^T W_{uu} u) dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T W(G) x) dt = \frac{1}{2} \text{Tr}(W(G) \sigma_{xx}^2) \quad (16.2)$$

ottgauss2

essendo  $\sigma_{xx}^2$  soluzione della solita equazione di Lyapunov:

$$\bar{A} \sigma_{xx}^2 + \sigma_{xx}^2 \bar{A}^T + B_d W_{dd} B_d^T = 0 \quad (16.3)$$

ottgauss3

Si noti che, ancora una volta, il termine  $d$  non è presente nelle prestazioni in quanto porterebbe nella cifra di merito la varianza di un rumore bianco, che è infinita.

Siamo pertanto in grado di utilizzare quanto già visto in precedenza riconducendo il problema al corrispondente non vincolato, scritto in forma estesa:

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(((C_z^T - G^T D_{zu}^T) W_{zz} (C_z - D_{zu} G) + G^T W_{uu} G) \sigma_{xx}^2 + \Lambda((A - B_u G) \sigma_{xx}^2 + \sigma_{xx}^2 (A^T - G^T B_u^T) + B_d W_{dd} B_d^T)) \quad (16.4)$$

ottgauss4

Si tratta quindi di calcolare le usuali condizioni di stazionarietà rispetto alle variabili  $G$ ,  $\sigma_{xx}^2$  e  $\Lambda$ . Esse sono le seguenti

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}^2} = & (A^T - G^T B_u^T) \Lambda + \Lambda (A - B_u G) + \\ & (C_z^T - G^T D_{zu}^T) W_{zz} (C_z - D_{zu} G) + (G^T W_{uu} G) = 0 \end{aligned} \quad (16.5a) \quad \text{ottgauss5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \Lambda} = (A - B_u G) \sigma_{xx}^2 + \sigma_{xx}^2 (A^T - G^T B_u^T) + B_d W_{dd} B_d^T = 0 \quad (16.5b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial G} = (W_{uu} + D_{zu}^T W_{zz} D_{zu}) G - (B_u^T \Lambda + D_{zu}^T W_{zz} C_z) = 0, \quad (16.5c)$$

da cui

$$G = (W_{uu} + D_{zu}^T W_{zz} D_{zu})^{-1} (B_u^T \Lambda + D_{zu}^T W_{zz} C_z) \quad (16.6)$$

Si vede che il risultato è esattamente lo stesso ottenuto nel caso del controllo ottimo ad orizzonte infinito per perturbazione delle condizioni iniziali e disturbi impulsivi. Può anche essere interessante notare però che l'equazione algebrica di Riccati risolvibile si ottiene sostituendo la matrice  $G$  nell'equazione di Lyapunov in  $\Lambda$ . Passaggio che non ripetiamo essendo totalmente analogo a quello già visto in precedenza.

## Capitolo 17

# OSSERVATORE OTTIMO GAUSSIANO

Sfruttando le conoscenze acquisite sulla risposta stocastica di un sistema lineare tempo invariante asintoticamente stabile, vogliamo ora determinare un osservatore ottimo quando il sistema sia sollecitato da disturbi approssimabili come dei rumori bianchi, con misure anch'esse soggette ad errori/disturbi dello stesso tipo. Tale modello è di validità assolutamente generale, in quanto il caso di disturbi stocastici non rappresentabili come rumori bianchi può essere ricondotto a questo semplicemente attraverso la definizione di opportuni filtri di forma, aventi in ingresso un rumore bianco e in uscita il rumore effettivamente applicato al sistema.

Riprendiamo allora le equazioni del sistema soggetto a disturbi

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_d d, \quad (17.1a)$$

$$y = C_y x + D_{yu} u + D_{yd} d + D_{yr} r, \quad (17.1b)$$

il corrispondente osservatore

$$\begin{aligned} \dot{o} &= A_o + B_u u + L(y - y_o) \\ y_o &= C_y o + D_{yu} u \end{aligned} \quad (17.2)$$

e quindi l'errore di stima  $\dot{e} = \dot{x} - \dot{o}$ ,

$$\dot{e} = (A - LC_y)e + (B_d - LD_{yd})d - LD_{yr}r = \bar{A}e + \bar{B}_d d - LD_{yr}r \quad (17.3)$$

La varianza  $\sigma_{ee}$  dell'errore sarà pertanto ottenibile attraverso l'equazione di Lyapunov

$$(A - LC_y)\sigma_{ee}^2 + \sigma_{ee}^2(A^T - C_y^T L^T) + [\bar{B}_d \quad -LD_{yr}] W [\bar{B}_d \quad -LD_{yr}]^T = 0 \quad (17.4)$$

eq-var-err1

dove  $W$  è la matrice delle intensità dei rumori bianchi

$$W = \begin{bmatrix} W_{dd} & W_{dr} \\ W_{rd} & W_{rr} \end{bmatrix}.$$

Nel caso in cui i due rumori bianchi siano generati in maniera indipendente l'uno dall'altro, potremo supporre che essi siano scorrelati e che quindi i termini di accoppiamento  $W_{dr}$  e  $W_{rd} = W_{dr}^T$  siano nulli. Dalla (17.4) si ottiene

$$\begin{aligned} (A - LC_y)\sigma_{ee}^2 + \sigma_{ee}^2(A^T - C_y^T L^T) + \bar{B}_d W_{dd} \bar{B}_d^T - \\ \bar{B}_d W_{dr} D_{yr}^T L^T - LD_{yr} W_{rd} \bar{B}_d^T + LD_{yr} W_{rr} D_{yr}^T L^T = 0 \end{aligned} \quad (17.5)$$

L'osservatore ottimo sarà quello in grado di minimizzare la varianza dell'errore di osservazione. Essendo tale varianza nel caso generale una matrice, dovremo minimizzare una sua misura in norma, come ad esempio la sua traccia. Scegliendo di dare anche la possibilità di pesare diversamente le



varie componenti di stima dell'errore l'obiettivo sarà quindi la ricerca della matrice dei guadagni  $L$  tale che

$$\min_L (\text{Tr}(W_e \sigma_{ee}^2)) . \quad (17.6)$$

A questo punto potremo cercare il minimo non vincolato rispetto a  $\sigma_{ee}^2$ ,  $L$ ,  $\Lambda$  del seguente funzionale, scritto in forma estesa:

$$f = \text{Tr}(W_e \sigma_{ee}^2 + \Lambda((A - LC_y)\sigma_{ee}^2 + \sigma_{ee}^2(A^T - C_y^T L^T) + (B_d - LD_{yd})W_{dd}(B_d - LD_{yd})^T - (B_d - LD_{yd})W_{dr}D_{yr}^T L^T - LD_{yr}W_{rd}(B_d - LD_{yd})^T + LD_{yr}W_{rr}D_{yr}^T L^T)) \quad (17.7)$$

Le corrispondenti condizioni di stazionarietà sono:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ee}^2} = \Lambda(A - LC_y) + (A^T - C_y^T L^T)\Lambda + W_e = 0 \quad (17.8a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \Lambda} = (A - LC_y)\sigma_{ee}^2 + \sigma_{ee}^2(A^T - C_y^T L^T) + (B_d - LD_{yd})W_{dd}(B_d - LD_{yd})^T - (B_d - LD_{yd})W_{dr}D_{yr}^T L^T - LD_{yr}W_{rd}(B_d - LD_{yd})^T + LD_{yr}W_{rr}D_{yr}^T L^T = 0 \quad (17.8b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial L} = L(D_{yd}W_{dd}D_{yd}^T + D_{yd}W_{dr}D_{yr}^T + D_{yr}W_{rd}D_{yd}^T + D_{yr}W_{rr}D_{yr}^T) - (\sigma_{ee}^2 C_y^T + B_d(W_{dd}D_{yd}^T + W_{dr}D_{yr}^T)) = 0, \quad (17.8c)$$

da cui

$$L = (\sigma_{ee}^2 C_y^T + B_d(W_{dd}D_{yd}^T + W_{dr}D_{yr}^T) + (D_{yd}W_{dd}D_{yd}^T + D_{yd}W_{dr}D_{yr}^T + D_{yr}W_{rd}D_{yd}^T + D_{yr}W_{rr}D_{yr}^T)^{-1} \quad (17.9)$$

Vengono pertanto confermati i risultati già visti per l'osservatore deterministico.

In questo approccio stocastico si può forse meglio comprendere il significato da attribuire ai pesi sullo stato e sugli ingressi dell'osservatore. Essi non sono altro che l'intensità del rumore bianco di disturbo dello stato e delle misure. D'ora in poi quindi potremo denominare l'LQR duale progettazione dell'osservatore ottimo, nel senso sopra citato. Tale osservatore è anche noto come *filtro di Kalman* stazionario<sup>1</sup>. A questo punto dovrebbe anche essere evidente che la condizione di correlazione fra il rumore di stato e di misura,  $W_{dr} \neq 0$  e  $W_{rd} \neq 0$  assumono la funzione di  $S$  nella formulazione ottima duale, per cui, in presenza di accoppiamento, non resta che applicare la forma completa sopra presentata, duale alla formula relativa al corrispondente controllo ottimo (eq. (11.30) e seguenti).

Anche per queste matrici di peso varranno le stesse linee guida già presentate nel caso del controllore ottimo. Potrà essere utile anche in questo caso introdurre un parametro  $\rho$  che permetta di rappresentare il rapporto fra i pesi associati al rumore di misura  $W_{rr}$  e quelli dello stato duale  $W_{nn}$ . Più si pensa che le misure saranno rumorose più grande dovrà essere il valore da dare a  $\rho$ , con il risultato di ottenere un osservatore più "lento", ossia che filtra le alte frequenze presenti nei segnali di misura, e predilige per la stima il risultato della simulazione del sistema dinamico. Al contrario bassi valori di  $\rho$  staranno ad indicare che le misure saranno affette da un basso livello di rumore e quindi si potrà impiegare un osservatore "veloce", con guadagni  $L$  più elevati. In ogni caso rimane opportuno ricordare che tali indicazioni non vanno mai viste in modo assoluto in quanto, pur essendo fisicamente interpretabili,  $W_{dd}$  e  $W_{rr}$  devono sempre essere considerate come delle possibili parametrizzazioni manipolabili ai fini di ottenere un compensatore, tale è infatti l'osservatore, che combinato con il controllore ottimo sia atto a soddisfare le specifiche di progetto.

Presentiamo ora un semplicissimo esercizio riassuntivo sulla progettazione LQG, con possibile assegnazione di comandi di riferimento. Si noti che l'esempio presentato qui sotto non vuole in alcuno modo costituire un vero schema di progetto, ma, mancando in toto la definizione di

<sup>1</sup>Chiaramente esiste anche una più generale soluzione tempo variante.

precise specifiche di progetto, con le conseguenti usuali iterazioni di verifica e messa a punto, mira, solamente e semplicemente, a darne un'idea approssimativa. Allo scopo sia data una massa  $M$  che scorre senza attrito su un piano orizzontale. Sulla massa agiscono un rumore bianco di disturbo  $w$  e una forza di controllo  $u$ , entrambi diretti orizzontalmente, il disturbo  $w$  è da ritenersi di intensità unitaria. Viene richiesto di progettare un sistema di controllo che agendo su  $u$  ne attenui l'effetto. L'equazione che descrive la dinamica del sistema è la seguente:

$$M\ddot{x} = \hat{u} + \hat{w}$$

che, definendo  $u = \hat{u}/M$  e  $w = \hat{w}/M$ , può essere riscritta nella seguente forma agli stati:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \quad (17.10) \quad \text{eq: Ax+Bu}$$

Si può vedere subito che il sistema non è asintoticamente stabile, in quanto la matrice di stato ha la forma di un blocco di Jordan con due autovalori nulli. Il sistema risulta però completamente controllabile da  $u$ . Pertanto, la mancanza dell'asintotica stabilità impone che la cifra di merito contenga una pesatura dello stato perlomeno in grado di rendere il sistema rilevabile sulla matrice delle prestazioni  $C_z$ , cosa ad esempio non ottenibile pesando la sola velocità, ossia con  $C_z = [0 \ 1]$ . È infatti facile verificare che l'equazione di Riccati,  $A^T P + PA - PB^T B P + Q = 0$ , associata alla cifra di merito:

$$F = \int_0^\infty (\dot{x}^2 + u^2) dt \quad (17.11)$$

risulta essere:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

da cui:  $P_1 = P_2 = 0$ ,  $P_3 = 1$ , soluzione che pur essendo semidefinita positiva non è asintoticamente stabilizzante (verificare). Occorrerà pertanto pesare nelle prestazioni o la posizione o tutto lo stato, scegliendo quest'ultima ipotesi optiamo per la cifra di merito:

$$F = \int_0^\infty (\dot{x}^2 + x^2 + u^2) dt$$

La relativa equazione di Riccati risulta essere:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

da cui si ottiene il seguente sistema di equazioni, algebriche e non lineari,

$$P_1 = P_2 P_3, \quad P_2 = \pm 1, \quad P_3 = \pm \sqrt{2P_2 + 1} \quad (17.12)$$

Scegliendo l'unica soluzione almeno semidefinita positiva fra tutte quelle possibili abbiamo:  $P_1 = \sqrt{3}$ ,  $P_2 = 1$ ,  $P_3 = \sqrt{3}$ , valori che si associano alla matrice di guadagno sullo stato:

$$G = B^T P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Il sistema in anello chiuso che si ottiene è pertanto:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}$$

che rappresenta la dinamica di un sistema del secondo ordine smorzato con  $\omega_0 = 1$  e  $\xi = \sqrt{3}/2 = 0.87$ .

Supponendo ora di non poter misurare tutto lo stato optiamo per l'utilizzo di un osservatore. Incominciamo quindi col chiederci se è possibile semplificare la realizzazione del sistema di controllo

grazie all'utilizzo di un solo sensore di: accelerazione, velocità, posizione. Notando che l'osservatore richiede perlomeno la rilevabilità dello stato a partire dalle misure disponibili, sarà facile verificare che tale condizione è garantita solo da una misura di posizione:  $C_y = [1 \ 0]$  (si consiglia verifica), cosa comune a tutti i sistemi liberi. Inoltre, stante anche in questo caso la struttura delle autosoluzioni, il sistema deve essere almeno stabilizzabile tramite la  $B_d$ , richiesta duale di quella di rilevabilità sulla  $C_z$  per il controllore. Nel nostro caso tale proprietà è verificata e, logicamente assegnando a  $w$  un'intensità non nulla, possiamo adottare un osservatore per ricostruire lo stato. La relazione delle uscite di misura sarà quindi:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + r$$

per cui, assumendo che il rumore bianco sulla misura,  $r$ , sia scorrelato da quello di stato e ambedue siano di intensità unitaria, il progetto dell'osservatore si effettuerà risolvendo l'equazione di Riccati:  $AP + PA^T - PC_y^T C_y P + B_d B_d^T = 0$ , ovvero, più specificamente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

da cui:

$$P_1 = \pm\sqrt{2P_2} \quad P_2 = \pm 1 \quad P_3 = P_1 P_2 \quad (17.13)$$

alla quale corrisponde l'unica soluzione almeno semidefinita positiva:  $P_1 = \sqrt{2}$ ,  $P_2 = 1$ ,  $P_3 = \sqrt{2}$ . La matrice dei guadagni dell'osservatore risulta quindi essere:

$$L = PC_y^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

con conseguente dinamica libera dell'errore di stima data da:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} e$$

che rappresenta un sistema del secondo ordine smorzato con  $\xi = \sqrt{2}/2 = 0.7$ .

