

3. Cinematica

La cinematica è la parte della meccanica che studia il moto di sistemi, indipendentemente dalle cause che lo generano, a differenza della dinamica. Prima di ricavare le equazioni che descrivono la dinamica di un fluido, sembra quindi opportuno concentrarsi sulla sua cinematica.

Per descrivere il moto di un fluido vengono definite quattro famiglie di curve: le linee di corrente, le traiettorie, le curve di emissione (o linee di fumo) e le tracce. Viene data una definizione matematica di queste curve, che possono essere ottenute durante le attività sperimentali tramite delle tecniche di visualizzazione del campo di moto, come mostrato nel seguente video, [Stanford 1963 - Flow Visualization](https://www.youtube.com/watch?v=nuQyKGuXJOs).

<https://www.youtube.com/watch?v=nuQyKGuXJOs>, nel caso non funzionasse il collegamento sopra a uno degli storici video del National Committee.

Secondo la descrizione euleriana del moto di un mezzo continuo, il campo di velocità è rappresentato dalla funzione vettoriale \mathbf{u} i cui argomenti indipendenti sono la coordinata spaziale \mathbf{r} e quella temporale t , $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Vengono ora definite le quattro curve caratteristiche elencate sopra:

- Le **linee di corrente** sono curve \mathbf{S} tangenti al campo vettoriale $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ in ogni punto dello spazio \mathbf{r} , all'istante temporale t considerato. Essendo curve (dimensione=1), possono essere espresse in forma parametrica come funzioni di un parametro scalare p , $\mathbf{S}(p)$. La “traduzione matematica” della definizione è quindi

$$\frac{d\mathbf{S}}{dp}(p) = \lambda(p)\mathbf{u}(\mathbf{S}(p), t), \quad (3.1)$$

cioè il vettore tangente $d\mathbf{S}(p)/dp$ alla curva $\mathbf{S}(p)$, nel punto identificato dal valore del parametro p , è parallelo al vettore velocità \mathbf{u} calcolato nello stesso punto $\mathbf{S}(p)$, al tempo considerato t . La funzione $\lambda(p)$ dipende dalla parametrizzazione utilizzata e non influisce sulla forma della linea di corrente. L'equazione (3.1) rappresenta tutte le linee di corrente: per ottenere la linea di corrente passante per un punto, è necessario imporre questa condizione come condizione al contorno.

- Una **traiettoria** descrive il moto di una singola particella materiale, la cui velocità è uguale a quella del fluido, nella posizione in cui si trova e all'istante di tempo "attuale". La traiettoria di una particella è descritta dall curva $\mathbf{R}(t)$, parametrizzata con il tempo t , che soddisfa il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{R}}{dt}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t) \\ \mathbf{R}(t_0) = \mathbf{R}_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

L'equazione differenziale traduce la definizione di particella materiale: la velocità della particella materiale $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{R}/dt(t)$ è uguale alla velocità del fluido nello stesso punto allo stesso istante di tempo, $\mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t)$. La condizione iniziale identifica tra tutte le traiettorie delle infinite particelle materiali, quella della particella che all'istante t_0 passa per il punto \mathbf{R}_0 .

Fissati i "parametri" t_0 e \mathbf{R}_0 che identificano la particella desiderata, la sua traiettoria è descritta dalla curva $\mathbf{R}(t; t_0, \mathbf{R}_0)$, funzione del tempo "attuale" t .

- Una **linea di fumo** è il luogo dei punti descritto dalla posizione al tempo t (fissato) di tutte le particelle materiali passate per un punto (fissato) nello spazio, \mathbf{R}_0 , negli istanti di tempo t_0 precedenti a t , $t_0 < t$.

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{R}}{dt}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t) \\ \mathbf{R}(t_0) = \mathbf{R}_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Il problema è identico a quello delle traiettorie. Cambia però il ruolo di t , t_0 , \mathbf{R}_0 : la linea di fumo al "tempo di osservazione" t formata da tutte le particelle passanti da \mathbf{R}_0 a istanti temporali t_0 , con $t_0 < t$, è una descritta dalla curva $\mathbf{R}(t_0; t, \mathbf{R}_0)$, funzione dell'istante t_0 .

