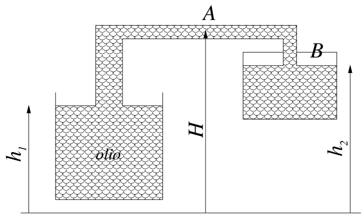
Esercizio 1.1 — **Stevino: serbatoi.** Si consideri il sistema rappresentato in figura in cui un recipiente aperto all'atmosfera, contenente olio con densità $\rho = 800\ kg/m^3$, è collegato tramite una tubazione a un secondo recipiente, contenente a sua volta olio e aria non miscelati. Date le due altezze $h_1 = 1.5\ m$ e $h_2 = 1.8\ m$ del pelo libero nei due recipienti e l'altezza $H = 2.5\ m$ della tubatura, determinare il valore della pressione nei punti A e B in figura, esprimendolo sia in Pascal sia in metri d'acqua. Considerare la pressione atmosferica standard (101325 Pa).
($p_A = 93477\ Pa = 9.53\ m_{H_2O}$, $p_B = 98970.6\ Pa = 10.10\ m_{H_2O}$.)



Soluzione

Concetti. Legge di Stevino. Conversioni: definizione di $1m_{H_2O}$.

Legge di Stevino:

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2 \tag{1.16}$$

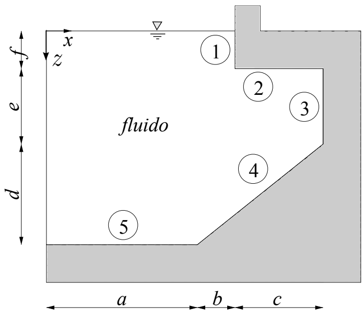
Conversione Pascal Pa - metri di H_2O:

$$1m_{H_2O} = P[Pa] = \rho_{H_2O} \cdot g \cdot 1m = 9810\frac{kg}{m^2 s^2} \cdot 1m = 9810Pa \tag{1.17}$$

Svolgimento. Il problema si risolve applicando due volte la legge di Stevino e la conversione da Pascal Pa a metri d'acqua m_{H_2O}. Sia O il punto sul pelo libero nel serbatoio di sinistra, sul quale agisce la pressione ambiente.

$$\begin{cases} P_A = P_O + \rho g(h_1 - H) = 93477Pa = \dfrac{93477}{9810} m_{H_2O} = 9.53 m_{H_2O} & \text{(Stevino O-A)} \\ P_B = P_O + \rho g(h_1 - h_2) = 98970.6Pa = \dfrac{98970.6}{9810} m_{H_2O} = 10.10 m_{H_2O} & \text{(Stevino O-B)} \end{cases} \tag{1.18}$$

Esercizio 1.2 — Azioni statiche: diga. Si consideri la sezione di diga rappresentata in figura. Si determini il modulo e la direzione del risultante delle forze per unità di apertura agente sui diversi tratti rettilinei della diga stessa sapendo che la pressione atmosferica è di $1.01 \times 10^5\ Pa$. Dimensioni: $a = 10\ m$, $b = 2\,m$, $c = 8\ m$, $d = 10\ m$, $e = 5\ m$, $f = 3\ m$.
($\boldsymbol{R}_1 = 347100\boldsymbol{\hat{x}}\ N/m$,
$\boldsymbol{R}_2 = -1043200\boldsymbol{\hat{z}}\ N/m$,
$\boldsymbol{R}_3 = 774500\boldsymbol{\hat{x}}\ N/m$,
$\boldsymbol{R}_4 = 2284000 N/m\boldsymbol{\hat{x}} + 2284000 N/m\boldsymbol{\hat{z}}$,
$\boldsymbol{R}_5 = 2774000\boldsymbol{\hat{z}}\ N/m$.)



Soluzione

Concetti. Legge di Stevino. Calcolo della risultante delle azioni statiche, data la distribuzione di pressione e la normale $\boldsymbol{\hat{n}}$ uscente dal volume fluido.