Si ottiene quindi un controllore la cui dinamica è determinata dalla matrice seguente:

$$A_{cont} = A - BG - LC = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

che, avendo per autovalori:  $\lambda_{cont} = -1.57 \pm j1.40$ , risulta essere asintoticamente stabile. La corrispondente funzione di trasferimento del secondo ordine sarà pertanto:

$$R(s) = \frac{3.1463(s + 0.3178)}{(s^2 + 3.146s + 4.449)}$$

Conseguentemente il sistema completo, stato più errore di stima, è quindi il seguente:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{e}_x \\ \dot{e}_{\dot{x}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \\ e_x \\ e_{\dot{x}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ r \end{Bmatrix}$$

$$\dot{x} = A_{tot}x + B_{tot} \begin{Bmatrix} d \\ r \end{Bmatrix}$$

Ricordando ancora che  $d$  e  $r$  sono rumori bianchi scorrelati, di intensità unitaria è possibile calcolare la varianza dello stato del sistema completo, composto dagli stati del sistema da controllare e

dagli errori di stima. La relativa matrice delle varianze,  $\sigma_{xx}^2$ , soddisferà la seguente equazione di Lyapunov:  $A_{tot}\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xx}^2 A_{tot}^T + B_{tot}B_{tot}^T = 0$ , dalla cui risoluzione si ha:

$$\sigma_{xx}^2 = \begin{bmatrix} 5.43 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 2.28 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Per calcolare i margini di guadagno e fase bisogna valutare la funzione di trasferimento di maglia che, essendo il sistema a un ingresso (di controllo) e a un'uscita (di misura), rimane la stessa sia aprendo l'anello di retroazione in corrispondenza delle misure che del controllore. Per tale operazione riscriviamo il sistema completo, considerando ora lo stato dell'osservatore anziché l'errore di ricostruzione:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{o}_x \\ \dot{o}_{\dot{x}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ o_x \\ o_{\dot{x}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ r \end{Bmatrix}$$

Notiamo che l'aprire il sistema nei punti summenzionati corrisponde a porre a zero una delle due sottomatrici  $2 \times 2$  fuori dalla diagonale, per cui, scegliendo di sezionare il sistema all'ingresso del controllore si dovrà azzerare la sottomatrice che collega lo stato del sistema con quello dell'osservatore. Pertanto la funzione di trasferimento legherà l'uscita  $u'$  del controllore con l'ingresso  $u''$  del sistema e risulterà associata al seguente sistema in ciclo aperto:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{o}_x \\ \dot{o}_{\dot{x}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \\ o_x \\ o_{\dot{x}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u''$$

$$u' = - \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} o_x \\ o_{\dot{x}} \end{Bmatrix}$$

Su tale relazione è quindi possibile verificare la robustezza del controllore, valutandone i relativi margini di guadagno,  $G_m$ , e fase,  $\varphi_m$ , per via grafico-numerica. Essi risultano essere:  $G_m = 11 \text{ dB}$   $\varphi_m = 36^\circ$ . Da questi valori si evince come le caratteristiche di robustezza del sistema, pur essendo inferiori in termini di margine di fase rispetto a quelli ottimali del controllore sullo stato, sono tuttavia non troppo malvagi. Dopo aver notato che quanto sopra ottenuto deve corrispondere a  $G R(j\omega) L C_y$ , riportiamo nelle figure Fig. 17.1 e Fig. 17.2 i diagrammi di Bode e di Nyquist della funzione di trasferimento di maglia.

Come visto a questo schema di controllo si può anche assegnare il raggiungimento di una prestazione finale costante desiderata  $z_r$ ; aggiungendo al controllo in retroazione un termine in ciclo aperto  $u_r$ . Pertanto, assumendo di voler imporre al sistema il raggiungimento della posizione  $z_r = 1$ , ossia:

$$z_r = 1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \quad (17.14)$$

Seguendo la procedura precedentemente presentata otterremo:

$$\begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_r$$

$$z_r = 1$$

da cui avremo:

$$u_r = - \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = 1$$

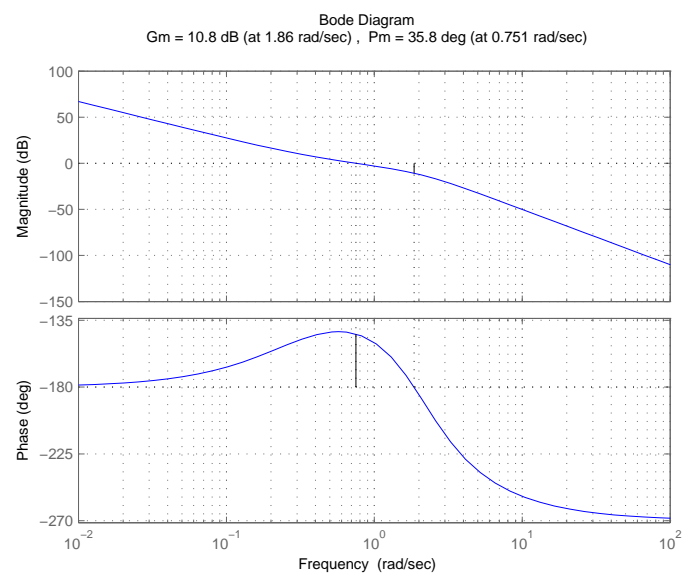


Figura 17.1: Diagramma di Bode della FDT di maglia

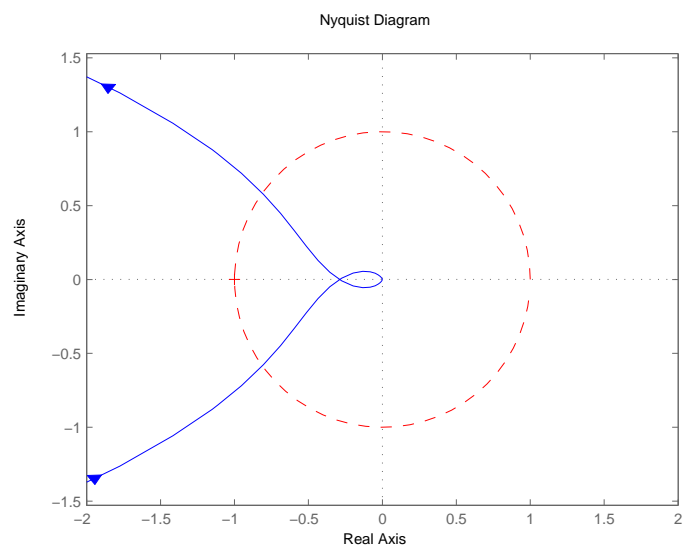


Figura 17.2: Diagramma di Nyquist della FDT di maglia

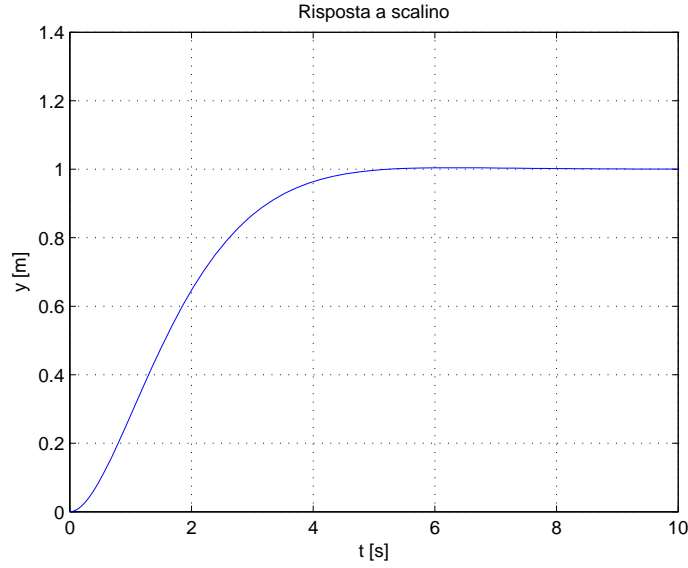


Figura 17.3: Risposta a scalino unitario,  $x(0) = 0$ ,  $d = 0$ ,  $r = 0$

Preferendo ancora una volta l'utilizzazione dell'errore di stima, il sistema completo risultante è:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{e}_x \\ \dot{e}_{\dot{x}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \\ e_x \\ e_{\dot{x}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_r + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ r \end{Bmatrix}$$

per cui, considerando i valori medi, vediamo come il valore medio dello stato sia determinato esclusivamente dall'ingresso  $u_r$ ; inoltre il valore medio dell'uscita è proprio  $z_r$ . Si può ora valutare la risposta a scalino del sistema così ottenuto integrando le equazioni della dinamica del sistema così che, considerando condizioni iniziali omogenee e assenza di disturbi, si ottiene l'andamento mostrato in Fig. 17.3. Si noti che la possibile presenza dei disturbi avrà l'effetto di non permettere il completo raggiungimento della condizione a regime costante, così che l'uscita presenterà comunque una varianza non nulla. Come menzionato nella dimostrazione del calcolo del controllo in ciclo aperto ci si può aspettare che lo stesso possa funzionare anche quando la prestazione desiderata  $z_r$  è lentamente variabile in relazione alla banda passante del sistema in anello chiuso. In questo caso si può infatti considerare che il sistema raggiunga una condizione di equilibrio molto più velocemente rispetto alle variazioni dell'ingresso e quindi sia sempre molto prossimo a una condizione di equilibrio. Così se, per una prima semplice approssimazione, si usa la frequenza propria del sistema controllato ottimalmente si può vedere, Fig. 17.4, come è possibile inseguire un ingresso armonico con frequenza pari a un decimo di detta frequenza. Si può rilevare come, dopo il transitorio iniziale, l'uscita  $y$  sia un segnale sinusoidale, sfasato rispetto al riferimento ma con la sua stessa frequenza. Notando che il transitorio della risposta allo scalino è ben concluso dopo circa 8 secondi ci si può attendere che la tracciatura non sia proprio malvagia anche per un periodo di 40 secondi, ossia per una frequenza di circa 1/5 della banda passante, cosa abbastanza ben confermata dalla Fig. 17.5. Un ulteriore raddoppio della frequenza ci porta a coprire una fascia forse eccessivamente ampia della banda passante, per poter considerare il segnale di riferimento ben approssimabile da una sequenza di gradini, producendo il risultato della figura Fig. 17.6, in cui, oltre a un maggior sfasamento, appare ora anche una chiara attenuazione in ampiezza.

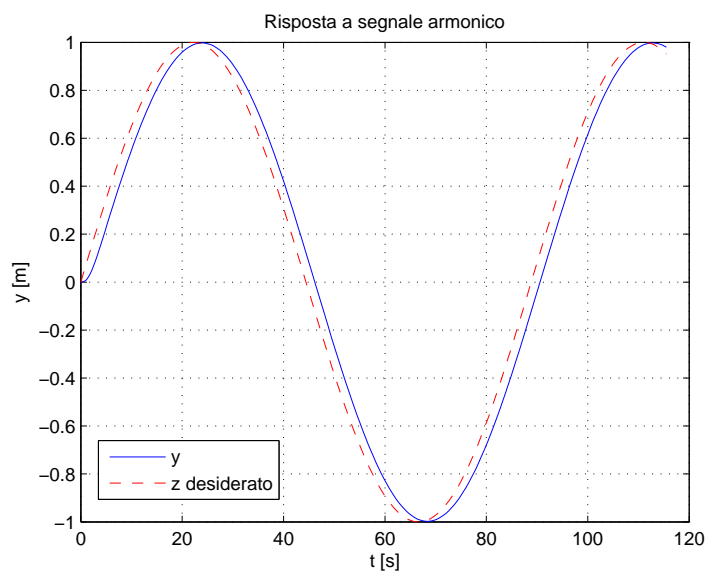


Figura 17.4: Risposta a forzante sinusoidale ( $T = 91$  s)

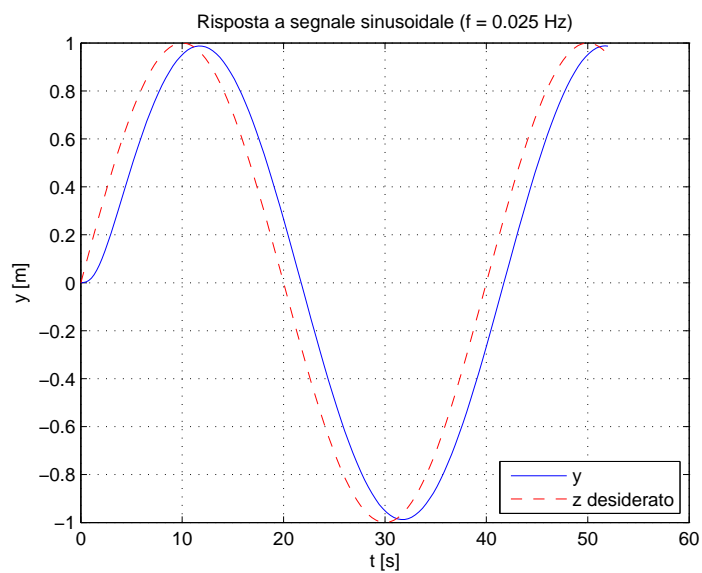


Figura 17.5: Risposta a forzante sinusoidale ( $T = 40$  s)

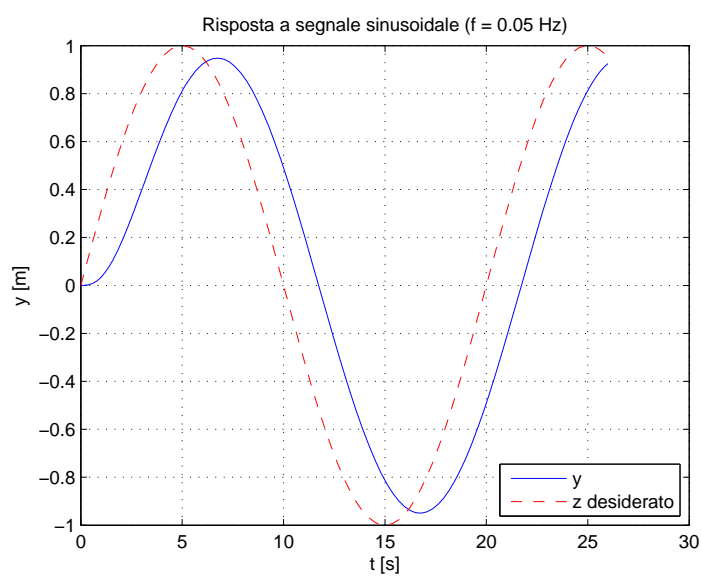


Figura 17.6: Risposta a forzante sinusoidale ( $T = 20 \text{ s}$ )





## Capitolo 18

# CONTROLLO (SUB-OTTIMO) STOCASTICO PER CONTROREAZIONE DIRETTA DELLE MISURE

Allo scopo di verificare l'acquisizione dei concetti e delle manipolazioni più volte utilizzate precedentemente questo paragrafo contiene solo l'invito esplicito a ripetere per la formulazione Gaussiana i passaggi già presentati per il controllo sub-ottimo deterministico. A mo' di stimolo si riportano comunque, senza specifici commenti, le equazioni essenziali. I docenti del corso saranno poi disponibili ad aiutare gli onesti volenterosi che troveranno difficoltà insormontabili.

