

# **Note ed esercizi di fluidodinamica**

Copyright © 2019 Davide Montagnani

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

*First edition, March 2013*

# Indice

	Esercizi
<b>1</b>	<b>Statica .....</b>
<b>1.1</b>	<b>Definizione di fluido</b>
<b>1.2</b>	<b>Equazione di equilibrio: forma integrale e differenziale</b>
<b>1.3</b>	<b>Legge di Stevino</b>
<b>1.4</b>	<b>Galleggiamento di un corpo immerso in un fluido</b>
1.4.1	Risultante delle forze: legge di Archimede .....
1.4.2	Punto di applicazione .....
1.4.3	Stabilità statica dell'equilibrio .....
<b>1.5</b>	<b>Esercizi</b>
<b>2</b>	<b>Tensione superficiale .....</b>
<b>3</b>	<b>Cinematica .....</b>
<b>3.1</b>	<b>Descrizione integrale lagrangiana ed euleriana</b>
<b>3.2</b>	<b>Descrizione puntuale lagrangiana ed euleriana</b>
<b>3.3</b>	<b>Velocità di traslazione, rotazione e deformazione</b>
3.3.1	Tensore gradiente di velocità .....
3.3.2	Derivate temporali di oggetti materiali .....
<b>3.4</b>	<b>Curve caratteristiche</b>

---

<b>4</b>	<b>Bilanci</b>	<b>49</b>
<b>4.1</b>	<b>Bilanci in forma integrale</b>	<b>49</b>
4.1.1	Bilancio di massa	50
4.1.2	Bilancio della quantità di moto	50
4.1.3	Bilancio del momento quantità di moto	50
4.1.4	Bilancio dell'energia totale	50
4.1.5	Bilanci integrali per volumi in moto arbitrario	51
4.1.6	Bilanci integrali per volumi di controllo fissi	51
<b>4.2</b>	<b>Bilanci in forma differenziale</b>	<b>51</b>
4.2.1	Bilancio di massa	52
4.2.2	Bilancio di quantità di moto	52
4.2.3	Bilancio del momento della quantità di moto	53
4.2.4	Bilancio dell'energia totale	53
4.2.5	Chiusura del problema	54
4.2.6	Altre equazioni di bilancio	55
<b>4.3</b>	<b>Relazioni di salto</b>	<b>57</b>
4.3.1	Bilancio di massa	57
4.3.2	Bilancio di quantità di moto	58
4.3.3	Bilancio di energia	59
<b>4.4</b>	<b>Approfondimenti su alcuni bilanci</b>	<b>60</b>
4.4.1	Continuità	60
4.4.2	Quantità di moto	61
4.4.3	Vorticità	62
<b>4.5</b>	<b>Introduzione agli esercizi</b>	<b>64</b>
<b>5</b>	<b>Teorema di Bernoulli</b>	<b>105</b>
<b>6</b>	<b>Soluzioni esatte</b>	<b>119</b>
<b>6.1</b>	<b>Introduzione e linee guida per la soluzione dei problemi</b>	<b>119</b>
6.1.1	Equazioni di Navier-Stokes in coordinate cartesiane e cilindriche	120
6.1.2	Esempio in coordinate cartesiane: corrente di Poiseuille	120
6.1.3	Calcolo del vettore sforzo	122
<b>7</b>	<b>Similitudine</b>	<b>143</b>
<b>7.1</b>	<b>Teorema di Buckingham</b>	<b>143</b>
<b>7.2</b>	<b>Equazioni di Navier–Stokes incomprimibili in forma adimensionale</b>	<b>143</b>
7.2.1	Adimensionalizzazione “ad alti numeri di Reynolds”	144
7.2.2	Adimensionalizzazione “a bassi numeri di Reynolds”	145
<b>7.3</b>	<b>Equazione di continuità e numero di Mach</b>	<b>146</b>
<b>7.4</b>	<b>Equazioni di Boussinesq e numeri di Prandtl, Rayleigh e Grashof</b>	<b>146</b>
7.4.1	Equazioni di Boussinesq	146
7.4.2	Equazioni di Boussinesq: problema bidimensionale tra due superfici piane	147
7.4.3	Equazioni di Boussinesq in forma adimensionale	149
7.4.4	Equazione della vorticità e funzione di corrente nell'approssimazione di Boussinesq	152
7.4.5	Approssimazione di Fourier–Galerkin del problema di Boussinesq	152
7.4.6	Dal problema di Boussinesq al modello di Lorenz	153
7.4.7	Alcuni concetti di stabilità	156
7.4.8	Sistema dinamico di Lorenz	156

---

<b>8</b>	<b>Aerodinamica</b>	<b>177</b>
8.0.1	Condizione necessaria di incipiente separazione	193
<b>8.1</b>	<b>Metodo di Hess-Smith</b>	<b>199</b>
8.1.1	Descrizione della geometria	199
8.1.2	Principio di sovrapposizione delle cause e degli effetti: campo di velocità	199
8.1.3	Metodo di Hess-Smith	200
8.1.4	Sistema lineare: condizioni al contorno	200
8.1.5	Sistema lineare: condizione di Kutta	200
8.1.6	Sistema lineare in forma matriciale	201
8.1.7	Ricostruzione delle grandezze fisiche	201
<b>9</b>	<b>Strato limite</b>	<b>207</b>
<b>10</b>	<b>Stabilità fluidodinamica e turbolenza</b>	<b>221</b>
<b>10.1</b>	<b>Stabilità idrodinamica</b>	<b>221</b>
10.1.1	Fallimento dell'analisi modale: correnti amplificatrici di disturbi	222
10.1.2	Sistemi dipendenti da un parametro e stabilità strutturale	223
10.1.3	...	231



# Esercizi

<b>1</b>	<b>Statica</b>	9
1.1	Definizione di fluido	
1.2	Equazione di equilibrio: forma integrale e differenziale	
1.3	Legge di Stevino	
1.4	Galleggiamento di un corpo immerso in un fluido	
1.5	Esercizi	
<b>2</b>	<b>Tensione superficiale</b>	25
<b>3</b>	<b>Cinematica</b>	31
3.1	Descrizione integrale lagrangiana ed euleriana	
3.2	Descrizione puntuale lagrangiana ed euleriana	
3.3	Velocità di traslazione, rotazione e deformazione	
3.4	Curve caratteristiche	
<b>4</b>	<b>Bilanci</b>	49
4.1	Bilanci in forma integrale	
4.2	Bilanci in forma differenziale	
4.3	Relazioni di salto	
4.4	Approfondimenti su alcuni bilanci	
4.5	Introduzione agli esercizi	
<b>5</b>	<b>Teorema di Bernoulli</b>	105
<b>6</b>	<b>Soluzioni esatte</b>	119
6.1	Introduzione e linee guida per la soluzione dei problemi	
<b>7</b>	<b>Similitudine</b>	143
7.1	Teorema di Buckingham	
7.2	Equazioni di Navier–Stokes incomprimibili in forma adimensionale	
7.3	Equazione di continuità e numero di Mach	
7.4	Equazioni di Boussinesq e numeri di Prandtl, Rayleigh e Grashof	
<b>8</b>	<b>Aerodinamica</b>	177
8.1	Metodo di Hess-Smith	
<b>9</b>	<b>Strato limite</b>	207
<b>10</b>	<b>Stabilità fluidodinamica e turbolenza</b>	221
10.1	Stabilità idrodinamica	



# 1. Statica

## 1.1 Definizione di fluido

Un fluido è un materiale che non è in grado di sopportare sforzi di taglio, quando è in quiete o in moto con velocità uniforme in un sistema di riferimento inerziale (invarianza galileiana). I fluidi “ordinari” sono isotropi, cioè sono indipendenti dall’orientazione nello spazio. Un fluido isotropo in quiete è quindi caratterizzato da uno stato di sforzo idrostatico,

$$\mathbb{T}^{(s)} = -p\mathbb{I}, \quad (1.1)$$

avendo indicato con  $\mathbb{T}^{(s)}$  il tensore degli sforzi in quiete,  $p$  la pressione all’interno del fluido e  $\mathbb{I}$  il tensore identità. Il vettore sforzo  $\mathbf{t}_n$  agente su una superficie di fluido con normale  $\hat{\mathbf{n}}$  si ottiene tramite il **teorema di Cauchy** per i mezzi continui

$$\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T}^{(s)}, \quad (1.2)$$

che lega il vettore sforzo al tensore degli sforzi tramite il versore normale alla superficie considerata, e che nel caso di fluido in quiete, diventa

$$\mathbf{t}_n^{(s)} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T}^{(s)} = -p\hat{\mathbf{n}}. \quad (1.3)$$

Per il principio di azione e reazione, lo sforzo agente su un materiale a contatto con un fluido è di intensità uguale e direzione opposta. La risultante  $\mathbf{R}$  delle forze agenti su un volume di fluido  $V$  è data dalla somma dell’integrale su  $V$  delle forze di volume  $\mathbf{f}$  e dell’integrale sulla superficie  $S$ , contorno del volume  $V$ , del vettore sforzo  $\mathbf{t}_n$ ,

$$\mathbf{R} = \int_V \mathbf{f} + \oint_S \mathbf{t}_n. \quad (1.4)$$

## 1.2 Equazione di equilibrio: forma integrale e differenziale

Un sistema meccanico è in equilibrio quando la risultante delle forze esterne e la risultante dei momenti esterni agenti sul fluido sono nulle,

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{R}^{ext} \\ \mathbf{0} = \mathbf{M}^{ext}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Per un mezzo continuo non polare, è possibile dimostrare che l'equilibrio ai momenti si riduce alla condizione di simmetria del tensore degli sforzi. L'equilibrio delle forze agenti su un volume di fluido  $V$  in quiete, delimitato dalla superficie  $\partial V = S$ , soggetto a forze per unità di volume  $\mathbf{f}$  in  $V$  e forze per unità di superficie  $\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}}$  su  $S$  diventa

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}^{ext} = \int_V \mathbf{f} + \oint_S \mathbf{t}_n = \int_V \mathbf{f} - \oint_S p\hat{\mathbf{n}} . \quad (1.6)$$

La condizione appena ottenuta è una **condizione di equilibrio integrale**, per l'intero volume fluido  $V$ . Se il campo di pressione  $p$  è sufficientemente regolare, è possibile applicare il teorema del gradiente (??) all'integrale di superficie e raccogliere i termini a destra dell'uguale sotto un unico integrale di volume  $V$ ,

$$\mathbf{0} = \int_V (\mathbf{f} - \nabla p) . \quad (1.7)$$

Poiché la condizione di equilibrio deve essere valida indipendentemente dal volume  $V$  considerato, imponendo che l'integranda sia identicamente nulla, si ottiene l'**equazione di equilibrio in forma differenziale**

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) - \nabla p(\mathbf{r}) = \mathbf{0} , \quad (1.8)$$

dove è stata esplicitata la dipendenza dei campi  $\mathbf{f}$ ,  $p$  dall coordinata spaziale  $\mathbf{r}$ . Nel caso in cui sia noto il campo di forze di volume  $\mathbf{f}$  all'interno del dominio considerato, l'equazione differenziale alle derivate parziali (1.8), con le opportune condizioni al contorno, permette di calcolare il campo di pressione  $p(\mathbf{r})$ .

### 1.3 Legge di Stevino

La legge di Stevino descrive il campo di pressione come funzione della quota, nelle vicinanze della superficie terrestre. La legge di Stevino viene ricavata dall'integrazione dell'equilibrio in forma differenziale (1.8), nel caso in cui le forze di volume siano dovute alla gravità  $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{g}(\mathbf{r})$ , avendo indicato con  $\rho(\mathbf{r})$  la densità del fluido e con  $\mathbf{g}$  il campo di accelerazione gravitazionale,

$$-\nabla p(\mathbf{r}) + \rho(\mathbf{r})\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} . \quad (1.9)$$

Nell'ipotesi di essere sufficientemente vicino alla terra da poter considerare il campo vettoriale  $\mathbf{g}$  uniforme e diretto verso il basso lungo la normale alla superficie terrestre, è possibile scrivere l'equazione precedente in un sistema di coordinate cartesiane. Orientando l'asse  $z$  verso l'alto lungo la normale alla superficie, le tre componenti cartesiane dell'equazione vettoriale sono

$$\begin{cases} \partial p(x, y, z)/\partial x = 0 \\ \partial p(x, y, z)/\partial y = 0 \\ \partial p(x, y, z)/\partial z = -\rho(x, y, z)g . \end{cases} \quad (1.10)$$

Dalle prime due equazioni si ricava che il campo di pressione non può dipendere dalle coordinate  $x$ ,  $y$  ed è quindi solo funzione di  $z$ . Poiché il campo di pressione dipende solo da  $z$ ,  $p = P(z)$ , la terza equazione diventa un'equazione differenziale ordinaria,

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(x, y, z)g , \quad (1.11)$$

alla quale deve essere aggiunta una condizione al contorno del tipo  $P(z_0) = p_0$ .<sup>1</sup> Senza ulteriori ipotesi, il problema composto dall'equazione (1.11) e dalla condizione al contorno necessaria ha come incognite il campo di pressione  $P$  e il campo di densità  $\rho$ . In generale, per risolvere il problema è necessario la legge di stato del fluido che mette in relazione i due campi.

Nell'ipotesi che la densità  $\rho$  e la forza di gravità siano costanti, la soluzione del problema (1.11) coincide con la *legge di Stevino*,

$$p(z) + \rho g z = p_0 = \text{cost} , \quad (1.12)$$

avendo orientato l'asse  $z$  verso l'alto e imposto la condizione al contorno in  $z_0 = 0$ .

**Esercizio .1.1** Utilizzando la legge di stato dei gas perfetti per l'aria,  $P = \rho RT$ , e l'approssimazione lineare dell'andamento della temperatura con la quota  $z$ , con gradiente termico  $dT/dz = a = -6.5^\circ/\text{km}$ , si ricavi l'andamento con la quota  $z$  delle variabili termodinamiche ( $P, \rho, T$ ) per l'atmosfera standard. Si trascuri l'andamento di  $g$  con la quota. Trascurando la curvatura terrestre, si utilizzi un sistema di coordinate cartesiane per scrivere le componenti dell'equazione vettoriale (1.9). ■

**Esercizio .1.2** Utilizzando la legge di stato dei gas perfetti per l'aria,  $P = \rho RT$ , e l'approssimazione lineare dell'andamento della temperatura con la quota  $r$ , con gradiente termico  $dT/dr = a = -6.5^\circ/\text{km}$ , si ricavi l'andamento con la quota  $r$  delle variabili termodinamiche ( $P, \rho, T$ ) per l'atmosfera standard, senza trascurare l'effetto della curvatura terrestre. Si utilizzi un sistema di coordinate sferiche per scrivere le componenti dell'equazione vettoriale (1.9). Si valuti poi l'errore che si commette nell'esercizio 1.1 trascurando la curvatura terrestre sul calcolo delle variabili termodinamiche a quota  $z = 10 \text{ km}$ . ■

## 1.4 Galleggiamento di un corpo immerso in un fluido

Un corpo immerso in fluido riceve dal basso verso l'alto una spinta uguale al peso della massa del fluido spostato. Se un corpo di volume  $V_s$  immerso in un fluido  $\rho_f$  ne sposta un volume  $\tilde{V}_f$ , su di esso agisce una forza (di Archimede o di galleggiamento)

$$\mathbf{F}_{\text{Arch}} = -\rho_f \tilde{V}_f \mathbf{g} = - \int_{\tilde{V}_f} \rho_f \mathbf{g} . \quad (1.13)$$

La legge di Archimede vale per un sistema immerso nel campo di gravità  $\mathbf{g}$ , uniforme in spazio.

Forze di galleggiamento nascono su un corpo immerso in un fluido in cui c'è un gradiente di pressione. La legge di Archimede è solo un caso particolare di galleggiamento, forse il più evidente, per il quale il campo di gravità è all'origine del gradiente di pressione. In generale, la forza di galleggiamento su un corpo immerso completamente in un fluido vale

$$\mathbf{F}_{\text{gall}} = - \int_{S_s} p \hat{\mathbf{n}} = - \int_{V_s} \nabla p . \quad (1.14)$$

Un esempio di galleggiamento di interesse aeronautico si incontra quando si svolge un esperimento in galleria del vento, se nella camera di prova è presente un gradiente di

<sup>1</sup>In generale, servono delle condizioni di compatibilità dei dati affinché il problema sia risolvibile. Ad esempio, non dovrebbe essere difficile convincersi che il campo di densità deve dipendere solo dalla coordinata  $z$  nel caso considerato.

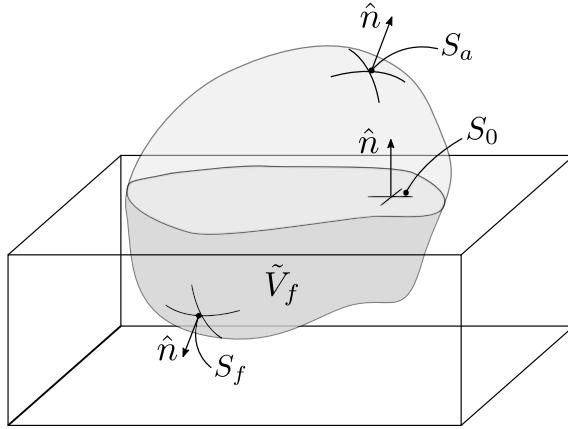


Figura 1.1: Suddivisione delle superfici e dei volumi per la dimostrazione della legge di Archimede.

pressione diretto nella direzione  $\hat{x}$  della corrente. Se in prima approssimazione si considera un gradiente di pressione  $\nabla p = -G_P \hat{x}$ ,  $G_P > 0$  e costante, si può stimare la forza di galleggiamento  $\mathbf{F}_{gall} = V_s G_P \hat{x}$  dovuta al gradiente di pressione in galleria del vento, assente in condizioni di aria libera. Questa azione contribuisce al valore misurato della resistenza del modello. La valutazione di questa azione “spuria” sul corpo e la correzione delle misure effettuate rientrano nell’ambito delle *correzioni di galleria*.

Si ritorna ora sulla legge di Archimede che descrive le forze di galleggiamento che un fluido esercita su un corpo immerso. Nel problema di un corpo immerso in un fluido, la risultante delle forze di galleggiamento entra nell’equazione di equilibrio del corpo in direzione verticale (direzione della gravità,  $\mathbf{g}$ ). Il punto di applicazione della risultante delle forze di galleggiamento e la sua posizione relativa rispetto al baricentro del corpo influenzano la stabilità delle condizioni di equilibrio.

### 1.4.1 Risultante delle forze: legge di Archimede

Si considera il problema di un corpo immerso in un fluido di densità uniforme  $\rho$  molto maggiore della densità dell’aria: la pressione agente sulla superficie del corpo esposta all’aria si può considerare costante, uguale a  $p_a$ . La legge di Stevino descrive la distribuzione di pressione all’interno del fluido. Si sceglie l’asse  $z$  in direzione verticale, così che il campo di gravità è  $\mathbf{g} = -g\hat{z}$ . Scegliendo l’origine dell’asse  $z$  in corrispondenza del pelo libero, la pressione all’interno del fluido vale  $p(z) = p_a - \rho g z$ , per  $z < 0$ . Facendo riferimento alla figura 1.1, si può calcolare la risultante delle forze  $\mathbf{R}$  come

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= - \oint_S p \hat{\mathbf{n}} = - \int_{S_a} p \hat{\mathbf{n}} - \int_{S_f} p \hat{\mathbf{n}} = \\
 &= - \int_{S_a} p_a \hat{\mathbf{n}} - \int_{S_f} p_a \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_f} \rho g z \hat{\mathbf{n}} = \\
 &= - \underbrace{\int_{S_f} p_a \hat{\mathbf{n}}}_{=0} + \int_{S_f} \rho g z \hat{\mathbf{n}} = \\
 &= \int_{S_f} \rho g z \hat{\mathbf{n}} + \underbrace{\int_{S_0} \rho g z \hat{\mathbf{n}}}_{=0, z|_{S_0}=0} = \oint_{\tilde{S}_f} \rho g z \hat{\mathbf{n}} = \int_{\tilde{V}_f} \rho g \hat{z} = \rho \tilde{V}_f g \hat{z} = M_{\tilde{V}_f} g \hat{z} ,
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

avendo sommato l'integrale nullo  $\int_{S_0} \rho g z \hat{\mathbf{n}}$ , per poter ottenere l'integrale di  $\rho g z$  sulla superficie  $\tilde{S}_f = S_f \cup S_0$  e applicare il teorema del gradiente (??). Come stabilito dal principio di Archimede, la risultante delle forze di galleggiamento  $\mathbf{R}$  agenti sul corpo agisce dal basso verso l'alto con un'intensità pari al peso del volume di fluido spostato,  $M_{\tilde{V}_f} g$ .

### 1.4.2 Punto di applicazione

Il punto di applicazione della forza di galleggiamento è il punto dove bisogna applicare la risultante delle forze per ottenere un sistema di azioni equivalente al sistema di azioni continuo generato dalla pressione. Dall'equivalenza ai momenti dei due sistemi di azioni, si ottiene

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_O \times \mathbf{R} &= - \oint_S p \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} = - \int_{S_a} p \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} - \int_{S_f} p \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} = \\
 &= - \int_{S_a} p_a \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} - \int_{S_f} p_a \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_f} \rho g z \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} = \\
 &= - \underbrace{\int_S p_a \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}}_{=0} + \int_{S_f} \rho g z \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} = \\
 &= \int_{S_f} \rho g z \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} + \underbrace{\int_{S_0} \rho g z \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}}_{=0, z|_{S_0}=0} = \\
 &= \oint_{\tilde{S}_f} \rho g z \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} = \oint_{\tilde{S}_f} \rho g \delta_{\ell z} r_\ell \epsilon_{ijk} r_j n_k = \rho g \int_{\tilde{V}_f} \frac{\partial}{\partial r_k} (\delta_{\ell z} r_\ell \epsilon_{ijk} r_j) = \quad (1.16) \\
 &= \rho g \int_{\tilde{V}_f} \delta_{\ell z} \epsilon_{ijk} \left( \frac{\partial r_\ell}{\partial r_k} r_j + r_\ell \frac{\partial r_j}{\partial r_k} \right) = \\
 &= \rho g \int_{\tilde{V}_f} \delta_{\ell z} \epsilon_{ijk} (\delta_{\ell k} r_j + r_\ell \delta_{jk}) = \\
 &= \rho g \int_{\tilde{V}_f} \epsilon_{ijz} r_j + \delta_{\ell z} \underbrace{\epsilon_{ijj}}_{=0} r_\ell = \\
 &= \rho g \int_{\tilde{V}_f} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{z}} .
 \end{aligned}$$

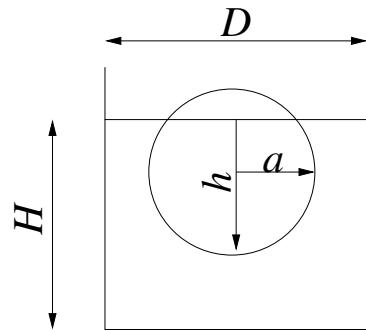
Usando un sistema di assi cartesiani e ricordando che  $\mathbf{R} = R \hat{\mathbf{z}}$ , si può scomporre l'equazione nelle componenti non nulle,  $x$  e  $y$ ,

$$\begin{cases} x_0 R = \rho g \int_{\tilde{V}_f} x \\ y_0 R = \rho g \int_{\tilde{V}_f} y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{\rho g}{R} \int_{\tilde{V}_f} x = \frac{1}{\tilde{V}_f} \int_{\tilde{V}_f} x \\ y_0 = \frac{\rho g}{R} \int_{\tilde{V}_f} y = \frac{1}{\tilde{V}_f} \int_{\tilde{V}_f} y . \end{cases} \quad (1.17)$$

### 1.4.3 Stabilità statica dell'equilibrio

### 1.5 Esercizi

**Esercizio .1.3 — Legge di Archimede.** Si consideri, sulla superficie terrestre, un recipiente di diametro  $D = 2 \text{ m}$  e profondità  $H = 3 \text{ m}$  contenente acqua ( $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$ ). Al suo interno è inserita una sfera di raggio  $a = 0.2 \text{ m}$  e densità pari a  $\rho_s = 842.06 \text{ kg/m}^3$ . Determinare in modo univoco la posizione assunta dalla sfera nel liquido. Tale posizione varia se invece che sulla terra ci si trova sulla luna?  
( $h = 0.3 \text{ m}$ , non varia sulla luna.) ■



#### Soluzione

**Concetti.** Legge di Archimede. Condizione di equilibrio. Calcolo del volume di solidi (integrali di volume). Adimensionalizzazione. Soluzione di semplici equazioni non lineari per via grafica (studio di funzione) e/o numerica.

**Svolgimento.** Per svolgere l'esercizio bisogna calcolare la condizione di equilibrio del corpo, soggetto alla propria forza peso e alla forza che il fluido esercita su di esso (legge di Archimede). Nell'equazione di equilibrio, l'incognita  $h$  compare nella formula del volume immerso nel fluido. L'equazione di equilibrio è un'equazione non lineare in  $h$ , da risolvere per via grafica o numerica.

- Scrittura dell'equazione di equilibrio del corpo soggetto al proprio peso e alla forza esercitata su di esso dal fluido, diretta verso l'alto e pari al peso del volume del fluido spostato (legge di Archimede).

$$\rho_s V_s g = \rho V_c g \quad \Rightarrow \quad \rho_s V_s = \rho V_c \quad (1.18)$$

**Osservazione.** Si trova subito la risposta all'ultimo quesito: poiché  $g$  non compare nell'equazione di equilibrio, la condizione di equilibrio sulla Luna è uguale a quella che si ha sulla Terra.

- Calcolo del volume della sfera e della calotta sferica:
  - Volume della sfera:  $V_s = \frac{4}{3}\pi a^3$
  - Volume della calotta sferica:  $V_c = \pi h^2(a - \frac{h}{3})$   
(per credere, verificare casi limite:  $h = 0, h = a, h = 2a$ ; alla fine dell'esercizio è riportato il calcolo, tramite un integrale di volume)
- Le formule per i volumi  $V_c$  e  $V_s$  sono inserite nell'eq. 1.18. L'equazione viene semplificata e scritta in forma adimensionale, introducendo la variabile  $x = \frac{h}{a}$ , per mettere in evidenza il parametro che governa il problema, cioè il rapporto di densità  $\rho_s/\rho$ . L'equazione di terzo grado in  $x$  viene risolta, considerando i limiti fisici del problema ( $0 \leq x \leq 2$ ):

$$\rho\pi h^2\left(a - \frac{h}{3}\right) = \rho_s \frac{4}{3}\pi a^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right) = \frac{\rho_s}{\rho} \quad (1.19)$$

Alcuni metodi per risolvere equazioni non lineari possono essere ad esempio:

- metodi iterativi. Ad esempio metodo di Newton

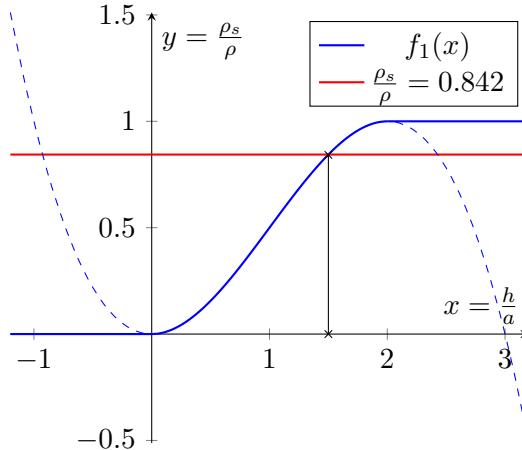
x	res
1.0000	-3.437475e-01
1.4583	-2.406993e-02
1.4990	-5.841602e-04

```

1.5000      -4.027539e-07
1.5000      -1.924017e-13

```

- metodo grafico (educativo: per problemi più complicati, prima di calcolare le soluzioni con metodi numerici, è bene avere un'idea di cosa si sta cercando). Si cercano le intersezioni delle funzioni  $f_1(x) = \frac{3}{4}x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right)$  e  $f_2(x) = \frac{\rho_s}{\rho}$ .



*Osservazione.* Per valori di  $\frac{\rho_s}{\rho}$  compresi tra 0 e 1, esiste una e una sola soluzione fisica del problema. Per i valori di densità “estremi”  $\rho_s = 0$  (la sfera non pesa niente),  $\rho_s = \rho_f$  (la sfera ha la stessa densità del fluido), esistono infinite soluzioni: ad esempio, nel caso di  $\rho_s = \rho_f$  la posizione di equilibrio è indipendente dalla profondità alla quale è posta la sfera. Nel grafico, la funzione  $f_1(x)$  rappresenta il volume immerso della sfera (diviso il volume totale della sfera stessa) al variare della distanza  $h$  del punto più basso dal pelo libero: questa deve quindi essere rappresentata, come in figura, nulla per valori di  $x < 0$  (sfera completamente fuori dall’acqua), con il ramo di cubica per  $0 < x < 2$  (sfera parzialmente immersa), uguale a 1 per  $x > 2$  (sfera completamente immersa). La funzione  $f_1(x)$  può quindi essere definita a tratti:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{3}{4}x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right) & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases} \quad (1.20)$$

*Discussione dei risultati.* Quando diminuisce la densità relativa del solido, la linea rossa si abbassa e la soluzione  $x = \frac{h}{a}$  diminuisce (la sfera ha una porzione maggiore al di fuori dall’acqua). Esiste una e una sola soluzione che abbia senso fisico, fino a quando la densità relativa è compresa tra 0 e 1: non ha senso considerare valori negativi (la densità è una quantità positiva), mentre per valori di  $\frac{\rho_s}{\rho}$  maggiori di 1 non può esistere una condizione di equilibrio statico (la sfera affonda...).

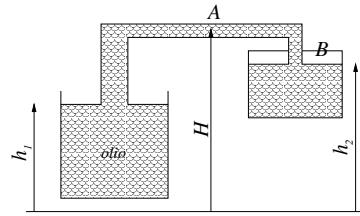
**Calcolo volume cupola sferica.** È comodo svolgere il calcolo in coordinate cilindriche  $(r, \theta, z)$ . Il volume  $V_{im}$  della parte immersa è uguale a

$$\begin{aligned}
 V_{im} &= \iiint_{V_{im}} dV = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-a}^l \int_{r=0}^{\sqrt{a^2-z^2}} dV \\
 &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-a}^l \int_{r=0}^{\sqrt{a^2-z^2}} r dr dz d\theta \\
 &= 2\pi \int_{z=-a}^l \frac{a^2 - z^2}{2} dz \\
 &= \frac{\pi}{3} [2a^3 + 3a^2l - l^3]
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Definendo  $h = R + l$  come la quota immersa della sfera, si ottiene:

$$V_{im} = \pi h^2 \left( a - \frac{h}{3} \right) \tag{1.22}$$

**Esercizio .1.4 — Stevino: serbatoi.** Si consideri il sistema rappresentato in figura in cui un recipiente aperto all'atmosfera, contenente olio con densità  $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ , è collegato tramite una tubazione a un secondo recipiente, contenente a sua volta olio e aria non miscelati. Date le due altezze  $h_1 = 1.5 \text{ m}$  e  $h_2 = 1.8 \text{ m}$  del pelo libero nei due recipienti e l'altezza  $H = 2.5 \text{ m}$  della tubatura, determinare il valore della pressione nei punti A e B in figura, esprimendolo sia in Pascal sia in metri d'acqua. Considerare la pressione atmosferica standard ( $101325 \text{ Pa}$ ).  
 $(p_A = 93477 \text{ Pa} = 9.53 \text{ m}_{H_2O}, p_B = 98970.6 \text{ Pa} = 10.10 \text{ m}_{H_2O})$ . ■



### Soluzione

**Concetti.** Legge di Stevino,  $P_1 + \rho gh_1 = P_2 + \rho gh_2$ . Conversione  $\text{Pa}$  - metri di  $H_2O$ ,

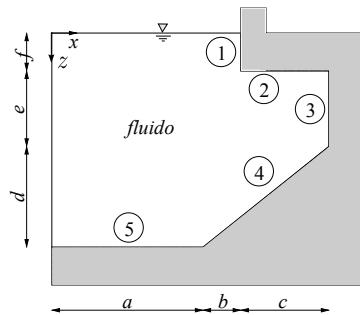
$$1\text{m}_{H_2O} = P[\text{Pa}] = \rho_{H_2O} \cdot g \cdot 1\text{m} = 9810 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}^2} \cdot 1\text{m} = 9810 \text{Pa} . \quad (1.23)$$

**Svolgimento.** Il problema si risolve applicando due volte la legge di Stevino e la conversione da Pascal  $\text{Pa}$  a metri d'acqua  $m_{H_2O}$ . Sia  $O$  il punto sul pelo libero nel serbatoio *aperto* di sinistra, sul quale agisce la pressione ambiente.

$$\left\{ \begin{array}{l} P_A = P_O + \rho g(h_1 - H) = 93477 \text{ Pa} = \frac{93477}{9810} \text{ m}_{H_2O} = 9.53 \text{ m}_{H_2O} \\ P_B = P_O + \rho g(h_1 - h_2) = 98970.6 \text{ Pa} = \frac{98970.6}{9810} \text{ m}_{H_2O} = 10.10 \text{ m}_{H_2O} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\text{Stevino O-A}) \\ (\text{Stevino O-B}) \end{array} \quad (1.24)$$

**Esercizio .1.5 — Azioni statiche: diga.** Si consideri la sezione di diga rappresentata in figura. Si determini il modulo e la direzione del risultante delle forze per unità di apertura agente sui diversi tratti rettilinei della diga stessa sapendo che la pressione atmosferica è di  $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ . Dimensioni:  $a = 10 \text{ m}$ ,  $b = 2 \text{ m}$ ,  $c = 8 \text{ m}$ ,  $d = 10 \text{ m}$ ,  $e = 5 \text{ m}$ ,  $f = 3 \text{ m}$ .

( $\mathbf{R}_1 = 347100\hat{\mathbf{x}} \text{ N/m}$ ,  
 $\mathbf{R}_2 = -1043200\hat{\mathbf{z}} \text{ N/m}$ ,  
 $\mathbf{R}_3 = 774500\hat{\mathbf{x}} \text{ N/m}$ ,  
 $\mathbf{R}_4 = 2284000N/m\hat{\mathbf{x}} + 2284000N/m\hat{\mathbf{z}}$ ,  
 $\mathbf{R}_5 = 2774000\hat{\mathbf{z}} \text{ N/m.}$ ) ▀



### Soluzione

**Concetti.** Legge di Stevino,  $P_1 + \rho gh_1 = P_2 + \rho gh_2$ . Calcolo della risultante delle azioni statiche, data la distribuzione di pressione e la normale  $\hat{\mathbf{n}}$  uscente dal volume fluido,

$$\mathbf{R} = \int_S P \hat{\mathbf{n}} . \quad (1.25)$$

**Svolgimento.** Si risolve il problema bidimensionale, al quale “manca” la dimensione perpendicolare al piano del disegno. La risultante per unità di apertura agente sul lato  $\ell$  (unità di misura nel SI,  $N/m$ ) sarà quindi il risultato dell’integrale di linea

$$\mathbf{R} = \int_{\ell} P \hat{\mathbf{n}} . \quad (1.26)$$

Per ogni lato si calcola la distribuzione di pressione, grazie alla legge di Stevino. Si integra la distribuzione di pressione per ottenere il modulo della risultante; la direzione coincide con quella della normale (uscente dal volume occupato dal fluido). Per lo svolgimento, è stato scelto il sistema di riferimento rappresentato in figura, con l’asse  $x$  diretto verso destra e l’asse  $z$  verso il basso.

- Lato 1. Pressione lineare in  $z$ ,  $P(z) = P_O + \rho g z$ ,  $z \in [0, f]$ . Risultante

$$\mathbf{R}_1 = \int_{\ell_1} P \hat{\mathbf{n}} = \int_0^f (P_O + \rho g z) \hat{\mathbf{x}} dz = \left( P_O f + \frac{1}{2} \rho g f^2 \right) \hat{\mathbf{x}} = 347100N/m\hat{\mathbf{x}} \quad (1.27)$$

- Lato 2. Pressione costante,  $P = P_O + \rho g f$ . Risultante

$$\mathbf{R}_2 = \int_{\ell_2} P \hat{\mathbf{n}} = P \cdot c(-\hat{\mathbf{z}}) = (P_O + \rho g f) \cdot c(-\hat{\mathbf{z}}) = -1043200N/m\hat{\mathbf{z}} \quad (1.28)$$

- Lato 3. Pressione lineare in  $z$ ,  $P(z) = P_O + \rho g z$ ,  $z \in [f, f+e]$ . Risultante

$$\mathbf{R}_3 = \int_{\ell_3} P \hat{\mathbf{n}} = \int_f^{f+e} (P_O + \rho g z) \hat{\mathbf{x}} dz = \left( P_O f + \frac{1}{2} \rho g [(f+e)^2 - f^2] \right) \hat{\mathbf{x}} = 774500N/m\hat{\mathbf{x}} \quad (1.29)$$

- Lato 4. Pressione lineare in  $z$ ,  $P(z) = P_O + \rho g z$ ,  $z \in [f+e, f+e+d]$ . Poichè il tratto di parete è rettilineo, il vettore normale è costante e può essere portato fuori dall’integrale. Si calcola prima il modulo della risultante e poi lo si moltiplica per il

versore normale. Il modulo della risultante vale

$$\begin{aligned}
 R_4 &= \int_{\ell_4} P d\ell = \int_{f+e}^{f+e+d} P(z) \frac{\sqrt{(b+c)^2 + d^2}}{d} dz = \left( d\ell = \frac{\sqrt{(b+c)^2 + d^2}}{d} dz \right) \\
 &= \int_{f+e}^{f+e+d} (P_O + \rho g z) \frac{\sqrt{(b+c)^2 + d^2}}{d} dz = \\
 &= \frac{\sqrt{(b+c)^2 + d^2}}{d} \left[ P_O d + \frac{1}{2} \rho g ((f+e+d)^2 - (f+e)^2) \right] = \sqrt{2} \cdot 2284000 N/m
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

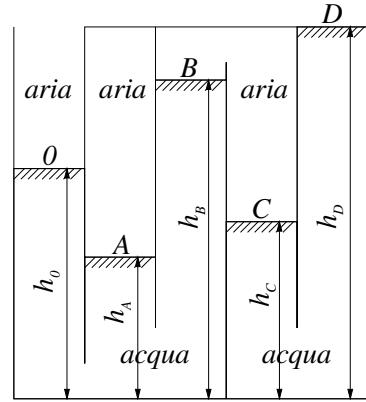
La forza può essere scritta come  $\mathbf{R}_4 = R_4 \hat{\mathbf{n}}_4$ , con  $\hat{\mathbf{n}}_4 = 1/\sqrt{2} \hat{\mathbf{x}} + 1/\sqrt{2} \hat{\mathbf{z}}$ . Proiettando  $\mathbf{R}_4$  lungo gli assi si ottengono le componenti orizzontali e verticali

$$\mathbf{R}_4 = 2284000 N/m \hat{\mathbf{x}} + 2284000 N/m \hat{\mathbf{z}} \tag{1.31}$$

- Lato 5. Pressione costante,  $P = P_O + \rho g(f + e + d)$ . Risultante

$$\mathbf{R}_5 = P \cdot a \hat{\mathbf{z}} = (P_O + \rho g(f + e + d)) \cdot a \hat{\mathbf{z}} = 2774000 N/m \hat{\mathbf{z}} \tag{1.32}$$

**Esercizio .1.6 — Stevino: recipiente labirintico.** Si consideri il sistema di recipienti rappresentato in figura, in cui la zona tratteggiata contiene acqua, di densità pari a  $10^3 \text{ kg/m}^3$  mentre nella restante parte è presente aria di densità pari a  $1.2 \text{ kg/m}^3$ . Determinare la pressione nei punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  sapendo che le rispettive altezze sono  $h_A = 1 \text{ m}$ ,  $h_B = 1.4 \text{ m}$ ,  $h_C = 1.2 \text{ m}$  e  $h_D = 1.6 \text{ m}$ . Sia inoltre  $h_0 = 1.3 \text{ m}$  e la pressione esterna  $P_0 = 101325 \text{ Pa}$ . ( $P_A = 104262 \text{ Pa}$ ,  $P_B = 100346 \text{ Pa}$ ,  $P_C = 100348 \text{ Pa}$ ,  $P_D = 97424 \text{ Pa}$ ). ■



### Soluzione

**Concetti.** Legge di Stevino,  $P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2$ .

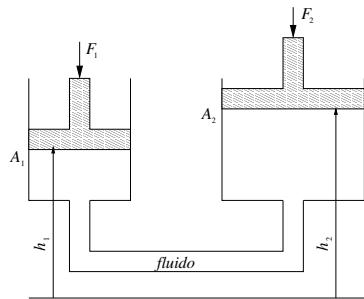
**Svolgimento.** Il problema viene risolto applicando ripetutamente la legge di Stevino, a partire dalla superficie 0 sulla quale agisce la pressione ambiente  $P_0$ . Nella legge di Stevino è necessario prestare attenzione ad usare la densità del fluido che mette in collegamento i due punti considerati. I punti  $A$  e  $B$  sono messi in collegamento con il punto 0 dall'acqua. I punti  $B$  e  $C$  sono messi in collegamento tra di loro dall'aria. I punti  $C$  e  $D$  di nuovo dall'acqua. La soluzione del problema è quindi

$$\begin{aligned}
 P_0 &= 101325 \text{ Pa} && \text{dato} \\
 P_A &= P_0 + \rho g (h_0 - h_A) = \dots \\
 P_B &= P_0 + \rho g (h_0 - h_B) = \dots && (1.33) \\
 P_C &= P_B + \rho_a g (h_B - h_C) = \dots \\
 P_D &= P_C + \rho g (h_C - h_D) = \dots
 \end{aligned}$$

**Esercizio .1.7 — Leva idraulica.** La leva idraulica, rappresentata in figura, è formata da due sistemi cilindro-pistone. Determinare la forza che è necessario applicare al secondo pistone per mantenere il sistema in equilibrio quando sul primo agisce una forza  $F_1 = 5000 \text{ N}$ , allorché i pistoni si trovano nella posizione indicata in figura.

Dati: diametro primo cilindro:  $d_1 = 0.2 \text{ m}$ ; diametro secondo cilindro:  $d_2 = 0.4 \text{ m}$ ; diametro del condotto che unisce i due cilindri:  $0.025 \text{ m}$ ; densità del fluido di lavoro:  $600 \text{ kg/m}^3$ ; altezza del primo pistone  $h_1 = 1 \text{ m}$ , altezza del secondo pistone  $h_2 = 2 \text{ m}$ .

( $p_1 = 159155 \text{ Pa}$ ,  $p_2 = 153269 \text{ Pa}$ ,  $\mathbf{F}_2 = -19260.3\hat{\mathbf{z}} \text{ N}$ .) ■



### Soluzione

**Concetti.** Legge di Stevino. Risultante statica. Leva idraulica.

**Svolgimento.** Il problema si risolve scrivendo le condizioni di equilibrio tra le forze esterne e la risultante dello sforzo di pressione sulle facce opposte dei pistoni e applicando la legge di Stevino tra le due sezioni  $A_1$  e  $A_2$ . Si ottiene un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite  $p_1, p_2, F_2$ ,

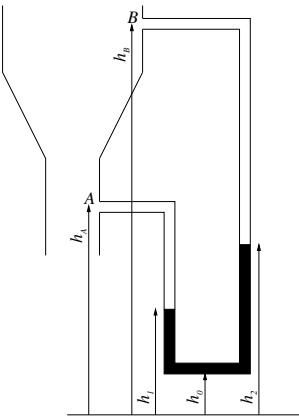
$$\begin{cases} F_1 = p_1 \pi \frac{d_1^2}{4} & \text{(Equilibrio pistone 1)} \\ p_2 = p_1 - \rho g (h_2 - h_1) & \text{(Legge di Stevino)} \\ F_2 = p_2 \pi \frac{d_2^2}{4} & \text{(Equilibrio pistone 2)} , \end{cases} \quad (1.34)$$

la cui soluzione è

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{4}{\pi} \frac{F_1}{d_1^2} & = 159155 \text{ Pa} \\ p_2 = \frac{4}{\pi} \frac{F_1}{d_1^2} - \rho g (h_2 - h_1) & = 153269 \text{ Pa} \\ F_2 = \frac{d_2^2}{d_1^2} F_1 - \frac{\pi}{4} d_2^2 \rho g (h_2 - h_1) & = 19260.3 \text{ N} . \end{cases} \quad (1.35)$$

La componente verticale  $F_2$  della forza  $\mathbf{F}_2$  è positiva diretta verso il basso, come nel disegno. Si può scrivere quindi  $\mathbf{F}_2 = -F_2 \hat{\mathbf{z}}$ , se il versore  $\hat{\mathbf{z}}$  è orientato verso l'alto.

**Esercizio .1.8 — Manometro e Venturi.** Si consideri il manometro riportato in figura utilizzato per misurare la differenza di pressione esistente fra due sezioni diverse di un condotto. Determinare la differenza di pressione fra i punti A e B riportati sul disegno sapendo che il liquido manometrico è acqua e ha una densità di  $998 \text{ kg/m}^3$ , che il fluido che scorre all'interno del condotto è aria e ha una densità di  $1.225 \text{ kg/m}^3$ , che  $h_A = 1 \text{ m}$ , che  $h_B = 1.2 \text{ m}$ , che  $h_0 = 0.1 \text{ m}$ , che  $h_1 = 0.3 \text{ m}$  e che  $h_2 = 0.7 \text{ m}$ . ( $p_B - p_A = -3913.75 \text{ Pa}$ ) ■



### Soluzione

**Concetti.** Legge di Stevino. Manometro. Venturi.

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2 \quad (1.36)$$

**Svolgimento.** Si scrive la legge di Stevino tra i punti A e 1, 1 e 2, 2 e B:

$$\begin{cases} P_B + \rho_a g z_B = P_2 + \rho_a g z_2 \\ P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2 \\ P_A + \rho_a g z_A = P_1 + \rho_a g z_1 \\ \Delta P = P_B - P_A \end{cases} \quad (1.37)$$

Si risolve il sistema lineare (come più piace). Ad esempio, partendo dalla terza e inserendo nella seconda e nella prima i risultati trovati:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_A + \rho_a g(z_A - z_1) \\ P_2 &= P_A + \rho_a g(z_A - z_1) + \rho g(z_1 - z_2) \\ P_B &= P_A + \rho_a g(z_A - z_1) + \rho g(z_1 - z_2) + \rho_a g(z_2 - z_B) \end{aligned} \quad (1.38)$$

E quindi, portando  $P_A$  a sinistra:

$$\Delta P = -(\rho - \rho_a)g(z_2 - z_1) - \rho_a g(z_B - z_A) = -3909.8 \text{ Pa} \quad (1.39)$$

### Osservazione.

Il sistema lineare (1.37) è sotto determinato (se esiste una soluzione, ne esistono infinite), essendo un sistema lineare di 4 equazioni in 5 incognite,  $P_1, P_2, P_A, P_B, \Delta P$ . Il sistema lineare può essere scritto usando il formalismo matriciale come  $\underline{\underline{A}} \underline{x} = \underline{b}$  con

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} P_A \\ P_B \\ P_1 \\ P_2 \\ \Delta P \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} \rho_a g(h_2 - h_B) \\ \rho g(h_1 - h_2) \\ \rho_a g(h_A - h_1) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

Poichè la matrice  $\underline{\underline{A}}$  ha rango massimo (= 4), esiste una soluzione  $\underline{x}^*$  del problema, tale che  $\underline{\underline{A}} \underline{x}^* = \underline{b}$ . Dal teorema del rango, si sa che il numero delle colonne (= 5) di una matrice è uguale alla dimensione del suo rango (= 4) e del suo nucleo (quindi = 1). Il nucleo della matrice  $\underline{\underline{A}}$ , tutti i vettori  $\underline{v}$  t.c.  $\underline{\underline{A}} \underline{v} = \underline{0}$ , è uno spazio vettoriale di dimensione uno. Se  $\underline{x}^*$  è soluzione del sistema, allora anche tutti i vettori  $\underline{x}^* + a\underline{v}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , sono soluzione del sistema,

poichè  $\underline{\underline{A}}(\underline{x}^* + \underline{v}) = \underline{\underline{A}}\underline{x}^* + \underline{\underline{A}}\underline{v} = \underline{b} + 0$ . Si può dimostrare il nucleo di  $\underline{\underline{A}}$  è generato dal vettore  $\underline{v} = (1, 1, 1, 1, 0)^T$ . Quindi le infinite soluzioni del problema hanno la forma

$$\begin{bmatrix} P_A \\ P_B \\ P_1 \\ P_2 \\ \Delta P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_A^* \\ P_B^* \\ P_1^* \\ P_2^* \\ \Delta P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ a \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$

Ora dovrebbe apparire chiaro come non sia possibile determinare il valore assoluto delle pressioni  $P_1, P_2, P_A, P_B$  solamente da una misura di pressione con un manometro *differenziale*: questi valori sono noti a meno di una costante additiva  $a$ , indeterminata. Al contrario, la differenza di due di questi valori, come  $\Delta P = P_B - P_A$ , è unica (e uguale al risultato ottenuto nello svolgimento del problema): l'unicità di  $\Delta P$  dipende dalla forma dei vettori del nucleo di  $\underline{\underline{A}}$  che hanno componente  $\Delta P$  nulla.



## 2. Tensione superficiale

### Legge di Young-Laplace.

La superficie di interfaccia tra due liquidi può essere modellata come una membrana, una superficie bidimensionale all'interno della quale agisce una forza per unità di lunghezza, tangente alla superficie stessa. La forza per unità di spessore  $\gamma$  agente nella membrana viene definita *tensione superficiale*. La legge di Young-Laplace lega la tensione superficiale, il salto di pressione attraverso la superficie di interfaccia e la curvatura della superficie stessa. Nel caso di tensione superficiale costante, vale

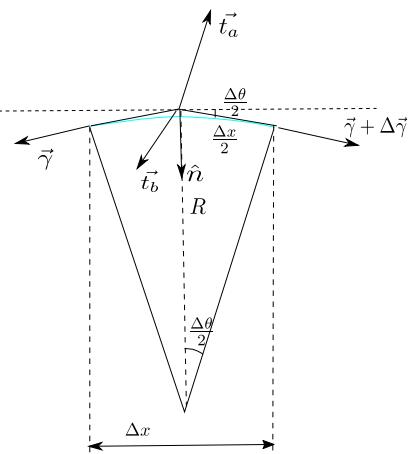
$$p_b - p_a = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 2\gamma H \quad (2.1)$$

dove con  $R_1$  e  $R_2$  sono stati indicati i due raggi di curvatura della superficie e con  $H$  si è indicata la curvatura media.

### Legge di Young-Laplace in due dimensioni.

Viene ricavata la legge di Young-Laplace in due dimensioni, scrivendo l'equilibrio di un elemento di membrana (monodimensionale) soggetto agli sforzi esercitati dai due fluidi su di essa e alla tensione superficiale al suo interno. L'equazione vettoriale di equilibrio viene proiettata in direzione normale e tangente alla superficie. La superficie nell'intorno di un punto, viene approssimata come un arco infinitesimo di una circonferenza, come in figura.

Si considera un elemento infinitesimo di superficie di dimensioni  $\Delta x \sim R\Delta\theta$ . Anche l'angolo  $\Delta\theta$  è “piccolo” ( $\cos \Delta\theta \sim 1$ ,  $\sin \Delta\theta \sim \Delta\theta$ , la dimensione dell'elemento di superficie è approssimabile con la sua proiezione su un piano normale a  $\hat{n}$ , ...). Con  $R$  viene indicato il raggio di curvatura della superficie.



Si scrive l'equilibrio.

$$\mathbf{t}_a \Delta x + \mathbf{t}_b \Delta x - \gamma(x) + \gamma(x) + \Delta\gamma = 0 \quad (2.2)$$

Proiettando nelle direzioni normale e tangente alla superficie,

$$\begin{aligned} (t_{an} + t_{bn})\Delta x + \gamma \sin \frac{\Delta\theta}{2} + (\gamma + \Delta\gamma) \sin \frac{\Delta\theta}{2} &= 0 \\ (t_{at} + t_{bt})\Delta x - \gamma \cos \frac{\Delta\theta}{2} + (\gamma + \Delta\gamma) \cos \frac{\Delta\theta}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Inserendo i valori approssimati di  $\sin \Delta\theta$  e  $\cos \Delta\theta$ , trascurando i termini di ordine superiore ( $\Delta\gamma\Delta\theta$ ):

$$\begin{aligned} (t_{an} + t_{bn})\Delta x + 2\gamma \frac{\Delta\theta}{2} &= 0 \\ (t_{at} + t_{bt})\Delta x + \Delta\gamma &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Se si può confondere la coordinata che descrive la superficie con la coordinata  $x$ , si può approssimare  $\Delta\gamma \sim \frac{\partial\gamma}{\partial x}\Delta x$ . Usando la relazione  $\frac{\Delta x}{2} \sim R\frac{\Delta\theta}{2}$  e semplificando l'elemento  $\Delta x$ :

$$\begin{aligned} (t_{an} + t_{bn}) + \frac{\gamma}{R} &= 0 \\ (t_{at} + t_{bt}) + \frac{\partial\gamma}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Nel caso in cui si consideri un problema di statica, lo sforzo **sul** fluido è dovuto solo al contributo di pressione, che agisce in direzione normale alla superficie:  $\mathbf{t}_a = -P_a \hat{\mathbf{n}}_a$ ,  $\mathbf{t}_b = -P_b \hat{\mathbf{n}}_b$ . Lo sforzo che il fluido esercita sulla superficie di interfaccia è uguale in modulo e opposto in direzione. Le due normali sono tra di loro opposte: si sceglie di definire la normale  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_a = -\hat{\mathbf{n}}_b$ . Di conseguenza, le componenti degli sforzi agenti sulla superficie di interfaccia, proiettati lungo  $\hat{\mathbf{n}}$  e un versore tangente sono:  $t_{an} = P_a$ ,  $t_{bn} = -P_b$ ,  $t_{at} = 0$ ,  $t_{bt} = 0$ . Se  $\gamma$  è costante (la tensione superficiale può avere gradienti non nulli a causa di gradienti di temperatura o di concentrazione), l'equilibrio in direzione tangente è identicamente soddisfatto.

$$P_a - P_b + \frac{\gamma}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_b - P_a = \frac{\gamma}{R} \quad (2.6)$$

### Estensione al caso 3D.

Per estendere la dimostrazione al caso 3D, nel quale la superficie è 2D, si procede in modo analogo a quanto nel paragrafo precedente. Va considerata la curvatura di una superficie e non di una curva (esistono due raggi di curvatura), ... Un utile primo riferimento di *geometria differenziale* di curve e superfici, è disponibile in rete seguendo il collegamento

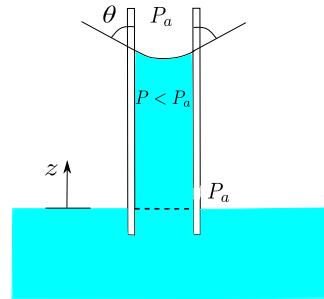
[Differential Geometry, Shiffrin.](#)

L'esistenza della tensione superficiale spiega il fenomeni della capillarità, l'esistenza dei menischi formati dalla superficie di separazione di due fluidi, il galleggiamento di insetti, graffette... sull'acqua, la formazione di superfici "minimali" di sapone, la bagnabilità delle superfici e la rottura di getti di piccolo diametro e la formazione di gocce. Infine, può essere utilizzata anche come mezzo non convenzionale di propulsione per barchette di carta

[Boat without a motor - Marangoni effect](#)

**Esercizio 2.1 — Capillare.** Sia  $\theta$  l'angolo di contatto all'interfaccia tra aria, liquido e solido; sia  $\gamma$  la tensione superficiale tra aria e liquido; sia  $\rho$  la densità del liquido. Determinare l'altezza  $h$  dal liquido in una colonnina cilindrica di raggio  $r = 0.5 \text{ mm}$  rispetto al livello nella vasca. Calcolare poi la pressione all'interno della colonnina. (Si può considerare valida l'approssimazione che la pressione agente sulla vasca e sulla superficie superiore del liquido all'interno della colonnina sia uguale).

Si considerino condizioni termodinamiche e materiale della colonnina tali che: se il liquido è acqua:  $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$ ,  $\theta = 1^\circ$ ,  $\gamma = 0.073 \text{ N/m}$ . se il liquido è mercurio:  $\rho = 13579 \text{ kg/m}^3$ ,  $\theta = 140^\circ$ ,  $\gamma = 0.559 \text{ N/m}$ . ( $h_{H_2O} = 2.97 \text{ cm}$ ,  $P_{H_2O} - P_0 = -291.95 \text{ Pa}$ ;  $h_{Hg} = -1.28 \text{ cm}$ ,  $P_{Hg} - P_0 = 1712.87 \text{ Pa}$ ) ■



### Soluzione

**Concetti.** Tensione superficiale. Angolo di contatto. Capillarità. Menisco.

**Svolgimento.** Scrivendo l'equilibrio per il volume di fluido nel capillare si trova l'altezza  $h$ . Successivamente si trova la  $p$  usando la legge di Stevino. Infine si fanno osservazioni su angolo di contatto, menisco e salto di pressione all'interfaccia.

- Si scrive l'equilibrio del volume di fluido. Il problema è di statica. Le forze agenti sono la forza dovuta alla tensione superficiale (che agisce sul perimetro della superficie superiore) e la forza peso, poiché per ipotesi la pressione agente sulla superficie superiore è uguale alla pressione ambiente  $P_a$ ; e quindi??? Perchè la componente verticale della risultante dovuta alla pressione esterna è zero???. Vedere immagine...).

$$F_\gamma = F_g \quad \Rightarrow \quad 2\pi r \gamma \cos \theta = \pi r^2 h \rho g \quad (2.7)$$

E quindi:

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h_{H_2O} = 2.97 \text{ cm} \\ h_{Hg} = -1.28 \text{ cm} \end{cases} \quad (2.8)$$

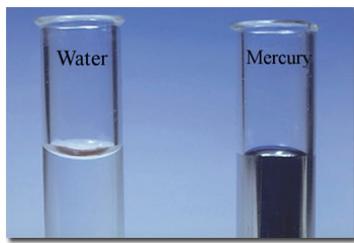
*Commenti sul risultato.* L'effetto della capillarità è più evidente per tubi stretti (proporzionalità con  $1/r$ ). La quota  $h$  può assumere sia valori positivi, sia valori negativi, in base al valore dell'angolo di contatto:  $h \leq 0$ , per  $\theta \geq \pi/2$ .

- Si calcola la pressione nel fluido in cima alla colonnina sfruttando la legge di Stevino.

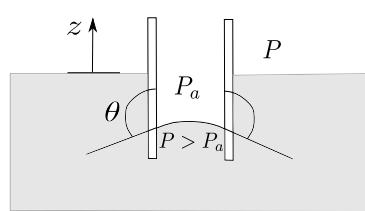
$$P = P_0 - \rho g h = P_0 - \frac{2\gamma \cos \theta}{r} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_{H_2O} - P_0 = -291.95 \text{ Pa} \\ P_{Hg} - P_0 = 1712.87 \text{ Pa} \end{cases} \quad (2.9)$$

*Commenti sul risultato.*  $P - P_0 \leq 0$ , per  $\theta \leq \pi/2$ . Al contrario  $P - P_0 \geq 0$ , per  $\theta \geq \pi/2$ . Questi risultati sono compatibili (meno male) con le relazioni tra curvatura (stretta parente del menisco e dell'angolo di contatto) e il salto di pressione.

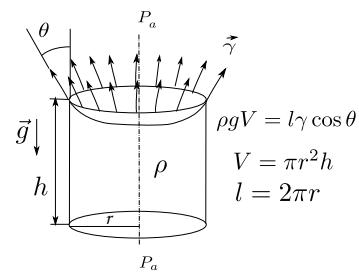
$\theta \leq \pi/2$	$h \geq 0$	$P \leq P_a$
$\theta \geq \pi/2$	$h \leq 0$	$P \geq P_a$



(a) Differenza tra il menisco formato dall'acqua e dal mercurio con aria e solido (quale?): diversa concavità della superficie.

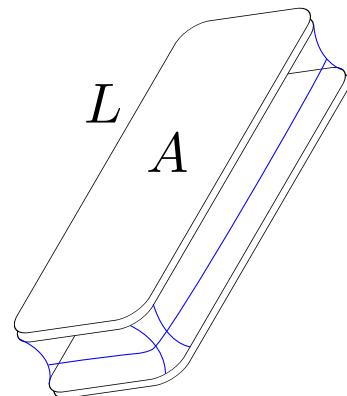


(b) Rappresentazione del caso del problema in cui il liquido è mercurio: l'angolo di contatto è maggiore dell'angolo retto, la quota all'interno del capillare è minore di quella nella vasca. Il caso dell'acqua è rappresentato a finaco del testo del problema.



(c) Equilibrio del volume di fluido nella colonna. La pressione atmosferica  $P_a$  non influenza l'equilibrio. Perché?

**Esercizio 2.2 — Attrazione di due superfici.** Due lame piane uguali parallele sono separate da una distanza  $d$ . Tra le lame è presente un sottile strato di liquido. Sono note l'area della superficie  $A$  e il perimetro  $L$  delle due lame, la pressione ambiente  $p_a$ , la tensione superficiale del liquido  $\gamma$  e l'angolo di contatto  $\theta$ . Si chiede di determinare la componente perpendicolare alle lame della forza agente su ciascuna delle due lame. ■



### Soluzione

**Concetti.** Tensione superficiale. Angolo di contatto.

**Svolgimento.** La condizione descritta nell'esercizio è una condizione equilibrio. La forza agente su una lamina è dovuta a due fenomeni: la tensione superficiale sul perimetro del fluido e la differenza di pressione tra fluido e ambiente. Si consideri positiva la forza se è una forza di attrazione.

$$F = F_\gamma + F_p \quad (2.10)$$

- Calcolo di  $F_\gamma$ .

$$F_\gamma = \gamma L \sin \gamma \quad (2.11)$$

- Calcolo di  $F_p$ . Il salto di pressione viene calcolato scrivendo l'equilibrio all'interfaccia.

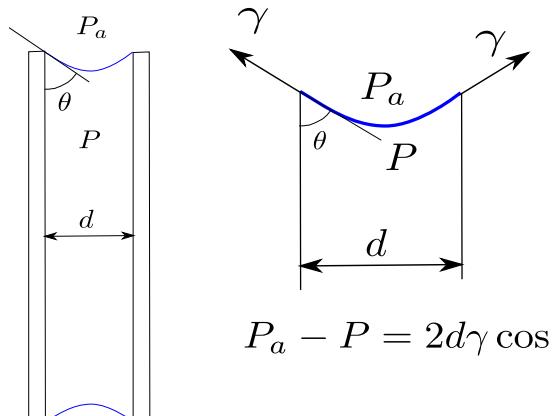
$$F_p = (p_a - p)A \quad (2.12)$$

con:

$$(p_a - p)d = 2\gamma \cos \theta \quad (2.13)$$

- La componente totale richiesta risulta quindi:

$$F = \frac{2\gamma A \cos \theta}{d} + L\gamma \sin \gamma \quad (2.14)$$





## 3. Cinematica

La cinematica è la parte della meccanica che studia il moto di sistemi, indipendentemente dalle cause che lo generano, a differenza della dinamica. Prima di ricavare le equazioni che descrivono la dinamica di un fluido, sembra quindi opportuno concentrarsi sulla sua cinematica.

La cinematica e la dinamica dei mezzi continui, come ad esempio i solidi o i fluidi, possono essere descritte con un approccio lagrangiano o euleriano. La **descrizione lagrangiana**, utilizzata spesso in meccanica dei solidi, consiste nel seguire nello spazio il moto delle singole particelle del mezzo continuo. La **descrizione euleriana**, utilizzata spesso in meccanica dei fluidi, consiste nel descrivere l'evoluzione del mezzo continuo utilizzando come variabili indipendenti sia la variabile spaziale  $\mathbf{r}$  sia la variabile temporale  $t$ .

### 3.1 Descrizione integrale lagrangiana ed euleriana

In una descrizione *integrale* del fenomeno, l'approccio lagrangiano segue l'evoluzione di un **volumen materiale**, i cui punti si muovono in maniera solidale con il mezzo continuo. In un approccio euleriano invece viene introdotto un **volumen di controllo**, fisso nello spazio, e i flussi delle quantità meccaniche (massa, quantità di moto, energia, ...) contribuiscono ai bilanci delle quantità meccaniche relative al volume di controllo considerato. Queste due descrizioni sono casi particolari di un approccio generale al problema, definito *ALE* (arbitrario lagrangiano-euleriano), che descrive l'evoluzione di un volume in moto arbitrario. Le tre diverse descrizioni del problema possono essere messe in relazione tra di loro, tramite le formule di Leibniz, che forniscono l'espressione della derivata temporale di integrali su domini dipendenti dal tempo. Si riporta qui, senza dimostrazione, il **teorema del trasporto di Reynolds**

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \oint_{S(t)} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} , \quad (3.1)$$

che fornisce l'espressione della derivata temporale dell'integrale della funzione  $f(\mathbf{x}, t)$  (che può essere scalare, vettoriale o in generale tensoriale) nel volume mobile  $V(t) \ni \mathbf{x}$ , la cui frontiera  $S(t)$  si muove con velocità  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_s, t)$ ,  $\mathbf{x}_s \in S(t)$ . La normale  $\hat{\mathbf{n}}$  alla superficie  $S(t)$  è uscente dal volume  $V(t)$ . Si rimanda all'appendice "Richiami di analisi" per la dimostrazione del teorema e per le formule della derivata temporale di flussi e circuitazioni su domini dipendenti dal tempo.

Siano ora

- $V(t)$  un volume materiale, la cui frontiera si muove con la velocità del fluido  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$
- $V_c$  un volume di controllo, la cui frontiera è fissa nello spazio,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
- $v(t)$  un volume in moto arbitrario, la cui frontiera si muove con velocità generica  $\mathbf{v}$ .