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2 \tag{1.19}$$

$$\boldsymbol{R} = \int_l P\boldsymbol{\hat{n}} \tag{1.20}$$

Svolgimento. Per ogni lato si calcola la distribuzione di pressione, grazie alla legge di Stevino. Si integra la distribuzione di pressione per ottenere il modulo della risultante; la direzione coincide con quella della normale (uscente dal volume occupato dal fluido). Per lo svolgimento, è stato scelto il sistema di riferimento rappresentato in figura, con l'asse x diretto verso destra e l'asse z verso il basso.

- Lato 1. Pressione lineare in z, $P(z) = P_O + \rho g z, \quad z \in [0, f]$.

$$\boldsymbol{R}_1 = \int_l P\boldsymbol{\hat{n}}dl = \int_0^f (P_O + \rho g z)\boldsymbol{\hat{x}}dz = \left(P_O f + \frac{1}{2}\rho g f^2\right)\boldsymbol{\hat{x}} = 347100\frac{N}{m}\boldsymbol{\hat{x}} \tag{1.21}$$

- Lato 2. Pressione costante, $P = P_O + \rho g f$. Risultante:

$$\boldsymbol{R}_2 = P \cdot c(-\boldsymbol{\hat{z}}) = (P_O + \rho g f) \cdot c(-\boldsymbol{\hat{z}}) = -1043200\frac{N}{m}\boldsymbol{\hat{z}} \tag{1.22}$$

- Lato 3. Pressione lineare in z, $P(z) = P_O + \rho g z, \quad z \in [f, f+e]$.

$$\boldsymbol{R}_3 = \int_l P\boldsymbol{\hat{n}}dl = \int_f^{f+e} (P_O + \rho g z)\boldsymbol{\hat{x}}dz = \left(P_O f + \frac{1}{2}\rho g[(f+e)^2 - f^2]\right)\boldsymbol{\hat{x}} = 774500\frac{N}{m}\boldsymbol{\hat{x}} \tag{1.23}$$

- Lato 4. Pressione lineare in z, $P(z) = P_O + \rho g z, \quad z \in [f+e, f+e+d]$.

$$R_4 = \int_l P dl = \int_{f+e}^{f+e+d} P(z)\frac{\sqrt{(b+c)^2 + d^2}}{d}dz = \qquad \left(dl = \frac{\sqrt{(b+c)^2+d^2}}{d}dz\right)$$
$$= \int_{f+e}^{f+e+d} (P_O + \rho g z)\frac{\sqrt{(b+c)^2 + d^2}}{d}dz =$$
$$= \frac{\sqrt{(b+c)^2 + d^2}}{d}\left[P_O d + \frac{1}{2}\rho g\left((f+e+d)^2 - (f+e)^2\right)\right] = \sqrt{2} \cdot 2284000\frac{N}{m}$$

$$(1.24)$$

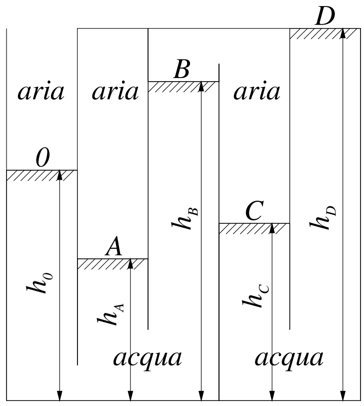
La forza può essere scritta come $\boldsymbol{R}_4 = R_4\hat{\boldsymbol{n}}_4$, con $\hat{\boldsymbol{n}}_4 = 1/\sqrt{2}\,\hat{\boldsymbol{x}}+1/\sqrt{2}\,\hat{\boldsymbol{z}}$. Proietttando $\boldsymbol{R}_4$ lungo gli assi si ottengono le componenti orizzontali e verticali

$$\boldsymbol{R}_4 = 2284000\frac{N}{m}\hat{\boldsymbol{x}} + 2284000\frac{N}{m}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1.25}$$

- Lato 5. Pressione costante, $P = P_O + \rho g(f + e + d)$. Risultante:

$$\boldsymbol{R}_5 = P \cdot a\hat{\boldsymbol{z}} = (P_O + \rho g(f + e + d)) \cdot a\hat{\boldsymbol{z}} = 2774000\frac{N}{m}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1.26}$$