$$\dot{x} = (A - B_u G C_y) x + B_d d = \bar{A}x + B_d d, \quad (18.1a)$$

$$z = (C_z - D_{zu} G C_y) x = \bar{C}_z x. \quad (18.1b)$$

$$F = \frac{1}{2} \int_0^T (z^T W_{zz} z + u^T W_{uu} u) dt = \frac{1}{2} \int_0^T (x^T W(G) x) dt = \frac{1}{2} \text{Tr}(W(G) \sigma_{xx}^2) \quad (18.2)$$

$$W(G) = (C_z^T - C_y^T G^T D_{zu}^T) W_{zz} (C_z - D_{zu} G C_y) + C_y^T G^T W_{uu} G C_y \quad (18.3)$$

$$\bar{A} \sigma_{xx}^2 + \sigma_{xx}^2 \bar{A}^T + B_d W_{dd} B_d^T = 0 \quad (18.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr} \left( ((C_z^T - C_y^T G^T D_{zu}^T) W_{zz} (C_z - D_{zu} G C_y) + C_y^T G^T W_{uu} G C_y) \sigma_{xx}^2 + \right. \\ \left. \Lambda ((A - B_u G C_y) \sigma_{xx}^2 + \sigma_{xx}^2 (A^T - C_y^T G^T B_u^T) + B_d W_{dd} B_d^T) \right) \end{aligned} \quad (18.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}^2} = (A^T - C_y^T G^T B_u^T) \Lambda + \Lambda (A - B_u G C_y) + \\ (C_z^T - C_y^T G^T D_{zu}^T) W_{zz} (C_z - D_{zu} G C_y) + C_y^T G^T W_{uu} G C_y \end{aligned} \quad (18.6a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \Lambda} = (A - B_u G C_y) \sigma_{xx}^2 + \sigma_{xx}^2 (A^T - C_y^T G^T B_u^T) + B_d W_{dd} B_d^T \quad (18.6b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial G} = 2(W_{uu} G C_y \sigma_{xx}^2 C_y^T - D_{zu}^T W_{zz} (C_z - D_{zu} G C_y) C_y^T - B_u^T \Lambda \sigma_{xx}^2 C_y^T) = \\ 2((W_{uu} + D_{zu}^T W_{zz} D_{zu}) G C_y \sigma_{xx}^2 C_y^T - (D_{zu}^T W_{zz} C_z + B_u^T \Lambda \sigma_{xx}^2 C_y^T)) \end{aligned} \quad (18.6c)$$

$$G = (W_{uu} + D_{zu}^T W_{zz} D_{zu})^{-1} (D_{zu}^T W_{zz} C_z + B_u^T \Lambda \sigma_{xx}^2 C_y^T) (C_y \sigma_{xx}^2 C_y^T)^{-1} \quad (18.7)$$

Si noti infine che valgono anche qui i commenti relativi al caso di misure semplicemente proprie e alla progettazione di controllori dinamici.



## Capitolo 19

# RIDUZIONE BILANCIATA DEI MODELLI

uzionebilanciata

Consideriamo un sistema asintoticamente stabile. Come già precedentemente visto le proprietà di controllabilità e osservabilità di un sistema dinamico lineare e asintoticamente stabile possono essere definite anche a partire dalle caratteristiche delle due seguenti matrici

$$G_C := \int_0^{\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (19.1)$$

$$G_O := \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \quad (19.2)$$

dette rispettivamente Gramiano di controllabilità e Gramiano di osservabilità. Perché il sistema sia controllabile è necessario e sufficiente che i Gramiani siano non singolari, ossia strettamente definiti positivi. Senza scendere nel dettaglio<sup>1</sup> è comunque utile far notare che il Gramiano di controllabilità è associato alla risposta impulsiva dello stato del sistema. Se infatti applichiamo una storia temporale impulsiva a tutti gli ingressi del sistema  $u = [I]\delta(t)$ , utilizzando l'integrale di convoluzione si ottiene che

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B [I] \delta(\tau) d\tau = e^{At} B [I].$$

Il Gramiano di osservabilità è invece associato all'andamento delle uscite in funzione delle condizioni iniziali,  $y(t) = C e^{At} x_0$ . Anche se è già stato dimostrato per un analogo problema nell'ambito del controllo ottimo ricordiamo, ridimostrandolo, che il calcolo di integrali impropri come quelli delle definizioni dei Gramiani di controllabilità e di osservabilità, non si effettua necessariamente solo attraverso la risoluzione dell'integrale presente nella definizione, bensì anche tramite le opportune equazioni di Lyapunov ad essi associate:

$$A G_C + G_C A^T + B B^T = 0, \quad (19.3)$$

$$A^T G_O + G_O A + C^T C = 0. \quad (19.4)$$

Se infatti scriviamo l'espressione  $A G_C + G_C A^T$  utilizzando la definizione del Gramiano, ricordando che la matrice  $A$  è costante è può essere portata sotto il segno di integrale,

$$\int_0^{\infty} \left( A e^{At} B B^T e^{A^T t} + e^{At} B B^T e^{A^T t} A^T \right) dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \left( e^{At} B B^T e^{A^T t} \right) dt$$

---

<sup>1</sup>Per una dimostrazione di questo risultato ci si può riferire a quanto contenuto nel già citato testo B. Friedland, *Control System Design. An Introduction to State-Space Methods*. Dover. 2007.

che, essendo il sistema asintoticamente stabile può essere integrata, e risulta pari a  $-BB^T$ . Analogamente si può dimostrare l'equazione per la determinazione del Gramiano di osservabilità. La relazione fra la controllabilità (osservabilità) e il Gramiano ad essa associato rimane valida anche nel caso di sistemi lineari a coefficienti variabili nel tempo, a patto di sostituire al termine  $e^{At}$  l'espressione della matrice di transizione. Validità che si può estendere anche a sistemi instabili, però con una integrazione di durata finita. Nel caso particolare di sistemi lineari asintoticamente stabili a coefficienti costanti, si può verificare che le condizioni sui Gramiani sono verificate, se e solo se vengono verificate le usuali condizioni algebriche sul rango delle matrici, ad esempio  $[BAB A^2 B \dots]$  e  $[C^T (CA)^T (CA^2)^T \dots]$  o le corrispondenti condizioni sulle componenti generalizzate modali, la possibilità di assegnare poli arbitrari e così via. Però, a differenza del criterio algebrico su citato esplicitamente, l'uso dei Gramiani, nel caso in cui non si abbia completa controllabilità o osservabilità, permette di avere un maggior grado di informazioni sulle proprietà del sistema. Infatti tramite la rappresentazione spettrale di una matrice, al più semidefinita positiva, si può scrivere che

$$G = V \text{Diag} \{ \lambda^2 \} V^T = \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 v_i v_i^T. \quad (19.5)$$

Essendo i suddetti Gramiani appunto al più delle matrici semidefinite positive, gli autovalori  $\lambda$  saranno tutti maggiori di zero o al più nulli. Si potrà allora valutare la controllabilità/osservabilità non solo sulla base di un'asserzione del tipo "sì/no", come nel caso dei criteri algebrici, bensì, essendo gli autovettori normalizzati, si avrà a disposizione una "misura relativa" di tali proprietà tramite la grandezza degli autovalori, in modo da stabilire quale parte dell'autospazio del Gramiano contribuisce significativamente al valore dello stesso, e quindi quali componenti sono più o meno controllabili/osservabili, attraverso l'analisi del sottospazio degli autovettori associati. Purtroppo però, se non si pone attenzione alla scalatura delle grandezze fisiche presenti nel modello, i due Gramiani saranno spesso definiti su scale di grandezza diverse; basti pensare che generalmente si riferiscono a quantità dimensionalmente diverse. È perciò essenziale definire uno spazio comune e opportunamente scalato all'interno del quale le due matrici possano essere confrontate. Tale procedimento è detto *bilanciamento* della controllabilità e dell'osservabilità del sistema e consiste nel determinare un'unica trasformazione in grado di diagonalizzare i due Gramiani in modo che abbiano gli stessi autovalori.

Per ottenere un'unica trasformazione lineare che porta alle variabili di stato bilanciate si parte dalla trasformazione in forma spettrale del Gramiano di controllabilità <sup>2</sup>:

$$G_C = V_C \Lambda_C^2 V_C^T, \quad (19.6)$$

dove la matrice diagonale degli autovalori è stata indicata al quadrato per sottolineare il fatto che gli autovalori sono tutti positivi. Chiaramente qualora non si fosse verificata a priori la controllabilità ogni sua mancanza si rivelerebbe tramite i termini nulli, o tanto piccoli da essere trascurabili, di  $\Lambda_C^2$ . Si può allora definire una matrice di trasformazione di controllabilità  $T_C = V_C \Lambda_C$ , che sarà sicuramente non singolare. Applicando tale trasformazione tramite la definizione:  $x = T_C \hat{x}$ , avremo: <sup>3</sup>

$$\widehat{G_C}(T_C) = T_C^{-1} G_C T_C^{-T} = \Lambda_C^{-1} V_C^T V_C \Lambda_C \Lambda_C V_C^T V_C \Lambda_C^{-1} = I, \quad (19.7)$$

$$\widehat{G_O}(T_C) = T_C^T G_O T_C. \quad (19.8)$$

Si ricordi che essendo  $G_C$  simmetrica, normando i suoi autovettori a modulo unitario sarà  $V_C^{-1} = V_C^T$ , per cui  $T_C^{-1} = \Lambda_C^{-1} V_C^T$ . Non solo si richiede quindi l'inversione di una semplice matrice diagonale ma, se non si fosse già verificata la controllabilità si potrà facilmente escludere dal prosieguo il relativo sottospazio non controllabile usando solo le colonne di  $T_C$  associate a autovalori non nulli, limitandosi all'uso delle stesse nella formula di inversione appena data. Utilizzando ora la

<sup>2</sup>Quanto presentato nel seguito ha senso per sistemi per cui siano già stati eliminati gli stati completamente non osservabili o non controllabili.

<sup>3</sup>Ricordiamo che data una trasformazione  $x = T\hat{x}$ , il sistema trasformato sarà  $\dot{\hat{x}} = T^{-1}AT\hat{x} + T^{-1}Bu$ , con la relazione di uscita  $y = CT\hat{x} + Du$ . Le corrispondenti trasformazioni dei Gramiani saranno pertanto date da:  $\hat{G}_C = T^{-1}G_C T^{-T}$  e  $\hat{G}_O = T^T G_O T$ .

rappresentazione spettrale del nuovo Gramiano di osservabilità  $\widehat{G_O} = V_O \Lambda_O^2 V_O^T$  è possibile definire una nuova matrice di trasformazione  $T_O = V_O \Lambda_O^{-\frac{1}{2}}$ . L'applicazione di questa trasformazione porta ai seguenti nuovi Gramiani

$$\widehat{G_C}(T_O T_C) = T_O^{-1} \widehat{G_C} T_O^{-T} = \Lambda_O^{\frac{1}{2}} V_O^T V_O \Lambda_O^{\frac{1}{2}} = \Lambda_O, \quad (19.9)$$

$$\widehat{G_O}(T_O T_C) = T_O^T \widehat{G_O} T_O = \Lambda_O^{-\frac{1}{2}} V_O^T V_O \Lambda_O^2 V_O^T V_O \Lambda_O^{-\frac{1}{2}} = \Lambda_O. \quad (19.10)$$

Vale anche in questo caso quanto già richiamato per il Gramiano di controllabilità, in relazione all'inversione e all'eventuale mancanza di osservabilità. In questo modo il sistema risultante dopo le due trasformazioni è caratterizzato da due Gramiani uguali e diagonali. La matrice di trasformazione che porta al sistema bilanciato è quindi  $T_B = T_C T_O$ . A partire dal sistema bilanciato è possibile decidere quali sono gli stati che effettivamente caratterizzano il sistema, che saranno quelli legati ai valori più elevati sulle diagonali dei Gramiani, ottenendo quindi buone indicazioni sulle scelte da fare per ottenere dei modelli ridotti.

Vedremo ora che per calcolare la matrice di bilanciamento,  $T_B$ , si può più semplicemente utilizzare una sola autosoluzione sul prodotto dei Gramiani. Infatti, se prendiamo in considerazione una generica matrice di trasformazione  $T$  che trasformi un Gramiano  $G$  nel suo corrispondente  $\hat{G}$ , possiamo scrivere che <sup>4</sup>:

$$G_C = T \hat{G}_C T^T \quad \hat{G}_C = T^{-1} G_C T^{-T}; \quad G_O = T^{-T} \hat{G}_O T^{-1} \quad \hat{G}_O = T^T G_O T \quad (19.11)$$

Il prodotto dei due Gramiani sarà allora uguale a

$$G_C G_O = T \hat{G}_C T^T T^{-T} \hat{G}_O T^{-1} = T \hat{G}_C \hat{G}_O T^{-1} = T \text{Diag} \{ \Lambda_B^2 \} T^{-1} \quad (19.12)$$

essendo chiaramente :  $\text{Diag} \{ \Lambda_B^2 \} = \text{Diag} \{ \Lambda_C \} \text{Diag} \{ \Lambda_O \}$ , formula che ci ricorda che il prodotto di due matrici simmetriche e, al più, semidefinite positive produrrà sempre una matrice, generalmente non simmetrica, con autovalori  $\geq 0$ <sup>5</sup>. Si noti però che la matrice  $T$  così ottenuta permette sì di scrivere  $\text{Diag} \{ \Lambda_B^2 \} = \text{Diag} \{ \Lambda_C \} \text{Diag} \{ \Lambda_O \}$ , ma non ancora il bilanciamento:  $\text{Diag} \{ \Lambda_C \} = \text{Diag} \{ \Lambda_O \} = \text{Diag} \{ \Lambda_B \}$ . Riassumendo: conosciamo  $T$  e  $\text{Diag} \{ \Lambda_B^2 \}$  dal calcolo degli autovalori di  $G_C G_O$ , tramite  $T$  possiamo calcolare  $\text{Diag} \{ \Lambda_O \} = T^T G_O T$  e  $\text{Diag} \{ \Lambda_C \} = T^{-1} G_C T^{-T}$ , preferendo però sostituire a quest'ultima la più semplice  $\text{Diag} \{ \Lambda_C \} = \text{Diag} \{ \Lambda_B^2 / \Lambda_O \}$  e evitando così l'inversione di  $T$ , mentre il nostro scopo era di ottenere  $\text{Diag} \{ \Lambda_C \} = \text{Diag} \{ \Lambda_O \}$ . Dobbiamo quindi cercare una semplice scalatura di  $T$  atta a garantire la condizione di bilanciamento. Allo scopo notiamo che da quanto suddetto possiamo scrivere la seguente serie di passaggi:

$$G_C G_O = T \text{Diag} \{ \Lambda_O \} \text{Diag} \{ \Lambda_C \} T^{-1} = \quad (19.13)$$

$$= T \text{Diag} \left\{ \sqrt{\Lambda_B / \Lambda_O} \right\} \text{Diag} \{ \Lambda_O \} \text{Diag} \left\{ \sqrt{\Lambda_B / \Lambda_O} \right\} T^T \quad (19.14)$$

$$T^{-T} \text{Diag} \left\{ \sqrt{\Lambda_O / \Lambda_B} \right\} \text{Diag} \{ \Lambda_C \} \text{Diag} \left\{ \sqrt{\Lambda_O / \Lambda_B} \right\} T^{-1} = \quad (19.15)$$

$$= T \text{Diag} \{ \Lambda_B \} T^T T^{-T} \text{Diag} \{ \Lambda_B \} T^{-1} \quad (19.16)$$

Si verifica così che l'uso della matrice di trasformazione scalata:

$$T_B = T \text{Diag} \left\{ \sqrt{\Lambda_B / \Lambda_O} \right\} = T \text{Diag} \left\{ \sqrt{\Lambda_{B_i} / (T_i^T G_O T_i)} \right\} \quad (19.17)$$

porterà sempre a  $\text{Diag} \{ \Lambda_C \} = \text{Diag} \{ \Lambda_O \} = \text{Diag} \{ \Lambda_B \}$  e quindi al bilanciamento. Sarà utile verificare che lo stesso risultato si può ottenere partendo dall'applicazione di un analogo procedimento a  $G_C$ , ossia utilizzando la:

$$T_B = T \text{Diag} \left\{ \sqrt{\Lambda_B / \Lambda_C} \right\} = T \text{Diag} \left\{ \sqrt{\Lambda_{B_i} / (T_i^{-T} G_C T_i^{-T})} \right\} \quad (19.18)$$

<sup>4</sup>Ricordiamo che data una trasformazione  $x = T\hat{x}$ , il sistema trasformato sarà  $\dot{\hat{x}} = T^{-1}AT\hat{x} + T^{-1}Bu$ , con la relazione di uscita  $y = CT\hat{x} + Du$ . Le corrispondenti trasformazioni dei Gramiani saranno pertanto date da:  $\hat{G}_C = T^{-1}G_C T^{-T}$  e  $\hat{G}_O = T^T G_O T$ .