- Una **traccia** è il luogo dei punti descritto dalla posizione al tempo t (fissato) di tutte le particelle materiali che si trovavano su una curva $\mathbf{R}_0(p)$ al tempo t_0 (fissato).

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{R}}{dt}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t) \\ \mathbf{R}(t_0) = \mathbf{R}_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Ancora una volta il problema è identico a quello delle traiettorie ma cambia il ruolo di t , t_0 , \mathbf{R}_0 : fissati i parametri t_0 e t che identificano rispettivamente l'istante di tempo in cui le particelle materiali desiderate si trovano sulla curva \mathbf{R}_0 e l'istante di tempo in cui la curva viene osservata, la traccia è una funzione del luogo dei punti "iniziale" \mathbf{R}_0 , $\mathbf{R}(\mathbf{R}_0; t, t_0)$.

Osservazione 1.

Nel caso di campi stazionari, cioè indipendenti dal tempo, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}^{(staz)}(\mathbf{r})$, linee di corrente, traiettorie e linee di fumo coincidono.

Esercizio 3.1 — **Linee di corrente, traiettorie e linee di fumo: non stazionario.** Sia dato il campo di moto

$$\mathbf{u}(x, y) = 3\hat{x} + 3t\hat{y} \quad (3.5)$$

Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle. Infine si determinino le tracce generate al tempo $t_0 = 0$ dal segmento che unisce l'origine con il punto $(x_1, y_1) = (0, 1)$. ■

Soluzione

Concetti. Definizione di linee di corrente, traiettorie, linee di fumo, tracce. Soluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie (problemi di Cauchy, ai valori iniziali).

Svolgimento. Partendo dalle definizioni, si ricavano le equazioni delle curve caratteristiche. Il problema per le traiettorie, le linee di fumo e le tracce viene risolto una volta sola per ottenere il risultato in forma parametrica in funzione di t , t_0 , $\mathbf{R}_0(p) = (x_0(p), y_0(p))$.

- **Linee di corrente.** L'equazione vettoriale che definisce una linea di corrente $\mathbf{S}(p) = X(p)\hat{x} + Y(p)\hat{y}$ viene scritta per componenti,

$$\begin{cases} \frac{dX}{dp}(p) = \lambda(p)3 \\ \frac{dY}{dp}(p) = \lambda(p)3t \end{cases} \quad (3.6)$$

Il sistema di equazioni può essere risolto ricavando dalla prima $\lambda(p)$ in funzione di dX/dp , sostituendolo nella seconda, e integrando tra p_0 e p , con t fissato

$$\int_{p_0}^p \frac{dY}{dp}(p') dp' = \int_{p_0}^p \frac{dX}{dp}(p') t dp' \quad \rightarrow \quad Y(p) - Y(p_0) = (X(p) - X(p_0)) t \quad (3.7)$$

Dopo aver fissato una linea di corrente, imponendo il suo passaggio per un punto, $(X(p_0), Y(p_0)) = (x_0, y_0)$, si ottiene la sua equazione in *forma cartesiana*

$$y = y_0 + (x - x_0)t \quad (3.8)$$

In questo problema, le linee di corrente costituiscono una famiglia di rette parallele nel piano x - y , a ogni istante temporale, il cui coefficiente angolare, t , aumenta con il tempo.