Come si vedrà nel capitolo sui "Bilanci integrali", il bilancio integrale di una quantità meccanica  $f$  in un volume materiale  $V(t)$  descrive la variazione nel tempo dell'integrale  $\int_{V(t)} f$ . Il teorema di Reynolds applicato all'integrale svolto su un volume materiale  $V(t)$  e all'integrale svolto sul volume in moto generico  $v(t)$ , coincidente con  $V(t)$  all'istante di tempo  $t$  considerato,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} f &= \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \oint_{S(t)} f \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t) \equiv V(t)} f &= \int_{v(t) \equiv V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \oint_{s(t) \equiv S(t)} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

permette di ricavare il legame tra la descrizione lagrangiana e una descrizione arbitraria del problema. Confrontando le ultime due espressioni, si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f = \frac{d}{dt} \int_{v(t) \equiv V(t)} f + \oint_{s(t) \equiv S(t)} f (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (3.3)$$

Dalla formula scritta per il volume arbitrario  $v(t)$ , si ricava il legame tra a descrizione lagrangiana e la descrizione euleriana del problema, considerando il volume arbitrario coincidente con un volume di controllo  $V_c$  fisso, per il quale  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f = \frac{d}{dt} \int_{V_c \equiv V(t)} f + \oint_{S_c \equiv S(t)} f \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (3.4)$$

### 3.2 Descrizione puntuale lagrangiana ed euleriana

In una descrizione *puntuale* del fenomeno, vengono introdotti due sistemi di coordinate: uno è solidale con il mezzo continuo dipendente dal tempo, mentre l'altro è fisso. Si può pensare al sistema di riferimento solidale con il continuo come un' "etichetta" che viene applicata a ogni **punto materiale** del mezzo continuo stesso. Un sistema di riferimento fisso, invece, è indipendente dal moto del mezzo continuo, come ad esempio un sistema di coordinate cartesiane, la cui origine e i cui assi sono fissi nel tempo. Mentre il mezzo continuo evolve nel tempo (trasla, ruota, si deforma ...), un punto materiale ha coordinate costanti  $\mathbf{x}_0$  rispetto al sistema di riferimento "solidale al volume", cioè che si muove e si deforma insieme al volume: questa coordinata, detta lagrangiana, può essere pensata come l'"etichetta" assegnata al punto materiale del continuo. Le coordinate euleriane  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  del punto materiale con coordinate lagrangiane  $\mathbf{x}_0$ , ne descrivono il moto nel sistema di riferimento fisso e in generale sono una funzione del tempo

**R** Il sistema di riferimento solidale al corpo dipende dal tempo, mentre le coordinate lagrangiane  $\mathbf{x}_0$  di un punto materiale sono costanti. Il sistema di riferimento fisso è indipendente dal tempo, mentre le coordinate euleriane  $\mathbf{x}$  di un punto materiale del volume (quindi con  $\mathbf{x}_0$  costante) sono dipendenti dal tempo.

Assumendo che all'istante  $t = 0$  i due sistemi di coordinate coincidano, e che quindi coincidano anche le coordinate euleriane e lagrangiane  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0$ , le coordinate lagrangiane  $\mathbf{x}_0$  rappresentano la configurazione (iniziale) di riferimento della configurazione attuale  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ . La trasformazione  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  descrive l'evoluzione nel tempo  $t$  dei punti  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  appartenenti al volume  $V_0 = V(0)$ , all'istante iniziale. La velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  del mezzo continuo nel punto  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ , per definizione di punto materiale, coincide con la velocità  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}_0, t)$  del punto etichettato con  $\mathbf{x}_0$ : questa è la derivata nel tempo della sua posizione  $\mathbf{x}$ , cioè con la derivata nel tempo della mappa  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  a coordinata lagrangiana (che identifica la particella) costante,

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} (\mathbf{x}_0, t) =: \frac{d\mathbf{x}}{dt}(\mathbf{x}_0, t) =: \frac{D\mathbf{x}}{Dt}(\mathbf{x}_0, t), \quad (3.5)$$

dove è stato introdotto il simbolo  $D/Dt$  di **derivata materiale** che rappresenta l'evoluzione della quantità alla quale è applicata, seguendo il moto del mezzo continuo: la derivata materiale rappresenta la variazione nel tempo della quantità "sentita" dalle singole particelle materiali. Nella descrizione euleriana del problema, i campi sono funzioni delle variabili indipendenti spazio  $\mathbf{x}$  e tempo  $t$ . Data una funzione  $f(\mathbf{x}, t)$  (scalare, vettoriale, tensoriale), viene indicata con

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} (\mathbf{x}, t), \quad (3.6)$$

la derivata parziale rispetto al tempo, che rappresenta la variazione della quantità  $f(\mathbf{x}, t)$  nel punto fisso  $\mathbf{x}$  dello spazio, che coordinata euleriana costante.

È possibile trovare il legame tra le due derivate utilizzando la *regola di derivazione di funzioni composte* e la funzione  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  che descrive il moto dei punti materiali del sistema. Data una funzione  $f(\mathbf{x}, t)$  (rappresentazione euleriana), viene definita  $f_0(\mathbf{x}_0, t)$  come la funzione composta  $f_0 = f \circ \mathbf{x}$  (descrizione lagrangiana). Ipotizzando poi che si possano esprimere le coordinate lagrangiane come funzione di quelle euleriane,  $\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t)$ , è possibile scrivere

$$f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) = f_0(\mathbf{x}_0, t) = f_0(\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t), t). \quad (3.7)$$

Utilizzando la regola di derivazione per le funzioni composte, si ottiene il legame cercato,

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_t \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} + \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_t = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f, \end{aligned} \quad (3.8)$$

dove si è indicato con  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} (\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t), t)$  il campo di velocità riferito a una descrizione euleriana del problema e si è riconosciuto l'operatore  $\nabla$  nell'ultimo passaggio. Infine è possibile "rimuovere" la funzione  $f$  per ottenere la relazione tra la forma delle due derivate, valida per funzioni scalari, vettoriali, tensoriali,

$$\frac{D_-}{Dt} := \frac{d_-}{dt} := \left. \frac{\partial_-}{\partial t} \right|_{x_0} = \frac{\partial_-}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_- . \quad (3.9)$$

Come esempio, applichiamo la regola (3.9) per ricavare la forma euleriana e lagrangiana del campo di velocità e di accelerazione delle particelle del continuo. Il campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  si ottiene dalla derivata materiale della trasformazione  $\mathbf{x}(x_0, t)$ ,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}}_{=0} \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}_0, t) \cdot \underbrace{\nabla \mathbf{x}}_{=\mathbb{I}} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}_0, t) . \quad (3.10)$$

In questo caso, non è stato ottenuto nulla di nuovo. Il campo di accelerazione nella descrizione euleriana del fenomeno viene ottenuto calcolando l'accelerazione delle particelle materiali con la derivata materiale alla velocità. Per componenti, l'accelerazione della particella materiale identificata con  $x_0$  è

$$a_i(\mathbf{x}, t) = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} . \quad (3.11)$$

Introducendo l'operatore advettivo  $\mathbf{v} \cdot \nabla$ , è possibile scrivere il campo di accelerazione (che comparirà nel bilancio della quantità di moto) in forma vettoriale

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{D\mathbf{u}}{Dt}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) , \quad (3.12)$$

dove sono stati esplicitati gli argomenti  $(\mathbf{x}, t)$  delle funzioni, per evidenziare la rappresentazione euleriana.



Una volta compresa la differenza tra le due descrizioni del problema, non è necessario esprimere in maniera esplicita gli argomenti delle funzioni. Da qui in avanti, verrà privilegiata una descrizione euleriana, per campi, del problema.

In alcuni casi, come ad esempio problemi che riguardano lo studio di correnti attorno a corpi mobili, può essere conveniente utilizzare una rappresentazione arbitraria del problema, descrivendo il fenomeno seguendo l'evoluzione delle grandezza meccaniche su punti, "etichettati" dalla coordinata arbitraria  $\chi$ , il cui moto è descritto in coordinate euleriane dalla funzione  $\mathbf{x}(\chi, t)$ . Seguendo lo stesso procedimento svolto per le particelle materiali, la velocità  $\mathbf{v}$  di questi punti in moto arbitrario è uguale alla derivata parziale

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\chi} , \quad (3.13)$$

svolta a coordinata  $\chi$  costante. Ancora seguendo lo stesso procedimento svolto in precedenza, è possibile ricavare la relazione tra la rappresentazione arbitraria e quella euleriana,

$$\frac{\partial_-}{\partial t} \Big|_{\chi} = \frac{\partial_-}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot \nabla_- . \quad (3.14)$$

e, confrontando la (3.9) e la (3.14), la relazione tra la rappresentazione arbitraria e quella lagrangiana,

$$\left. \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t} \right|_{x_0} = \left. \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t} \right|_{\chi} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \nabla \underline{\underline{\sigma}} . \quad (3.15)$$

### 3.3 Velocità di traslazione, rotazione e deformazione

In questa sezione viene studiato il moto di un segmento materiale, che segue il moto del mezzo continuo. Viene introdotto il tensore gradiente di velocità  $\nabla \mathbf{u}$ , con  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  il campo di velocità. Questo tensore viene prima scritto come somma della sua parte antisimmetrica  $\mathbb{W}$  e della sua parte simmetrica  $\mathbb{D}$ , la quale può essere a sua volta scomposta nella parte idrostatica e nella parte deviatorica  $\mathbb{D}^d$ . Viene infine descritta la natura di questi tensori grazie alla loro influenza sul moto di segmento materiale.

Il segmento materiale viene identificato dal vettore  $\Delta \mathbf{x}_{12}(t) = \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)$ , i cui estremi sono i punti di coordinate  $\mathbf{x}_1(t)$  e  $\mathbf{x}_2(t)$ . Indicando con  $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t)$  e  $\mathbf{u}_2(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_2(t), t)$  loro velocità, è possibile ricavare l'evoluzione temporale del segmento materiale,

$$\Delta \mathbf{x}_{12}(t + \Delta t) = \Delta \mathbf{x}_{12}(t) + (\mathbf{u}_2(t) - \mathbf{u}_1(t)) \Delta t + o(\Delta t) . \quad (3.16)$$

Tornando alla descrizione euleriana del problema, è possibile scrivere la differenza di velocità introducendo il tensore gradiente di velocità,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2(t) - \mathbf{u}_1(t) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_2(t), t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) = \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t) + \Delta \mathbf{x}_{12}(t), t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) = \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) \cdot \Delta \mathbf{x}_{12}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) + o(|\Delta \mathbf{x}_{12}(t)|) = \\ &= \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) \cdot \Delta \mathbf{x}_{12}(t) + o(|\Delta \mathbf{x}_{12}(t)|) . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Riarrangiando i termini si può scrivere,

$$\Delta \mathbf{x}_{12}(t + \Delta t) = \Delta \mathbf{x}_{12}(t) + [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) \cdot \Delta \mathbf{x}_{12}(t) + o(|\Delta \mathbf{x}_{12}(t)|)] \Delta t + o(\Delta t) . \quad (3.18)$$

e facendo tendere a zero  $\Delta t$ , si ricava

$$\frac{d \Delta \mathbf{x}_{12}}{dt}(t) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) \cdot \Delta \mathbf{x}_{12}(t) + o(|\Delta \mathbf{x}_{12}(t)|) . \quad (3.19)$$

Nell'ipotesi che i termini  $o(|\Delta \mathbf{x}_{12}(t)|)$  siano trascurabili, la velocità  $\mathbf{u}_2$  del punto  $\mathbf{x}_2$  differisce dalla velocità  $\mathbf{u}_1$  del punto  $\mathbf{x}_1$  del termine  $d \Delta \mathbf{x}_{12}/dt$  che rappresenta le eventuali rotazioni rigide e le deformazioni del mezzo continuo,

$$\mathbf{u}_2(t) = \mathbf{u}_1(t) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_1(t), t) \cdot \Delta \mathbf{x}_{12}(t) . \quad (3.20)$$

#### 3.3.1 Tensore gradiente di velocità

Il tensore gradiente di velocità può essere scritto come somma  $\nabla \mathbf{u} = \mathbb{D} + \mathbb{W}$  della sua parte simmetrica  $\mathbb{D}$ , il **tensore velocità di deformazione**, e della su parte antisimmetrica  $\mathbb{W}$ , il **tensore di spin**,

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) , \quad \mathbb{W} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - \nabla^T \mathbf{u}) , \quad (3.21)$$

i quali possono essere scritti in componenti, in un sistema di coordinate cartesiane come

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] , \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] . \quad (3.22)$$

Il tensore velocità di deformazione può essere poi scomposto nella sua parte idrostatica e nella sua parte deviatorica  $\mathbb{D}^d$ ,

$$\mathbb{D} = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbb{D}) \mathbb{I} + \mathbb{D}^d \quad , \quad \mathbb{D}^d = \mathbb{D} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbb{D}) \mathbb{I} , \quad (3.23)$$

dove la traccia  $\text{tr}(\mathbb{D})$  è uguale alla divergenza del campo di velocità  $\nabla \cdot \mathbf{u}$ .

Il tensore di spin è un tensore antisimmetrico del secondo ordine. Nello spazio tridimensionale ha solo tre componenti indipendenti, che contengono le componenti del vettore vorticità  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ . Ad esempio, utilizzando un sistema di coordinate cartesiane, è possibile scrivere il tensore di spin come

$$\mathbb{W} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \text{Spin}(\boldsymbol{\omega}) . \quad (3.24)$$

L'operazione  $\mathbb{W} \cdot \mathbf{v}$  tra il tensore antisimmetrico  $\mathbb{W} = \text{Spin}(\boldsymbol{\Omega})$  e un vettore  $\mathbf{v}$  qualsiasi coincide con l'operazione  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ . Introducendo la scomposizione di  $\nabla \mathbf{u}$  nella formula (3.20), si ricava

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2(t) &= \mathbf{u}_1(t) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_1(t), t) \times (\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)) + \quad (\text{atto di moto rigido}) \\ &\quad + \mathbb{D}(\mathbf{x}_1(t), t) \cdot (\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)) . \quad (\text{deformazione}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Da questa formula si possono riconoscere i contributi alla velocità  $\mathbf{u}_2$  di “traslazione” (la velocità del punto  $\mathbf{x}_1$ ), di rotazione con velocità angolare  $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}$  e di deformazione,  $\mathbb{D} \cdot \Delta \mathbf{x}_{12}$ .

### 3.3.2 Derivate temporali di oggetti materiali

In questa sezione vengono descritti gli effetti dei singoli termini nei quali può essere scomposto il gradiente di velocità tramite i loro effetti sull'evoluzione di un segmento materiale  $\mathbf{v}$  o di una combinazione di segmenti materiali “elementari” (come ad esempio il prodotto scalare o il triplo prodotto), per i quali i termini di ordine  $o(|\mathbf{v}|)$  sono considerati trascurabili.

#### Vettore materiale.

Scrivendo il vettore  $\mathbf{v}$  come prodotto del suo modulo  $v$  per il versore  $\hat{\mathbf{n}}$  che ne identifica la direzione,  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{n}}$ , è possibile esprimere la derivata nel tempo come,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{n}} + v \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt} . \quad (3.26)$$

#### Vettore materiale: modulo.

Utilizzando l'identità  $\dot{\hat{\mathbf{n}}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0^1$ , moltiplicando scalarmente per  $\hat{\mathbf{n}}$  l'ultima espressione, si ricava la derivata nel tempo del modulo  $v$  del vettore  $\mathbf{v}$ ,

$$\frac{dv}{dt} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \underbrace{v \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{n}}}_{=0} = \hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbb{D} + \mathbb{W}] \cdot \mathbf{v} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} v , \quad (3.27)$$

<sup>1</sup> Poiché  $\hat{\mathbf{n}}$  è un versore,  $|\hat{\mathbf{n}}|^2 = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$ . La derivata nel tempo di quest'ultima espressione diventa  $0 = \dot{\hat{\mathbf{n}}} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{n}}} = 2\dot{\hat{\mathbf{n}}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ , da cui si ricava l'identità desiderata.

avendo introdotto la scomposizione  $\nabla \mathbf{u} = \mathbb{D} + \mathbb{W}$  nella formula (3.18) applicata al vettore materiale  $\mathbf{v}$  e utilizzato l'identità  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{W} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ , poiché  $\mathbb{W}$  è antisimmetrica. Poichè il tensore velocità di deformazione è simmetrico, esiste una base di vettori ortonormali  $\{\hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2, \hat{\mathbf{p}}_3\}$  che permettono di scrivere la decomposizione spettrale di  $\mathbb{D}$ ,

$$\mathbb{D} = \lambda_1 \hat{\mathbf{p}}_1 \otimes \hat{\mathbf{p}}_1 + \lambda_2 \hat{\mathbf{p}}_2 \otimes \hat{\mathbf{p}}_2 + \lambda_3 \hat{\mathbf{p}}_3 \otimes \hat{\mathbf{p}}_3 . \quad (3.28)$$

I vettori  $\hat{\mathbf{p}}_i$  sono gli autovettori del tensore  $\mathbb{D}$  che ne rappresentano le *direzioni principali*, mentre gli scalari  $\lambda_i$  sono gli autovalori associati, tali che  $\mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{p}}_i = \lambda_i \hat{\mathbf{p}}_i$ . È quindi possibile scrivere la derivata nel tempo del modulo  $v$  del vettore materiale  $\mathbf{v}$  come

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = \lambda_1 n_1^2 + \lambda_2 n_2^2 + \lambda_3 n_3^2 , \quad (3.29)$$

avendo indicato con  $n_i = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_i$  le proiezioni del versore  $\hat{\mathbf{n}}$  sugli autovettori del tensore  $\mathbb{D}$ .

#### Vettore materiale: direzione.

Combinando la (3.26) e la (3.27), è possibile ricavare la derivata nel tempo della direzione  $\hat{\mathbf{n}}$  del vettore materiale  $\mathbf{v}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt} &= \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} - \frac{1}{v} \hat{\mathbf{n}} \frac{dv}{dt} = [\mathbb{D} + \mathbb{W}] \cdot \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= [\mathbb{I} - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}] \cdot \mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \mathbb{W} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= [\mathbb{I} - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}] \cdot \mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{n}} . \end{aligned} \quad (3.30)$$

Il tensore  $\mathbb{P} := \mathbb{I} - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}$  è il proiettore ortogonale in direzione perpendicolare a  $\hat{\mathbf{n}}$ , che ha nucleo generato da  $\hat{\mathbf{n}}$ , cioè  $\mathbb{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ . Introducendo la scomposizione del tensore  $\mathbb{D}$  nella sua parte idrostatica e deviatorica, è possibile dimostrare che la parte idrostatica non influenza la derivata del versore  $\hat{\mathbf{n}}$

$$\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt} = [\mathbb{I} - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}] \cdot \mathbb{D}^d \cdot \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{n}} , \quad (3.31)$$

poiché  $\mathbb{P} \cdot \mathbb{I} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbb{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ . In generale quindi la direzione di un vettore materiale dipende dalle rotazioni, rappresentate dal termine  $\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{n}}$  e dalla parte deviatorica del tensore velocità di deformazione. Questo ultimo contributo può essere nullo in alcuni casi, come ad esempio

- quando lo stato di deformazione è “idrostatico”, per il quale  $\mathbb{D}^d = 0$ ,
- quando il vettore  $\mathbf{v}$  appartiene al nucleo di  $\mathbb{D}^d$ ,  $\mathbb{D}^d \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , orientato cioè in una direzione che non subisce una deformazione deviatorica,
- quando il vettore  $\mathbf{v}$  è allineato con una delle direzioni principali  $\hat{\mathbf{p}}_i$  di  $\mathbb{D}$ : in questo caso, il vettore  $\mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  è allineato con  $\hat{\mathbf{n}}$ , poiché  $\mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lambda_i \hat{\mathbf{n}}$ , e quindi appartiene al nucleo del proiettore  $\mathbb{P}$ , cioè  $\mathbb{P} \cdot (\mathbb{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{0}$ .

#### Angolo tra vettori materiali.

Calcolando la derivata materiale del prodotto scalare tra due vettori materiali  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ , è possibile verificare che il tensore di spin  $\mathbb{W}$  rappresenta una rotazione rigida, non modificando né i moduli dei singoli vettori materiali, né l'angolo compreso tra di essi. Infatti la derivata

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \\ &= \mathbf{w} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w} = \\ &= 2\mathbf{w} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{v} , \end{aligned} \quad (3.32)$$

avendo utilizzato la simmetria del tensore velocità di deformazione  $\mathbb{D}$  e l'identità vettoriale  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ .

La derivata del coseno dell'angolo formato dai vettori materiali  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{n}}_v$ ,  $\mathbf{w} = w\hat{\mathbf{n}}_w$  dipende solamente dalla parte deviatorica del tensore velocità di deformazione,

$$\begin{aligned}\frac{d \cos \theta_{vw}}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| |\mathbf{w}|} = \\ &= 2\hat{\mathbf{n}}_w \cdot \mathbb{D}^d \hat{\mathbf{n}}_v - \hat{\mathbf{n}}_v \cdot \hat{\mathbf{n}}_w (\hat{\mathbf{n}}_v \cdot \mathbb{D}^d \cdot \hat{\mathbf{n}}_v + \hat{\mathbf{n}}_w \cdot \mathbb{D}^d \cdot \hat{\mathbf{n}}_w) = \\ &= 2(1 - \hat{\mathbf{n}}_v \cdot \hat{\mathbf{n}}_w)\hat{\mathbf{n}}_w \cdot \mathbb{D}^d \hat{\mathbf{n}}_v - \hat{\mathbf{n}}_v \cdot \hat{\mathbf{n}}_w (\hat{\mathbf{n}}_v - \hat{\mathbf{n}}_w) \cdot \mathbb{D}^d \cdot (\hat{\mathbf{n}}_v - \hat{\mathbf{n}}_w) .\end{aligned}\quad (3.33)$$

#### Volume generato da vettori materiali.

Infine, è possibile dimostrare che la derivata del volume materiale (elementare, per il quale i termini  $o(|\Delta x|)$  siano trascurabili)  $V = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$  del parallelepipedo formato dai tre vettori materiali  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vale

$$\frac{dV}{dt} = (\nabla \cdot \mathbf{u})V . \quad (3.34)$$

La divergenza del campo di velocità rappresenta quindi la derivata nel tempo di un volume materiale relativa al volume materiale stesso. Il **vincolo cinematico di incomprimibilità** impone che l'estensione di un volume materiale non vari nel tempo,  $dV/dt = 0$ , ed è quindi equivalente alla condizione di solenoidalità del campo di velocità,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ .

### 3.4 Curve caratteristiche

Per descrivere il moto di un fluido vengono definite quattro famiglie di curve: le linee di corrente, le traiettorie, le curve di emissione (o linee di fumo) e le tracce. Viene data una definizione matematica di queste curve, che possono essere ottenute durante le attività sperimentali tramite delle tecniche di visualizzazione del campo di moto, come mostrato nel seguente video, [Stanford 1963 - Flow Visualization](#).

<https://www.youtube.com/watch?v=nuQyKGuXJ0s>, nel caso non funzionasse il collegamento sopra a uno degli storici video del National Committee.

Come già anticipato, secondo la descrizione euleriana del moto di un mezzo continuo, il campo di velocità è rappresentato dalla funzione vettoriale  $\mathbf{u}$  i cui argomenti indipendenti sono la coordinata spaziale  $\mathbf{r}$  e quella temporale  $t$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Vengono ora definite le quattro curve caratteristiche elencate sopra:

- Le **linee di corrente** sono curve  $\mathbf{S}$  tangenti al campo vettoriale  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  in ogni punto dello spazio  $\mathbf{r}$ , all'istante temporale  $t$  considerato. Essendo curve (dimensione=1), possono essere espresse in forma parametrica come funzioni di un parametro scalare  $p$ ,  $\mathbf{S}(p)$ . La “traduzione matematica” della definizione è quindi

$$\frac{d\mathbf{S}}{dp}(p) = \lambda(p)\mathbf{u}(\mathbf{S}(p), t) , \quad (3.35)$$

cioè il vettore tangente  $d\mathbf{S}(p)/dp$  alla curva  $\mathbf{S}(p)$ , nel punto identificato dal valore del parametro  $p$ , è parallelo al vettore velocità  $\mathbf{u}$  calcolato nello stesso punto  $\mathbf{S}(p)$ , al tempo considerato  $t$ . La funzione  $\lambda(p)$  dipende dalla parametrizzazione utilizzata e non influisce sulla forma della linea di corrente. L'equazione (3.35) rappresenta tutte le linee di corrente: per ottenere la linea di corrente passante per un punto, è necessario impostare questa condizione come condizione al contorno.

- Una **traiettoria** descrive il moto di una singola particella materiale, la cui velocità è uguale a quella del fluido, nella posizione in cui si trova e all'istante di tempo "attuale". La traiettoria di una particella è descritta dall'equazione differenziale

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{R}}{dt}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t) \\ \mathbf{R}(t_0) = \mathbf{R}_0 \end{cases} \quad (3.36)$$

L'equazione differenziale traduce la definizione di particella materiale: la velocità della particella materiale  $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{R}/dt(t)$  è uguale alla velocità del fluido nello stesso punto allo stesso istante di tempo,  $\mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t)$ . La condizione iniziale identifica tra tutte le traiettorie delle infinite particelle materiali, quella della particella che all'istante  $t_0$  passa per il punto  $\mathbf{R}_0$ .

Fissati i "parametri"  $t_0$  e  $\mathbf{R}_0$  che identificano la particella desiderata, la sua traiettoria è descritta dalla curva  $\mathbf{R}(t; t_0, \mathbf{R}_0)$ , funzione del tempo "attuale"  $t$ .

- Una **linea di fumo** è il luogo dei punti descritto dalla posizione al tempo  $t$  (fissato) di tutte le particelle materiali passate per un punto (fissato) nello spazio,  $\mathbf{R}_0$ , negli istanti di tempo  $t_0$  precedenti a  $t$ ,  $t_0 < t$ .

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{R}}{dt}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t) \\ \mathbf{R}(t_0) = \mathbf{R}_0 \end{cases} \quad (3.37)$$

Il problema è identico a quello delle traiettorie. Cambia però il ruolo di  $t$ ,  $t_0$ ,  $\mathbf{R}_0$ : la linea di fumo al "tempo di osservazione"  $t$  formata da tutte le particelle passanti da  $\mathbf{R}_0$  a istanti temporali  $t_0$ , con  $t_0 < t$ , è una descritta dalla curva  $\mathbf{R}(t_0; t, \mathbf{R}_0)$ , funzione dell'istante  $t_0$ .

- Una **traccia** è il luogo dei punti descritto dalla posizione al tempo  $t$  (fissato) di tutte le particelle materiali che si trovavano su una curva  $\mathbf{R}_0(p)$  al tempo  $t_0$  (fissato).

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{R}}{dt}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t) \\ \mathbf{R}(t_0) = \mathbf{R}_0 \end{cases} \quad (3.38)$$

Ancora una volta il problema è identico a quello delle traiettorie ma cambia il ruolo di  $t$ ,  $t_0$ ,  $\mathbf{R}_0$ : fissati i parametri  $t_0$  e  $t$  che identificano rispettivamente l'istante di tempo in cui le particelle materiali desiderate si trovano sulla curva  $\mathbf{R}_0$  e l'istante di tempo in cui la curva viene osservata, la traccia è una funzione del luogo dei punti "iniziale"  $\mathbf{R}_0$ ,  $\mathbf{R}(\mathbf{R}_0; t, t_0)$ .

### Osservazione 1.

Nel caso di campi stazionari, cioè indipendenti dal tempo,  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}^{(staz)}(\mathbf{r})$ , linee di corrente, traiettorie e linee di fumo coincidono.

**Esercizio 3.1 — Linee di corrente, traiettorie e linee di fumo: non stazionario.** Sia dato il campo di moto

$$\mathbf{u}(x, y) = 3\hat{x} + 3t\hat{y} \quad (3.39)$$

Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle. Infine si determino le tracce generate al tempo  $t_0 = 0$  dal segmento che unisce l'origine con il punto  $(x_1, y_1) = (0, 1)$ . ■

### Soluzione

**Concetti.** Definizione di linee di corrente, traiettorie, linee di fumo, tracce. Soluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie (problemi di Cauchy, ai valori iniziali).

**Svolgimento.** Partendo dalle definizioni, si ricavano le equazioni delle curve caratteristiche. Il problema per le traiettorie, le linee di fumo e le tracce viene risolto una volta sola per ottenere il risultato in forma parametrica in funzione di  $t$ ,  $t_0$ ,  $\mathbf{R}_0(p) = (x_0(p), y_0(p))$ .

- **Linee di corrente.** L'equazione vettoriale che definisce una linea di corrente  $\mathbf{S}(p) = X(p)\hat{x} + Y(p)\hat{y}$  viene scritta per componenti,

$$\begin{cases} \frac{dX}{dp}(p) = \lambda(p)3 \\ \frac{dY}{dp}(p) = \lambda(p)3t \end{cases} \quad (3.40)$$

Il sistema di equazioni può essere risolto ricavando dalla prima  $\lambda(p)$  in funzione di  $dX/dp$ , sostituendolo nella seconda, e integrando tra  $p_0$  e  $p$ , con  $t$  fissato

$$\int_{p_0}^p \frac{dY}{dp}(p') dp' = \int_{p_0}^p \frac{dX}{dp}(p') t dp' \quad \rightarrow \quad Y(p) - Y(p_0) = (X(p) - X(p_0)) t . \quad (3.41)$$

Dopo aver fissato una linea di corrente, imponendo il suo passaggio per un punto,  $(X(p_0), Y(p_0)) = (x_0, y_0)$ , si ottiene la sua equazione in *forma cartesiana*

$$y = y_0 + (x - x_0)t . \quad (3.42)$$

In questo problema, le linee di corrente costituiscono una famiglia di rette parallele nel piano  $x-y$ , a ogni istante temporale, il cui coefficiente angolare,  $t$ , aumenta con il tempo.

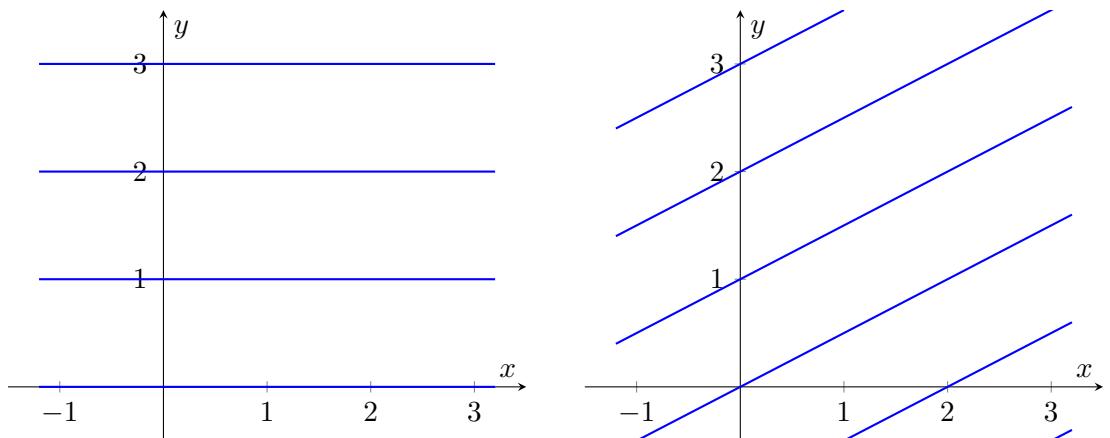


Figura 3.1: Linee di corrente a  $t = 0.0$  (sinistra) e  $t = 0.5$  (destra).

- **Traiettorie.** Le equazioni di traiettorie, linee di fumo e tracce vengono ricavate in forma parametrica risolvendo il problema ai valori iniziali che le definisce. In un secondo momento viene ricavata la loro equazione in *forma cartesiana*, esplicitando il parametro in funzione di una delle due coordinate spaziali, esplicitando il parametro in funzione di una delle due coordinate spaziali. Per le traiettorie, parametrizzate con  $t$ , si ottiene

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = 3 \\ \frac{dy}{dt}(t) = 3t \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t; \mathbf{R}_0, t_0) = x_0 + 3(t - t_0) \\ y(t; \mathbf{R}_0, t_0) = y_0 + \frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) \end{cases} . \quad (3.43)$$

Esplicitando  $t$  in funzione di  $x$ ,

$$t = t_0 + \frac{x - x_0}{3} , \quad (3.44)$$

e sostituendo nella coordinata  $y$  si ottiene l'equazione in forma cartesiana,

$$y(x; \mathbf{R}_0, t_0) = \frac{1}{6}x^2 + \left[ -\frac{1}{3}x_0 + t_0 \right] x + y_0 + \frac{1}{6}x_0^2 - x_0 t_0 , \quad (3.45)$$

all'interno della quale  $\mathbf{R}_0 = (x_0, y_0)$  e  $t_0$  compaiono ancora come parametri. Dalla (3.48), le traiettorie sono parabole con la concavità rivolta verso l'alto.

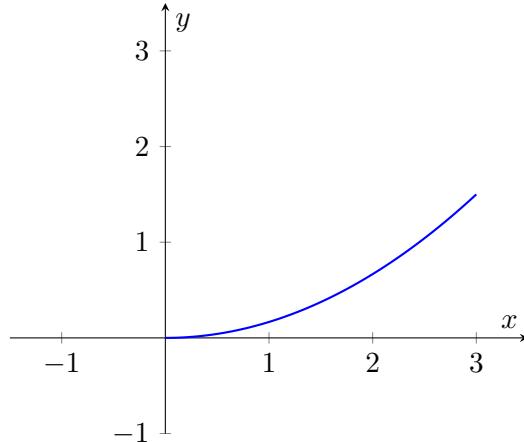


Figura 3.2: Traiettoria per  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{0}, t_0 = 0, t \in [0, 1]$

- **Linee di fumo (curve di emissione).** La forma parametrica dell'equazione delle linee di fumo (funzioni di  $t_0$ ) è

$$\begin{cases} x(t_0; t, \mathbf{R}_0) = x_0 + 3(t - t_0) \\ y(t_0; t, \mathbf{R}_0) = y_0 + \frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) \end{cases} . \quad (3.46)$$

Esplicitando  $t_0$  in funzione di  $x$ ,

$$t_0 = t - \frac{x - x_0}{3} , \quad (3.47)$$

e sostituendo nella coordinata  $y$  si ottiene l'equazione in forma cartesiana,

$$y(x; \mathbf{R}_0, t) = -\frac{1}{6}x^2 + \left[ \frac{1}{3}x_0 + t \right] x + y_0 - \frac{1}{6}x_0^2 + x_0 t_0 , \quad (3.48)$$

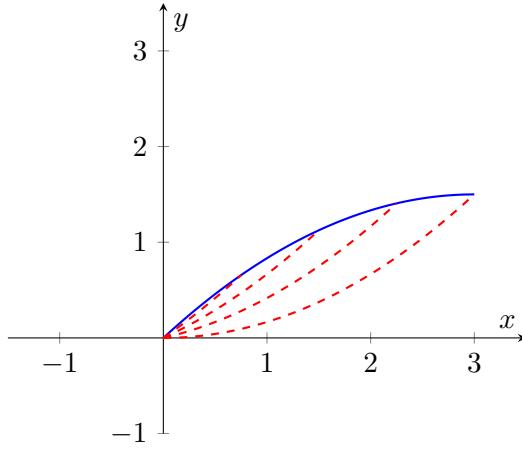


Figura 3.3: Curva di emissione con  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{0}$ ,  $t_0 \in [0, t]$ ,  $t = 1$  (blu) e traiettorie delle particelle passanti per l'origine negli istanti di tempo  $t_0 = 0, 0.25, 0.50, 0.75$ , per  $t > t_0$  (tratteggiate in rosso).

all'interno della quale  $\mathbf{R}_0 = (x_0, y_0)$  e  $t$  compaiono ancora come parametri. Dalla (3.48), le linee di fumo sono parabole con la concavità rivolta verso il basso.

- **Tracce.** La forma parametrica dell'equazione delle tracce è

$$\begin{cases} x(\mathbf{R}_0; t, t_0) = x_0 + 3(t - t_0) \\ y(\mathbf{R}_0; t, t_0) = y_0 + \frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) \end{cases} . \quad (3.49)$$

Il segmento che unisce l'origine al punto  $(x_1, y_1) = (0, 1)$  è descritto in forma parametrica come

$$\mathbf{R}_0(p) = \begin{cases} x_0(p) = 0 \\ y_0(p) = p \end{cases} , \quad p \in [0, 1] . \quad (3.50)$$

La forma parametrica delle tracce ( $p$  è il parametro che descrive la curva, mentre  $t$ ,  $t_0$  sono parametri fissi) è quindi

$$\mathbf{R}(\mathbf{R}_0(p), t, t_0) = \begin{cases} x(p; t, t_0) = 3(t - t_0) \\ y(p; t, t_0) = p + \frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) \end{cases} , \quad p \in [0, 1] . \quad (3.51)$$

Queste sono segmenti verticali di lunghezza uguale a 1, con il punto più basso di coordinate  $(3(t - t_0), \frac{3}{2}(t^2 - t_0^2))$ .

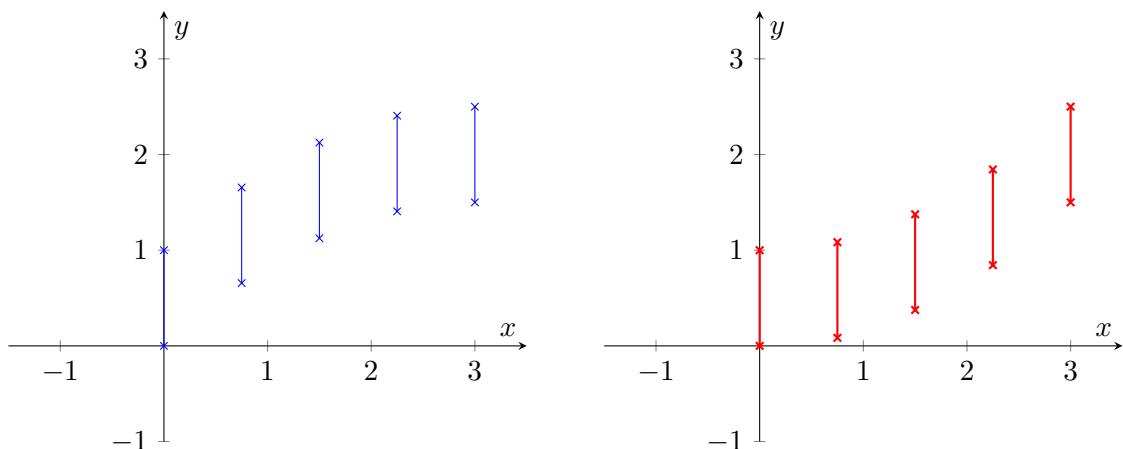


Figura 3.4: A sinistra: tracce uscenti dalla curva  $\mathbf{R}_0 = (0, p)$ ,  $p \in [0, 1]$  agli istanti di tempo  $t_0 = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$  osservate all'istante di tempo  $t = 1$ . A destra: traccia uscente dalla curva  $\mathbf{R}_0 = (0, p)$ ,  $p \in [0, 1]$  all'istante di tempo  $t_0 = 0$ , osservata ai tempi  $t_0 = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$

**Esercizio 3.2 — Linee di corrente, traiettorie e linee di fumo.** Sia dato il campo di moto

$$\mathbf{u}(x, y) = 2Ax\hat{\mathbf{x}} - 2Ay\hat{\mathbf{y}} \quad (3.52)$$

Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle. ■

### Soluzione

**Concetti.** Definizione di linee di corrente, traiettorie, linee di fumo, tracce. Soluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie (problemi di Cauchy, ai valori iniziali).

**Svolgimento.** Partendo dalle definizioni, si ricavano le equazioni delle curve caratteristiche.

- **Linee di corrente.** Dalla scrittura in componenti della definizione di linee di corrente si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \frac{dX}{dp} = \lambda(p)2AX \\ \frac{dY}{dp} = -\lambda(p)2AY \end{cases}, \quad (3.53)$$

risolvibile ad esempio ricavando  $\lambda(p) = \frac{X'(p)}{2AX(p)}$  dalla prima equazione e inserendolo nella seconda. Integrando tra  $p_0$  e  $p$ , dopo aver semplificato i fattori  $2A$ , si ottiene (derivare per credere)

$$0 = \int_{p_0}^p \left( \frac{X'(p')}{X(p')} + \frac{Y'(p')}{Y(p')} \right) dp' = \ln \frac{X(p)}{X(p_0)} + \ln \frac{Y(p)}{Y(p_0)} \quad (3.54)$$

$$\rightarrow X(p)Y(p) = X(p_0)Y(p_0) \quad (3.55)$$

Le linee di corrente appena ricavate sono delle iperboli equilatere con gli asintoti coincidenti con gli assi. Nel procedimento svolto, per poter dividere per  $X(p)$  e  $Y(p)$  dobbiamo imporre la condizione che  $X(p)$ ,  $Y(p)$  siano diversi da zero. Nella ricerca degli equilibri del sistema, si nota che

- il punto  $(x, y) = (0, 0)$  è l'unico punto di equilibrio del sistema, punto di ristagno del campo di velocità;
- gli assi coordinati coincidono con linee di corrente: la derivata  $dX/dp$  è nulla quando  $X = 0$  (se la parametrizzazione della curva è regolare, cioè  $\lambda(p) \neq 0$ ); la derivata  $dY/dp$  è nulla quando  $Y = 0$  (se la parametrizzazione della curva è regolare, cioè  $\lambda(p) \neq 0$ ). Nel primo caso, la linea di corrente coincide con l'asse  $y$ , avendo coordinata  $X = 0$  costante e coordinata  $Y(p)$  descritta dalla seconda equazione; nel secondo caso, la linea di corrente coincide con l'asse  $x$ , avendo coordinata  $Y = 0$  costante e coordinata  $X(p)$  descritta dalla prima equazione.

- **Traiettorie.**

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2Ax(t) \\ \frac{dy}{dt} = -2Ay(t) \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t; \mathbf{r}_0, t_0) = x_0 e^{2A(t-t_0)} \\ y(t; \mathbf{r}_0, t_0) = y_0 e^{-2A(t-t_0)} \end{cases} \quad (3.56)$$

### Osservazione.

Per ricavare la forma cartesiana dell'equazione delle traiettorie bisogna esplicitare il parametro  $t$  in funzione di una delle due coordinate e inserire la formula ottenuta nell'equazione delle altre componenti. In questo caso è possibile eliminare la dipendenza

da  $t$ , moltiplicando tra di loro le componenti delle traiettorie e ottenendo  $xy = x_0y_0$ : si osserva l'equazione delle traiettorie coincide con l'equazione delle linee di corrente per il campo di velocità considerato. Le linee di corrente coincidono con le linee di corrente e le linee di fumo nel caso in cui il **campo di velocità è stazionario**: in questo caso, il sistema differenziale con il quale si ricavano linee di corrente e linee di fumo è **autonomo**, cioè il termine forzante non dipende esplicitamente dal tempo. La soluzione di un problema differenziale di un sistema autonomo non dipende dal tempo  $t$  in sè, ma dalla differenza tra il tempo  $t$  e il tempo al quale viene imposta la condizione iniziale  $t_0$ : nella formula parametrica delle traiettorie,  $t$  e  $t_0$  compaiono sempre come differenza  $t - t_0$  e mai “in altre forme”, come ad esempio nell'esercizio precedente, nel quale il campo di moto non è stazionario. Per questo motivo si arriva alla stessa equazione in forma cartesiana per le traiettorie e le linee di fumo, dopo aver esplicitato rispettivamente  $t$  e  $t_0$  in funzione di una coordinata e aver inserito questa espressione nelle formule delle altre componenti.

- **Linee di fumo.** Da quanto riportato nel punto e nell'osservazione precedenti, è immediato ricavare sia la forma parametrica delle linee di fumo,

$$\begin{cases} x(t_0; t, \mathbf{r}_0) = x_0 e^{2A(t-t_0)} \\ y(t_0; t, \mathbf{r}_0) = y_0 e^{-2A(t-t_0)} \end{cases} \quad (3.57)$$

sia la forma cartesiana,  $xy = x_0y_0$ .

**Esercizio 3.3 — Linee di corrente, traiettorie, linee di fumo: non stazionario.** Sia dato il campo di moto

$$\mathbf{u}(x, y, z) = 3y\hat{x} - 3x\hat{y} + t\hat{z} \quad (3.58)$$

Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle. ■

**Suggerimento.** Le componenti  $x$  e  $y$  del sistema sono accoppiate tra di loro. Risolvendo il sistema per le **linee di corrente**,

$$\begin{cases} \frac{dX}{dp} = \lambda(p)3Y \\ \frac{dY}{dp} = -\lambda(p)3X \\ \frac{dZ}{dp} = \lambda(p)t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X(p)\frac{dX}{dp} + Y(p)\frac{dY}{dp} = 0 \\ \frac{dZ}{dP} = \lambda(p)t \end{cases} \quad (3.59)$$

Integrando la prima, si ottiene l'equazione di una circonferenza  $X(p)^2 + Y(p)^2 = R^2$  (con  $R^2 = X(p_0)^2 + Y(p_0)^2$ , descrivibile in forma parametrica come

$$\begin{cases} X(p) = R \cos(p) \\ Y(p) = R \sin(p) \end{cases} \quad (3.60)$$

Con la parametrizzazione scelta, è possibile ricavare la relazione  $\lambda(p) = -1/3$  e integrare l'equazione per la componente  $Z$ .

Per il calcolo dell'equazione che descrive le **traiettorie** delle particelle materiali e le **linee di fumo**, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3y(t) & x(t_0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = -3x(t) & y(t_0) = y_0 \\ \frac{dz}{dt} = t & z(t_0) = z_0 \end{cases} \quad (3.61)$$

ha la forma

$$\begin{cases} x(t, \mathbf{r}_0, t_0) = A \sin(3t) - B \cos(3t) \\ y(t, \mathbf{r}_0, t_0) = A \cos(3t) + B \sin(3t) \\ z(t, \mathbf{r}_0, t_0) = z_0 + \frac{t^2 - t_0^2}{2} \end{cases} \quad (3.62)$$

Le costanti di integrazione mancanti  $A$ ,  $B$  vengono calcolate imponendo le condizioni iniziali,

$$A = y_0 \cos(3t_0) + x_0 \sin(3t_0), \quad B = y_0 \sin(3t_0) - x_0 \cos(3t_0), \quad (3.63)$$

e la soluzione del problema in forma parametrica può essere riscritta come

$$\begin{cases} x(t, \mathbf{r}_0, t_0) = x_0 \cos(3(t - t_0)) + y_0 \sin(3(t - t_0)) \\ y(t, \mathbf{r}_0, t_0) = -x_0 \sin(3(t - t_0)) + y_0 \cos(3(t - t_0)) \\ z(t, \mathbf{r}_0, t_0) = z_0 + \frac{t^2 - t_0^2}{2} \end{cases} \quad (3.64)$$

**Esercizio 3.4 — Linee di corrente, traiettorie e linee di fumo: 3D.** Sia dato il campo di moto

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \hat{\mathbf{z}} \quad (3.65)$$

Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle. ▀

**Suggerimento.** Per risolvere l'esercizio in maniera semplice, si osservi che il campo di moto è stazionario e ha simmetria sferica: è quindi conveniente usare un sistema di coordinate sferiche.



## 4. Bilanci

In questo capitolo vengono introdotti i bilanci di alcune quantità meccaniche per un mezzo continuo. I bilanci in forma integrale permettono di descrivere l'evoluzione complessiva (integrale) di un sistema e vengono ricavati partendo da alcuni principi fondamentali della meccanica classica: la conservazione della massa, l'equazioni cardinali della dinamica, il primo principio della termodinamica o bilancio dell'energia. Vengono scritti prima per un volume materiale e poi per volumi di controllo o volumi in moto generico, utilizzando il teorema del trasporto di Reynolds.

Dai bilanci in forma integrale, sotto ipotesi di sufficiente regolarità dei campi, vengono poi ricavati i bilanci in forma differenziale, che permettono di descrivere l'evoluzione locale (puntuale) di un sistema. La forma lagrangiana del bilanci di massa, di quantità di moto e della vorticità verrà utilizzata per meglio apprezzare il significato del vincolo di incomprimibilità, il ruolo della pressione (e degli sforzi in generale) nella dinamica di un fluido e intuire l'influenza del campo di velocità sul campo di vorticità.

Successivamente, dai bilanci integrali vengono ricavate le relazioni di salto delle quantità meccaniche. Queste relazioni possono essere utilizzate per trovare determinare lo stato di un sistema formato da due sotto-sistemi, all'interno dei quali i campi sono regolari, ma che sono separati da una frontiera, attraverso la quale i campi non sono regolari: alcuni esempi di queste sono le superfici "di scorrimento" in fluidi non viscosi, attraverso le quali è discontinua la componente tangenziale della velocità, o le onde d'urto che possono formarsi in correnti comprimibili di fluidi non viscosi.

Infine, viene fornita una breve introduzione agli esercizi sui bilanci integrali, che costituisce una prima linea guida al loro svolgimento.

### 4.1 Bilanci in forma integrale

Vengono ricavati i bilanci integrali per un volume materiale  $V(t)$  partendo dai principi fondamentali della meccanica classica. Successivamente si ricavano i bilanci per un volumi in moto arbitrario  $v(t)$  e, come caso particolare, volumi di controllo  $V_c$ .

### 4.1.1 Bilancio di massa

La massa di un volume materiale è uguale all'integrale sul volume della densità  $\rho$ . Per il **principio di conservazione della massa**, la massa di un sistema chiuso (che non ha scambi di materia con l'esterno), come ad esempio un volume materiale  $V(t)$ , rimane costante e quindi la sua derivata nel tempo deve essere uguale a zero,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho = 0 . \quad (4.1)$$

### 4.1.2 Bilancio della quantità di moto

La quantità di moto di un volume materiale è uguale all'integrale sul volume della quantità di moto per unità di volume  $\rho\mathbf{u}$ , dove  $\mathbf{u}$  è la velocità delle particelle materiali. Per la **prima equazione cardinale della dinamica**, la derivata nel tempo della quantità di moto di un sistema è uguale alla risultante delle forze esterne agenti sul sistema,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho\mathbf{u} = \int_{V(t)} \mathbf{f} + \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n , \quad (4.2)$$

dove  $\int_{V(t)} \mathbf{f}$  rappresenta la risultante delle forze esterne di volume e  $\oint_{S(t)} \mathbf{t}_n$  la risultante delle forze esterne di superficie, avendo indicato con  $\mathbf{f}$  il campo di forze per unità di volume e  $\mathbf{t}_n$  il vettore sforzo agente sulla supreficie esterna  $S(t)$  del volume  $V(t)$ . Il teorema di Cauchy nella meccanica del continuo, permette di esprimere il vettore sforzo  $\mathbf{t}_n$  in funzione del tensore degli sforzi  $\mathbb{T}$  e la normale alla superficie  $\hat{\mathbf{n}}$ , come  $\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T}$ .

### 4.1.3 Bilancio del momento quantità di moto

Il momento della quantità di moto di un volume materiale è uguale all'integrale sul volume del momento della quantità di moto per unità di volume  $\rho\mathbf{r} \times \mathbf{u}$ , dove  $\mathbf{r}$  è il vettore che congiunge il polo con i punti del volume materiale. Per la **seconda equazione cardinale della dinamica**, la derivata nel tempo del momento della quantità di moto di un sistema, rispetto a un polo fisso, è uguale alla risultante momenti esterni sul sistema,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho\mathbf{r} \times \mathbf{u} = \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \oint_{S(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n , \quad (4.3)$$

nell'ipotesi che non ci siano momenti esterni per unità di volume e che il materiale non sia polare (due elementi di materiale adiacenti non si scambiano momenti ma solo forze).

### 4.1.4 Bilancio dell'energia totale

L'energia totale di un volume materiale è uguale all'integrale sul volume della sua energia interna per unità di volume  $\rho e$  e della sua energia cinetica per unità di volume  $\rho|\mathbf{u}|^2/2$ . Combinando il **primo principio della termodinamica** (che riguarda solo sistemi in equilibrio) con il **teorema dell'energia cinetica** (che non include il contributo di energia interna), la derivata nel tempo dell'energia totale del sistema di un sistema è uguale alla differenza tra la potenza delle forze agenti sul sistema e i flussi di calore uscenti da esso,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e^t = \int_{V(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{S(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \rho r , \quad (4.4)$$

avendo indicato con  $\mathbf{q}$  il flusso di calore uscente dal volume materiale  $V(t)$ , e con  $r$  l'intensità di una sorgente di calore per unità di massa  $r$ , distribuita all'interno del volume  $V(t)$ , come ad esempio il calore rilasciato da una reazione chimica come la combustione.

#### 4.1.5 Bilanci integrali per volumi in moto arbitrario

Utilizzando il teorema del trasporto di Reynolds, è possibile esprimere la derivata nel tempo dell'integrale di un campo  $f$  su un volume materiale  $V(t)$  come somma della derivata nel tempo dell'integrale dello stesso campo  $f$  su un volume arbitrario  $v(t)$  e al flusso della quantità  $f$  attraverso la frontiera  $s(t) = \partial v(t)$  di  $v(t)$ , dovuto alla velocità relativa  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  tra le particelle materiali e la superficie  $s(t)$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f = \frac{d}{dt} \int_{v(t) \equiv V(t)} f + \oint_{s(t) \equiv S(t)} f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} . \quad (4.5)$$

I bilanci integrali riferiti a un volume arbitrario  $v(t)$ , la cui superficie  $s(t)$  si muove con velocità  $\mathbf{v}$ , risultano

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho + \oint_{s(t)} \rho(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{u} + \oint_{s(t)} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{f} + \oint_{s(t)} \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} + \oint_{s(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \oint_{s(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t + \oint_{s(t)} \rho e^t (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{s(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \rho r . \end{cases} \quad (4.6)$$

#### 4.1.6 Bilanci integrali per volumi di controllo fissi

Come caso particolare dei bilanci integrali riferiti a un volume arbitrario  $v(t)$ , i bilanci integrali riferiti a un volume di controllo fisso  $V_c$  risultano

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho + \oint_{S_c} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \mathbf{u} + \oint_{S_c} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V_c} \mathbf{f} + \oint_{S_c} \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} + \oint_{S_c} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V_c} \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \oint_{S_c} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho e^t + \oint_{S_c} \rho e^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V_c} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{S_c} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{S_c} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \rho r . \end{cases} \quad (4.7)$$

## 4.2 Bilanci in forma differenziale

Sotto le ipotesi di sufficiente regolarità dei campi che compaiono negli integrali di superficie, è possibile trasformare gli integrali di superficie in integrali di volume, applicando il teorema della divergenza o il lemma del teorema di Green

$$\oint_S f n_i = \int_V f_{/i} , \quad (4.8)$$

avendo indicato con  $f_{/i}$  la derivata parziale rispetto alla coordinata cartesiana  $x_i$  e con  $n_i$  la proiezione lungo  $x_i$  della normale uscente dalla superficie  $S = \partial V$ . Una volta scritti tutti i termini come integrali di volume, sullo stesso volume  $V$ , è possibile sfruttare l'arbitrarietà del volume  $V$  per ricavare i bilanci in forma differenziale. In questa sezione, si partirà dai bilanci in forma integrale scritti per un volume di controllo fisso  $V = V_c$ , per il quale vale

$$\frac{d}{dt} \int_V f = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} , \quad (4.9)$$

secondo il teorema del trasporto di Reynolds.

#### 4.2.1 Bilancio di massa

Usando il teorema del trasporto di Reynolds per volumi di controllo fissi e applicando il teorema della divergenza al termine di flusso, si può scrivere

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho + \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] = 0 . \quad (4.10)$$

Sfruttando l'arbitrarietà del bilancio integrale dal volume considerato e imponendo che l'integrandanda sia nulla, si ricava la *forma conservativa* del bilancio differenziale di massa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (4.11)$$

Sviluppando la divergenza  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho$ , e riconoscendo l'espressione della derivata materiale, si ottiene la *forma convettiva* del bilancio differenziale di massa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Il vincolo cinematico di incomprimibilità  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  equivale al vincolo “fisico” che impone che la densità delle singole particelle materiali rimanga costante,  $D\rho/Dt = 0$ .

#### 4.2.2 Bilancio di quantità di moto

È possibile trasformare in un integrale di volume la risultante degli sforzi di superficie, utilizzando il teorema di Cauchy per i mezzi continui,

$$\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T} , \quad t_i = n_j T_{ji} , \quad (4.13)$$

dove  $\mathbf{t}_n$  è il vettore sforzo,  $\hat{\mathbf{n}}$  la normale alla superficie e  $\mathbb{T}$  il tensore degli sforzi. La risultante degli sforzi di superficie diventa, usando un po' di libertà nel passare dalla notazione astratta a quella indiciale,

$$\oint_S \mathbf{t}_n = \oint_S t_i = \oint_S n_j T_{ji} = \int_V T_{ji/j} = \int_V \nabla \cdot \mathbb{T} . \quad (4.14)$$

Usando il teorema del trasporto di Reynolds per volumi di controllo fissi e applicando il teorema della divergenza al termine di flusso,

$$\oint_S \{\rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}\}_i = \oint_S \rho u_i u_j n_j = \int_V (\rho u_i u_j)_{/j} = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) , \quad (4.15)$$

si può scrivere il bilancio di quantità di moto

$$\int_V \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \int_V \nabla \cdot (\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \int_V [\mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbb{T}] . \quad (4.16)$$

Sfruttando l'arbitrarietà del bilancio integrale dal volume considerato e imponendo che l'integrandina sia nulla, si ricava la *forma conservativa* del bilancio differenziale di quantità di moto,

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbb{T}) = \mathbf{f} . \quad (4.17)$$

Sviluppando i termini

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} &= \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} , \quad \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \nabla \cdot (\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) , \quad (\rho u_i u_j)_{/j} = \rho u_j u_{i/j} + u_i (\rho u_j)_{/j} , \end{aligned} \quad (4.18)$$

riconoscendo che  $\mathbf{u} \cdot (\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})) = 0$  come conseguenza della conservazione della massa, si ottiene la *forma convettiva* dell'equazione della quantità di moto

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbb{T} \\ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbb{T} . \end{aligned} \quad (4.19)$$

#### 4.2.3 Bilancio del momento della quantità di moto

Il bilancio del momento della quantità di moto per un mezzo continuo non polare è equivalente alla condizione di simmetria del tensore degli sforzi

$$\mathbb{T}^T = \mathbb{T} , \quad T_{ij} = T_{ji} . \quad (4.20)$$

#### 4.2.4 Bilancio dell'energia totale

Usando un po' di libertà nel passare dalla notazione astratta a quella indiciale, la potenza degli sforzi di superficie diventa

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} &= \oint_S t_i u_i = \oint_S n_j T_{ji} u_i = \int_V (T_{ji} u_i)_{/j} = \int_V \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) \\ &= \int_V (T_{ij/j} u_i + T_{ij} u_{j/i}) = \int_V ((\nabla \cdot \mathbb{T}) \cdot \mathbf{u} + \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u}) , \end{aligned} \quad (4.21)$$

avendo utilizzato la simmetria del tensore degli sforzi,  $T_{ij/j} = \{\nabla \cdot \mathbb{T}^T\}_i = \{\nabla \cdot \mathbb{T}\}_i$ . Applicando il teorema della divergenza, il termine di flusso di calore viene scritto come

$$\oint_S \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} . \quad (4.22)$$

La *forma conservativa* del bilancio differenziale di energia totale diventa quindi

$$\frac{\partial(\rho e^t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e^t \mathbf{u} - \mathbb{T} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{q}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \rho r . \quad (4.23)$$

Sviluppando la derivata temporale e il termine  $\nabla \cdot (\rho e^t \mathbf{u}) = \rho \mathbf{u} \cdot \nabla e^t + e^t \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$ , riconoscendo che  $e^t(\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})) = 0$  come conseguenza della conservazione della massa, si ottiene la *forma convettiva* dell'equazione dell'energia totale,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial e^t}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla e^t &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \\ \rho \frac{De^t}{Dt} &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r . \end{aligned} \quad (4.24)$$

#### 4.2.5 Chiusura del problema

Affinché il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali formato dai bilanci di massa, quantità di moto ed energia totale, con le condizioni iniziali e al contorno adeguate, sono necessarie l'equazione di stato del materiale che ne descriva le proprietà termodinamiche<sup>1</sup> e i legami costitutivi che esprimano il tensore degli sforzi e il flusso di calore come funzioni dello stato dinamico e termodinamico del sistema. Per un fluido, il tensore degli sforzi viscosi  $\mathbb{T}$  può essere scritto come la somma del contributo idrostatico dovuto alla pressione  $p$  e il tensore degli sforzi viscosi  $\mathbb{S}$ , funzione delle derivate spaziali del campo di velocità. Un fluido che ha un *legame costitutivo lineare* tra il tensore degli sforzi viscosi e il gradiente di velocità  $\nabla \mathbf{u}$ , viene definito **fluido newtoniano**. Per un fluido newtoniano isotropo, il legame costitutivo che definisce il tensore degli sforzi è

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbb{I} , \quad (4.25)$$

dove  $\mu$  e  $\lambda$  sono rispettivamente il coefficiente di viscosità dinamica e il secondo coefficiente di viscosità,  $p$  è la pressione (“termodinamica”),  $\mathbb{D}$  il tensore velocità di deformazione. In generale, sia la pressione  $p$  sia i coefficienti di viscosità dipendono dallo stato termodinamico del sistema.

Il flusso di calore  $\mathbf{q}$  per conduzione può essere descritto dalla **legge di Fourier**, che lo mette in relazione con il gradiente della temperatura tramite il coefficiente di conduzione termica  $k$ , in generale funzione dello stato termodinamico del sistema,

$$\mathbf{q} = -k\nabla T . \quad (4.26)$$

L'introduzione di queste leggi costitutive nelle equazioni di bilancio, aggiunge nuove incognite al sistema, per le quali non abbiamo ricavato un'equazione dinamica. Sono quindi indispensabili la legge di stato che fornisca le relazioni necessarie,

$$\begin{aligned} p &= p(\rho, e) , \quad \mu = \mu(\rho, e) \\ T &= T(\rho, e) , \quad \lambda = \lambda(\rho, e) \\ k &= k(\rho, e) , \end{aligned} \quad (4.27)$$

avendo scelto le variabili termodinamiche delle quali è nota l'equazione dinamica come due variabili termodinamiche indipendenti: la densità  $\rho$  e l'energia interna  $e$ . Ve

<sup>1</sup>Si ricorda che lo stato termodinamico di un sistema monofase è definito da due variabili termodinamiche indipendenti.

### 4.2.6 Altre equazioni di bilancio

Combinando i bilanci delle quantità meccaniche ottenuti partendo dai principi fondamentali della fisica, si possono ottenere le equazioni di bilanci di altre quantità, come ad esempio l'energia cinetica  $\rho|\mathbf{u}|^2/2$ , l'energia interna  $e$ , e la vorticità  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ .

#### Equazione dell'energia cinetica

Moltiplicando scalarmente il bilancio della quantità di moto per il vettore velocità  $\mathbf{u}$ , si può scrivere l'equazione di bilancio dell'energia cinetica. In forma conservativa,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho|\mathbf{u}|^2}{2} + \nabla \cdot \left( \rho \mathbf{u} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T}) , \quad (4.28)$$

in forma convettiva,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T}) \\ \rho \frac{D}{Dt} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T}) . \end{aligned} \quad (4.29)$$

#### Equazione dell'energia interna

Dalla differenza del bilancio dell'energia totale e dell'energia cinetica, si ottiene il bilancio dell'energia interna. In forma conservativa,

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u}) = \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r , \quad (4.30)$$

in forma convettiva,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla e &= \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \\ \rho \frac{De}{Dt} &= \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r . \end{aligned} \quad (4.31)$$

#### Equazione della vorticità

Applicando l'operatore di rotore al bilancio della quantità di moto, si ottiene l'equazione dinamica della vorticità. Per un fluido newtoniano (con coefficienti di viscosità costanti e uniformi),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \\ \frac{D \boldsymbol{\omega}}{Dt} &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} , \end{aligned} \quad (4.32)$$

dove è stata introdotta la viscosità cinematica del fluido,  $\nu = \mu/\rho$ .

### Equazione dell'entropia

Nell'ipotesi di equilibrio termodinamico delle singole particelle materiali<sup>2</sup> si può ricavare dal primo principio della termodinamica,

$$de = Tds - Pdv = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho , \quad (4.33)$$

l'equazione di bilancio dell'entropia in forma convettiva,

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \quad \rightarrow \quad \rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} \left( \rho \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right) . \quad (4.34)$$

Utilizzando il bilancio dell'energia interna e il bilancio di massa, si può scrivere

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} (\mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r + p \nabla \cdot \mathbf{u}) , \quad (4.35)$$

e separando i contributi viscosi da quelli di presione nel tensore degli sforzi,  $\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{S}$ ,<sup>3</sup>

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} (\mathbb{S} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r) . \quad (4.36)$$

Nel caso di fluidi newtoniani,  $\mathbb{S} = 2\mu\mathbb{D} + \lambda\nabla \cdot \mathbf{u}\mathbb{I}$ , l'equazione dell'entropia in forma differenziale convettiva diventa

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} \left( 2\mu\mathbb{D} : \mathbb{D} + \lambda|\nabla \cdot \mathbf{u}|^2 - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \right) . \quad (4.37)$$

Utilizzando la legge di Fourier,  $\mathbf{q} = -k\nabla T$ , per il flusso di calore per conduzione, si può riscrivere il termine di divergenza del flusso di calore,

$$\frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T^2} = \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) - k \nabla T \cdot \frac{\nabla T}{T^2} = \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) - k \frac{|\nabla T|^2}{T^2} , \quad (4.38)$$

e quindi riscrivere l'equazione dell'entropia, in forma conservativa e convettiva,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{u}) &= \frac{1}{T} \left( 2\mu\mathbb{D} : \mathbb{D} + \lambda|\nabla \cdot \mathbf{u}|^2 \right) + k \frac{|\nabla T|^2}{T^2} - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \frac{\rho r}{T} \\ \rho \frac{Ds}{Dt} &= \frac{1}{T} \left( 2\mu\mathbb{D} : \mathbb{D} + \lambda|\nabla \cdot \mathbf{u}|^2 \right) + k \frac{|\nabla T|^2}{T^2} - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \frac{\rho r}{T} . \end{aligned} \quad (4.39)$$

In questa equazione si riconoscono tutti i fenomeni fisici che influenzano l'entropia di una particella materiale. Si possono distinguere i contributi dovuti alla *non idealità* del fluido considerato, legati ai fenomeni viscosi e di conduzione del calore, e i contributi dovuti ai flussi di calore forniti alla sistema. I fenomeni viscosi e i processi di conduzione del calore fanno aumentare l'entropia, poiché

$$T, \mu, \lambda, k \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{D} : \mathbb{D}, |\nabla \cdot \mathbf{u}|, |\nabla T| \geq 0 . \quad (4.40)$$

<sup>2</sup>Se i tempi caratteristici della termodinamica sono di gran lunga inferiori al tempo caratteristico del fenomeno fluidodinamico, si può immaginare che la singola particella fluida sia in continuo stato di equilibrio termodinamico locale. Si possono quindi estendere i risultati della Termodinamica, che in generale studia sistemi in equilibrio, alla singola particella fluida.