<sup>5</sup>Se consideriamo infatti il problema agli autovalori  $XYz = \lambda z$ , con  $X$  e  $Y$  al più semidefinite positive, sarà anche  $YXYz = \lambda Yz$  e si potrà scrivere  $z^T YXYz = \lambda z^T Yz$ . Essendo  $X$  e  $Y$  al più semidefinite positive sia il prodotto scalare di destra che quello di sinistra saranno  $\geq 0$ , mentre caso nullo implicherebbe necessariamente che  $\lambda = 0$ . Si noti che quanto appena detto è di fatto già stato dato per scontato nel calcolo dei modi propri utilizzando  $K^{-1} M$

trasformazione che risulta meno conveniente per la necessità di calcolare l'inversa di  $T$ .

Dopo aver applicato al sistema la trasformazione di stato ottenibile con  $T_B$  si possono eliminare dalle equazioni del sistema quei termini di stato poco controllabili/osservabili in termini relativi, associati cioè ai più piccoli valori di  $\Lambda_B$ , ad esempio secondo un criterio di scarsa contribuzione alla relazione ingresso uscita del sottospazio associato agli autovalori ritenuti trascurabili. Si noti che ordinando gli autovalori in modulo decrescente quanto detto finisce con l'essere significativamente simile alla riduzione modale, sia essa utilizzata in troncamento o residualizzazione, con le autosoluzioni del bilanciamento che sostituiscono le frequenze e i modi propri.

Va infine rilevato che, assumendo una piena controllabilità e osservabilità, nessun autovalore nullo in  $G_C$  e  $G_O$ , è possibile evitare il calcolo delle autosoluzioni della matrice  $G_C G_O$  sostituendolo col calcolo di quelle di una matrice simmetrica procedendo nel seguente modo <sup>6</sup>

- calcolare la fattorizzazione di Choleski per  $G_C$ , nella forma  $G_C = LL^T$ , con  $L$  matrice triangolare inferiore;
- constatare che si può riscrivere il prodotto  $G_C G_O$  come  $G_C G_O = LL^T G_O = LL^T G_O LL^{-1}$ ;
- calcolare le autosoluzioni della matrice, simmetrica e definita positiva  $L^T G_O L$ , così da poter scrivere  $L^T G_O L = X \Lambda_O X^T$ , con gli autovettori  $X$  normalizzati a norma unitaria ( $X^T X = X X^T = I$ ) <sup>7</sup>.

Si può allora constatare che sarà  $T = LX$ . Inoltre essendo ora  $\Lambda_B^2 = \Lambda_O$ , pur rimanendo valida la su scritta formula per la determinazione di  $T_B$ , essa può essere semplificata nella seguente:

$$T_B = T \text{Diag} \left\{ \sqrt{1/\sqrt{\Lambda_{O_i}}} \right\} \quad (19.19)$$

A tale procedimento viene spesso associata una migliore stabilità e precisione, accompagnate da una maggiore efficienza numerica, in conseguenza del minor costo del calcolo delle autosoluzioni di una matrice simmetrica. Va però rimarcato che per sfruttare in modo compiuto tali vantaggi computazionali bisogna tenere in conto i costi della fattorizzazione di Choleski e dei tre (mezzi) prodotti matriciali necessari, al posto del singolo  $G_C G_O$  richiesto nel procedimento precedentemente presentato, applicando tutte le ottimizzazioni di programmazione atte a evitare operazioni inutili sulle simmetrie e i prodotti con mezze matrici <sup>8</sup>.

Come semplice, ma utile, esercizio di manipolazione matriciale si veda, per entrambi i procedimenti sopra presentati, se è possibile operare con  $G_O G_C$  al posto di  $G_C G_O$ . (Verificare se ciò che ne risulta è praticamente la stessa cosa, peggio, meglio?)

Va da sè che la procedura su presentata è in generale utilmente applicabile per rendere più efficiente il calcolo di tutte autosoluzioni del prodotto di matrici simmetriche, quando almeno una è definita positiva.

Concludiamo rimarcando che in presenza di parti instabili nel sistema bisognerà procedere ad una separazione delle stesse da quelle stabili, tramite una trasformazione di stato basata sulle autosoluzioni o su una trasformazione di Schur <sup>9</sup>, applicando poi il bilanciamento, con eventuale riduzione per troncamento/residualizzazione, solo alla parte stabile del sistema. Si noti che, nel caso che la riduzione bilanciata venga applicata per facilitare la realizzazione dei controllori-osservatori, spesso di ordine elevato, risultanti da progetti basati sul controllo ottimo, LQG per esempio, la scelta di utilizzare un semplice troncamento o una residualizzazione, con corretto recupero della statica, dovrà tenere in conto della possibile inclusione o meno della stima di disturbi costanti nell'osservatore esteso.

<sup>6</sup>Ancora una volta, inversa a parte, si noti l'analogia con il calcolo dei modi propri di  $K^{-1} M$  e con la corrispondente formulazione alternativa del metodo delle potenze inverse a blocchi precedentemente presentato.

<sup>7</sup>Si cita spesso l'uso di una decomposizione a valori singolari al posto della citata decomposizione spettrale, simmetrica. Un'operazione di dubbio interesse visto che costa di più e porta allo stesso risultato.

<sup>8</sup>A.J. Laub, On computing balancing transformations, Proc. 1980 Joint Automat.Contr.Conf., Session FA8-E, San Francisco CA, Aug. 1980.

<sup>9</sup>Non dovrebbero sussistere problemi sull'utilizzo di basi ridotte di trasformazione, perlomeno quando si adottino autosoluzioni. Per un possibile approfondimento sulla riduzione mediante trasformazione di Schur si veda l'appendice di: G.L. Ghiringhelli, M. Lanz, P. Mantegazza, S. Ricci, Active Flutter Suppression Techniques in Aircraft Wings, Integrated Technology Methods and Applications in Aerospace Systems Design, Vol. 52, Control and Dynamic Systems Series, 1992, pp. 57-115, Academic Press. Nelle versioni recenti del bigino si veda l'appendice 'Riduzione dell'ordine di un sistema lineare, con un po' di praticaccia sull'uso di autosoluzioni'.

## Capitolo 20

# RECUPERO DI ROBUSTEZZA SULLE MATRICI DI TRASFERIMENTO DI MAGLIA (LOOP TRANSFER RECOVERY, LTR)

Come abbiamo visto i controllori con controreazione algebrica ottimale sullo stato (LQR) presentano una elevata robustezza, infatti essi assicurano un margine di guadagno compreso fra 0.5 e infinito, e uno di fase di almeno  $60^\circ$  su tutti i canali. Questo però vale rigorosamente solo nel caso in cui si conosce interamente lo stato ad ogni istante. Per dualità un discorso analogo si può fare riguardo alle prestazioni dell'osservatore ottimo, e.g. del filtro di Kalman. Nel momento in cui il controllore viene realizzato combinandolo con un osservatore, anche ottimo, non vengono più garantite queste proprietà di robustezza, anzi in alcuni casi i margini si riducono a valori talmente bassi da trasformare facilmente il sistema da stabile ad instabile anche per piccole variazioni dei suoi parametri caratteristici<sup>1</sup>. Tutto ciò è collegato al fatto che la matrice di trasferimento in anello aperto, del controllore o dell'osservatore ottimo, è totalmente diversa da quella ottenuta combinando controllore e osservatore.

Dato un sistema generico del tipo di cui si conosce tutto lo stato, scritto per semplicità senza preoccuparsi di indicizzare i vari termini di ingresso/uscita:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (20.1)$$

$$y = Cx, \quad (20.2)$$

se chiamiamo  $G$  la matrice dei guadagni del controllore ottimo, potremo scrivere la matrice di trasferimento in anello aperto, quando l'anello è aperto in corrispondenza degli ingressi dell'impianto<sup>2</sup>,

---

<sup>1</sup>Si consiglia la lettura di: J.C. Doyle, Guaranteed Margins for LQG Regulators, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-23, n. 4, Aug. 1978, pp. 756-757; J.C. Doyle e G. Stein, Robustness with Observers, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-24, n. 4, Aug. 1979, pp. 607-611. Quanto qui presentato è riconducibile a detti articoli, senza però la ripetizione dell'utile esempio riportato nel secondo, disponibile in bacheca.

<sup>2</sup>Nel caso di sistemi multi ingresso multi uscita è possibile definire un'altra matrice di trasferimento in anello aperto ottenuta spezzando il sistema sulle uscite del sistema che risulta pari a

$$L_{ctrott} = (sI - A)^{-1}BG.$$

Per il sistema controllato useremo le due matrici di funzioni maglia che sono:

$$L_{ou}(s) = G(sI - A + BG + LC)^{-1}LC(sI - A)^{-1}B \quad (20.3a)$$

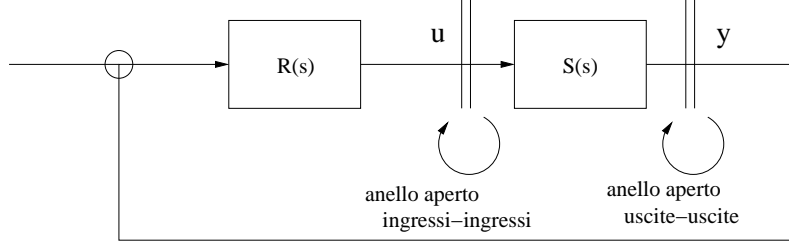
$$L_{oy}(s) = C(sI - A)^{-1}BG(sI - A + BG + LC)^{-1}L \quad (20.3b)$$

rispettivamente per l'apertura in  $u$  e in  $y$ . Nel seguito, essendo chiaro dal contesto ciò a cui ci stiamo riferendo, le chiameremo spesso con lo stesso simbolo  $L_o$



come

$$L_{ctrott}(s) = G(sI - A)^{-1}B. \quad (20.4) \quad \boxed{\text{lqr-ol}}$$



Nel caso in cui è presente un osservatore, la matrice di trasferimento in anello aperto sarà pari a

$$L_o(s) = G(sI - A + BG + LC)^{-1}LC(sI - A)^{-1}B, \quad (20.5)$$

che è ben diversa dalla (20.4). La tecnica del Loop Transfer Recovery (LTR) tenta di selezionare la matrice dei guadagni dell'osservatore  $L$  in modo tale che, per un certo campo di frequenza valga la relazione  $L_o(s) = L_{ctrott}(s)$ . Di seguito verrà presentata una procedura che permette di ottenere questo risultato in termini di un parametro di aggiustamento  $\rho$ , in modo tale che per  $\rho \rightarrow \infty$   $L_o(s) \rightarrow L_{ctrott}(s)$ .

Un discorso analogo, per dualità, si può fare sull'osservatore ottimo, e sui risultati che si ottengono nel momento in cui si accoppia con un controllore. Si può allora utilizzare la tecnica LTR per selezionare una matrice dei guadagni  $G$  in modo tale che per un certo campo di frequenze valga la relazione  $L_o(s) = L_{ossott}(s)$ , dove  $L_{ossott}(s) = C(sI - A)^{-1}L$  è la matrice di trasferimento in anello aperto dell'osservatore ottimo, quando l'anello è aperto in corrispondenza delle uscite dell'impianto.

## 20.1 RECUPERO SUGLI INGRESSI TRAMITE PESATURA DELL'OSSERVATORE

Ricordando la forma più semplice dell'equazione di Riccati dell'osservatore ottimo:

$$AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP + B_d W_{dd} B_d^T = 0. \quad (20.6)$$

abbreviando  $B_d W_{dd} B_d$  in  $Q$  e  $\sigma_{ee}^2$  in  $P$ , consideriamo l'effetto di utilizzare una matrice dei pesi  $\bar{Q}$  modificata nell'equazione algebrica di Riccati del filtro di Kalman, in modo da avere la seguente forma

$$\bar{Q} = Q + Q_u = Q + \rho(B_u W)(B_u W)^T, \quad (20.7)$$

con la matrice  $W$  ottenuta attraverso la fattorizzazione di una matrice simmetrica e definita positiva  $W_{uu}$ , in modo che  $W_{uu} = WW^T$ <sup>3</sup>.

<sup>3</sup> A parte la semplificazione dei simboli, notiamo che lo schema di rumore su usato direttamente per comodità di dimostrazione corrisponde, come già suggerito precedentemente, a considerare il sistema:  $\dot{x} = Ax + Bu + [B_d \ B_u] \begin{Bmatrix} d \\ d_u \end{Bmatrix}$ , con  $d$  e  $d_u$  scorrelati e, rispettivamente, di intensità  $W_{dd}$  e  $\rho W_{uu}$ . In tal modo il termine forzante, nell'equazione algebrica di Lyapunov per il calcolo delle varianze, sarebbe:

$$[B_d \ B_u] \begin{bmatrix} W_{dd} & 0 \\ 0 & \rho W_{uu} \end{bmatrix} [B_d \ B_u]^T = B_d W_{dd} B_d^T + \rho B_u W_{uu} B_u^T = Q + \rho B_u W W^T B_u^T \quad (20.8)$$

da cui si vede che  $W_{uu} = WW^T$ . Quindi,  $W$  sarà ottenibile da  $W_{uu}$ , definita positiva, con una decomposizione spettrale o con una più semplice fattorizzazione di Cholesky. Chiaramente l'aggiunta dei disturbi sugli ingressi di controllo, se non richiesta dal criterio di osservazione ottimale, serve al compromesso della rinuncia di una parte dell'ottimalità di stima a favore della robustezza del progetto. In sintesi il progetto di un osservatore LTR consiste nell'effettuare un normale progetto di osservatore ottimale, sostituendo  $[B_d \ B_u]$  e  $\begin{bmatrix} W_{dd} & 0 \\ 0 & \rho W_{uu} \end{bmatrix}$  alle sole  $B_d$  e  $W_{dd}$ , iterando  $\rho$  fino all'ottenimento del miglior compromesso di progetto.