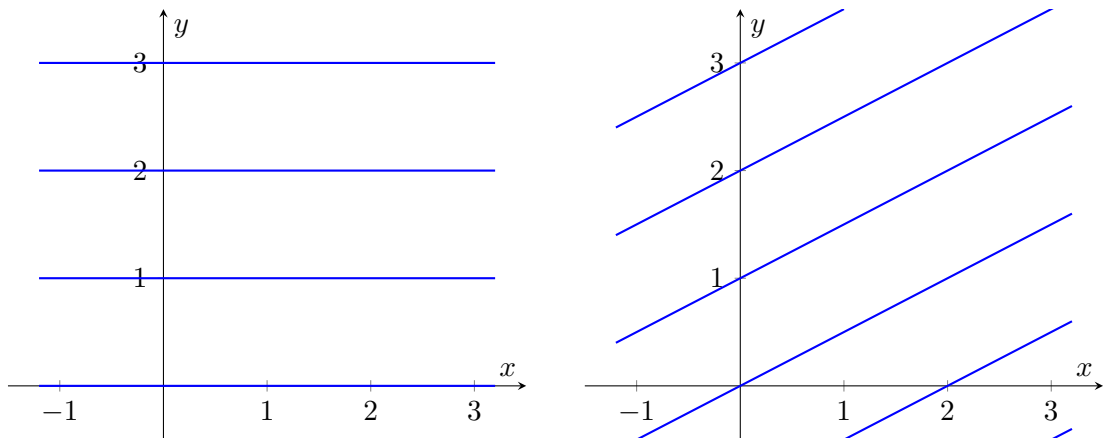


Figura 3.1: Linee di corrente a $t = 0.0$ (sinistra) e $t = 0.5$ (destra).

- **Traiettorie.** Le equazioni di traiettorie, linee di fumo e tracce vengono ricavate in forma parametrica risolvendo il problema ai valori iniziali che le definisce. In un secondo momento viene ricavata la loro equazione in *forma cartesiana*, esplicitando il parametro in funzione di una delle due coordinate spaziali, esplicitando il parametro in funzione di una delle due coordinate spaziali. Per le traiettorie, parametrizzate con t , si ottiene

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = 3 \\ \frac{dy}{dt}(t) = 3t \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t; \mathbf{R}_0, t_0) = x_0 + 3(t - t_0) \\ y(t; \mathbf{R}_0, t_0) = y_0 + \frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) \end{cases} \quad (3.9)$$

Esplicitando t in funzione di x ,

$$t = t_0 + \frac{x - x_0}{3}, \quad (3.10)$$

e sostituendo nella coordinata y si ottiene l'equazione in forma cartesiana,

$$y(x; \mathbf{R}_0, t_0) = \frac{1}{6}x^2 + \left[-\frac{1}{3}x_0 + t_0\right]x + y_0 + \frac{1}{6}x_0^2 - x_0t_0, \quad (3.11)$$

all'interno della quale $\mathbf{R}_0 = (x_0, y_0)$ e t_0 compaiono ancora come parametri. Dalla (3.14), le traiettorie sono parabole con la concavità rivolta verso l'alto.

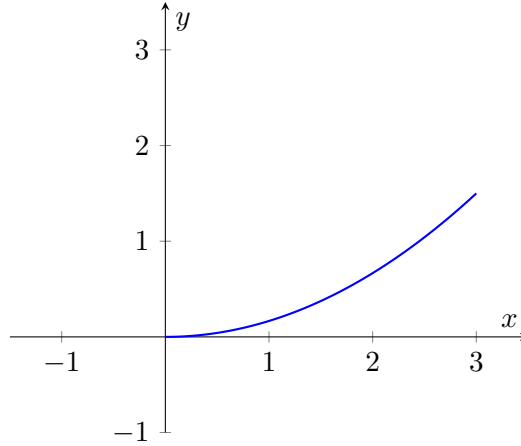


Figura 3.2: Traiettoria per $\mathbf{R}_0 = \mathbf{0}$, $t_0 = 0$, $t \in [0, 1]$

- **Linee di fumo (curve di emissione).** La forma parametrica dell'equazione delle linee di fumo (funzioni di t_0) è

$$\begin{cases} x(t_0; t, \mathbf{R}_0) = x_0 + 3(t - t_0) \\ y(t_0; t, \mathbf{R}_0) = y_0 + \frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) \end{cases} \quad (3.12)$$

Esplicitando t_0 in funzione di x ,

$$t_0 = t - \frac{x - x_0}{3}, \quad (3.13)$$

e sostituendo nella coordinata y si ottiene l'equazione in forma cartesiana,

$$y(x; \mathbf{R}_0, t) = -\frac{1}{6}x^2 + \left[\frac{1}{3}x_0 + t\right]x + y_0 - \frac{1}{6}x_0^2 + x_0t_0, \quad (3.14)$$

