9. Strato limite

Esercizio 9.1 — Spessori di strato limite: strato limite laminare. Dato il profilo di velocità, determinare il rapporto di forma H.

$$u(x,y) = \begin{cases} U(x)\left(2\dfrac{y}{\delta(x)} - \dfrac{y^2}{\delta^2(x)}\right) & y \le \delta(x) \\ U(x) & y > \delta(x) \end{cases} \tag{9.1}$$

$(H = 5/2)$

Soluzione

Concetti. Spessori di strato limite. Rapporto di forma $H = \delta_1/\delta_2$.

$$\begin{aligned} \delta_1(x) &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy \\ \delta_2(x) &= \int_0^\infty \frac{u(x,y)}{U(x)}\left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy \end{aligned} \tag{9.2}$$

Svolgimento. L'esercizio viene risolto calcolando prima gli integrali nelle definizioni degli spessori di strato limite e poi il loro rapporto.

Lo spessore di spostamento:

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy = \\
&= \int_0^{\delta(x)} \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy + \underbrace{\int_{\delta(x)}^\infty \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy}_{=0} = \\
&= \int_0^{\delta(x)} \left(1 - 2\frac{y}{\delta(x)} + \frac{y^2}{\delta^2(x)}\right) dy = \\
&= \frac{1}{3}\delta(x)
\end{aligned}
\tag{9.3}
$$

Lo spessore di quantità di moto:

$$
\begin{aligned}
\delta_2 &= \int_0^\infty \frac{u(x,y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy \\
&= \int_0^{\delta(x)} \frac{u(x,y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy + \underbrace{\int_{\delta(x)}^\infty \frac{u(x,y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy}_{=0} = \\
&= \frac{2}{15}\delta(x)
\end{aligned}
\tag{9.4}
$$

Il rapporto di forma vale quindi $H = 5/2$.

Esercizio 9.2 — Spessori di strato limite: strato limite turbolento. Dato il profilo di velocità, determinare il rapporto di forma H.

$$\frac{u(x,y)}{U(x)} = \begin{cases} \left(\dfrac{y}{\delta(x)}\right)^{\frac{1}{7}} & y \le \delta(x) \\ 1 & y > \delta(x) \end{cases} \tag{9.5}$$

($H = 9/7$) ■

Soluzione

Concetti. Spessori di strato limite. Rapporto di forma $H = \delta_1/\delta_2$.

$$\begin{aligned} \delta_1(x) &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy \\ \delta_2(x) &= \int_0^\infty \frac{u(x,y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy \end{aligned} \tag{9.6}$$

Svolgimento. L'esercizio viene risolto calcolando prima gli integrali nelle definizioni degli spessori di strato limite e poi il loro rapporto.

Lo spessore di spostamento:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy = \\ &= \int_0^{\delta(x)} \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy + \underbrace{\int_{\delta(x)}^\infty \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy}_{=0} = \\ &= \frac{1}{8}\delta(x) \end{aligned} \tag{9.7}$$

Lo spessore di quantità di moto:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \int_0^\infty \frac{u(x,y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy \\ &= \int_0^{\delta(x)} \frac{u(x,y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy + \underbrace{\int_{\delta(x)}^\infty \frac{u(x,y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x,y)}{U(x)}\right) dy}_{=0} = \\ &= \frac{7}{72}\delta(x) \end{aligned} \tag{9.8}$$

Il rapporto di forma vale quindi $H = 9/7$.

Osservazione. Questo profilo di velocità viene usato come approssimazione del profilo di strato limite turbolento. Questo profilo ha $\frac{\partial u}{\partial y}\big|_{y=0}$ infinita, che implica sforzo a parete infinito. Una formula per lo sforzo di parete, associata a questo profilo di velocità è:

$$\tau_w = 0.0225 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{9.9}$$

Esercizio 9.3 — Equazione integrale di Von Karman. Dati $\rho = 1.225 kg/m^3$, $\nu = 10^{-5} m^2/s$ e velocità esterna $U(x) = 1.45 m/s$, utilizzando le formule per il profilo di velocità e sforzo a parete per lo strato limite turbolento, calcolare lo spessore $\delta(x)$ dello strato limite.

$$\frac{u(x,y)}{U(x)} = \begin{cases} \left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^{\frac{1}{7}} & y \leq \delta(x) \\ 1 & y > \delta(x) \end{cases} \tag{9.10}$$

$$\tau_w = 0.0225 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{9.11}$$

Soluzione

Concetti. Spessori di strato limite. Rapporto di forma. Coefficiente di attrito. Equazione integrale di Von Karman.