Usando ora il simbolo  $B$  al posto di  $B_u$ , l'equazione di Riccati, modificata come sopra detto, diverrà allora:

$$AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP + Q + \rho(BW)(BW)^T = 0. \quad (20.9)$$

Se dividiamo tutta l'equazione per  $\sqrt{\rho}$ , questa diventa

$$A \frac{P}{\sqrt{\rho}} + \frac{P}{\sqrt{\rho}} A^T - \sqrt{\rho} \frac{P}{\sqrt{\rho}} C^T R^{-1} C \frac{P}{\sqrt{\rho}} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} Q + \sqrt{\rho}(BW)(BW)^T = 0. \quad (20.10) \quad \boxed{\text{ltr-ric1}}$$

Supponendo che per  $\rho \rightarrow \infty$  la quantità  $\frac{P}{\sqrt{\rho}}$  si mantenga finita possiamo prendere questa come nuova incognita  $\bar{P} = \frac{P}{\sqrt{\rho}}$ , e scrivere

$$A\bar{P} + \bar{P}A^T - \sqrt{\rho}\bar{P}C^T R^{-1} C\bar{P} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} Q + \sqrt{\rho}(BW)(BW)^T = 0. \quad (20.11)$$

Per  $\rho \rightarrow \infty$  gli unici termini significativi dell'equazione saranno

$$-\sqrt{\rho}\bar{P}C^T R^{-1} C\bar{P} + \sqrt{\rho}(BW)(BW)^T = 0, \quad (20.12)$$

da cui

$$-\bar{P}C^T R^{-1} C\bar{P} + (BW)(BW)^T = 0. \quad (20.13)$$

Questa equazione mostra chiaramente che la quantità  $\bar{P}$  risulterà finita come effettivamente ipotizzato. Ricordando che il guadagno si può ottenere dalla soluzione dell'equazione di Riccati come  $\bar{L} = \bar{P}C^T R^{-1}$ , otteniamo

$$-\bar{L}R\bar{L}^T + (BW)(BW)^T = 0 \quad (20.14)$$

da cui deduciamo che, per  $\rho \rightarrow \infty$  la matrice dei guadagni assumerà la seguente forma funzionale

$$\frac{L}{\sqrt{\rho}} = BWR^{-\frac{1}{2}}. \quad (20.15) \quad \boxed{\text{l-limite}}$$

Chiamiamo  $S(s) = C(sI - A)^{-1}B = C\Phi B$  la funzione di trasferimento del sistema ed  $R(s) = G(sI - A + LC + BG)^{-1}L$  quella del regolatore, ossia dell'insieme dato dall'osservatore più la matrice dei guadagni. La matrice di trasferimento in anello aperto rispetto agli ingressi sarà allora pari a

$$L_o(s) = R(s)S(s) = G(sI - A + BG + LC)^{-1}LS(s), \quad (20.16) \quad \boxed{\text{lo1}}$$

Ricordiamo ora le seguenti proprietà che saranno utili nel seguito

1. date quattro matrici  $E$ ,  $F$ ,  $H$  e  $M$  tali per cui il prodotto  $FHM$  dia una matrice di dimensioni pari ad  $A$  si dimostra che <sup>4</sup>  $(E + FHM)^{-1} = E^{-1} - E^{-1}F(H^{-1} + ME^{-1}F)^{-1}ME^{-1}$ ;
2.  $I - E(I + E)^{-1} = (I + E)(I + E)^{-1} - E(I + E)^{-1} = (I + E - E)(I + E)^{-1} = (I + E)^{-1}$ ;
3.  $I - (I + E)^{-1}E = (I + E)^{-1}(I + E) - (I + E)^{-1}E = (I + E)^{-1}(I + E - E) = (I + E)^{-1}$ .

Chiamando  $Z(s) = (sI - A + BG)^{-1} = (\Phi^{-1} + BG)^{-1}$ , possiamo riscrivere la (20.16) come

$$L_o(s) = G(Z(s)^{-1} + LC)^{-1}LS(s). \quad (20.17)$$

---

<sup>4</sup>Per un esteso e libero compendio sulle operazioni matriciali e le loro proprietà si vedano, oltre a ogni buon testo di algebra matriciale disponibile: The Matrix Cookbook, [http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/edoc\\_download.php/3274/pdf/imm3274.pdf](http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/edoc_download.php/3274/pdf/imm3274.pdf); The Matrix Reference Manual, <http://www.ee.imperial.ac.uk/hp/staff/dmb/matrix/intro.html>; Wikipedia.

Utilizzando la proprietà 1. con  $E = Z^{-1}$ ,  $F = L$ ,  $H = I$  e  $M = C$  otteniamo

$$\begin{aligned} L_o(s) &= G \left( Z(s) - Z(s)L(I + CZ(s)L)^{-1}CZ(s) \right) LS(s) \\ &= GZ(s)L \left( I - (I + CZ(s)L)^{-1}CZ(s)L \right) S(s). \end{aligned} \quad (20.18)$$

Utilizzando la proprietà 3. con  $E = CZ(s)B$  risulta

$$L_o(s) = GZ(s)L(I + CZ(s)L)^{-1}S(s). \quad (20.19)$$

Sostituendo l'espressione della  $L$  dell'equazione(20.15)

$$L_o(s) = \sqrt{\rho}GZ(s)BWR^{-\frac{1}{2}}(I + \sqrt{\rho}CZ(s)BWR^{-\frac{1}{2}})^{-1}S(s). \quad (20.20)$$

Per  $\rho \rightarrow \infty$ ,

$$L_o(s) = GZ(s)BWR^{-\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}}W^{-1}(CZ(s)B)^{-1}S(s) = GZ(s)B(CZ(s)B)^{-1}S(s). \quad (20.21)$$

maglia\_limite\_o

Il termine  $Z(s)B$  può essere semplificato utilizzando la proprietà 1.

$$\begin{aligned} Z(s)B &= (\Phi^{-1} + BG)^{-1}B \\ &= \Phi B - \Phi B(I + G\Phi B)^{-1}G\Phi B = \Phi B(I - (I + G\Phi B)^{-1}G\Phi B), \end{aligned} \quad (20.22)$$

da cui ancora, per la proprietà 3. si ottiene

$$Z(s)B = \Phi B(I + G\Phi(s)B)^{-1}. \quad (20.23)$$

bz

Utilizziamo ora la (20.23) nella (20.21):

$$\begin{aligned} L_o(s) &= G\Phi B(I + G\Phi B)^{-1}(C\Phi B(I + G\Phi B)^{-1})^{-1}S(s) \\ &= G\Phi B(I + G\Phi B)^{-1}(I + G\Phi B)(C\Phi B)^{-1}S(s) \\ &= G\Phi(s)B = G(sI - A)^{-1}B = L_{ctrott}(s) \end{aligned} \quad (20.24)$$

cioè la matrice in anello aperto del solo controllore. Utilizzando quindi questo tipo di pesatura per  $\rho \rightarrow \infty$  si ottiene un osservatore la cui matrice di trasferimento in anello aperto coincide con quella ottenuta per il controllo ottimo sullo stato. Va notato che nel controllore al limite per  $\rho \rightarrow \infty$  è richiesta l'invertibilità della funzione di trasferimento del sistema  $C\Phi B$ ; al limite infatti l'LTR sostanzialmente opera una cancellazione del tipo poli zeri. Non è quindi possibile il recupero con LTR se ci sono zeri nel semipiano destro, ossia per sistemi cosiddetti "non a fase minima". Inoltre, perché sia possibile l'operazione  $WR^{-\frac{1}{2}}$  il numero di ingressi deve essere uguale al numero delle uscite.

## 20.2 RECUPERO SULLE USCITE TRAMITE PESATURA DEL CONTROLLORE

Naturalmente, per la dualità, esisterà anche un LTR sulle uscite che permette di recuperare la funzione di trasferimento in anello aperto dell'osservatore ottimo. Il procedimento è ovviamente il medesimo, ma viene comunque qui riportato per completezza.

Consideriamo l'effetto di utilizzare una matrice dei pesi  $Q$  nell'equazione algebrica di Riccati, del controllore, modificata, in modo da avere la seguente forma

$$Q + \rho(WC_y)^T(WC_y), \quad (20.25)$$

con la matrice  $W$  ottenuta attraverso la fattorizzazione di una matrice simmetrica e definita positiva  $W_{yy}$ , in modo che  $W_{yy} = W^T W$ <sup>5</sup>.

Omettendo i simboli a pedice per comodità, l'equazione di Riccati, modificata come sopra detto, diverrà allora pari a:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q + \rho (W C)^T (W C) = 0. \quad (20.27)$$

Se dividiamo tutta l'equazione per  $\sqrt{\rho}$ , questa diventa

$$A^T \frac{P}{\sqrt{\rho}} + \frac{P}{\sqrt{\rho}} A - \sqrt{\rho} \frac{P}{\sqrt{\rho}} B R^{-1} B^T \frac{P}{\sqrt{\rho}} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} Q + \sqrt{\rho} (W C)^T (W C) = 0. \quad (20.28) \quad \text{ltr-ric2}$$

Supponendo che per  $\rho \rightarrow \infty$  la quantità  $\frac{P}{\sqrt{\rho}}$  si mantenga finita possiamo prendere questa come nuova incognita  $\bar{P} = \frac{P}{\sqrt{\rho}}$ , e scrivere

$$A^T \bar{P} + \bar{P} A - \sqrt{\rho} \bar{P} B R^{-1} B^T \bar{P} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} Q + \sqrt{\rho} (W C)^T (W C) = 0. \quad (20.29)$$

Per  $\rho \rightarrow \infty$  gli unici termini significativi dell'equazione saranno

$$-\sqrt{\rho} \bar{P} B R^{-1} B^T \bar{P} + \sqrt{\rho} (W C)^T (W C) = 0, \quad (20.30)$$

da cui

$$-\bar{P} B R^{-1} B^T \bar{P} + (W C)^T (W C) = 0. \quad (20.31)$$

Questa equazione mostra chiaramente che la quantità  $\bar{P}$  risulterà finita come effettivamente ipotizzato. Ricordando che il guadagno si può ottenere dalla soluzione dell'equazione di Riccati come  $\bar{G} = R^{-1} B^T \bar{P}$ , otteniamo

$$-\bar{G}^T R \bar{G} + (W C)^T (W C) = 0 \quad (20.32)$$

da cui deduciamo che, per  $\rho \rightarrow \infty$  la matrice dei guadagni assumerà la seguente forma funzionale

$$\frac{G}{\sqrt{\rho}} = R^{-\frac{1}{2}} W C. \quad (20.33) \quad \text{k-limite}$$

Chiamiamo  $S(s) = C(sI - A)^{-1} B = C \Phi B$  la funzione di trasferimento del sistema ed  $R(s) = G(sI - A + LC + BG)^{-1} L$  quella del regolatore, ossia dell'insieme dato dall'osservatore più la matrice dei guadagni. La matrice di trasferimento in anello aperto rispetto alle uscite sarà allora pari a:

$$L_o(s) = S(s)R(s) = S(s)G(sI - A + BG + LC)^{-1} L, \quad (20.34) \quad \text{lo2}$$

Chiamando  $Z(s) = (sI - A + LC)^{-1} = (\Phi^{-1} + LC)^{-1}$ , possiamo riscrivere la (20.34) come

$$L_o(s) = S(s)G(Z(s)^{-1} + BG)^{-1} L. \quad (20.35)$$

---

<sup>5</sup> A parte la semplificazione dei simboli, notiamo che lo schema di pesatura su usato direttamente per comodità di dimostrazione corrisponde, come già suggerito precedentemente, a considerare le prestazioni di risposta composte da due parti, scrivendole come:  $z = \begin{bmatrix} C_z \\ C_y \end{bmatrix} x$ , e pesandole poi, indipendentemente, con le matrici  $W_{zz}$  e  $\rho W_{yy}$ . In tal mondo il termine di pesatura della prestazione di stato risulterà essere:

$$\begin{bmatrix} C_z \\ C_y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W_{zz} & 0 \\ 0 & \rho W_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_z \\ C_y \end{bmatrix} = C_z^T W_{zz} C_z + \rho C_y^T W_{yy} C_y = Q + \rho C_y^T W^T W C_y \quad (20.26)$$

da cui si vede che  $W_{yy} = W^T W$ . Quindi,  $W$  sarà ottenibile da  $W_{yy}$ , definita positiva, con una decomposizione spettrale o con una più semplice fattorizzazione di Cholesky. Chiaramente l'aggiunta delle misure nella cifra di merito, se non richiesta dal criterio di ottimo, serve al compromesso della rinuncia di una parte dell'ottimalità di prestazioni desiderata a favore della robustezza del progetto. In sintesi il progetto di un controllore LTR consiste nell'effettuare un normale progetto di controllore ottimo sullo stato, sostituendo  $\begin{bmatrix} C_z \\ C_y \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} W_{zz} & 0 \\ 0 & \rho W_{yy} \end{bmatrix}$  alle sole  $C_z$  e  $W_{zz}$ , iterando  $\rho$  fino all'ottenimento del miglior compromesso di progetto.

Utilizzando la proprietà 1. con  $E = Z^{-1}$ ,  $F = B$ ,  $H = I$  e  $M = G$  otteniamo

$$\begin{aligned} L_o(s) &= S(s)G \left( Z(s) - Z(s)B (I + GZ(s)B)^{-1} GZ(s) \right) L \\ &= S(s) \left( I - GZ(s)B (I + GZ(s)B)^{-1} \right) GZ(s)L. \end{aligned} \quad (20.36)$$

Utilizzando la proprietà 2. con  $E = GZ(s)B$  risulta

$$L_o(s) = S(s)(I + GZ(s)B)^{-1}GZ(s)L. \quad (20.37)$$

Sostituendo l'espressione della  $G$  dell'equazione(20.33)

$$L_o(s) = S(s)(1 + \sqrt{\rho}R^{-\frac{1}{2}}WCZ(s)B)^{-1}\sqrt{\rho}R^{-\frac{1}{2}}WCZ(s)L. \quad (20.38)$$

Per  $\rho \rightarrow \infty$ ,

$$L_o(s) = S(s)(CZ(s)B)^{-1}W^{-1}R^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}WCZ(s)L = S(s)(CZ(s)B)^{-1}CZ(s)L. \quad (20.39) \quad \text{maglia\_limite}$$

Il termine  $CZ(s)$  può essere semplificato utilizzando la proprietà 1.

$$\begin{aligned} CZ(s) &= C(\Phi^{-1} + LC)^{-1} \\ &= C\Phi - C\Phi L(I + C\Phi L)^{-1}C\Phi = (I - C\Phi L(I + C\Phi L)^{-1})C\Phi, \end{aligned} \quad (20.40)$$

da cui ancora, per la proprietà 2. si ottiene

$$CZ(s) = (I + C\Phi(s)L)^{-1}C\Phi(s). \quad (20.41) \quad \text{cz}$$

Utilizziamo ora la (20.41) nella (20.39):

$$\begin{aligned} L_o(s) &= G((I + C\Phi L)^{-1}C\Phi B)^{-1}(I + C\Phi L)^{-1}C\Phi L = G(C\Phi B)^{-1}(I + C\Phi L)(I + C\Phi L)^{-1}C\Phi L \\ &= C\Phi(s)L = C(sI - A)^{-1}L = L_{ossott}(s) \end{aligned} \quad (20.42)$$

cioè la matrice in anello aperto del solo osservatore.

Si noti, ancora una volta, che nel compensatore è richiesta al limite per  $\rho \rightarrow \infty$  l'invertibilità di  $C\Phi B$ , che comporta la cancellazione poli zeri del sistema. Non è quindi possibile il recupero se ci sono zeri nel semipiano destro. Inoltre, per effettuare l'operazione  $R^{-\frac{1}{2}}W$  il numero di ingressi deve essere uguale al numero delle uscite.