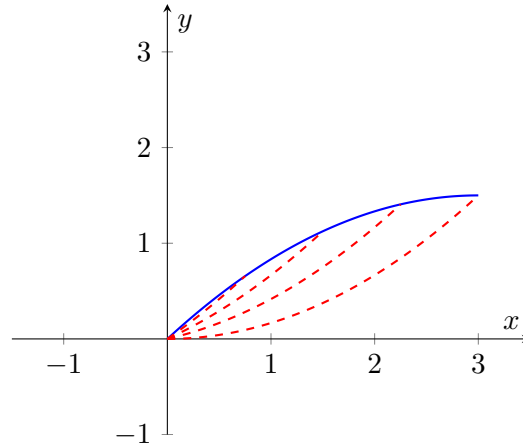


Figura 3.3: Curva di emissione con $\mathbf{R}_0 = \mathbf{0}$, $t_0 \in [0, t]$, $t = 1$ (blu) e traiettorie delle particelle passanti per l'origine negli istanti di tempo $t_0 = 0, 0.25, 0.50, 0.75$, per $t > t_0$ (tratteggiate in rosso).

all'interno della quale $\mathbf{R}_0 = (x_0, y_0)$ e t compaiono ancora come parametri. Dalla (3.14), le linee di fumo sono parabole con la concavità rivolta verso il basso.

- **Tracce.** La forma parametrica dell'equazione delle tracce è

$$\begin{cases} x(\mathbf{R}_0; t, t_0) = x_0 + 3(t - t_0) \\ y(\mathbf{R}_0; t, t_0) = y_0 + \frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) \end{cases} \quad (3.15)$$

Il segmento che unisce l'origine al punto $(x_1, y_1) = (0, 1)$ è descritto in forma parametrica come

$$\mathbf{R}_0(p) = \begin{cases} x_0(p) = 0 \\ y_0(p) = p \end{cases}, \quad p \in [0, 1]. \quad (3.16)$$

La forma parametrica delle tracce (p è il parametro che descrive la curva, mentre t , t_0 sono parametri fissi) è quindi

$$\mathbf{R}(\mathbf{R}_0(p), t, t_0) = \begin{cases} x(p; t, t_0) = 3(t - t_0) \\ y(p; t, t_0) = p + \frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) \end{cases}, \quad p \in [0, 1]. \quad (3.17)$$

Queste sono segmenti verticali di lunghezza uguale a 1, con il punto più basso di coordinate $(3(t - t_0), \frac{3}{2}(t^2 - t_0^2))$.

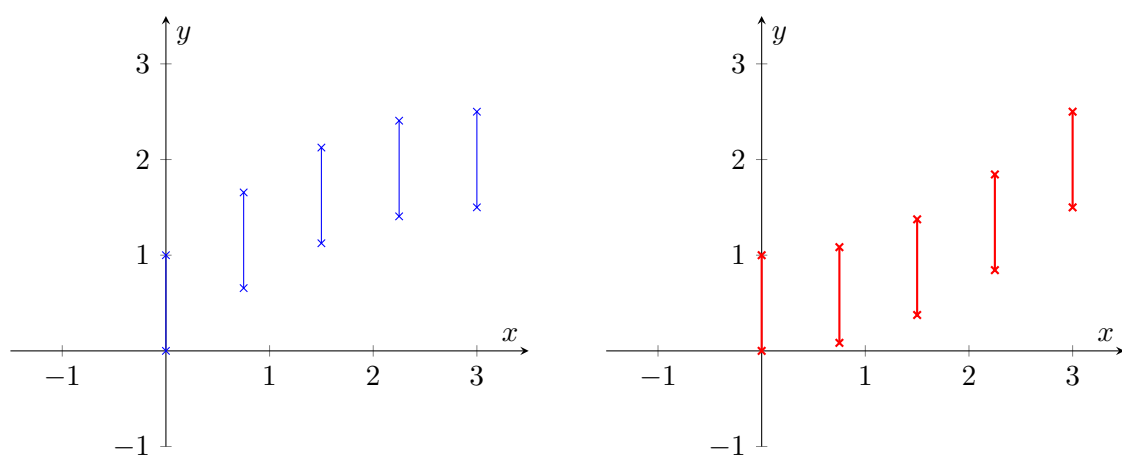


Figura 3.4: A sinistra: tracce uscenti dalla curva $\mathbf{R}_0 = (0, p)$, $p \in [0, 1]$ agli istanti di tempo $t_0 = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ osservate all'istante di tempo $t = 1$. A destra: traccia uscente dalla curva $\mathbf{R}_0 = (0, p)$, $p \in [0, 1]$ all'istante di tempo $t_0 = 0$, osservata ai tempi $t_0 = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$

