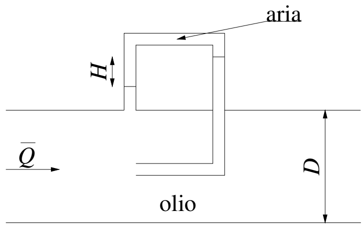
Esercizio 5.4 — Tubo di Pitot statico. Dato il condotto a sezione circolare rappresentato in figura, determinare la portata in massa d'olio, $\overline{\rho} = 850\ kg/m^3$, attraverso il condotto stesso sapendo che il diametro del condotto è $d = 0.5\ m$, che la differenza di altezza fra i peli liberi è $H = 40\ cm$, che il diametro del tubo "a U" è di 2 mm. Si trascuri qualunque effetto dissipativo, si assuma uniforme la velocità in una sezione sufficientemente lontana a monte e si consideri che nel tubo "a U" sia presente aria in condizioni normali.
($\overline{Q} = 467.2\ kg/s$)



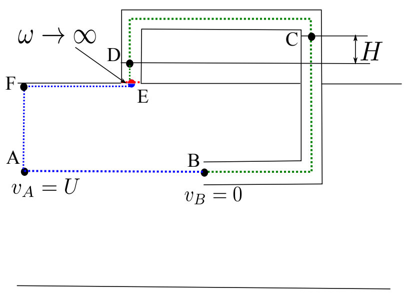
Soluzione

Concetti. Teorema di Bernoulli nell'ipotesi di stazionarietà, fluido incomprimibile, non viscoso, irrotazionale. Equazione della vorticità nel caso non viscoso. Legge di Stevino.

Svolgimento. Vengono fatte alcune ipotesi semplificative ($\rho = \bar{\rho}$, $\mu = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$); si utilizza poi l'equazione della vorticità per semplificare ulteriormente il problema: se si assume che il profilo di velocità all'ingresso sia uniforme, e quindi a vorticità nulla, il fluido nel canale rimane irrotazionale (dall'equazione della vorticità per fluidi non viscosi).

Gli unici due punti che possono creare problemi sono i collegamenti del tubo con il canale. Sulla linea di corrente che incontra l'imbocco del tubicino, il fluido subisce un rallentamento dalla velocità di ingresso fino ad arrestarsi: su questa linea di corrente è possibile applicare il teorema di Bernoulli. In corrispondenza del'altro collegamento, si incontra una superficie di discontinuità a vorticità infinita: non è quindi possibile attraversare questa superficie applicando direttamente il teorema di Bernoulli, ma bisogna ricorrere alle condizioni di interfaccia tra i due domini, quello interno al canale e quello interno al tubo, nel quale possono essere applicate le equazioni della statica.

Vengono definiti i punti A all'ingresso sulla linea di corrente che arriva alla presa del tubo all'interno del canale; il punto B coincidente con la presa del tubo all'interno del canale; C il pelo libero di destra all'interno del tubo "a U", D il pelo libero di sinistra. Si definiscono anche h_C e h_D come quote dei peli liberi (oss. $H = h_C - h_D$).



Il sistema risolvente è:

$$\begin{cases} P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B \\ P_B + \rho g h_B = P_C + \rho g h_C \\ P_C + \rho_a g h_C = P_D + \rho_a g h_D \\ P_D + \rho g h_D = P_{E_2} + \rho g h_{E_2} \\ P_{E_2} = P_{E_1} \\ P_{E_1} + \frac{1}{2}\rho u_{E_1}^2 + \rho g h_{E_1} = P_F + \frac{1}{2}\rho u_F^2 + \rho g h_F \\ P_F + \frac{1}{2}\rho v_F^2 + \rho g h_F = P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A \\ \bar{Q} = \rho \frac{\pi}{4} d^2 U \end{cases} \tag{5.27}$$

Osservando che $h_A = h_B$, $h_E = h_F$, $v_A = v_F = U$, $v_B = 0$, supponendo $u_E = U$ (ipotizzando dimensioni e intrusività trascurabile della sonda), il sistema semplificato diventa:

$$\begin{cases} P_A + \frac{1}{2}\rho U^2 = P_B \\ P_B + \rho g h_A = P_C + \rho g h_C \\ P_C + \rho_a g h_C = P_D + \rho_a g h_D \\ P_D + \rho g h_D = P_E + \rho g h_E \\ P_E + \frac{1}{2}\rho u_E^2 = P_F + \frac{1}{2}\rho U^2 \\ P_F + \rho g h_E = P_A + \rho g h_A \\ \bar{Q} = \rho \frac{\pi}{4} d^2 U \end{cases} \tag{5.28}$$

Risolvendo per U, avendo definito $H = h_C - h_D$:

$$\frac{1}{2}\rho U^2 = P_B - P_A = ... = (\rho - \rho_a) g H \quad \Rightarrow \quad U = \sqrt{2\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) g H} \tag{5.29}$$

Inserendo i valori numerici: $U = 2.799 m/s$, $\bar{Q} = 467.15 kg/s$.