È inoltre importante rimarcare che la dimostrazione su riportata non vale nel caso della presenza del termine  $Du$ , da noi trascurato nella relazione di uscita, nel qual caso le funzioni di trasferimento in anello aperto sarebbero:

$$L_{ou}(s) = R(s)S(s) = G(sI - A + BG + L(C + DG))^{-1}LC(sI - A)^{-1}B \quad (20.43a)$$

$$L_{oy}(s) = S(s)R(s) = C(sI - A)^{-1}BG(sI - A + BG + L(C + DG))^{-1}L \quad (20.43b)$$

Il vincolo più pressante imposto è sicuramente quello dalla fase minima, che rende comunque difficoltosa la progettazione di controllori anche con altri metodi. I casi di numero diverso di ingressi e uscite e la presenza del termine  $Du$  sono invece spesso risolvibili tramite aggiustamento dei pesi e reiterazione del progetto <sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Tutto il discorso LQG, col relativo recupero di robustezza, è ben inquadrabile in un rigoroso formalismo matematico in  $RH_2$ . Sull'argomento esiste pertanto una estesa letteratura, chi fosse interessato ad approfondimenti potrebbe trovare un riferimento in Italiano nell'ottimo: P.Colaneri, A. Locatelli, Controllo in  $RH_2 - RH_\infty$ , Pitagora Editrice, 1993. Sullo stesso argomento si può vedere anche: K. Zhou, J.C. Doyle, Essentials of robust control, Prentice Hall, 1998.

## Capitolo 21

# CONTROLLORE OTTIMO PER DISTURBI PESSIMI (MIN-MAX)

Dato il problema  $\dot{x} = Ax + B_u u + B_d d$ , considerando ora  $d$  come un disturbo deterministico non meglio precisato, vogliamo vedere come è possibile determinare un controllo ottimale che attenui il più possibile l'effetto di  $d$  sul sistema. Non volendo definire nessun ulteriore dato sulla modellazione del disturbo utilizziamo un approccio min-max, avente cioè l'obiettivo di determinare il controllo ottimale in modo da minimizzare l'effetto del disturbo massimo possibile, che chiameremo pessimo. Cerchiamo allora una soluzione per cui

- gli ingressi  $u$  devono tendere a minimizzare la cifra di merito e gli effetti del disturbo per avere un buon controllo,
- il disturbo  $d$  deve rendere pessima la risposta, compatibilmente con l'attività accettabile per l'ingresso di controllo.

In questo modo otterremo un controllo capace di operare senza instabilizzarsi anche in presenza dei disturbi pessimi che si possono ipotizzare agenti sul sistema. A tale scopo cerchiamo i controlli  $u$  e i disturbi  $d$  che ottimizzano la cifra di merito, per semplicità scritta direttamente e senza accoppiamento fra prestazioni, controllo e disturbi:

$$F = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u - \gamma^2 d^T W_{dd} d) dt, \quad (21.1)$$

dove l'utilizzo di un peso negativo  $-\gamma^2$  farà sì che la soluzione ottenuta fornirà il valore massimo del disturbo sopportabile dal controllo.

Per rendersene conto intuitivamente si pensi che la massimizzazione di una funzione si può ottenere dalla minimizzazione della sua opposta. Pertanto, nel nostro caso, minimizzando la differenza di funzioni quadratiche, al più semidefinite positive, si può intuire come la parte negativa possa attenuare la minimizzazione fino ad un valore estremo che garantisca che la funzione risultante sia comunque al più semidefinita positiva. Naturalmente il processo di ottimizzazione dovrà anche garantire la stabilità in ciclo chiuso del sistema.

Imponendo il vincolo della dinamica del sistema con i soliti moltiplicatori di Lagrange scriveremo

$$F = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u - \gamma^2 d^T W_{dd} d + 2 \lambda^T (Ax + B_u u + B_d d - \dot{x})) dt, \quad (21.2)$$

la cui condizione di stazionarietà si ottiene chiedendo,  $\forall \delta x, \delta \lambda, \delta d, \delta u$ , che

$$\delta x^T Q x + \delta u^T R u - \gamma^2 \delta d^T W_{dd} d + \delta \lambda^T (Ax + B_u u + B_d d - \dot{x}) + \delta x^T A^T \lambda + \delta u^T B_u^T \lambda + \delta d^T B_d^T \lambda - \delta \dot{x}^T \lambda = 0,$$

cioè che

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_u u + B_d d \\ Qx + A^T \lambda + \dot{\lambda} &= 0 \\ Ru + B_u^T \lambda &= 0 \\ -\gamma^2 W_{dd} d + B_d^T \lambda &= 0 \end{aligned} \quad (21.3)$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} u &= -R^{-1} B_u^T \lambda \\ d &= \frac{1}{\gamma^2} W_{dd}^{-1} B_d^T \lambda \end{aligned} \quad (21.4)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + (-B_u R^{-1} B_u^T + B_d \frac{1}{\gamma^2} W_{dd}^{-1} B_d^T) \lambda \\ \dot{\lambda} &= -Qx - A^T \lambda \end{aligned} \quad (21.5)$$

Otterremo, anche in questo caso, una matrice Hamiltoniana che rappresenta la dinamica del sistema con i moltiplicatori di Lagrange

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & (-B_u R^{-1} B_u^T + \frac{1}{\gamma^2} B_d W_{dd}^{-1} B_d^T) \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \lambda \end{Bmatrix}, \quad (21.6) \quad \text{minmax0}$$

Si ricordi che alla forma Hamiltoniana (21.6) è associata la seguente equazione algebrica di Riccati:

$$PA + A^T P - P \left( B_u R^{-1} B_u^T - \frac{1}{\gamma^2} B_d W_{dd}^{-1} B_d^T \right) P + Q = 0 \quad (21.7) \quad \text{minmax1}$$

per cui si avrà:

$$u = -R^{-1} B_u^T P x = -G_u x \quad (21.8)$$

$$d = \frac{1}{\gamma^2} W_{dd}^{-1} B_d^T P x = G_d x \quad (21.9)$$

rispettivamente per il controllo ottimo  $u$  e per il disturbo pessimo  $d$ .

A una approssimazione della soluzione ottima si potrà pervenire attraverso un procedimento di bisezione su  $\gamma$  risolvendo ripetutamente la corrispondente equazione algebrica di Riccati fino al più piccolo valore di  $\gamma$  (e quindi ai disturbi maggiori<sup>1</sup>) che porti gli autovalori dell'Hamiltoniana al più sull'asse immaginario, sempre garantendo però l'asintotica stabilità di  $\bar{A} = A - B_u G_u - B_d G_d$ .

Un modo alternativo di pessimizzazione potrebbe consistere nel considerare possibili variazioni  $V_a$  di  $A$  e  $V_b$  di  $B_u$ . In ciclo chiuso esse si rifletteranno in un termine  $V_a + V_b G$ . La presenza della matrice incognita  $G$  rende difficile una caratterizzazione semplice dell'incertezza sulla distribuzione degli ingressi, ragion per cui, producendo comunque tutte e due le variazioni un termine proporzionale allo stato, conglobiamo il tutto in un'unica matrice  $V$ , a priori incognita. Ancora una volta, non volendo definire nessun ulteriore dato sulla modellazione dell'incertezza legata a  $V$ , utilizziamo un approccio min-max, avente cioè l'obiettivo di determinare il controllo ottimale in modo da minimizzare l'incertezza pessima  $V$  sui parametri. Cerchiamo allora una soluzione per cui

- gli ingressi  $u$  devono tendere a minimizzare la cifra di merito a dispetto di  $v = Vx$  in modo da produrre comunque un buon controllo,

<sup>1</sup>Non si cada nel vedere una contraddizione fra  $\frac{1}{\gamma^2}$  nelle formule risolutive e  $\gamma^2$  nella cifra di merito da minimizzare, poichè  $d$  è incognito e dipende implicitamente da  $\gamma$ . Infatti utilizzando la soluzione trovata si ha:  $\gamma^2 d^T W_{dd} d = \frac{1}{\gamma^2} x^T K_d^T W_{dd} K_d x$ . Ragion per cui diminuendo  $\gamma$  si aumenta il peggioramento causato dai disturbi.

- l'incertezza  $V$  deve tendere a rendere pessima la risposta, compatibilmente con l'attività accettabile per l'ingresso di controllo.

In questo modo otterremo un controllo capace di operare senza instabilizzarsi anche in presenza di incertezze pessime che si possono ipotizzare agenti sul sistema. A tale scopo cerchiamo i controlli  $u$  e l'incertezza  $V$  che ottimizzano la cifra di merito, per semplicità scritta senza accoppiamento fra prestazioni e controlli:

$$F = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u - \gamma^2 v^T W_{vv} v) dt, \quad (21.10)$$

per il sistema:

$$\dot{x} = (A + V)x + B_d d = \bar{A}x + B_d d \quad (21.11) \quad \text{minmax2}$$

Risulta quindi evidente che la pessimizzazione tramite  $V$  non differisce da quella tramite  $d$  se non per i simboli utilizzati. Pertanto, con passaggi uguali a quelli già usati precedentemente, si potrà ottenere la soluzione per il valore pessimo delle variazioni  $V$  sopportabile dal controllo. Riportiamo comunque la relative matrice Hamiltoniana;

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \left(-B_u R^{-1} B_u^T + \frac{1}{\gamma^2} W_{vv}^{-1}\right) \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \lambda \end{Bmatrix}, \quad (21.12) \quad \text{minmax0\_alg}$$

e l'equazione algebrica di Riccati a essa associata:

$$PA + A^T P - P \left( B_u R^{-1} B_u^T - \frac{1}{\gamma^2} W_{vv}^{-1} \right) P + Q = 0 \quad (21.13) \quad \text{minmax1\_alg}$$

per cui si avrà:

$$u = -R^{-1} B_u^T P x = -G_u x \quad (21.14)$$

$$v = \frac{1}{\gamma^2} W_{vv}^{-1} P x = G_v x \quad (21.15)$$

rispettivamente per il controllo ottimo  $u$  e per il disturbo pessimo  $v$ . Si può facilmente vedere che si ottiene lo stesso risultato per  $d$  pessimo con  $B_d = I$ .





## Capitolo 22

# RIVISITAZIONE CONTROLLO OTTIMO PER DISTURBI PESSIMI (MIN-MAX)

Come abbiamo fatto per il controllo ottimo vediamo ora come si possa pervenire al risultato precedente per via puramente algebrica, logicamente sulla base dell'assunzione che il controllo ottimo sia:  $u = -G_u x$ , mentre il disturbo pessimo sia:  $d = -G_d x$ . Si noti che abbiamo assunto il segno negativo anche per il guadagno del disturbo pessimo, lasciando alla dimostrazione di ottenere un meno che riporti alla formula sopra ricavata con l'approccio variazionale. Con tale approccio possiamo facilmente complicare le cose tenendo conto di prestazioni accoppiate sia in  $u$  che in  $d$ . Dovremo però constatare che tale generalità porta ad un accoppiamento nella determinazione di  $G_u$  e  $G_d$ . Assumendo quindi tali leggi proporzionali riprendiamo il modello, in ciclo chiuso, del nostro sistema e le relative prestazioni:

revminmax2

$$\dot{x} = (A - B_u G_u - B_d G_d) x = \bar{A} x, \quad (22.1a)$$

$$z = (C_z - D_{zu} G_u - D_{zd} G_d) x = \bar{C}_z x. \quad (22.1b)$$

mentre la funzione obbiettivo, dopo i soliti passaggi, sarà:

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(P X_0) \quad (22.2) \quad \text{revminmax1}$$

sotto il vincolo:

$$\bar{A}^T P + P \bar{A} + W(G) = 0 \quad (22.3) \quad \text{revminmax3}$$

essendo:

$$W(G) = \bar{C}_z^T W_{zz} \bar{C}_z + G_u^T W_{uu} G_u - \gamma^2 G_d^T W_{dd} G_d \quad (22.4) \quad \text{revminmax4}$$

Ancora una volta a tale problema si può associare il corrispondente non vincolato, scritto in forma estesa:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \text{Tr}(P X_0 + \Lambda((A^T - G_u^T B_u^T - G_d^T B_d^T)P + P(A - B_u G_u - B_d G_d) + \\ & (C_z^T - G_u^T D_{zu}^T - G_d^T D_{zd}^T)W_{zz}(C_z - D_{zu} G_u - D_{zd} G_d) + G_u^T W_{uu} G_u - \gamma^2 G_d^T W_{dd} G_d) \end{aligned} \quad (22.5) \quad \text{revminmax5}$$

essendo  $\Lambda$  l'usuale matrice simmetrica dei moltiplicatori di Lagrange. Le relative condizioni di stazionarietà, rispetto a  $P$ ,  $\Lambda$ ,  $G_u$  e  $G_d$ , saranno:

$$\frac{\partial f}{\partial \Lambda} = (A^T - G_u^T B_u^T - G_d^T B_d^T)P + P(A - B_u G_u - B_d G_d) + (C_z^T - G_u^T D_{zu}^T - G_d^T D_{zd}^T)W_{zz}(C_z - D_{zu} G_u - D_{zd} G_d) + G_u^T W_{uu} G_u - \gamma^2 G_d^T W_{dd} G_d = 0 \quad (22.6a) \quad \text{revminmax6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial P} = (A - B_u G_u - B_d G_d)\Lambda + \Lambda(A^T - G_u^T B_u^T - G_d^T B_d^T) + X_0 = 0 \quad (22.6b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial G_u} = (W_{uu} + D_{zu}^T W_{zz} D_{zu})G_u + D_{zu}^T W_{zz} D_{zd} G_d = B_u^T P + D_{zu}^T W_{zz} C_z, \quad (22.6c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial G_d} = D_{zd}^T W_{zz} D_{zu} G_u + (D_{zd}^T W_{zz} D_{zd} - \gamma^2 W_{dd})G_d = B_d^T P + D_{zd}^T W_{zz} C_z, \quad (22.6d)$$

Si vede quindi che per la determinazione di  $G_u$  e  $G_d$  è necessario risolvere un sistema accoppiato di equazioni matriciali in dette incognite. Il disaccoppiamento sarebbe possibile se  $D_{zu}$  e/o  $D_{zd}$  fossero nulli. Per un possibile confronto con il controllo ottimo vediamo ora il risultato che si ottiene assumendo  $D_{zd} = 0$ . È chiaro che il risultato così ottenuto permetterà anche un confronto immediato con quanto già visto con la formulazione variazionale, nella quale era implicita anche l'assunzione di  $D_{zu} = 0$ . Si avrà allora:

minmax7

$$G_u = ((W_{uu} + D_{zu}^T W_{zz} D_{zu})^{-1}(B_u^T P + D_{zu}^T W_{zz} C_z) = R^{-1}((B_u^T P + S) \quad (22.7a)$$

$$G_d = -\frac{1}{\gamma^2} W_{dd}^{-1} B_d^T P \quad (22.7b)$$

Da cui si vede che la matrice dei guadagni  $G_u$  coincide con quella trovata, a parità di assunzioni, nel controllo ottimo e nel controllo min-max, con una conclusione analoga per la matrice  $G_d$ . Sostituendo le due espressioni trovate nell'equazione di Lyapunov in  $P$  si ottiene la seguente equazione algebrica di Riccati:

$$P(A - B_u R^{-1} S^T) + (A^T - S R^{-1} B_u^T)P - P \left( B_u R^{-1} B_u^T - \frac{1}{\gamma^2} B_d W_{dd}^{-1} B_d^T \right) P + C_z^T W_{zz} C_z - S R^{-1} S^T = 0 \quad (22.8)$$

revminmax7

analoga alla (12.18), per  $\gamma$  abbastanza grande (tendente a infinito), mentre rappresenta la nuova equazione algebrica di Riccati per il problema min-max, in una forma più completa di quella ottenuta dalla formulazione variazionale.

È ora importante notare che, comunque vengano ottenute le matrici dei guadagni, la controreazione sui disturbi pessimi non è utilizzabile, in quanto tali disturbi non sono manipolabili, altrimenti non sarebbero neanche dei veri disturbi. Dobbiamo quindi stabilire le conseguenze che comporta il trascurare la controreazione associata ai disturbi pessimi.