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} \tag{9.12}$$

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\delta_2}{U(x)}\frac{dU(x)}{dx}(2+H) = \frac{c_f}{2} \tag{9.13}$$

Svolgimento. Si calcolano gli spessori di strato limite δ_1 e δ_2, il raporto di forma H e il coefficiente di attrico c_f; poi si inseriscono nell'equazione integrale di Von Karman. Poichè la velocità esterna non varia in x, il secondo termine si annulla.

Gli spessori di strato limite e il rapporto di forma hanno valore $\delta_1 = \frac{1}{8}\delta$, $\delta_2 = \frac{7}{72}\delta$, $H = \frac{9}{7}$.

Il coefficiente di attrito vale:

$$\begin{aligned} c_f &= \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \\ &= \frac{2}{\rho U^2} 0.0225 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} = \\ &= 0.045 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \tag{9.14}$$

Inserendo nell'equazione di Von Karman:

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{c_f}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{7}{72}\frac{d\delta(x)}{dx} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{9.15}$$

Integrando tra 0 e x, avendo imposto $\delta(0) = 0$, si ottiene:

$$\delta(x) = 0.0225 \frac{90}{7} \left(\frac{\nu}{U}\right)^{\frac{1}{4}} x^{\frac{4}{5}} \tag{9.16}$$

Dalle equazioni di Prantdl per lo strato limite all'equazione integrale di VK.
L'equazione integrale di VK (9.13) viene ricavata integrando in y tra 0 e ∞ la componente x della quantità di moto delle equazioni di Prandtl per lo strato limite

$$\underbrace{\int_{y=0}^{\infty} u\frac{\partial u}{\partial x}dy}_{(a)} + \underbrace{\int_{y=0}^{\infty} v\frac{\partial u}{\partial y}dy}_{(b)} - \underbrace{\int_{y=0}^{\infty} \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy}_{(c)} - \underbrace{\int_{y=0}^{\infty} UU'(x)dy}_{(d)} = 0 \tag{9.17}$$

dove è stata indicata con $U(x)$ la velocità della corrente esterna allo strato limite. Si calcolano ora i termini (c), (b). Da (c) si ricava un termine nel quale compare lo sforzo tangenziale a parete τ_w

$$-\int_{y=0}^{\infty} \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)dy = -\nu\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]\Bigg|_{y=0}^{\infty} = \nu\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \frac{\tau_w(x)}{\rho} \tag{9.18}$$

Il termine (b) richiede un po' di lavoro e attenzione in più (IxP indica l'integrazione per parti).

$$\begin{aligned}
&\int_{y=0}^{\infty} v(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)dy = && \left(\text{IxP}: \int_0^{\infty} v\frac{\partial u}{\partial y} = [vu]\Big|_{y=0}^{\infty} - \int_0^{\infty}\frac{\partial v}{\partial y}u\right)\\
&= v(x,\infty)u(x,\infty) - \underbrace{v(x,0)u(x,0)}_{=0} - \int_0^{\infty}\frac{\partial v}{\partial y}u = && \left(u(x,\infty) = U(x); \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\
&= v(x,\infty)U(x) + \int_{y=0}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}u = && \left(v(x,\infty) = \int_{y=0}^{\infty}\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)dy = -\int_{y=0}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)dy\right)\\
&= -\int_{y=0}^{\infty} U(x)\frac{\partial u}{\partial x}dy + \int_{y=0}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)u(x,y)dy
\end{aligned} \tag{9.19}$$

Inserendo le espressioni (9.18), (9.19) nell'equazione (9.17), si ottiene:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{\infty}\left[2u\frac{\partial u}{\partial x} - U\frac{\partial u}{\partial x} - U\frac{dU}{dx}\right]dy + \frac{\tau_w}{\rho} =\\
&= \int_0^{\infty}\left[\frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial(Uu)}{\partial x} + u\frac{dU}{dx} - u\frac{dU}{dx}\right]dy + \frac{\tau_w}{\rho} =\\
&= \int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left[u^2 - Uu\right]dy - \frac{dU}{dx}\int_0^{\infty}[U-u]\,dy + \frac{\tau_w}{\rho} =\\
&= \frac{d}{dx}\int_0^{\infty}\left[u^2 - Uu\right]dy - \frac{dU}{dx}\int_0^{\infty}[U-u]\,dy + \frac{\tau_w}{\rho} =\\
&= -\frac{d}{dx}\left(U^2(x)\int_0^{\infty}\frac{u}{U}\left[1-\frac{u}{U}\right]dy\right) - \frac{dU}{dx}U\int_0^{\infty}\left[1-\frac{u}{U}\right]dy + \frac{\tau_w}{\rho} =\\
&= -\frac{d}{dx}\left[U^2(x)\delta_2(x)\right] - U(x)U'(x)\delta_1(x) + \frac{\tau_w(x)}{\rho}
\end{aligned} \tag{9.20}$$