Esercizio 1.3 — Stevino: recipiente labirintico. Si consideri il sistema di recipienti rappresentato in figura, in cui la zona tratteggiata contiene acqua, di densità pari a $10^3\ kg/m^3$ mentre nella restante parte è presente aria di densità pari a $1.2\ kg/m^3$. Determinare la pressione nei punti A, B, C e D sapendo che le rispettive altezze sono $h_A = 1\ m$, $h_B = 1.4\ m$, $h_C = 1.2\ m$ e $h_D = 1.6\ m$. Sia inoltre $h_0 = 1.3\ m$ e la pressione esterna $P_0 = 101325\ Pa$. ($P_A = 104262\ Pa$, $P_B = 100346\ Pa$, $P_C = 100348\ Pa$, $P_D = 97424\ Pa$.) ■



Soluzione

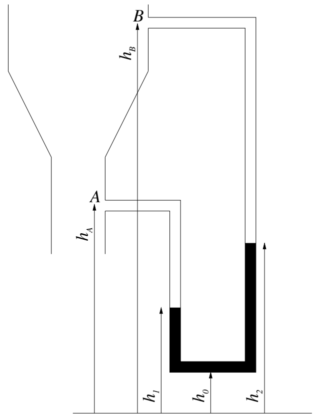
Concetti. Legge di Stevino, facendo attenzione a quale densità usare (quella del fluido comune alle due superfici).

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2 \quad \text{(Legge di Stevino)} \tag{1.27}$$

Svolgimento. Il problema viene risolto applicando ripetutamente la legge di Stevino, a partire dalla superficie 0 sulla quale agisce la pressione ambiente P_0. Nella legge di Stevino è necessario prestare attenzione ad usare la densità del fluido che mette in collegamento i due punti considerati. I punti A e B sono messi in collegamento con il punto 0 dall'acqua. I punti B e C sono messi in collegamento tra di loro dall'aria. I punti C e D di nuovo dall'acqua.

$$\begin{aligned}
&P_0 = 101325 Pa && \text{dato}\\
&P_A = P_0 + \rho g(h_0 - h_A) = ...\\
&P_B = P_0 + \rho g(h_0 - h_B) = ...\\
&P_C = P_B + \rho_a g(h_B - h_C) = ...\\
&P_D = P_C + \rho g(h_C - h_D) = ...
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Esercizio 1.5 — Manometro nel Venturi. Si consideri il manometro riportato in figura utilizzato per misurare la differenza di pressione esistente fra due sezioni diverse di un condotto. Determinare la differenza di pressione fra i punti A e B riportati sul disegno sapendo che il liquido manometrico è acqua e ha una densità di 998 kg/m^3, che il fluido che scorre all'interno del condotto è aria e ha una densità di 1.225 kg/m^3, che $h_A = 1\ m$, che $h_B = 1.2\ m$, che $h_0 = 0.1\ m$, che $h_1 = 0.3\ m$ e che $h_2 = 0.7\ m$. ($p_B - p_A = -3913.75\ Pa$) ■



Soluzione

Concetti. Legge di Stevino. Manometro. Venturi.

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2 \tag{1.31}$$

Svolgimento. Si scrive la legge di Stevino tra i punti A e 1, 1 e 2, 2 e B:

$$\begin{cases} P_B + \rho_a g z_B = P_2 + \rho_a g z_2 \\ P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2 \\ P_A + \rho_a g z_A = P_1 + \rho_a g z_1 \\ \Delta P = P_B - P_A \end{cases} \tag{1.32}$$

Si risolve il sistema lineare (come più piace). Ad esempio, partendo dalla terza e inserendo nella seconda e nella prima i risultati trovati:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_A + \rho_a g(z_A - z_1) \\ P_2 &= P_A + \rho_a g(z_A - z_1) + \rho g(z_1 - z_2) \\ P_B &= P_A + \rho_a g(z_A - z_1) + \rho g(z_1 - z_2) + \rho_a g(z_2 - z_B) \end{aligned} \tag{1.33}$$

E quindi, portando P_A a sinistra:

$$\Delta P = -(\rho - \rho_a) g(z_2 - z_1) - \rho_a g(z_B - z_A) = -3909.8 Pa \tag{1.34}$$