Esercizio 3.2 — Linee di corrente, traiettorie e linee di fumo. Sia dato il campo di moto

$$\mathbf{u}(x, y) = 2Ax\hat{\mathbf{x}} - 2Ay\hat{\mathbf{y}} \quad (3.18)$$

Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle. ■

Soluzione

Concetti. Definizione di linee di corrente, traiettorie, linee di fumo, tracce. Soluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie (problemi di Cauchy, ai valori iniziali).

Svolgimento. Partendo dalle definizioni, si ricavano le equazioni delle curve caratteristiche.

- **Linee di corrente.** Dalla scrittura in componenti della definizione di linee di corrente si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \frac{dX}{dp} = \lambda(p)2AX \\ \frac{dY}{dp} = -\lambda(p)2AY \end{cases}, \quad (3.19)$$

risolvibile ad esempio ricavando $\lambda(p) = \frac{X'(p)}{2AX(p)}$ dalla prima equazione e inserendolo nella seconda. Integrando tra p_0 e p , dopo aver semplificato i fattori $2A$, si ottiene (derivare per credere)

$$0 = \int_{p_0}^p \left(\frac{X'(p')}{X(p')} + \frac{Y'(p')}{Y(p')} \right) dp' = \ln \frac{X(p)}{X(p_0)} + \ln \frac{Y(p)}{Y(p_0)} \quad (3.20)$$

$$\rightarrow X(p)Y(p) = X(p_0)Y(p_0) \quad (3.21)$$

Le linee di corrente appena ricavate sono delle iperboli equilatera con gli asintoti coincidenti con gli assi. Nel procedimento svolto, per poter dividere per $X(p)$ e $Y(p)$ dobbiamo imporre la condizione che $X(p)$, $Y(p)$ siano diversi da zero. Nella ricerca degli equilibri del sistema, si nota che

- il punto $(x, y) = (0, 0)$ è l'unico punto di equilibrio del sistema, punto di ristagno del campo di velocità;
- gli assi coordinati coincidono con linee di corrente: la derivata dX/dp è nulla quando $X = 0$ (se la parametrizzazione della curva è regolare, cioè $\lambda(p) \neq 0$); la derivata dY/dp è nulla quando $Y = 0$ (se la parametrizzazione della curva è regolare, cioè $\lambda(p) \neq 0$). Nel primo caso, la linea di corrente coincide con l'asse y , avendo coordinata $X = 0$ costante e coordinata $Y(p)$ descritta dalla seconda equazione; nel secondo caso, la linea di corrente coincide con l'asse x , avendo coordinata $Y = 0$ costante e coordinata $X(p)$ descritta dalla prima equazione.
- **Traiettorie.**

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2Ax(t) \\ \frac{dy}{dt} = -2Ay(t) \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t; \mathbf{r}_0, t_0) = x_0 e^{2A(t-t_0)} \\ y(t; \mathbf{r}_0, t_0) = y_0 e^{-2A(t-t_0)} \end{cases} \quad (3.22)$$

Osservazione.

Per ricavare la forma cartesiana dell'equazione delle traiettorie bisogna esplicitare il parametro t in funzione di una delle due coordinate e inserire la formula ottenuta nell'equazione delle altre componenti. In questo caso è possibile eliminare la dipendenza

da t , moltiplicando tra di loro le componenti delle traiettorie e ottenendo $xy = x_0y_0$: si osserva l'equazione delle traiettorie coincide con l'equazione delle linee di corrente per il campo di velocità considerato. Le linee di corrente coincidono con le linee di corrente e le linee di fumo nel caso in cui il **campo di velocità** è **stazionario**: in questo caso, il sistema differenziale con il quale si ricavano linee di corrente e linee di fumo è **autonomo**, cioè il termine forzante non dipende esplicitamente dal tempo. La soluzione di un problema differenziale di un sistema autonomo non dipende dal tempo t in sé, ma dalla differenza tra il tempo t e il tempo al quale viene imposta la condizione iniziale t_0 : nella formula parametrica delle traiettorie, t e t_0 compaiono sempre come differenza $t - t_0$ e mai “in altre forme”, come ad esempio nell'esercizio precedente, nel quale il campo di moto non è stazionario. Per questo motivo si arriva alla stessa equazione in forma cartesiana per le traiettorie e le linee di fumo, dopo aver esplicitato rispettivamente t e t_0 in funzione di una coordinata e aver inserito questa espressione nelle formule delle altre componenti.