Riassumendo,

$$\frac{d}{dx}\left[U^2(x)\delta_2(x)\right] + U(x)U'(x)\delta_1(x) = \frac{\tau_w(x)}{\rho} \tag{9.21}$$

Infine espandendo i termini, ricordando la definizione di rapporto di forma $H = \delta_1/\delta_2$, coefficiente di attrito $c_f = \dfrac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2}$

$$
\begin{aligned}
&2UU'\delta_2 + U^2\delta_2' + UU'\delta_1(x) = \frac{\tau_w(x)}{\rho} \\
&[2\delta_2 + \delta_1]UU' + U^2\delta_2' = \frac{\tau_w(x)}{\rho} \\
&[2 + H]\delta_2\frac{U'}{U} + \delta_2' = \frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{c_f}{2}
\end{aligned}
\tag{9.22}
$$

Esercizio 9.4 — Strato limite di Blasius e sforzo a parete. Ricavare le equazioni di Prandtl dello strato limite laminare (hp...). Ricavare poi l'equazione di Blasius per lo strato limite laminare (hp...). Ricavare la soluzione con un metodo numerico: in particolare, ricavare il valore di $\frac{d^2g}{d\eta^2}|_{\eta=0}$ da inserire nella formula dello sforzo viscoso a parete (Shooting method ed iterazioni di Newton).

$(g''(0) = 0.332)$ ■

Soluzione

Concetti. Equazioni di Prandtl. Equazione di Blasius. Soluzione in similitudine. Shooting method.

Svolgimento. Le equazioni di Prandtl dello strato limite possono essere ricavate tramite ragionamenti sugli ordini di grandezza delle grandezze fisiche.

$$\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho}P(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{9.23}$$

Sfruttando la definizione di funzione di corrente, l'ipotesi che $U(x)$ sia costante, si cerca una soluzione in similitudine delle equazioni di Prandtl. Siano $\eta = y/\delta(x)$ e $\psi = U(x)\delta(x)g(\eta)$, si ricava l'andamento dello spessore dello strato limite $\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$ e l'equazione di Blasius

$$g''' + \frac{1}{2}gg'' = 0 \tag{9.24}$$

con le condizioni al contorno

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = 0 \\ \lim_{\eta\to\infty} g'(\eta) = 1 \end{cases} \tag{9.25}$$

La formula per lo sforzo viscoso a parete è:

$$\tau_w = \mu\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \mu\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}|_{\eta=0} = \mu\frac{U}{\delta(x)}g''(0) \tag{9.26}$$

Per risolvere l'equazione di Blasius con metodi numerici, si può incontrare qualche difficoltà nell'imporre la condizione al contorno per $\eta \to \infty$. Tramite uno *shooting method* si può risolvere il problema ai valori al contorno, tramite la soluzione di problemi ai valori iniziali insieme a un metodo per trovare gli zeri di una funzione (es. Newton). Il dominio semi-infinito viene troncato. Il dominio numerico è quindi $[0, \bar{\eta}]$. L'equazione scalare di terzo ordine, viene scritta come sistema del primo ordine. Invece di imporre la condizione all'infinito, viene imposto il valore di $g''(0) = \alpha$. Si risolve l'equazione. Si trova il valore di g'_nin $\bar{\eta}$. Si itera fino a quando il valore assoluto di $F(\alpha) = g'_n(\bar{\eta};\alpha) - \lim_{\eta\to\infty} g'(\eta)$ non è inferiore a una tolleranza stabilita.