<sup>3</sup>Dovrebbe essere facile dimostrare che  $\mathbb{I} : \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}$ .

Gli ultimi due termini rappresentano i flussi di calore forniti al sistema e si presentano nella forma  $Q/T$ , flusso di calore diviso la temperatura della particella, coerentemente con la definizione dell'entropia in Termodinamica,

$$dS = \frac{\delta Q}{T} . \quad (4.41)$$

Questi due termini possono dare un contributo positivo o negativo, a seconda del segno della sorgente di calore  $r$  e del flusso di valore  $\mathbf{q}$ .

Il bilancio dell'entropia in forma integrale per un volume materiale,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho s = \int_{V(t)} \frac{1}{T} \left( 2\mu \mathbb{D} : \mathbb{D} + \lambda |\nabla \cdot \mathbf{u}|^2 + k \frac{|\nabla T|^2}{T} \right) - \oint_{\partial V(t)} \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \frac{\rho r}{T} , \quad (4.42)$$

permette di interpretare il ruolo dei fenomeni non ideali (viscosità e conduzione del calore) come sorgente di volume sempre positiva dell'entropia, riconoscere il ruolo della sorgente (o pozzo) di entropia di intensità per unità di massa  $r/T$  svolto da una sorgente di calore per unità di massa  $r$ , e il ruolo di flusso di entropia  $\mathbf{q}/T$  attraverso il contorno del volume  $V(t)$  svolto da un flusso di calore  $\mathbf{q}$ .

### 4.3 Relazioni di salto

Si ricavano le condizioni di salto di velocità e sforzo in corrispondenza di superfici di interfaccia. Si sottolinea che queste superfici possono essere superfici introdotte dalla modellazione del problema, come ad esempio la superficie di separazione tra due fluidi all'interno della quale in generale agisce una tensione superficiale o una superficie di discontinuità tangenziale nel caso di fluido non viscoso, oppure superfici fittizie.

Si parte dai bilanci in forma integrale scritti per un volume in moto arbitrario. I bilanci di massa e quantità di moto del volume in moto arbitrario si ottengono dalle regole di derivazione su domini mobili delle funzioni  $f = \rho$  e  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{u}$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dV = \frac{d}{dt} \int_{v(t)=V(t)} f dv + \oint_{\partial v(t)=\partial V(t)} f(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad (4.43)$$

dove  $\mathbf{u}$  è la velocità del fluido,  $\mathbf{w}$  è la velocità della superficie di discontinuità.

Il bilancio integrale viene fatto su un elemento di volume infinitesimo, “allungato” nelle direzioni della superficie. Quando il volume dell'elemento infinitesimo tende a zero, tende a zero più velocemente dei contributi sulle superfici parallele alla superficie di salto.

L'elemento di volume  $dv$  è il parallelepipedo di superfici laterali  $dS$ , paralleli alla superficie, e basi  $dh$  perpendicolari alla superficie. Se si ipotizza che le superfici  $dh \ll dS$  i contributi nei bilanci dei termini agenti sulle superfici  $dh$  (tranne che nel caso della tensione superficiale, che ha le dimensioni di uno sforzo per una lunghezza) sono trascurabili.

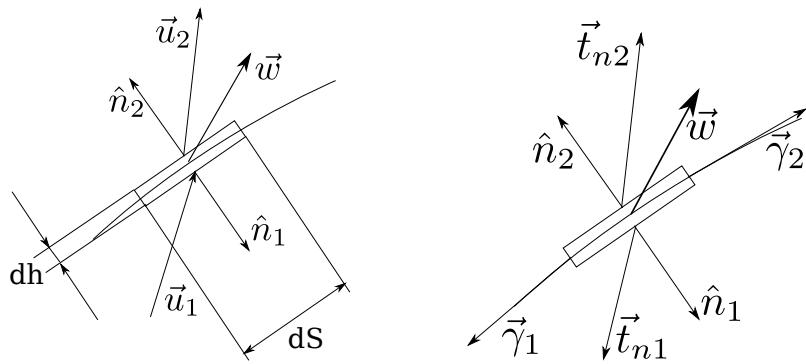
#### 4.3.1 Bilancio di massa

Il bilancio di massa per il volume  $dv$  in moto con velocità  $\mathbf{w}$  è

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho + \oint_{\partial v} \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (4.44)$$

Trascurando i contributi di volume e quelli delle superfici  $dh$

$$\rho_1(\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS + \rho_2(\mathbf{u}_2 - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS = 0 \quad (4.45)$$



(a) Definizione delle velocità ai due lati dell'elemento infinitesimo e delle dimensioni dello stesso. La velocità della superficie è indicata con  $\mathbf{w}$ .

(b) Definizione degli sforzi e della tensione superficiale agenti sull'elemento infinitesimo della superficie.

dove le normali  $\hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{\mathbf{n}}$  e  $\hat{\mathbf{n}}_2 = -\hat{\mathbf{n}}$  sono opposte. La quantità tra parentesi è la velocità relativa del fluido rispetto alla superficie. Si definisce quindi il flusso di massa  $m$  attraverso la superficie.

$$\begin{aligned} -m &= \rho_1(\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho_2(\mathbf{u}_2 - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ &= \rho_1 \mathbf{u}_{r1} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho_2 \mathbf{u}_{r2} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Nel caso di densità uniforme  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  si “conservano” le componenti normali della velocità relativa e della velocità.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{r1} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \mathbf{u}_{r2} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{u}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \mathbf{u}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (4.47)$$

### 4.3.2 Bilancio di quantità di moto

Il bilancio della quantità di moto per l'elemento  $dv$  è

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial v} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{\partial v} \mathbf{t}_n + \int_v \rho \mathbf{g} + \int_l \gamma \quad (4.48)$$

avendo incluso anche eventuali termini di tensione superficiale, svolto sulla curva che separa tre sostanze (come ad esempio il “perimetro” del menisco visto nell'esercizio sul capillare: in quel caso la curva  $l$  separa il liquido, dall'aria, dalle pareti solide del capillare). Trascurando i termini di volume, il bilancio per l'elemento infinitesimo (per semplicità pensato in 2 dimensioni) è

$$\rho_1 \mathbf{u}_1 (\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 ds + \rho_2 \mathbf{u}_2 (\mathbf{u}_2 - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 ds = \mathbf{t}_{n1} ds + \gamma_1 + \mathbf{t}_{n2} ds + \gamma_2 \quad (4.49)$$

con  $\gamma_1 = \gamma \hat{\mathbf{t}}_1$ ,  $\gamma_2 = (\gamma + \gamma_s ds) \hat{\mathbf{t}}_2$ . I versori tangentini  $\hat{\mathbf{t}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{t}}_2$  agli estremi dell'elementino di superficie non sono allineati a causa della curvatura della superficie (si rimanda alla “dimostrazione” della legge di Young-Laplace). Si tiene conto di una possibile variazione della tensione superficiale. Questa di solito può essere dovuta a differenze di temperatura o composizioni chimiche (perchè si usa il sapone per lavarsi le mani?): si rimanda al simpatico (?) video delle barchette sul fondo del documento della dimostrazione della legge di Young-Laplace, nel quale viene usata una “propulsione a effetto Marangoni” per barchette di carta. Il contributo della tensione superficiale si può scrivere come

$$\gamma_2 + \gamma_1 = (2\gamma H \hat{\mathbf{n}} + \nabla \gamma) ds \quad (4.50)$$

dove

- $H$  è la curvatura media  $H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$  nel caso tridimensionale, che nel caso bidimensionale coincide con  $\frac{1}{2R}$  (uno dei due raggi di curvatura diventa infinito).
- $\hat{\mathbf{n}}$  è il vettore normale che punta verso i centri di curvatura.
- $\nabla_2$  è il gradiente ristretto alla superficie, tangente ad essa.

Ricordando la definizione di  $m$  e inserendola nel bilancio

$$m(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \mathbf{t}_{n1} + \mathbf{t}_{n2} + 2\gamma H \hat{\mathbf{n}} + \nabla_2 \gamma \quad (4.51)$$

Si analizzano ora alcuni casi particolari:

- Statica con tensione superficiale. La velocità è nulla ovunque, i vettori di sforzo hanno solo il contributo della pressione  $\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}}$ . Secondo queste ipotesi, non si possono avere contributi tangenziali nemmeno a causa della tensione superficiale e quindi  $\gamma$  deve essere uniforme sulla superficie. Nel caso bidimensionale si ricorda che la normale  $\hat{\mathbf{n}}$  punta verso il centro del cerchio osculatore e coincide quindi con la normale  $\hat{\mathbf{n}}_1$  dell'immagine e il raggio di curvatura  $R$  è positivo. Il bilancio della quantità di moto si riduce all'equilibrio statico della superficie

$$p_1 - p_2 = \frac{\gamma}{R} \quad (4.52)$$

Si osserva quindi che la pressione “interna”  $p_1$  deve essere maggiore di  $p_2$ .

- Fluido inviscido, superficie senza tensione superficiale. Il bilancio si riduce a

$$m(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = -(p_1 - p_2)\hat{\mathbf{n}} \quad (4.53)$$

- Fluido inviscido, superficie senza tensione superficiale, densità uniforme. Si è visto come la velocità (e le velocità relative) normali alla superficie devono essere uguali da entrambe le parti della superficie. Se si ipotizza che la superficie non sia attraversata da flusso di massa (si impone che la componente normale della velocità relativa sia nulla, non la velocità relativa nel suo complesso). In questo caso non è possibile trovare una relazione di salto per la velocità tangenziale (o almeno questo non è possibile se non si aggiungono altre ipotesi o altre equazioni ... vedremo un caso semplificato applicando il teorema di Bernoulli a un problema aerodinamico bidimensionale stazionario ...): poiché  $m = 0$  la superficie è “scarica” (capiterà nei prossimi corsi di sentir parlare o aver direttamente a che fare con “l'ipotesi di scia scarica”: questa non dovrà quindi essere una novità o una sorpresa in futuro)

$$p_1 = p_2 \quad (4.54)$$

ma non si riesce a ricavare nessuna informazione dalla componente tangenziale dell'equazione poiché è un'identità  $0 = 0$  a prescindere dal valore di  $(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \hat{\mathbf{t}}$ . Attraverso tale superficie (di spessore nullo) ci può essere un salto finito di velocità tangenziale: in questo caso la superficie è una superficie di vorticità infinita

L'ultimo caso particolare verrà utilizzato in qualche esercizio in cui un dominio occupato da un fluido può essere suddiviso in un sottodomino nel quale è valido il teorema di Bernoulli (in qualche forma ...) e in un sottodomino dove sono valide le relazioni della statica: le condizioni di salto serviranno a far comunicare tra di loro i due sottodomini (e a risolvere correttamente l'esercizio).

### 4.3.3 Bilancio di energia

Non verrà detto nulla sulle relazioni di salto delle altre quantità ...

#### 4.4 Approfondimenti su alcuni bilanci

In questa sezione vengono analizzate alcune equazioni di bilancio in forma differenziale (è quindi necessario che queste equazioni siano valide!): vengono usate sia la rappresentazione euleriana sia la rappresentazione lagrangiana, al fine di ottenere la migliore comprensione dei fenomeni fisici coinvolti.

Si indicano con  $\mathbf{x}_0$  le coordinate lagrangiane, solidali con il continuo; si indicano con  $\mathbf{x}$  le coordinate euleriane. I due sistemi di coordinate sono legati tra di loro dalle relazioni

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) \\ \frac{D\mathbf{x}}{Dt} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{u}\end{aligned}\tag{4.55}$$

La derivata  $\partial/\partial t$  indica la derivata temporale fatta a coordinata euleriana  $\mathbf{x}$  costante. La derivata materiale  $D/Dt$  indica la derivata fatta "a coordinata lagrangiana" costante e rappresenta quindi la variazione temporale di una quantità legata alla particella materiale, che si muove come il continuo, per la definizione di coordinate materiali.

Il legame tra  $D/Dt$  e  $\partial/\partial t$  si trova utilizzando le regole di derivazione per funzioni composte. Scrivendo la funzione generica  $f$  come

$$f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) = f_0(\mathbf{x}_0, t) = f_0(\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t), t),\tag{4.56}$$

si ottiene

$$\frac{D}{Dt} f = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_t = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f.\tag{4.57}$$

##### 4.4.1 Continuità

L'equazione di continuità può essere riscritta mettendo in evidenza la derivata materiale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}\tag{4.58}$$

È possibile dimostrare<sup>4</sup> la relazione  $DJ/Dt = J\nabla \cdot \mathbf{u}$ , dove  $J$  indica il determinante del gradiente  $\partial \mathbf{x}/\partial \mathbf{x}_0$ , si può scrivere l'equazione in coordinate lagrangiane, dopo averla moltiplicata per  $J$  ( $\neq 0$ )

$$J \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{DJ}{Dt} \Rightarrow \frac{D(J\rho)}{Dt} = 0 \Rightarrow J\rho = \rho_0\tag{4.59}$$

La variazione della densità di una particella materiale è legata alla variazione del volume della stessa (ricordare che  $dv = JdV$ ). Questa conclusione è ragionevole se si pensa che la massa della particella materiale si conserva ( $dm = \rho dv = \rho_0 dV$ ).

**R** Il vincolo di incomprimibilità rappresenta la costanza del volume della particella materiale. Il volume  $dv$  coincide con il volume di riferimento  $dV$ , implicando  $J \equiv 1$  e quindi  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ .

<sup>4</sup>I più curiosi, cerchino "formula di Jacobi".

#### 4.4.2 Quantità di moto

L'equazione della quantità di moto è

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right\} = \nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f} \quad (4.60)$$

dove con  $\mathbb{T}$  è stato indicato il tensore degli sforzi, che per un fluido newtoniano è  $\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{S}$  con  $\mathbb{S} = 2\mu\mathbb{D} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbb{I}$  e  $\mathbb{D} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}]$  il tensore velocità di deformazione, parte simmetrica del gradiente della velocità. Introducendo la derivata materiale, si ritrova una forma "familiare" del secondo principio della dinamica

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \rho \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f} \quad (4.61)$$

#### Richiami di geometria delle curve nello spazio.

Una curva è un luogo di punti che può essere parametrizzato tramite un parametro solo. La parametrizzazione  $\mathbf{r}(t)$  della curva  $\mathbf{r}$  è definita regolare se  $d\mathbf{r}/dt \neq 0$ . Si definisce poi una parametrizzazione regolare particolare, l'ascissa curvilinea  $s$  tale per cui  $|d\mathbf{r}(s)/ds| = 1, \forall s \in (a, b)$ .

Nel seguito si introduce brevemente la **terna di Frenet**  $\{\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}}\}$ , formata dai versori tangente, normale e binormale, in funzione dell'ascissa curvilinea. Si dimostra che

$$\hat{\mathbf{t}}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (4.62)$$

La derivata seconda della posizione  $\mathbf{r}$ , cioè la derivata prima del versore tangente  $\hat{\mathbf{t}}$  è legata al versore normale  $\hat{\mathbf{n}}$ , tramite la curvatura  $k = \left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right|$ .

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}}{\left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right|} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = k\hat{\mathbf{n}} \quad (4.63)$$

Il versore binormale è definito a completare la terna ortonormale destrorsa

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (4.64)$$

Per completezza e senza troppo sforzo si calcolano anche le derivate di tali versori, ricordando che hanno modulo unitario e costante, e formano una terna ortogonale in ogni punto, introducendo la definizione della torsione  $\tau = \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} \cdot \hat{\mathbf{b}}$ .

$$\begin{aligned} & \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = k\hat{\mathbf{n}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{t}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = \tau \end{array} \right. & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{t}} = -k \\ \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = \tau \end{array} \right. & \Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = -k\hat{\mathbf{t}} + \tau\hat{\mathbf{b}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0 \\ \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{t}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0 \\ \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0 \end{array} \right. & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0 \\ \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{t}} = -\hat{\mathbf{t}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0 \\ \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = -k \end{array} \right. & \Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\tau\hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (4.65)$$

Se la parametrizzazione regolare della curva non è l'ascissa curvilinea, si può ricavare

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = v\hat{\mathbf{t}} \quad (4.66)$$

dove si è introdotto il modulo  $v$  di quella che sarà la velocità  $\mathbf{v}$  quando  $\mathbf{r}$  e  $t$  saranno spazio e tempo. In maniera analoga

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = v k \hat{\mathbf{n}} \quad (4.67)$$

Se  $\mathbf{r}$  e  $t$  sono spazio e tempo, la velocità e l'accelerazione di un punto che ha come legge oraria  $\mathbf{r}(t)$  sono

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = v \hat{\mathbf{t}} \\ \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{t}} + v \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{t}} + v^2 k \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (4.68)$$

#### Ritorno al bilancio della quantità di moto.

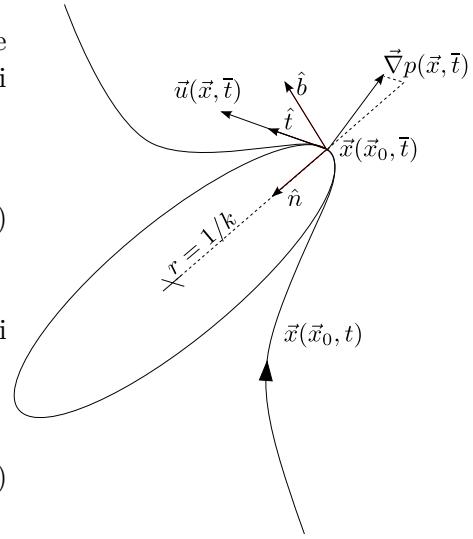
Inserendo la forma dell'accelerazione nell'equazione della quantità di moto e proiettando lungo i versori della terna di Frenet

$$\begin{cases} \rho \frac{dv}{dt} = \hat{\mathbf{t}} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f}) \\ \rho v^2 k = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f}) \\ 0 = \hat{\mathbf{b}} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f}) \end{cases} \quad (4.69)$$

In assenza di forze di volume ( $\mathbf{f} = 0$ ) e sforzi viscosi ( $\mathbb{T} = \mathbb{S} - p\mathbb{I} = -p\mathbb{I}$ ):

$$\begin{cases} \rho \frac{dv}{dt} = -\hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla p \\ \rho v^2 k = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla p \\ 0 = -\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla p \end{cases} \quad (4.70)$$

Un'analisi della componente normale permette di ricavare, **sotto le ipotesi fatte**, il legame tra la curvatura delle traiettorie delle particelle fluide e il gradiente del campo di pressione. Il termine a sinistra dell'uguale è positivo poiché prodotto di quantità positive: la curvatura di una linea è non negativa per come è definita, la densità è positiva, il modulo di un vettore è anch'esso non negativo. Il prodotto scalare tra la normale e il gradiente della pressione (derivata direzionale della pressione in direzione  $\hat{\mathbf{n}}$ ) deve quindi essere negativo. La pressione quindi diminuisce, andando verso il centro del cerchio osculatore. Sempre dalla seconda equazione è immediato notare che il legame tra la curvatura della traiettoria è proporzionale alla componente del gradiente di pressione lungo il versore normale. La componente tangente fa aumentare il modulo della velocità, mentre la componente binormale deve essere nulla.



#### 4.4.3 Vorticità

L'equazione della vorticità in coordinate euleriane è

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (4.71)$$

Se viene fatta l'ipotesi di viscosità nulla, il termine contenente il laplaciano della vorticità non compare nell'equazione: questo termine è il responsabile della diffusione (isotropa per come è scritto) della vorticità.

L'equazione può essere quindi riscritta come:

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (4.72)$$

Scritta in componenti

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = \omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (4.73)$$

Il termine di destra può essere riscritto come

$$\begin{aligned} \omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} &= \omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_{0l}} \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} = & \left( u_i = \frac{Dx_i}{Dt} \right) \\ &= \omega_k \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \right) \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Vale la relazione

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} = \delta_{ik} \quad (4.75)$$

Il termine di sinistra può essere riscritto come

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = \frac{D}{Dt} (\delta_{ik} \omega_k) = \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \omega_k \right) \quad (4.76)$$

Inserendo nell'equazione della vorticità e sfruttando le proprietà della derivata del prodotto:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \omega_k \right) - \omega_k \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \right) \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} &= 0 \\ \frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \omega_k \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.77)$$

Se la trasformazione non è singolare, risulta quindi

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \omega_k \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \omega_k = \omega_{l0} \quad (4.78)$$

e in conclusione, invertendo il gradiente della trasformazione delle coordinate

$$\omega_k = \frac{\partial x_k}{\partial x_{0l}} \omega_{l0} \quad , \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \boldsymbol{\omega}_0 \quad (4.79)$$

Si può quindi notare che la vorticità segue la stessa evoluzione di un segmento infinitesimo materiale, per il quale vale:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} d\mathbf{x}_0 \quad (4.80)$$

## 4.5 Introduzione agli esercizi

I bilanci integrali consentono di valutare le azioni integrali (forze, momenti, potenza) scambiati tra un fluido e un corpo a contatto con esso, senza conoscere nel dettaglio il campo di moto del fluido di interesse, ma valutando il flusso netto delle quantità meccaniche di interesse (massa, quantità di moto, momento della quantità di moto, energia, entalpia e calore) attraverso la superficie di contorno del volume fluido di interesse. Il contorno del dominio fluido  $v(t)$  viene suddiviso nella parte a contatto con il corpo di interesse  $s_{f,s}(t)$  e nella parte rimanente  $s_{f,free}(t) = \partial v(t) \setminus s_{f,s}(t)$ .

### Bilancio della quantità di moto e risultante delle forze.

La risultante delle forze agenti sul corpo<sup>5</sup> sarà uguale all'integrale del vettore sforzo agente sulla superficie  $s_{s,f}(t)$ ,

$$\mathbf{R}^s = \oint_{s_{s,f}(t)} \mathbf{t}_{n,s} , \quad (4.81)$$

avendo indicato con  $s_{s,f}(t)$  la superficie del solido con normale uscente dalla superficie solida ed entrante nel solido e con  $\mathbf{t}_{n,s}$  il vettore sforzo agente sul solido, uguale e contrario allo sforzo agente sul fluido nello stesso punto,  $\mathbf{t}_{n,s} = -\mathbf{t}_n$ , per il principio di azione e reazione (terzo principio della dinamica). Non è stato aggiunto il pedice  $f$  al vettore sforzo agente sul fluido, poiché siamo in un corso di fluidodinamica e il soggetto è il fluido, quando è sottointeso. Si può riconoscere la risultante  $\mathbf{R}^s$  all'interno del bilancio integrale della quantità di moto per il volume fluido  $v(t)$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial v(t)} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{f} + \oint_{\partial v(t)} \mathbf{t}_n . \quad (4.82)$$

Si analizzano i termini di superficie, considerando separatamente i contributi delle superfici  $s_{f,s}$  e  $s_{f,free}$ . Se il solido ha una superficie impermeabile al fluido e non c'è flusso di massa, la velocità del fluido e del solido sono uguali,  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ , sulla superficie  $s_{f,s}$ . Di conseguenza rimane solo il contributo del flusso della quantità di moto attraverso la superficie  $s_{f,free}$ , mentre il termine di flusso attraverso  $s_{f,s}$  è nullo. L'integrale sul contorno  $\partial v(t)$  del vettore sforzo può essere suddiviso nella somma dell'integrale svolto sulla superficie a contatto con il solido e sulla superficie libera,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial v(t)} \mathbf{t}_n &= \oint_{s_{f,s}(t)} \mathbf{t}_n + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{t}_n = \\ &= - \oint_{s_{s,f}(t)} \mathbf{t}_{n,s} + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{t}_n = -\mathbf{R}^s + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{t}_n . \end{aligned} \quad (4.83)$$

Spesso sulla superficie libera  $s_{f,free}(t)$  possono essere trascurati gli sforzi viscosi: in questo caso, il vettore sforzo si riduce al solo effetto della pressione  $\mathbf{t}_n = -p \hat{\mathbf{n}}$ .

Ritornando al bilancio della quantità di moto, si può scrivere

$$\mathbf{R}^s = - \int_{s_{f,free}} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{s_{f,free}(t)} \mathbf{t}_n - \int_{v(t)} \mathbf{f} - \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{u} \quad (4.84)$$

Nel caso in cui il problema sia stazionario e che le forze di volume nel fluido siano trascurabili, gli ultimi due termini si annullano. Se poi si possono trascurare gli sforzi viscosi su  $s_{f,free}$ , la superficie  $s_{s,f}$  è una superficie chiusa (si pensi alla superficie "all'infinito" attorno a

<sup>5</sup>La risultante delle forze delle azioni scambiate con il fluido. A questa andranno sommate le forze di volume, come ad esempio il peso del corpo stesso.

un corpo, come esempio) e la pressione è costante su questa superficie chiusa, l'integrale degli sforzi su  $s_{f,free}$  è anch'esso nullo, poiché

$$\oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{t}_n = - \oint_{s_{f,free}(t)} p \hat{\mathbf{n}} = -p \oint_{s_{f,free}(t)} \hat{\mathbf{n}} \equiv 0 , \quad (4.85)$$

e la risultante delle forze agenti sul solido si riduce a

$$\mathbf{R}^s = - \int_{s_{f,free}} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} . \quad (4.86)$$

#### Bilancio del momento della quantità di moto e risultante dei momenti.

Riproponendo un ragionamento analogo, dal bilancio del momento della quantità di moto si può ricavare la risultante dei momenti agenti su un corpo,

$$\mathbf{M} = \oint_{s_{s,f}} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_{n,s} . \quad (4.87)$$

Nel caso semplificato in cui il problema sia stazionario, le forze di volume sono trascurabili, gli sforzi viscosi sono trascurabili sulla superficie  $s_{f,free}(t)$  chiusa, sulla quale agisce una pressione costante, la risultante dei momenti agenti sul solido si riduce a

$$\mathbf{M}^s = - \int_{s_{f,free}} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} , \quad (4.88)$$

dove  $\mathbf{r}$  è il raggio vettore tra i punti sulla superficie  $s_{f,free}(t)$  e il polo rispetto al quale si calcolano i momenti.

#### Bilancio dell'energia totale.

Tramite il bilancio dell'energia totale si può ricavare la potenza fornita (o assorbita) da un corpo al fluido, e/o il calore scambiato con esso. Gli esercizi che utilizzeranno il bilancio di energia totale ricorderanno alcuni esercizi di Fisica Tecnica. Lo scopo di questi esercizi è quello di proporre un punto di vista più maturo a tali problemi, partendo ai bilanci integrali nella loro forma più generale e opportunamente semplificati considerando grandezze uniformi sulle sezioni (o equivalenti grandezze medie) e ipotesi sullo scambio di calore tra il fluido e l'esterno. Verranno analizzati sistemi aperti e chiusi, nella speranza di fornire un approccio di validità generale a problemi già trattati durante il corso di Fisica Tecnica, senza alcuna pretesa di coprire tutti gli argomenti e i dettagli trattati in quel corso, ma piuttosto consentire una visione del problema generale che coinvolga scambi di massa, lavoro e calore del sistema con l'esterno, facilmente specializzabile a casi particolari, che riduca al minimo lo sforzo mnemonico richiesto da molti casi particolari, apparentemente scorrelati l'uno dall'altro, a vantaggio di una maggiore "sensibilità" sul fenomeno fisico.

Sfruttando la suddivisione della superficie del volume fluido  $\partial v = s_{f,free} \cup s_{f,s}$ , si può riscrivere il bilancio dell'energia totale,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t + \oint_{\partial v(t)} \rho e^t (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{\partial v(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{v(t)} \rho r . \quad (4.89)$$

riconoscendo la potenza

$$W = \oint_{s_{f,s}} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} , \quad (4.90)$$

fornita da un corpo solido al fluido,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t + \oint_{\partial v(t)} \rho e^t (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \\ = \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} + W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{v(t)} \rho r . \end{aligned} \quad (4.91)$$

Se non c'è flusso di massa attraverso la superficie solida,  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  su  $s_{f,s}$ . Se la superficie libera  $s_{f,free}$  del volume di controllo è fissa,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  su  $s_{f,free}$ . Separando il contributo degli sforzi di pressione da quelli viscosi,  $\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{s}_n$  sulla superficie  $s_{s,free}$ , il bilancio dell'energia totale diventa,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t + \oint_{s_{f,free}(t)} \rho h^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \\ = \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{u} + W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{v(t)} \rho r , \end{aligned} \quad (4.92)$$

avendo introdotto l'entalpia totale  $h^t = e^t + \frac{p}{\rho} = e + \frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}$ . Se si trascurano la potenza degli sforzi viscosi su  $s_{s,free}$  e la potenza delle forze di volume  $\mathbf{f}$ , il bilancio dell'energia totale del fluido contenuto nel volume  $v(t)$  diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t + \oint_{s_{f,free}(t)} \rho h^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{v(t)} \rho r . \quad (4.93)$$

### Sistemi chiusi

Per un sistema aperto in cui sono soddisfatte le ipotesi già elencate, si può scrivere

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t = - \oint_{s_{f,free}(t)} \rho h^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{v(t)} \rho r , \quad (4.94)$$

e sinteticamente

$$\frac{dE^t}{dt} = \Phi_{h^t} + W + \dot{Q} , \quad (4.95)$$

avendo definito l'energia totale interna  $E^t$  al volume  $v(t)$  studiato, il flusso netto di entalpia totale  $\Phi_{h^t}$  attraverso la superficie  $s_{s,free}$ , e il flusso di calore  $\dot{Q}$  fornito al fluido contenuto all'interno di  $v(t)$ ,

$$\begin{aligned} E &= \int_{v(t)} \rho e \\ \Phi_{h^t} &= \int_{s_{f,free}} \rho h^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{s_{f,free}} \rho \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ \dot{Q} &= - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{v(t)} \rho r . \end{aligned} \quad (4.96)$$

### Sistemi chiusi

Per un sistema chiuso (nessuno scambio di massa con l'esterno) in cui i termini cinetici sono trascurabili,  $e^t = e$ , il bilancio di energia diventa sinteticamente,

$$\frac{dE}{dt} = W + \dot{Q} , \quad (4.97)$$

avendo definito  $E = \int_{v(t)} \rho e$ , come l'energia interna del fluido contenuto nel volume  $v(t)$ . Questa formula corrisponde al primo principio della Termodinamica, formulato in termini di potenza e non di energia, in cui è stata utilizzata la convenzione di potenza delle forze positiva e flusso di calore positivo se fornito al fluido.<sup>6</sup>

---

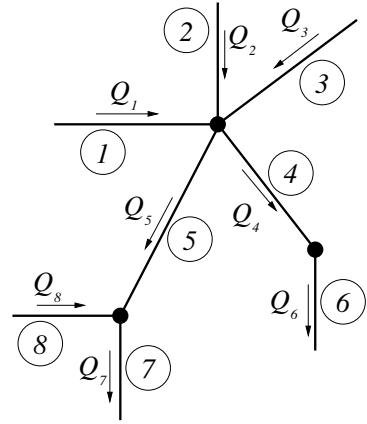
<sup>6</sup>In Termodinamica, che studia sistemi in equilibrio, il primo principio è formulato in termini di energia come,

$$\Delta E = Q - L , \quad (4.98)$$

in cui la variazione di energia  $\Delta E$  tra due stati termodinamici del sistema corrisponde alla differenza del calore  $Q$  fornito al sistema e al lavoro  $L$  svolto **dal** sistema.

**Esercizio 4.1 — Bilancio di massa: teoria delle reti.** Si consideri una rete idraulica come quella rappresentata in figura. All'interno dei tubi scorre acqua. Sia nota le velocità media dell'acqua all'interno di alcuni dei rami della rete:  $U_1 = 1 \text{ m/s}$ ,  $U_2 = 1.5 \text{ m/s}$ ,  $U_3 = 0.5 \text{ m/s}$ ,  $U_7 = 2 \text{ m/s}$  e  $U_8 = 0.3 \text{ m/s}$ . Il verso della velocità è indicato dalle frecce sul disegno. Determinare la portata volumetrica, la portata in massa e la velocità media all'interno di ciascun ramo della rete sapendo che l'acqua ha una densità pari a  $\bar{\rho} = 999 \text{ kg/m}^3$ , e che il diametro dei tubi è rispettivamente  $D_1 = 0.4 \text{ m}$ ,  $D_2 = 0.2 \text{ m}$ ,  $D_3 = 0.2 \text{ m}$ ,  $D_4 = 0.3 \text{ m}$ ,  $D_5 = 0.5 \text{ m}$ ,  $D_6 = 0.25 \text{ m}$ ,  $D_7 = 0.3 \text{ m}$ ,  $D_8 = 0.6 \text{ m}$ .

( $Q_1 = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_2 = 0.05 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_3 = 0.02 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_4 = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_5 = 0.06 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_6 = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_7 = 0.14 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_8 = 0.08 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $U_1 = 1 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $U_2 = 1.5 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $U_3 = 0.5 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $U_4 = 1.87 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $U_5 = 0.29 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $U_6 = 2.69 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $U_7 = 2 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $U_8 = 0.3 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $\bar{Q}_1 = 125.5 \text{ kg/s}$ ,  $\bar{Q}_2 = 47.08 \text{ kg/s}$ ,  $\bar{Q}_3 = 15.69 \text{ kg/s}$ ,  $\bar{Q}_4 = 131.8 \text{ kg/s}$ ,  $\bar{Q}_5 = 54.49 \text{ kg/s}$ ,  $\bar{Q}_6 = 131.8 \text{ kg/s}$ ,  $\bar{Q}_7 = 141.2 \text{ kg/s}$ ,  $\bar{Q}_8 = 84.74 \text{ kg/s}$ ) ■



### Soluzione

**Concetti.** Bilancio integrale della massa. Teoria delle reti: bilancio ai nodi.

**Svolgimento.** Se il regime di moto è stazionario, la portata massica è costante e indipendente dalla sezione considerata all'interno di ogni singolo tubo. Il bilancio di massa nell' $i$ -esimo tubo è,

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_i} \rho}_{=0} = \oint_{S_i} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_{i,\alpha}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{S_{i,\beta}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \tilde{Q}_{i,\alpha} + \tilde{Q}_{i,\beta} \rightarrow \tilde{Q}_{i,\alpha} = -\tilde{Q}_{i,\beta}, \quad (4.99)$$

avendo indicato  $S_{i,\alpha}$  e  $S_{i,\beta}$  le due sezioni in “ingresso” e “uscita” del tubo  $V_i$ , con  $\hat{\mathbf{n}}$  e  $\tilde{Q}_\beta$  la normale uscente e i flussi di massa uscenti dal volume  $V_i$ . Se si calcola il flusso di massa  $\bar{Q}_i$  attraverso le sezioni del tubo con normale identificata dal “verso di percorrenza” del tubo, uno dei due termini cambia segno e si dimostra che la portata è costante sulle sezioni del singolo tubo,

$$\bar{Q}_{i,\alpha} = \bar{Q}_{i,\beta} =: \bar{Q}_i. \quad (4.100)$$

Utilizzando il verso delle frecce indicato in figura per stabilire il segno dei flussi di massa, il bilancio di massa ai nodi porta al sistema lineare,

$$\begin{cases} \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + \bar{Q}_3 - \bar{Q}_4 - \bar{Q}_5 = 0 & (\text{bil. al nodo in alto}) \\ \bar{Q}_5 + \bar{Q}_8 - \bar{Q}_7 = 0 & (\text{bil. al nodo a sinistra}) \\ \bar{Q}_4 - \bar{Q}_6 = 0 & (\text{bil. al nodo a destra}), \end{cases} \quad (4.101)$$

nel quale le incognite sono i flussi  $\bar{Q}_4$ ,  $\bar{Q}_5$ ,  $\bar{Q}_6$ , una volta calcolati gli altri flussi con i dati forniti dal testo del problema,  $\bar{Q}_k = \rho \frac{\pi}{4} D_k^2 U_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 7, 8$ . Successivamente si calcolano le portate volumetriche  $Q_k$  incognite, dividendo le portate massiche  $\bar{Q}_k$  per la densità  $\rho$ ,

$$Q_k = \frac{\bar{Q}_k}{\rho}, \quad k = 1 : 8. \quad (4.102)$$

**Esercizio 4.2 — Bilancio di massa: riempimento bombola.** Si sta riempiendo una bombola per immersioni subacquee. Sapendo che la pompa aspira aria a pressione ambiente di  $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$  e alla temperatura di  $293 \text{ K}$  in un condotto di sezione  $1 \text{ cm}^2$  in cui la velocità media è di  $0.5 \text{ m/s}$  e che non ci sono perdite nel sistema di pompaggio, determinare la rapidità di variazione della massa d'aria e della sua densità all'interno della bombola, sapendo che il volume della bombola è pari a  $0.02 \text{ m}^3$ .

$$\left( \frac{dM}{dt} = 6.01 \times 10^{-5} \text{ kg/s}, \frac{d\rho}{dt} = 3.00 \times 10^{-3} \text{ kg/(m}^3\text{s}) \right). \quad \blacksquare$$

### Soluzione

**Concetti.** Bilancio integrale della massa. Legge dei gas perfetti.

**Svolgimento.** Sono date la pressione  $p$  e la temperatura  $T$  all'uscita della pompa. È nota l'area  $S$  della sezione e la velocità media  $U$  su quella sezione. Si trova la variazione di massa all'interno della bombola grazie al bilancio integrale di massa nel volume della bombola  $V$  (volume di controllo, fisso),

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \rho_{in} S_{in} U , \quad (4.103)$$

dove si è indicato con  $M$  la massa totale,  $S_{in}$  l'area della sezione del tubo utilizzato per riempire la bombola e  $\rho_{in}$ , la densità sulla sezione di ingresso, dove sono note la pressione  $P_{in}$  e la temperatura  $T_{in}$ . Ipotizzando che valga la legge di stato dei gas perfetti, la densità sulla sezione di ingresso vale

$$\rho_{in} = \frac{P_{in}}{RT_{in}} , \quad (4.104)$$

dove  $R = 287 \text{ J/(kg K)}$  è la costante dei gas per l'aria. La derivata nel tempo della massa d'aria nella bombola vale quindi

$$\frac{dM}{dt} = 6.0 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{s}} . \quad (4.105)$$

Supponendo che la densità dell'aria si uniforme all'interno della bombola, si può calcolare la sua derivata nel tempo,

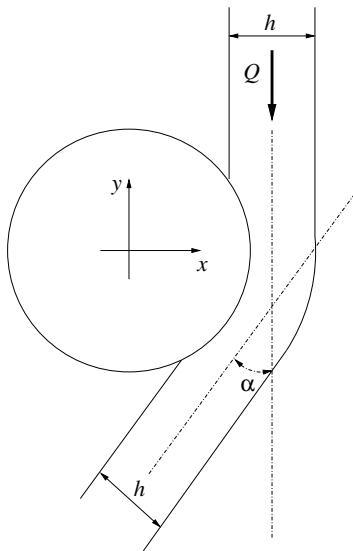
$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{V} \frac{d}{dt} \int_V \rho = 2.0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{s}} . \quad (4.106)$$

**Esercizio 4.3 — Effetto Coanda sul cilindro.** Un getto d'acqua ( $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$ ) stazionario, piano e orizzontale viene indirizzato su un cilindro, lambendone la superficie e venendo deviato di un angolo  $\alpha = 15^\circ$ . Determinare la forza agente su una porzione del cilindro di lunghezza pari a  $H = 2 \text{ m}$ , dovuta sia al getto d'acqua, sia all'aria circostante, sapendo che:

- il fluido che circonda il getto e il cilindro è aria in quiete a pressione atmosferica di  $101325 \text{ Pa}$ ;
- la larghezza del getto è  $h = 2 \text{ cm}$ ;
- la portata d'acqua per unità di lunghezza nel getto è  $Q = 199 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .

Sufficientemente lontano dal cilindro, il profilo di velocità sulle sezioni del getto è uniforme. Illustrare tutte le ipotesi semplificative adottate nella risoluzione dell'esercizio.

$$(\mathbf{F} = 1026 \hat{\mathbf{x}} - 135 \hat{\mathbf{y}} \text{ N}) \quad \blacksquare$$



### Soluzione

**Concetti.** Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo. Effetto Coanda (esempio della bustina da té sotto il rubinetto).

**Svolgimento.** Vengono fatte alcune ipotesi: il problema stazionario; attorno al getto e al solido, l'aria è in quiete con pressione uniforme  $p_a$ ; il profilo di velocità è uniforme sulle sezioni del getto considerate nelle equazioni di bilancio.

Partendo dalle equazioni di bilancio per il volume di controllo  $V_f$  occupato dal fluido, rielaborando il termine degli sforzi di superficie sforzi di superficie, si ricava la risultante  $\mathbf{R}$  agente sul solido in funzione del flusso di quantità di moto del fluido attraverso la superficie  $S_f = \partial V_f$ .

Innanzitutto viene ricavata l'espressione della risultante  $\mathbf{R}$  agente sul solido.

- Vengono scritte le equazioni di bilancio per il fluido, considerando il volume  $V_f$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho + \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho \mathbf{u} + \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_f} \mathbf{t}_n = 0 & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (4.107)$$

- Viene introdotta l'ipotesi di stazionarietà del fenomeno,  $\frac{d}{dt} \equiv 0$ . La risultante degli sforzi viene scritta come somma degli sforzi di pressione e degli sforzi viscosi,

$$\oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_f} \mathbf{t}_n = \oint_{S_f} \mathbf{s}_n - \oint_{S_f} p \hat{\mathbf{n}}_f . \quad (4.108)$$

- Viene manipolato il termine degli sforzi di superficie. Il contorno  $S_f$  del volume fluido viene scomposto come unione della superficie a contatto con il solido  $S_{fs}$ , delle superfici "lateralì"  $S_{fl}$  (attraverso le quali non c'è flusso di quantità meccaniche, poiché  $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ ) a contatto con l'aria in quiete e le sezioni "di ingresso"  $S_{f,1}$  e "di

uscita”  $S_{f,2}$  sulle quali la velocità è uniforme, utilizzate per i bilanci integrali per il volume fluido. Viene indicata con  $\hat{\mathbf{n}}_f$  la normale uscente dal volume  $V_f$ . Il contorno  $S_s$  del solido viene scomposto come unione della superficie a contatto con il fluido  $S_{sf}$  e della superficie  $S_{sl}$  a contatto con l'aria in quiete. Viene indicata con  $\hat{\mathbf{n}}_s$  la normale uscente dal volume  $V_s$ . In questo modo, la superficie  $S_{fs}$  coincide con la superficie  $S_{sf}$ , a meno della normale invertita,  $\hat{\mathbf{n}}_f = -\hat{\mathbf{n}}_s$ . Su queste superfici, per il terzo principio della dinamica, lo sforzo  $\mathbf{t}_{n_{sf}}$  agente sul solido dovuto al fluido è uguale e contrario allo sforzo  $\mathbf{t}_{n_{fs}}$  agente sul fluido dovuto al fluido,  $\mathbf{t}_{n_{sf}} = -\mathbf{t}_{n_{fs}}$ . La superficie formata dall'unione  $S_{f\ell} \cup S_{f,1} \cup S_{f,2} \cup S_{sl} =: S_{ext}$  è una superficie chiusa con normale uscente  $\hat{\mathbf{n}}$  uguale a  $\hat{\mathbf{n}}_f$  sulle prime tre superfici e uguale a  $\hat{\mathbf{n}}$  su  $S_{sl}$ . Lo sforzo agente su  $S_{ext}$  è uguale a  $-p_a \hat{\mathbf{n}}$ , poiché le superfici libere sono a contatto con aria in quiete con pressione  $p_a$  e le traiettorie delle particelle rettilinee (senza curvatura<sup>7</sup>) sulle sezioni  $S_{f,1}$  e  $S_{f,2}$ .

$$\begin{aligned}
 \oint_{S_f} \mathbf{t}_n &= \int_{S_{f\ell}} \mathbf{t}_n + \int_{S_{f,1+2}} \mathbf{t}_n + \int_{S_{fs}} \mathbf{t}_n = && (\mathbf{t}_n|_{S_{f\ell}, S_{f,1+2}} = -p_a \hat{\mathbf{n}}_f) \\
 &= - \int_{S_{f\ell} \cup S_{f,1+2}} p_a \hat{\mathbf{n}}_f + \int_{S_{fs}} \mathbf{t}_n = && (\text{somma e sottrazione di } \int_{S_{fs}} p_a \hat{\mathbf{n}}_f) \\
 &= - \underbrace{\int_{S_{f\ell} \cup S_{f,1+2}} p_a \hat{\mathbf{n}}_f}_{-\oint_{S_f} p_a \hat{\mathbf{n}}_f = 0} - \int_{S_{fs}} p_a \hat{\mathbf{n}}_f + \int_{S_{fs}} \mathbf{t}_n = && (\hat{\mathbf{n}}_f = -\hat{\mathbf{n}}_s, \mathbf{t}_{n_{sf}} = -\mathbf{t}_{n_{fs}} \text{ su } S_{fs}) \\
 &= - \int_{S_{sf}} p_a \hat{\mathbf{n}}_s - \int_{S_{sf}} \mathbf{t}_{n_{sf}} = && (\oint_{S_s = S_{sf} \cup S_{sl}} p_a \hat{\mathbf{n}}_s = 0) \\
 &= + \int_{S_{sl}} p_a \hat{\mathbf{n}}_s - \int_{S_{sf}} \mathbf{t}_{n_{sf}} = && (\mathbf{t}_{n_s} = -p_a \hat{\mathbf{n}}_s \text{ su } S_{sl}) \\
 &= - \int_{S_{sl}} \mathbf{t}_{n_s} - \int_{S_{sf}} \mathbf{t}_{n_{sf}} = - \oint_{S_s} \mathbf{t}_{n_s} = \\
 &= -\mathbf{R},
 \end{aligned} \tag{4.109}$$

dove  $\mathbf{R}$  è la risultante degli sforzi di superficie agente sul solido. In questo esercizio è il contributo delle forze di volume (ad esempio il peso) agenti sul solido.

- Sostituendo nell'equazione del bilancio della quantità di moto si ottiene:

$$\mathbf{R} = - \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{4.110}$$

- Considerando solo le superfici di  $V_f$  attraverso le quali c'è un flusso non nullo di quantità di moto, la risultante delle forze diventa

$$\mathbf{R} = - \int_{S_{f,1}} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{S_{f,2}} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{4.111}$$

dove le quantità all'interno degli integrali sono riferite alle superfici di integrazione. Sulle sezioni  $S_{f,1}$ ,  $S_{f,2}$  la velocità è uniforme con modulo  $U$  (dalla continuità, la velocità sulle due sezioni è uguale poiché l'area delle due sezioni è uguale) diretta

<sup>7</sup>Vedi commento sull'equazione della quantità di moto e sulle traiettorie delle particelle

lungo la linea media del getto. Le componenti cartesiane della risultante  $\mathbf{R}$  sono

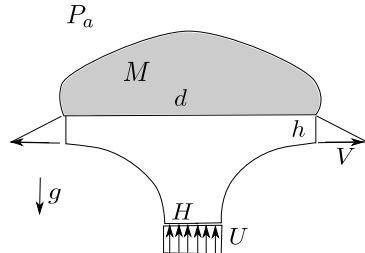
$$\begin{aligned} R_x &= \frac{Q^2 H}{\rho h} \sin \alpha \\ R_y &= -\frac{Q^2 H}{\rho h} (1 - \cos \alpha) , \end{aligned} \tag{4.112}$$

riferite agli assi rappresentati in figura.

**Esercizio 4.4 — Giochi d'acqua.** Un getto d'acqua ( $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$ ) stazionario, piano e verticale viene indirizzato su un oggetto di massa  $M$ , tenuto da esso in equilibrio. Il getto ha distribuzione di velocità uniforme  $U$  lungo lo spessore  $H$ , mentre la distribuzione sul bordo dell'oggetto è triangolare di spessore  $h$  con velocità massima  $V$ . Si calcoli la velocità  $V$  e la massa  $M$  dell'oggetto supponendo che:

- il fluido che circonda il getto e il solido è aria in quiete a pressione atmosferica di  $P_a = 101325 \text{ Pa}$ ;
- si possa trascurare la gravità nel bilancio di quantità di moto, ma non nell'equilibrio del corpo.

$$(V = UH/h; M = \rho U^2 H/g) \quad \blacksquare$$



### Soluzione

**Concetti.** Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo.

**Svolgimento.** Ipotesi: problema stazionario; sulla superficie libera del corpo e del fluido agisce solo la pressione ambiente  $p_a$ ; nessun effetto della gravità nei bilanci del fluido.

Si sceglie un asse  $y$  diretto verso l'alto.

- Scrittura delle equazioni di bilancio per il fluido.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial\Omega} p \hat{\mathbf{n}} - \oint_{\partial\Omega} s_n - \int_V \rho \mathbf{g} = 0 & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (4.113)$$

A queste, va aggiunta l'equazione di equilibrio del corpo sottoposto alla forza di gravità:  $\mathbf{F} + M\mathbf{g} = 0$ .

- Dopo aver semplificato il bilancio di massa, da esso si ricava la velocità  $V$ . La velocità sui due bordi 'di uscita' è  $v(s) = Vs/h$ , avendo chiamato  $s$  la coordinata che descrive tale superficie per valori compresi tra 0 e  $h$ .

$$0 = \int_{S_{in}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_{out1}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_{out2}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\rho U H + 2 \int_0^h \rho V \frac{s}{h} ds = \rho \left[ -UH + 2 \frac{1}{2} Vh \right] \quad (4.114)$$

E quindi  $V = U \frac{H}{h}$ .

- Le equazioni vengono opportunamente semplificate secondo le ipotesi fatte (vengono eliminati i termini non stazionari e il termine contenente le forze di volume - gravità). Il bordo del dominio fluido  $\partial\Omega$  viene indicato con  $S_f$ . I contributi di pressione e viscosi vengono raccolti nel "vettore di sforzo" complessivo.

$$\oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_f} s_n - \oint_{S_f} p \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_f} t_n \quad (4.115)$$

- Riscrittura del termine di contorno. Si indica con  $S_f$  il contorno fluido: questo è costituito dall'unione del contorno a contatto con il corpo  $S_c$  e quella "libera"  $S_l$ . Il contorno del corpo  $S_s$  è suddiviso nel contorno  $S_c$  a contatto con il fluido e nel contorno libero  $S_{cl}$ .

Nei passaggi successivi si ricava il legame tra sforzi sul contorno del dominio fluido e la forza agente sul corpo. Si usano le ipotesi che sulle superfici libere agisca solo la pressione ambiente. Si usa il fatto che l'integrale di una quantità costante per la normale su una superficie chiusa è nullo. Vengono definite le normali  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{n}_s$  come la normale uscente dal volume del fluido e quella uscente dal solido. Si definiscono  $\mathbf{t}_n$  e  $\mathbf{t}_{n_s}$  come lo sforzo agente sul fluido e quello agente sul solido. Si usa infine il fatto che  $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_s$  (normali uscenti dai due domini, uguali e contrarie) e  $\mathbf{t}_n = -\mathbf{t}_{n_s}$  sulla superficie in comune (sforzi agenti sulla superficie comune, uguali e contrari; principio di azione e reazione).

$$\begin{aligned}
 \oint_{S_f} \mathbf{t}_n &= \int_{S_l} \mathbf{t}_n + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = && (\mathbf{t}_n|_{S_l} = -p_a \mathbf{n}) \\
 &= - \int_{S_l} p_a \mathbf{n} + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = && \text{(somma e sottrazione di } \int_{S_c} p_a \mathbf{n} \text{)} \\
 &= - \underbrace{\int_{S_l} p_a \mathbf{n}}_{=0} - \int_{S_c} p_a \mathbf{n} + \int_{S_c} p_a \mathbf{n} + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = && (\mathbf{n} = -\mathbf{n}_s) \\
 &= - \int_{S_c} p_a \mathbf{n}_s + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = && (S_s = S_c \cup S_{cl} \text{ e } \int_{S_s} p_a \mathbf{n} = 0) \\
 &= \int_{S_{cl}} p_a \mathbf{n}_s + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = && (\mathbf{t}_{n_s}|_{S_{cl}} = -p_a \mathbf{n}_s, \mathbf{t}_{n_s}|_{S_c} = -\mathbf{t}_n) \\
 &= - \int_{S_{cl}} \mathbf{t}_{n_s} - \int_{S_c} \mathbf{t}_{n_s} = \\
 &= - \int_{S_s} \mathbf{t}_{n_s} \\
 &= -\mathbf{R}
 \end{aligned} \tag{4.116}$$

- Sostituendo nell'equazione del bilancio della quantità di moto si ottiene:

$$\mathbf{R} = - \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{4.117}$$

- Data la simmetria del problema si riconosce che non ci può essere una componente orizzontale. I contributi nel bilancio della quantità di moto sulla superficie di contatto tra corpo e fluido e sulla superficie laterale del getto sono nulli poiché è nullo il flusso su tali superfici. I contributi sulle sezioni 'di uscita' sono uguali e contrari. Rimane quindi solo il contributo dalla sezione 'in ingresso'.

$$\mathbf{F} = - \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = - \oint_{S_{in}} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho U^2 H \hat{\mathbf{y}} \tag{4.118}$$

- Si scrive l'equilibrio del corpo  $\mathbf{F} + M\mathbf{g} = 0$ , con  $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{y}}$ . Da questo segue che  $M = F/g = \frac{\rho U^2 H}{g}$ .

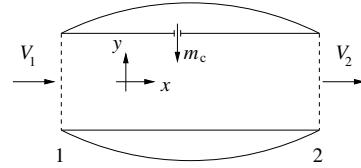
*Osservazioni.* Nell'elaborazione dei termini della quantità di moto è contenuta la forma della risultante delle forze sull'oggetto vista in classe.

Come giustamente osservato da qualcuno in classe, la massa è per unità di lunghezza, poichè stiamo considerando un caso bidimensionale.

**Esercizio 4.5 — Motore a getto.** Il motore a getto in figura è alimentato con una portata  $\dot{m}_c = 1.1 \text{ kg/s}$  di carburante liquido iniettato in direzione ortogonale all'asse del motore. Calcolare la spinta  $T$  del motore ipotizzando che:

- il carburante vaporizzi e diffonda completamente;
- le sezioni di ingresso e uscita abbiano area uguale e pari ad  $A = 0.5 \text{ m}^2$ ;
- sia l'aria in ingresso che i gas di scarico siano a pressione atmosferica  $P_{atm} = 26400 \text{ Pa}$ ;
- la velocità di ingresso e di uscita siano uniformi sulle rispettive sezioni;
- siano note la densità dell'aria in ingresso  $\rho_1 = 0.42 \text{ kg/m}^3$ , la velocità di ingresso  $V_1 = 240 \text{ m/s}$  e la velocità di efflusso  $V_2 = 980 \text{ m/s}$ .

$$(T = -38374\hat{x} \text{ N}) \blacksquare$$



### Soluzione

$$T = \rho V_1 A (V_2 - V_1) + V_2 \dot{m}_c . \quad (4.119)$$

**Concetti.** Bilanci integrali di massa e quantità di moto.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_V \mathbf{f} - \oint_{\partial V} p \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial V} \mathbf{s}_n & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (4.120)$$

**Svolgimento.** Ipotesi: Regime stazionario. Fluido non viscoso (?). Profilo costante di velocità. No gravità.

- Scrittura dei bilanci integrali con le semplificazioni opportune, derivanti dalle ipotesi.

$$\begin{cases} \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (4.121)$$

- Ulteriore semplificazione usando l'ipotesi di profili di velocità uniformi

$$\begin{cases} -\rho_1 V_1 A_1 - \dot{m}_c + \rho_2 V_2 A_2 = 0 \\ -\rho_1 \vec{V}_1 V_1 A_1 + \rho_2 \vec{V}_2 V_2 A_2 - \dot{m}_c \vec{v}_c = \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n \end{cases} \quad (4.122)$$

- Relazione tra l'integrale della pressione e la risultante delle forze agenti sul gomito, sfruttando il fatto che l'integrale della normale su tutta la superficie è identicamente nullo. Si identificano con  $S_1$  la superficie di ingresso,  $S_2$  la superficie di uscita,  $S_3$  la superficie laterale interna del motore,  $S_{3_o}$  la superficie laterale esterna del motore.

$$\begin{aligned} \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n &= \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n + \underbrace{\oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_{3_o}} p_a \hat{\mathbf{n}}}_{=0} = \\ &= - \int_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \int_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_{3_o}} p_a \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_3} \mathbf{t}_n = \quad (p|_{S_1} = p|_{S_2} = p_a) \\ &= \int_{S_{3_o}} p_a \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_3} \mathbf{t}_n = \\ &= \oint_{S_{eng}} \mathbf{t}_n = -\vec{F} \end{aligned}$$

(4.123)

- L'equazione della quantità di moto diventa quindi:

$$-\rho_1 \vec{V}_1 V_1 A_1 + \rho_2 \vec{V}_2 V_2 A_2 - \dot{m}_c \vec{v}_c = -\vec{F} \quad (4.124)$$

- Mettendo a sistema l'equazione del bilancio di massa e la proiezione in direzione orizzontale dell'equazione della quantità di moto (si assume che l'iniezione del combustibile, e quindi  $\vec{v}_c$ , sia perpendicolare all'asse x e quindi non compare nel bilancio della quantità di moto in direzione x):

$$\begin{cases} \rho_2 V_2 A = \rho_1 V_1 A + \dot{m}_c \\ -\rho_1 V_1^2 A + \rho_2 V_2^2 A = -F_x \end{cases} \quad (4.125)$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} F_x &= \rho_1 V_1^2 A - \rho_2 V_2^2 A = \\ &= \rho_1 V_1^2 A - (\rho_2 V_2 A) V_2 = \\ &= \rho_1 V_1^2 A - V_2 (\rho_1 V_1 A + \dot{m}_c) = \\ &= \rho_1 V_1 A (V_1 - V_2) - V_2 \dot{m}_c \end{aligned} \quad (4.126)$$

E la spinta coincide con la componente lungo x appena calcolata:

$$T = \rho_1 V_1 A (V_2 - V_1) + V_2 \dot{m}_c \quad (4.127)$$

La spinta risulta quindi:  $T = -F_x = 38374 N$ .

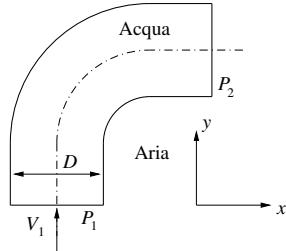
*Interpretazione dei risultati e osservazioni.*

In prima approssimazione, la spinta in un motore a getto è una funzione della portata d'aria e della differenza di velocità tra ingresso e uscita. Spesso in molte applicazioni il termine  $\dot{m}_c$  è trascurabile.

Ragionare in questo caso sulla validità dell'approssimazione  $\mathbf{t}_n = -p \hat{\mathbf{n}}$  nella definizione della risultante delle forze sul motore.

**Esercizio 4 .6 — Gomito.** Un condotto di sezione circolare avente diametro  $D = 5 \text{ cm}$  forma un gomito con angolo di  $90^\circ$ . Nel condotto scorre acqua ( $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$ ) in regime stazionario con velocità  $V = 0.5 \text{ m/s}$ . All'esterno del condotto vi è atmosfera con pressione uniforme  $P_{atm} = 101325 \text{ Pa}$ ; inoltre le pressioni all'ingresso e all'uscita del gomito sono uniformi sulla sezione ed entrambe pari a  $P = 10^6 \text{ Pa}$ . Calcolare la forza  $\mathbf{F}$  agente sul gomito.

$$(\mathbf{F} = -1765.03\hat{\mathbf{x}} + 1765.03\hat{\mathbf{y}} \text{ N}) \quad \blacksquare$$



### Soluzione

**Concetti.** Bilanci integrali di massa e quantità di moto. ...

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_V \mathbf{F} - \oint_{\partial V} p \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial V} \mathbf{s}_n & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (4.128)$$

**Svolgimento.** Vengono fatte alcune ipotesi: regime stazionario, fluido incompressibile, fluido non viscoso, profili costanti di velocità, no gravità. Si scrivono i bilanci integrali semplificati, si riconoscono in essi e si calcolano le azioni scambiate con il corpo.

- Scrittura dei bilanci integrali opportunamente semplificati (ipotesi).

$$\begin{cases} \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (4.129)$$

- Ulteriore semplificazione usando l'ipotesi di densità costante e profili di velocità uniformi

$$\begin{cases} -V_1 A_1 + V_2 A_2 = 0 \\ -\rho \vec{V}_1 V_1 A_1 + \rho \vec{V}_2 V_2 A_2 = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n \end{cases} \Rightarrow V_1 = V_2 = V \quad (4.130)$$

- Relazione tra l'integrale degli sforzi sulla superficie e la risultante delle forze agenti sul gomito, sfruttando il fatto che l'integrale della normale su tutta la superficie è identicamente nullo. Si identificano con  $S_1$  la superficie di ingresso,  $S_2$  la superficie di uscita,  $S_3$  la superficie laterale.

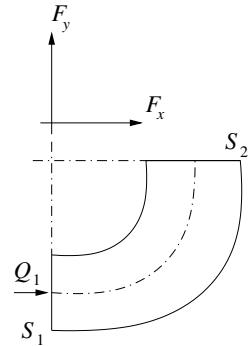
$$\begin{aligned} \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n &= \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n + \underbrace{\oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} p_a \hat{\mathbf{n}}}_{=0} = \\ &= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} + \underbrace{\oint_{S_3} (\mathbf{t}_n + p_a \hat{\mathbf{n}})}_{=-\mathbf{F}} = \\ &= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{F} \end{aligned} \quad (4.131)$$

- Proiezione lungo i due assi del sistema di riferimento della risultante delle forze agenti sul gomito (dopo averla inserita nell'equazione di bilancio della quantità di moto)

$$\begin{cases} F_x = -\rho V^2 A - (p_2 - p_a) A \\ F_y = \rho V^2 A + (p_1 - p_a) A \end{cases} \quad (4.132)$$

**Esercizio 4.7 — Gomito.** Si consideri la corrente stazionaria nel gomito a  $90^\circ$  di una galleria a vento a circuito chiuso di cui è mostrata in figura la sezione nel piano  $x-y$ . Siano assegnate le aree della sezione di ingresso,  $S_1 = 16 \text{ m}^2$ , e di uscita,  $S_2 = 56 \text{ m}^2$ , la portata in volume  $Q_1 = 1600 \text{ m}^3/\text{s}$  e le pressioni nella sezione di ingresso,  $P_1 = 1.05 \text{ bar}$ , e nella sezione di uscita,  $P_2 = 1.106 \text{ bar}$ . Assumendo che il flusso d'aria sia incompressibile ( $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ ) e che la velocità sulle sezioni di ingresso e uscita possa ritenersi uniforme, si determinino le componenti  $F_x$  ed  $F_y$  della spinta che esso esercita sul gomito, usando la convenzione indicata in figura.

$$(F_x = 1.876 \cdot 10^6 \text{ N}, F_y = -6.251 \cdot 10^6 \text{ N}) \quad \blacksquare$$



### Soluzione

**Concetti.** Bilanci integrali di massa e quantità di moto.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_V \mathbf{f} - \oint_{\partial V} p \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial V} \mathbf{t}_s & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (4.133)$$

**Svolgimento.** Vengono fatte alcune ipotesi: regime stazionario, fluido incompressibile, fluido non viscoso, profili costanti di velocità, no gravità. Si scrivono i bilanci integrali semplificati, si riconoscono in essi e si calcolano le azioni scambiate con il corpo.