La dimostrazione, che per semplicità qui facciamo solo per il caso  $D_{zd} = 0$ , può essere ottenuta utilizzando la proprietà inversa del metodo diretto di Lyapunov, con una definizione dell'energia basata su  $P$ , così come ottenuta dalle condizioni di stazionarietà 22.3. Tale equazione permette di scrivere:

$$\dot{V} = x^T P \bar{A} x = \frac{1}{2} x^T (\bar{A}^T P + P \bar{A}) x = -\frac{1}{2} x^T W(G) x^T \quad (22.9) \quad \text{revminmax8}$$

Rielaborando l'equazione precedente si avrà:

$$\dot{V} = x^T P \bar{A} x = \frac{1}{2} x^T ((A - B_u G_u)^T P + P (A - B_u G_u) + \frac{2}{\gamma^2} P B_d W_{dd}^{-1} B_d^T P) x = -\frac{1}{2} x^T W(G) x^T \quad (22.10) \quad \text{revminmax9}$$

Ricordando la formula per  $K_d$  il termine  $\frac{1}{\gamma^2} P B_d W_{dd}^{-1} B_d^T P = \frac{1}{\gamma^2} P B_d W_{dd}^{-1} W_{dd} W_{dd}^{-1} B_d^T P$  risulta essere uguale a  $\gamma^2 G_d^T W_{dd} G_d$ , definito positivo, utilizzando allora la stessa  $P$  anche per il sistema realizzabile potremo scrivere la relativa  $\dot{V}$  come:

$$\begin{aligned} \dot{V} = x^T P \bar{A} x = & \frac{1}{2} x^T ((A - B_u G_u)^T P + P (A - B_u G_u)) x = \\ & - \frac{1}{2} x^T (\bar{C}_z^T W_{zz} \bar{C}_z + G_u^T W_{uu} G_u - \gamma^2 G_d^T W_{dd} G_d + 2\gamma^2 G_d^T W_{dd} G_d) x^T < 0 \end{aligned} \quad (22.11) \quad \text{revminmax10}$$

Si può così vedere che la realizzazione del controllore min-max sullo stato ottenuta omettendo la controeazione pessima mantiene, addirittura rafforza, la stabilità dello stesso.

Senza ulteriori dettagli ricordiamo la possibilità di pessimizzazione tramite  $V$  notando, ancora una volta, che i passaggi risulterebbero gli stessi e la relativa espressione ottenibile utilizzando  $B_d = I$ . Va però richiamato anche quanto già visto per il termine in  $d$  nella rivisitazione del controllo ottimo sullo stato, per cui l'assunzione  $G_{yd}$  risulta praticamente obbligatoria.

A scopo informativo e senza alcuna dimostrazione si può aggiungere anche che, per  $W_{uu} = 0$ ,  $W_{zz} = I$  e  $W_{dd} = I$ , la pessimizzazione della parametrizzazione sui disturbi porta a un risultato analogo a quella della ricerca del minimo estremo superiore per il valore della risposta in frequenza fra  $z$  e  $d$  (controllo in  $RH_\infty$ ).

La formulazione min-max è inquadrabile nella teoria dei giochi differenziali. Un utile riferimento a tale problematica si può trovare in: A.E. Bryson Jr., Y. Chi Ho, Applied Optimal Control, Optimization, Estimation, and Control, Wiley, 1975. Tale approccio si può anche inquadrare nell'ambito del controllo in  $RH_\infty$  per il quale si rimanda al già citato Colaneri-Locatelli.



## Capitolo 23

# ATTUATORI E SENSORI PIEZOELETRICI

I materiali piezoelettrici hanno una legge costitutiva che comporta una interazione elettro-strutturale; in particolare se si fa l'ipotesi di comportamento lineare del materiale si può scrivere che

$$\begin{cases} \underline{\varepsilon} = \underline{\underline{E}}_{\varepsilon\sigma} \underline{\sigma} + \underline{\underline{E}}_{\varepsilon e} \underline{e} & \text{Effetto Inverso, attuatori} \\ \underline{d} = \underline{\underline{E}}_{d\sigma} \underline{\sigma} + \underline{\underline{E}}_{de} \underline{e} & \text{Effetto Diretto, sensori} \end{cases}$$

dove  $\underline{d}$  è il campo dielettrico ed  $\underline{e}$  è il campo elettrico. Inoltre valgono alcune proprietà di simmetria, ovvero:

$$\underline{\underline{E}}_{\sigma\varepsilon} = \underline{\underline{E}}_{\sigma\varepsilon}^T \quad \underline{\underline{E}}_{de} = \underline{\underline{E}}_{de}^T \quad \underline{\underline{E}}_{d\sigma} = \underline{\underline{E}}_{\varepsilon e}^T$$

La matrice  $\underline{\underline{E}}_{de}$  è la matrice delle costanti dielettriche del materiale, che hanno ordine di grandezza  $10^{-11}$  nel SI. In generale le matrici indicate non sono affatto piene, in quanto l'effetto piezoelettrico diretto o inverso non coinvolge tutte le direzioni, se sollecitato con un campo elettrico in una direzione, ma possiamo distinguere due effetti principali:

- L'effetto co-direzionale, effetto nella stessa direzione del campo elettrico.
- L'effetto trasversale, effetto nella direzione trasversale al campo elettrico.

Invertendo le precedenti relazioni costitutive si può scrivere:

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = \underline{\underline{E}}_{\varepsilon\sigma}^{-1} \underline{\varepsilon} - \underline{\underline{E}}_{\varepsilon\sigma}^{-1} \underline{\underline{E}}_{\varepsilon e} \underline{e} \\ \underline{d} = \underline{\underline{E}}_{d\sigma} \left( \underline{\underline{E}}_{\varepsilon\sigma}^{-1} \underline{\varepsilon} - \underline{\underline{E}}_{\varepsilon\sigma}^{-1} \underline{\underline{E}}_{\varepsilon e} \underline{e} \right) + \underline{\underline{E}}_{de} \underline{e} \end{cases}$$

da cui, rinominando le matrici, si arriva alla forma delle leggi costitutive elasto/elettriche che sarà utilizzata successivamente:

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = \underline{\underline{D}} \underline{\varepsilon} - \underline{\underline{E}} \underline{e} \\ \underline{d} = \underline{\underline{E}}^T \underline{\varepsilon} + \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{e} \end{cases}$$

La relazione sopra scritta esplicita gli sforzi, mentre la precedente esplicitava le deformazioni. Le due relazioni sono chiaramente equivalenti e il loro utilizzo dipende da cosa si vuole ottenere. Riprendiamo allora quella alla deformazioni per fare qualche considerazione. Ricordiamo che la matrice  $\underline{\underline{E}}_{\varepsilon e}$ , matrice delle costanti piezoelettriche, come fatto notare, non è piena, anzi in generale

può venire espressa nella forma

$$\underline{\underline{E}}_{\varepsilon e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{32} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{24} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I materiali piezoelettrici si distinguono nella pratica in due categorie: piezoelettrici ceramici e i polimerici; inoltre sempre più si fanno strada una classe di piezoelettrici artificiali che sono caratterizzati da una particolare direzione di polarizzazione.

Tipo	Coefficienti	Uso
PZT (Ceramici)	$d_{31} = d_{33}$ , $d_{15} = d_{24}$	Attuatori
PVDF (Polimerici)	$d_{15} = d_{24} = 0$	Sensori

**Esempio.** Si prenda un piezoelettrico libero nello spazio; ad esso si applichi un campo elettrico  $e_3$  diretto solo nella direzione 3; a questa direzione è associata quindi una polarità,  $p$ , diretta come 3.

Per questo caso varrà che

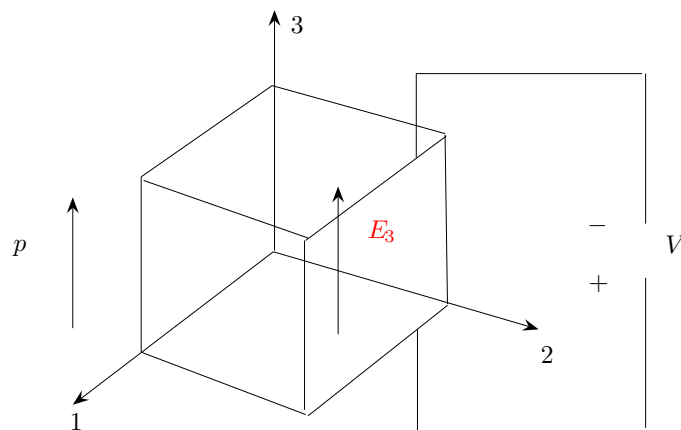
$$\varepsilon_{11} = d_{31}e_3, \quad d_{31} < 0$$

$$\varepsilon_{22} = d_{32}e_3, \quad d_{32} < 0$$

$$\varepsilon_{33} = d_{33}e_3, \quad d_{33} > 0$$

Ovvero il piezoelettrico si allunga nella direzione 3 e si accorcia lungo le altre. Come si vede dal disegno seguente per generare il campo elettrico è *stata applicata una tensione*. Infatti è noto che

$$\underline{e} = \text{grad}(V)$$



Distinguiamo ora i piezoelettrici in base al loro modo di deformarsi, esistono i piezoelettrici

- Lineari, o Stack (pila/catasta), nei quali è più importante l'effetto del termine  $d_{33}$ ; questi vengono usati di solito per la aste attive.

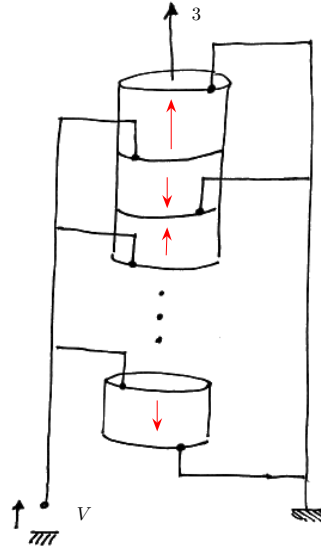


Figura 23.1: Piezo in configurazione stack

fig:piezo\_stack

- Lamine/Piastrine/Pezze, o Laminar/Patch, in cui è preponderante  $d_{31}$ .

#### LINEARE IMPILATO

Nel caso di piezoelettrico impilato, la conformazione è quella di figura 23.1 a fianco, in cui si nota la differenza orientazione del campo elettrico di polarizzazione. Un tale tipo di piezoelettrico lavora solo a trazione. Se il numero dei dischi è  $n$  allora vale che l'allungamento è

$$\Delta L = nd_{33}V$$

come si può dimostrare facilmente.

Un problema è che per sollecitazioni a frequenza elevata entra in gioco un comportamento isteretico che compromette l'ipotesi di linearità. Per togliere questo effetto si usano dei compensatori locali o si modella anche questo comportamento.

Un altro problema è che si lavora solo a trazione e dunque se si vogliono esercitare sforzi a compressione bisogna usare un precarico.

Una applicazione dei piezoelettrici accatastati sono le aste attive sulle quali comandando in tensione si riesce ad ottenere un controllo della deformata dell'asta (figura 23.2).

#### LAMINA/PIASTRINA/PEZZA

Per questo caso (Figura 23.3) varrà che

$$\varepsilon_{11} = d_{31} \frac{V}{h_p}$$

$$\varepsilon_{22} = d_{32} \frac{V}{h_p}$$

In relazione allo sviluppo di una formulazione approssimata per analizzare i problemi elasto/elettrici associati ai materiali piezoelettrici ritorniamo ora all'ultima forma delle relative leggi costitutive:

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} - \underline{E} e \\ \underline{d} = \underline{E}^T \underline{\varepsilon} + \underline{e} \end{cases}$$



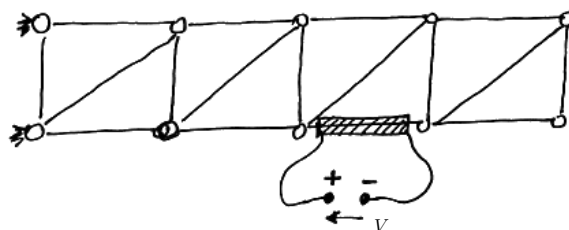


Figura 23.2: Elemento piezoelettrico inserito all'interno di un traliccio

fig:tess\_figure\_

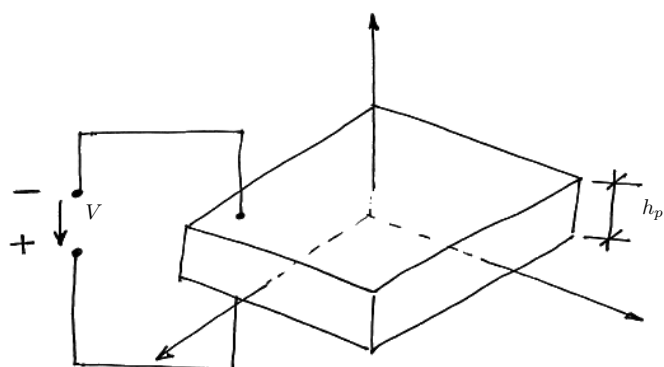


Figura 23.3: Piezo in configurazione patch

fig:piezo\_patch

ricordando che possiamo scrivere

$$\begin{cases} \underline{e} = \text{grad}(V) \\ \underline{\varepsilon} = \underline{\underline{B}} \underline{u} \end{cases}$$

perciò

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = \underline{\underline{D}} \underline{\varepsilon} - \underline{\underline{E}} \text{grad}(V) \\ \underline{d} = \underline{\underline{E}}^T \underline{\varepsilon} + \underline{\underline{\varepsilon}} \text{grad}(V) \end{cases}$$

Passiamo ora al **PLV** del problema termo-elettro-elastico; la prima equazione porta ad un cambiamento della matrice di rigidezza della formulazione tradizionale; in questo contesto analizzeremo solo tale variazione. In formulazione debole si scrive

$$\int_{\mathcal{V}} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\underline{D}} \underline{\varepsilon} d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\underline{E}} \text{grad}(V) d\mathcal{V}$$

mentre la seconda, ricordando che il lavoro è la carica per la differenza di potenziale e ricordando la prima equazione di Maxwell che pone

$$\text{div}(\underline{d}) = \varrho_L$$

con  $\varrho_L$  carica libera, allora

$$\int_{\mathcal{V}} \delta V^T \text{div}(\underline{d}) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \delta V^T \varrho_L d\mathcal{V}$$

ed integrando per parti si ottiene

$$- \int_{\mathcal{V}} \delta \text{grad } V^T \underline{d} d\mathcal{V} + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{V}} \delta V^T \underline{d} \cdot \underline{n} d\mathcal{S}}_{\text{Condizione Naturale}} = \int_{\mathcal{V}} \delta V^T \varrho_L d\mathcal{V}$$

La condizione naturale altro non è che la carica superficiale ( $\varrho_S$ ), dunque può essere portata a destra dell'uguale

$$- \int_{\mathcal{V}} \delta \text{grad } V^T \underline{d} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \delta V^T \varrho^* d\mathcal{V}$$

a questo punto si può sostituire a  $\underline{d}$  la sua espressione, ottenendo:

$$- \int_{\mathcal{V}} \delta \text{grad } V^T (\underline{\underline{E}}^T \underline{\varepsilon} + \underline{\underline{\varepsilon}} \text{grad}(V)) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \delta V^T \varrho^* d\mathcal{V}$$

che scrivo come

$$- \int_{\mathcal{V}} \delta \text{grad } V^T \underline{\underline{E}}^T \underline{\underline{B}} \underline{s} d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \delta \text{grad } V^T \underline{\underline{\varepsilon}} \text{grad}(V) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \delta V^T \varrho^* d\mathcal{V}$$

ponendo  $\varrho_L = 0$  allora

$$\int_{\mathcal{V}} \delta \text{grad } V^T \underline{\underline{E}}^T \underline{\underline{B}} \underline{s} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \delta \text{grad } V^T \underline{\underline{\varepsilon}} \text{grad}(V) d\mathcal{V} = \int_{\partial \mathcal{V}} \delta V^T \varrho_S d\mathcal{S}$$

a questo punto sviluppo  $V$  come

$$V(\underline{x}, t) = \underline{\underline{N}}_V(\underline{x}) \underline{q}_V(t)$$

e dunque scrivo che

$$\text{grad } V = \text{grad} \{ \underline{\underline{N}}_V \} \underline{q}_V$$

con questa posizione le due equazioni scritte in forma debole divengono

$$\delta \underline{u}^T \left[ \int_{\mathcal{V}} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} d\mathcal{V} \right] \underline{u} - \delta \underline{u}^T \left[ \int_{\mathcal{V}} \underline{B}^T \underline{E} \text{grad} \{ \underline{N}_V \} d\mathcal{V} \right] \underline{q}_V$$

$$\delta \underline{q}_V^T \left[ \int_{\mathcal{V}} \text{grad} \{ \underline{N}_V \}^T \underline{E}^T \underline{B} d\mathcal{V} \right] \underline{u} + \delta \underline{q}_V^T \left[ \int_{\mathcal{V}} \text{grad} \{ \underline{N}_V \}^T \underline{\epsilon} \text{grad} \{ \underline{N}_V \} d\mathcal{V} \right] \underline{q}_V = \delta \underline{q}_V^T \left[ \int_{\partial \mathcal{V}} \{ \underline{N}_V \}^T \underline{\varrho}_S d\mathcal{S} \right]$$

dove la prima è il termine di variazione della matrice di rigidità. Posso allora riscrivere il sistema di equazioni per l'arbitrarietà degli spostamenti virtuali come

$$\begin{cases} \underline{M} \ddot{\underline{u}} + \underline{K} \underline{u} - \underline{K}_{sV} \underline{q}_V = \underline{F} & \text{Controllo} \\ \underline{S}_{ds} \underline{u} + \underline{C}_e \underline{q}_V = \underline{\varrho}_{ext} & \text{Uscita} \end{cases}$$

dove  $\underline{S}_{ds}$  è la matrice di carica strutturale e  $\underline{C}_e$  è la matrice di capacità.