Per esempio, partendo da $\alpha = 0.1$, con una tolleranza $tol = 1E - 09$:

```
nIter    g"(0)    res
  1      0.1000   5.508e-01
  2      0.2836   9.975e-02
  3      0.3308   2.575e-03
  4      0.3320   1.660e-06
  5      0.3320   1.804e-12
```

Esercizio 9.5 — Strato limite di Blasius: resistenza di una lamina. Nell'ipotesi che il problema possa essere approssimato con le equazioni bidimensionali dello strato limite con velocità asintotica costante (Blasius), determinare la resistenza (di attrito) di una lamina piana di lunghezza l e larghezza h. ■

Soluzione

Concetti. Strato limite laminare. Equazione di Blasius.

Svolgimento. Nell'ipotesi in cui si possa utilizzare la soluzione di Blasius, considerata omogenea in apertura, la resistenza di attrito è

$$\begin{aligned}
D = 2h \int_0^l \tau_w(x) dx = & \qquad \left(\tau_w = \mu \frac{U}{\delta(x)} g''(0)\right) \\
= 2g''(0)\mu h U \int_0^l \frac{1}{\delta(x)} dx = & \qquad \left(\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}\right) \\
= 2g''(0) \frac{\mu h U^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\nu}} \int_0^l \frac{1}{\sqrt{x}} dx = & \\
= 4g''(0) \frac{\mu h \sqrt{l} U^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\nu}} &
\end{aligned} \tag{9.27}$$

Alcune osservazioni.

- A parità di superficie, conviene una lamina lunga o larga? Sempre?
- Avviene transizione?
- Commentare risultati, in caso avvenga transizione a turbolenza.

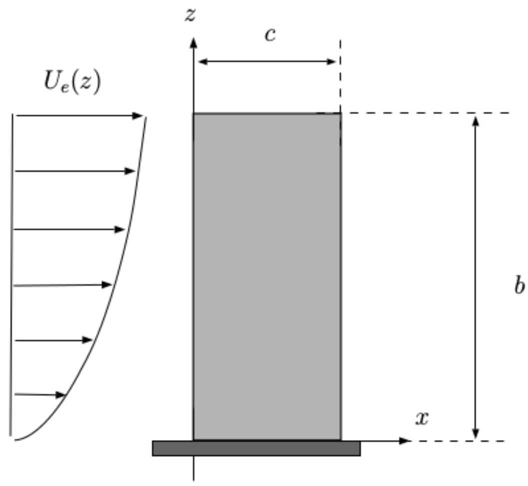
Esercizio 9.6 — Strato limite di Blasius 3D. Nella figura accanto una lastra piana di corda $c = 30\ cm$, apertura $b = 75\ cm$ e spessore trascurabile è investita da una corrente esterna d'aria ($\rho = 1.225\ kg/m^3$, $\mu = 1.76 \times 10^{-5}\ kg/(ms)$) uniforme in corda e variabile in apertura secondo la legge

$$\boldsymbol{U}_e(z) = U_e(z)\hat{\mathbf{x}} = \overline{U}\left(\frac{z}{b}\right)^{2/3}\hat{\mathbf{x}}$$

con $\overline{U} = 5\ m/s$. Assumendo la corrente laminare, stazionaria e bidimensionale su ciascuna sezione z in apertura, e potendone approssimare lo strato limite attraverso la soluzione di Blasius, si richiede di:

2.1) calcolare la resistenza D della lastra ed il corrispondente momento all'incastro M_y;

2.2) calcolare il rapporto di forma $H = \delta^*/\theta$. calcolare lo spessore di spostamento δ^* e di quantità di moto θ dello strato limite al bordo d'uscita della lamina con riferimento alla sezione di mezzeria.



Soluzione

Concetti. Soluzione di Blasius dello strato limite. Spessori di strato limite.

Svolgimento. Il problema viene risolto usando la soluzione in similitudine di Blasius dello strato limite.

$$\ldots \tag{9.28}$$

- Per il calcolo della resistenza e del momento alla radice è necessario calcolare lo sforzo a parete sulla lamina piana $\tau_w(x, z)$. La resistenza è l'integrale di τ_w sulla superficie; il momento M_y è l'integrale di $z\tau_w(x, z)$ esteso alla superficie (viene fatta l'ipotesi che l'unica componente dello sforzo a parete sia diretta lungo x).
- Gli spessori di strato limite sono funzione di (x, z).