- Scrittura dei bilanci integrali con le semplificazioni opportune, derivanti dalle ipotesi.

$$\begin{cases} \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_s & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (4.134)$$

- Ulteriore semplificazione usando l'ipotesi di densità costante e profili di velocità uniformi

$$\begin{cases} -V_1 A_1 + V_2 A_2 = 0 \\ -\rho \vec{V}_1 V_1 A_1 + \rho \vec{V}_2 V_2 A_2 = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_s \end{cases} \Rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2 = Q \quad (4.135)$$

- Relazione tra l'integrale della pressione e la risultante delle forze agenti sul gomito, sfruttando il fatto che l'integrale della normale su tutta la superficie è identicamente nullo. Si identificano con  $S_1$  la superficie di ingresso,  $S_2$  la superficie di uscita,  $S_3$  la superficie laterale.

$$\begin{aligned} \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} p \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_s + \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} p_a \hat{\mathbf{n}} = \\ &= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} + \underbrace{\oint_{S_3} (\mathbf{t}_s + p_a \hat{\mathbf{n}})}_{=-\mathbf{f}} = \\ &= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{f} \end{aligned} \quad (4.136)$$

- L'equazione della quantità di moto diventa quindi:

$$-\rho \mathbf{V}_1 V_1 A_1 + \rho \mathbf{V}_2 V_2 A_2 = -(p_1 - p_a) A_1 \hat{\mathbf{n}}_1 - (p_2 - p_a) A_2 \hat{\mathbf{n}}_2 - \mathbf{F} \quad (4.137)$$

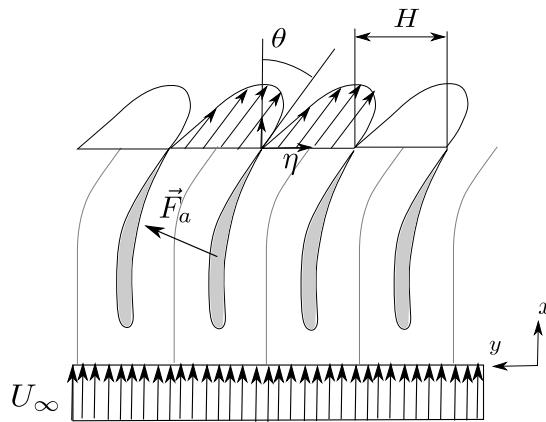
- Proiezione lungo i due assi del sistema di riferimento della risultante delle forze agenti sul gomito. Se si considera  $p_a = 0$ , i risultati numerici sono i seguenti:

$$\begin{cases} F_x = \rho \frac{Q^2}{A_1} + (p_1 - p_a) A_1 & \Rightarrow \quad F_x = 1.876 \cdot 10^6 N \\ F_y = -\rho \frac{Q^2}{A_2} - (p_2 - p_a) A_2 & \Rightarrow \quad F_y = -6.250 \cdot 10^6 N \end{cases} \quad (4.138)$$

**Esercizio 4.8 — Profili in schiera.** Un numero elevato di profili è disposto come in figura. Il profilo di ingresso è uniforme  $\mathbf{u} = U_\infty \hat{\mathbf{x}}$ , mentre il profilo di uscita ha andamento  $\mathbf{u} = \beta U_\infty (\cos \theta \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta \hat{\mathbf{y}}) \sin \frac{\pi \eta}{H}$  in ogni canale (sia  $\eta$  la coordinata che descrive la sezione di uscita). Sulla sezione di ingresso la pressione media vale  $P_1$ , sulla sezione di uscita  $P_2$ .

Calcolare il fattore  $\beta$  del profilo di velocità in uscita e la risultante delle forze (per unità di apertura) agente sul singolo profilo.

(Risultati:  $\beta = \frac{\pi}{2 \cos \theta}$ ,  $\mathbf{F} = [(P_1 - P_2)H + \rho U^2 H ((1 - \pi^2/8) \hat{\mathbf{x}} + \pi^2/8 \tan \theta \hat{\mathbf{y}})]$ ) ■



### Soluzione

**Concetti.** Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo. Simmetria.

- Ricavare il coefficiente  $\beta$  dal bilancio di massa
- Usare le ipotesi di simmetria nel bilancio di quantità di moto per annullare alcuni termini

### Svolgimento.

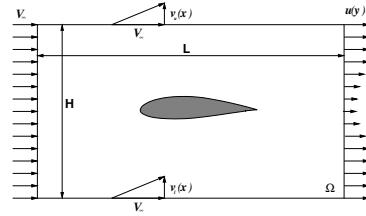
Si ricava il coefficiente  $\beta$  dal bilancio di massa in forma integrale. Si utilizza la simmetria del problema nel bilancio di quantità moto per ricavare le azioni sui profili.

**Esercizio 4.9 — Difetto di scia: stima resistenza.** Calcolare la resistenza di un profilo immerso in una corrente stazionaria con velocità asintotica  $\mathbf{V}_\infty$ , sapendo la distribuzione della componente di velocità  $u(y)$  parallela a  $\mathbf{V}_\infty$  a valle del profilo e assumendo che:

- la pressione statica sul contorno del volume di controllo sia costante e pari a quella della corrente indisturbata a monte del profilo;
- sul lato superiore e inferiore del volume di controllo sia possibile trascurare la componente lungo l'asse  $x$  della perturbazione della velocità dovuta alla presenza del profilo:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{V}_\infty + \mathbf{u}, v) \simeq (\mathbf{V}_\infty, v).$$

$$(R = \int_0^H \rho u(y)[V_\infty - u(y)]dy.)$$



### Soluzione

**Concetti.** Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo. Esperienza in laboratorio sul *difetto di scia*.

**Svolgimento.** Vengono scritti i bilanci integrali di massa e quantità di moto, opportunamente semplificati (ipotesi di stazionarietà  $\frac{d}{dt} \equiv 0$ , densità costante  $\rho = \bar{\rho}$ , ipotesi sulle condizioni sul bordo esterno del dominio); all'interno dei bilanci si possono riconoscere i termini legati alle azioni scambiate dal fluido con il profilo (l'incognita del problema); si sfrutta infine la geometria rettangolare del contorno esterno e le ipotesi su di esso per ottenere una forma ulteriormente semplificata dei bilanci e trovare la soluzione del problema.

- Scrittura e semplificazione dei bilanci di massa e quantità di moto.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial\Omega} p \hat{\mathbf{n}} - \oint_{\partial\Omega} s \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (4.139)$$

Nel problema, il contorno del dominio fluido  $\partial\Omega$  è costituito dal bordo rettangolare  $\gamma_\infty$  lontano dal profilo e dal bordo  $\gamma_p$  coincidente con il profilo stesso. La forza  $\mathbf{F}$  agente sul profilo è l'integrale degli sforzi generati dal fluido (uguali e contrari agli sforzi agenti sul fluido) sul contorno del profilo. Inoltre si può fare l'ipotesi di sforzi viscosi nulli e pressione costante sul bordo esterno: l'integrale sul dominio esterno si riduce all'integrale della normale su una superficie chiusa ed è quindi nullo. Si può dunque scrivere:

$$\oint_{\partial\Omega} (-p \hat{\mathbf{n}} + s \hat{\mathbf{n}}) = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}_n = \underbrace{\oint_{\gamma_p} \mathbf{t}_n}_{=-\mathbf{F}} + \underbrace{\oint_{\gamma_\infty} \mathbf{t}_n}_{=0} = -\mathbf{F} \quad (4.140)$$

*Osservazione.* A differenza di quanto fatto in classe, non è stata fatta l'ipotesi di fluido non viscoso; il contributo all'infinito si annulla con l'ipotesi di pressione costante all'infinito e sforzi viscosi trascurabili. Per ritrovarsi con gli appunti, sostituire  $\mathbf{t}_n$  con  $-p \hat{\mathbf{n}}$ .

Dopo aver fatto l'ipotesi di stazionarietà e aver inserito la definizione di  $\mathbf{F}$  appena data, le equazioni di bilancio possono essere scritte come:

$$\begin{cases} \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \mathbf{F} = - \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{cases} \quad (4.141)$$

Il bilancio di quantità di moto può essere scritto esplicitando e separando le componenti vettoriali.

$$\begin{aligned} F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} &= - \oint_{\partial\Omega} \rho (ux + vy) \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ &= - \hat{\mathbf{x}} \oint_{\partial\Omega} \rho u \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{y}} \oint_{\partial\Omega} \rho v \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (4.142)$$

- Scrittura delle equazioni di bilancio in componenti (sfruttando la geometria rettangolare del bordo esterno:  $\gamma_1$  indica il bordo di sinistra,  $\gamma_2$  il bordo inferiore,  $\gamma_3$  quello di destra,  $\gamma_4$  quello superiore).

*Attenzione: la normale è quella uscente dal dominio fluido. Sul contorno del profilo, la normale è entrante nel profilo. In più: non fare confusione tra azioni del profilo agenti sul fluido e azioni del fluido agenti sul profilo!*

$$\begin{cases} 0 = \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = - \int_{\gamma_1} \rho u - \int_{\gamma_2} \rho v + \int_{\gamma_3} \rho u + \int_{\gamma_4} \rho v \\ F_x = + \int_{\gamma_1} \rho u^2 + \int_{\gamma_2} \rho uv - \int_{\gamma_3} \rho u^2 - \int_{\gamma_4} \rho uv \\ F_y = + \int_{\gamma_1} \rho uv + \int_{\gamma_2} \rho v^2 - \int_{\gamma_3} \rho uv - \int_{\gamma_4} \rho v^2 \end{cases} \quad (4.143)$$

- Ipotesi sulla velocità sui lati orizzontali ( $u|_{\gamma_2} = u|_{\gamma_4} = V_\infty$  costante), per poter ulteriormente semplificare il risultato.

$$\begin{cases} \int_{\gamma_2} \rho v - \int_{\gamma_4} \rho v = - \int_{\gamma_1} \rho u + \int_{\gamma_3} \rho u \\ F_x = + \int_{\gamma_1} \rho u^2 - \int_{\gamma_3} \rho u^2 + V_\infty \left[ \int_{\gamma_2} \rho v - \int_{\gamma_4} \rho v \right] \end{cases} \quad (4.144)$$

E inserendo la prima nella seconda:

$$\begin{aligned} F_x &= \int_{\gamma_1} \rho u^2 - \int_{\gamma_3} \rho u^2 + V_\infty \left[ - \int_{\gamma_1} \rho u + \int_{\gamma_3} \rho u \right] = \\ &= \int_{\gamma_1} \rho u (u - V_\infty) + \int_{\gamma_3} \rho u (V_\infty - u) = \quad (u|_{\gamma_1} = V_\infty \Rightarrow \text{il primo integrale è nullo}) \\ &= \int_{\gamma_3} \rho u (V_\infty - u) = \\ &= \int_0^H \rho u(y) (V_\infty - u(y)) dy \end{aligned} \quad (4.145)$$

**Osservazioni.** Tramite la misura del campo di velocità in galleria è possibile stimare la resistenza del corpo. Le condizioni di “aria libera” e in galleria sono diverse. In generale, in galleria il fluido è confinato dalle pareti di galleria, maggiormente “vincolato”. Inoltre sulle pareti della galleria esiste una condizione di adesione,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ : per la conservazione della massa, il rallentamento del fluido in corrispondenza delle pareti della galleria viene compensato da un incremento della velocità nella regione “più lontana” dalla parete, rispetto a un corpo in aria libera. Per tenere conto di effetti di **bloccaggio** dovuti al confinamento in galleria, è necessario compiere delle correzioni delle misure sperimentali.

Agli effetti di bloccaggio, vanno aggiunti gli effetti di **galleggiamento** dovuti al gradiente di pressione lungo la galleria, che danno un effetto di resistenza aggiuntiva. Inoltre è importante che la dimensione del corpo rispetto alla dimensione della galleria non sia né “troppo grosso” (per problemi di ‘bloccaggio’), né, di solito, “troppo piccolo” (per motivi di similitudine; ma sarà argomento di puntate successive del corso...). È importante avere in mente la necessità di prestare attenzione a questi aspetti, quando vengono svolte attività sperimentali. Ma questo sarà argomento di altri capitoli o di altri corsi...

#### **Attività sperimentale: difetto di scia e volume di controllo.**

L'esercizio svolto in precedenza risulta propedeutico per l'analisi dei dati ottenuti tramite alcune attività sperimentali, per ottenere delle risultanti di forze e momenti da misure del campo di velocità (e pressione, a volte) tramite i bilanci integrali. Le attività svolte nel mondo reale sono affette da imprecisioni e incertezze. La quantificazione (o almeno la stima) dell'incertezza del risultato di un'attività sperimentale è parte integrante del risultato stesso. I valori  $x_i$ ,  $i = 1 : N$  di grandezze misurate possono essere combinati per calcolare delle grandezze derivate  $f(x_i)$ . I *datasheet* che accompagnano uno strumento raccolgono anche le informazioni sulla sua incertezza di misura, spesso in forma di intervallo di confidenza o di scarto quadratico medio. L'incertezza sulle misure sperimentali  $x_i$  si propaga sul valore della funzione  $f(x_i)$ . Nell'ipotesi che le incertezze di misura sulle variabili  $d_i$  siano tra di loro indipendenti e non correlate, è possibile utilizzare la **formula RSS (root-sum-squares)** per la propagazione dell'incertezza. Se la misura  $x_i$  ha incertezza  $\sigma_{x_i}$ , una stima dell'incertezza su  $f$  vale

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 . \quad (4.146)$$

L'incertezza  $\sigma_f^2$  sulla quantità  $f$ , obiettivo dell'attività sperimentale, è un indicatore della bontà del metodo sperimentale utilizzato ed del sistema di misura disponibile per tale attività. In generale, l'incertezza sulla grandezza desiderata deve essere “molto minore” della grandezza stessa: in caso contrario, l'apparato sperimentale risulterebbe indeguato all'esperimento. Essendo parte integrante del risultato, è buona regola indicare l'incertezza sui risultati delle attività sperimentali, ad esempio fornendone il valore numerico, il valore relativo alla misura o gli intervalli di confidenza sui grafici.

#### **Risultante delle forze: bilancio di quantità di moto di un volume di controllo .**

Esistono metodi sperimentali, come ad esempio la **PIV** (Particle Image Velocimetry o, in italiano, velocimetria a immagini di particelle), che permettono di ottenere il campo di velocità in un determinato istante all'interno di un dominio di misura, un piano bidimensionale o un volume tridimensionale. Il bilancio di quantità di moto del volume di controllo contenente un corpo solido permette poi di calcolare la risultante delle forze scambiate tra corpo e fluido.

Per semplicità, viene considerato un campo di moto bidimensionale,  $\mathbf{u}(x, y) = u(x, y)\hat{x} + v(x, y)\hat{y}$ . Ad esempio, il campo di moto attorno alla mezzeria di un'ala allungata senza freccia investita da una corrente con un angolo di incidenza ridotto è in buona approssimazione bidimensionale. In questo caso, misure PIV (PIV-2D-2C) forniscono le due componenti (2C) del campo di velocità nel piano (2D) di misura. Tramite il bilancio della quantità di moto del dominio bidimensionale, è possibile ottenere una stima della risultante delle forze (per unità di apertura) che esercita il fluido sul profilo di ala tagliato dal piano di misura. Considerando gli effetti viscosi trascurabili, al di fuori di regioni di dimensione ridotta nell'ambito di applicazioni aeronautiche (alto numero di Reynolds, strato limite

e scie sottili), il bilancio integrale della quantità di moto del fluido nel volume di misura fornisce, in un caso stazionario, la risultante delle forze  $\mathbf{R}$  agenti sul corpo,

$$\mathbf{R} = - \oint_S \rho u \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \oint_S p \hat{\mathbf{n}} , \quad (4.147)$$

avendo trascurato il contributo delle forze di volume. Nell'ipotesi, più che sensata per molte applicazioni aeronautiche, che sia valido il teorema di Bernoulli sulla frontiera  $S$  del volume di controllo, la pressione viene espressa in funzione della velocità locale e dello stato della corrente asintotica,

$$p = p_\infty + \rho \frac{|\mathbf{U}_\infty|^2}{2} - \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} . \quad (4.148)$$

Inserendo questa espressione della pressione nell'espressione della risultante delle forze ed eliminando gli integrali (nulli) su una superficie chiusa delle quantità costanti moltiplicate per la normale alla superficie, come ad esempio  $\oint_S p_\infty \hat{\mathbf{n}}$ , si può esprimere la risultante  $\mathbf{R}$  della forza aerodinamica agente sul corpo in funzione della sola velocità del fluido sulla frontiera  $S$ ,

$$\mathbf{R} = - \oint_S \rho u \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \hat{\mathbf{n}} . \quad (4.149)$$

Sotto queste ipotesi, la forza aerodinamica agente sul corpo, in questo esempio l'obiettivo della misura, è stata scritta unicamente come funzione del campo di velocità sulla superficie  $S$ , fornito come "risultato diretto" dell'attività sperimentale. Per semplicità, la densità del fluido viene considerata costante e nota senza incertezza: nel caso che anche il campo di densità fosse affetto da incertezza, la formula RSS permette di aggiungere abbastanza facilmente il suo effetto a quello dovuto all'incertezza sulla misura del campo di velocità.

### Risultante delle forze: discretizzazione.

Per la sua natura, la PIV fornisce dei risultati discreti (non continui): di solito, il campo di velocità viene misurato sui nodi di una griglia cartesiana. Per il calcolo della risultante  $\mathbf{R}$  sono necessari solamente gli  $N_n$  nodi esterni  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1 : N_n$ , posti sul contorno della griglia. Il campo di velocità viene approssimato (linearmente, per semplicità) utilizzando un approccio simile a quello impiegato nella modellazione numerica a elementi finiti. Viene introdotto un insieme completo di funzioni di base  $\phi_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1 : N_n$ , lineari a tratti sul contorno  $S$ , grazie alle quali è possibile scrivere l'approssimazione  $\mathbf{u}^h$  del campo di velocità

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{U}_i . \quad (4.150)$$

Utilizzando funzioni di base lagrangiane, per le quali il valore della funzione  $i$ -esima  $\phi_i(\mathbf{x})$  è uguale a uno sul nodo  $i$ -esimo  $\mathbf{x}_i$  e zero sugli altri nodi,

$$\phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} \quad , \quad \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) = 1 , \forall i = 1 : N_n , \quad (4.151)$$

i coefficienti  $\mathbf{U}_i$  della (4.150) concidono con i valori nodali,  $\mathbf{U}_i := \mathbf{u}(\mathbf{x}_i)$  ricavati nei punti  $\mathbf{x}_i$  tramite la misura sperimentale. Introducendo il campo di velocità approssimato  $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$

nell'espressione della risultante delle forze, si ottiene una formula nella quale compaiono gli integrali di superficie del prodotto delle funzioni di base e del versore normale,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} \approx \mathbf{R}^h &= - \oint_S \rho \mathbf{u}^h \mathbf{u}^h \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \rho \frac{\mathbf{u}^h \cdot \mathbf{u}^h}{2} \hat{\mathbf{n}} = \\
 &= -\rho \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{U}_i \mathbf{U}_j \cdot \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \rho \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{U}_j \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \\
 &= -\rho \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{U}_i \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{I}_{ij} + \frac{1}{2} \rho \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{U}_j \mathbf{I}_{ij} ,
 \end{aligned} \tag{4.152}$$

dove sono stati introdotti i vettori  $\mathbf{I}_{ij} = \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ , facilmente calcolabili in maniera analitica, come spiegato nella sezione §4.5.

### Sensibilità della risultante al campo di velocità.

Per ricavare tramite la formula RSS l'incertezza sulla misura della risultante delle forze  $\mathbf{R}$  dall'incertezza sulle misure del campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , è necessario calcolare la variazione di  $\mathbf{R}$  rispetto al campo  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ . Perturbando il campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  con la variazione  $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$ , e trascurando i termini di ordine superiore al primo, dopo aver sottratto l'equazione "non perturbata", si ottiene la perturbazione della risultante delle forze  $\delta \mathbf{R}$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} + \delta \mathbf{R} &= - \oint_S \rho (\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) (\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \frac{1}{2} \rho (\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) \hat{\mathbf{n}} \\
 \rightarrow \delta \mathbf{R} &= - \oint_S \rho [\mathbf{u} \hat{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \delta \mathbf{u}] + \oint_S \rho \hat{\mathbf{n}} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \\
 &= \oint_S \rho [-\mathbf{u} \otimes \hat{\mathbf{n}} - (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbb{I} + \hat{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{u}] \cdot \delta \mathbf{u} = \\
 &= \oint_S \nabla_u \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{u} = \\
 &= \oint_S \begin{bmatrix} \nabla_u R_x & \nabla_v R_x \\ \nabla_u R_y & \nabla_v R_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix} = \oint_S \begin{bmatrix} \nabla_u R_x \cdot \delta \mathbf{u} \\ \nabla_u R_y \cdot \delta \mathbf{u} \end{bmatrix} ,
 \end{aligned} \tag{4.153}$$

avendo introdotto il campo tensoriale della sensitività  $\nabla_u \mathbf{R}(\mathbf{x})$  della risultante delle forze rispetto al campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  ed evidenziato l'influenza delle due componenti del campo di velocità sulle due componenti di forza. L'equazione precedente può essere scritta con notazione indiciale

$$\delta R_i = \oint_S \nabla_{u_j} R_i \delta u_j = -\rho \oint_S [u_i n_j + u_k n_k \delta_{ij} - n_i u_j] \delta u_j , \tag{4.154}$$

o esplicitamente in coordinate cartesiane, per ricavare l'espressione della sensitività della componenti della forza dalle singole componenti del campo di velocità,

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \delta R_x = \rho \oint_S [-u n_x - u n_x - v n_y + u n_x] \delta u + \rho \oint_S [-u n_y + v n_x] \delta v \\ \delta R_y = \rho \oint_S [-v n_x + u n_y] \delta u + \rho \oint_S [-v n_y - u n_x - v n_y + v n_y] \delta v \end{cases} \\
 \rightarrow \begin{cases} \delta R_x = \rho \oint_S [-u n_x - v n_y] \delta u + \rho \oint_S [-u n_y + v n_x] \delta v = \oint_S \nabla_u R_x \delta u + \oint_S \nabla_v R_x \delta v \\ \delta R_y = \rho \oint_S [-v n_x + u n_y] \delta u + \rho \oint_S [-v n_y - u n_x] \delta v = \oint_S \nabla_u R_y \delta u + \oint_S \nabla_v R_y \delta v . \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.155}$$

**Sensitività della risultante alle misure di velocità.**

Partendo dall'espansione (4.150) del campo di velocità, la variazione del campo  $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$  diventa

$$\delta \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) \delta \mathbf{U}_i , \quad (4.156)$$

avendo indicato con  $\delta \mathbf{U}_i$  la variazione dei valori nodali del campo di velocità. Le funzioni di base sono note, e quindi la loro variazione è nulla.<sup>8</sup> Introducendo l'espressione (4.156) di  $\delta \mathbf{u}^h(\mathbf{x})$  all'interno della formula (4.153) che lega la variazione  $\delta \mathbf{R}$  alla variazione  $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,

$$\delta \mathbf{R} = \oint_S \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N_n} \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{U}_i = \sum_{i=1}^{N_n} \nabla_{\mathbf{U}_i} \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{U}_i , \quad (4.157)$$

si ricava l'espressione della sensitività  $\nabla_{\mathbf{U}_i} \mathbf{R}$  della risultante delle forze rispetto alla misura di velocità  $\mathbf{U}_i$ , in funzione della sensitività  $\nabla_{\mathbf{U}_i} \mathbf{R}(\mathbf{x})$  della risultante rispetto al campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  e alle funzioni di base  $\phi_i(\mathbf{x})$ ,

$$\nabla_{\mathbf{U}_i} \mathbf{R} = \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R} . \quad (4.158)$$

La sensitività  $\nabla_{\mathbf{U}_i} R_k$  della componente  $R_k$  della risultante delle forze rispetto alla misura  $\mathbf{U}_i$  è quindi

$$\nabla_{\mathbf{U}_i} R_k = \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{u}} R_k . \quad (4.159)$$

**Sensitività della risultante alle misure di velocità: discretizzazione.**

Inserendo l'approssimazione  $\mathbf{u}^h$  nella formula della sensitività  $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R}$ , è possibile calcolare la sensitività della risultante alle misure di velocità  $\mathbf{U}_i$ ,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{U}_i} \mathbf{R} &= \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R} = \\ &= \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \rho [-\mathbf{u} \otimes \hat{\mathbf{n}} - (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbb{I} + \hat{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{u}] = \\ &= \rho \sum_{j=1}^{N_n} \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) [-\mathbf{U}_j \otimes \hat{\mathbf{n}} - (\mathbf{U}_j \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbb{I} + \hat{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{U}_j] = \\ &= \rho \sum_{j=1}^{N_n} [-\mathbf{U}_j \otimes \mathbf{I}_{ij} - (\mathbf{U}_j \cdot \mathbf{I}_{ij}) \mathbb{I} + \mathbf{I}_{ij} \otimes \mathbf{U}_j] , \end{aligned} \quad (4.160)$$

avendo riconosciuto i vettori  $\mathbf{I}_{ij}$  definiti in precedenza. La sensitività della componente  $R_k$  alla misura  $\mathbf{U}_i$  vale

$$\nabla_{\mathbf{U}_i} R_k = \rho \sum_{j=1}^{N_n} [-U_{j,k} \mathbf{I}_{ij} - (\mathbf{U}_j \cdot \mathbf{I}_{ij}) \hat{\mathbf{e}}_k + I_{ij,k} \mathbf{U}_j] , \quad (4.161)$$

dove  $\hat{\mathbf{e}}_k$  è il versore in direzione  $k$  e  $U_{j,k}$ ,  $I_{ij,k}$  le componenti in quella direzione della misura  $\mathbf{U}_i$  e del vettore  $\mathbf{I}_{ij}$ .

---

<sup>8</sup>L'operazione di variazione ha proprietà simili a quelle di derivazione. Ad esempio la variazione del prodotto di due funzioni vale  $\delta(ab) = \delta a b + a \delta b$ .

**Osservazione 1.**

Si può dimostrare che le sensitività  $\nabla_{\mathbf{U}_i} \mathbf{R}$  sono le componenti del gradiente della formula (4.152) che esprime  $\mathbf{R}$  come una funzione quadratica delle variabili  $\mathbf{U}_i$ .

**Osservazione 2.**

Utilizzando la formula generale (4.160) o utilizzando la forma discretizzata delle espressioni (4.155), si può dimostrare che

$$\begin{aligned}\nabla_{U_{i,x}} R_x &= \nabla_{U_{i,y}} R_y = -\rho \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{I}_{ij} \\ -\nabla_{U_{i,y}} R_x &= \nabla_{U_{i,x}} R_y = -\rho \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{U}_j \times \mathbf{I}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}\quad (4.162)$$

**Incognita sulla risultante dall'incognita sulla misura di velocità.**

Utilizzando la formula del campo  $\mathbf{u}^h$ , viene calcolata la varianza  $\sigma_{R_k}^2$  della componente  $R_k$ ,

$$\begin{aligned}\sigma_{R_k}^2 &= E[\delta R_k \delta R_k] = \rho^2 E \left[ \oint_{S(\mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) \oint_{S(\mathbf{y})} \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{y}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{y}) \right] = \\ &= \oint_{S(\mathbf{x})} \oint_{S(\mathbf{y})} \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{x}) \cdot E[\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \delta \mathbf{u}(\mathbf{y})] \cdot \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{y}) \approx \\ &= \oint_{S(\mathbf{x})} \oint_{S(\mathbf{y})} \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{x}) \cdot \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{y}) E[\delta \mathbf{U}_i \otimes \delta \mathbf{U}_j] \cdot \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{y}),\end{aligned}\quad (4.163)$$

dove sono state indicate esplicitamente le variabili indipendenti  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  sulle quali devono essere svolte le integrazioni.

Si fa l'ipotesi che l'incognita della misura della componente in un punto sia indipendente dalla misura delle altre componenti della velocità nello stesso punto e dalla velocità negli altri punti del dominio. Si ipotizza inoltre che l'incognita sulla singola misura in tutto il dominio sia uguale a  $\sigma_U^2$  su tutte le componenti della velocità. L'espressione dei valori attesi  $E[\delta \mathbf{U}_i \otimes \delta \mathbf{U}_j]$  diventa quindi

$$E[\delta \mathbf{U}_i \otimes \delta \mathbf{U}_j] = \sigma_U^2 \delta_{ij} \mathbb{I} \quad (4.164)$$

e di conseguenza l'incognita della componente di forza  $R_k$ ,

$$\begin{aligned}\sigma_{R_k}^2 &= \oint_{S(\mathbf{x})} \oint_{S(\mathbf{y})} \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{x}) \cdot \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{y}) \sigma_U^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{N_n} \left\{ \oint_{S(\mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) \right\} \cdot \left\{ \oint_{S(\mathbf{y})} \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{y}) \phi_i(\mathbf{y}) \right\} \sigma_U^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{N_n} \nabla_{\mathbf{U}_i} R_k \cdot \nabla_{\mathbf{U}_i} R_k \sigma_U^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{N_n} |\nabla_{\mathbf{U}_i} R_k|^2 \sigma_U^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{N_n} ((\nabla_{U_{i,x}} R_k)^2 + (\nabla_{U_{i,y}} R_k)^2) \sigma_U^2,\end{aligned}\quad (4.165)$$

avendo riconosciuto la sensitività  $\nabla_{\mathbf{U}_i} R_k$  della componente di forza  $R_k$  rispetto alla misura della velocità  $\mathbf{U}_i = \mathbf{u}(\mathbf{x}_i)$ .

**Cenni sugli elementi finiti.**

In questo paragrafo si fornisce qualche dettaglio sulla discretizzazione “a elementi finiti” usata nel calcolo della risultante aerodinamica e della sua incertezza. Un dominio  $S$ , come ad esempio la superficie di controllo del volume di controllo considerato, viene suddiviso negli elementi  $S_k$ , l'unione dei quali costituisce il dominio  $S$

$$S = \bigcup_{k=1}^{N_e} S_k \quad (4.166)$$

e che non hanno punti in comune tra di loro se non i bordi. Vengono poi definite delle funzioni di base  $\phi_i(\mathbf{x})$ , grazie alle quali è possibile approssimare (sulle quali viene proiettata) una funzione generica

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) f_i . \quad (4.167)$$

La dipendenza dalla variabile spaziale  $\mathbf{x}$  è contenuta nelle funzioni di base  $\phi(\mathbf{x})$ , le quali vengono moltiplicate per i coefficienti  $f_i$ .

In generale, le funzioni  $\phi_i(\mathbf{x})$  sono regolari a tratti, essendo regolari all'interno dei singoli elementi  $S_k$  e continue sui loro bordi. Nel metodo degli *elementi finiti*, le funzioni di base sono *a supporto compatto*, cioè sono diverse da zero solo su un dominio chiuso e limitato: il carattere “locale” delle singole funzioni di base viene sfruttato nel metodo degli elementi finiti per operare con matrici sparse, all'interno delle quali solo pochissimi elementi sono diversi da zero in ogni riga o colonna. Il supporto della funzione  $\phi_i(\mathbf{x})$  è la parte di dominio al di fuori della quale la funzione è nulla. Nel metodo degli elementi finiti, il supporto di  $\phi_i(\mathbf{x})$  è costituito dagli elementi  $S_k$  ai quali appartiene il nodo  $\mathbf{x}_i$ . Indichiamo il supporto di  $\phi_i(\mathbf{x})$  con  $B_i$ .

Le funzioni di base vengono definite lagrangiane, se la funzione  $i$ -esima  $\phi_i(\mathbf{x})$  è uguale a uno sul nodo  $i$ -esimo  $\mathbf{x}_i$  e zero sugli altri nodi,

$$\phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} \quad , \quad \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) = 1 , \forall i = 1 : N_n . \quad (4.168)$$

In questo caso, i coefficienti  $f_i$  concidono con i valori nodali della funzione  $f(\mathbf{x})$ ,  $f_i := f(\mathbf{x}_i)$ . Viene definita una *connettività* della griglia degli elementi finiti, che consiste in un elenco ordinato dell'indice dei nodi di ogni elemento: in questa maniera viene definita una numerazione locale dei nodi di ogni singolo elemento, che risulta utile nel calcolo degli integrali. Viene indicato con  $I_k = \{i_{k1}, i_{k2}, \dots, i_{kn}\}$ , l'elenco degli  $n$  nodi dell'elemento  $S_k$ .

In figura 4.1 è rappresentata una parte di una suddivisione in elementi finiti  $S_k$  di un dominio monodimensionale, sul quale sono definite delle funzioni di base lagrangiane, lineari a tratti, a supporto compatto: ad esempio, la funzione di base  $\phi_{i2}(\mathbf{x})$  è diversa da zero solo sugli elementi  $S_{e1}$  e  $S_{e2}$ . Ogni elemento ha due nodi. Se viene definita la connettività nodi-elemento,

$$\begin{aligned} I_{e1} &= \{i_1, i_2\} , \\ I_{e2} &= \{i_2, i_3\} , \\ I_{e3} &= \{i_4, i_3\} , \end{aligned} \quad (4.169)$$

il nodo  $i_1$  è il primo nodo (quello che ha l'indice = 1 nella numerazione locale) dell'elemento  $S_{e1}$ , il nodo  $i_2$  è il secondo nodo di  $S_{e1}$  e il primo di  $S_{e2}$ , il nodo  $i_3$  è il secondo nodo sia di  $S_{e2}$  sia di  $S_{e3}$ , il nodo  $i_4$  è il primo nodo di  $S_{e3}$ .

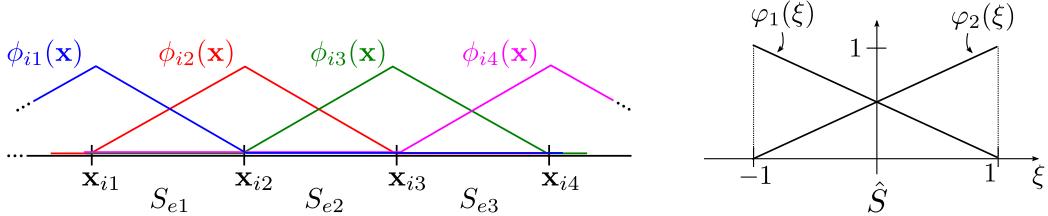


Figura 4.1: Esempio di funzioni di base lagrangiane lineari a tratti definite su un dominio monodimensionale.

Si utilizzano ora le proprietà della base di funzioni lineari a tratti  $\phi_i(\mathbf{x})$  per calcolare i vettori  $\mathbf{I}_{ij}$  che compaiono nel calcolo della risultante delle forze e nella sua varianza,

$$\mathbf{I}_{ij} := \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) . \quad (4.170)$$

Gli unici termini  $\mathbf{I}_{ij}$  che non sono nulli sono quelli in cui compaiono due funzioni, che hanno supporti a intersezione non nulla,  $B_i \cap B_j \neq 0$ . In questi termini, il dominio di integrazione può essere limitato alla sola intersezione dei supporti delle due funzioni, essendo il prodotto di queste nullo al di fuori di esso. Ad esempio, facendo riferimento alla figura 4.1, il termine  $\mathbf{I}_{i2,i1}$  può essere riscritto come

$$\mathbf{I}_{i2,i1} = \oint_S \phi_{i2}(\mathbf{x}) \phi_{i1}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} = \int_{B_{i2} \cap B_{i1}} \phi_{i2}(\mathbf{x}) \phi_{i1}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} = \int_{S_{e1}} \phi_{i2}(\mathbf{x}) \phi_{i1}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} , \quad (4.171)$$

il termine  $\mathbf{I}_{i2,i2}$  può essere riscritto come

$$\mathbf{I}_{i2,i2} = \oint_S \phi_{i2}(\mathbf{x}) \phi_{i2}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} = \int_{B_{i2}} \phi_{i2}(\mathbf{x}) \phi_{i2}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} = \int_{S_{e1} \cup S_{e2}} \phi_{i2}(\mathbf{x}) \phi_{i2}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} , \quad (4.172)$$

mentre il termine  $\mathbf{I}_{i2,i4}$  è nullo. Gli integrali sugli elementi  $S_i$  nello spazio “fisico” possono essere calcolati sull’elemento di riferimento  $\hat{S}$ , definito in  $\xi \in [-1, 1]$ . La trasformazione di coordinate che porta l’elemento di riferimento  $\hat{S}$  nell’elemento fisico  $S_k$  delimitato dai punti di coordinata  $x_{k1}$  e  $x_{k2}$  è

$$x = \frac{x_{k2} + x_{k1}}{2} + \frac{x_{k2} - x_{k1}}{2} \xi \quad (4.173)$$

e il suo “determinante” è

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{x_{k2} - x_{k1}}{2} = \frac{\ell_k}{2} . \quad (4.174)$$

Se si considera costante il versore normale  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}}$  sull’elemento finito  $S_{e1}$  e si utilizza la connettività nodi-griglia dell’esempio definita in (4.169), l’integrale  $\mathbf{I}_{i2,i1}$  può essere trasformato sull’elemento di riferimento

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{i2,i1} &= \int_{S_{e1}} \phi_{i2}(x) \phi_{i1}(x) \hat{\mathbf{n}} dx = \int_{\hat{S}} \varphi_2(\xi) \varphi_1(\xi) \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}} = \\ &= \int_{\xi=-1}^1 \varphi_2(\xi) \varphi_1(\xi) \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}} , \end{aligned} \quad (4.175)$$

avendo riconosciuto il legame tra l’elemento  $S_{e1}$  nel dominio fisico e quello di riferimento  $\hat{S}$ ,  $\phi_i(x) = \phi_i(x(\xi)) = \varphi_{i^\ell}(\xi)$ , dove è stato indicato con  $i^\ell$  l’indice locale del nodo globale con indice  $i$ : dalla connettività dell’elemento  $S_{e1}$  risulta  $i_1^\ell = 1$   $i_2^\ell = 2$ . Il “determinante”

della trasformazione è noto e costante,  $\partial x / \partial \xi|_{S_{e1}} = \ell_{S_{e1}}/2$ . L'espressione delle funzioni sull'elemento locale è facilmente ricavabile. Le funzioni di base lagrangiane devono essere uguali a 1 in un nodo e zero in tutti gli altri. Considerando i punti  $\xi = -1$  e  $x = 1$  come primo e secondo nodo dell'elemento di riferimento  $\hat{S}$ , le funzioni definite sull'elemento di riferimento valgono

$$\varphi_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad , \quad \varphi_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) . \quad (4.176)$$

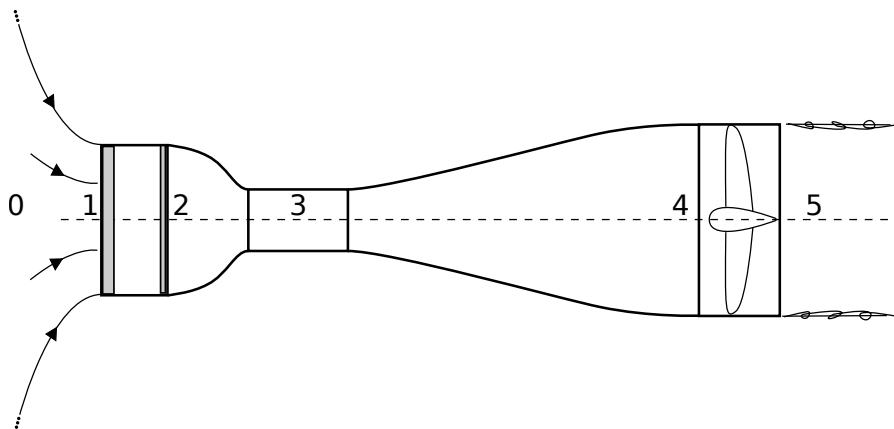
È immediato calcolare il valore degli integrali sull'elemento di riferimento,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi_1(\xi) \varphi_1(\xi) d\xi &= \frac{2}{3} \quad , \quad \int_{-1}^1 \varphi_1(\xi) \varphi_2(\xi) d\xi = \frac{1}{3} \\ \int_{-1}^1 \varphi_2(\xi) \varphi_1(\xi) d\xi &= \frac{1}{3} \quad , \quad \int_{-1}^1 \varphi_2(\xi) \varphi_2(\xi) d\xi = \frac{2}{3} . \end{aligned} \quad (4.177)$$

Questi valori vengono infine utilizzati nel calcolo dei vettori  $\mathbf{I}_{ij}$ . I vettori dell'esempio valgono

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{i2,i1} &= \int_{S_{e1}} \phi_{i2}(x) \phi_{i1}(x) \hat{\mathbf{n}} dx = \\ &= \int_{\xi=-1}^1 \varphi_2(\xi) \varphi_1(\xi) \left. \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|_{S_{e1}} d\xi \quad \hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}} = \frac{1}{3} \frac{\ell_{e1}}{2} \hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}} = \frac{\ell_{e1}}{6} \hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}} , \\ \mathbf{I}_{i2,i2} &= \int_{S_{e1} \cup S_{e2}} \phi_{i2}(x) \phi_{i2}(x) \hat{\mathbf{n}} dx = \\ &= \int_{S_{e1}} \phi_{i2}(x) \phi_{i2}(x) \hat{\mathbf{n}} dx + \int_{S_{e2}} \phi_{i2}(x) \phi_{i2}(x) \hat{\mathbf{n}} dx = \\ &= \int_{\xi=-1}^1 \varphi_2(\xi) \varphi_2(\xi) \left. \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|_{S_{e1}} d\xi \quad \hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}} + \int_{\xi=-1}^1 \varphi_1(\xi) \varphi_1(\xi) \left. \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|_{S_{e2}} d\xi \quad \hat{\mathbf{n}}_{S_{e2}} = \\ &= \frac{\ell_{e1}}{3} \hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}} + \frac{\ell_{e2}}{3} \hat{\mathbf{n}}_{S_{e2}} . \end{aligned} \quad (4.178)$$

**Esercizio 4.10 — Galleria a circuito aperto.** Viene chiesto di determinare la potenza dei motori della galleria a circuito aperto rappresentata in figura, sapendo che la velocità massima desiderata nella sezione di prova è  $V_{test} = 30 \text{ m/s}$ , l'area della sezione di prova è  $A_{test} = 1.0 \text{ m}^2$  e l'area della sezione in cui è alloggiato il ventilatore che mette in moto l'aria è  $A_{fan} = 2.0 \text{ m}^2$ . Si supponga che la corrente sia incompressibile e che la densità dell'aria sia  $\rho = 1.1 \text{ kg/m}^3$ . In una prima fase, si trascuri la caduta di pressione attraverso il nido d'ape e gli schermi presenti tra la sezione 1 e la sezione 2 del condotto. Successivamente si ripeta il calcolo con una caduta di pressione  $P_1 - P_2 = k\rho U^2$ , con  $k = \dots$ .



### Soluzione

**Concetti.** Si studia la galleria a circuito aperto rappresentata in figura utilizzando i bilanci integrali scritti per alcuni volumi di controllo fissi, per ricavare l'andamento della velocità e della pressione all'interno della galleria e infine ricavare la potenza dei motori, necessaria per garantire le condizioni di progetto nella sezione di prova. Si ipotizza un funzionamento stazionario, si trascurano gli effetti viscosi nel volume e sulle pareti della galleria e le forze di volume. In particolare, grazie alle ipotesi fatte, si possono semplificare il bilancio di massa,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \rightarrow \quad \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 , \quad (4.179)$$

e il bilancio dell'energia cinetica,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} &= - \oint_S \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \int_V \nabla \mathbf{u} : \mathbb{T} + \int_V \rho \mathbf{g} \\ &\rightarrow - \oint_S \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} = 0 . \end{aligned} \quad (4.180)$$

**Svolgimento.** Viene svolta la prima parte dell'esercizio, trascurando le perdite di pressione che avvengono tra la sezione 1 e la sezione 2, a causa della presenza dei nidi d'ape e delle reti.

Si scrive il bilancio di massa per un volume di fluido che ha come superficie di contorno la superficie  $S_0$ , la superficie laterale del tubo di flusso e una superficie  $S_i$  all'interno della galleria. Assumendo grandezze uniformi sulla sezione, si può scrivere

$$\rho A_0 U_0 = \rho A_i U_i , \quad (4.181)$$

cioè che il flusso di massa  $\dot{m}$  che attraversa le sezioni della galleria è costante. Se sono note le condizioni di progetto in camera di prova, da esser si può calcolare il flusso di massa,

$$\dot{m} = \rho A_3 U_3 = \rho A_{test} V_{test} = \dots . \quad (4.182)$$

Poiché la velocità all'infinito è nulla,  $U_0 \rightarrow 0$ , l'area della sezione all'infinito a monte deve tendere all'infinito  $A_0 \rightarrow \infty$ .

Si scrive poi il bilancio di energia cinetica per un volume di controllo che ha come contorno la superficie  $S_0$  all'infinito a monte, dove viene aspirata l'aria in uno stato di quiete, la superficie laterale del tubo di flusso, la superficie interna della galleria e la sezione  $S_4$  alla fine del divergente, poco prima dell'imbocco dei ventilatori. Poiché non ci sono organi meccanici in movimento, il termine  $\oint_S \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u}$  è nullo, e assumendo grandezze fisiche costanti sulle sezioni si può scrivere,

$$\rho A_0 U_0 \left( \frac{U_0^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} \right) = \rho A_4 U_4 \left( \frac{U_4^2}{2} + \frac{P_4}{\rho} \right) . \quad (4.183)$$

Poiché il flusso di massa che attraversa le sezioni considerate è costante, il bilancio di energia cinetica si riduce a un'espressione che ricorda quella del teorema di Bernoulli, così come viene enunciato alle scuole superiori,

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho U_0^2 = P_4 + \frac{1}{2} \rho U_4^2 \quad \rightarrow \quad B_4 = B_0 = P_{atm} , \quad (4.184)$$

avendo introdotto la definizione del "binomio di Bernoulli",  $B_i = P_i + \rho U_i^2 / 2$ .

Si scrive poi il bilancio di energia cinetica per il volume fluido  $V(t)$  che contiene il ventilatore, delimitato dalle superfici  $S_4$ ,  $S_5$  e la superficie interna della galleria e dalla superficie (mobile!) del ventilatore. Il bilancio diventa

$$\int_{S_4} \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} + \int_{S_5} \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} = \int_{S_{fan}} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} , \quad (4.185)$$

essendo il termine a destra dell'uguale la potenza delle forze essercitata dal ventilatore sul fluido, contraria a quella esercitata dal fluido sul ventilatore, ma uguale a quella che deve fornire il motore elettrico per poter garantire la rotazione del ventalore stesso. Se si trascurano gli sforzi viscosi sulle superfici  $S_4$  ed  $S_5$ ,  $\mathbf{t}_n = \mathbf{s}_n - P \hat{\mathbf{n}}$ , e se si esplicita la potenza che deve essere fornita dai motori, il bilancio diventa,

$$W_{mot} = \int_{S_4} \left( \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P \right) (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) + \int_{S_5} \left( \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P \right) (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) , \quad (4.186)$$

e facendo l'ipotesi di grandezze fisiche costanti sulle sezioni,

$$W_{mot} = \rho A_5 U_5 \left( \frac{U_5^2}{2} + \frac{P_5}{\rho} \right) - \rho A_4 U_4 \left( \frac{U_4^2}{2} + \frac{P_4}{\rho} \right) = \dot{m} (B_5 - B_4) . \quad (4.187)$$

Ricordando che il "binomio di Bernoulli" nelle sezioni 1:4 è uguale al "binomio di Bernoulli" nella sezione  $S_0$ , e quindi uguale alla pressione ambiente  $P_{atm}$ , nell'ipotesi che la pressione nella sezione  $S_5$  sia uguale alla pressione atmosferica  $P_{atm}$  all'esterno del tubo di flusso, la potenza del motore diventa,

$$W_{mot} = \dot{m} \frac{U_5^2}{2} , \quad (4.188)$$

e, riferendosi alle grandezze fisiche in camera di prova, può essere scritta come

$$\begin{aligned} W_{mot} &= \dot{m} \left( \frac{A_{test}}{A_{fan}} \right)^2 \frac{V_{test}^2}{2} \\ \rightarrow \quad W_{mot} &= \frac{1}{2} \rho A_{test} \left( \frac{A_{test}}{A_{fan}} \right)^2 V_{test}^3 = \dots kW . \end{aligned} \quad (4.189)$$

La formula della potenza dei motori necessaria al funzionamento della galleria mette in evidenza la dipendenza dal cubo della velocità di prova e dal quadrato del rapporto tra l'area della sezione di prova e l'area della sezione all'imbocco delle ventole. Questo ultimo termine dovrebbe chiarire uno degli obiettivi del divergente della galleria: rallentare la corrente dopo la sezione di prova, per poter ridurre la potenza dei motori da installare per garantire il funzionamento dell'impianto.

**Osservazione.** Potrebbe suscitare qualche perplessità il fatto che la corrente in uscita dall'impianto con velocità  $U_5 \simeq V_{fan}$  abbia una pressione uguale alla pressione ambiente,  $P_{atm}$ , come il fluido in quiete all'esterno del tubo di flusso. **Provando ad applicare il teorema di Bernoulli** tra un punto sulla sezione del tubo di flusso  $S_5$  e un punto all'esterno del tubo di flusso,

$$P_5 + \frac{1}{2} \rho V_{fan}^2 = P_5^{out} \rightarrow P_{atm} + \frac{1}{2} \rho V_{fan}^2 = P_{atm} , \quad (4.190)$$

si giungerebbe alla conclusione che  $V_{fan} = 0$ . L'errore risiede nell'applicazione del teorema di Bernoulli nella formula vista alla scuola superiore (o in altri corsi universitari), nonostante alcune ipotesi (che verranno presentate nel prosieguo del corso) non siano rispettate. In particolare, per collegare un punto sulla sezione  $S_5$  e un punto all'esterno del tubo di flusso viene attraversato uno strato di mescolamento tra la corrente in moto che esce dalla galleria e il fluido in quiete all'esterno: la presenza di questo strato di mescolamento, nel quale la corrente non è irrotazionale  $\omega \neq 0$ , fa cadere le ipotesi del teorema di Bernoulli e lo rende quindi inapplicabile. Tutte le parti evidenziate in rosso devono quindi essere considerate errate.

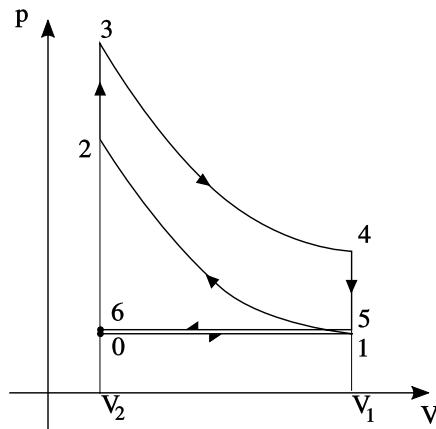
**Esercizio 4.11 — Motore alternativo.** Il funzionamento di un motore alternativo a benzina (a quattro tempi) può essere rappresentato in prima approssimazione con un ciclo termodinamico Otto ideale, rappresentato da una compressione adiabatica, una fase veloce di combustione a volume costante (nel punto morto superiore del moto del pistone, PMS) e un'espansione adiabatica. Le fasi di aspirazione e scarico dei gas combusti sono anch'essi ideali. L'aspirazione avviene a pressione costante durante il movimento del pistone dal PMS al punto morto inferiore (PMI). La fase di scarico avviene in due fasi: durante la prima fase la pressione diminuisce molto velocemente (approssimata da una trasformazione a volume costante) a causa dell'apertura della valvola di scarico quando il pistone si trova al PMI; durante la seconda fase i gas combusti sono spinti fuori dalla camera di combustione dal movimento ascendente del pistone che si riporta al PMS, per l'inizio del ciclo termodinamico successivo. Del motore sono noti:

- il rapporto di compressione, definito come il rapporto tra il volume massimo (pistone al PMI) e minimo (pistone al PMS) della camera di combustione,  $r = V_1/V_2 = 10$ ;
- la cilindrata, definita come la corsa del pistone per l'area della sezione del cilindro, e uguale alla differenza  $C = N(V_2 - V_1) = 1000 \text{ cc}$ , essendo  $N$  il numero di cilindri del motore;
- le condizioni termodinamiche dell'aria all'aspirazione  $P_0 = 85570 \text{ Pa}$ ,  $T_0 = 25^\circ\text{C}$ ;
- il rapporto in massa tra benzina e aria,  $f = m_f/m_a = 0.06$ ;
- il potere calorifico della benzina usata  $\Delta h = 43 \text{ MJ}$ ;
- la pressione nel basamento del motore,  $p_b = 150000 \text{ Pa}$  uniforme e costante. Si calcoli la potenza media erogata dal motore a un regime di rotazione di  $\Omega = 3000 \text{ RPM}$ , assumendo un rendimento meccanico  $\eta = 0.8$ . Si rappresenti l'aria come un gas bi-atomico perfetto ( $\gamma = c_p/c_v = 1.4$ ) con costante dei gas  $R = 287 \text{ J/(kg K)}$ , e si trascuri l'effetto del carburante sul valore dei calori specifici e sulla massa presente all'interno della camera di combustione. Si trascurino inoltre gli scambi di calore per conduzione con l'esterno del cilindro durante la compressione e l'espansione (trasformazioni adiabatiche). Si trascurino i termini cinetici nell'energia totale in camera di combustione, facendo coincidere l'energia totale con l'energia interna  $e^t = e = c_v T$ , e si assuma che le variabili termodinamiche siano uniformi (costanti in spazio, non in tempo) in camera di combustione.

### Soluzione

**Concetti.** Ogni fase del ciclo termodinamico viene analizzata con i bilanci integrali, per il volume corrispondente alla camera di combustione di un cilindro. Questo volume è un sistema aperto durante la fase di aspirazione e scarico (scambia massa con l'esterno), mentre è un sistema chiuso durante la compressione, la combustione e l'espansione (valvole chiuse, nessuno scambio di massa con l'esterno). Si calcola il lavoro svolto dal sistema durante un ciclo e si divide per il periodo per ricavare la potenza media.

**Svolgimento.** Conoscendo il numero dei cilindri  $N = 3$ , il rapporto di compressione  $r$  e la cilindrata  $C$  è possibile ricavare il valore del volume massimo  $V_1$  e minimo  $V_2$  della



camera di combustione.

$$\begin{cases} N(V_2 - V_1) = C \\ V_1/V_2 = r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_1 = \frac{r}{r-1} N \\ V_2 = \frac{1}{r-1} N \end{cases} \quad (4.191)$$

Si analizzano ora le fasi del ciclo termodinamico, fornendo una breve descrizione e ponendo attenzione allo scambio di massa (sistema chiuso/aperto), lavoro e calore con l'esterno.

- **Aspirazione**,  $0 \rightarrow 1$ : la prima fase del ciclo Otto è l'aspirazione. Durante la fase di aspirazione (ideale), la valvola di aspirazione è aperta e il sistema scambia massa con l'esterno: il pistone si sposta dal PMS al PMI e la camera di combustione si riempie d'aria a pressione e temperatura costante,

$$p_1 = p_0 \quad , \quad T_1 = T_0 \quad , \quad \rho_1 = \rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \quad (4.192)$$

La massa contenuta nella camera di combustione alla chiusura della valvola, in coincidenza del PMI, è

$$m = \rho_1 V_1 = \dots \quad (4.193)$$

Durante la fase di aspirazione, il pistone deve vincere la sovrapressione del basamento (di solito la pressione nel basamento è superiore a quella aspirata in camera di combustione). Dal PMS al PMI un pistone assorbe parte della potenza fornita dagli altri pistoni. Il lavoro che assorbe è  $L_{01} = -(p_b - p_0) c$  (negativo poiché assorbito), essendo  $c$  la corsa del pistone e la differenza di pressione costante durante l'aspirazione. Questo lavoro assorbito durante l'aspirazione sarà uguale e contrario a quello fornito durante lo scarico ideale dei gas, che avviene alla stessa differenza di pressione con un moto opposto.

- **Compressione**,  $1 \rightarrow 2$ : la seconda fase del ciclo termodinamico è la compressione del fluido che avviene a causa del movimento verso l'alto del pistone. Il sistema è chiuso: le valvole sono chiuse e si ipotizza che non ci sia trafiletto (*blow-by*) tra il pistone e la superficie laterale del cilindro. Il bilancio di energia totale per il fluido contenuto all'interno del volume  $V(t)$  (variabile nel tempo, a causa del moto del

pistone) della camera di combustione,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e^t + \oint_{S(t)} \rho e^t (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{S(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \rho r . \quad (4.194)$$

può essere semplificato, trascurando l'effetto delle forze di volume,  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ , trascurando la trasmissione del calore con l'esterno (trasformazione adiabatica),  $\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ , e non essendoci sorgenti di calore,  $r = 0$ . Inoltre non c'è flusso di massa attraverso il contorno  $S(t)$  del volume,  $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ , e l'unica superficie in movimento della camera di combustione corrisponde al cielo (la faccia superiore) del pistone,  $S_c$ . Trascurando il contributo cinetico e approssimando l'energia totale  $e^t = e + |\mathbf{u}|^2/2$  con l'energia interna  $e$ , il bilancio di energia diventa,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e = \int_{S_c(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} , \quad (4.195)$$

legando la derivata temporale dell'energia del fluido nella camera di combustione alla potenza delle forze esercitate dal pistone sul fluido. La potenza delle forze agenti sul pistone è uguale all'integrale superficiale del prodotto scalare vettore sforzo  $\mathbf{t}_{n,s}$  agente sul solido per la velocità  $\mathbf{v}$  della superficie del solido,

$$\begin{aligned} W_{12} &= \oint_{S_s} \mathbf{t}_{n,s} \cdot \mathbf{v} = \int_{S_{s,c}} \mathbf{t}_{n,s} \cdot \mathbf{v} + \int_{S_{s,b}} \mathbf{t}_{n,s} \cdot \mathbf{v} + \int_{S_{s,lat}} \mathbf{t}_{n,s} \cdot \mathbf{v} = \\ &= - \int_{S_c} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \int_{S_{s,b}} p_b \hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{v} , \end{aligned} \quad (4.196)$$

avendo suddiviso la superficie del cilindro  $S_s$  come l'unione della superficie superiore  $S_{s,c}$  (cielo), superficie laterale  $S_{s,lat}$  (dal contributo nullo, per simmetria), e superficie inferiore  $S_{s,b}$  esposta verso il basamento del motore, sulla quale agisce uno sforzo dovuto alla pressione  $p_b$  dell'ambiente all'interno del basamento. È stato indicata con  $\hat{\mathbf{n}}_s$  la normale uscente dalla superficie del solido e con  $\mathbf{t}_{n,s}$  il vettore sforzo agente su un punto della superficie del solido, uguale e contrario a quello agente sul fluido  $\mathbf{t}_n = -\mathbf{t}_{n,s}$  per il principio di azione e reazione. Inoltre, le condizioni al contorno impongono che il fluido e il solido abbiano la stessa velocità  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  sulle superfici di contatto. Si può quindi riscrivere il bilancio di energia del fluido in funzione della potenza  $W_{12}$  trasmessa al pistone,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e = -W_{12} - p_b S_c v(t) = -W_{12} - p_b \frac{dV}{dt} , \quad (4.197)$$

essendo  $v(t)$  la velocità del pistone, per ottenere la potenza trasmessa al pistone dal fluido (sarà una potenza richiesta,  $< 0$ ),

$$\begin{aligned} W_{12}(t) &= -\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e - p_b \frac{dV}{dt} = \\ &= -\frac{d}{dt} (\rho V e) - p_b \frac{dV}{dt} = \\ &= -m \frac{de}{dt} - p_b \frac{dV}{dt} , \end{aligned} \quad (4.198)$$

nell'ipotesi di variabili termodinamiche uniformi nel volume, ricordando che la massa contenuta nella camera di combustione  $m = \rho V$  rimane costante, essendo un sistema chiuso, se si trascura l'effetto di trafileamento tra le pareti di cilindro e pistone (ridotte

al minimo da fasce elastiche e anelli raschiaolio sul pistone e sovra-pressione nel basamento).

Integrando in tempo la potenza istantanea  $W_{12}(t)$ , tra il punto 1 e il punto 2 del ciclo, si ottiene il lavoro di compressione

$$L_{12} = -m(e_2 - e_1) - p_b(V_2 - V_1) . \quad (4.199)$$

Utilizzando la legge di stato dei gas perfetti  $p = \rho RT$  e il legame tra le variabili termodinamiche durante una trasformazione adiabatica  $p/\rho^\gamma = \text{cost}$ , si ottiene

$$e_2 - e_1 = c_v(T_2 - T_1) = c_v T_1 \left[ \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = c_v T_1 \left( r^{\gamma-1} - 1 \right) . \quad (4.200)$$

- **Combustione**,  $2 \rightarrow 3$ : la terza fase del ciclo termodinamico è la combustione. Viene iniettato il combustibile all'interno della camera di combustione, innescata dall'accensione di una candela in un motore a benzina classico. Durante l'iniezione del combustibile il sistema è aperto. In prima approssimazione si può trascurare la variazione di massa,  $m + m_f = m(1 + f) \simeq m$ . In prima approssimazione, si può rappresentare questa fase con una trasformazione isocora (volume costante) associata a un aumento di pressione e temperatura, a causa di una combustione (completa) veloce in corrispondenza del PMS. Il bilancio di energia che descrive questa fase diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e &= \int_{V(t)} \rho r \\ m \frac{de}{dt} = \dot{m}_f \Delta h &\rightarrow e_3 - e_2 = \frac{\dot{m}_f}{m} \Delta h = f \Delta h . \end{aligned} \quad (4.201)$$

Utilizzando l'espressione dell'energia interna  $e = c_v T$ ,

$$c_v T_3 = c_v T_2 + f \Delta h . \quad (4.202)$$

- **Espansione**,  $3 \rightarrow 4$ : la quarta fase del ciclo è l'espansione. Trascurando gli scambi di calore con l'esterno, la trasformazione è adiabatica. Facendo le stesse ipotesi fatte per la fase di compressione, si ottiene un lavoro di espansione (fornito al pistone,  $> 0$ )

$$L_{34} = -m(e_4 - e_3) - p_b(V_4 - V_3) . \quad (4.203)$$

Utilizzando la legge di stato dei gas perfetti  $p = \rho RT$  e il legame tra le variabili termodinamiche durante una trasformazione adiabatica  $p/\rho^\gamma = \text{cost}$ , si ottiene

$$\begin{aligned} e_4 - e_3 &= c_v(T_4 - T_3) = \\ &= c_v T_3 \left[ \left( \frac{\rho_4}{\rho_3} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = \\ &= c_v T_3 \left( r^{-\gamma+1} - 1 \right) = \\ &= c_v T_2 \left( r^{-\gamma+1} - 1 \right) + f \Delta h \left( r^{-\gamma+1} - 1 \right) = \\ &= c_v T_1 \left( 1 - r^{\gamma-1} \right) + f \Delta h \left( r^{-\gamma+1} - 1 \right) = . \end{aligned} \quad (4.204)$$

- **Scarico**,  $4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 6$ : la fase di scarico (libera) è considerata istantanea e quindi non viene compiuto lavoro da parte del fluido sul sistema meccanico. Durante la fase di scarico forzata, mentre si muove dal PMI al PMS, il pistone compie un lavoro  $L_{46} = (p_b - p_0)c$ , uguale e contrario a quello compiuto durante la fase di aspirazione se la pressione di aspirazione e di scarico sono uguali ( $p_0 = p_1 = p_5$ ).

Il lavoro complessivo fornito dal fluido al sistema meccanico durante un ciclo è quindi uguale a

$$\begin{aligned} L &= L_{12} + L_{34} = \dots = \\ &= f m \Delta h \left( 1 - r^{-\gamma+1} \right) . \end{aligned} \quad (4.205)$$

Il risultato ottenuto può essere facilmente interpretato in termini termodinamici, essendo  $Q_{in} = f m \Delta h$  il calore fornito alla macchina termica e  $\eta = 1 - r^{-\gamma+1}$  il rendimento del ciclo Otto espresso in funzione del rapporto di compressione  $r$ ,

$$L = \eta Q_{in} . \quad (4.206)$$

Nonostante il risultato ottenuto non sia nuovo, lo svolgimento dovrebbe fornire uno svolgimento più dettagliato che parta dai principi fisici, rappresentati dai bilanci integrali, ed evidenziare il ruolo delle ipotesi fatte per ricavare il risultato, come ad esempio l'assenza di flussi di calore durante la fase di compressione e espansione adiabatica.

Per ottenere la potenza media fornita dal motore, bisogna moltiplicare il lavoro  $L$  fornito da un pistone per il numero  $N$  dei cilindri del motore e dividere per il periodo del ciclo  $T = \frac{2\pi n}{\Omega^2}$ , essendo  $\Omega$  la velocità di rotazione dell'albero motore ed  $n = 4$  il numero dei tempi del motore,

$$W = \frac{NL}{T} = \frac{\Omega}{n\pi} f \Delta h \rho_1 N V_1 \left( 1 - r^{1-\gamma} \right) , \quad (4.207)$$

e introducendo la definizione di cilindrata,

$$W = \frac{NL}{T} = \frac{\Omega}{n\pi} f \Delta h \rho_1 C \frac{r}{r-1} \left( 1 - r^{1-\gamma} \right) = 43.14 \text{ kW} = 58.6 \text{ CV} . \quad (4.208)$$

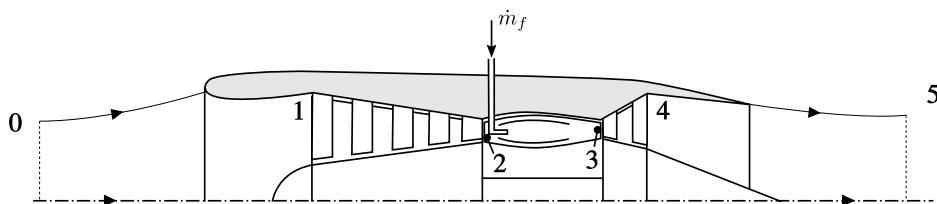
**Esercizio 4.12 — Motore a getto.** Un aereo vola alla velocità  $V = 250 \text{ m/s}$  alla quota  $z = 10000 \text{ m}$ , dove la pressione e la temperatura atmosferica sono  $P_0 = 26500 \text{ Pa}$  e  $T_0 = 223.25 \text{ K}$ , spinto dal motore a getto rappresentato in figura. Sapendo che:

- $0 \rightarrow 1$ : la presa d'aria è progettata per ottenere una compressione adiabatica ideale (isentropica), con  $P_1/P_0 = 1.5$ ;
- $1 \rightarrow 2$ : il compressore ideale ha una sezione di ingresso  $A_1 = \dots$  e produce un rapporto di pressione totale  $P_2^t/P_1^t = 40.0$ , tramite una trasformazione adiabatica ideale;
- $2 \rightarrow 3$ : il combustore garantisce una perfetta combustione mantenendo costante la pressione totale al suo interno  $P_2^t = P_3^t$ ; il flusso di calore prodotto dalla combustione è uguale a  $\dot{Q}_c = \dot{m}_f \Delta h_c$ , dove  $\dot{m}_f$  è il flusso di massa di combustibile e  $\Delta h_c = 46 \text{ MJ/kg}$  il suo potere calorifico; la temperatura totale all'ingresso della turbina è  $T_4^t = 1600 \text{ K}$ ;
- $3 \rightarrow 4$ : nella turbina avviene un'espansione adiabatica ideale, in modo tale da garantire la potenza necessaria a mantenere in moto il compressore;
- $4 \rightarrow 5$ : nell'ugello avviene un'espansione adiabatica ideale, che porta il gas a espandersi fino alla pressione ambiente  $P_5 = P_0$ .