- **Linee di fumo.** Da quanto riportato nel punto e nell'osservazione precedenti, è immediato ricavare sia la forma parametrica delle linee di fumo,

$$\begin{cases} x(t_0; t, \mathbf{r}_0) = x_0 e^{2A(t-t_0)} \\ y(t_0; t, \mathbf{r}_0) = y_0 e^{-2A(t-t_0)} \end{cases} \quad (3.23)$$

sia la forma cartesiana, $xy = x_0y_0$.

Esercizio 3.3 — **Linee di corrente, traiettorie, linee di fumo: non stazionario.** Sia dato il campo di moto

$$\mathbf{u}(x, y, z) = 3y\hat{\mathbf{x}} - 3x\hat{\mathbf{y}} + t\hat{\mathbf{z}} \quad (3.24)$$

Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle. ■

Suggerimento. Le componenti x e y del sistema sono accoppiate tra di loro. Risolvendo il sistema per le **linee di corrente**,

$$\begin{cases} \frac{dX}{dp} = \lambda(p)3Y \\ \frac{dY}{dp} = -\lambda(p)3X \\ \frac{dZ}{dp} = \lambda(p)t, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X(p)\frac{dX}{dp} + Y(p)\frac{dY}{dp} = 0 \\ \frac{dZ}{dP} = \lambda(p)t. \end{cases} \quad (3.25)$$

Integrando la prima, si ottiene l'equazione di una circonferenza $X(p)^2 + Y(p)^2 = R^2$ (con $R^2 = X(p_0)^2 + Y(p_0)^2$, descrivibile in forma parametrica come

$$\begin{cases} X(p) = R \cos(p) \\ Y(p) = R \sin(p). \end{cases} \quad (3.26)$$

Con la parametrizzazione scelta, è possibile ricavare la relazione $\lambda(p) = -1/3$ e integrare l'equazione per la componente Z .

Per il calcolo dell'equazione che descrive le **traiettorie** delle particelle materiali e le **linee di fumo**, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3y(t) & x(t_0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = -3x(t) & y(t_0) = y_0 \\ \frac{dz}{dt} = t & z(t_0) = z_0, \end{cases} \quad (3.27)$$

ha la forma

$$\begin{cases} x(t, \mathbf{r}_0, t_0) = A \sin(3t) - B \cos(3t) \\ y(t, \mathbf{r}_0, t_0) = A \cos(3t) + B \sin(3t) \\ z(t, \mathbf{r}_0, t_0) = z_0 + \frac{t^2 - t_0^2}{2}. \end{cases} \quad (3.28)$$

Le costanti di integrazione mancanti A , B vengono calcolate imponendo le condizioni iniziali,

$$A = y_0 \cos(3t_0) + x_0 \sin(3t_0), \quad B = y_0 \sin(3t_0) - x_0 \cos(3t_0), \quad (3.29)$$

e la soluzione del problema in forma parametrica può essere riscritta come

$$\begin{cases} x(t, \mathbf{r}_0, t_0) = x_0 \cos(3(t - t_0)) + y_0 \sin(3(t - t_0)) \\ y(t, \mathbf{r}_0, t_0) = -x_0 \sin(3(t - t_0)) + y_0 \cos(3(t - t_0)) \\ z(t, \mathbf{r}_0, t_0) = z_0 + \frac{t^2 - t_0^2}{2}. \end{cases} \quad (3.30)$$

Esercizio 3.4 — **Linee di corrente, traiettorie e linee di fumo: 3D.** Sia dato il campo di moto

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \hat{\mathbf{z}} \quad (3.31)$$

Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle. ■

Suggerimento. Per risolvere l'esercizio in maniera semplice, si osservi che il campo di moto è stazionario e ha simmetria sferica: è quindi conveniente usare un sistema di coordinate sferiche.