$$\delta^*(x, z) = \int_0^\infty \left[1 - \frac{u(x, y, z)}{U_e(x, z)}\right] dy, \qquad \theta(x, z) = \int_0^\infty \frac{u(x, y, z)}{U_e(x, z)}\left[1 - \frac{u(x, y, z)}{U_e(x, z)}\right] dy \tag{9.29}$$

Usando le relazioni dello strato limite di Blasius, si trova

$$\begin{aligned}
\delta^* &= \int_0^\infty (1 - g'(\eta(y)))dy = \delta(x) \int_0^\infty (1 - g'(\eta))d\eta \\
\theta &= \int_0^\infty g'(\eta)(1 - g'(\eta(y)))dy = \delta(x) \int_0^\infty g'(\eta)(1 - g'(\eta))d\eta
\end{aligned} \tag{9.30}$$

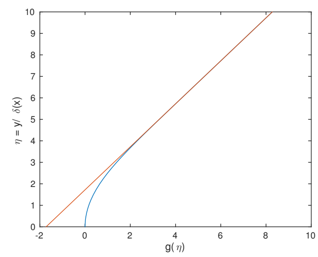
Per lo spessore di spostamento si ha:

$$\begin{aligned}
\delta^* &= \delta(x) \int_0^\infty (1 - g'(\eta))d\eta = \\
&= \delta(x)[\eta - g(\eta)]|_0^\infty = && (g(0) = 0) \\
&= \delta(x) \lim_{\eta\to\infty} [\eta - g(\eta)] = && (\lim_{\eta\to\infty} [\eta - g(\eta)] = 1.721) \\
&= 1.721 \cdot \delta = && (\delta = \sqrt{\nu x/U}) \\
&= 1.721 \sqrt{\frac{\nu x}{U(z)}}
\end{aligned} \tag{9.31}$$

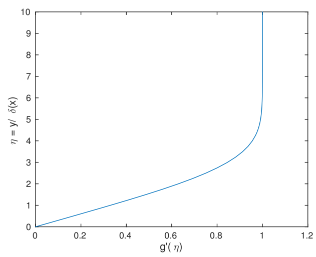
Per lo spessore di quantità di moto:

$$\begin{aligned}
\theta &= \delta(x,z) \int_0^\infty g'(\eta)(1 - g'(\eta))d\eta = \\
&= \delta \int_0^\infty g'(\eta)d\eta - \delta \int_0^\infty g'^2(\eta)d\eta = \\
&= \delta[g(\eta)]|_0^\infty - \delta \int_0^\infty g'^2(\eta)d\eta = && (g(0) = 0 \text{ e IxP}) \\
&= \delta \lim_{\eta\to\infty} g(\eta) - \delta \int_0^\infty [(gg')' - gg'']d\eta = && (\text{eq. di Blasius: } \frac{1}{2}gg'' + g''' = 0) \\
&= \delta \lim_{\eta\to\infty} g(\eta) - \delta[gg']|_0^\infty - \delta \int_0^\infty 2g'''d\eta = && (g(0) = 0) \\
&= \delta \lim_{\eta\to\infty} g(\eta) - \delta \lim_{\eta\to\infty} g(\eta)g'(\eta) - 2\delta[g''(\eta)]|_0^\infty = && (\lim_{\eta\to\infty} g'(\eta) = 1,\ \lim_{\eta\to\infty} g''(\eta) = 0) \\
&= 2\delta(x,z)g''(0) = \\
&= 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{U(z)}}
\end{aligned} \tag{9.32}$$

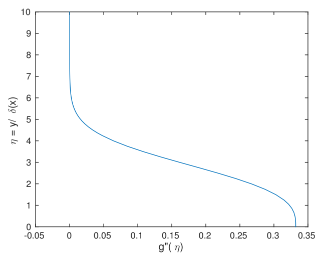
Il rapporto di forma vale quindi $H = \delta^*/\theta = 1.721/0.664$, cioè $H = 2.59$.



(a) Grafico di $g(\eta)$: per $\eta \to \infty$ g ha derivata uguale a 1; l'intersezione dell'asintoto con l'asse orizzontale avviene per $g(0) = 1.721$.



(b) Grafico di $g'(\eta)$: rappresenta il profilo adimensionale dela velocità. Per $\eta \to \infty$ $g'(\eta) \to 1$.



(c) Grafico di $g''(\eta)$: è legato alla derivata parziale $\partial u/\partial y$. Per determinare lo sforzo a parete è necessario trovare il valore di $g''(0)$: $g''(0) = 0.332$