Si considerino tutti i componenti meccanici ideali, si trascurino gli effetti viscosi dove possibile e si consideri l'aria e la miscela di gas combusti come un gas biatomico ideale, con costante dei gas  $R = 287 \text{ J/(kg K)}$  e calori specifici costanti.

Viene chiesto di calcolare:

- il rapporto in massa tra flusso di combustibile e flusso di aria,  $f = \dot{m}_f/\dot{m}_a$ ;
- la spinta  $T$  fornita dal motore.



### Soluzione

**Concetti.** Durante lo svolgimento dell'esercizio vengono utilizzati i bilanci integrali di massa,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho + \oint_{S(t)} \rho(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 , \quad (4.209)$$

quantità di moto,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} + \oint_{S(t)} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V(t)} \mathbf{f} + \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n , \quad (4.210)$$

ed energia totale,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e^t + \oint_{S(t)} \rho e^t (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{S(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \rho r . \quad (4.211)$$

In particolare, il bilancio di quantità di moto permette di ricavare la formula della spinta del motore in funzione del flusso di quantità di moto attraverso un volume di controllo opportunamente scelto. Il bilancio di energia totale permette di analizzare i singoli componenti del motore.

**Svolgimento.** Per risolvere il problema, è necessario ricavare la spinta del motore in funzione della portata massica trattata e della differenza di velocità del fluido in ingresso e in uscita dal motore. Successivamente viene analizzato il sistema motore per calcolare la velocità di efflusso dei gas. Si considera il problema stazionario, con forze di volume  $\mathbf{f}$  trascurabili. Si svolge uno studio “quasi-1D” considerando variabili uniformi sulle varie sezioni del motore.

#### Formula della spinta.

Nell’ipotesi che la pressione dei gas in uscita dall’ugello sia uguale alla pressione ambiente, il bilancio di quantità di moto del fluido trattato dal motore permette di ottenere la stima della trazione generata dal motore,

$$T = \dot{m}_5 V_5 - \dot{m}_0 V_0 = \dot{m}_0 (V_5 - V_0) + \dot{m}_f V_5 . \quad (4.212)$$

Per ricavare la trazione  $T$  è necessario ricavare i valori del flusso di massa d’aria ingerito dal motore, il flusso di combustibile e la velocità di efflusso dei gas combusti, studiando in dettaglio il fluido all’interno del motore

#### Analisi del motore.

Si studia l’evoluzione della corrente che attraversa il motore.

- 0 → 1, presa d’aria: l’aria che approccia l’ingresso del compressore  $S_1$  subisce una compressione libera adiabatica ideale. Dato lo stato termodinamico TD(0), con  $\rho_0 = P_0/(RT_0) = 0.414 \text{ kg/m}^3$ , e il rapporto di pressione  $P_1/P_0$ , è possibile calcolare lo stato termodinamico TD(1):

$$P_1 = \left( \frac{P_1}{P_0} \right) P_0 = 39750 \text{ Pa} \quad , \quad \rho_1 = \left( \frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \rho_0 = 0.553 \text{ kg/m}^3 . \quad (4.213)$$

Una volta note la pressione e la densità, è possibile calcolare la temperatura e l’entalpia del fluido,

$$T_1 = \frac{P_1}{R T_1} = 250.67 \text{ K} \quad , \quad h_1 = c_P T_1 = 2.52 \cdot 10^5 \text{ J/kg} . \quad (4.214)$$

Si calcola ora il flusso di massa che entra nel volume,

$$\dot{m}_0 = \dot{m}_1 \quad , \quad \rho_0 V_0 A_0 = \rho_1 V_1 A_1 . \quad (4.215)$$

Si calcola il flusso di massa utilizzando la sezione 1. Poiché non ci sono organi meccanici che assorbono o forniscono potenza, non ci sono sorgenti di calore e possono essere trascurati gli effetti viscosi, tra le sezioni 0 e 1 si conserva il flusso di entalpia totale,

$$\dot{m}_0 h_0^t = \dot{m}_1 h_1^t \quad \rightarrow \quad h_0^t = h_1^t = h_1 + \frac{V_1^2}{2} = 2.56 \cdot 10^5 \text{ J/kg} . \quad (4.216)$$

$$\rightarrow \quad V_1 = \sqrt{2(h_0^t - h_1)} = 86.09 \text{ m/s} \quad (4.217)$$

$$\dot{m}_1 = \rho_1 A_1 V_1 = 47.57 \text{ kg/s}$$

- $1 \rightarrow 2$ , compressore: lo stato termodinamico totale in uscita del compressore è legato allo stato totale in ingresso da una trasformazione isentropica,

$$P_2^t = \left( \frac{P_2^t}{P_1^t} \right) P_1^t = 1.67 \cdot 10^6 \text{ Pa} \quad , \quad T_2^t = \left( \frac{P_2^t}{P_1^t} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_1^t = 729.76 \text{ K} . \quad (4.218)$$

Trascurando gli effetti viscosi sulla superficie di ingresso e di uscita del compressore, in assenza di scambi di calore, la potenza fornita dal compressore al fluido vale

$$W_{12} = \dot{m}_1 (h_2^t - h_1^t) = 22.72 \text{ MW} . \quad (4.219)$$

- $2 \rightarrow 3$ , combustore: la temperatura totale  $T_3^t = \dots$  in ingresso alla turbina è un dato del problema determinato dai limiti tecnologici legati alla realizzazione delle palette del rotore della turbina e al fenomeno di creeping. Nel combustore non ci sono organi meccanici in movimento che forniscano o assorbano potenza dal fluido. Si trascurano gli effetti viscosi e le forze di volume. Se si ipotizza la combustione completa del comustibile iniettato come origine del calore generato e si trascura il flusso di entalpia totale attraverso l'iniettore, il bilancio di energia totale in regime stazionario diventa

$$\dot{m}_3 h_3^t - \dot{m}_2 h_2^t - \underbrace{\dot{m}_f h_f^t}_{\approx 0} = \dot{Q}_c = \dot{m}_f \Delta h_c . \quad (4.220)$$

Poiché il flusso di massa dei gas combusi uscenti dal combustore  $\dot{m}_3$  è uguale alla somma del flusso d'aria  $\dot{m}_2$  e il flusso di combustibile  $\dot{m}_f$  entranti,

$$\dot{m}_3 = \dot{m}_2 + \dot{m}_f , \quad (4.221)$$

il rapporto tra il flusso di massa del combustibile e dell'aria diventa,

$$f := \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_2} = \frac{h_3^t - h_2^t}{\Delta h_c - h_3^t} = \frac{T_3^t - T_2^t}{\Delta h_c / c_P - T_3^t} = 0.0197 . \quad (4.222)$$

Se si ipotizza che la pressione totale rimanga costante all'interno del combustore, lo stato termodinamico totale in uscita dal combustore è determinato dal valore della pressione e della temperatura totale,  $P_3^t$  e  $T_3^t$ ,

$$\rho_3^t = \frac{P_3^t}{RT_3^t} = 3.64 \text{ kg/m}^3 \quad , \quad h_3^t = c_P T_3^T = 1.61 \cdot 10^6 \text{ J/kg} . \quad (4.223)$$

- $3 \rightarrow 4$ , turbina: la turbina deve generare la potenza  $W_{34}$  necessaria a muovere il compressore,

$$W_{12} + W_{34} = 0 . \quad (4.224)$$

Se si trascurano gli effetti viscosi e si ipotizza un processo adiabatico, la potenza della turbina è uguale alla differenza del flusso di entalpia totale tra l'uscita e l'ingresso della turbina,

$$W_{34} = \dot{m}_3 (h_4^t - h_3^t) . \quad (4.225)$$

L'entalpia totale all'uscita della turbina vale

$$h_4^t = h_3^t - \frac{1}{1+f}(h_2^t - h_1^t) = 1.13 \cdot 10^6 \text{ J/kg} \quad \rightarrow \quad T_4^t = 1124.6 \text{ K} . \quad (4.226)$$

La trasformazione isentropica lega lo stato termodinamico totale TD(3) in ingresso alla turbina allo stato termodinamico totale TD(4) in uscita,

$$\begin{aligned} P_4^t &= \left( \frac{T_4^t}{T_3^t} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} P_3^t = 4.87 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ \rho_4^t &= 1.51 \text{ kg/m}^3 . \end{aligned} \quad (4.227)$$

- 4 → 5, ugello: se si considera un'espansione libera nell'ugello ideale, trascurando gli effetti viscosi e gli scambi di calore, il bilancio dell'energia totale in assenza di organi meccanici che generino o assorbano potenza dal fluido equivale alla conservazione del flusso dell'entropia totale,

$$\dot{m}_4 h_4^t = \dot{m}_5 h_5^t \quad \rightarrow \quad h_4^t = h_5 + \frac{V_5^2}{2} \quad \rightarrow \quad V_5 = \sqrt{2(h_4^t - h_5)} \quad (4.228)$$

Se l'ugello non è bloccato la pressione dei gas in uscita è uguale alla pressione atmosferica,  $P_5 = P_0$ . La trasformazione isentropica tra 4 e 5, permette di ricavare lo stato termodinamico TD(5),

$$\begin{aligned} \rho_5 &= \left( \frac{P_5}{P_4^t} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \rho_4^t = 0.189 \text{ kg/m}^3 \\ T_5 &= 489.5 \text{ K} \quad \rightarrow \quad h_5 = 4.92 \cdot 10^5 \text{ J/kg}. \end{aligned} \quad (4.229)$$

La velocità di efflusso dei gas combusti vale quindi

$$V_5 = \sqrt{2(h_4^t - h_5)} = 1129.6 \text{ m/s.} \quad (4.230)$$

La spinta fornita dal motore in questa condizione di volo vale

$$T = \dot{m}_5 V_5 = 42.90 \text{ kN} . \quad (4.231)$$



## 5. Teorema di Bernoulli

Per fluidi incompressibili o barotropici (per i quali la pressione è funzione solo della densità), il teorema di Bernoulli si ottiene dal bilancio della quantità di moto. Si elencano qui tre forme del teorema di Bernoulli, ognuna caratterizzata da diverse ipotesi. Tramite l'identità vettoriale

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}), \quad (5.1)$$

applicata al termine convettivo  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ , è possibile ottenere la forma del Crocco dell'equazione della quantità di moto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla P &= \mathbf{g} \\ \left( (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} \right) \\ \rightarrow \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla P &= \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

avendo indicato con  $P$  il potenziale termodinamico,  $P =$  che si riduce al rapporto  $p/\rho$  nel caso di densità costante e con  $\mathbf{g}$  le forze per unità di massa.

### Prima forma del teorema di Bernoulli

Nel caso di fluido non viscoso, incompressibile o barotropico, in regime stazionario ( $\partial/\partial t \equiv 0$ ), con forze di massa conservative  $\mathbf{g} = -\nabla\chi$ , il trinomio di Bernoulli  $|\mathbf{u}|^2/2 + P + \chi$  è costante lungo le linee di corrente e le linee vorticose, cioè

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P + \chi \right) = 0, \quad (5.3)$$

con  $\hat{\mathbf{t}}$  versore tangente alle linee di corrente o alle linee vorticose. Infatti, il termine  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$  nell'equazione della quantità di moto nella forma di Crocco (5.2) è perpendicolare in ogni

punto del dominio alle linee di corrente ( $\hat{\mathbf{t}}$  parallelo al campo di velocità  $\mathbf{u}$ ) e alle linee vorticose ( $\hat{\mathbf{t}}$  parallelo al campo di vorticità  $\boldsymbol{\omega}$ ): moltiplicando scalarmente l'equazione (5.2) scritta per un fluido non viscoso ( $\nu = 0$ ) per il versore  $\hat{\mathbf{t}}$ , il prodotto scalare  $\hat{\mathbf{t}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})$  è identicamente nullo.

### Seconda forma del teorema di Bernoulli

Nella corrente irrotazionale ( $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ) di un fluido non viscoso, incomprimibile o barotropico, in regime stazionario, con forze di massa conservative  $\mathbf{g} = -\nabla\chi$ , il trinomio di Bernoulli  $|\mathbf{u}|^2/2 + P + \chi$  è costante in tutto il dominio, cioè

$$\nabla \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P + \chi \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + P + \chi = C. \quad (5.4)$$

### Terza forma del teorema di Bernoulli

Nella corrente irrotazionale ( $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ) di un fluido non viscoso, incomprimibile o barotropico, in un dominio semplicemente connesso (nel quale è quindi possibile definire il potenziale cinetico  $\phi$ , t.c.  $\mathbf{u} = \nabla\phi$ , con forze di massa conservative  $\mathbf{g} = -\nabla\chi$ , il quadrinomio di Bernoulli  $\partial\phi/\partial t + |\mathbf{u}|^2/2 + P + \chi$  è uniforme (costante in spazio, in generale **non** in tempo) in tutto il dominio, cioè

$$\nabla \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + P + \chi \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + P + \chi = C(t). \quad (5.5)$$

### Teoremi di Bernoulli per fluidi viscosi incomprimibili

Mentre la prima forma del teorema di Bernoulli non è valida se non viene fatta l'ipotesi di fluido non viscoso<sup>1</sup>, la seconda e la terza forma sono ancora valide per fluidi viscosi incomprimibili. Infatti, usando l'identità vettoriale

$$\Delta\mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (5.7)$$

si scopre che il laplaciano del campo di velocità per correnti irrotazionali ( $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ) di fluidi incomprimibili ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ) è nullo.



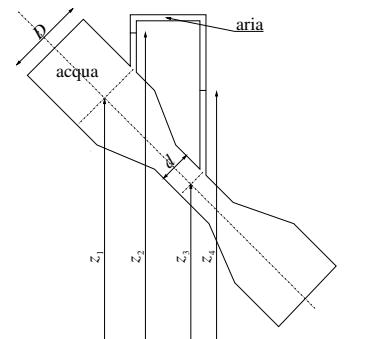
L'ipotesi di fluido non viscoso non è direttamente necessaria per la seconda e la terza forma del teorema di Bernoulli, ma lo diventa tramite l'ipotesi di corrente irrotazionale. Sotto opportune ipotesi sulla corrente asintotica, verificate in molti casi di interesse aeronautico, si dimostra che (quasi) tutto il campo di moto è irrotazionale solo se viene fatta l'ipotesi di fluido non viscoso. Questo modello viene utilizzato per studiare correnti di interesse aeronautico, nelle quali gli effetti della viscosità sono (quasi ovunque) trascurabili: un esempio è la corrente, uniforme a monte, che investe un corpo aerodinamico a bassi angoli di incidenza (corpo affusolato, attorno al quale non si verifichino separazioni) per alti numeri di Reynolds: in queste correnti, le zone vorticose sono confinate in regioni di spessore sottile (strato limite sulla superficie dei corpi solidi e scie libere).

---

<sup>1</sup>Moltiplicando scalarmente l'equazione (5.2) per il versore  $\hat{\mathbf{t}}$ , il termine  $\hat{\mathbf{t}} \cdot \nu \Delta \mathbf{u}$  non si annulla. Rimane quindi

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P + \chi \right) - \nu \hat{\mathbf{t}} \cdot \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (5.6)$$

**Esercizio 5 .1 — Venturi.** Determinare la portata d'acqua che scorre all'interno del tubo di Venturi rappresentato in figura, quando sia trascurabile ogni effetto dissipativo all'interno della corrente e la velocità uniforme nelle sezioni considerate e a monte del Venturi. Dati: densità dell'acqua  $\bar{\rho} = 999 \text{ kg/m}^3$ , densità dell'aria  $\bar{\rho} = 1.225 \text{ kg/m}^3$ , diametro del tubo  $D = 2 \text{ cm}$ , diametro della sezione di gola  $d = 1 \text{ cm}$ , altezze:  $z_1 = 10 \text{ cm}$ ,  $z_2 = 1.2 \text{ m}$ ,  $z_3 = 5 \text{ cm}$ ,  $z_4 = 0.5 \text{ m}$ .  
 $(Q = 3.01 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}, \bar{Q} = 3.005 \cdot 10^{-1} \text{ kg/s})$



### Soluzione

**Concetti.** Teorema di Bernoulli. Equazione della vorticità. Conseguenze delle ipotesi di stazionarietà, fluido incomprensibile, non viscoso, irrotazionale. Dominio di applicabilità del teorema di Bernoulli. Condizioni all'interfaccia. Legge di Stevino.

**Svolgimento.** Il problema viene risolto in diversi passi successivi: in principio vengono fatte alcune ipotesi semplificative ( $\rho = \bar{\rho}$ ,  $\mu = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ); poi si utilizza l'equazione della vorticità per semplificare ulteriormente il problema; si determina il dominio in cui è applicabile il teorema di Bernoulli con le ipotesi fatte; si osserva che la parte restante del problema è un problema di statica; si determinano le condizioni di interfaccia tra i due domini; solo a questo punto è possibile scrivere il sistema di equazioni dal quale ricavare le quantità richieste dal problema.

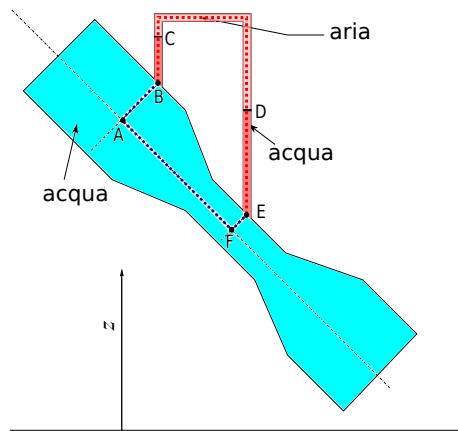
- Il testo del problema consente di fare le seguenti ipotesi: fluido incomprensibile, non viscoso, stazionario.
- L'ipotesi di flusso non viscoso e quella di velocità uniforme a monte permettono di definire il dominio all'interno del quale è possibile applicare il teorema di Bernoulli, aggiungendo l'ipotesi di irrotazionalità alle tre ipotesi precedenti. Infatti, l'equazione della vorticità può essere scritta come:

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (5.8)$$

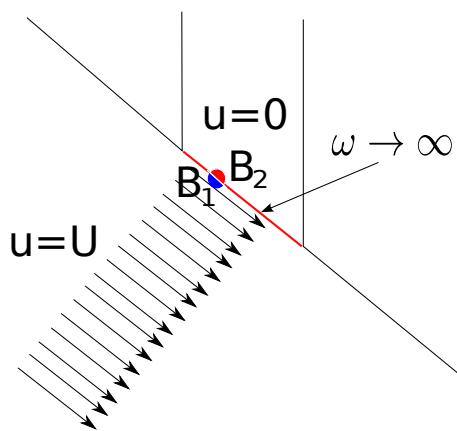
La derivata materiale rappresenta la variazione di una quantità associata a una particella materiale che segue il moto del fluido. Poiché la vorticità nella sezione a monte è nulla (il profilo di velocità è uniforme quindi le derivate spaziali sono nulle), la vorticità rimane nulla ( $\frac{df}{dt} = af$ , se  $f = 0$  all'istante iniziale la sua derivata in quell'istante è nulla, quindi  $f$  non varia, quindi rimane uguale a zero).

- Il dominio in cui è possibile applicare il teorema di Bernoulli con le ipotesi di incomprensibilità, assenza di viscosità ed effetti dissipativi, stazionarietà, **irrotazionalità** e connessione semplice del dominio, coincide con il tubo di Venturi stesso. Infatti in corrispondenza delle prese a parete cade l'ipotesi di irrotazionalità.

Secondo le ipotesi fatte il fluido è non viscoso. Questo assicura che la vorticità sia nulla lungo le linee di corrente. Nel tubo del manometro però il fluido è fermo. Per un fluido non viscoso in corrispondenza dell'interfaccia non ci deve essere discontinuità nella componente normale all'interfaccia stessa e nella pressione. La componente normale è nulla da entrambe le parti della discontinuità; la componente tangenziale



(a) "Suddivisione" del dominio: in tonalità rosse il dominio nel quale è lecito applicare le leggi della statica, in tonalità blu quello nel quale viene applicato il teorema di Bernoulli.



(b) Condizioni all'interfaccia. Superficie di discontinuità di velocità e vorticità infinita; la pressione invece è continua. I punti  $B_1$  e  $B_2$  identificano lo stesso punto al di qua e al di là dell'interfaccia.

è però discontinua: mentre nel tubo di Venturi è diversa da zero, nel tubo del manometro è nulla. Questo comporta che la vorticità non sia nulla (bensì infinita: "differenza finita in uno spessore infinitesimo") e di conseguenza la non validità in questa regione delle ipotesi fatte in precedenza.

Si possono quindi distinguere due regioni (il tubo di Venturi e il manometro) che non possono "parlare" tra di loro con il teorema di Bernoulli, ma solo tramite la condizione di **interfaccia** (continuità degli sforzi: per fluidi non viscosi questa condizione coincide con la continuità della pressione).

- È possibile ora scrivere il sistema risolvente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_A + \frac{1}{2}U_A^2 + \rho g z_A = P_{B_1} + \frac{1}{2}U_{B_1}^2 + \rho g z_{B_1} & (\text{Bernoulli A-}B_1) \\ P_{B_1} = P_{B_2} & (\text{interfaccia } B_1-B_2) \\ P_{B_2} + \rho g z_{B_2} = P_C + \rho g z_C & (\text{Stevino } B_2-C) \\ P_C + \rho_a g z_C = P_D + \rho_a g z_D & (\text{Stevino C-D}) \\ P_D + \rho g z_D = P_{E_2} + \rho g z_{E_2} & (\text{Stevino D-}E_2) \\ P_{E_2} = P_{E_1} & (\text{interfaccia } E_2-E_1) \\ P_{E_1} + \frac{1}{2}\rho U_{E_1}^2 + \rho g z_{E_1} = P_F + \frac{1}{2}\rho U_F^2 + \rho g z_F & (\text{Bernoulli } E_1-F) \\ P_A + \frac{1}{2}\rho U_A^2 + \rho g z_A = P_F + \frac{1}{2}\rho U_F^2 + \rho g z_F & (\text{Bernoulli A-F}) \\ \rho \frac{\pi D^2}{4} U_A = \rho \frac{\pi d^2}{4} U_F & (\text{continuità A-F}) \end{array} \right. \quad (5.9)$$

che, osservando che  $z_{B_1} = z_{B_2} = z_B$ ,  $z_{E_1} = z_{E_2} = z_E$  e applicando le ipotesi fatte in

precedenza ( $U_A = u_{B_1}$ ,  $U_F = u_{E_1}$ ,  $P_{B_1} = P_{B_2} = P_B$ ,  $P_{E_1} = P_{E_2} = P_E$ ), diventa:

$$\begin{cases} P_A + \rho g z_A = P_B + \rho g z_B & (\text{Bernoulli A-B}) \\ P_{B_2} + \rho g z_B = P_C + \rho g z_C & (\text{Stevino B-C}) \\ P_C + \rho_a g z_C = P_D + \rho_a g z_D & (\text{Stevino C-D}) \\ P_D + \rho g z_D = P_E + \rho g z_E & (\text{Stevino D-E}) \\ P_{E_1} + \rho g z_E = P_F + \rho g z_F & (\text{Bernoulli E-F}) \\ P_A + \frac{1}{2} \rho U_A^2 + \rho g z_A = P_F + \frac{1}{2} \rho U_F^2 + \rho g z_F & (\text{Bernoulli A-F}) \\ D^2 U_A = d^2 U_F & (\text{continuità A-F}) \end{cases} \quad (5.10)$$

Anche se il numero di equazioni è minori del numero di incognite, prova che il sistema è indeterminato, si dimostra che  $U_A$  e  $U_F$  sono determinate (nelle equazioni intervengono sempre differenze di pressioni, ed è questo il motivo dell'indeterminazione).

- Soluzione del sistema: il sistema può essere risolto come più si preferisce. Per esempio, partendo da quella che può essere una "lettura dello strumento"  $\Delta z = z_C - z_D$  e "chiudendo il ciclo ABCDEF":

$$\rho_a g \Delta z = P_D - P_C \quad (5.11)$$

$$\begin{cases} P_D = P_E + \rho g (h_E - h_D) = P_F + \rho g (h_F - h_D) \\ P_C = P_B + \rho g (h_B - h_C) = P_A + \rho g (h_A - h_C) \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_D - P_C &= (P_F + \rho g h_F) - (P_A + \rho g h_A) + \rho g \Delta z = && (\text{Bernoulli A-F}) \\ &= \frac{1}{2} \rho U_A^2 - \frac{1}{2} \rho U_F^2 + \rho g \Delta z = && (\text{continuità}) \\ &= -\frac{1}{2} \rho U_A^2 \left( \frac{D^4}{d^4} - 1 \right) + \rho g \Delta z \end{aligned} \quad (5.13)$$

E quindi:

$$(\rho - \rho_a) g \Delta z = \frac{1}{2} \rho U_A^2 \left( \frac{D^4}{d^4} - 1 \right) \quad (5.14)$$

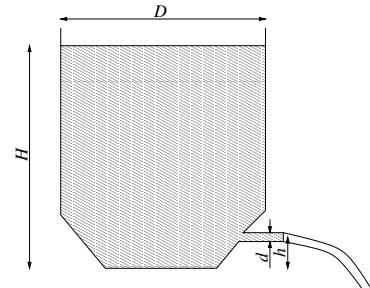
$$U_A = \sqrt{\frac{2(1 - \rho_a/\rho) g \Delta z}{\frac{D^4}{d^4} - 1}} \quad (5.15)$$

Inserendo i valori numerici, si trova:  $U = 0.956 m/s$ ,  $Q = 3.0 \cdot 10^{-4} m^3/s$ ,  $\bar{Q} = 3.0 \cdot 10^{-1} kg/s$ .

*Osservazioni.* È importante saper riconoscere i limiti di applicabilità di formule e teoremi nel rispetto delle ipotesi con le quali essi vengono formulati.

Considerazioni analoghe dovranno essere svolte anche in esercizi simili a questo, riguardanti le soluzioni esatte delle equazioni di Navier-Stokes.

**Esercizio 5 .2 — Efflusso da serbatoio.** Si consideri il serbatoio rappresentato in figura,  $D = 2\text{ m}$ ,  $H = 4.4\text{ m}$  al cui interno è contenuta acqua,  $\bar{\rho} = 999\text{ kg/m}^3$ . Supponendo il fluido non viscoso, determinare la velocità di efflusso del fluido dall'ugello del serbatoio,  $h = 0.4\text{ m}$  e  $d = 1\text{ cm}$ , e la sua portata, sia in massa sia in volume.  
 $(U = 8.86\text{ m/s}, Q = 6.96 \cdot 10^{-4}\text{ m}^3/\text{s}, \bar{Q} = 0.695\text{ kg/s})$  ■



### Soluzione

**Concetti.** Teorema di Bernoulli, nel caso incomprimibile, non viscoso, "stazionario" (da come è fatto il disegno, il livello del serbatoio sembra diminuire...assumiamo che così non sia), con forze che ammettono potenziale e dominio semplicemente connesso. Se si fa l'ipotesi che il flusso sia irrotazionale sulla sezione di ingresso, nel caso non viscoso, si mantiene irrotazionale ovunque (equazione della vorticità).

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (5.16)$$

Si può quindi scrivere il teorema di Bernoulli nella forma:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + gh = \text{cost} \quad (5.17)$$

**Svolgimento.** Il problema si risolve mettendo a sistema il teorema di Bernoulli (opportunamente semplificato; vedi sopra) con il bilancio integrale di massa. Si ipotizza che sulle due sezioni agisca la stessa pressione esterna.

$$\begin{cases} A_1 u_1 = A_2 u_2 & (\text{massa}) \\ \frac{u_1^2}{2} + gh_1 = \frac{u_2^2}{2} + gh_2 & (\text{Bernoulli}) \end{cases} \quad (5.18)$$

Svolgendo i passaggi, ricordando che le superfici sono circolari, risulta:

$$u_2 = \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}} \quad (5.19)$$

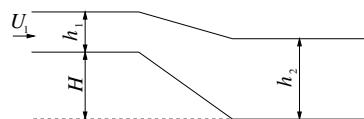
Si calcolano poi le portate volumetriche e di massa.

$$\begin{aligned} Q &= A_2 u_2 \\ \dot{m} &= \rho Q \end{aligned} \quad (5.20)$$

**Esercizio 5.3 — Corrente in canale aperto.** Si consideri il flusso d'acqua,  $\bar{\rho} = 999 \text{ kg/m}^3$ , nel canale rappresentato in figura. Nel primo tratto l'acqua scorre con una velocità uniforme  $U_1 = 1 \text{ m/s}$  e l'altezza del pelo libero rispetto al fondo del canale è  $h_1 = 1.5 \text{ m}$ . Determinare la velocità dell'acqua  $U_2$  e l'altezza del pelo libero  $h_2$  nel secondo tratto del canale, sapendo che l'altezza del fondo del primo tratto rispetto al fondo del secondo tratto è  $H = 0.5 \text{ m}$ . Si trascuri qualunque effetto dissipativo.

(Soluzione 1:  $U_2 = 0.741 \text{ m/s}$ ,  $h_2 = 2.022 \text{ m}$ .

Soluzione 2:  $U_2 = 5.940 \text{ m/s}$ ,  $h_2 = 0.252 \text{ m}$ ) ■



### Soluzione

**Concetti.** Teorema di Bernoulli nel caso incomprimibile, non viscoso, stazionario, irrotazionale. Soluzione di equazioni di terzo grado: metodo grafico e numerico. Correnti in canali aperti: soluzioni "fisiche", numero di Froude  $Fr$ , correnti subcritiche e supercritiche.

### Svolgimento.

L'esercizio viene risolto in due passi, che richiedono diversi livelli di conoscenza della dinamica dei fluidi in canali aperti: in un primo tempo, vengono ricavate le soluzioni ammissibili ( $h_2 > 0$ ,  $U_2 > 0$ ) del problema; in un secondo tempo, viene scelta la soluzione fisica del problema, tra le due soluzioni ammissibili trovate in precedenza.

#### Parte 1.

L'esercizio viene risolto mettendo a sistema il teorema di Bernoulli riferito a una linea di corrente sul pelo libero (sul quale agisce la pressione ambiente  $P_a$ , costante) e l'equazione di continuità. Grazie alle ipotesi elencate in precedenza, si può scrivere il sistema risolvente come:

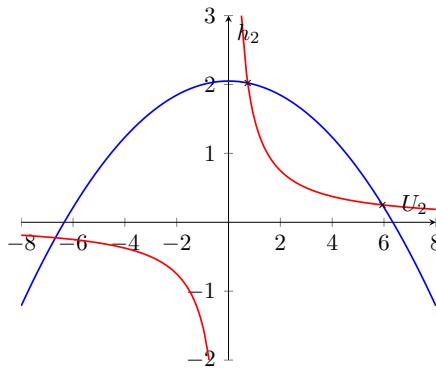
$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho U_1^2 + \rho g(h_1 + H) = \frac{1}{2}\rho U_2^2 + \rho g h_2 \\ h_1 U_1 = h_2 U_2 \end{cases} \quad (5.21)$$

Il sistema è di due equazioni (non lineari) nelle incognite  $U_2$  e  $h_2$ . Se si ricava una delle due incognite da un'equazione e la si inserisce nell'altra, si ottiene un'equazione di terzo grado. Per esempio, ricavando  $h_2$  dalla prima e inserendola nella seconda, per l'incognita  $U_2$  si ottiene l'equazione di terzo grado:

$$h_1 U_1 = U_2 \left( \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} + (h_1 + H) \right) \quad (5.22)$$

I metodi numerici convergono (quando convergono) a una soluzione, senza informazioni su quante soluzioni esistono effettivamente: prima di risolvere l'equazione di terzo grado con un metodo numerico è utile un primo approccio analitico al problema.

Per questo cerchiamo le soluzioni del sistema di due equazioni per via grafica. Le equazioni del sistema 5.21 definiscono curve nel piano  $(U_2, h_2)$ . Se scegliamo di usare come asse orizzontale quello delle  $U_2$ , la prima equazione definisce una parabola con la concavità diretta verso il basso ( $h_2 = -0.5U_2^2/g + \dots$ ), mentre la seconda un'iperbole.



Esistono due soluzioni con senso fisico ( $h_2 \geq 0, U_2 \geq 0$ ). Ora che sappiamo quante soluzioni cercare e dove cercarle, possiamo procedere con un metodo numerico, dando guess iniziali in un intorno della soluzione. Le due soluzioni sono:

$$A : \begin{cases} U_2 = 0.741 \text{ m/s} \\ h_2 = 2.022 \text{ m} \end{cases} \quad B : \begin{cases} U_2 = 5.940 \text{ m/s} \\ h_2 = 0.252 \text{ m} \end{cases} \quad (5.23)$$

### Parte 2.

È plausibile farsi una domanda: al netto delle ipotesi fatte sul regime di moto (fluido incomprimibile, non viscoso), il modello è in grado di descrivere il fenomeno fisico e stabilire quale delle due soluzioni ammissibili trovate è la soluzione “fisica”? Seguendo la trattazione del problema svolta in Chaudhry, *Open-Channel Flow*, paragrafo 2-7: Channel transition e paragrafi vicini, è possibile trovare l'unica soluzione fisica del problema. Viene introdotta la notazione usata da Chaudhry, che contrasta in parte con quella usata finora. Si tornerà alla notazione usata nella prima parte dell'esercizio, solo alla fine per scrivere i risultati.

La variabile  $z(x)$  descrive la quota del fondo del canale, la variabile  $y(x)$  descrive la profondità della corrente, riferita al fondo del canale. Si indica con  $Q = Vy$  la portata in volume, costante. Il trinomio di Bernoulli  $H$ , diviso per  $\rho$  e  $g$ , è costante lungo il canale. Si ricorda che sulla linea di corrente in corrispondenza del pelo libero agisce una pressione costante uguale alla pressione ambiente  $P_a$ . Se si introduce la coordinata orizzontale  $x$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dH}{dx} = \frac{d(y+z)}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{V^2}{2g} = \\ &= \frac{d(y+z)}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{Q^2}{2gy^2} = \\ &= \frac{d(y+z)}{dx} - \frac{Q^2 dy}{gy^3 dx} = \\ &= \frac{d(y+z)}{dx} - \frac{V^2 dy}{gy dx} = \\ &= \frac{d(y+z)}{dx} - Fr^2 \frac{dy}{dx} = \\ &= \frac{dz}{dx} - (Fr^2 - 1) \frac{dy}{dx} \end{aligned} \quad (5.24)$$

dove è stato introdotto il numero di Froude  $Fr = V(y)^2/gy$ , e qui è stata esplicitata la dipendenza dalla profondità  $y$ , funzione a sua volta funzione della coordinata  $x$ . Si trova così il legame tra la profondità della corrente  $y(x)$ , la quota del fondo  $z(x)$  e lo stato della corrente, descritto dal numero di Froude.

$$\frac{dz}{dx} = (Fr^2(y(x)) - 1) \frac{dy}{dx} \quad (5.25)$$

Vengono definiti due regimi di moto: subcritico  $Fr < 1$ , supercritico  $Fr > 1$ . Il profilo del fondo  $z(x)$ , e quindi la sua derivata, è noto dal progetto del canale. La profondità della corrente  $y(x)$  può essere ottenuta integrando l'eq. 5.25 con le condizioni iniziali note sulla sezione di ingresso.

Per risolvere il nostro esercizio è sufficiente ragionare sui segni dei tre termini dell'eq. 5.25:  $dz/dx \leq 0$ , quindi i due fattori alla destra dell'uguale devono essere discordi. Il numero di Froude sulla sezione di ingresso del problema vale  $Fr_1 = U_1^2/(gh_1) = 0.068$ , quindi il contenuto della parentesi tonda è negativo (e negativo rimane, al variare di  $x$ ; di questo dovete fidarvi...). Deve quindi essere  $dy/dx \geq 0$ . Tornando alla notazione usata nella prima parte dell'esercizio, dove la profondità della corrente è indicata con  $h(x)$ ,  $dh(x)/dx \geq 0$ . Poichè la profondità della corrente aumenta sempre, la soluzione "fisica" tra le due ammissibili è la soluzione  $A$ , per la quale  $h_2 > h_1$ .

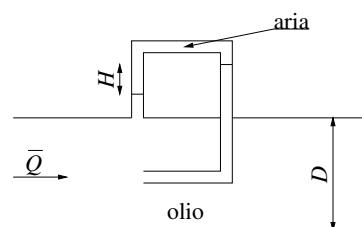
$$\begin{cases} U_2 = 0.741 \text{ m/s} \\ h_2 = 2.022 \text{ m} \end{cases} \quad (5.26)$$

### Cosa non è stato detto.

È stato fatto solo un accenno al ragionamento che consente di determinare l'unica soluzione "fisica" del problema delle correnti in canali aperti che variano con continuità. Non si dirà nulla sui salti idraulici (che portano la corrente da uno stato supercritico a uno subcritico), dei quali si possono trovare esempi nei fiumi o sul fondo di un lavandino. Si accenna solo alla uguaglianza formale del problema del moto di un fluido incomprimibile in un canale aperto, con il moto monodimensionale di un fluido comprimibile, dove il ruolo del numero di Froude  $Fr$  sarà svolto dal numero di Mach  $M$ , la definizione di stato sub- e supercritico, sarà sostituita da quella di condizione sub- e supersonica, il salto idraulico troverà il suo fenomeno corrispondente nelle onde d'urto.

**Esercizio 5.4 — Tubo di Pitot statico.** Dato il condotto a sezione circolare rappresentato in figura, determinare la portata in massa d'olio,  $\bar{\rho} = 850 \text{ kg/m}^3$ , attraverso il condotto stesso sapendo che il diametro del condotto è  $d = 0.5 \text{ m}$ , che la differenza di altezza fra i peli liberi è  $H = 40 \text{ cm}$ , che il diametro del tubo "a U" è di 2 mm. Si trascuri qualunque effetto dissipativo, si assuma uniforme la velocità in una sezione sufficientemente lontana a monte e si consideri che nel tubo "a U" sia presente aria in condizioni normali.

$$(\bar{Q} = 467.2 \text{ kg/s})$$



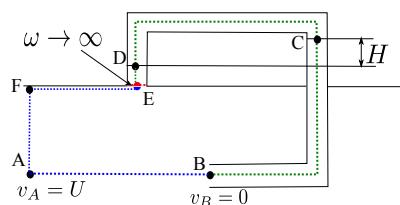
### Soluzione

**Concetti.** Teorema di Bernoulli nell'ipotesi di stazionarietà, fluido incomprimibile, non viscoso, irrotazionale. Equazione della vorticità nel caso non viscoso. Legge di Stevino.

**Svolgimento.** Vengono fatte alcune ipotesi semplificative ( $\rho = \bar{\rho}$ ,  $\mu = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ); si utilizza poi l'equazione della vorticità per semplificare ulteriormente il problema: se si assume che il profilo di velocità all'ingresso sia uniforme, e quindi a vorticità nulla, il fluido nel canale rimane irrotazionale (dall'equazione della vorticità per fluidi non viscosi).

Gli unici due punti che possono creare problemi sono i collegamenti del tubo con il canale. Sulla linea di corrente che incontra l'imbocco del tubicino, il fluido subisce un rallentamento dalla velocità di ingresso fino ad arrestarsi: su questa linea di corrente è possibile applicare il teorema di Bernoulli. In corrispondenza dell'altro collegamento, si incontra una superficie di discontinuità a vorticità infinita: non è quindi possibile attraversare questa superficie applicando direttamente il teorema di Bernoulli, ma bisogna ricorrere alle condizioni di interfaccia tra i due domini, quello interno al canale e quello interno al tubo, nel quale possono essere applicate le equazioni della statica.

Vengono definiti i punti  $A$  all'ingresso sulla linea di corrente che arriva alla presa del tubo all'interno del canale; il punto  $B$  coincidente con la presa del tubo all'interno del canale;  $C$  il pelo libero di destra all'interno del tubo "a U",  $D$  il pelo libero di sinistra. Si definiscono anche  $h_C$  e  $h_D$  come quote dei peli liberi (oss.  $H = h_C - h_D$ ).



Il sistema risolvente è:

$$\begin{cases} P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B \\ P_B + \rho g h_B = P_C + \rho g h_C \\ P_C + \rho_a g h_C = P_D + \rho_a g h_D \\ P_D + \rho g h_D = P_{E_2} + \rho g h_{E_2} \\ P_{E_2} = P_{E_1} \\ P_{E_1} + \frac{1}{2}\rho u_{E_1}^2 + \rho g h_{E_1} = P_F + \frac{1}{2}\rho u_F^2 + \rho g h_F \\ P_F + \frac{1}{2}\rho v_F^2 + \rho g h_F = P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A \\ \bar{Q} = \rho \frac{\pi}{4} d^2 U \end{cases} \quad (5.27)$$

Osservando che  $h_A = h_B$ ,  $h_E = h_F$ ,  $v_A = v_F = U$ ,  $v_B = 0$ , supponendo  $u_E = U$  (ipotizzando dimensioni e intrusività trascurabile della sonda), il sistema semplificato diventa:

$$\begin{cases} P_A + \frac{1}{2}\rho U^2 = P_B \\ P_B + \rho g h_A = P_C + \rho g h_C \\ P_C + \rho_a g h_C = P_D + \rho_a g h_D \\ P_D + \rho g h_D = P_E + \rho g h_E \\ P_E + \frac{1}{2}\rho u_E^2 = P_F + \frac{1}{2}\rho U^2 \\ P_F + \rho g h_E = P_A + \rho g h_A \\ \bar{Q} = \rho \frac{\pi}{4} d^2 U \end{cases} \quad (5.28)$$

Risolvendo per  $U$ , avendo definito  $H = h_C - h_D$ :

$$\frac{1}{2}\rho U^2 = P_B - P_A = \dots = (\rho - \rho_a)gH \quad \Rightarrow \quad U = \sqrt{2 \left( 1 - \frac{\rho_a}{\rho} \right) gH} \quad (5.29)$$

Inserendo i valori numerici:  $U = 2.799 m/s$ ,  $\bar{Q} = 467.15 kg/s$ .

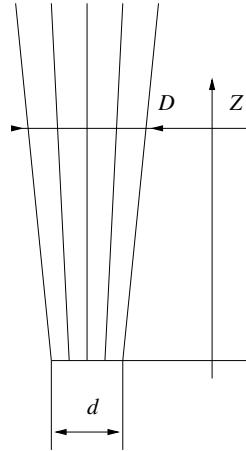
**Esercizio 5.5 — Getto libero.** Si consideri un getto stazionario, assalsimmetrico, d'acqua in condizioni standard, diretto verso l'alto, in atmosfera uniforme, secondo la verticale  $z$ , e uscente con velocità uniforme e costante  $V = 20 \text{ m/s}$  da un ugello circolare di diametro  $d = 5 \text{ cm}$ . Si assuma che:

- la curvatura delle linee di flusso sia trascurabile;
- sia trascurabile ogni perdita di energia.

Si determinino:

- il diametro  $D$  del getto alla quota  $Z = 15 \text{ m}$  (misurata dal piano d'uscita dall'ugello);
- la massima quota ideale  $H$  cui può giungere il getto.

$$(D = 6.97 \text{ cm}, H = 20.39 \text{ m}) \quad \blacksquare$$



### Soluzione

**Concetti.** Teorema di Bernoulli nell'ipotesi di stazionarietà, fluido incomprimibile, non viscoso, irrotazionale. Equazione della vorticità nel caso non viscoso.

#### Svolgimento.

- Il primo quesito del problema viene risolto mettendo a sistema l'equazione di Bernoulli (ipotesi...) e l'equazione della continuità.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho V^2 = \frac{1}{2}\rho u^2(z) + \rho g z \\ Vd^2 = u(z)D^2 \end{cases} \Rightarrow D = \frac{d}{\left[1 - \frac{2gz}{V^2}\right]^{\frac{1}{4}}} \quad (5.30)$$

Inserendo i valori numerici  $D = 6.97 \text{ cm}$ .

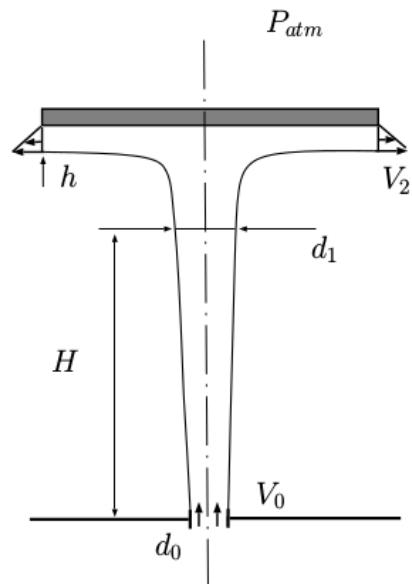
- Il secondo quesito si ottiene ricavando dal teorema di Bernoulli la quota alla quale la velocità è nulla.

$$\frac{1}{2}\rho V^2 = \rho g H \Rightarrow H = \frac{1}{2} \frac{V^2}{g} \quad (5.31)$$

Inserendo i valori numerici  $H = 20.39 \text{ m}$ .

**Esercizio 5.6 — Giochi d'acqua.** In un gioco d'acqua ( $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$ ), un disco di diametro  $D = 35 \text{ cm}$  viene sollevato da un getto che fuoriesce con velocità  $V_0 = 10 \text{ m/s}$  da un foro di diametro  $d_0 = 8 \text{ cm}$  concentrico all'asse del disco, così come illustrato schematicamente in figura. Noto che in condizioni stazionarie la quota raggiunta dal disco è di poco superiore alla quota  $H = 2 \text{ m}$ , si richiede di determinare:

- 1.1) la velocità  $V_1$  e il diametro  $d_1$  del getto alla quota  $H$  supponendo trascurabili tra le sezioni 0 e 1 sia la curvatura delle linee di flusso che ogni forma di dissipazione;
- 1.2) lo spessore  $h$  del film d'acqua all'estremità del disco assumendo che il profilo di velocità radiale sia lineare con velocità massima  $V_2 = V_1$ .
- 1.3) la massa  $m$  del disco considerando trascurabili sia gli sforzi viscosi all'interfaccia tra l'atmosfera circostante ( $P_{atm} = 101325 \text{ Pa}$ ) e il getto d'acqua che la forza gravitazionale agente sul fluido tra la quota  $H$  e la quota del disco.



Per la risoluzione del problema si assumano condizioni di assialsimmetria.

### Soluzione

**Concetti.** Teorema di Bernoulli nell'ipotesi di stazionarietà, fluido incomprimibile, non viscoso, irrotazionale. Bilanci integrali.

#### Svolgimento.

- Il primo punto viene risolto mettendo a sistema il teorema di Bernoulli e la continuità.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho V_0^2 = \frac{1}{2}\rho V_1^2(z) + \rho g H \\ V_0 d_0^2 = V_1 d_1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = V_0 \sqrt{1 - 2gH/V_0^2} \\ d_1 = \left[1 - \frac{2gH}{V_0^2}\right]^{-\frac{1}{4}} d_0 \end{cases} \quad (5.32)$$

- Il secondo punto viene risolto utilizzando solamente il bilancio di massa.

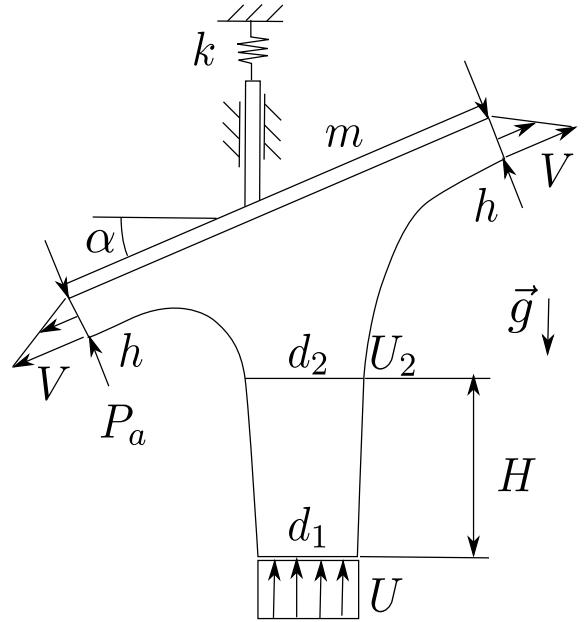
$$Q = \frac{\pi}{4} \rho V_0 d_0^2 = \frac{\pi}{4} \rho V_1 d_1^2 = \frac{\pi}{2} D h V_2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{d_1^2}{2D} \quad (5.33)$$

- Il terzo punto viene risolto applicando il bilancio della quantità di moto in direzione verticale per trovare la forza applicata dal disco al fluido. Infine si scrive l'equilibrio del disco soggetto alla stessa forza con verso opposto (principio di azione e reazione) e al proprio peso.

Dal bilancio si ottiene che la componente verticale della forza che si scambiano fluido e disco è uguale a  $\rho V_1^2 \frac{\pi}{4} d_1^2$ . La massa del disco è quindi  $m = \frac{\pi}{4} d_1^2 \frac{\rho V_1^2}{g}$

**Esercizio 5.7 — Lamina inclinata.** Un getto di acqua ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) colpisce una lamina di massa per unità di apertura  $m = 1 \text{ kg/m}$  inclinata di un angolo  $\alpha = 30^\circ$  rispetto all'orizzontale, connessa a terra con una molla di costante elastica  $k = 10^5 \text{ N/m}^2$ . Il getto esce con profilo uniforme  $U = 10 \text{ m/s}$  da una fessura larga  $d_1 = 5 \text{ cm}$ . Determinare:

- la velocità  $U_2$  (uniforme) e lo spessore  $d_2$  del getto alla quota  $H = 1 \text{ m}$  sopra la fessura di uscita, supponendo trascurabili ogni forma di dissipazione e la curvatura delle linee di corrente;
- la velocità massima  $V$  del profilo triangolare di spessore  $h = 2 \text{ cm}$ , identico su entrambe le estremità della lamina;
- la deformazione della molla, considerando trascurabili gli sforzi viscosi all'interfaccia tra il getto e l'atmosfera circostante ( $P_a = 101325 \text{ Pa}$ ) e la gravità agente sul fluido al di sopra della quota  $H$ .



### Soluzione

**Concetti.** Teorema di Bernoulli nell'ipotesi di stazionarietà, fluido incomprimibile, non viscoso, irrotazionale. Bilanci integrali.

#### Svolgimento.

- continuità + Bernoulli

$$\begin{cases} \rho dU = \rho d_2 U_2 \\ \frac{1}{2} \rho U^2 = \frac{1}{2} \rho U_2^2 + \rho g H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_2 = d_1 \left(1 - \frac{2gH}{U^2}\right)^{-1/2} = 0.0558 \text{ m} \\ U_2 = U \left(1 - \frac{2gH}{U^2}\right)^{1/2} = 8.96 \text{ m/s} \end{cases} \quad (5.34)$$

- continuità: in ingresso profilo uniforme, in uscita due profili triangolari.

$$U d_1 = 2 \frac{1}{2} V h \Rightarrow V = U \frac{d_1}{h} = 25 \text{ m/s} \quad (5.35)$$

- bilancio di massa + equilibrio corpo: pressione  $P_a$  ovunque; i due flussi di quantità di moto sulla lamina si bilanciano: rimane solo il termine in ingresso

$$\mathbf{R}_{fl} = - \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \dots = \rho U^2 \frac{d_1^2}{d_2} \hat{\mathbf{y}} = 4482.7 \text{ N} \hat{\mathbf{y}} \quad (5.36)$$

$$k \Delta x = mg - R \Rightarrow \Delta x = -0.0447 \text{ m (compressione)} \quad (5.37)$$

## 6. Soluzioni esatte

### 6.1 Introduzione e linee guida per la soluzione dei problemi

È possibile ricavare alcune soluzioni esatte stazionarie delle equazioni di Navier-Stokes, che descrivono il moto di un fluido viscoso, quando il dominio ha una geometria “semplice”. In alcuni casi, come la corrente in un canale piano (Newton-Couette), la corrente in un tubo a sezione circolare (Poiseuille), o la corrente nel setto tra due cilindri rotanti (Taylor-Couette), per semplificare le equazioni è possibile sfruttare l’omogeneità del dominio (in qualche direzione) e, per ipotesi, della corrente. Nella maggioranza delle soluzioni esatte, i termini non lineari nelle equazioni si annullano, permettendo di ricavare abbastanza facilmente la soluzione delle equazioni.

In generale, le soluzioni stazionarie esatte presentate in questo capitolo sono significative quando il regime di moto è laminare. Senza entrare molto nel dettaglio, una soluzione stazionaria è una soluzione di equilibrio delle equazioni di Navier-Stokes, per la quale  $\partial\mathbf{u}/\partial t = \mathbf{0}$ . Un regime di moto instazionario può manifestarsi a causa di una “instabilità intrinseca” della corrente o a causa di una enorme amplificazione (*ricettività*) di disturbi, anche di intensità minima, sempre presenti in natura<sup>1</sup>. Entrambi i processi che allontanano la corrente dalla condizione di equilibrio vengono innescati o amplificati all’aumentare del numero di Reynolds caratteristico della corrente. Qualitativamente, si può quindi affermare che le soluzioni stazionarie esatte sono rappresentative del fenomeno fisico quando il numero di Reynolds caratteristico assume valori “sufficientemente bassi”, per i quali non si verificano

<sup>1</sup> Il regime di moto periodico (e ordinato) che si manifesta nella corrente attorno a un cilindro quando il numero di Reynolds supera un valore critico ( $Re_c \approx 46$ ) è il risultato di una “instabilità intrinseca” (*globale*) parametrica del sistema. La soluzione stazionaria stabile esistente per  $Re < Re_c$  diventa instabile quando il parametro  $Re$  eccede il valore critico e nasce un ciclo limite (stabile) nel piano delle fasi del sistema. Il moto periodico e ordinato del sistema osservato nello sviluppo della *scia di Von Karman* a valle del cilindro, corrisponde alla dinamica del sistema sul ciclo limite.

Mentre la corrente attorno a un corpo tozzo risulta abbastanza insensibile ai disturbi e perturbazioni esterni, altre correnti possono amplificare perturbazioni di intensità ridotta di diversi ordini di grandezza. Alcuni esempi sono uno strato limite, uno strato di mescolamento o un getto. In queste correnti dominate dalla convezione, l’enorme amplificazione può avvenire tramite meccanismi *non-modali*, che caratterizzano di sistemi dinamici lineari stabili non simmetrici.

instabilità intrinseche nella corrente e per i quali le perturbazioni e gli effetti di estremità (ad esempio, all'imbocco di un tubo) vengono smorzati dalla viscosità, rendendo la corrente stazionaria e omogenea.



In questa introduzione non c'è nessuna velleità di una descrizione precisa e completa di quelli che sono gli argomenti di studio della *stabilità fluidodinamica*, ma solamente la necessità di precisare i “limiti di validità” delle soluzioni esatte ricavate in questo capitolo.

### 6.1.1 Equazioni di Navier-Stokes in coordinate cartesiane e cilindriche

Le equazioni di Navier-Stokes vengono scritte nel sistema di coordinate più adeguato alla descrizione del problema, come ad esempio possono essere le coordinate cartesiane o quelle cilindriche. Le equazioni di Navier-Stokes per un fluido incomprimibile

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p = \rho g \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

accompagnate dalle condizioni iniziali e dalle condizioni al contorno opportune (e, qualora servissero, dalle condizioni di compatibilità dei dati), possono essere scritte ad esempio in un sistema di coordinate cartesiane

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g_y \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

o in un sistema di coordinate cilindriche

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = \rho g_r \\ \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho g_\theta \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_z - \mu \nabla^2 u_z + \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \nabla b &= a_r \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial b}{\partial \theta} + a_z \frac{\partial b}{\partial z} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (6.4)$$

### 6.1.2 Esempio in coordinate cartesiane: corrente di Poiseuille

Nel caso di corrente bidimensionale di Poiseuille in un canale piano, si usano le equazioni scritte nel sistema di coordinate cartesiane. Si sceglie l'asse  $x$  orientato lungo il canale e l'asse  $y$  perpendicolare alle pareti. Si fanno alcune ipotesi:

- stazionarietà:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ;
- omogeneità della coordinata  $x$ : il campo di velocità è indipendente dalla coordinata  $x$ . La derivata di tutte le componenti della velocità rispetto ad  $x$  è nulla:  $\underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x}}_{=0} = 0$ .

È invece ammissibile che la pressione vari lungo  $x$ : da un punto di vista fisico, è necessario un gradiente di pressione che equilibri gli sforzi a parete dovuti alla viscosità e che “springa” il fluido nel canale; dal punto di vista matematico, è già stato accennato al ruolo particolare che svolge quel campo indicato con  $p$ , diverso dalla pressione termodinamica nel caso di fluido incomprimibile; si osservi poi che il campo  $p$  non compare mai nelle equazioni, se non sotto l’operatore di gradiente (o all’interno delle condizioni al contorno, che “fissano” un valore di  $p$ : è già stato sottolineato più volte che spesso il moto di un fluido incomprimibile è indipendente dal valore assoluto del campo  $p$ , mentre dipende da differenze, o dalle derivate, di  $p$ !).

- sfruttando la bidimensionalità della corrente, l’omogeneità della coordinata  $x$  e il vincolo di incomprimibilità si ottiene:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (6.5)$$

Questo implica che la componente  $v$  della velocità è costante in tutto il canale; sfruttando le condizioni al contorno di adesione a parete  $\mathbf{u} = (u, v) = \mathbf{0}$  è evidente che la costante deve essere nulla:  $v = 0$ .

- supponiamo qui che, se vengono considerate le forze di volume, esse sono costanti e dirette lungo  $-\hat{\mathbf{y}}$ .

Le equazioni diventano quindi

$$\begin{cases} -\mu \left( \frac{d^2 u}{dy^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \end{cases} \quad (6.6)$$

dove la derivata parziale in  $y$  della componente  $u$  è stata sostituita dalla derivata ordinaria, poiché la velocità  $\mathbf{u}(y)$  (e quindi tutte le sue componenti) dipende solo dalla coordinata  $y$ . La seconda equazione integrata dà come risultato ( $p$  dipende sia da  $x$  sia da  $y$ ):

$$p(x, y) = -\rho gy + f(x) \quad (6.7)$$

Inserita nella prima:

$$\mu \left( \frac{d^2 u}{dy^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (6.8)$$

Nell’ultima equazione, i termini a sinistra dell’uguale sono funzione solo della variabile indipendente  $y$ , quelli a destra dell’uguale solo di  $x$ : affinché l’uguaglianza possa essere sempre valida, i due termini devono essere costanti; si sceglie di definire questa costante  $-G_P$  (con questa  $G_P$  assumerà valore positivo). Si possono quindi risolvere le due equazioni

$$\begin{cases} \mu \left( \frac{d^2 u}{dy^2} \right) = -G_P \\ \frac{\partial p}{\partial x} = -G_P \end{cases} \quad (6.9)$$

accompagnate dalle opportune condizioni al contorno. Osservando il sistema (6.6), nelle equazioni compare la derivata seconda in  $y$  della componente  $u$  della velocità, la derivata prima sia in  $x$  sia in  $y$  di  $p$ : è ragionevole pensare che servano due condizioni al contorno in  $y$  per  $u$ , una condizione al contorno per  $p$  in  $x$  e una in  $y$ . In particolare, sulle pareti del canale (alto  $H$ ) la velocità del fluido deve essere nulla, per le condizioni al contorno di adesione. Per quanto riguarda la pressione, si può fissare il valore in un punto del dominio, ad esempio l'origine degli assi  $p(0, 0) = p_0$ .

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ u(x, H) = 0 \\ p(0, 0) = p_0 \end{cases} \quad (6.10)$$

Le equazioni (6.9) con le condizioni al contorno appena elencate danno come risultato:

$$\begin{cases} u(y) = -\frac{G_P}{2\mu}y(y - H) \\ p(x, y) = p_0 - \rho gy - G_P x \end{cases} \quad (6.11)$$

### 6.1.3 Calcolo del vettore sforzo

Se vengono chieste azioni (risultanti di forze o momenti) esercitate dal fluido sul solido, è necessario calcolare lo sforzo a parete  $\mathbf{t}_{n,s}$  esercitato sul solido, uguale e contrario allo sforzo esercitato dal solido sul fluido  $\mathbf{t}_n$ . Il vettore sforzo  $\mathbf{t}_n$  su una superficie con giacitura definita dal versore normale  $\hat{\mathbf{n}}$  si può esprimere come il prodotto del versore  $\hat{\mathbf{n}}$  e il tensore degli sforzi  $\mathbb{T}$ ,

$$\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T} = \hat{\mathbf{n}} \cdot [-p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}] = -p\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{s}_n , \quad (6.12)$$

avendo utilizzato la relazione costitutiva  $\mathbb{S} = 2\mu\mathbb{D}$  per un fluido incompressibile newtoniano, che lega il tensore degli sforzi viscosi  $\mathbb{S}$  al tensore velocità di deformazione  $\mathbb{D}$  tramite il coefficiente di viscosità dinamica  $\mu$ . Il vettore  $\mathbf{s}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{S}$  è il vettore degli sforzi viscosi. È possibile trasformare la relazione (6.12) in una relazione che contenga solamente operazioni tra vettori,

$$\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}} + \mu[2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{u})] = -p\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{s}_n . \quad (6.13)$$

Questa espressione può risultare vantaggiosa quando è richiesto il calcolo del vettore degli sforzi in sistemi di coordinate non cartesiani. Mentre esistono molte tabelle che raccolgono l'espressione delle operazioni vettoriali in sistemi di coordinate non cartesiane, sono più rare tabelle che raccolgano la forma in componenti di operazioni tensoriali.

In sistemi di coordinate cartesiane, è facile calcolare il vettore sforzo come prodotto tensoriale tra il versore normale  $\hat{\mathbf{n}}$  e il tensore degli sforzi, le cui componenti sono facili da calcolare

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D} = -p\mathbb{I} + 2\mu \left[ \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \right] \\ T_{ij} &= -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] . \end{aligned} \quad (6.14)$$

Ad esempio, per una corrente in uno spazio bidimensionale descritto dalle coordinate cartesiane  $(x, y)$  le componenti del tensore degli sforzi possono essere raccolte in forma

matriciale,

$$\mathbb{T} = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Sfruttando la simmetria del tensore degli sforzi,  $T_{ij} = T_{ji}$ , il vettore sforzo  $\mathbf{t}_i = n_j T_{ji} = T_{ij} n_j$  può essere calcolato come prodotto matrice vettore. Come esempio, viene calcolato lo sforzo a parete in un canale piano, nel quale scorre un fluido con un campo di velocità che ha solamente la componente parallela alle pareti che dipende dalla coordinata perpendicolare ad esse,  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u(y)\hat{x}$ . Facendo riferimento alla corrente di Poiseuille della sezione precedente, il vettore sforzo agente sul fluido in corrispondenza della parete interiore a  $y = 0$ , si ottiene moltiplicando il versore normale uscente dal fluido  $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{y}}$  per il tensore degli sforzi,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -p & \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ p \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \mathbf{t}_n &= -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \hat{x} + p \hat{y} = -\frac{G_P H}{2} \hat{x} + p \hat{y}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Lo sforzo sulla parete inferiore è l'opposto  $\mathbf{t}_{n,s} = \frac{G_P H}{2} \hat{x} - p \hat{y}$ . Sulla parete superiore, a  $y = H$ , la normale uscente dal fluido è  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{y}}$ , la derivata  $\partial u / \partial y(x, H) = -G_P / (2\mu)$ . Svolgendo i conti, come fatto per la parete inferiore, si ottiene che lo sforzo agente sulla parete superiore è  $\mathbf{t}_{n,s} = \frac{G_P H}{2} \hat{x} + p \hat{y}$ .

#### Equivalenza tra l'espressione tensoriale e vettoriale del vettore sforzo.

Per i più curiosi e i più “matematici”, si dimostra infine l'equivalenza tra (6.12) e (6.13). Questa dimostrazione viene fatta ricorrendo alla notazione indiciale, sfruttando le proprietà di permutazione degli indici del simbolo  $\epsilon_{ijk}$  e la proprietà dei simboli  $\epsilon_{ijk}$  e  $\delta_{a,b}$ ,

$$\epsilon_{kij}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}. \quad (6.17)$$

La componente  $i$ -esima di  $\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}$  è

$$\begin{aligned} \{\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}\}_i &= \epsilon_{ijk} n_j \{\nabla \times \mathbf{u}\}_k = \\ &= \epsilon_{ijk} n_j \epsilon_{klm} \partial_l u_m = \\ &= \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} n_j \partial_l u_m = \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) n_j \partial_l u_m = \\ &= n_j \partial_i u_j - n_j \partial_j u_i = \\ &= n_j \partial_i u_j + n_j \partial_j u_i - 2n_j \partial_j u_i = \\ &= 2n_j \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) - 2n_j \partial_j u_i = \\ &= \{2\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{D} - 2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u}\}_i \end{aligned} \quad (6.18)$$

Il contributo viscoso al vettore sforzo è uguale al primo termine a destra dell'uguale moltiplicato per la viscosità dinamica  $\mu$ ,  $\mathbf{s}_n = 2\mu \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{D}$ ; il vettore sforzo  $\mathbf{t}_n$  è la somma del vettore degli sforzi viscosi  $\mathbf{s}_n$  e del vettore degli sforzi (normali) dovuti alla “pressione”,  $\mathbf{t}_n = \mathbf{s}_n - p \hat{\mathbf{n}}$ . Si ottiene così l'identità desiderata

$$\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T} = \hat{\mathbf{n}} \cdot [-p \mathbb{I} + 2\mu \mathbb{D}] = -p \hat{\mathbf{n}} + \mu [2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{u})] = -p \hat{\mathbf{n}} + \mathbf{s}_n. \quad (6.19)$$

**R** Si ricorda che le identità vettoriali e tensoriali sono indipendenti dal sistema di riferimento in cui vengono scritte le componenti: per la loro dimostrazione si può utilizzare un sistema di coordinate qualsiasi (spesso le coordinate cartesiane sono un sistema di coordinate conveniente, poiché le espressioni delle operazioni e degli operatori differenziali sono semplici da ricordare e utilizzare).