**Osservazione.** Le equazioni di Maxwell si scrivono come:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{d} = \varrho_L \\ \nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \end{cases}$$

dove si è usata una notazione vicina a quella spesso usata nelle trattazioni ingegneristiche. Quindi se il campo dielettrico dipende dal tempo e varia con esso (corrente di spostamento) ci sarà un campo magnetico ad esso associato e dunque un accoppiamento elettromagnetico. Di questi effetti noi non ci occupiamo perchè facciamo della quasi-statica, invero solo statica nel nostro caso, residualizziamo cioè la dinamica elettromagnetica, trascurando quindi gli effetti di propagazione delle onde elettromagnetiche. Ricordando che siamo interessati a problemi termoelastici a bassa frequenza si noti che assumendo una velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche di 300.000 Km/s anche a frequenze di alcune decine di KHz, per noi assai elevate, corrispondono lunghezze d'onda dell'ordine della decina di Km, da cui si può desumere che sulla scala dimensionale dei nostri sistemi elettrotermostrutturali l'approssimazione quasi stazionaria è più che adeguata.

Ora analizziamo meglio il termine di accoppiamento

$$\int_{\mathcal{V}} \text{grad} \{ \underline{N}_V \}^T \underline{E}^T \underline{B} d\mathcal{V}$$

e passiamolo in termini modali  $\underline{u} = \underline{U} \underline{q}$ ; si noti che il potenziale consta di pochi termini di sviluppo e dunque può benissimo non essere condensato in maniera modale.

$$\int_{\mathcal{V}} \text{grad} \{ \underline{N}_V \}^T \underline{E}^T \underline{B} d\mathcal{V} \underline{U}$$

Dovrebbe quindi essere evidente che tale integrale rappresenta la dipendenza delle uscite generalizzate modali dalla distribuzione di materiale piezoelettrico. Sarà dunque possibile in linea di principio progettare tale distribuzione in modo da attivare un modo piuttosto che un altro realizzando quindi un vero e proprio osservatore modale distribuito con la possibilità, ad esempio, di evitare travasi di misura. Cioè stiamo di fatto progettando la matrice di uscita  $\underline{C}$  come un filtro spaziale distribuito. Un ragionamento duale, in termini di forze generalizzate di controllo, si potrà naturalmente fare in relazione al termine:

$$\int_{\mathcal{V}} \underline{B}^T \underline{E} \text{grad} \{ \underline{N}_V \} d\mathcal{V}$$

Facciamo ora qualche esempio su applicazioni dei piezoelettrici.

## 23.1 Trave con piezoelettrico

Prendiamo una trave con due attuatori piezoelettrici, posti uno sopra ed uno sotto, che non coprono l'intera trave. Proponiamoci di scrivere *l'equazione di moto* utilizzando il PLV, cioè scriviamo che  $\delta\mathcal{L}_D = \delta\mathcal{L}_e$ <sup>1</sup>:

$$\int_{\mathcal{V}} \delta\varepsilon^T \sigma d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}} \delta v^T \rho \ddot{v} d\mathcal{V}$$

Definiamo quindi il volume tra trave,  $T$ , e piezoelettrico,  $P$

$$\int_{\mathcal{V}_T} \delta\varepsilon_T^T \sigma_T d\mathcal{V}_T + 2 \int_{\mathcal{V}_P} \delta\varepsilon_P^T \sigma_P d\mathcal{V}_P = - \int_{\mathcal{V}_T} \delta v^T \rho_T \ddot{v} d\mathcal{V}_T - 2 \int_{\mathcal{V}_P} \delta v^T \rho_P \ddot{v} d\mathcal{V}_P$$

Riconosciamo facilmente che possiamo scrivere il primo termine come

$$\int_{\mathcal{V}_T} \delta\varepsilon_T^T \sigma_T d\mathcal{V}_T = \int_{\mathcal{V}_T} \delta v''^T \mathbf{E} J v'' d\mathcal{V}_T$$

Allora il secondo termine sarà:

$$\int_{\mathcal{V}_P} \delta\varepsilon_P^T \sigma_P d\mathcal{V}_P = \int_{x_1}^{x_2} \int_{\mathcal{A}_P} \delta\varepsilon_{xP}^T \sigma_{xP} d\mathcal{A}_P dx$$

Per andare avanti bisogna ora introdurre la legge costitutiva del materiale piezoelettrico, che come detto è

$$\sigma_{xP} = \mathbf{E}_P \varepsilon_{xP} - d_{31} \frac{V}{h_P} \mathbf{E}_P$$

Con  $\mathbf{E}_P$  rigidità del piezoelettrico. Sostituendo

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{\mathcal{A}_P} \delta\varepsilon_{xP}^T \sigma_{xP} d\mathcal{A}_P dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{\mathcal{A}_P} \delta\varepsilon_{xP}^T \mathbf{E}_P \varepsilon_{xP} d\mathcal{A}_P dx - \int_{x_1}^{x_2} \int_{\mathcal{A}_P} \delta\varepsilon_{xP}^T d_{31} \frac{V}{h_P} \mathbf{E}_P d\mathcal{A}_P dx$$

Ricordando che è  $\varepsilon_x = -y v''$

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{\mathcal{A}_P} \delta v''^T \mathbf{E}_P y^2 v'' d\mathcal{A}_P dx - \int_{x_1}^{x_2} \int_{\mathcal{A}_P} \delta v''^T d_{31} \frac{V}{h_P} \mathbf{E}_P d\mathcal{A}_P dx$$

Facendo le dovute ipotesi posso scrivere allora che

$$\underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \delta v''^T \mathbf{E}_P J_P v'' dx}_{\text{Rigidità}} - \underbrace{\mathcal{A}_P d_{31} \frac{V}{h_P} \mathbf{E}_P \int_{x_1}^{x_2} \delta v''^T dx}_{\text{Attuazione}}$$

Si può mostrare allora che, integrando l'ultimo termine, l'attuazione è schematizzabile come due momenti applicati agli estremi della piastra, infatti

$$\mathcal{A}_P d_{31} \frac{V}{h_P} \mathbf{E}_P \int_{x_1}^{x_2} \delta v''^T dx = C[\delta v'(x_2) - \delta v'(x_1)]$$

---

<sup>1</sup>Per semplicità si sottintende la notazione di vettore

## 23.2 Piastra con piezoelettrico

Allo stesso modo si può dimostrare che un attuatore piezoelettrico applicato ad una piastra dà una linea di momento lungo il contorno della stessa piastra. Per farlo basta scrivere il PLV del solo termine di attuazione

$$\int_{V_P} \delta \varepsilon_P^T \underline{C} dV_P$$

dove si è supposto costante e pari a  $\underline{C}$  il termine

$$\underline{\underline{E}} grad V$$

allora per le leggi costitutive delle piastre si può scrivere che

$$\int_{V_P} \delta \varepsilon_P^T \underline{C} dV_P = \int_{A_P} \delta \tilde{\varepsilon}_P^T \int_t z^2 \underline{C} dz dA_P$$

integrato sullo spessore della piastra di piezoelettrico. E dunque ricordando che

$$\tilde{\varepsilon}^T = -\{w_{xx} \ w_{yy} \ 2w_{xy}\}$$

$$\begin{aligned} \int_{A_P} \delta \tilde{\varepsilon}_P^T \int_t z^2 \underline{C} dz dA_P &= \int_x \int_y \delta \{w_{xx} \ w_{yy} \ 2w_{xy}\} \tilde{\underline{C}} dy dx = \\ C_1 \int_y \delta w_x(x_1, y) dy &+ C_2 \int_y \delta w_x(x_2, y) dy + C_3 \int_x \delta w_y(x, y_1) dx + C_4 \int_x \delta w_y(x, y_2) dx + C_5 \delta w(P) \end{aligned}$$

ovvero le quattro linee di momento e lo spostamento virtuale dei punti  $P$  che descrivono i vertici della piastra; questi ultimi sono condizioni essenziali per il piezoelettrico.

## 23.3 Sensore triangolare piezoelettrico

Usando la stessa tecnica per l'equazione del sensore, essendo il termine di capacità (condensatore) elettrica banale si sviluppa solo del termine di trasduzione della deformazione, si può mostrare come progettare la forma di un sensore piezoelettrico al fine di valutare proprio gli spostamenti in alcuni punti scelti. Per fare ciò per prima cosa si riscrive il termine del sensore di deformazione della trave con piezoelettrico

$$- \int_{x_1}^{x_2} \int_{A_P} v''^T d_{31} \frac{1}{h_P} E_P dA_P dx = C \int_{x_1}^{x_2} v'' b(x) dx$$

dove  $b(x)$  rappresenta la larghezza, lo spessore è già entrato nella costante  $C$  e il trasposto non serve perchè  $v$  è scalare. Allora integrando per parti, non si riporta la costante  $C$  inessenziale ai fini di interesse,

$$\int_{x_1}^{x_2} v'' b(x) dx = v' b]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} v' b' dx$$

che per  $b' = 0$ , ossia  $b$  costante, risulta in un risultato analogo a quello a cui eravamo arrivati per l'attuatore rettangolare, ovvero il piezoelettrico misura la differenza delle due rotazioni agli estremi della barretta,  $b(v'(x_2) - v'(x_1))$ . Per  $b'' = 0$  invece il piezoelettrico dà anche delle forze, infatti integrando per parti

$$v' b]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} v' b' dx = v' b]_{x_1}^{x_2} - v b']_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} v b'' dx$$

ed eliminando il termine nullo, si ottengono i termini di coppie e forze concentrate.

Nel caso di un sensore piezoelettrico triangolare, si ha che

$$\int_{x_1}^{x_2} v''b(x)dx = v'b]_{x_1}^{x_2} - vb']_{x_1}^{x_2}$$

e se lo si pensa attaccato ad una trave incastrata allora essendo  $v(x_1) = v'(x_1) = 0$  perchè all'incastro e  $b(x_2) = 0$  perchè triangolare, si ha

$$\int_{x_1}^{x_2} v''b(x)dx = -v(x_2)b'(x_2)$$

ovvero il piezoelettrico misura lo spostamento dell'estremo della trave.



# GNU Free Documentation License

Version 1.3, 3 November 2008

Copyright © 2000, 2001, 2002, 2007, 2008 Free Software Foundation, Inc.

<<http://fsf.org/>>

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

## Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document “free” in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondly, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of “copyleft”, which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

## 1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The “**Document**”, below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as “**you**”. You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A “**Modified Version**” of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A “**Secondary Section**” is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document’s overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The “**Invariant Sections**” are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.



The “**Cover Texts**” are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A “**Transparent**” copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not “Transparent” is called “**Opaque**”.

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, TeXinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The “**Title Page**” means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, “Title Page” means the text near the most prominent appearance of the work’s title, preceding the beginning of the body of the text.

The “**publisher**” means any person or entity that distributes copies of the Document to the public.

A section “**Entitled XYZ**” means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as “**Acknowledgements**”, “**Dedications**”, “**Endorsements**”, or “**History**”.) To “**Preserve the Title**” of such a section when you modify the Document means that it remains a section “Entitled XYZ” according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

## 2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

## 3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document’s license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers

in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

## 4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

- A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.
- B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.
- C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
- D. Preserve all the copyright notices of the Document.
- E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
- F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
- G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.
- H. Include an unaltered copy of this License.
- I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.

- J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the “History” section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
- K. For any section Entitled “Acknowledgements” or “Dedications”, Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
- L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
- M. Delete any section Entitled “Endorsements”. Such a section may not be included in the Modified Version.
- N. Do not retitle any existing section to be Entitled “Endorsements” or to conflict in title with any Invariant Section.
- O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version’s license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled “Endorsements”, provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

## 5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled “History” in the various original documents, forming one section Entitled “History”; likewise combine any sections Entitled “Acknowledgements”, and any sections Entitled “Dedications”. You must delete all sections Entitled “Endorsements”.

## 6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

## **7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS**

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an “aggregate” if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation’s users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document’s Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

## **8. TRANSLATION**

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled “Acknowledgements”, “Dedications”, or “History”, the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

## **9. TERMINATION**

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense, or distribute it is void, and will automatically terminate your rights under this License.

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly and finally terminates your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, receipt of a copy of some or all of the same material does not give you any rights to use it.

## **10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE**

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See <http://www.gnu.org/copyleft/>.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License “or any later version” applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document specifies that a proxy can decide which future versions of this License can be used, that proxy’s public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Document.

## 11. RELICENSING

“Massive Multiauthor Collaboration Site” (or “MMC Site”) means any World Wide Web server that publishes copyrightable works and also provides prominent facilities for anybody to edit those works. A public wiki that anybody can edit is an example of such a server. A “Massive Multiauthor Collaboration” (or “MMC”) contained in the site means any set of copyrightable works thus published on the MMC site.

“CC-BY-SA” means the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 license published by Creative Commons Corporation, a not-for-profit corporation with a principal place of business in San Francisco, California, as well as future copyleft versions of that license published by that same organization.

“Incorporate” means to publish or republish a Document, in whole or in part, as part of another Document.

An MMC is “eligible for relicensing” if it is licensed under this License, and if all works that were first published under this License somewhere other than this MMC, and subsequently incorporated in whole or in part into the MMC, (1) had no cover texts or invariant sections, and (2) were thus incorporated prior to November 1, 2008.

The operator of an MMC Site may republish an MMC contained in the site under CC-BY-SA on the same site at any time before August 1, 2009, provided the MMC is eligible for relicensing.