**Osservazione: vettore sforzo in coordinate cilindriche.**

È possibile calcolare le componenti del prodotto  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T}$  svolgendo un prodotto matrice-vettore anche per sistemi di coordinate non cartesiane. In questo caso, però, la forma delle operazioni vettoriali e tensoriali e le componenti del tensore sono “non banali”. Per esempio le coordinate cartesiane del gradiente  $\nabla \mathbf{v}$  di un campo vettoriale  $\mathbf{v}$  sono uguali a  $\partial v_i / \partial x_j$ , mentre le componenti in coordinate cilindriche sono raccolte nella seguente matrice  $3 \times 3$ ,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (6.20)$$

se riferite alla base fisica  $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\mathbf{z}})$ . Bisogna quindi prestare attenzione nella scrittura delle componenti di tensori e operatori quando si usano sistemi di coordinate non cartesiane. Per il calcolo del vettore sforzo si consiglia quindi di usare, la formula (6.13) che contiene solo operazioni vettoriali, per le quali è più facile trovare tavole che ne raccolgano le espressioni in componenti in diversi sistemi di coordinate.

Per concludere questa sezione, viene ricavata l'espressione del vettore degli sforzi viscosi in coordinate cartesiane come prodotto  $2\mu \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{D}$ . Poichè il sistema di coordinate cilindriche (fisiche, riferite alla base  $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\mathbf{z}})$ ) è un sistema ortogonale, le componenti del vettore degli sforzi viscosi possono essere calcolate con il prodotto matrice vettore,

$$\begin{bmatrix} t_r \\ t_\theta \\ t_z \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ sym & \frac{2}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \\ sym & sym & 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_r \\ n_\theta \\ n_z \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

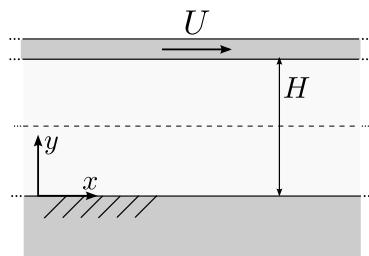
Come esercizio, è possibile utilizzare l'espressione vettoriale (6.13) per verificare la validità dell'espressione appena trovata del vettore sforzo in coordinate cilindriche.

**Esercizio 6.1 — Corrente in un canale piano - Newton-Poiseuille.**

In un canale piano, di lunghezza e apertura infinita, orizzontale, di altezza  $H = 1.51\text{ mm}$ , delimitato da una parete inferiore fissa e da una parete superiore mobile con velocità orizzontale, costante e positiva  $U = 0.31\text{ m/s}$ . scorre acqua in condizioni standard. Per quale valore del gradiente di pressione  $G_P = -\partial P/\partial x$  la portata nel canale risulta nulla?

Si trascurino le forze di volume.

$$(Re = 441, G_p = -930\text{ Pa/m}) \quad \blacksquare$$

**Soluzione**

**Concetti.** Semplificazione delle equazioni di NS in coordinate cartesiane per descrivere la corrente in un canale piano infinito messo in moto da un gradiente di pressione (corrente di Poiseuille) e dal trascinamento dovuto al movimento di una parete del canale (corrente di Newton).

**Svolgimento.** In questo problema, la corrente nel canale ha due "forzanti": il moto a (velocità costante) della parete superiore e il gradiente di pressione  $G_P$  lungo il canale. Il problema chiede di trovare il valore di  $G_P$  tale che la portata nel canale sia nulla quando i due effetti si combinano. Il problema viene risolto ricavando il profilo di velocità in funzione del gradiente di velocità dalle equazioni di NS opportunamente semplificate e successivamente il valore del gradiente di pressione necessario ad avere portata nulla. La geometria del problema suggerisce di utilizzare un sistema di coordinate cartesiane.

- Scrittura delle equazioni di NS in coordinate cartesiane in 2 dimensioni.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6.22)$$

- Semplificazione delle equazioni di NS per il problema considerato. Vengono fatte le seguenti ipotesi:

- problema stazionario:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ;
- direzione  $x$  omogenea (canale infinito in direzione  $x$ ):  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ;

**R**

non si può dire altrettanto della pressione, a causa del ruolo che questa ha nelle equazioni di NS incomprimibili. Il campo di pressione può essere interpretato come un moltiplicatore di Lagrange necessario a imporre il vincolo di incomprimibilità. Inoltre, ad eccezione di alcune condizioni al contorno, non appare mai direttamente come pressione  $p$  ma solamente con le sue derivate spaziali. Da un punto di vista più fisico, la differenza di pressione lungo il canale è la forzante che mette in moto il fluido in una corrente di Poiseuille.

- la condizione  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  inserita nel vincolo di incompressibilità, implica  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ;
- poichè  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  segue che  $v = \text{cost} = 0$ , poichè è nulla a parete per la condizione al contorno di adesione,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
- no forze di volume:  $\mathbf{f} = 0$ .

Le equazioni di NS possono essere semplificate

$$\begin{cases} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6.23)$$

Dalla seconda segue che la pressione può essere funzione solo di  $x$ . Nella prima, il termine a sinistra dell'uguale è funzione solo di  $y$ ; quello di destra può essere funzione solo di  $x$ : l'uguaglianza implica che entrambi i membri sono costanti. Definiamo questa costante come  $G_P = -\frac{\partial p}{\partial x}$ : si noti che questo è il "gradiente di pressione" lungo il canale, cambiato di segno.

$$\begin{cases} -\mu u''(y) = G_P & y \in [0, H] \\ u(0) = 0 \\ u(H) = U \end{cases} \quad (6.24)$$

- Soluzione dell'equazione differenziale con dati al contorno: si integra due volte e si impongono le condizioni al contorno per ottenere la componente  $u$  del campo di velocità.

$$\Rightarrow u(y) = -\frac{G_P}{2\mu}y^2 + \left(\frac{G_P}{2\mu}H + \frac{U}{H}\right)y. \quad (6.25)$$

- Calcolo della portata come integrale della velocità.

$$Q = \int_0^H u(y)dy = \frac{G_P}{12\mu}H^3 + \frac{1}{2}UH \quad (6.26)$$

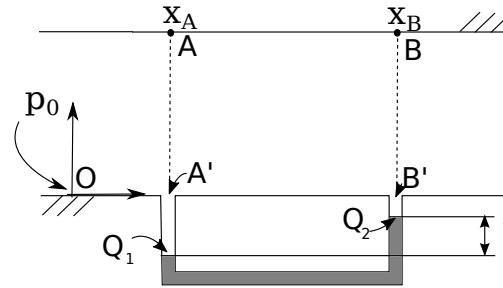
Infine, imponendo la condizione di portata nulla  $Q = 0$ , si ottiene il valore di  $G_P$ :

$$G_P = -6\frac{\mu U}{H^2} \quad \Rightarrow \quad G_P = -930 \text{ Pa/m} \quad (6.27)$$

**Esercizio 6.2 — Corrente di Poiseuille in un canale piano e manometro.**

Una corrente di Poiseuille di acqua ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 10^{-3} \text{ kg/(ms)}$ ) scorre in un canale di altezza  $H = 1 \text{ cm}$ . Un manometro misura la differenza di pressione tra le sezioni in  $x_A = 1.0 \text{ m}$  e  $x_B = 2.0 \text{ m}$ . Determinare:

- il gradiente di pressione all'interno del condotto, conoscendo la densità del liquido barometrico  $\bar{\rho} = 1200 \text{ kg/m}^3$  e la differenza di quote  $h = 5 \text{ mm}$ ;
- la velocità massima all'interno del canale;
- la risultante  $\mathbf{R}$  delle forze esercitata dal fluido sul tratto di parete superiore compreso tra A e B, sapendo che sulla sezione  $x = 0 \text{ m}$  la pressione vale  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ . Qual è la relazione tra  $R_x$  e  $p_A - p_B$ ? Commento.

**Soluzione**

**Concetti.** Soluzione esatte delle equazioni di Navier-Stokes. Corrente di Poiseuille nel canale piano 2D. Manometro: leggi della statica (Stevino).

**Svolgimento.**

- Per trovare la derivata in direzione  $x$  della pressione all'interno del canale ( $\partial P / \partial x = -G_P = \text{cost.}$  per la corrente di Poiseuille) risolve il problema di statica all'interno del manometro. Facendo riferimento al disegno, si utilizza Stevino tra i punti  $A' - Q_1$ ,  $Q_1 - Q_2$ ,  $Q_2 - B'$  e l'informazione di derivata della pressione costante in direzione  $x$  all'interno del canale, tra  $A'$  e  $B'$ .

$$\begin{cases} p_{A'} = p_{Q_1} - \rho g z_{Q_1} \\ p_{Q_1} - \bar{\rho} g z_{Q_1} = p_{Q_2} - \bar{\rho} g z_{Q_2} \\ p_{B'} = p_{Q_2} - \rho g z_{Q_2} \\ p_{A'} - p_{B'} = G_P \Delta x \end{cases} \Rightarrow G_P = \frac{1}{\Delta x} (\bar{\rho} - \rho) g \Delta h \quad (6.28)$$

avendo svolto correttamente i conti e riconosciuto  $z_{Q_2} - z_{Q_1} = \Delta h$ .

- Ricordando che il profilo di velocità di Poiseuille risulta  $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{x}} u(y)$ , con

$$u(y) = -\frac{G_P}{2\mu} y(H - y), \quad (6.29)$$

la velocità massima all'interno del canale è  $V = u(H/2) = \frac{G_P}{8\mu} H^2$

- Per calcolare la risultante degli sforzi sul tratto  $A - B$  della parete superiore, è necessario calcolare il vettore sforzo agente su di essa e svolgere un semplice integrale. Il vettore sforzo agente sulla parete superiore risulta

$$\mathbf{t} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=H} \hat{\mathbf{x}} + p(x, H) \hat{\mathbf{y}} . \quad (6.30)$$

La pressione  $p(x, H)$  sulla parete superiore, per  $x \in [x_A, x_B]$  si calcola come segue: si parte dall'origine del sistema di riferimento  $O$ , in corrispondenza della quale è noto il valore della pressione  $p_0$  e ci si muove in orizzontale ricordando che  $\partial P/\partial x = -G_P$  e in verticale ricordando che  $\partial P/\partial y = -\rho g$ .

$$\begin{aligned} p_{A'} &= p_0 - G_P x_A \\ p_A &= p_{A'} - \rho g H \end{aligned} \quad \rightarrow \quad p(x, H) = p_A - G_P(x - x_A) \quad (6.31)$$

Lo sforzo tangenziale sulla parete è costante e vale

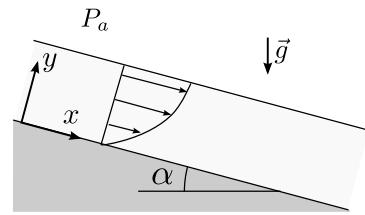
$$-\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=H} = \frac{G_P}{2} H \quad (6.32)$$

La risultante delle forze (per unità di lunghezza, poichè il problema è bidimensionale) si ottiene integrando lo sforzo tra  $A$  e  $B$ . Facendo comparire il valore  $p_B$  della pressione in  $B$ , l'espressione della risultante delle forze diventa

$$\mathbf{R} = \frac{G_P}{2} H \Delta x \hat{x} + \frac{1}{2}(p_A + p_B) \Delta x \hat{y} . \quad (6.33)$$

**Esercizio 6.3 — Corrente libera su parete inclinata.** Si consideri una corrente d'acqua a pelo libero, laminare e stazionaria, che scorre su una parete piana di lunghezza e apertura infinita inclinata di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale. Sul pelo libero la pressione è uniforme e uguale a  $P_a$ . Lo sforzo tangenziale fra acqua e aria viene considerato nullo.

Si calcoli il profilo di velocità nello strato di acqua e il campo di pressione. ■



### Soluzione

**Concetti.** Semplificazione delle equazioni di NS in casi particolari. Soluzioni esatte in coordinate cartesiane.

**Svolgimento.** Si scelga un sistema di riferimento cartesiano con l'asse  $x$  orientato lungo la parete verso il basso e l'asse  $y$  perpendicolare ed uscente ad essa. Sulla corrente di questo problema agiscono le forze di volume dovute alla gravità. L'ipotesi che la pressione sia uniforme sulla superficie di interfaccia tra acqua e aria implica che la pressione è indipendente dalla coordinata  $x$  in tutto il fluido.

- Scrittura delle equazioni di NS in coordinate cartesiane in 2 dimensioni.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6.34)$$

- Semplificazione delle equazioni di NS per il problema considerato. Vengono fatte le seguenti ipotesi:

- problema stazionario:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ;
- direzione  $x$  omogenea (canale infinito in direzione  $x$ ):  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ;

**R** non si può dire altrettanto della pressione, a causa del ruolo che questa ha nelle equazioni di NS incomprimibili. Il campo di pressione può essere interpretato come un moltiplicatore di Lagrange necessario a imporre il vincolo di incompressibilità. Inoltre, ad eccezione di alcune condizioni al contorno, non appare mai direttamente come pressione  $p$  ma solamente con le sue derivate spaziali. Da un punto di vista più fisico, la differenza di pressione lungo il canale è la forzante che mette in moto il fluido in una corrente di Poiseuille.

- la condizione  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  inserita nel vincolo di incompressibilità, implica  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ; poiché  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  segue che  $v = \text{cost} = 0$ , poiché è nulla a parete per la condizione al contorno di adesione,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
- no forze di volume:  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g} = \rho g \sin \alpha \hat{x} - \rho g \cos \alpha \hat{y}$ .

Le equazioni di NS possono essere semplificate

$$\begin{cases} -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos \alpha . \end{cases} \quad (6.35)$$

Dalla seconda segue che l'espressione del campo di pressione è

$$p(x, y) = -\rho gy \cos \alpha + f(x) . \quad (6.36)$$

L'espressione di  $f(x)$  può essere calcolata imponendo la condizione al contorno sul pelo libero,  $p(x, H) = P_a$ ,

$$P_a = -\rho gH \cos \alpha + f(x) \quad \rightarrow \quad f(x) = P_a + \rho gH \cos \alpha . \quad (6.37)$$

La funzione  $f(x)$  è costante, senza dipendere dalla coordinata  $x$ . Di conseguenza, il campo di pressione dipende solo dalla coordinata  $y$

$$p(x, y) = P_a + \rho g(H - y) \cos \alpha , \quad (6.38)$$

e la derivata di  $\partial p / \partial x$  è nulla. La componente  $x$  dell'equazione della quantità di moto diventa quindi un'equazione ordinaria del secondo ordine

$$\begin{cases} -\mu u''(y) = \rho g \sin \alpha , \quad y \in [0, H] \\ u(0) = 0 \\ u'(H) = 0 , \end{cases} \quad (6.39)$$

con le condizioni al contorno di adesione a parete e di sforzo di taglio nullo all'interfaccia tra aria ed acqua,  $0 = \tau(H) = \mu \frac{\partial u}{\partial y}(H) = \mu u'(H)$ . La derivata parziale in  $y$  è stata sostituita da quella ordinaria, poiché la velocità è solo funzione di  $y$ .

- Soluzione dell'equazione differenziale con dati al contorno: si integra due volte e si impongono le condizioni al contorno per ottenere la componente  $u$  del campo di velocità.

$$u(y) = -\frac{\rho g}{2\mu} y(y - H) \sin \alpha . \quad (6.40)$$

**Esercizio 6.4 — Corrente libera su parete verticale.** Si consideri una corrente d'acqua a pelo libero, laminare e stazionaria, che scorre su una parete verticale piana di lunghezza e apertura infinita. Si ipotizzi che la pressione atmosferica che agisce sul pelo libero sia uniforme. Si ipotizzi inoltre che lo sforzo tangenziale fra acqua e aria in corrispondenza del pelo libero sia nullo.

Assegnata la portata in massa per unità di apertura  $\bar{Q} = 0.5 \text{ kg}/(\text{ms})$ , determinare

1. lo spessore  $h$  della corrente d'acqua;
2. lo sforzo tangenziale a parete;
3. la velocità in corrispondenza del pelo libero;
4. la velocità media e il numero di Reynolds basato su tale velocità media e sullo spessore della corrente.

Si sostituisca poi al pelo libero una parete solida. Si determini quale dovrebbe essere la velocità di tale parete per ottenere una portata nulla.

Dati:  $\bar{\rho} = 999 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $\bar{\mu} = 1.15 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{ms})$ .

( $h = 5.61 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ ,  $\tau = 5.494 \text{ Pa}$ ,  $u(h) = 1.339 \text{ m/s}$ ,  $\bar{U} = 0.893 \text{ m/s}$ ,  $Re = 434.8$ ,  $U = -0.4464 \text{ m/s}$ .) ■

### Soluzione

**Concetti.** Semplificazione delle equazioni di NS in casi particolari. Soluzioni esatte in coordinate cartesiane.

**Svolgimento.** Si scelga un sistema di riferimento cartesiano con l'asse  $x$  orientato lungo la parete verso il basso e l'asse  $y$  perpendicolare ed uscente ad essa.

Sulla corrente di questo problema agisce la forza di volume dovuta alla gravità.

L'ipotesi che la pressione sia uniforme sulla superficie di interfaccia tra acqua e aria implica che la pressione è costante in tutto il fluido: si vedrà che  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ ; se sulla superficie libera la pressione è costante e non varia nello spessore, allora la pressione è costante in tutto il fluido.

- Scrittura delle equazioni di NS in 2 dimensioni.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6.41)$$

- Semplificazione delle equazioni di NS per il problema da affrontare.

Ipotesi:

- problema stazionario:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ;
- direzione  $x$  omogenea (canale infinito in direzione  $x$ ):  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ; la pressione nelle equazioni di NS incomprimibili è un moltiplicatore di Lagrange per imporre il vincolo di incomprimibilità; inoltre non appare mai, se non nelle condizioni al contorno, come  $p$  ma solo con le sue derivate spaziali: quindi non è corretto imporre  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ , nonostante la direzione  $x$  sia omogenea;
- $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  inserito nel vincolo di incomprimibilità ( $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ) implica  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ; poiché  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  e  $v = 0$  a parete per la condizione al contorno di adesione, segue che  $v = \text{cost} = 0$ ;
- forze di volume solo in direzione verticale: per come sono stati orientati gli assi,  $f = g\hat{x}$ .

$$\begin{cases} -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6.42)$$

Dalla seconda segue che la pressione può essere funzione solo di  $x$ . Come già detto in precedenza, la pressione sulla superficie libera è costante e uguale alla pressione ambiente  $P_a$ : se la pressione non può variare nello spessore, allora è costante ovunque. La derivata parziale  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ , il suo gradiente è nullo e quindi la pressione è costante in tutta la corrente di acqua.

Nella prima, il termine a sinistra dell'uguale è funzione solo di  $y$ ; quello di destra è costante e uguale a  $\rho g$ . Le condizioni al contorno sono di adesione a parete e di sforzo di taglio nullo all'interfaccia tra aria ed acqua:  $0 = \tau(H) = \mu \frac{\partial u}{\partial y}(H) = \mu u'(H)$ , dove la derivata parziale in  $y$  è stata sostituita da quella ordinaria, poiché la velocità è solo funzione di  $y$ .

$$\begin{cases} -\mu u''(y) = \rho g, \quad y \in [0, H] \\ u(0) = 0 \\ u'(H) = 0 \end{cases} \quad (6.43)$$

- Soluzione dell'equazione differenziale (semplice) con dati al contorno.

Risulta:

$$\Rightarrow u(y) = -\frac{\rho g}{2\mu} y^2 + \frac{\rho g}{\mu} H y \quad (6.44)$$

- Calcolo della portata come integrale della velocità; si trova così la relazione tra Q ed H.

$$Q = \int_0^H \rho u(y) dy = \frac{1}{3} \frac{\rho^2 g}{\mu} H^3 \quad (6.45)$$

E quindi

$$H = \left( \frac{3Q\mu}{\rho^2 g} \right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow H = 5.61 \cdot 10^{-4} m \quad (6.46)$$

- Calcolo dello sforzo a parete

$$\tau = \mu u'|_{y=0} = \rho g H \Rightarrow \tau = 5.494 Pa \quad (6.47)$$

*Osservazione.* Equilibrio con la forza di gravità (problema stazionario).

- Calcolo di  $u(H)$ .

$$u(H) = \frac{1}{2} \frac{\rho g}{\mu} H^2 \Rightarrow u(H) = 1.342 m/s \quad (6.48)$$

- Calcolo velocità media e numero di Reynolds.

$$\bar{U} = \frac{1}{H} \int_0^H u(y) dy = \frac{Q}{\rho H} \Rightarrow \bar{U} = \frac{Q}{\rho H} = \frac{2}{3} u(H) = 0.895 m/s \quad (6.49)$$

$$Re = \frac{\rho \bar{U} H}{\mu} \Rightarrow Re = 434.8 \quad (6.50)$$

L'ultima parte del problema chiede di sostituire alla superficie libera, una parete infinita. L'equazione trovata in precedenza è ancora valida; è necessario però sostituire la condizione di sforzo tangenziale nullo con adesione su una parete mobile con velocità costante  $U$ .

$$\begin{cases} -\mu u''(y) = \rho g, & y \in [0, H] \\ u(0) = 0 \\ u(H) = U \end{cases} \quad (6.51)$$

Il profilo di velocità è:

$$u(y) = \frac{\rho g}{2\mu}(-y^2 + yH) + \frac{U}{H}y \quad (6.52)$$

dove la velocità  $U$  è ancora incognita. Per trovarne il valore, si calcola la portata e la si pone uguale a zero. La portata è uguale a

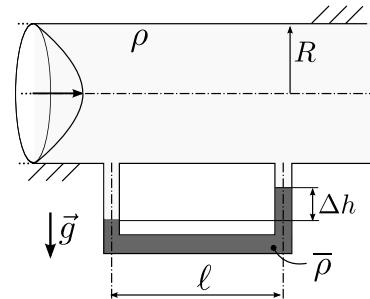
$$Q = \int_0^H u(y)dy = \dots = \frac{1}{12} \frac{\rho g H^3}{\mu} + \frac{1}{2} U H \quad (6.53)$$

Imponendo  $Q = 0$ ,

$$U = -\frac{\rho g H^2}{6\mu} \Rightarrow U = -0.4474 \text{ m/s} \quad (6.54)$$

**Esercizio 6 .5 — Corrente di Poiseuille in un tubo**

**a sezione circolare e manometro.** Un manometro a mercurio ( $\rho_{hg} = 13610 \text{ kg/m}^3$ ) collega due prese di pressione posizionate a una distanza di  $l = 2 \text{ m}$  l'una dall'altra lungo un tubo orizzontale di diametro  $2R = 5 \text{ cm}$  in cui scorre un fluido con densità  $\rho_f = 950 \text{ kg/m}^3$ . Se la differenza fra le altezze dei pelli liberi del liquido manometrico nelle due colonne vale  $\Delta h = 4 \text{ cm}$  e la portata volumetrica che scorre nel tubo è  $Q = 6 \text{ m}^3/\text{s}$ , quanto valgono la viscosità  $\mu$  del fluido e lo sforzo a parete  $\tau_w$ ? ( $\mu = 6.36 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m s)}$ ,  $\tau_w = 31.05 \text{ z N/m}^2$ ) ■

**Soluzione**

**Concetti.** Semplificazione delle equazioni di NS in casi particolari. Soluzioni esatte in coordinate cilindriche. Legge di Stevino.

Scrittura del contributo viscoso del vettore sforzo come:

$$\begin{aligned} s_n &= \mathbb{S} \cdot \hat{n} = \\ &= \mu [\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}] \cdot \hat{n} = \\ &= \mu [2(\hat{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{n} \times \nabla \times \mathbf{u}] \end{aligned} \quad (6.55)$$

**Svolgimento.** La geometria del problema suggerisce di utilizzare un sistema di coordinate cilindriche.

- Scrittura delle equazioni di NS in coordinate cilindriche

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = f_r \\ \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = f_\theta \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_z - \mu \nabla^2 u_z + \frac{\partial p}{\partial z} = f_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (6.56)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \nabla b &= a_r \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial b}{\partial \theta} + a_z \frac{\partial b}{\partial z} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (6.57)$$

- Semplificazione delle equazioni di NS per il problema considerato. Vengono fatte le seguenti ipotesi:

- problema stazionario:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ;
- direzione  $z$  omogenea (canale infinito in direzione  $z$ ):  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ ; come discusso negli esercizi in geometria cartesiana, il termine  $\frac{\partial P}{\partial z} = -G_P$  è costante e in generale diverso da zero.
- problema assialsimmetrico:  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ ;

- no swirl:  $u_\theta = 0$ ;
- dall'incompressibilità e dalle condizioni al contorno a parete, segue che la componente radiale della velocità è identicamente nulla,  $u_r = 0$ ;
- no forze di volume:  $\mathbf{f} = 0$ .

Grazie alle ipotesi fatte, il campo di velocità assume la forma  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u(r)\hat{\mathbf{z}}$ . La componente radiale e azimuthale dell'equazione della quantità di moto sono identicamente soddisfatte, mentre la componente lungo  $z$  diventa

$$\begin{cases} \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} u(r) \right) = -G_P & r \in [0, R] \\ u(0) = \text{valore finito} \\ u(R) = 0 \end{cases} \quad (6.58)$$

dove la derivata ordinaria  $\frac{d}{dr}$  è stata utilizzata al posto della derivata parziale, poiché la componente assiale della velocità dipende solamente dalla coordinata radiale,  $u(r)$ . Le condizioni al contorno garantiscono che il campo di velocità sia regolare nel dominio (in particolare che non esistano singolarità sull'asse) e che sia soddisfatta la condizione al contorno di adesione a parete.

- Soluzione dell'equazione differenziale. Si integra due volte e si ottiene:

$$u(r) = -\frac{G_P}{4\mu} r^2 + A \ln r + B \quad (6.59)$$

Imponendo le condizioni al contorno,  $A$  deve essere nullo per l'ipotesi di valore finito in  $r = 0$  ( $\ln r \rightarrow -\infty$  quando  $r \rightarrow 0$ ). Imponendo poi la condizione di adesione a parete per  $r = R$ , si ottiene:

$$u(r) = -\frac{G_P}{4\mu} (r^2 - R^2) . \quad (6.60)$$

- Calcolo della portata: si integra la velocità sulla sezione circolare (!) del tubo. Questa relazione lega il gradiente di pressione  $G_P$  alla portata  $Q$  e al coefficiente di viscosità dinamica  $\mu$ ,

$$Q = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R u(r) r dr d\theta = 2\pi \int_{r=0}^R u(r) r dr = \frac{\pi}{8} \frac{G_P R^4}{\mu} . \quad (6.61)$$

La differenza di pressione tra i due punti A e B (separati da una distanza  $l$ ) è quindi  $P_B - P_A = -G_P l$ .

- Applicazione della legge di Stevino per ottenere il sistema risolvente:

$$\begin{cases} P_1 = P_A + \rho_f g H_0 & (\text{Stevino tra 1 e A}) \\ P_2 = P_B + \rho_f g (H_0 - \Delta h) & (\text{Stevino tra 2 e B}) \\ P_B = P_A - G_P l & (\text{relazione trovata dalla sln di NS}) \\ P_2 = P_1 - \rho_{Hg} g \Delta h & (\text{Stevino tra 1 e 2}) \end{cases} \quad (6.62)$$

Risolvendo il sistema, si trova che:

$$G_P l = (\rho_{Hg} - \rho_f) g \Delta h \quad (6.63)$$

Esplicitando il legame tra  $G_P$  e  $\mu$ , si ottiene il risultato:

$$\Rightarrow \mu = \frac{\pi R^4}{8 Q l} (\rho_{Hg} - \rho_f) g \Delta h \Rightarrow \mu = 6.36 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{ms} \quad (6.64)$$

- Bisogna calcolare ora  $\tau_w$ , la componente parallela alla parete dello sforzo a parete. Usando l'espressione vettoriale della parte viscosa del vettore sforzo agente sul fluido (aiutandosi con le tabelle per le espressioni in coordinate cilindriche degli operatori differenziali) con  $\mathbf{u} = u_z(r)\hat{\mathbf{z}}$  e  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$ , si può scrivere

$$\begin{aligned}s_{\mathbf{n}} &= \mu [2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}] = \\&= \mu \left[ 2 \frac{\partial u_z}{\partial r} \hat{\mathbf{z}} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \hat{\mathbf{z}} \right] = \\&= \mu \frac{\partial u_z}{\partial r} \hat{\mathbf{z}}.\end{aligned}\tag{6.65}$$

Ricordando che lo sforzo agente sulla parete è uguale e contrario a quello agente sul fluido e che lo sforzo dovuto alla pressione è normale alla parete,

$$\begin{aligned}\tau_w &= -\mu \frac{\partial u_z}{\partial r} \Big|_{r=R} = \\&= \frac{1}{2} G_P R.\end{aligned}\tag{6.66}$$

Si ottiene quindi il valore,  $\tau_w = 31.05 N/m^2$ .

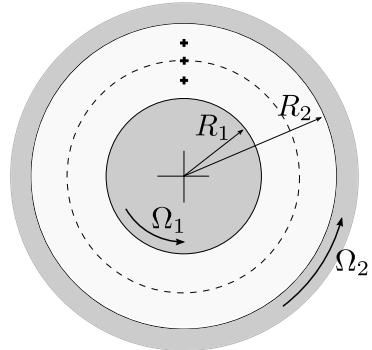
- R** L'espressione dello sforzo tangenziale a parete  $\tau_w = -\mu \frac{\partial u_z}{\partial r}$  per la corrente di Poiseuille in un tubo a sezione circolare è simile a quella ottenuta per la corrente in un canale piano, in coordinate cartesiane,  $\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ . In questi due casi, la componente tangenziale dello sforzo è proporzionale alla derivata in direzione perpendicolare alla parete della componente di velocità parallela alla parete. Questa **NON** è una formula generale per lo sforzo tangenziale a parete, come sarà evidente nel caso della corrente di Taylor-Couette.

**Esercizio 6.6 — Corrente di Taylor-Couette.** Si consideri la corrente piana fra due cilindri coassiali rotanti. Si misura la velocità in due punti posti rispettivamente a  $1/4$  e  $3/4$  del gap fra i due cilindri:  $u_{\theta,1/4} = 0.5 \text{ m/s}$ ,  $u_{\theta,3/4} = 0.8 \text{ m/s}$ . Si determini la velocità di rotazione dei due cilindri nonché la pressione in corrispondenza del cilindro interno sapendo che la pressione in corrispondenza del cilindro esterno vale  $5 \text{ Pa}$ , che la densità del fluido è pari a  $1.225 \text{ kg/m}^3$ , che il diametro del cilindro interno è  $d = 2R_1 = 0.1 \text{ m}$  e che il diametro del cilindro esterno è  $D = 2R_2 = 0.16 \text{ m}$ .

$$(\Omega_1 = 6.663 \text{ s}^{-1}, \Omega_2 = 11.743 \text{ s}^{-1})$$

$$P(r) = P_2 - \rho \left[ \frac{1}{2} A^2 (R_2^2 - r^2) + 2AB \ln \frac{R_2}{r} - \frac{1}{2} B^2 \left( \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right],$$

con  $u_\theta(r) = Ar + B/r$ . )



### Soluzione

**Concetti.** Soluzione esatte delle equazioni di Navier-Stokes in geometria cilindrica. Corrente di Taylor-Couette.

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = f_r \\ \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = f_\theta \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_z - \mu \nabla^2 u_z + \frac{\partial p}{\partial z} = f_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (6.67)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \nabla b &= a_r \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial b}{\partial \theta} + a_z \frac{\partial b}{\partial z} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (6.68)$$

**Svolgimento.** Il problema viene risolto calcolando prima le velocità angolari dei cilindri e successivamente la pressione.

- La soluzione di Taylor-Couette viene ricavata dall'espressione semplificata delle equazioni di Navier-Stokes,

$$\begin{cases} -\rho \frac{u_\theta^2}{r} + \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{u_\theta}{r^2} = 0 \end{cases} \quad (6.69)$$

ottenute imponendo che il campo di moto sia bidimensionale  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u_\theta(r, \theta) \hat{\theta} + u_r(r, \theta) \hat{r}$ , che la soluzione sia omogenea rispetto alla coordinata  $\theta$  e sfruttando le condizioni al contorno e il vincolo di incompressibilità per ricavare  $u_r(\theta) = 0$ . Sia il campo di pressione sia il campo di velocità dipendono solamente dalla coordinata

radiale,  $P = P(r)$ ,  $u_\theta = u_\theta(r)$ . Le derivate parziali possono essere quindi trasformate in derivate ordinarie. La seconda equazione è disaccoppiata dalla prima e può essere risolta, una volta imposte le condizioni al contorno. Trovato il campo di moto da questa equazione, la prima viene usata per calcolare il campo di pressione. La seconda equazione può essere riscritta come (svolgere le derivate per credere!)

$$\begin{cases} -\left(\frac{1}{r}(ru_\theta)\right)' = 0 \\ u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1 \\ u_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r} & \text{A,B from b.c.} \\ u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1 \\ u_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2 \end{cases} \quad (6.70)$$

Il campo di moto tra due cilindri coassiali rotanti è

$$u_\theta(r) = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}. \quad (6.71)$$



La soluzione esatta di Taylor-Couette è facile da ricavare, se si ricorda che è la somma di una rotazione rigida e un vortice irrotazionale: imponendo la forma  $u_\theta(r) = Ar + B/r$  e le condizioni al contorno,

$$u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1, \quad u_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2 \quad (6.72)$$

si ottiene la formula voluta.

- Calcolo delle velocità angolari dei cilindri. Nota la forma del campo di moto e le velocità in due punti a diversi raggi, è possibile calcolare  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  risolvendo un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite. Note le misure di velocità  $u_{\theta,1/4} = u_\theta(r_{1/4})$ ,  $u_{\theta,3/4} = u_\theta(r_{3/4})$ , il sistema risolvente diventa:

$$\begin{bmatrix} -\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r_{1/4} + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r_{1/4}} & \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} r_{1/4} - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r_{1/4}} \\ -\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r_{3/4} + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r_{3/4}} & \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} r_{3/4} - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r_{3/4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{\theta,1/4} \\ u_{\theta,3/4} \end{bmatrix} \quad (6.73)$$

- Calcolo della pressione. Una volta noto il campo di moto, è possibile calcolare il campo di pressione dalla componente radiale dell'equazione della quantità di moto,

$$\begin{aligned} P'(r) &= \rho \frac{u_\theta^2}{r}, \quad \text{con } P(R_2) = P_2 \\ \rightarrow \quad \int_r^{R_2} \frac{dP}{dr} dr &= \int_r^{R_2} \rho \frac{1}{r} \left( Ar + \frac{B}{r} \right)^2 dr \end{aligned} \quad (6.74)$$

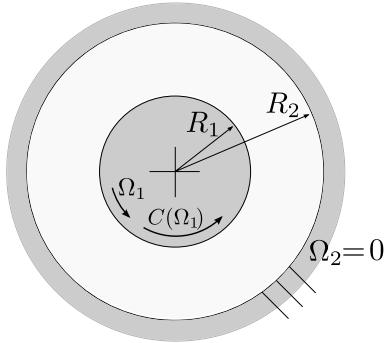
Da questa si ricava

$$P(r) = P_2 - \rho \left[ \frac{1}{2} A^2 (R_2^2 - r^2) + 2AB \ln \frac{R_2}{r} - \frac{1}{2} B^2 \left( \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right]. \quad (6.75)$$

**Esercizio 6 .7 — Corrente di Taylor-Couette: coppia sui cilindri.**

Si consideri la corrente piana di un fluido di densità  $\rho$  fra due cilindri coassiali di raggio  $R_1$  e  $R_2$ . Il cilindro esterno è fermo, mentre quello interno è messo in rotazione da un motore con curva caratteristica  $C_{disp}(\Omega) = \alpha - \beta\Omega$ . Si determini il punto di equilibrio del sistema ( $\Omega$  costante).

(...)

**Soluzione**

**Concetti.** Soluzione esatte delle equazioni di Navier-Stokes in geometria cilindrica. Corrente di Taylor-Couette.

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = f_r \\ \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = f_\theta \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_z - \mu \nabla^2 u_z + \frac{\partial p}{\partial z} = f_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (6.76)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \nabla b &= a_r \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial b}{\partial \theta} + a_z \frac{\partial b}{\partial z} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (6.77)$$

Espressione vettoriale del contributo viscoso del vettore sforzo,

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_n &= \mathbb{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu [\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu [2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}] \end{aligned} \quad (6.78)$$

**Svolgimento.** Viene risolto il problema piano, nel quale i campi di velocità e di pressione hanno la forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u_r(r, \theta) \hat{\mathbf{r}} + u_\theta(r, \theta) \hat{\theta} \quad , \quad P(\mathbf{r}) = P(r, \theta) \quad , \quad (6.79)$$

e le azioni integrali (come la coppia fornita e quella incognita) sono intese per unità di lunghezza, essendo la “dimensione mancante” quella fuori dal piano del disegno.

- Calcolo delle velocità angolari dei cilindri. Nota la forma del campo di moto e le velocità in due punti a diversi raggi, è possibile calcolare  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  risolvendo un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite. Il campo di moto tra due cilindri coassiali rotanti è:

$$u_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r} = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} \quad . \quad (6.80)$$

Se il cilindro esterno è fermo e la velocità angolare del cilindro interno vale  $\Omega_1 = \Omega$ , i coefficienti  $A$  e  $B$  valgono

$$A = -\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \Omega < 0 \quad , \quad B = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \Omega > 0 . \quad (6.81)$$

**R**

La soluzione esatta di Taylor-Couette è facile da ricavare, se si ricorda che è la somma di una rotazione rigida e un vortice irrotazionale: imponendo la forma  $u_\theta(r) = Ar + B/r$  e le condizioni al contorno,

$$u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1 \quad , \quad u_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2 \quad (6.82)$$

si ottiene la formula voluta.

- Calcolo dello sforzo tangenziale a parete per determinare il puto di equilibrio del sistema. Si determina la componente tangenziale (quella che contribuisce alla coppia resistente) dello sforzo sul cilindro interno. Il contributo viscoso del vettore sforzo può essere scritto come:

$$\begin{aligned} s_n &= \mathbb{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu [\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu [2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}] = \quad (\text{verificare con le tabelle}) \\ &= \mu \left[ 2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} = \\ &= \mu \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} = \quad (u_\theta = Ar + B/r) \\ &= -2\mu \frac{B}{r^2} \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \quad (6.83)$$

**R**

La formula dello sforzo tangenziale a parete per la corrente di Taylor-Couette è  $\tau_w = \mu \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right]$ ,

La parte tangenziale dello sforzo a parete sul cilindro interno è quindi  $\tau_w = 2\mu B/R_1^2$ . Integrando il prodotto tra vettore sforzo e raggio  $R_1$  sulla superficie laterale del cilindro si ottiene la coppia resistente,

$$\begin{aligned} C_{res}(\Omega) &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \tau_w(R_1) R_1 R_1 d\theta = \\ &= 2\pi \tau_w(R_1) R_1^2 = -4\pi \mu \frac{B(\Omega)}{R_1^2} R_1^2 = -4\pi \mu \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \Omega = -\gamma \Omega . \end{aligned} \quad (6.84)$$

All'equilibrio, la somma della coppia disponibile e di quella resistente deve essere uguale a zero,

$$0 = C_{disp}(\Omega) + C_{res}(\Omega) = \alpha - \beta \Omega - \gamma \Omega , \quad (6.85)$$

e quindi  $\Omega = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}$ .

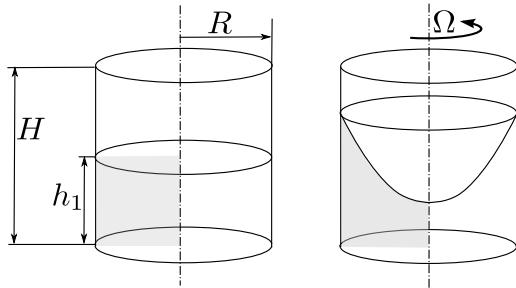
**Esercizio 6.8 — Recipiente rotante.** Un contenitore cilindrico (raggio  $R$ , altezza  $H$ ) è riempito fino ad una quota  $h_1 = H/2$  di un liquido di densità  $\rho$ . Il contenitore è messo poi in rotazione con velocità angolare costante  $\Omega$ . Una volta esaurito il transitorio, viene chiesto di trovare:

- la forma che assume il liquido all'interno del contenitore;
- la velocità  $\Omega_{max}$  alla quale il liquido inizia a uscire dal contenitore;
- il campo di pressione quando il corpo ruota con velocità angolare  $\Omega_{max}$ .

$$(R: z_{free}(r) = \frac{\Omega^2 r^2}{2g} - \frac{\Omega^2 R^2}{4g} + \frac{H}{2}$$

$$\Omega_{max} = \sqrt{\frac{2gH}{R^2}}$$

$$P(r) = \dots)$$



### Soluzione

**Concetti.** Soluzione esatte delle equazioni di Navier-Stokes. Fluido in rotazione rigida, con superficie superiore libera.

#### Svolgimento.

- Si usano le equazioni di NS in coordinate cilindriche. Seguendo un procedimento analogo a quello svolto per ottenere la soluzione esatta di Taylor-Couette, ma senza trascurare l'effetto della gravità, si ottiene la seguente coppia di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \\ \frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{u_\theta^2}{r} \end{cases} \quad (6.86)$$

Il campo di moto descrive una rotazione rigida, poiché il termine  $1/r$  della soluzione di Taylor-Couette non è ammissibile (l'asse appartiene al dominio, non ha senso una velocità che tende all'infinito). La costante di proporzionalità tra  $u_\theta$  ed  $r$  è la velocità angolare  $\Omega$  per soddisfare le condizioni al contorno a parete,  $u_\theta(R) = \Omega R$ .

$$u_\theta(r) = \Omega r \quad (6.87)$$

Dall'integrazione delle due equazioni (6.86) si ottiene il campo di pressione  $P(r, z)$ , a meno di una costante di integrazione  $C$

$$P(r, z) = -\rho g z + \rho \frac{\Omega^2 r^2}{2} + C \quad (6.88)$$

La condizione al contorno necessaria è  $P(r, z_{free}(r)) = P_a$ ; sulla superficie libera, la cui quota è descritta dalla funzione  $z_{free}(r)$  (ancora incognita), agisce la pressione ambiente  $P_a$

$$P(r, z_{free}(r)) = -\rho g z_{free} + \rho \frac{\Omega^2 r^2}{2} + C = P_a \quad (6.89)$$



$$z_{free}(r) = \frac{\Omega^2 r^2}{2g} - \frac{P_a - C}{\rho g} \quad (6.90)$$

Per determinare la costante  $C$  bisogna ricorrere alla conservazione della massa. La massa contenuta all'interno del recipiente non varia (fino a quando il liquido non esce). Se si considera densità costante  $\rho$ , bisogna scrivere la conservazione del volume tra istante iniziale  $V_0 = \pi R^2 H / 2$  e condizione a regime  $V$ . Il volume  $V$  viene calcolato tramite un'integrale di volume, comodo da descrivere in coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned} V &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \int_{z=0}^{z=z_{free}(r)} r dr dz d\theta = \\ &= 2\pi \int_{r=0}^{r=R} z_{free}(r) r dr = \\ &= 2\pi \int_{r=0}^{r=R} \frac{\Omega^2 r^3}{2g} - \frac{P_a - C}{\rho g} r dr = \\ &= 2\pi \left[ \frac{\Omega^2 R^4}{8g} - \frac{(P_a - C)}{2\rho g} R^2 \right] = \\ &= \pi \left[ \frac{\Omega^2 R^4}{4g} - \frac{(P_a - C)}{\rho g} R^2 \right] = \end{aligned} \quad (6.91)$$

Uguagliando  $V_0$  e  $V$  si ottiene

$$-\frac{(P_a - C)R}{\rho g} = -\frac{\Omega^2 R^4}{4g} + R^2 \frac{H}{2} \quad (6.92)$$

termine che può essere sottratto in (6.90)

$$z_{free}(r) = \frac{\Omega^2 r^2}{2g} - \frac{\Omega^2 R^2}{4g} + \frac{H}{2} \quad (6.93)$$

La superficie libera ha la forma di un parabolide. La concavità del paraboloide è diretta verso l'alto e aumenta all'aumentare di  $|\Omega|$  (il risultato è indipendente dal verso di rotazione, e quindi dal segno di  $\Omega$ , poiché compare con potenze pari). La quota del vertice  $z_v = -\frac{\Omega^2 R^2}{4g} + \frac{H}{2}$  invece diminuisce.

- Per determinare la  $\Omega_{max}$ , bisogna impostare la condizione  $z_{free}(r = R) = H$ .

$$z_{free}(R) = \frac{\Omega_{max}^2 R^2}{4g} + R^2 \frac{H}{2} = H \Rightarrow \Omega_{max} = \sqrt{\frac{2gH}{R^2}} \quad (6.94)$$

- Per ottenere il campo di pressione, basta inserire il valore di  $C$  e  $\Omega_{max}$  nella formula (6.88).

## 7. Similitudine

### 7.1 Teorema di Buckingham

Il teorema di Buckingham afferma che un problema descritto da  $n$  variabili fisiche, le cui dimensioni fisiche coinvolgono  $k$  grandezze fondamentali, può essere espresso in funzione di  $n - k$  gruppi adimensionali.

### 7.2 Equazioni di Navier–Stokes incomprimibili in forma adimensionale

Nelle equazioni incomprimibili di Navier–Stokes per un fluido a densità costante

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 , \end{cases} \quad (7.1)$$

compaiono 7 variabili fisiche ( $\rho, \mathbf{u}, \mu, p, \mathbf{g}; \mathbf{r}, t$ ), le 2 variabili indipendenti spaziale  $\mathbf{r}$  e temporale  $t$ , e le 5 variabili dipendenti rappresentate dalla densità  $\rho$ , dal campo di velocità  $\mathbf{u}$ , dal coefficiente di viscosità dinamica  $\mu$ , dal campo di pressione  $p$  e dal campo di forze di volume  $\mathbf{g}$ . Le dimensioni fisiche delle 7 variabili possono essere costruite con 3 grandezze fondamentali, la massa  $M$ , la lunghezza  $L$  e il tempo  $T$ . Ad esempio, le dimensioni fisiche della velocità sono  $[\mathbf{u}] = L T^{-1}$  e quelle della densità sono  $[\rho] = M L^{-3}$ . Le dimensioni delle 7 variabili fisiche che compaiono nelle equazioni di Navier–Stokes incomprimibili sono raccolte nella tabella 7.1. Per poter formare i  $7 - 3 = 4$  gruppi adimensionali che

	$r$	$t$	$\rho$	$\mathbf{u}$	$\mu$	$p$	$\mathbf{g}$
M	0	0	1	0	1	1	0
L	1	0	-3	1	-1	-1	1
T	0	1	0	-1	-1	-2	-2

Tabella 7.1: Variabili fisiche e grandezze fondamentali.

caratterizzano il problema, è necessario scegliere 3 variabili fisiche (o combinazione di queste) che “contengano in maniera linearmente indipendente” tutte le 3 grandezze fondamentali del problema. Facendo riferimento alla tabella 7.1, le colonne relative alle variabili scelte per l’adimensionalizzazione devono formare dei vettori linearmente indipendenti tra di loro. Ad esempio, due scelte valide delle variabili da usare per l’adimensionalizzazione del problema sono:

- $(\rho, U, L)$ , una densità, una velocità e una lunghezza di riferimento,
- $(\mu, U, L)$ , una viscosità, una velocità e una lunghezza di riferimento,

mentre una scelta non accettabile è una terna  $(T, U, L)$  formata da un tempo, una velocità e una lunghezza di riferimento, poichè non è possibile costruire dei gruppi adimensionali con le variabili fisiche che contengono la massa come grandezza fisica, come la densità, la pressione e il coefficiente di viscosità.

Tutte le variabili fisiche vengono espresse come il prodotto di una loro grandezza di riferimento, che contiene le dimensioni fisiche e viene indicata con la tilde, e la loro versione adimensionale, indicata con l’asterisco,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \tilde{L} \mathbf{r}^* \quad , \quad t = \tilde{T} t^* \quad , \quad \mathbf{u} = \tilde{U} \mathbf{u}^* \\ \rho &= \tilde{\rho} \rho^* \quad , \quad \mu = \tilde{\mu} \mu^* \quad , \quad p = \tilde{p} p^* \quad , \quad \mathbf{g} = \tilde{g} \mathbf{g}^*. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Per le equazioni di Navier–Stokes incomprimibili a proprietà costanti, è possibile scegliere il valore di riferimento della densità e della viscosità dinamica come il valore stesso delle variabili fisiche,  $\tilde{\rho} = \rho$ ,  $\tilde{\mu} = \mu$ . In questo modo, il loro valore adimensionale è uguale a 1,  $\rho^* = \mu^* = 1$ . Nel caso del campo di forze di volume dovuto alla gravità, costante e diretto lungo la verticale, è possibile definire il valore di riferimento  $\tilde{g} = |\mathbf{g}|$ , cosicché il vettore  $\mathbf{g}^*$  è uguale e contrario al versore  $\hat{\mathbf{z}}$  orientato in direzione verticale. Anche l’operatore *nabla* viene adimensionalizzato,  $\nabla = \frac{1}{\tilde{L}} \nabla^*$ . Le equazioni di Navier–Stokes possono essere scritte come

$$\begin{cases} \frac{\rho \tilde{U}}{\tilde{t}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho \tilde{U}^2}{\tilde{L}} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \frac{\mu \tilde{U}}{\tilde{L}^2} \Delta^* \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{p}}{\tilde{L}} \nabla^* p^* = -\rho g \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\tilde{U}}{\tilde{L}} \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 . \end{cases} \quad (7.3)$$

### 7.2.1 Adimensionalizzazione “ad alti numeri di Reynolds”

Se si scelgono  $(\tilde{\rho}, \tilde{U}, \tilde{L})$  come grandezze di riferimento, dividendo l’equazione della quantità di moto per  $\tilde{\rho} \tilde{U}^2 / \tilde{L}$  e il vincolo di incomprimibilità per  $\tilde{U} / \tilde{L}$ ,

$$\begin{cases} \frac{\tilde{L}}{\tilde{U} \tilde{t}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \frac{\mu}{\rho \tilde{U} \tilde{L}} \Delta^* \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{p}}{\rho \tilde{U}^2} \nabla^* p^* = -\frac{g \tilde{L}}{\tilde{U}^2} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 , \end{cases} \quad (7.4)$$

si possono riconoscere 4 numeri adimensionali:

- il numero di Strouhal,  $St = \frac{\tilde{L}}{\tilde{U} \tilde{t}}$ , che rappresenta il rapporto tra una scala dei tempi e la scala dei tempi  $\tilde{L}/\tilde{U}$  costruita con la lunghezza e la velocità di riferimento;
- il numero di Reynolds,  $Re = \frac{\rho \tilde{U} \tilde{L}}{\mu}$ , che rappresenta il rapporto tra gli effetti di inerzia e quelli viscosi;
- il numero di Eulero,  $Eu = \frac{\tilde{p}}{\rho \tilde{U}^2}$ , che rappresenta il rapporto tra la grandezza di riferimento della pressione e quella di un’energia cinetica del fluido;
- il numero di Froude,  $Fr = \frac{\tilde{U}^2}{g \tilde{L}}$ , che rappresenta il rapporto tra gli effetti di inerzia e quelli dovuti al campo di forze di volume.

Quando non esiste una scala dei tempi “indipendente” dal fenomeno fluidodinamico, è possibile scegliere il valore di riferimento del tempo  $\tilde{t} = \tilde{L}/\tilde{U}$ , in modo tale da ottenere un numero di Strouhal unitario. Per la natura stessa della “pressione” di moltiplicatore di Lagrange introdotto nelle equazioni di Navier–Stokes per imporre il vincolo di incompressibilità, è frequente che la pressione non abbia una scala indipendente nel regime incompressibile. È possibile quindi scegliere una scala di pressione  $\tilde{p} = \rho\tilde{U}^2$ , in modo tale da ottenere un numero di Eulero unitario,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \frac{1}{Re} \Delta^* \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* = -\frac{1}{Fr} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 . \end{cases} \quad (7.5)$$

Se le grandezze di riferimento sono rappresentative del problema, in modo tale da rendere gli ordini di grandezza delle variabili adimensionali paragonabili tra loro, il valore dei numeri adimensionali permette di valutare l’influenza dei termini. Ad esempio, per valori elevati del numero di Froude l’influenza delle forze di volume è ridotta. Per valori elevati del numero di Reynolds, l’influenza degli effetti viscosi diventa trascurabile nelle regioni del campo di moto nelle quali le derivate spaziali del campo di velocità sono piccole. Per applicazioni tipiche aeronomiche ad alti numeri di Reynolds, gli effetti viscosi saranno quindi trascurabili in gran parte del dominio, ad eccezione delle regioni di strato limite, all’interno delle quali la componente della velocità “parallela” alla parete ha una variazione elevata in direzione perpendicolare alla parete stessa. Se gli effetti delle forze di volume sono trascurabili ( $Fr \rightarrow \infty$ ), le equazioni di Navier–Stokes incompressibili per problemi ad alti numeri di Reynolds ( $Re \rightarrow \infty$ ) si riducono alle equazioni di Eulero incompressibili nelle regioni del dominio in cui gli effetti viscosi sono trascurabili,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* = \mathbf{0} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 . \end{cases} \quad (7.6)$$

### 7.2.2 Adimensionalizzazione “a bassi numeri di Reynolds”

Se si scelgono  $(\tilde{\rho}, \tilde{U}, \tilde{L})$  come grandezze di riferimento, dividendo l’equazione della quantità di moto per  $\tilde{\mu}\tilde{U}/\tilde{L}^2$  e il vincolo di incompressibilità per  $\tilde{U}/\tilde{L}$ , le equazioni di Navier–Stokes diventano

$$\begin{cases} \frac{\rho\tilde{L}^2}{\mu\tilde{t}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho\tilde{U}\tilde{L}}{\mu} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \Delta^* \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{p}\tilde{L}}{\mu\tilde{U}} \nabla^* p^* = -\frac{\rho g\tilde{L}^2}{\mu\tilde{U}} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 . \end{cases} \quad (7.7)$$

Se gli effetti delle forze di volume sono trascurabili rispetto agli effetti viscosi e non ci sono scale indipendenti di tempo e pressione, le equazioni di Navier–Stokes in forma adimensionale diventano

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + Re(\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \Delta^* \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* = \mathbf{0} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 . \end{cases} \quad (7.8)$$

Per correnti nelle quali il numero di Reynolds caratteristico tende a zero, note come *creeping flow*, il termine non lineare diventa trascurabile e le equazioni di Navier–Stokes si riducono alle equazioni di Stokes,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} - \Delta^* \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* = \mathbf{0} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 . \end{cases} \quad (7.9)$$

### 7.3 Equazione di continuità e numero di Mach

La forma adimensionale dell'equazione di continuità permette di valutare i limiti dell'approssimazione di corrente incomprimibile, che soddisfa il vincolo cinematico di incomprimibilità  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . L'equazione della massa viene scritta in forma convettiva,

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}. \quad (7.10)$$

Ricordando che lo stato termodinamico di un sistema monocomponente monofase è definito da due variabili termodinamiche, il campo di pressione  $p$  viene espresso in funzione del campo di densità  $\rho$  e di entropia  $s$ , come  $p(\rho, s)$ . Il differenziale di questa relazione,

$$dp = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho ds, \quad (7.11)$$

può essere utilizzato per esprimere la derivata materiale della densità in funzione delle derivate materiali di pressione ed entropia,

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{(\partial p / \partial \rho)_s} \frac{Dp}{Dt} - \frac{(\partial p / \partial s)_\rho}{(\partial p / \partial \rho)_s} \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{c^2} \frac{Dp}{Dt} - \frac{(\partial p / \partial s)_\rho}{c^2} \frac{Ds}{Dt}, \quad (7.12)$$

avendo riconosciuto il quadrato della velocità del suono  $c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$ . L'equazione della massa diventa quindi

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{Dp}{Dt} - \frac{(\partial p / \partial s)_\rho}{\rho c^2} \frac{Ds}{Dt}. \quad (7.13)$$

Per processi isentropici (o per i quali il secondo termine a destra dell'uguale è trascurabile), l'equazione della massa si riduce a

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{Dp}{Dt}. \quad (7.14)$$

Utilizzando i valori di densità  $\tilde{\rho}$ , velocità  $\tilde{U}$  e lunghezza  $\tilde{L}$  caratteristici della corrente per costruire la scala dei tempi  $\tilde{t} = \tilde{L}/\tilde{U}$  e per la pressione  $\tilde{p} = \tilde{\rho}\tilde{U}^2$ , si ottiene l'equazione della massa in forma adimensionale,

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = -\frac{M^2}{\rho^*} \frac{Dp^*}{Dt^*}, \quad (7.15)$$

nella quale si è iconosciuto il numero di Mach caratteristico della corrente,  $M = \frac{\tilde{U}}{c}$ , definito come il rapporto tra una velocità caratteristica e la velocità del suono in uno stato termodinamico di riferimento della corrente. È immediato osservare che l'equazione di continuità della massa si riduce al vincolo di incomprimibilità quando il numero di Mach assume valori ridotti (e il campo di pressione non ha variazioni rapide).

### 7.4 Equazioni di Boussinesq e numeri di Prandtl, Rayleigh e Grashof

#### 7.4.1 Equazioni di Boussinesq

Le equazioni di Boussinesq sono un modello approssimato delle equazioni complete del moto dei fluidi, ricavato sotto le ipotesi che:

- il contributo di dissipazione nell'equazione dell'energia sia trascurabile;

- la densità dipenda linearmente dalla temperatura nel termine di forze di volume nell'equazione della quantità di moto.

La variazione della densità in funzione della densità diventa quindi

$$d\rho(P, T) = \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T dP + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P dT \approx \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P dT = -\rho_0 \alpha dT \quad (7.16)$$

$$\rightarrow \rho = \rho_0 (1 - \alpha (T - T_0)) , \quad (7.17)$$

dove le derivate sono calcolate nello stato termodinamico di riferimento,  $(\rho_0, T_0)$ , ed è stato introdotto il coefficiente di dilatazione termica

$$\alpha = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P . \quad (7.18)$$

Introducendo le approssimazioni elencate, l'espressione dell'energia interna  $e = c_v T$  e la legge di Fourier per il flusso di calore per conduzione,  $\mathbf{q} = -k \nabla T$ , nelle equazioni complete per una corrente incompressibile di un fluido newtoniano,

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla P = \rho \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla e = 2\mu \mathbb{D} : \mathbb{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} , \end{cases} \quad (7.19)$$

si ottengono le equazioni di Boussinesq

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P = (1 - \alpha(T - T_0)) \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = D \nabla^2 T , \end{cases} \quad (7.20)$$

avendo definito il coefficiente di diffusione termica  $D = \frac{k}{\rho_0 c_v}$ .

## 7.4.2 Equazioni di Boussinesq: problema bidimensionale tra due superfici piane

### Condizioni al contorno

Si considera ora la corrente che si sviluppa tra due superfici piane orizzontali infinite, a distanza  $h$  l'una dall'altra, mantenute a temperatura costante: la temperatura vale  $T_w$  sulla superficie inferiore e  $T_c$  sulla superficie superiore. Viene definita la differenza di temperatura  $\Delta T = T_w - T_c$ .

Se le due superfici considerate sono superfici solide, la velocità su di esse è nulla. Se le due superfici sono superfici "libere" (di simmetria, a sforzo nullo) si annulla la derivata normale della velocità. Prendendo un sistema di assi ortogonali, con l'origine in corrispondenza della superficie inferiore, con l'asse  $x$  parallelo e l'asse  $z$  perpendicolare alla superficie, si possono riassumere così le condizioni al contorno,

$$\text{wall: } \begin{cases} T(x, z=0) = T_w \\ T(x, z=h) = T_c \\ \mathbf{u}(x, z=0) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}(x, z=h) = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{free: } \begin{cases} T(x, z=0) = T_w , \quad T(x, z=h) = T_c \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x, z=0) = 0 , \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, z=h) = 0 \\ w(x, z=0) = 0 , \quad w(x, z=h) = 0 \end{cases} \quad (7.21)$$

Non ci sono condizioni al contorno in  $x$ , poiché la direzione è omogenea. Considereremo qui solo il problema con le condizioni al contorno "free".

### Soluzione stazionaria non convettiva

Esiste una soluzione stazionaria ( $\partial/\partial t = 0$ ) del problema con fluido in quiete ( $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ). Il vincolo di incompressibilità è soddisfatto identicamente. Sfruttando l'omogeneità della direzione  $x$ , la soluzione stazionaria indipendente dalla coordinata  $x$  soddisfa le equazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_0} \frac{dP}{dz} = \alpha g(T - T_0) \\ \frac{d^2T}{dz^2} = 0 , \end{cases} \quad (7.22)$$

dotate delle opportune condizioni al contorno. La soluzione stazionaria del problema è

$$\begin{cases} \bar{T}(z) = T_w + (T_c - T_w) \frac{z}{h} = T_w - \Delta T \frac{z}{h} \\ \bar{P}(z) = P_w + \alpha \rho_0 g \left[ (T_w - T_0)z - \frac{1}{2} \Delta T \frac{z^2}{h} \right] , \end{cases} \quad (7.23)$$

avendo indicato con  $P_w$  il valore della pressione in corrispondenza della superficie inferiore a  $z = 0$ .

### Equazione delle fluttuazioni

Viene definita la fluttuazione di temperatura  $\tau(x, z)$ ,

$$\begin{aligned} \tau(x, z) &= T(x, z) - \bar{T}(z) = T(x, z) - T_w + \Delta T \frac{z}{h} \\ \rightarrow \quad T(x, z) - T_w &= \tau(x, z) - \Delta T \frac{z}{h} . \end{aligned} \quad (7.24)$$

Scegliendo la superficie inferiore a  $z = 0$  per definire la condizione termodinamica di riferimento,  $T_0 = T_w$ . le equazioni di Boussinesq diventano

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P = \left( 1 - \alpha \tau + \Delta T \frac{z}{h} \right) \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau + w \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = D \nabla^2 \tau . \end{cases} \quad (7.25)$$

Inoltre è possibile raccogliere il primo e il terzo termine delle forze di galleggiamento sotto lo stesso operatore di gradiente che opera sul campo di pressione. Infatti, è possibile scrivere il termine di galleggiamento come

$$\left( 1 - \alpha \tau + \Delta T \frac{z}{h} \right) \mathbf{g} = \alpha \tau g \hat{\mathbf{z}} - \nabla \left( g z + \Delta T \frac{z^2}{2h} \right) . \quad (7.26)$$

Definendo una “pressione generalizzata”  $P'$ ,

$$P' = P + \rho_0 g z + \rho_0 \Delta T \frac{z^2}{2h} , \quad (7.27)$$

le equazioni di Boussinesq diventano

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P' = \alpha g \tau \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau - \frac{\Delta T}{h} w = D \nabla^2 \tau , \end{cases} \quad (7.28)$$

e le condizioni al contorno della temperatura vengono espresse anch'esse in funzione di  $\tau$ ,

$$\tau(x, z = 0) = \tau(x, z = h) = 0 . \quad (7.29)$$

	$\mathbf{x}$	$t$	$\mathbf{u}$	$\tau$	$P'$	$\rho_0$	$\nu$	$D$	$\alpha$	$g$	$h$	$\Delta T$
M						1	1					
L	1		1		-1	-3	2	2		1	1	
T		1	-1		-2		-1	-1		-2		
$\Theta$				1					-1		1	

Tabella 7.2: Teorema di Buckingham. Grandezze dimensionali e unità fisiche.

### 7.4.3 Equazioni di Boussinesq in forma adimensionale

Si ricava la forma adimensionale delle equazioni (7.28) e delle condizioni al contorno (7.29) utilizzando il teorema  $\pi$  di Buckingham.

Nel problema di Boussinesq compaiono 12 grandezze dimensionali (13 se si volesse considerare la componente  $w$  della velocità  $\mathbf{u}$  in maniera indipendente),

$$\underbrace{\mathbf{x}, t}_{\text{tar. indip. campi } f(\mathbf{x},t)} \ , \ \underbrace{\mathbf{u}, \tau, P'}_{\text{propr. del fluido e del problema}} \ , \ \underbrace{\rho_0, \nu, D, \alpha, g}_{\text{dominio e condizioni al contorno}} \ , \ \underbrace{h, \Delta T}_{\text{dominio e condizioni al contorno}} \ , \quad (7.30)$$

e 4 grandezze fisiche fondamentali: massa  $M$ , lunghezza  $L$ , tempo  $T$  e temperatura  $\Theta$ . Secondo il teorema di Buckingham, il problema può quindi essere caratterizzato da 8 numeri adimensionali. Utilizzando la stessa scala di lunghezze per adimensionalizzare  $\mathbf{x}$  e  $h$  e la stessa scala di temperature per adimensionalizzare  $\tau$  e  $\Delta T$ , sono sufficienti 6 numeri adimensionali.

È necessario scegliere 4 grandezze fisiche di riferimento indipendenti e, possibilmente, rappresentative del problema con le quali adimensionalizzare le altre. Il problema della convezione non forzata descritto dalle equazioni di Boussinesq è caratterizzato dalla differenza di temperatura  $\Delta T$  e dalla distanza  $h$  delle superfici, dal fluido considerato e dall'intensità delle forze di volume. I campi di velocità  $\mathbf{u}$ , di “temperatura”  $\tau$  e di “pressione”  $P'$  sono un risultato, una conseguenza, delle condizioni al contorno e del fluido impiegato: non esistono scale di velocità e pressione indipendenti, mentre il campo di temperatura può essere scalato sulla differenza  $\Delta T$ . Non esiste nemmeno una scala indipendente dei tempi, poiché l’evoluzione del sistema è determinata dalle condizioni al contorno e dal fluido utilizzato.

Come grandezze dimensionali di riferimento indipendenti e caratteristiche del problema vengono scelte la densità del fluido, il coefficiente di diffusione termica, la distanza tra le superfici e la loro differenza di temperatura:

$$\tilde{\rho} = \rho_0, \quad \tilde{D} = D, \quad \tilde{L} = h, \quad \tilde{\Theta} = \Delta T . \quad (7.31)$$

Ora è possibile scrivere ogni grandezza dimensionale come prodotto di una grandezza omogenea di riferimento (dimensionale) e del suo valore adimensionale. Si può quindi scrivere,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \tilde{L}\mathbf{x}^* \quad , \quad t = \tilde{T}t^* \\ \mathbf{u} &= \tilde{U}\mathbf{u}^* \quad , \quad \tau = \tilde{\Theta}\tau^* \quad , \quad P' = \tilde{P}P^{*\prime} \\ \rho_0 &= \tilde{\rho}\rho_0^* \quad , \quad \nu = \tilde{\nu}\nu^* \quad , \quad D = \tilde{D}D^* \quad , \quad \alpha = \tilde{\alpha}\alpha^* \quad , \quad g = \tilde{g}g^* \\ h &= \tilde{L}h^* \quad , \quad \Delta T = \tilde{\Theta}\Delta T^* \quad , \end{aligned} \quad (7.32)$$

avendo utilizzato la stessa scala di lunghezza  $\tilde{L}$  come riferimento per la coordinata spaziale indipendente  $\mathbf{x}$  e la distanza  $h$  tra le due superfici, e la stessa scala di temperatura  $\tilde{\Theta}$

come riferimento per il campo di temperatura  $\tau$  e la differenza di temperatura tra le due superfici  $\Delta T$ , come anticipato in precedenza. Le 12 grandezze dimensionali sono state adimensionalizzate usando 10 scale di riferimento: da queste è possibile ricavare 6 numeri adimensionali con cui descrivere il problema. Inserendo le espressioni (7.32) nel problema di Boussinesq (7.28), si ricava

$$\begin{cases} \frac{\tilde{U}}{\tilde{T}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\tilde{U}^2}{\tilde{L}} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \frac{\tilde{\nu} \tilde{U}}{\tilde{L}^2} \nu^* \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho} \tilde{L}} \frac{1}{\rho_0^*} \nabla P^{*'} = \tilde{\alpha} \tilde{g} \tilde{\theta} \alpha^* g^* \tau^* \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\tilde{U}}{\tilde{L}} \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \\ \frac{\tilde{\Theta}}{\tilde{T}} \frac{\partial \tau^*}{\partial t^*} + \frac{\tilde{U} \tilde{\Theta}}{\tilde{L}} \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \tau^* - \frac{\tilde{U} \tilde{\Theta}}{\tilde{L}} \frac{\Delta T^*}{h^*} w^* = \frac{\tilde{D} \tilde{\Theta}}{\tilde{L}^2} D^* \nabla^{*2} \tau^*, \end{cases} \quad (7.33)$$

con le condizioni al contorno “free”

$$\text{free: } \begin{cases} \tilde{\Theta} \tau^*(\tilde{L}x^*, \tilde{L}z^* = 0) = 0 & , \quad \tilde{\Theta} \tau^*(\tilde{L}x^*, \tilde{L}z^* = \tilde{L}h^*) = 0 \\ \frac{\tilde{U}}{\tilde{L}} \frac{\partial u^*}{\partial z^*}(\tilde{L}x^*, \tilde{L}z^* = 0) = 0 & , \quad \frac{\tilde{U}}{\tilde{L}} \frac{\partial u^*}{\partial z^*}(\tilde{L}x^*, \tilde{L}z^* = \tilde{L}h^*) = 0 \\ \tilde{U} w^*(\tilde{L}x^*, \tilde{L}z^* = 0) = 0 & , \quad \tilde{U} w^*(\tilde{L}x^*, \tilde{L}z^* = \tilde{L}h^*) = 0 \end{cases} \quad (7.34)$$

Con un abuso di notazione, d’ora in poi si indicano le grandezze adimensionali senza asterisco e i campi adimensionali vengono definiti come funzione delle variabili indipendenti adimensionali,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{U} \mathbf{u}^*(\tilde{L}\mathbf{x}^*, \tilde{T}t^*) \rightarrow \tilde{U} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (7.35)$$

Le grandezze di riferimento delle grandezze costanti vengono scelte coincidenti con la grandezza stessa, cosicché le grandezze adimensionali relative sono uguali a 1,

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \tilde{\rho} & \nu &= \tilde{\nu} & D &= \tilde{D} & \alpha &= \tilde{\alpha} & g &= \tilde{g} \\ h &= \tilde{L} & \Delta T &= \tilde{\Theta}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Dividendo l’equazione della quantità di moto per  $\tilde{\nu} \tilde{U} / \tilde{L}^2$ , il vincolo di incompressibilità per  $\tilde{U} / \tilde{L}$  e l’equazione dell’energia per  $\tilde{D} \tilde{\Theta} / \tilde{L}^2$ , il problema di Boussinesq diventa

$$\begin{cases} \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{\nu} \tilde{T}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\tilde{U} \tilde{L}}{\tilde{\nu}} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{P} \tilde{L}}{\tilde{\rho} \tilde{\nu} \tilde{U}} \nabla P^{*'} = \frac{\tilde{\alpha} \tilde{g} \tilde{\Theta} \tilde{L}^2}{\tilde{\nu} \tilde{U}} \tau^* \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \\ \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{D} \tilde{T}} \frac{\partial \tau^*}{\partial t^*} + \frac{\tilde{U} \tilde{L}}{\tilde{D}} \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \tau^* - \frac{\tilde{U} \tilde{L}}{\tilde{D}} w^* = \nabla^{*2} \tau^*, \end{cases} \quad (7.37)$$

con le condizioni al contorno “free”

$$\text{free: } \begin{cases} \tau^*(x^*, z^* = 0) = 0 & , \quad \tau^*(x^*, z^* = 1) = 0 \\ \frac{\partial u^*}{\partial z^*}(x^*, z^* = 0) = 0 & , \quad \frac{\partial u^*}{\partial z^*}(x^*, z^* = 1) = 0 \\ w^*(x^*, z^* = 0) = 0 & , \quad w^*(x^*, z^* = 1) = 0. \end{cases} \quad (7.38)$$

Nel problema (7.37-7.38) compaiono 6 numeri adimensionali. Siamo arrivati al risultato previsto dal teorema di Buckingham. Prima di andare avanti, conviene comunque fare un’osservazione. Solo 5 dei 6 numeri adimensionali trovati sono tra di loro indipendenti: in particolare solo 3 dei 4 numeri adimensionali

$$\pi_1 = \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{D} \tilde{T}}, \quad \pi_2 = \frac{\tilde{U} \tilde{L}}{\tilde{D}}, \quad \pi_3 = \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{\nu} \tilde{T}}, \quad \hat{\pi}_4 = \frac{\tilde{U} \tilde{L}}{\tilde{\nu}} = \pi_2 \frac{\pi_3}{\pi_1} \quad (7.39)$$

sono linearmente indipendenti. Sembra di aver commesso un errore poiché abbiamo trovato una contraddizione del teorema di Buckingham. L'apparente errore si nasconde nel termine adimensionale  $\frac{\tilde{\alpha}\tilde{g}\tilde{\theta}\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{U}}$ . Questo termine infatti è il prodotto dei numeri adimensionali  $\tilde{\alpha}\tilde{\theta}$  e  $\frac{\tilde{g}\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{U}}$ . I sei numeri adimensionali indipendenti che caratterizzano il problema sono quindi

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{D}\tilde{T}} \quad , \quad \pi_2 = \frac{\tilde{U}\tilde{L}}{\tilde{D}} \quad , \quad \pi_3 = \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{T}} \\ \pi_4 &= \frac{\tilde{P}\tilde{L}}{\tilde{\rho}\tilde{\nu}\tilde{U}} \quad , \quad \pi_5 = \tilde{\alpha}\tilde{\Theta} \quad , \quad \pi_6 = \frac{\tilde{g}\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{U}} .\end{aligned}\quad (7.40)$$

Poiché il coefficiente di dilatazione termica  $\alpha$  e la forza per unità di volume  $g$  compiono sempre attraverso il loro prodotto, questo si può considerare come un'unica variabile,  $\alpha g$ . In questo caso, i 5 numeri adimensionali che descrivono il problema composto dalle 9 (10-1) scale di riferimento sono

$$\pi'_1 = \pi_1, \pi'_2 = \pi_2, \pi'_3 = \pi_3, \pi'_4 = \pi_4, \pi'_5 = \pi_5\pi_6 . \quad (7.41)$$

Non essendoci scale di velocità, tempo e pressione indipendenti, è possibile definire queste scale a partire dalle 4 grandezze fisiche di riferimento  $\tilde{L}$ ,  $\Delta\tilde{T}$ ,  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{D}$ , imponendo il valore unitario di alcuni parametri adimensionali,

$$\begin{aligned}\pi'_1 &= 1 \quad \rightarrow \quad \tilde{T} = \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{D}} \\ \pi'_2 &= 1 \quad \rightarrow \quad \tilde{U} = \frac{\tilde{D}}{\tilde{L}} \\ \pi'_4 &= 1 \quad \rightarrow \quad \tilde{P} = \frac{\tilde{\rho}\tilde{\nu}\tilde{U}}{\tilde{L}} .\end{aligned}\quad (7.42)$$

Gli unici due parametri adimensionali caratteristici del problema rimangono

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \pi'_3 = \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{L}^2/\tilde{D}} \quad \rightarrow \quad \Pi_1 = \frac{\tilde{D}}{\tilde{\nu}} = \frac{1}{Pr} \\ \Pi_5 &= \pi'_5 = \frac{\tilde{\alpha}\tilde{\Theta}\tilde{g}\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{D}/\tilde{L}} \quad \rightarrow \quad \Pi_5 = \frac{\tilde{\alpha}\tilde{g}\tilde{\Theta}\tilde{L}^3}{\tilde{\nu}\tilde{D}} = Ra = \\ &\quad = \frac{\tilde{\alpha}\tilde{g}\tilde{\Theta}\tilde{L}^3}{\tilde{\nu}^2} \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{D}} = Gr\,Pr ,\end{aligned}\quad (7.43)$$

nei quali si possono riconoscere i numeri di Prandtl,  $Pr$ , di Rayleigh,  $Ra$ , e di Grashof,  $Gr$ . La forma adimensionale del problema di Boussinesq tra due superfici piane è quindi

$$\begin{cases} \frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] - \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla P' = Ra \tau \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau - w = \nabla^2 \tau , \end{cases} \quad (7.44)$$

con le condizioni al contorno “free”

$$\text{free: } \begin{cases} \tau(x, z=0) = 0 & , \quad \tau(x, z=1) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x, z=0) = 0 & , \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, z=1) = 0 \\ w(x, z=0) = 0 & , \quad w(x, z=1) = 0 . \end{cases} \quad (7.45)$$

#### 7.4.4 Equazione della vorticità e funzione di corrente nell'approssimazione di Boussinesq

Dall'equazione della quantità di moto in (7.44) è possibile ricavare l'equazione della vorticità, applicandole l'operatore di rotore. Poiché il problema è piano e bidimensionale, il campo di vorticità ha componente non nulla solo fuori dal piano  $xz$ . Utilizzando un sistema di coordinate cartesiano, il campo di vorticità  $\boldsymbol{\omega}(x, z, t) = \xi(x, z, t)\hat{y}$  soddisfa l'equazione

$$\frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi \right] - \nabla^2 \xi = -Ra \frac{\partial \tau}{\partial x} . \quad (7.46)$$

Si può poi introdurre la funzione di corrente  $\psi$ ,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} , \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} , \quad (7.47)$$

in modo tale da soddisfare identicamente il vincolo di incompatibilità. La componente  $y$  del campo di vorticità diventa

$$\xi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \nabla^2 \psi , \quad (7.48)$$

e il termine advettivo di una funzione  $f$  qualsiasi può essere scritta come un determinante,

$$\mathbf{u} \cdot \nabla f = u \frac{\partial f}{\partial x} + w \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} = \begin{vmatrix} f_x & f_z \\ \psi_x & \psi_z \end{vmatrix} =: \frac{\partial(f, \psi)}{\partial(x, z)} . \quad (7.49)$$

Il sistema di equazioni del problema di Boussinesq diventa quindi

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial(\xi, \psi)}{\partial(x, z)} = Pr \nabla^2 \xi - Pr Ra \frac{\partial \tau}{\partial x} \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial(\tau, \psi)}{\partial(x, z)} = \nabla^2 \tau + w . \end{cases} \quad (7.50)$$

#### 7.4.5 Approssimazione di Fourier–Galerkin del problema di Boussinesq

Utilizzando la geometria del dominio, è possibile espandere le funzioni che compaiono nelle equazioni (7.50) come somma di prodotti di funzioni armoniche in  $x$  e  $z$ , la cui ampiezza dipende dal tempo

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= \sum_m \sum_k a_{m,k}(t) \sin(m\pi z + \phi_m^a) \sin(k\pi x + \phi_k^a) \\ \tau(x, z, t) &= \sum_m \sum_k b_{m,k}(t) \sin(m\pi z + \phi_m^b) \sin(k\pi x + \phi_k^b) . \end{aligned} \quad (7.51)$$

Le condizioni al contorno (7.45) del problema con due superfici infinite “free” impongono che la componente  $w = -\partial \psi / \partial x$  e la derivata  $\partial u / \partial z = \partial^2 \psi / \partial z^2$  siano nulle per  $z = 0, 1$  per ogni istante temporale e per ogni valore di  $x$ . Le condizioni al contorno su  $w$  impongono le seguenti condizioni sull'espansione armonica delle funzioni,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{z=0} = \sum_m \sum_k k\pi a_{m,k}(t) \sin \phi_m^a \cos(k\pi x + \phi_k^a) \\ &\quad \rightarrow \quad \phi_m^a = 0 , \\ 0 &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{z=1} = \sum_m \sum_k k\pi a_{m,k}(t) \sin m\pi \cos(k\pi x + \phi_k^a) \\ &\quad \rightarrow \quad m \in \mathbb{Z} . \end{aligned} \quad (7.52)$$

Le stesse condizioni derivano dalle condizioni al contorno su  $\partial u / \partial z$ . Le condizioni al contorno sulla temperatura impongono le seguenti condizioni sull'espansione armonica della funzione  $\tau$

$$\begin{aligned} 0 = \tau \Big|_{z=0} &= \sum_m \sum_k b_{m,k}(t) \sin \phi_m^b \sin(k\pi x + \phi_k^b) \\ &\rightarrow \quad \phi_m^b = 0 , \\ 0 = \tau \Big|_{z=1} &= \sum_m \sum_k b_{m,k}(t) \sin m\pi \sin(k\pi x + \phi_k^b) \\ &\rightarrow \quad m \in \mathbb{Z} . \end{aligned} \quad (7.53)$$

A causa dell'omogeneità della direzione  $x$ , nella quale il dominio è infinito, non ci sono condizioni sul numero d'onda  $k$ , che può assumere tutti i valori  $\in \mathbb{R}$ , e sulla fase delle armoniche in  $x$ . Le espansioni (7.51) possono quindi essere scritte come

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_k a_{m,k}^1(t) \sin(m\pi z) \sin(k\pi x) + a_{m,k}^2(t) \sin(m\pi z) \cos(k\pi x) \\ \tau(x, z, t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_k b_{m,k}^1(t) \sin(m\pi z) \sin(k\pi x) + b_{m,k}^2(t) \sin(m\pi z) \cos(k\pi x) . \end{aligned} \quad (7.54)$$

#### 7.4.6 Dal problema di Boussinesq al modello di Lorenz

Le espansioni (7.54) possono essere *brutalmente* troncate per ottenere un modello dinamico di dimensione  $N_d = 3$  partendo dal modello continuo, che ha dimensione infinita. Le espansioni (7.54) vengono troncate mantenendo solo 3 termini

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= a(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x) \\ \tau(x, z, t) &= b(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x) + c(t) \sin(2\pi z) , \end{aligned} \quad (7.55)$$

avendo definito  $a(t) = a_{1,k}^1(t)$ ,  $b(t) = b_{1,k}^2(t)$ ,  $c(t) = b_{2,0}^1(t)$ . Usando le espansioni (7.55), la componente  $y$  del campo di vorticità  $\xi = \nabla^2 \psi$  diventa

$$\xi = -\pi^2(1+k^2)\psi = -\pi^2(1+k^2)a(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x) \quad (7.56)$$

I due determinanti che compaiono nelle equazioni (7.50) valgono

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\xi, \psi)}{\partial(x, z)} &= \left[ -\pi^3 k (1+k^2) a(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x) \right] [a(t)\pi \cos(\pi z) \sin(k\pi x)] + \\ &- \left[ -\pi^3 (1+k^2) a(t) \cos(\pi z) \sin(k\pi x) \right] [a(t)\pi k \sin(\pi z) \cos(k\pi x)] = 0 , \end{aligned} \quad (7.57)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\tau, \psi)}{\partial(x, z)} &= [-\pi k b(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x)] [a(t)\pi \cos(\pi z) \sin(k\pi x)] + \\ &- [\pi b(t) \cos(\pi z) \cos(k\pi x) + 2\pi c(t) \cos(2\pi z)] [a(t)\pi k \sin(\pi z) \cos(k\pi x)] = \\ &= -k\pi^2 a(t) b(t) \frac{\sin(2\pi z)}{2} - 2k\pi^2 a(t) c(t) \sin(\pi z) \cos(2\pi z) \cos(k\pi x) . \end{aligned} \quad (7.58)$$

I laplaciani che compaiono nelle equazioni (7.50) valgono

$$\nabla^2 \xi = -\pi^2(1+k^2)\xi = \pi^4(1+k^2)^2 a(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x) , \quad (7.59)$$

e

$$\nabla^2 \tau = -\pi^2(1+k^2)b(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x) - 4\pi^2 c(t) \sin(2\pi x). \quad (7.60)$$

Il numero di Prantl viene indicato come  $Pr = \sigma$ , il numero di Rayleigh come  $Ra = R$ . Inserendo le espansioni (7.55) all'interno delle equazioni (7.50), il problema troncato di Boussinesq diventa,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sigma\pi^2(1+k^2)\dot{a}(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x) = \sigma\pi^4(1+k^2)^2 a(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x) + \\ \quad + \sigma R \pi k b(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x) \\ \dot{b}(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x) + \dot{c}(t) \sin(2\pi x) + \\ \quad - k\pi^2 a(t) b(t) \frac{\sin(2\pi z)}{2} - 2k\pi^2 a(t) c(t) \sin(\pi z) \cos(2\pi z) \cos(k\pi x) = \\ = -\pi^2(1+k^2)b(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x) - 4\pi^2 c(t) \sin(2\pi x) + \\ \quad - \pi k a(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x). \end{array} \right. \quad (7.61)$$

Raccogliendo il termine  $\sin(\pi z) \sin(k\pi x)$  nell'equazione della vorticità si ottiene l'equazione

$$-\pi^2(1+k^2)\dot{a} = \sigma\pi^4(1+k^2)^2 a(t) + \sigma R \pi k b(t). \quad (7.62)$$

L'equazione della temperatura viene "proiettata" sulle funzioni di base  $\sin(\pi z) \cos(k\pi x)$  e  $\sin(2\pi x)$  e sfruttando l'ortogonalità delle funzioni armoniche. La proiezione consiste nella moltiplicazione dell'equazione per le funzioni di base  $\sin(\pi z) \cos(k\pi x)$  e nell'integrazione in  $(x, z) \in [0, \frac{2}{k}] \times [0, 1]$ . Usando il valore degli integrali,

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{2/k} \sin(k\pi x)^2 dx &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{2/k} [1 - \cos(2k\pi x)] dx = \frac{1}{k} \\ \int_{x=0}^{2/k} \sin(k\pi x) \cos(k\pi x) dx &= \frac{1}{k\pi} \int_{x=0}^{2/k} \sin(k\pi x) d(\sin(k\pi x)) = 0 \\ \int_{x=0}^{2/k} \cos(k\pi x)^2 dx &= \frac{1}{k}, \end{aligned} \quad (7.63)$$

e degli integrali

$$\begin{aligned} \int_{z=0}^1 \sin(\pi z)^2 dz &= \frac{1}{2} \int_{z=0}^1 [1 - \cos(2\pi z)] dz = \frac{1}{2} \\ \int_{z=0}^1 \sin(\pi z) \sin(\pi z) \cos(2\pi z) dz &= \frac{1}{2} \int_{z=0}^1 [1 - \cos(2\pi z)] \cos(2\pi z) dz = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{z=0}^1 \cos^2(2\pi z) dz = -\frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (7.64)$$

La proiezione dell'equazione della vorticità sulla funzione  $\sin(\pi z) \cos(k\pi x)$  è

$$\frac{1}{2}\dot{b}(t) - \frac{1}{4}2k\pi^2 a(t)c(t) = -\frac{1}{2}\pi^2(1+k^2)b(t) - \frac{1}{2}\pi k a(t), \quad (7.65)$$

mentre la proiezione dell'equazione della vorticità sulla funzione  $\sin(2\pi z)$  è

$$\frac{1}{k}\dot{c}(t) - \frac{1}{k}\frac{\pi^2 k}{2}a(t)b(t) = -\frac{1}{k}4\pi^2 c(t). \quad (7.66)$$

Le equazioni diventano quindi

$$\begin{cases} -\pi^2(1+k^2)\dot{a} = \sigma\pi^4(1+k^2)^2a(t) + \sigma R\pi k b(t) \\ \dot{b} = -\pi^2(1+k^2)b(t) + \pi^2ka(t)c(t) - \pi ka(t) \\ \dot{c} = \frac{\pi^2 k}{2}a(t)b(t) - 4\pi^2c(t) . \end{cases} \quad (7.67)$$

Partendo da queste equazioni, si introduce qualche cambio di variabile per riportarsi all'espressione classica del sistema di Lorenz. Viene introdotto il tempo  $t' = \pi^2(k^2 + 1)t$ , cosicché

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{dt'}{dt} \frac{df}{dt'} = \pi^2(k^2 + 1) \frac{df}{dt'} . \quad (7.68)$$

Con un abuso di notazione, d'ora in poi si indica  $(\cdot)$  la derivata rispetto a  $t'$ . La stessa variabile  $t'$  viene indicata con  $t$ . Le equazioni diventano

$$\begin{cases} \dot{a}(t) = \sigma a(t) + \sigma R \frac{k}{\pi^3(k^2 + 1)^2} b(t) \\ \dot{b}(t) = -b(t) + \frac{k}{k^2 + 1} a(t)c(t) - \frac{k}{\pi(k^2 + 1)} a(t) \\ \dot{c}(t) = \frac{k}{2(k^2 + 1)} a(t)b(t) - \frac{4}{k^2 + 1} c(t) . \end{cases} \quad (7.69)$$

Viene definito infine il cambio di variabili

$$\begin{cases} X(t) = \frac{k}{\sqrt{2}(k^2 + 1)} a(t) \\ Y(t) = \frac{k}{\sqrt{2}(k^2 + 1)} \left[ -\frac{Rk}{\pi^3(k^2 + 1)^2} \right] b(t) \\ Z(t) = \left[ -\frac{Rk^2}{\pi^3(k^2 + 1)} \right] c(t) \end{cases} \quad (7.70)$$

che porta alla forma classica del sistema dinamico di Lorenz

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} = -Y + \rho X - XZ \\ \dot{Z} = -\beta Z + XY , \end{cases} \quad (7.71)$$

avendo definito i parametri

$$\rho = \frac{Rk^2}{\pi^4(k^2 + 1)^2} , \quad \beta = \frac{4}{k^2 + 1} . \quad (7.72)$$

### 7.4.7 Alcuni concetti di stabilità

Prima di indagare il sistema di Lorenz vengono introdotti alcuni concetti utili per studiare la stabilità di un generico sistema dinamico,

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(x(t), t) \quad , \quad x(0) = x_0 . \quad (7.73)$$

Alcuni di questi concetti non sono nuovi; tutte queste definizioni verranno usate (e risulteranno più chiare) nella sezione successiva dedicata al sistema di Lorenz.

**Spazio delle fasi e stati di un sistema.** Lo spazio delle fasi è uno spazio nel quale i punti rappresentano i possibili stati del sistema. Lo stato di un sistema dinamico è identificato dal valore delle sue variabili di stato, ovvero le variabili che lo descrivono in maniera esaustiva da poterne prevederne l'evoluzione.<sup>1</sup> L'evoluzione libera di un sistema dinamico viene descritta dalle traiettorie nel suo spazio delle fasi.

**Equilibri e cicli limite.** Un equilibrio  $\bar{x}$  del sistema è una soluzione stazionaria delle equazioni del sistema dinamico, cioè

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\bar{x}) . \quad (7.74)$$

Un ciclo limite di periodo  $T$  è una traiettoria periodica del sistema, tale per cui

$$x(t+T) = x(t) \quad , \quad \forall t , \quad (7.75)$$

rappresentata nello spazio delle fasi da un'orbita chiusa (e isolata).

**Stabilità alla Lyapunov.** Lo studio di stabilità alla Lyapunov riguarda l'evoluzione locale del sistema dinamico con **condizioni iniziali perturbate**. Qualitativamente, un punto di equilibrio è stabile se, partendo da uno stato “vicino” all’equilibrio, lo stato del sistema rimane per sempre “vicino” all’equilibrio. Inoltre, l’equilibrio è asintoticamente stabile se lo stato converge verso il punto di equilibrio,  $x \rightarrow \bar{x}$  per  $t \rightarrow \infty$ .

La stabilità di Lyapunov di un equilibrio può essere indagata attraverso l’analisi degli autovalori del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio.

**Stabilità strutturale.** La stabilità strutturale considera l’evoluzione del sistema in seguito a perturbazioni del sistema stesso. Un sistema dinamico è strutturalmente stabile se le traiettorie nel suo spazio delle fasi non cambiano qualitativamente: ad esempio, in un sistema strutturalmente stabile alla perturbazione di un parametro, non cambiano il numero dei punti di equilibrio e cicli limite.

### 7.4.8 Sistema dinamico di Lorenz

In questa sezione si descrive, senza nessuna pretesa di completezza, lo studio di stabilità del sistema dinamico di Lorenz,

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} = -Y + \rho X - XZ \\ \dot{Z} = -\beta Z + XY , \end{cases} \quad (7.76)$$

come primo esempio di studio di stabilità di un sistema fluidodinamico. Si studia la stabilità del sistema di Lorenz al variare del parametro  $\rho$ , mantenendo costante il valore dei

<sup>1</sup>Conoscendo lo stato del sistema **con esattezza** è possibile descrivere l’evoluzione libera del sistema, in assenza di perturbazioni e forze esterne. In fondo a questa sezione, sarà più chiara la necessità di conoscere *con esattezza* lo stato iniziale del sistema, per prevederne l’evoluzione.

parametri  $\sigma$  e  $\beta$ . Lorenz usò come valori  $\sigma = 10$  e  $\beta = 8/3$ . Il numero di Prandtl assume un valore paragonabile a quello dell'acqua alla temperatura di  $20^\circ C$ , che vale circa  $Pr \approx 7$ . Il numero di Prandtl per l'aria e altri gas vale circa 0.7. Il valore  $\beta = 8/3$  corrisponde a un numero d'onda fondamentale in direzione  $x$  uguale a  $\frac{k}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{\beta} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.3536$ .

### Punti di equilibrio

I punti di equilibrio del sistema di Lorenz soddisfano le equazioni stazionarie

$$\begin{cases} 0 = -\sigma X + \sigma Y & \rightarrow Y = X \\ 0 = -Y + \rho X - XZ & \searrow \rightarrow X[X^2 - (\rho - 1)] = 0 \\ 0 = -\beta Z + XY & \rightarrow X^2 = \beta Z \nearrow \end{cases} \quad (7.77)$$

L'equazione  $X(X^2 - \rho) = 0$  ha una sola soluzione reale se  $\rho < 1$ , tre soluzioni per  $\rho \geq 1$ . Quindi per valori di  $\rho < 1$  esiste un unico punto di equilibrio,

$$\mathbf{E1}: (\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{Z}_1) = (0, 0, 0). \quad (7.78)$$

Per valori di  $\rho \geq 1$  esistono tre punti di equilibrio,

$$\begin{aligned} \mathbf{E1}: & (\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{Z}_1) = (0, 0, 0), \\ \mathbf{E2}: & (\bar{X}_2, \bar{Y}_2, \bar{Z}_2) = (-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1), \\ \mathbf{E3}: & (\bar{X}_3, \bar{Y}_3, \bar{Z}_3) = (+\sqrt{\beta(\rho - 1)}, +\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1). \end{aligned} \quad (7.79)$$

I campi di velocità e temperatura degli equilibri del sistema fisico corrispondenti ai punti di equilibrio del sistema di Lorenz sono raffigurati in figura (10.1). L'equilibrio **E1** rappresenta la soluzione statica, il cui campo di velocità è nullo: non sono presenti moti convettivi e la trasmissione della temperatura avviene solo per conduzione (diffusione). Questo equilibrio è stabile per valori del parametro  $\rho < 1$ . Per valori  $\rho > 1$  questo equilibrio diventa instabile e nascono i due equilibri “simmetrici” **E2,3** che rappresentano dei moti convettivi stabili, traslati tra di loro di metà della lunghezza d'onda  $\frac{k}{2}$ : i moti convettivi tendono a portare il fluido caldo dalla parete inferiore (a temperatura maggiore, per  $\rho > 0$ , corrispondente a  $Ra > 0$ , e quindi  $\Delta T = T_w - T_c > 0$ ) verso la parete superiore. La nascita di due equilibri stabili in corrispondenza di un cambio di stabilità di un equilibrio esistente è caratteristico dei sistemi dotati di simmetria.<sup>2</sup> Questo cambiamento qualitativo nel piano delle fasi, corrisponde alla *biforcazione pitchfork* che verrà descritta, almeno brevemente, nelle sezioni successive.

I moti convettivi rappresentati dagli equilibri **E2,3** contribuiscono al mescolamento del fluido e a una maggiore trasmissione del calore tra le due superfici. Calcolando il flusso di calore trasmesso attraverso le superfici che delimitano il dominio in  $z = 0$  e  $z = 1$ , si può verificare che la convezione è un fenomeno fisico più efficiente per la trasmissione del calore nei fluidi rispetto alla conduzione. Per esempio, il problema della trasmissione del calore tra due superfici parallele separate da un fluido si trova nella costruzione di infissi con **doppi vetri**: lo scopo dei doppi vetri separati da una sottile intercapedine d'aria è quello di sfruttare l'aria (ferma!) come ottimo isolante termico. L'intercapedine tra i due vetri deve essere sufficiente piccola da impedire la nascita dei moti convettivi,

<sup>2</sup> Un esempio strutturale è quello della trave caricata di punta a compressione. Per valori limitati del carico esiste un'unica soluzione, stabile, rappresentata dalla trave senza freccia. Quando il carico di compressione supera il valore critico, questa soluzione diventa instabile. Nel problema piano, nascono due configurazioni di equilibrio stabili del sistema strutturale: la trave può inflettersi (in maniera indifferente in assenza di imperfezioni) verso destra o verso sinistra.

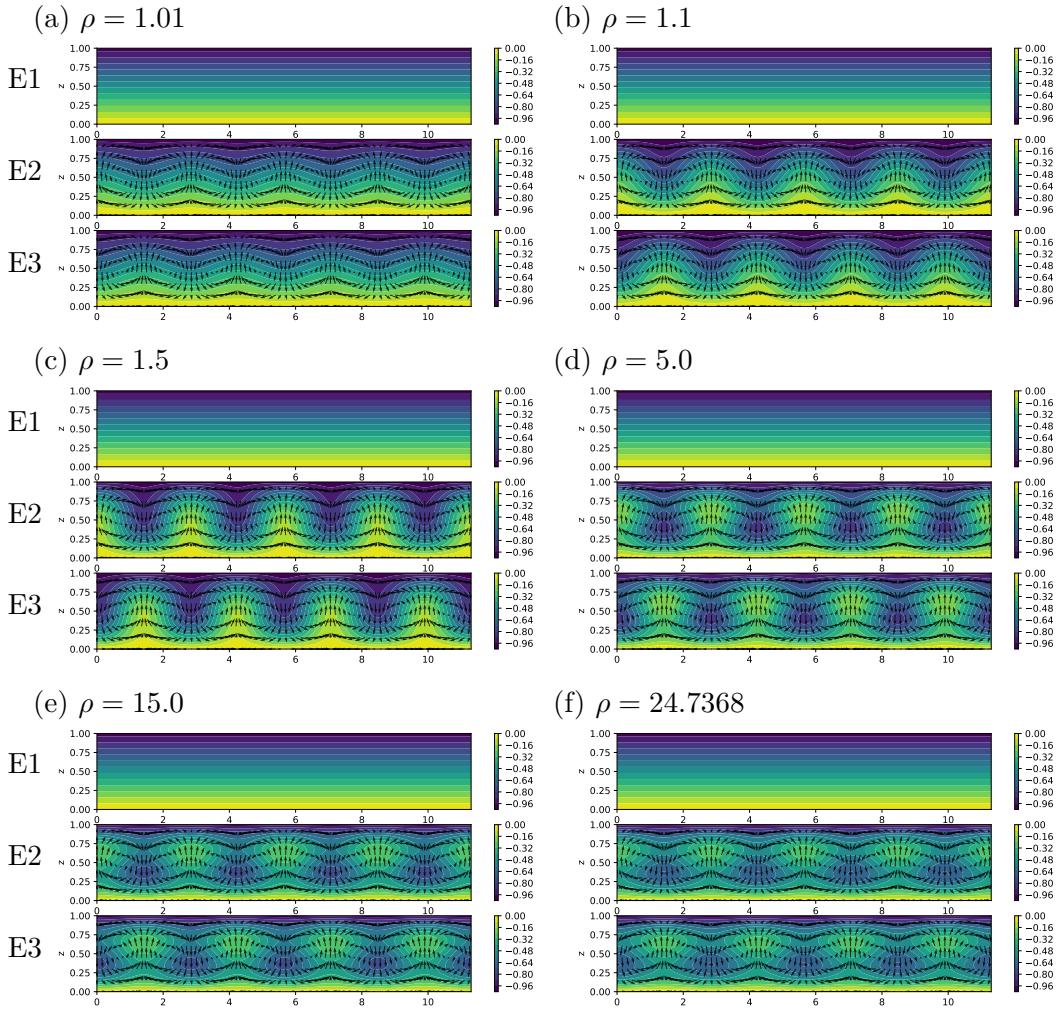


Figura 7.1: Equilibri del sistema di Lorenz per diversi valori del parametro  $\rho > 1$ . Il campo vettoriale della velocità è sovrapposto al campo di temperatura “scalato”  $\tilde{T} = \frac{T(x,z) - T_w}{\delta T}$ , i cui valori al contorno sono  $\tilde{T}_w = 0$  sulla superficie inferiore a  $z = 0$  e  $\tilde{T}_c = -1$  sulla superficie superiore a  $z = 1$ .

che ridurrebbero l’efficienza dell’infisso (e l’efficienza energetica della casa). Le soluzioni convettive nel problema di Lorenz nascono quando il parametro  $\rho$  supera il valore critico  $\rho_{cr} = 1$ . Il parametro  $\rho$  è proporzionale al numero di Rayleigh,

$$\rho \sim Ra = \frac{\alpha g \Delta Th^3}{\nu D} , \quad (7.80)$$

e quindi proporzionale al cubo della distanza tra le due superfici,  $\rho \sim h^3$ . Si ricava la stessa conclusione utilizzata nella costruzione dei doppi vetri: per distanze  $h$  tra le due superfici limitate, il parametro  $\rho$  è inferiore del valore critico e l’unica soluzione stabile esistente è quella isolante di fluido in quiete.

Prima di studiare la stabilità locale “alla Lyapunov” dei punti di equilibrio, riprendendo la definizione di *stabilità strutturale* si scopre che il sistema di Lorenz non è strutturalmente stabile a perturbazioni del valore di  $\rho$ , quando  $\rho = 1$ : infatti per  $\rho < 1$  esiste un solo punto di equilibrio, per  $\rho > 1$  esistono tre punti di equilibrio e di conseguenza le traiettorie nel piano delle fasi subiscono un cambiamento qualitativo.

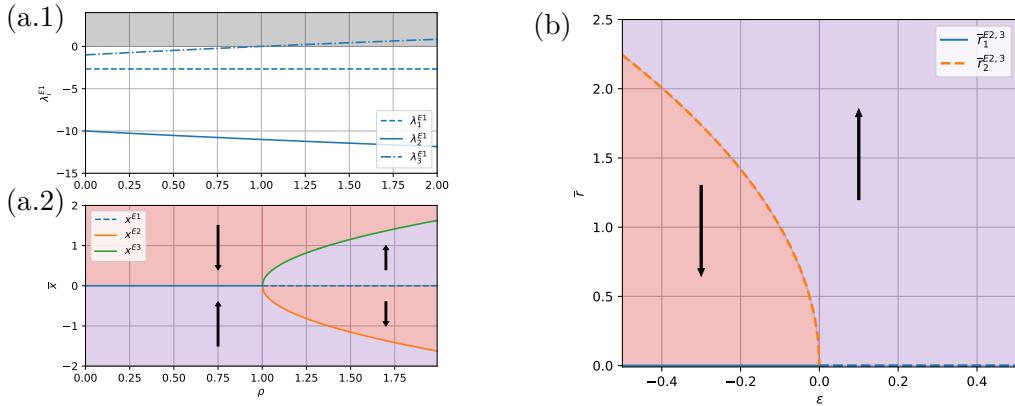


Figura 7.2: Diagrammi di biforcazione. (a) Biforcazione pitchfork per  $\rho = 1$ : (a.1) luogo delle radici dell'equilibrio **E1** e (a.2) diagramma di biforcazione. Per  $\rho = 1$  l'equilibrio **E1** diventa instabile e nascono i due equilibri stabili **E2,3**. (b) Biforcazione di Hopf degli equilibri **E2,2**: diagramma di biforcazione, rappresentato utilizzando la forma normale. Per  $\varepsilon = 0$ ,  $\rho = 24.7368$ , il ciclo limite instabile collassa sull'equilibrio stabile, che diventa instabile.

### Stabilità dell'equilibrio **E1**

Si studia la stabilità “alla Lyapunov” dell’equilibrio **E1**:  $(0, 0, 0)$ . Linearizzando il sistema non lineare di Lorenz attorno all’equilibrio **E1**, si ottiene il sistema linearizzato

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \\ \delta \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}, \quad \delta \dot{x} = \mathbf{J}|_{\mathbf{E1}} \delta \mathbf{x} \quad (7.81)$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) &= -(\beta + \lambda)[(\sigma + \lambda)(1 + \lambda) - \sigma\rho] = \\ &= -(\beta + \lambda)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - \rho)]. \end{aligned} \quad (7.82)$$

Gli autovalori del sistema linearizzato attorno al primo equilibrio sono quindi

$$\lambda_1^{E1} = -\beta, \quad \lambda_{2,3}^{E1} = -\frac{\sigma+1}{2} \mp \frac{\sqrt{(\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-\rho)}}{2}. \quad (7.83)$$

Per valori positivi dei parametri, tutti gli autovalori sono reali. Gli autovalori  $\lambda_1^{E1}$  e  $\lambda_2^{E1}$  sono negativi per ogni valore di  $\rho$ , mentre l’autovalore  $\lambda_3^{E1}$  cambia segno per  $\rho = 1$ , come mostrato in figura (10.3)(a.1). L’analisi lineare di stabilità permette di concludere che l’equilibrio **E1** è linearmente stabile per  $\rho < 1$  e instabile per  $\rho > 1$ , mentre non permette di affermare nulla sul caso  $\rho = 1$ .

### Stabilità degli equilibri **E2**, **E3**

Per valori di  $\rho \geq 1$  esistono i due equilibri **E2**, **E3**. Si studia la loro stabilità “alla Lyapunov” tramite lo studio degli autovalori del sistema linearizzato attorno ai punti di equilibrio,

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \\ \delta \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \pm\sqrt{\beta(\rho-1)} & \pm\sqrt{\beta(\rho-1)} & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}, \quad \delta \dot{x} = \mathbf{J}|_{\mathbf{E2,3}} \delta \mathbf{x}. \quad (7.84)$$

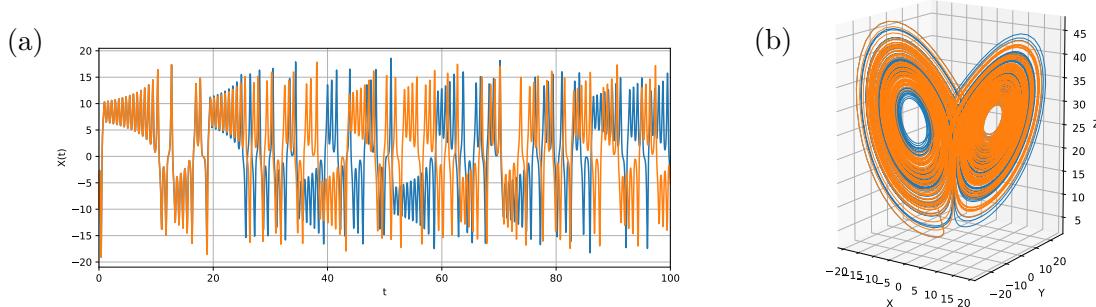


Figura 7.3: Dinamica caotica del sistema di Lorenz per  $\rho = 24.74$ : evoluzione del sistema con condizioni iniziali  $\mathbf{x}_0^{(1)} = (-10, 10, 1)$ , in blu, e  $\mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(1)} + 1.0 \cdot 10^{-9}$ , in arancione. (a) Evoluzione temporale della variabile  $X(t)$ : partendo da due condizioni iniziali “vicine”, le due traiettorie del sistema si discostano in maniera “non banale”. Il sistema dimostra un’evoluzione non periodica, estremamente sensibile alle condizioni iniziali e quindi caotica. (b) Attrattore di Lorenz nello spazio delle fasi: le traiettorie nello spazio delle fasi rivelano la presenza di un attrattore, “nelle vicinanze” del quale si svolge la dinamica asintotica del sistema.

Si può dimostrare (con il criterio di Routh-Hurwitz analiticamente, o calcolandone numericamente il valore) che i due punti di equilibrio sono stabili se  $\rho < \frac{\sigma(\sigma+\beta+3)}{\sigma-1-\beta} \approx 24.7368$ , utilizzando i valori  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$ .

#### Biforcazioni, cicli limite e attrattori strani

L’analisi degli autovalori del sistema linearizzato attorno ai punti di equilibrio permette di determinarne le caratteristiche locali quando gli autovalori hanno parte reale diversa da zero. In corrispondenza del cambio di stabilità di un punto di equilibrio e/o della comparsa/scomparsa di punti di equilibrio (ma non solo!), le traiettorie nello spazio delle fasi del sistema subiscono un cambiamento qualitativo: il sistema non è strutturalmente stabile e si verifica una **biforcazione**.

Per studiare la stabilità locale di un equilibrio in presenza di autovalori a parte reale nulla è necessario costruire un’approssimazione non lineare del sistema. Si considera un punto di equilibrio per il quale il sistema linearizzato non ha autovalori instabili, ha  $N_s$  autovalori stabili e  $N_c$  autovalori a parte reale nulla e si vuole determinare l’evoluzione del sistema nelle vicinanze del punto di equilibrio. Si può dimostrare che la dinamica del sistema  $N = N_s + N_c$ -dimensionale si riduce velocemente alla dinamica di un sistema  $N_c$  dimensionale: le  $N_s$  dinamiche asintoticamente stabili associate agli autovalori con parte reale negativa tendono asintoticamente ad annullarsi nell’intorno dell’equilibrio, mentre rimangono solo le dinamiche associate alle  $N_c$  dinamiche marginalmente stabili.

Si può usare un’espansione polinomiale per approssimare il sistema non lineare originale e costruire la **varietà centrale**, cioè la regione dello spazio delle fasi nella quale si svolgono le dinamiche marginalmente stabili.

Ad esempio, quando  $\rho = 1$  il sistema di Lorenz nell’intorno dell’equilibrio **E1** (e dei nascenti equilibri **E2,3**) può essere ricondotto alla dinamica del sistema monodimensionale

$$\dot{a}(t) = f(a(t)) = a(t)[\alpha\varepsilon - \beta a(t)^2] \quad , \quad \text{con } \varepsilon := \rho - 1 \quad , \quad (7.85)$$

con  $\alpha \approx 0.909$  e  $\beta \approx 0.170$ . Questo sistema coincide alla **forma normale** della biforcazione, cioè il sistema più semplice in grado di descrivere il cambiamento qualitativo del sistema. Lo studio della forma normale della biforcazione rivela l'esistenza di un unico equilibrio stabile  $\bar{a}_1 = 0.0$  per  $\epsilon \leq 0$ , cioè  $\rho \leq 1$ . Per  $\rho > 1$  l'equilibrio  $\bar{a}_1$  diventa instabile e nascono due equilibri stabili  $\bar{a}_{2,3} = \mp\sqrt{\alpha\epsilon/\beta}$ . L'equazione (10.16) rappresenta la forma normale di una *biforcazione pitchfork*. Poiché  $\beta > 0$ , la biforcazione si definisce *supercritica*.

Analogamente, quando  $\rho \approx 24.7368$  i due equilibri **E2,3** cambiano stabilità: i coppia di autovalori complessi coniugati attraversano l'asse immaginario e la loro parte reale diventa positiva. Questo tipo di instabilità strutturale viene definita *biforcazione di Hopf*: cambia la stabilità del punto di equilibrio considerato e nasce/sparisce un ciclo limite nel suo intorno (il ciclo limite nasce da o riduce al punto di equilibrio). L'approssimazione alla varietà centrale del sistema attorno a uno dei due equilibri conduce al sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = \alpha_r r\varepsilon - \beta_r r^3 \\ \dot{\theta}(t) = \omega + \alpha_i \varepsilon + \beta_i r^2 \end{cases}, \quad \text{con } \varepsilon := \rho - 24.7368, \quad (7.86)$$

dove è stata utilizzata la rappresentazione polare complessa  $a(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$  della variabile  $a(t)$  che descrive la dinamica del sistema ridotta alla varietà centrale. Il parametro  $\omega = 9.6245$  coincide con la parte immaginaria degli autovalori marginalmente stabili e gli altri parametri valgono:

$$\begin{aligned} \alpha_r &= 0.0302 & \beta_r &= -0.003 \\ \alpha_i &= 0.1815 & \beta_i &= -0.028. \end{aligned} \quad (7.87)$$

La prima equazione delle (10.17) è identica all'equazione che descrive la biforcazione pitchfork. In questo caso, però, il coefficiente  $\beta_r$  è minore di zero. Questo tipo di biforcazione si definisce *subcritica*. Si può facilmente dimostrare che per  $\varepsilon < 0$  esistono due (il raggio  $r$  di una rappresentazione polare deve essere  $\geq 0$ ) equilibri

$$\bar{r}_1 = 0, \quad \bar{r}_2 = \sqrt{-\alpha_r \varepsilon / \beta_r}. \quad (7.88)$$

Il primo equilibrio dell'equazione in  $r$  corrisponde a un punto fisso, poiché il raggio è nullo. Il secondo equilibrio corrisponde al raggio  $\bar{r}_2$  del ciclo limite esistente per  $\varepsilon < 0$ . Si dimostra quindi che un ciclo limite instabile coesiste con ognuno dei due punti di equilibri stabili **E2,3** per  $\varepsilon < 0$  (cioè  $\rho < 24.7368$ ), almeno in un intervallo finito di valori di  $\rho$ . Quando  $\varepsilon = 0$  (cioè  $\rho < 24.7368$ ), il ciclo limite instabile si riduce al punto di equilibrio. Per  $\varepsilon > 0$  il punto di equilibrio diventa instabile, mentre scompare il ciclo limite.

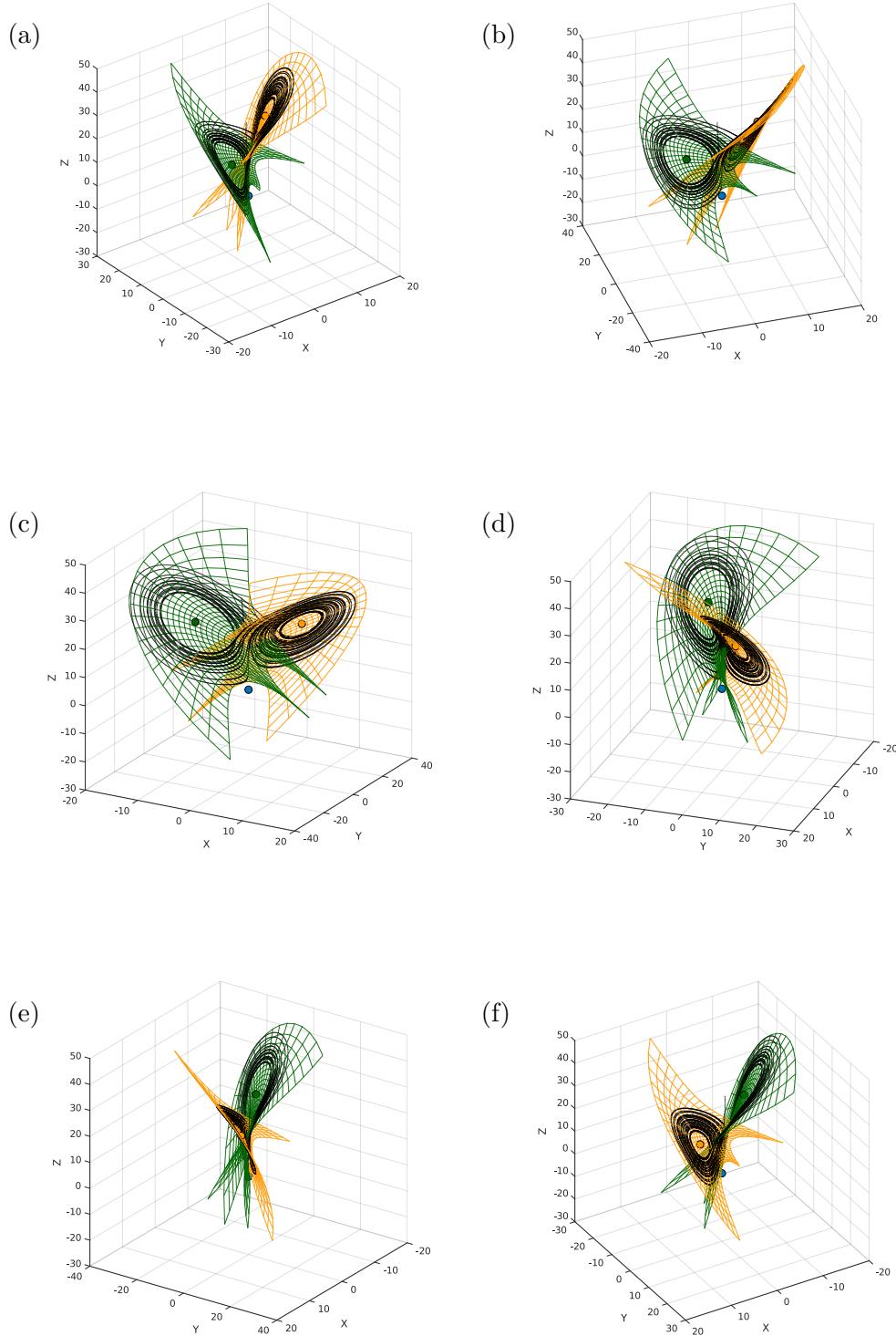


Figura 7.4: Evoluzione del sistema di Lorenz per  $\rho = 24.7368$  nel piano delle fasi. Dinamica caotica, equilibri (**E1** in azzurro, **E2** in arancione e **E3** in verde) e varietà centrali dei due equilibri marginalmente stabili **E2,3**. La dinamica asintotica del sistema caotica del sistema alterna in maniera irregolare delle oscillazioni attorno ai due equilibri instabili sulle “nelle vicinanze” delle rispettive varietà centrali.

Rimangono aperte alcune questioni: è possibile descrivere i cicli limite esistenti per (alcuni) valori del parametro  $\rho < 24.7368$ ? Qual è l'evoluzione del sistema per valori di  $\rho > 24.7368$ ? Ha senso utilizzare il modello di Lorenz, un brutale troncamento di un sistema continuo che dà origine a un sistema tridimensionale, per descrivere l'evoluzione del sistema fisico per valori crescenti del numero di Rayleigh  $Ra$ , e quindi del parametro  $\rho$ ?

Partendo dall'espressione approssimata del ciclo limite ottenuta dalla forma normale della biforcazione di Hopf per  $\rho \lesssim 24.7368$  è possibile calcolare la forma del ciclo limite per valori inferiori del parametro, tramite tecniche di **continuazione**: negli algoritmi di continuazione la soluzione di un problema, nota per un valore del parametro, viene utilizzata per stimare la guess iniziale dello stesso problema per un valore diverso del parametro. In particolare, per identificare la traiettoria periodica corrispondente a un ciclo limite si può utilizzare una tecnica di **bilanciamento armonico**: la traiettoria periodica viene scritta come serie di Fourier, della quale è necessario determinare i coefficienti.

Per valori di  $\rho > 24.7368$  non esistono punti di equilibrio stabili punti di equilibrio stabili e non esistono cicli limite stabili. La dinamica del sistema rimane confinata in una regione limitata dello spazio delle fasi, senza divergere. L'evoluzione del sistema rappresentata in figura (10.4) dimostra l'elevata sensibilità della soluzione alle condizioni iniziali e l'assenza di equilibri o dinamiche periodiche stabili, caratteristici di un **regime caotico**. L'evoluzione di lungo tempo del sistema avviene “nelle vicinanze” dell'attrattore di Lorenz, del quale si può intuire la forma grazie alle traiettorie rappresentate in figura (10.4)(b). La figura (10.5) rappresenta la traiettoria del sistema di Lorenz e le *varietà centrali* dei due equilibri **E2,3** marginalmente stabili per  $\rho = 24.7368$ . Qualitativamente, lo stato del sistema viene attratto su queste superfici, lungo le direzioni stabili. Su queste superfici poi, si può osservare la dinamica marginalmente stabile (di dimensione ridotta: per il sistema di Lorenz, di dimensione 2, invece della dimensione 3 del sistema completo) del sistema: lo stato del sistema inizialmente oscilla attorno all'equilibrio **E2** (ad esempio), prima di essere attratta in maniera “difficilmente prevedibile” dalla varietà centrale dell'equilibrio **E3** e iniziare ad oscillare attorno a quest'ultimo equilibrio.

L'approssimazione di Lorenz di dimensioni ridotte del sistema fisico continuo (e quindi di dimensione infinita) perde significato all'aumentare del numero di Rayleigh: all'aumentare del numero di Rayleigh infatti si attivano delle dinamiche più complesse, di dimensione maggiore, non descrivibili a un sistema tridimensionale.

**Esercizio 7.1 — Similitudine ad alta velocità: missile.** Un missile vola alla quota di  $7000\text{ m}$ , dove la densità dell'aria è  $\rho = 0.59\text{ kg/m}^3$  e la sua temperatura è  $T = -30.45^\circ\text{C}$ , alla velocità costante  $V_v = 505\text{ km/h}$ .

Determinare:

- il fattore di scala geometrico  $\lambda = L_m/L_v$ ,
- la velocità dell'aria  $V_m$ ,

necessari per riprodurre correttamente i coefficienti aerodinamici del missile in una galleria del vento che operi a condizioni atmosferiche standard ( $\rho = 1.225\text{ kg/m}^3$ ,  $p = 101325\text{ Pa}$ ,  $T = 15^\circ\text{C}$ ).

$$(V_m = 152.8\text{ m/s}, \lambda = 0.507) \quad \blacksquare$$

### Soluzione

**Concetti.** Similitudine fluidodinamica: numeri di Reynolds e di Mach.

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} \quad , \quad M = \frac{U}{c} . \quad (7.89)$$

Formula di Sutherland per la viscosità dinamica **dei gas**,

$$\mu(T) = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \frac{C + T_0}{C + T} . \quad (7.90)$$

**Svolgimento.** Assumendo che l'aria si comporti come gas ideale, per il quale vale l'equazione di stato  $p = \rho RT$ , la velocità del suono vale  $c = \sqrt{\gamma RT}$ , dove  $\gamma = c_p/c_v$  è il rapporto dei calori specifici a pressione e volume costante, che vale  $\gamma = 1.4$  per un gas biatomico. La costante del gas  $R$  è definita come il rapporto tra la costante universale dei gas  $\mathcal{R}$  e la massa molare  $M_m$ ,  $R = \mathcal{R}/M_m$ . La massa molare dell'aria secca vale  $M_m = 28.96\text{ kg/kmol}$  e la sua costante  $R$  vale

$$R = \frac{\mathcal{R}}{M_m} = \frac{8314.4\text{ J/(kmol K)}}{28.97\text{ kg/kmol}} = 287.0 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} . \quad (7.91)$$

La velocità del suono nell'aria alle condizioni termodinamiche del problema vale  $c = 312.3\text{ m/s}$ . Il numero di Mach caratteristico della corrente è quindi  $M = 0.45$  e gli effetti di comprimibilità non possono essere trascurati, poiché il numero di Mach è maggiore della valore convenzionale 0.3 che identifica il limite della validità dell'approssimazione di fluido incomprimibile. Per ottenere la similitudine tra problema reale e quello modellato (di dimensioni ridotte) è necessaria la similitudine geometrica e l'uguaglianza dei numeri adimensionali che caratterizzano il problema, il numero di Reynolds  $Re$  e il numero di Mach  $M$ .

$$\begin{cases} M_1 = M_2 \\ Re_1 = Re_2 \end{cases} . \quad (7.92)$$

Utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti,

$$\begin{cases} \frac{V_v}{\sqrt{\gamma RT_v}} = \frac{V_m}{\sqrt{\gamma RT_m}} \\ \frac{\rho_v V_v L_v}{\mu(T_v)} = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu(T_m)} \end{cases} \quad (7.93)$$

Risolvendo il sistema, si ottiene l'espressione delle incognite

$$\begin{cases} V_m = V_v \sqrt{\frac{T_m}{T_v}} \\ \lambda = \frac{L_m}{L_v} = \frac{\rho_v}{\rho_m} \sqrt{\frac{T_v}{T_m}} \frac{\mu(T_m)}{\mu(T_v)} \end{cases} \quad (7.94)$$

Per trovare i valori ancora incogniti della viscosità dinamica si usa la formula di Sutherland: per l'aria i coefficienti sono  $T_0 = 288K$ ,  $C = 110.4K$ . Si ottengono i valori numerici  $V_m = 152.8m/s$ ,  $\lambda = 0.507$ .

**Osservazioni.** Non è sempre possibile imporre l'uguaglianza di  $Re$  e  $M$ . Si pensi ad esempio a un'applicazione in aria in condizioni standard e prove sul modello in galleria ad aria in condizioni standard. Per ottenere l'uguaglianza dei numeri di Mach, bisogna avere la stessa velocità caratteristica (poichè la celerità del suono è la stessa tra condizione reale e modello). Avendo uguagliato le velocità caratteristiche ed essendo uguali le variabili termodinamiche  $\rho$  e  $\mu$ , si ottiene l'uguaglianza della dimensione caratteristica del modello. Questo significa che sarebbe necessario avere un modello in scala 1:1 per soddisfare la similitudine utilizzando nella prova sperimentale lo stesso fluido nelle stesse condizioni termodinamiche delle condizioni "al vero". Per limiti tecnologici e di costi, dovuti alle dimensioni degli apparati sperimentali, spesso è necessario utilizzare un modello in scala dell'originale. Esistono gallerie controllate in pressione per variare lo stato termodinamico dell'aria di prova e gallerie che utilizzando acqua come fluido di prova: entrambe queste scelte comportano complicazioni nel progetto e nell'utilizzo dell'impianto, traducibile spesso in costi elevati.

Allora per quale numero adimensionale o secondo quale combinazione dei numeri adimensionali conviene ottenere la similitudine? "Arte", esperienza e alcuni "espedienti" sperimentali, che non sono oggetto di questo corso hanno lo scopo di ottenere risultati rappresentativi del problema al vero, anche se la perfetta similitudine non è soddisfatta.

**Esercizio 7.2 — Similitudine ad alta velocità: velivolo.** Un aeromobile vola nell'alta atmosfera a velocità costante  $V_v = 252 \text{ m/s}$ , in condizioni di densità  $\rho_v$  e temperatura  $T_v$  assegnate:  $\rho_v = 0.424 \text{ kg/m}^3$ ,  $T_v = -50.3^\circ\text{C}$ .

Determinare la velocità, la densità e la pressione dell'aria da utilizzarsi in una galleria del vento pressurizzata che operi alla temperatura di  $15^\circ\text{C}$  per ottenere la similitudine dinamica corretta con un modello in scala ridotta  $\lambda = 0.2$ .

$$(V_m = 286.6 \text{ m/s}, \rho_m = 2.292 \text{ kg/m}^3, p_m = 189560 \text{ Pa}) \quad \blacksquare$$

### Soluzione

**Concetti.** Similitudine fluidodinamica: numeri di Reynolds e di Mach.

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} \quad , \quad M = \frac{U}{c} . \quad (7.95)$$

Formula di Sutherland per la viscosità dinamica **dei gas**,

$$\mu(T) = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \frac{C + T_0}{C + T} . \quad (7.96)$$

**Svolgimento.** Assumendo che l'aria si comporti come gas ideale, per il quale vale l'equazione di stato  $p = \rho RT$ , la velocità del suono vale  $c = \sqrt{\gamma RT}$ , dove  $\gamma = c_p/c_v$  è il rapporto dei calori specifici a pressione e volume costante, che vale  $\gamma = 1.4$  per un gas biatomico. La costante del gas  $R$  è definita come il rapporto tra la costante universale dei gas  $\mathcal{R}$  e la massa molare  $M_m$ ,  $R = \mathcal{R}/M_m$ . La massa molare dell'aria secca vale  $M_m = 28.96 \text{ kg/kmol}$  e la sua costante  $R$  vale

$$R = \frac{\mathcal{R}}{M_m} = \frac{8314.4 \text{ J/(kmol K)}}{28.97 \text{ kg/kmol}} = 287.0 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} . \quad (7.97)$$

La velocità del suono nell'aria alle condizioni termodinamiche del problema vale  $c = 299.2 \text{ m/s}$ . Il numero di Mach caratteristico della corrente è quindi  $M = 0.84$  e gli effetti di comprimibilità non possono essere trascurati, poiché il numero di Mach è maggiore della valore convenzionale 0.3 che identifica il limite della validità dell'approssimazione di fluido incomprimibile. Per ottenere la similitudine tra problema reale e quello modellato (di dimensioni ridotte) è necessaria la similitudine geometrica e l'uguaglianza dei numeri adimensionali che caratterizzano il problema, il numero di Reynolds  $Re$  e il numero di Mach  $M$ .

$$\begin{cases} M_1 = M_2 \\ Re_1 = Re_2 \end{cases} . \quad (7.98)$$

Utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti,

$$\begin{cases} \frac{V_v}{\sqrt{\gamma RT_v}} = \frac{V_m}{\sqrt{\gamma RT_m}} \\ \frac{\rho_v V_v L_v}{\mu(T_v)} = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu(T_m)} \end{cases} \quad (7.99)$$

Risolvendo il sistema, si ottiene l'espressione delle incognite:

$$\Rightarrow \begin{cases} V_m = V_v \sqrt{\frac{T_m}{T_v}} \\ \rho_m = \frac{1}{\lambda} \rho_v \sqrt{\frac{T_v}{T_m}} \frac{\mu(T_m)}{\mu(T_v)} \\ P_m = \rho_m R T_m = \frac{1}{\lambda} \frac{\mu(T_m)}{\mu(T_v)} \rho_v R \sqrt{T_v T_m} \end{cases} \quad (7.100)$$

Per trovare i valori ancora incogniti della viscosità dinamica si usa la formula di Sutherland: per l'aria i coefficienti sono  $T_0 = 288K$ ,  $C = 110.4K$ . Si ottengono i valori numerici  $V_m = 286.6 \text{ m/s}$ ,  $\rho_m = 2.292 \text{ kg/m}^3$ ,  $p_m = 189560 \text{ Pa}$ .

**Esercizio 7.3 — Similitudine a bassa velocità: sottomarino.** La velocità di pattugliamento di un sottomarino vale  $V_v = 2.5 \text{ m/s}$ . Considerando che il sottomarino si muova in acqua in condizioni standard, a quale velocità deve essere provato un modello in scala  $\lambda = 1/10$ , avendo a disposizione rispettivamente:

- una galleria ad acqua in condizioni standard,
- una galleria ad aria a pressione di 10 bar e temperatura di  $30^\circ\text{C}$ ?

Se la resistenza al vero vale  $D_v = 6000 \text{ N}$ , quanto vale la resistenza sui modelli in scala nei due casi?

(Galleria ad aria:  $V_m = 35.17 \text{ m/s}$ ,  $D_m = 136.1 \text{ N}$ . Galleria ad acqua:  $V_m = 25 \text{ m/s}$ ,  $D_m = 6000 \text{ N}$ .) ■

### Soluzione

**Concetti.** Similitudine fluidodinamica per correnti incomprimibili, numero di Reynolds,

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu}. \quad (7.101)$$

Formula di Sutherland per la viscosità dinamica **dei gas**,

$$\mu(T) = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \frac{C + T_0}{C + T}. \quad (7.102)$$

Azioni agenti sul modello e coefficienti di forza.

**Svolgimento.** La velocità sul modello si trova tramite l'uguaglianza dei numeri di Reynolds,

$$\frac{\rho_v U_v L_v}{\mu_v} = \frac{\rho_m U_m L_m}{\mu_m} \rightarrow U_m = U_v \frac{\rho_v L_v}{\rho_m L_m} \cdot \frac{\mu_m}{\mu_v} \quad (7.103)$$

Per trovare la viscosità dell'aria viene utilizzata la formula di Sutherland (per l'aria i coefficienti sono  $T_0 = 288K$ ,  $C = 110.4K$ ,  $\mu_0 = 18.27 \mu\text{Pas}$ ). Il coefficienti di viscosità dinamica dell'acqua in condizioni standard è dell'ordine di  $10^{-3} \text{ kg/(m s)}$ .

La forza agente aerodinamica agente sul corpo, la cui superficie esterna è indicata con  $S$ , è la risultante degli sforzi di superficie esterna del corpo  $S_b$ ,

$$\mathbf{F} = \oint_S \mathbf{t}_n = \oint_S -p \hat{\mathbf{n}} + \mu [\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (7.104)$$

Vengono scelte la densità caratteristica del fluido  $\rho$ , una velocità caratteristica della corrente  $U$  e una lunghezza caratteristica del problema  $L$ , per definire la scala della pressione  $P = \rho U^2$ . Raccogliendo le dimensioni fisiche fuori dal segno di integrale è quindi possibile scrivere,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \oint_{S_b} -P p^* \hat{\mathbf{n}} + \frac{\mu U}{L} [\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*] \hat{\mathbf{n}} = && (P = \rho U^2, dS = L^2 dS^*) \\ &= \rho U^2 L^2 \oint_{S_b^*} -p^* \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{Re} [\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*] \hat{\mathbf{n}} = && (7.105) \\ &= \frac{1}{2} \rho U^2 S \mathbf{c}_F(Re), \end{aligned}$$

avendo introdotto il coefficiente di forza  $\mathbf{c}_F$ ,

$$\mathbf{c}_F = 2 \frac{L^2}{S} \oint_{S_b^*} -p^* \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{Re} [\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*] \hat{\mathbf{n}} \quad (7.106)$$

che può dipendere dalle variabili fisiche solo attraverso i numeri adimensionali del problema (in questo caso solo da  $Re$ , per problemi comprimibili anche da  $M$ ) e che rappresenta la forza agente sul corpo adimensionalizzata con la pressione dinamica  $\frac{1}{2}\rho U^2$  e con una superficie di riferimento del corpo  $S$ . La superficie di riferimento  $S$  scala con  $L^2$  ( $S = aL^2$ ,  $a$  costante).

Si può scrivere la risultante delle forze sul modello e al vero come

$$\begin{cases} \mathbf{F}_m = \frac{1}{2}\rho_m U_m^2 S_m^2 \mathbf{c}_F(Re_m) \\ \mathbf{F}_v = \frac{1}{2}\rho_v U_v^2 S_v^2 \mathbf{c}_F(Re_v) . \end{cases} \quad (7.107)$$

Poichè è soddisfatta la similitudine fluidodinamica, i valori dei coefficienti di forza del modello e “al vero” sono uguali. Si può quindi scrivere

$$\mathbf{F}_m = \frac{\rho_m}{\rho_v} \left( \frac{U_m}{U_v} \right)^2 \left( \frac{S_m}{S_v} \right) \mathbf{F}_v = \frac{\rho_m}{\rho_v} \left( \frac{U_m}{U_v} \right)^2 \left( \frac{L_m}{L_v} \right)^2 \mathbf{F}_v = \frac{\rho_m}{\rho_v} \left( \frac{U_m}{U_v} \right)^2 \lambda^2 \mathbf{F}_v , \quad (7.108)$$

Nel caso della galleria ad acqua, nella quale il fluido è lo stesso e nello stesso stato termodinamico della situazione reale ( $\rho_m = \rho_v$ ,  $\mu_m = \mu_v$ ), l’uguaglianza dei numeri di Reynolds si semplifica in

$$\frac{\rho_m U_m L_m}{\mu_m} = \frac{\rho_v U_v L_v}{\mu_v} \quad \rightarrow \quad U_m L_m = U_v L_v . \quad (7.109)$$

Quindi, in questo caso la forza agente sul modello di galleria coincide con la forza agente sul corpo nella situazione reale,

$$\mathbf{F}_m^{H_2O,s} = \mathbf{F}_v^{H_2O,s} . \quad (7.110)$$

**Esercizio 7.4 — Getto: codice numerico adimensionale.** Si vuole studiare con la corrente di aria che esce da un ugello verticale di diametro  $\tilde{D} = 0.01 \text{ m}$ , nell'intervallo di velocità di riferimento  $\tilde{U} \in [1, 10] \text{ m/s}$ . Si ha a disposizione un codice numerico che risolve le equazioni in forma adimensionale, in cui non è possibile variare le condizioni al contorno, e una sola griglia di calcolo. Si chiede di:

- determinare l'intervallo di numeri di Reynolds  $Re$  da inserire nel codice, sapendo che la velocità di riferimento nel codice è  $U = 1$  e il diametro nella griglia vale  $D = 1$ .
- la frequenza  $\tilde{f}$  di rilascio di vortici quando  $\tilde{U} = 1 \text{ m/s}$ , sapendo che la frequenza estratta dai risultati numerici è  $f = 0.2$ ;
- stimare l'errore compiuto dal codice nel trascurare l'effetto della gravità.

### Soluzione

**Concetti.** Similitudine fluidodinamica. Numeri di Reynolds e Froude. Ordini di grandezza dei termini.

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} \quad , \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}} \quad (7.111)$$

### Svolgimento.

- Affinchè le simulazioni numeriche siano rappresentative della corrente incomprimibile che si vuole studiare, è necessario che ci sia similitudine fluidodinamica tra i due casi: bisogna imporre l'uguaglianza dei numeri di Reynolds

$$Re = \frac{\tilde{U} \tilde{D}}{\tilde{\nu}} \approx \frac{(1 \div 10) \text{m/s} \times 10^{-2} \text{m}}{10^{-5} \text{m}^2/\text{s}} = 10^3 \div 10^4 . \quad (7.112)$$

- Se la frequenza adimensionale ottenuta dalla simulazione numerica è  $f = 0.2$ , la frequenza dimensionale viene ottenuta dall'ugualianza dei numeri di Strouhal, cioè “ri-dimensionalizzando”  $f$  con le grandezze di riferimento usate per l'adimensionalizzazione ( $U, L, \rho$ ).

$$\frac{f D}{U} = \frac{\tilde{f} \tilde{D}}{\tilde{U}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{f} = f \frac{\tilde{U}}{\tilde{D}} = 0.2 \times \frac{1 \text{m/s}}{10^{-2} \text{m}} = 20 \text{s}^{-1} . \quad (7.113)$$

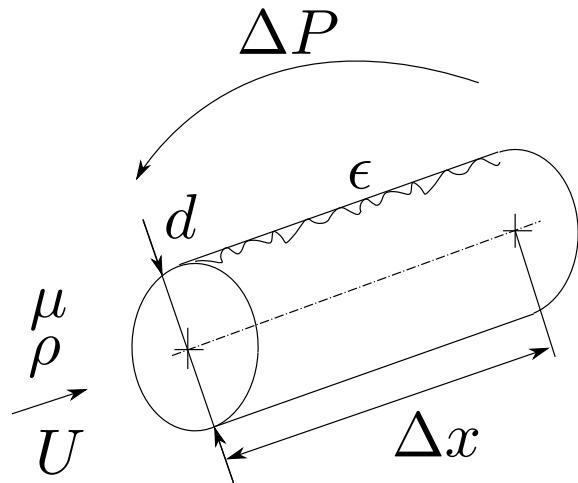
- Per quantificare l'effetto della gravità, si calcola il valore del numero di Froude. Nelle equazioni di Navier-Stokes adimensionali, compare il numero adimensionale  $gD/U^2 = 1/Fr^2$  davanti ai termini di forze di volume. Più questo numero è “piccolo”, più gli effetti delle forze di volume sono ridotti.

$$\begin{cases} U = 1 \text{m/s} & : \quad 1/Fr^2 \approx 10^{-1} \\ U = 10 \text{m/s} & : \quad 1/Fr^2 \approx 10^{-3} \end{cases} \quad (7.114)$$

**Esercizio 7.5 — Gradiente di pressione in tubi cilindrici.** Si deve progettare un condotto che trasporti un fluido con densità  $\rho_1$  e viscosità  $\mu_1$ , di diametro  $d_1$  e lunghezza  $L_1$ . Si suppone che la rugosità della superficie interna del condotto possa essere descritta interamente dall'altezza media  $\epsilon_1$  delle asperità. Il condotto deve garantire una portata massica  $Q_1$ . Viene realizzato un modello in scala  $\lambda = d_2/d_1$  del condotto di lunghezza  $L_2$ , nel quale viene fatto scorrere lo stesso fluido alle stesse condizioni termodinamiche. Si chiede di determinare:

- la finitura superficiale della superficie interna del modello, in termini di dimensione caratteristica della rugosità  $\epsilon_2$ ;
- la velocità media di prova  $U_2$ ;
- la differenza di pressione da imporre alle estremità del condotto al vero, conoscendo che la differenza di pressione  $\Delta P_2$  misurata in laboratorio.

Si supponga il fluido incompressibile. ■



### Soluzione

**Concetti.** Teorema di Buckingham. Similitudine fluidodinamica.

**Svolgimento.** Il problema è caratterizzato dal fluido utilizzato, dalla geometria del condotto e dal gradiente di pressione necessario a garantire la portata desiderata. Si può scrivere in maniera implicita

$$f\left(\frac{\Delta P}{\Delta x}, U, \rho, \mu, d, \epsilon\right) = 0 \quad (7.115)$$

avendo scelto come grandezza fisica caratteristica del problema il gradiente di pressione  $\frac{\Delta P}{\Delta x}$  e non il salto di pressione e la lunghezza del tubo prese indipendentemente. Il teorema di Buckingham garantisce che il problema può essere caratterizzato da 3 numeri adimensionali (6 grandezze fisiche - 3 grandezze fondamentali (M,L,T)). Se si scelgono  $\rho$ ,  $U$ ,  $d$  come grandezze di riferimento, si possono costruire i tre numeri adimensionali come

$$\pi_1 = \frac{\Delta P}{\Delta x} \frac{d}{\rho U^2} = f_D \quad \pi_2 = \frac{\mu}{\rho U d} = 1/Re \quad \pi_3 = \frac{\epsilon}{d} = \epsilon' \quad (7.116)$$

Il problema può essere quindi scritto in forma implicita come:

$$g(f_D, Re, \epsilon') = 0. \quad (7.117)$$

Esplicitando  $f_D$ :

$$f_D = h(Re, \epsilon') \quad \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{\rho U^2}{d} f_D(Re, \epsilon'). \quad (7.118)$$

Affinchè sia verificata la similitudine fluidodinamica, ci deve essere l'uguaglianza dei numeri di Reynolds  $Re$  e delle rugosità adimensionalizzate  $\epsilon'$ .

- Dall'uguaglianza delle rugosità adimensionaliizzate

$$\epsilon'_1 = \epsilon'_2 =: \epsilon' \Rightarrow \epsilon_2 = \epsilon_1 \frac{d_2}{d_1} = \lambda \epsilon_1. \quad (7.119)$$

Per il modello è quindi necessaria una lavorazione che garantisca una finitura superficiale migliore rispetto al condotto al vero ( $\lambda \leq 1$ ).

- La velocità media al vero  $U_1$  viene ricavata grazie alla richiesta della portata desiderata.

$$U_1 = \frac{Q}{\rho \frac{\pi}{4} d_1^2} \quad (7.120)$$

Per ottenere la similitudine fluidodinamica si impone l'uguaglianza dei numeri di Reynolds

$$Re_1 = Re_2 =: Re \Rightarrow U_2 = U_1 \frac{\rho_1 d_1 \nu_2}{\rho_2 d_2 \nu_1} = U_1 \frac{d_1}{d_2} \quad (7.121)$$

poichè la densità e la viscosità del fluido “di prova” sono le stesse di quelle del fluido “al vero”.

- Il rapporto tra la differenza di pressione  $\Delta P_2$  misurata sul condotto modello e la lunghezza del condotto modello  $L_2$  permette di stimare il gradiente di pressione  $\frac{\Delta P}{\Delta x} \Big|_2 = \frac{\Delta P_2}{L_2}$ . Sfruttando ancora una volta la similitudine fluidodinamica

$$\begin{cases} \frac{\Delta P_2}{L_2} = \frac{\rho_2 U_2^2}{d_2} f_D(Re, \epsilon') \\ \frac{\Delta P_1}{L_1} = \frac{\rho_1 U_1^2}{d_1} f_D(Re, \epsilon') \end{cases} \Rightarrow \Delta P_1 = \Delta P_2 \frac{\rho_1 U_1^2}{\rho_2 U_2^2} \frac{d_2}{d_1} \frac{L_1}{L_2} \quad (7.122)$$

Dall'uguaglianza delle densità  $\rho_1/\rho_2 = 1$ ; dall'uguaglianza dei numeri di Reynolds (e delle densità e viscosità)  $U_1^2/U_2^2 = d_2^2/d_1^2$ . La formula può quindi essere semplificata

$$\Delta P_1 = \Delta P_2 \frac{d_2^3}{d_1^3} \frac{L_1}{L_2} = \Delta P_2 \lambda^3 \frac{L_1}{L_2} \quad (7.123)$$

#### Diagramma di Moody.

Il diagramma di Moody riporta il coefficiente  $f_D$  in funzione del numero di  $Re$  e della rugosità del tubo. Si possono individuare due regimi estremi del problema. Per “basse velocità” (o meglio, bassi numeri di Reynolds), si può intuire che gli effetti della viscosità prevalgano sugli effetti inerziali; inoltre, gli effetti della rugosità sono minimi. Si può quindi pensare che il problema sia indipendente dalla densità del fluido e dalla rugosità del tubo e descrivibile in forma implicita come

$$f_L(\Delta P/\Delta x, \mu, U, d) = 0 \quad (7.124)$$

Si può descrivere il problema solo con un numero adimensionale. Scegliendo  $\mu, U, d$  come grandezze di riferimento, si può scrivere

$$\pi_{1,L} = \frac{\Delta P}{\Delta x} \frac{d^2}{\mu U} \quad (7.125)$$

Il problema può essere scritto in forma implicita  $g_L(\pi_{1,L}) = 0$ . Poichè la funzione  $g_L$  dipende solo dal coefficiente  $\pi_{1,L}$ , il coefficiente  $\pi_{1,L}$  deve essere costante. Il gradiente di pressione può essere scritto

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = \pi_{1,L} \frac{\mu U}{d^2} = \frac{\rho U^2}{d} f_D \quad (7.126)$$

avendo usato la definizione di  $f_D$  introdotta nell'equazione (7.116). È quindi possibile stimare l'andamento del coefficiente  $f_D$ , per bassi numeri di Reynolds, invertendo l'equazione precedente. Si scopre che il coefficiente  $f_D$  è inversamente proporzionale al numero di Reynolds.

$$f_D = \pi_{1,L} \frac{\mu}{\rho U d} = \pi_{1,L} \frac{1}{Re} \quad (7.127)$$

. Per bassi numeri di Reynolds, il parametro  $f_D$  in funzione di  $Re$  mostra un andamento lineare in un diagramma con assi logaritmici, a conferma della correttezza della stima appena svolta.

Si può ragionare in maniera analoga per il regime di moto estremo opposto, dove gli effetti della viscosità sono trascurabili. Si scopre che il coefficiente  $f_D$  è funzione solo della rugosità adimensionale  $\epsilon'$ , mentre non dipende dal numero di Reynolds. Per alti numeri di Reynolds, il parametro  $f_D$  è descritto da curve che tendono a un valore costante, che dipende dal valore della rugosità adimensionale  $\epsilon'$ .

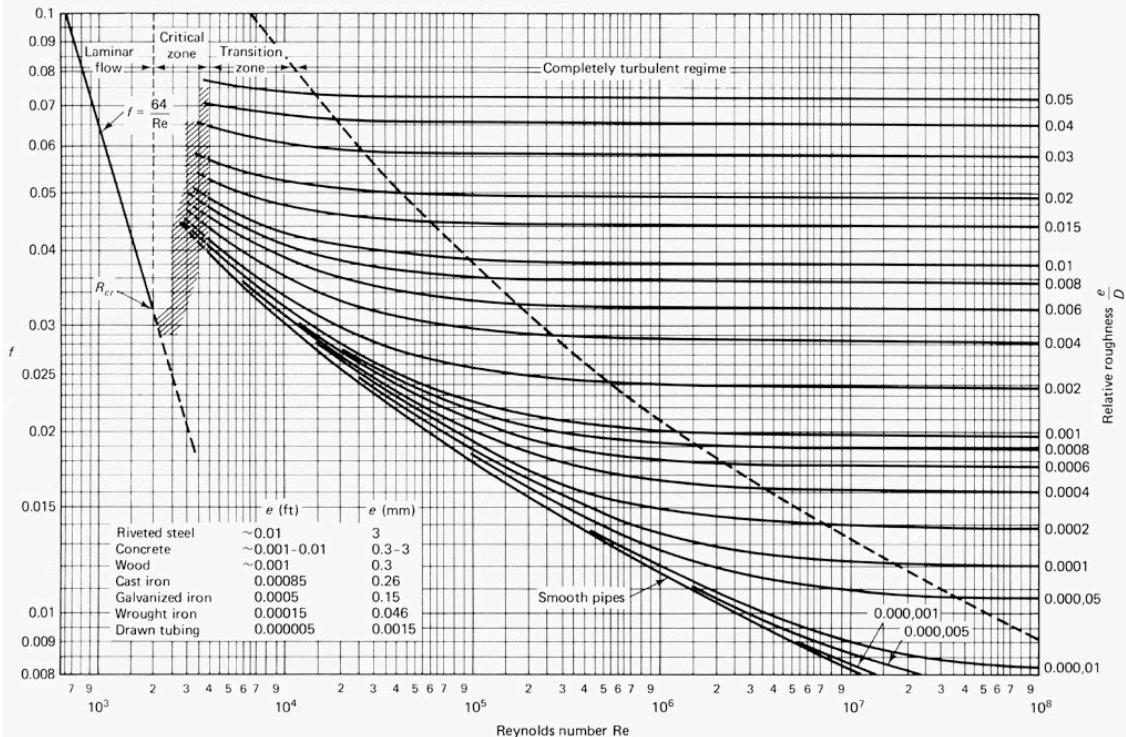
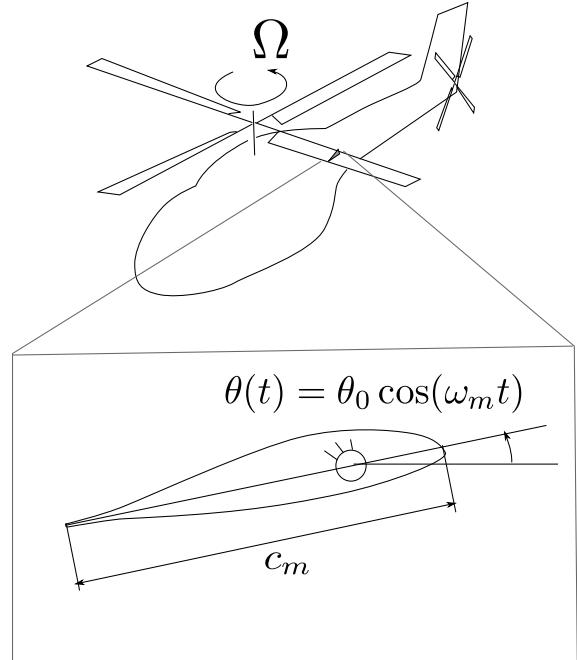


Figure 7.13 Moody diagram. (From L. F. Moody, *Trans. ASME*, Vol. 66, 1944.)

**Esercizio 7.6 — Profilo oscillante.** L'obiettivo di una prova in galleria è lo studio del campo di moto attorno a una pala di elicottero, in particolare attorno alla sezione che si trova a metà della lunghezza della pala,  $R_v = 6.85 \text{ m}$ . Il rotore dell'elicottero ruota con una velocità angolare  $\Omega_v$ , tale da avere una velocità  $U_{tip} = 200 \text{ m/s}$  (per evitare il regime supersonico). La corda della pala nella sezione analizzata è  $c_v = 0.30 \text{ m}$ . Il modello di galleria a circuito aperto è costituito da una superficie alare, incernierata su un asse perpendicolare alla direzione del vento di galleria, in corrispondenza dell'asse "di comando del passo". Sapendo che la massima velocità raggiungibile nell'impianto utilizzato è  $U_m = 50 \text{ m/s}$ , si chiede di determinare:

- la corda del modello  $c_m$ , per ottenere la similitudine in  $Re$  e di commentare gli effetti di comprimibilità;
- la frequenza di oscillazione  $\omega_m$  da imporre al profilo per simulare il cambio di incidenza dovuti ai comandi di passo collettivo e ciclico;
- una stima della potenza dell'impianto necessaria a svolgere la prova, conoscendo le dimensioni della camera di prova rettangolare,  $b = 1.5 \text{ m}$ ,  $h = 1.0 \text{ m}$ .



### Soluzione

**Concetti.** Similitudine fluidodinamica. Comando elicottero. Stima potenza galleria del vento.

#### Svolgimento.

- Per ottenere la similitudine in  $Re$ , è necessario uguagliare i numeri di Reynolds ottenuti con le grandezze dimensionali caratteristiche del problema. La lunghezza di riferimento è la corda. La velocità di riferimento è la velocità che investe il profilo della pala considerato; nella prova di galleria è la velocità di galleria  $U_m$ , nella realtà è la velocità relativa dovuta alla rotazione della pala (alla quale deve essere sovrapposto il moto dell'elicottero, in caso di avanzamento, qui ipotizzato nullo):  $U_v = \Omega R_v / 2 = U_{tip} / 2$ . Il fluido è sempre aria.

$$\frac{U_v c_v}{\nu} = \frac{U_m c_m}{\nu} \quad \Rightarrow \quad c_m = c_v \frac{U_{tip}}{2 U_m} = 0.60 \text{ m} \quad (7.128)$$

In questo esempio, per avere similitudine in  $Re$  serve un modello con una corda maggiore della corda reale.

Gli effetti di comprimibilità possono essere valutati calcolando il numero di Mach. Il numero di Mach per la sezione di pala considerata nella realtà è  $M_v \approx 100/340 \approx 0.3$ , limite convenzionale per potere trascurare gli effetti di comprimibilità. Per la prova in galleria  $M_m \approx 0.15$ .

- Il comando di passo ciclico è periodico e armonico con frequenza  $\Omega_v = U_{tip}/R_v = 29.19 \text{ s}^{-1}$ . Per essere in similitudine con la realtà è necessario avere uguaglianza dei numeri di Strouhal (o *frequenze ridotte*, indicate da strutturisti e aeroelastici con  $k$ ).

$$\frac{\Omega c_v}{U_v} = \frac{\omega_m c_m}{U_m} \quad \Rightarrow \quad \omega_m = \Omega \frac{c_v}{c_m} \frac{U_m}{U_v} = \Omega \left( \frac{U_m}{U_v} \right)^2 \quad (7.129)$$

- In un impianto a galleria aperta si può ricavare la formula per la stima della potenza necessaria da un bilancio integrale di energia cinetica

$$P \approx \frac{1}{2} \rho U^3 A . \quad (7.130)$$



## 8. Aerodinamica

Per correnti irrotazionali ( $\omega = \mathbf{0}$ ) in un dominio semplicemente connesso ( $\mathbf{u} = \nabla\phi$ ) di fluidi incompressibili ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ), il potenziale cinetico soddisfa l'equazione di Laplace  $\Delta\phi = 0$ . Infatti, inserendo nel vincolo di incompressibilità la relazione che lega il potenziale cinetico alla velocità si ottiene

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla\phi) = \nabla^2\phi = \Delta\phi. \quad (8.1)$$

Come nel caso della seconda e della terza forma del teorema di Bernoulli per fluidi viscosi, vedi introduzione al capitolo §5, l'ipotesi di fluido non viscoso non è direttamente necessaria per ottenere l'equazione di Laplace per il potenziale. L'ipotesi di fluido non viscoso rientra però nel requisito che la corrente sia irrotazionale. L'equazione della vorticità per fluido incompressibile è

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}, \quad (8.2)$$

che per un fluido non viscoso, si riduce a

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad , \quad \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (8.3)$$

dove è stata messa in evidenza la derivata materiale della vorticità, che rappresenta la variazione della vorticità di una particella fluida, che si muove con la velocità del fluido. Se si considera un problema in cui un corpo aerodinamico è investito da una corrente che è uniforme all'infinito a monte, la vorticità all'infinito a monte è nulla: si può dimostrare facilmente allora che  $D\boldsymbol{\omega}/Dt = \mathbf{0}$ , e quindi la vorticità si mantiene costante e nulla, sulle linee di corrente che partono dall'infinito a monte<sup>1</sup>. Per correnti ad alto numero di Reynolds attorno a corpi affusolati, nelle quali non si verificano separazioni, gli effetti viscosi e la

<sup>1</sup>È immediato convincersi del fatto, utilizzando la descrizione lagrangiana (4.79) della vorticità per un fluido non viscoso.

vorticità sono confinati in strati limite “sottili” attorno ai corpi solidi e in scie “sottili” che si staccano da essi.

È quindi possibile descrivere una corrente di un fluido incompressibile ad alto numero di Reynolds, all'esterno di queste sottili regioni vorticose, con un modello di fluido non viscoso. Partendo dalle equazioni di Navier-Stokes che governano la dinamica di un fluido viscoso, per le quali vale la condizione al contorno di adesione a parete ( $\mathbf{u} = \mathbf{b}$ ), si arriva a un modello che permette di calcolare il campo di velocità dal potenziale cinetico, che soddisfa l'equazione di Laplace  $\Delta\phi = 0$  nel dominio e la condizione al contorno di non penetrazione ( $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ ) in corrispondenza delle pareti solide, e in seguito di calcolare la pressione utilizzando il teorema di Bernoulli.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla P = \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}|_{wall} = \mathbf{b} \quad + \text{altre b.c} \end{cases} \xrightarrow{\nu = 0, \omega = \mathbf{0}, \mathbf{u} = \nabla \phi} \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + P + \chi = C(t) \\ \Delta \phi = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{wall} = \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad + \text{altre b.c} \end{cases} \quad (8.4)$$

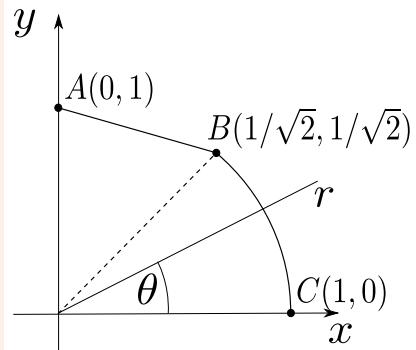
Il problema di Laplace è lineare ed è quindi valido il principio di sovrapposizione di cause ed effetti, se la geometria del dominio è fissata. Questa considerazione può sembrare strana, ma è determinata dalla possibile presenza di scie che si distaccano dai corpi solidi e che possono evolvere (per problemi non stazionari) all'interno del dominio. L'equazione di Laplace può rappresentare anche problemi non stazionari, nonostante non compaia esplicitamente nessuna derivata temporale nell'equazione. La dipendenza temporale può comparire all'interno delle condizioni al contorno e la soluzione si adatta immediatamente ad esse. Memoria della soluzione agli istanti di tempo precedenti è contenuta all'interno delle scie, la cui vorticità è legata al valore di circolazione attorno al corpo (e quindi di portanza) e la cui dinamica è determinata dalle equazioni di governo della vorticità.

**Esercizio 8.1 — Corrente irrotazionale nel piano.** Un flusso incomprimibile, irrotazionale, bidimensionale e stazionario è descritto in coordinate polari dal potenziale cinetico

$$\phi(r, \theta) = r^2 \cos(2\theta)$$

Si chiede di:

- determinare il campo di velocità, eventuali punti di ristagno, eventuali linee di corrente rettilinee;
- disegnare le linee di corrente;
- determinare il flusso attraverso il segmento che va dal punto  $A = (x_A, y_A) = (0, 1)$  al punto  $B = (x_B, y_B) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  e il flusso attraverso l'arco di circonferenza centrata nell'origine, da  $B$  a  $C = (x_C, y_C) = (1, 0)$ . Discutere il risultato;
- dimostrare che le linee di corrente e le curve di livello del potenziale sono tra di loro perpendicolari.



### Soluzione

**Concetti.** Legame tra potenziale e velocità. Funzione di corrente per problemi 2D incomprimibili.

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad \begin{cases} u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (8.5)$$

Flusso di volume come differenza di funzione di corrente

$$\begin{aligned} \int_A^B \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \int_A^B u n_x + v n_y = \\ &= \int_A^B \frac{\partial \psi}{\partial x} t_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} t_y = \\ &= \int_A^B \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right] ds = \\ &= \int_A^B \frac{d\psi}{ds}(x(s), y(s)) ds = \psi(B) - \psi(A) . \end{aligned} \quad (8.6)$$

### Svolgimento.

- Campo di velocità, punto di ristagno e linee di corrente rettilinee
  - $\phi, \mathbf{u}, \psi$ :

$$\phi = r^2 \cos(2\theta) = r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = x^2 - y^2$$

$$\begin{cases} u = \partial \phi / \partial x = 2x \\ v = \partial \phi / \partial y = -2y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \psi(x, y) = 2xy + C$$

- punto di ristagno:  $(x, y) = (0, 0)$ .
- Linee di corrente rettilinee:  $(x, y) = (0, y)$  entranti nell'origine,  $(x, y) = (x, 0)$  uscenti dall'origine.
- ...
- flusso attraverso  $AB$  e  $BC$ . La normale considerata “punta a destra” mentre viene percorsa la curva: valgono quindi  $n_x = t_y$  e  $n_y = -t_x$ .

$$\begin{cases} \Phi_{AB} = \psi(B) - \psi(A) = 1 - 0 = 1 \\ \Phi_{BC} = \psi(C) - \psi(B) = 0 - 1 = -1 \end{cases}$$

Si consideri la curva chiusa costituita da  $AB$ ,  $BC$  e dagli assi. Non c'è flusso attraverso gli assi e quello che entra in  $AB$  esce da  $BC$ . *il campo è regolare in tutto il dominio.*

- Il gradiente di una funzione è perpendicolare alle curve di livello: si può quindi verificare che i gradienti siano perpendicolari. Considerando le relazioni:

$$\begin{cases} u = \partial\phi/\partial x = \partial\psi/\partial y \\ v = \partial\phi/\partial y = -\partial\psi/\partial x \end{cases}$$

Si può scrivere

$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = uv - vu = 0$$

**Esercizio 8.2 — Potenziale cinetico e funzione di corrente.** Si consideri la corrente a potenziale piana e stazionaria descritta in un sistema di riferimento Cartesiano  $(x, y)$  dalla funzione potenziale cinetico  $\phi(x, y)$ :

$$\phi(x, y) = 5(x^2 - y^2) + 2x - 4y.$$

Si richiede di:

- derivare l'espressione analitica delle componenti in  $x$  e in  $y$  del campo di velocità;
- verificare che la corrente sia incomprimibile e irrotazionale;
- derivare l'espressione analitica della funzione di corrente  $\psi(x, y)$ ;
- calcolare la portata volumetrica per unità di apertura  $q$  che scorre attraverso il segmento congiungente l'origine del piano con il punto di coordinate  $(1, 1)$ ;

$$(u_x = 10x + 2, u_y = -10y - 4, \psi(x, y) = 10xy + 2y + 4x + \text{const.}, q = 16) \quad \blacksquare$$

### Soluzione

**Concetti.** Legame tra potenziale e velocità. Funzione di corrente per problemi 2D incomprimibili.

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad \begin{cases} u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (8.7)$$

### Svolgimento.

- Calcolo delle componenti della velocità.

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 10x + 2 \\ u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -10y - 4 \end{cases} \quad (8.8)$$

- Verificare che la corrente sia incomprimibile e irrotazionale.
  - Irrotationalità ( $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ ). Verifica tramite l'identità vettoriale  $\nabla \times \nabla \phi = 0$ , oppure con il calcolo diretto.

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u} &= \nabla \times (\nabla \phi) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{u} &= \nabla \times ((10x + 2)\hat{x} + (-10y - 4)\hat{y}) = \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \hat{z} = 0 \end{aligned} \quad (8.9)$$

- Incompressibilità ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ). Dal calcolo diretto  $\partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial y^2 = 10 - 10 = 0$ .
- La corrente è incomprimibile, quindi si può definire la funzione di corrente. Usando la definizione della funzione di corrente, integrando, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= u_x \quad \Rightarrow \quad \psi = 10xy + 2y + f(x) \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -u_y \quad \Rightarrow \quad \psi = 10xy + 4x + g(y) \end{aligned} \quad (8.10)$$

$$\psi = 10xy + 2y + 4x + c \quad (8.11)$$

- Calcolo della portata.

$$Q = \int_{\gamma} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{\gamma} (u_x n_x + u_y n_y) = \int_{\gamma} (u_x t_y - u_y t_x) = \int_{\gamma} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} t_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} t_y \right) = \psi(1, 1) - \psi(0, 0) = 16$$

(8.12)

**Esercizio 8.3 — Doppietta.** Trovare il campo di moto generato da una doppietta.

Sovrapporre ad esso una corente uniforme con l'velocità asintotica lungo x, per trovare la corrente attorno al cilindro: stabilire il legame tra l'intensità della doppietta, la velocità asintotica e il raggio del cilindro. ■

### Soluzione

**Concetti.** Soluzioni elementari dell'equazione di Laplace. Sovrapposizione di soluzioni elementari. Doppietta. Corrente attorno al cilindro.

**Svolgimento.** Dopo aver ricordato la definizione di doppietta, si calcolano il campo di moto e il potenziale cinetico da essa generato. Fatto questo, si sommano gli effetti della corrente indisturbata e si trovano le condizioni in cui esiste un raggio  $a$  (il raggio del cilindro) per il quale si annulla la velocità normale per ogni  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

- Definizione di doppietta ed equazioni. Per  $d$  finito:

$$\begin{aligned}\phi &= \phi^+ + \phi^- = \\ &= \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2} - \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2} = \\ &= \frac{q}{4\pi} \ln \frac{(x - d/2)^2 + y^2}{(x + d/2)^2 + y^2}\end{aligned}\quad (8.13)$$

Facendo tendere  $d \rightarrow 0$  in modo tale che  $qd = \mu$  sia finito e diverso da zero, sfruttando  $\ln(1 + x) \sim x$  per  $x \rightarrow 0$ :

$$\frac{q}{4\pi} \ln \frac{(x - d/2)^2 + y^2}{(x + d/2)^2 + y^2} = \frac{q}{4\pi} \ln \left[ 1 - \frac{2xd}{(x + d/2)^2 + y^2} \right] \sim -\frac{qd}{2\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2)} \quad (8.14)$$

Quindi, il potenziale cinetico della doppietta espresso in coordinate cartesiane e cilindriche è:

$$\phi = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2)} = -\frac{\mu}{2\pi r} \cos \theta \quad (8.15)$$

Le componenti cartesiane della velocità sono:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{r^2} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{r^2} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{2\cos \theta \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\sin(2\theta)}{r^2} \end{cases} \quad (8.16)$$

Quelle cilindriche:

$$\begin{cases} u_r = u \cos \theta + v \sin \theta = \frac{\mu}{2\pi r^2} [\cos(2\theta) \cos \theta + \sin(2\theta) \sin \theta] = \frac{\mu}{2\pi r^2} \cos \theta \\ u_\theta = -u \sin \theta + v \cos \theta = \frac{\mu}{2\pi r^2} [-\cos(2\theta) \sin \theta + \sin(2\theta) \cos \theta] = \frac{\mu}{2\pi r^2} \sin \theta \end{cases} \quad (8.17)$$

- Si sovrappone alla soluzione appena trovata, quella della corrente uniforme

$$\begin{cases} u_r = \left( U_\infty + \frac{\mu}{2\pi r^2} \right) \cos \theta \\ u_\theta = \left( -U_\infty + \frac{\mu}{2\pi r^2} \right) \sin \theta \end{cases} \quad (8.18)$$

- Si impongono le condizioni al contorno  $u_r(a, \theta) = 0, \theta \in [0, 2\pi]$ , per trovare il legame tra il raggio del cilindro  $a$ , la velocità asintotica  $U_\infty$  e l'intensità della doppietta  $\mu$ .

$$0 = u_r(a, \theta) = \left( U_\infty + \frac{\mu}{2\pi a^2} \right) \cos \theta \Rightarrow \frac{\mu}{2\pi} = -a^2 U_\infty \quad (8.19)$$

- Si ricostruisce infine la soluzione (alla quale è immediato sommare un eventuale vortice nel centro del cilindro) del flusso potenziale all'esterno del cilindro:

$$\begin{cases} u_r = U_\infty \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ u_\theta = -U_\infty \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \end{cases} \quad (8.20)$$

**Esercizio 8.4 — Corrente attorno al cilindro.** Una corrente piana con velocità asintotica  $U_\infty = 10 \text{ m/s}$  investe un profilo circolare di raggio  $a = 0.1 \text{ m}$ . Determinare il valore di circolazione  $\Gamma$  affinché nel punto sulla superficie del cilindro posto a  $\theta = \pi/3$  la velocità aumenti fino al valore  $2U_\infty$  in modulo.  
 $(\Gamma = -1.68 \text{ m}^2/\text{s}, 23.45 \text{ m}^2/\text{s})$

### Soluzione

**Concetti.** Flusso non viscoso 2D, incomprimibile e irrotazionale attorno al cilindro. Circolazione

**Svolgimento.** Una volta scritte (come si ricavano?) le componenti della velocità nel campo di moto, si impongono le condizioni richieste dal problema per determinare il valore di circolazione necessario.

$$\begin{cases} u_r(r, \theta) = U_\infty \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ u_\theta(r, \theta) = -U_\infty \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases} \quad (8.21)$$

Si impongono ora le condizioni del problema. Sulla superficie del cilindro la componente radiale è nulla (condizioni al contorno). Quindi:

$$|u(a, \theta)| = |u_\theta(a, \theta)| = \left| -2U_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right| \quad (8.22)$$

E quindi

$$\begin{aligned} 2U_\infty &= \left| -2U_\infty \sin \frac{\pi}{3} + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right| \\ \pm 2U_\infty &= -2U_\infty \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\Gamma}{2\pi a} \end{aligned} \quad (8.23)$$

$$\Rightarrow \Gamma = 2\pi a U_\infty (\sqrt{3} \pm 2)$$

$$\Rightarrow \Gamma = \begin{cases} -1.684 \text{ m}^2/\text{s} \\ 23.449 \text{ m}^2/\text{s} \end{cases} \quad (8.24)$$

**Esercizio 8.5 — Corrente attorno al cilindro.** Una corrente piana con velocità asintotica orizzontale (parallela all'asse x)  $U_\infty = 1$  viene perturbata introducendo nell'origine del piano un vortice in modo tale da accelerare la corrente nel semipiano superiore e rallentarla in quello inferiore per valori positivi di  $\Gamma$ . Determinare la circolazione necessaria ad ottenere una differenza di componente x della velocità pari a 1 tra i due punti di coordinate (polari)  $R = 1$  e  $\theta = \pm\pi/2$ . ( $\Gamma = -\pi$ ) ■

### Soluzione

**Concetti.** Flusso non viscoso 2D, incomprimibile e irrotazionale. Circolazione. Corrente indisturbata. Vortice. Sovrapposizione delle cause e degli effetti.

**Svolgimento.** Una volta scritte (come si ricavano?) le componenti della velocità nel campo di moto, si impongono le condizioni richieste dal problema per determinare il valore di circolazione necessario.

$$\begin{cases} u_r(r, \theta) = U_\infty \cos \theta \\ u_\theta(r, \theta) = -U_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases} \quad (8.25)$$

Si impongono ora le condizioni del problema. Per  $\theta_1 = \pi/2$  e  $\theta_2 = -\pi/2$ , la componente radiale è nulla.

$$\begin{cases} u_\theta(R, \theta_1) = -U_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi R} \\ u_\theta(R, \theta_2) = U_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi R} \end{cases} \quad (8.26)$$

Si vuole determinare la differenza delle componenti in direzione x  $u_x(R, \theta_1) - u_x(R, \theta_2)$ ; questa è uguale a  $-(u_\theta(R, \theta_1) + u_\theta(R, \theta_2))$ . Quindi, per  $R = 1$ :

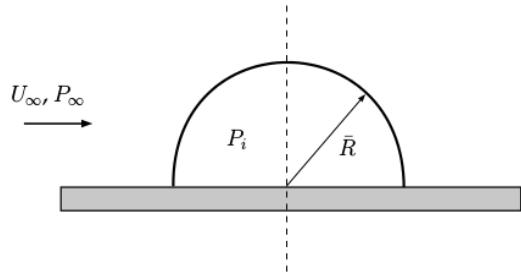
$$-\frac{\Gamma}{\pi} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Gamma = -\pi \quad (8.27)$$

**Esercizio 8 .6 — Semicilindro. Risultante delle forze.**

Si consideri la copertura rigida di un campo da calcio avente sezione semi-circolare di raggio  $\bar{R} = 50 \text{ m}$  rappresentata schematicamente in figura. Sulla struttura soffia un vento uniforme ( $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ ,  $P_\infty = 101325 \text{ Pa}$ ) in direzione orizzontale con velocità  $U_\infty = 15 \text{ km/h}$ . Assumendo di poter approssimare la corrente esterna come stazionaria, bidimensionale e a potenziale, si richiede di determinare:

- 1.1) la distribuzione della pressione esterna sulla sezione della struttura;
- 1.2) la risultante per unità di apertura delle forze agenti sulla struttura, ipotizzando che la pressione interna  $P_i$  sia pari a  $P_\infty$ .

$$(P(\theta)) = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2(1 - 4\sin^2\theta), \quad \mathbf{F} = 425.35\hat{\mathbf{y}} \text{ N/m} \quad \blacksquare$$

**Soluzione**

**Concetti.** Flusso non viscoso 2D, incomprimibile e irrotazionale attorno al cilindro. Circolazione.

**Svolgimento.** Una volta scritte (come si ricavano?) le componenti della velocità nel campo di moto, tramite il teorema di Bernoulli (nel caso incomprimibile, stazionario, inviscido, irrotazionale,...) si calcola la pressione agente sulla superficie del cilindro. Integrando gli sforzi di pressione (interna ed esterna al cilindro) sul contorno, si ottiene la risultante.

- Campo di moto nel dominio esterno alla metà cilindro ( $(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, \pi]$ ).

$$\begin{cases} u_r(r, \theta) = U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta \\ u_\theta(r, \theta) = -U_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta \end{cases} \quad (8.28)$$

- Grazie al teorema di Bernoulli (ipotesi...) si ottiene la pressione esterna sulla superficie della metà di cilindro. Sulla superficie del cilindro la componente radiale è nulla, quindi il modulo della velocità coincide con il valore assoluto della componente radiale.

$$\begin{aligned} P(\theta) &= P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho u_\theta(a, \theta)^2 = \\ &= P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho(2U_\infty \sin \theta)^2 = \\ &= P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2(1 - 4\sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (8.29)$$

- Integrale sulla superficie (interna ed esterna) degli sforzi di pressione per ottenere la risultante. Con  $\hat{\mathbf{b}}$  si indica la normale diretta verso il centro del cilindro.

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \int_0^\pi (P(\theta) - P_\infty) \hat{\mathbf{b}} a d\theta = \\ &= \int_0^\pi \left( \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) (-\cos \theta \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta \hat{\mathbf{y}}) a \right) d\theta =\end{aligned}\tag{8.30}$$

Usando i risultati (integrare!!)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin \theta d\theta &= 2 \\ \int_0^\pi \cos \theta d\theta &= 0 \\ \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta &= \frac{4}{3} \\ \int_0^\pi \cos \theta \sin^2 \theta d\theta &= 0\end{aligned}\tag{8.31}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \int_0^\pi (P(\theta) - P_\infty) \hat{\mathbf{b}} a d\theta = \\ &= -\frac{1}{2} \rho a U_\infty^2 \int_0^\pi (1 - 4 \sin^2 \theta) \sin \theta \hat{\mathbf{y}} d\theta = \\ &= -\frac{1}{2} \rho a U_\infty^2 \left( 2 - \frac{16}{3} \right) \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}\tag{8.32}$$

$$\mathbf{F} = \frac{5}{3} \rho a U_\infty^2 \hat{\mathbf{y}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = 425.35 \hat{\mathbf{y}} N/m$$

**Esercizio 8.7 — Metodo di Pistolesi.** Il metodo di Pistolesi è un primo metodo rudimentale per la modellazione di profili bidimensionali nell'ambito della teoria a potenziale. Il profilo viene approssimato con una lamina piana. L'effetto del profilo viene modellato tramite la sovrapposizione a una corrente asintotica di un vortice posto a un quarto di corda (corrispondente all'incirca con la posizione del centro aerodinamico - def...). Il valore della circolazione (e quindi della portanza) viene ricavato imponendo le condizioni al contorno in un punto di controllo sul profilo.

Assumendo sia valida l'approssimazione per piccoli angoli  $\sin \alpha \sim \alpha$ , confrontando la formula della portanza  $l = \frac{1}{2} \rho U^2 c c_L$  con quella ottenuta dal teorema di Kutta-Joukowski, ipotizzando un valore di  $c_{L_\alpha} = 2\pi$ , si trovi il punto di controllo nel quale deve essere imposta la condizione al contorno.

Quale condizione al contorno va imposta e perché? ■

### Soluzione

**Concetti.** Metodi a pannelli. Metodo di Pistolesi. Aerodinamica potenziale.

**Svolgimento.** La condizione da imporre è quella di tangenza: la velocità nel punto di controllo deve essere tangente alla lamina piana.

Definita  $b$  la distanza del punto di controllo dal centro aerodinamico, si impone la condizione al contorno in tale punto: deve essere nulla la componente normale alla lamina della velocità ottenuta come sovrapposizione della corrente asintotica e della corrente indotta dal vortice.

$$0 = \frac{\Gamma}{2\pi b} + U_\infty \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \Gamma = -2\pi b U_\infty \alpha \quad (8.33)$$

Inserita nel teorema di Kutta-Joukowski  $l = -\rho \Gamma U_\infty = \rho U_\infty^2 b 2\pi \alpha$  e confrontata alla formula della portanza  $l = \frac{1}{2} \rho U^2 c c_L$ , si ottiene

$$b = \frac{c}{2} \quad (8.34)$$

Quindi nel metodo di Pistolesi, il centro aerodinamico è posizionato  $\frac{1}{4}$  di corda, mentre il punto di controllo è posizionato a  $\frac{3}{4}$  di corda.

*Osservazioni.*

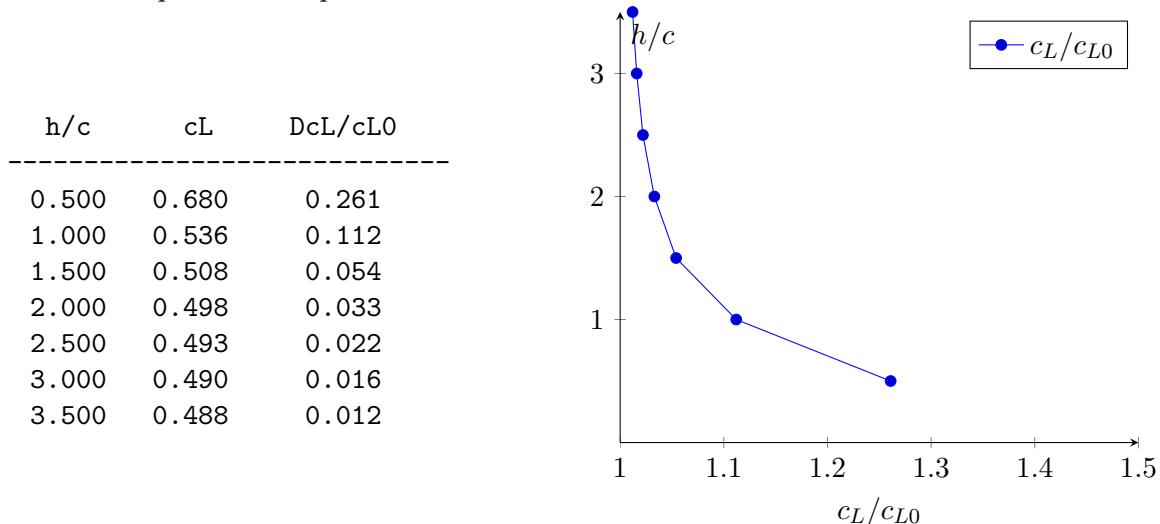
- È possibile simulare l'interazione tra più profili. Con metodi a pannelli un po' più raffinati (Hess Smith, Morino,...) è possibile simulare l'interazione tra corpi aerodinamici di forma qualsiasi, ricordandosi che le informazioni ottenute sono valide sotto le ipotesi dell'aerodinamica a potenziale: non devono verificarsi grandi separazioni, la vorticità deve essere confinata in una regione sottile (numero di Reynolds elevato).
- Quale può essere un metodo per simulare l'effetto di una superficie piana infinita (effetto suolo)?

**Esercizio 8.8 — Effetto suolo e interazione profili.** Usare il metodo di Pistolesi per ottenere delle informazioni qualitative sul coefficiente di portanza

- di un profilo in effetto suolo
- di due profili, in funzione della posizione reciproca

**Confronto con i risultati ottenuti con il metodo di Hess Smith: effetto suolo.**

Con il metodo delle immagini è possibile calcolare l'effetto che ha la presenza di una parete orizzontale (parallela alla velocità asintotica) sul coefficiente di portanza di un profilo NACA2412 con incidenza  $\theta = 2^\circ$ . Il coefficiente di portanza in “aria libera” è  $c_{L0} = 0.481$ . La distanza del profilo dalla parete è adimensionale sulla corda.



**Confronto con i risultati ottenuti con il metodo di Hess Smith: due profili.**

Quando due profili sono investiti da una corrente, ognuno di essi influenza l'altro. Come primo esempio vengono usati due profili NACA0012, con la stessa corda. Il secondo profilo viene messo in scia al primo a distanza di 3 corde. La prima prova consiste nel mantenere il secondo profilo a incidenza nulla rispetto alla velocità asintotica, aumentando l'incidenza del primo. Il primo profilo genera una portanza inferiore a un profilo in aria libera, mentre il secondo è deportante: il primo profilo induce una velocità verso il basso sul profilo in coda, che quindi vede un'incidenza non nulla, ma negativa.

```
theta2 = 0.0\degree
```

---

theta1	cL1	cL2	cL10
$2.5^\circ$	0.286	-0.045	0.297
$5.0^\circ$	0.571	-0.089	0.594

La seconda prova consiste nel mantenere il primo profilo a incidenza nulla rispetto alla velocità asintotica e aumentare l'incidenza del profilo in scia. Il secondo profilo ha un coefficiente di portanza minore rispetto a quello di un profilo in aria libera; il primo profilo è anch'esso portante: il profilo in scia induce una velocità verso l'alto sul primo profilo che quindi vede un'indincenza positiva.

```
theta1 = 0.0°
```

---

theta2	cL1	cL2	cL20
--------	-----	-----	------

$2.5^\circ$	0.064	0.287	0.297
$5.0^\circ$	0.128	0.573	0.594

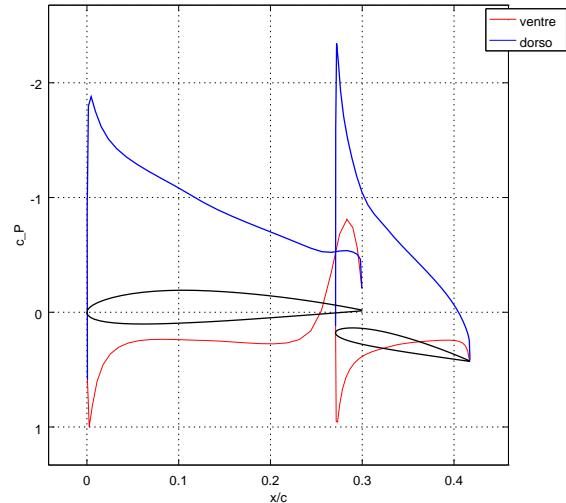
La portanza risultante è maggiore a quella che si otterrebbe considerando la somma della portanza generata singolarmente dai due profili. Per esempio, per  $\theta = 2.5^\circ$ :

$$\begin{aligned} c_{L1} + c_{L2} &> c_{L01} + c_{L02} \\ 0.064 + 0.287 &> 0.000 + 0.297 \\ 0.351 &> 0.297 \end{aligned} \quad (8.35)$$

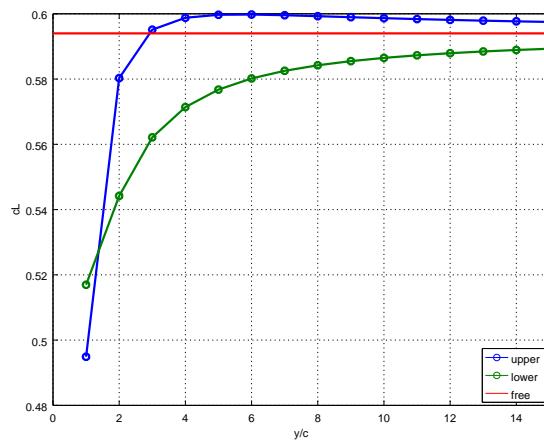
Lo stesso effetto viene osservato con due profili più vicini tra loro. La corda del profilo secondario è la metà di quella del profilo principale. Il profilo principale ha incidenza  $\theta_1 = -0.5^\circ$  rispetto alla velocità asintotica, quello secondario  $\theta_2 = 12.0^\circ$ . La presenza del secondo profilo fa aumentare significativamente la portanza del profilo principale.

	theta	cL	cL0
airfoil 1	$-0.5^\circ$	1.099	0.184
airfoil 2	$12.0^\circ$	0.975	1.656

La colonna  $cL$  contiene i coefficienti di portanza dei profili disposti come in figura. La colonna  $cL0$  contiene i coefficienti di portanza dei profili presi singolarmente, senza influenza reciproca, alla stessa incidenza.



Come ultimo esempio si considerano due profili NACA0012 uguali sovrapposti, con angolo di incidenza  $\theta = 5.0^\circ$ , separati da una distanza adimensionalizzata  $y/c$  compresa tra 1 e 15. Il coefficiente di portanza del singolo profilo è  $c_L = 0.594$ .



Esistono alcuni esempi "esotici": ekranoplano sovietico...; esempi meno esotici:...

### 8.0.1 Condizione necessaria di incipiente separazione

Un punto di incipiente separazione viene identificato dall'annullarsi della derivata in direzione perpendicolare a parete della componente di velocità parallela ad essa, con derivata seconda positiva. Si consideri il problema bidimensionale su una superficie piana: viene scelto di usare un sistema di riferimento cartesiano con l'asse  $x$  parallelo alla parete e diretto nel verso della corrente asintotica  $\mathbf{U} = U\mathbf{x}$ , l'asse  $y$  uscente dalla parete. La componente  $x$  dell'equazione della quantità di moto è

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (8.36)$$

A parete i termini non lineari sono nulli poiché la velocità è nulla per la condizione di adesione. La derivata seconda in direzione  $x$  è nulla poiché a parete la velocità è sempre zero per ogni valore della coordinata  $x$ . Rimane quindi

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0 \quad (8.37)$$

**Esercizio 8.9 — Separazione su parete piana.** Si assuma che il profilo di velocità  $u(x, y)$  dello strato limite sulla superficie di un corpo sia approssimabile con la seguente legge

$$u = \frac{(1-x)y}{1+y} + \frac{xy^2}{1+y^2},$$

dove  $u$  è la velocità adimensionalizzata rispetto alla velocità esterna,  $x$  è la coordinata adimensionale di parete localmente rettilinea e  $y$  la coordinata adimensionale in direzione normale alla parete stessa. Determinare la coordinata  $x_s$  del punto di separazione dello strato limite in questione. ■

#### Soluzione

**Concetti.** Separazione.

**Svolgimento.**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{(1-x)y}{1+y} + \frac{xy^2}{1+y^2} \right] = \\ &= (1-x) \frac{1}{(1+y)^2} + x \frac{2y}{(1+y^2)^2} \end{aligned} \quad (8.38)$$

Quando si impone la condizione di separazione  $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0$ , si ottiene  $x_s = 1$ .

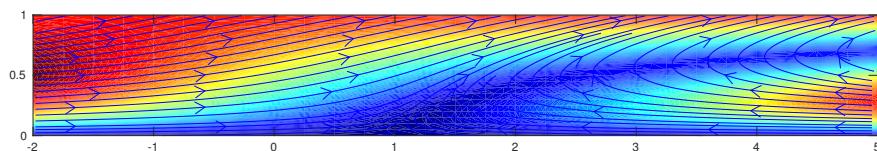


Figura 8.1: Linee di corrente e modulo della velocità.

Se si ipotizza che il moto del fluido sia governato dalle equazioni di Navier-Stokes per fluido incomprimibile (così facendo, si abbandonano le ipotesi di non viscosità del fluido e irrotazionalità della corrente, proprie dell'Aerodinamica; in realtà questo è già stato

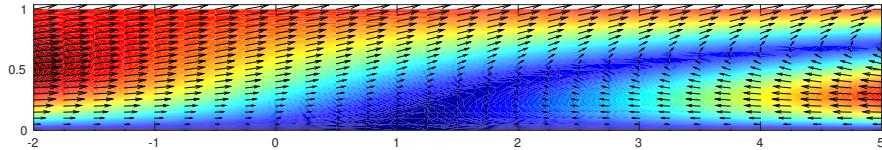
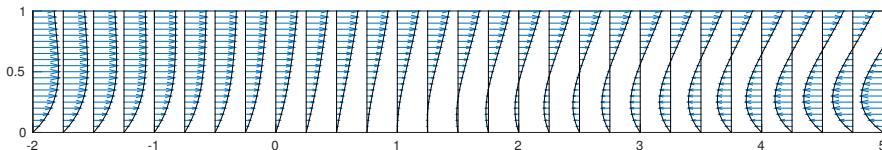


Figura 8.2: Campo di velocità e modulo della velocità.

Figura 8.3: Andamento della componente orizzontale  $u(y)$  in diverse stazioni  $x$ .

fatto nel testo del problema, imponendo un profilo di velocità che soddisfa la condizione di adesione a parete...) è possibile ricostruire il campo di velocità e di pressione. Utilizzando il vincolo di incompressibilità e le condizioni al contorno a parete ( $y = 0$ ), si può calcolare la componente di velocità  $v(x, y)$  perpendicolare alla parete

$$v(x, y) = -\ln|1 + y| + \operatorname{atan} y \quad (8.39)$$

Utilizzando le equazioni stazionarie di Navier-Stokes è possibile determinare il campo di pressione  $P(x, y)$ . La pressione (a meno di costanti di integrazione) e la derivata in direzione  $x$  valutate a parete valgono

$$\begin{cases} P(x, 0) &= \frac{1}{Re}(2x^2 - 2x) \\ \frac{\partial P}{\partial x}(x, 0) &= \frac{1}{Re}(4x - 2) \end{cases} \quad (8.40)$$

Si noti che nel punto di separazione  $x_s = 1$ , la derivata  $\partial P / \partial x(x_s, 0) = 2/Re$  è positiva (come era logico attendersi, per la condizione necessaria di incipiente separazione).

**Esercizio 8 .10 — Separazione su parete piana.** Si assuma che il profilo di velocità  $u(x, y)$  dello strato limite sulla superficie di un corpo sia approssimabile con la seguente legge

$$u = 1 - e^{-y/\sqrt{x}},$$

dove  $u$  è la velocità adimensionalizzata rispetto alla velocità esterna,  $x$  è la coordinata adimensionale di parete localmente rettilinea e  $y$  la coordinata adimensionale in direzione normale alla parete stessa. Determinare l'andamento dello spessore di spostamento  $\delta$  in funzione della coordinata  $x$  lungo la parete. Lo strato limite in questione separa? Se si per quale valore di  $x$ ?

$(\delta(x) = \sqrt{x}, \text{ lo strato limite non separa mai se non nel limite di } x \rightarrow \infty)$

### Soluzione

**Concetti.** Separazione. Spessori di strato limite.

$$\delta(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(y)}{U_e}\right) dy \quad (8.41)$$

### Svolgimento.

- Spessore di spostamento. Il profilo di velocità è già adimensionalizzato sulla "velocità esterna". Utilizzando la definizione di spessore di spostamento, si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \int_0^\infty (1 - u(y)) dy = \\ &= \int_0^\infty (1 - (1 - e^{-y/\sqrt{x}})) dy = \\ &= \int_0^\infty e^{-y/\sqrt{x}} dy = \\ &= -\sqrt{x}[e^{-y/\sqrt{x}}]_{y=0}^\infty \end{aligned} \quad (8.42)$$

E quindi:  $\delta(x) = \sqrt{x}$ .

- Separazione. La condizione di separazione è  $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0$ .

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [1 - e^{-yx^{-1/2}}] = x^{-1/2} e^{-yx^{-1/2}} \quad (8.43)$$

Si osserva che  $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}$  non si annulla mai:

$$\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (8.44)$$

**Esercizio 8.11 — Sorgente lineare nel piano.** Utilizzando l'espressione della velocità indotta da una sorgente puntiforme di intensità unitaria,

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\pi r} \hat{\mathbf{r}} , \quad (8.45)$$

dimostrare che la velocità indotta nel punto  $\mathbf{P}$  da una sorgente di intensità unitaria uniforme distribuita sul segmento che congiunge i due punti  $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$  vale

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_1|} \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2\pi} \beta \hat{\mathbf{y}} , \quad (8.46)$$

essendo  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$  i versori in direzione tangente e normale al segmento  $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2$ , i vettori  $\mathbf{r}_i = \mathbf{P} - \mathbf{N}_i$ ,  $i = 1 : 2$  e  $\beta$  l'angolo compreso tra il vettore  $\mathbf{r}_1$  e il vettore  $\mathbf{r}_2$ , positivo se si deve ruotare il vettore  $\mathbf{r}_1$  in senso antiorario per farlo coincidere con  $\mathbf{r}_2$ . ■

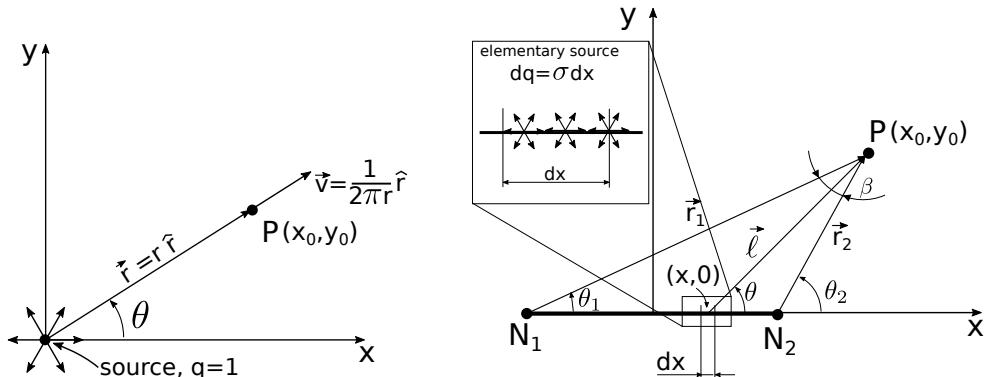


Figura 8.4: Rappresentazione di una sorgente puntiforme e della sorgente distribuita sul segmento  $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2$ : definizione della “densità lineare di sorgente”  $\sigma$  e delle quantità geometriche.

Facendo riferimento alla figura 8.4, i punti appartenenti al segmento hanno coordinate  $(x, 0)$ , con  $x \in (x_{N_1}, x_{N_2})$ . Il contributo elementare di velocità indotta nel punto  $\mathbf{P}$  dal segmento di lunghezza infinitesima  $dx$  vale

$$d\mathbf{u} = \frac{\sigma dx}{2\pi\ell} \hat{\ell} = \frac{\sigma dx}{2\pi\ell^2} \ell , \quad (8.47)$$

avendo indicato con  $\ell = (x_0 - x)\hat{\mathbf{x}} + y_0\hat{\mathbf{y}}$  il vettore di lunghezza  $\ell$  che congiunge il generico punto sul segmento  $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2$  con il punto  $\mathbf{P}$  e con  $\hat{\ell} = \ell/\ell$  il versore che ne identifica la direzione. Per risolvere il problema risulta comodo esprimere la coordinata  $x$  in funzione dell'angolo  $\theta$  formato dal vettore  $\ell$  con l'asse  $x$  e usare l'angolo  $\theta$  come coordinata indipendente per parametrizzare i punti del segmento. Si può scrivere

$$\ell = \ell \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \ell \sin \theta \hat{\mathbf{y}} = (x_0 - x)\hat{\mathbf{x}} + y_0\hat{\mathbf{x}} , \quad (8.48)$$

per ricavare il legame tra  $x$  e  $\theta$ ,

$$\ell \cos \theta = x_0 - x \quad , \quad \ell \sin \theta = y_0 \quad \rightarrow \quad x - x_0 = y_0 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} , \quad (8.49)$$

e l'espressione che lega i differenziali  $dx$  e  $d\theta$ ,

$$dx = \frac{y_0}{\sin^2 \theta} d\theta . \quad (8.50)$$

Se la sorgente ha densità uniforme unitaria, allora  $\sigma = 1$  e si può scrivere

$$\begin{aligned} d\mathbf{u} &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\ell^2} \ell dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{y_0^2} \left[ y_0 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \hat{\mathbf{x}} + y_0 \hat{\mathbf{y}} \right] \frac{y_0}{\sin^2 \theta} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} \right] d\theta \end{aligned} \quad (8.51)$$

Per ottenere il contributo integrale di tutta la sorgente lineare, è necessario svolgere l'integrale del contributo elementare su tutto il segmento

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \int_{N_1}^{N_2} d\mathbf{u} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} \right] d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \ln \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \hat{\mathbf{x}} + (\theta_2 - \theta_1) \hat{\mathbf{y}} \right] = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_1|} \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2\pi} \beta \hat{\mathbf{y}} . \end{aligned} \quad (8.52)$$

L'ultima espressione è stata ricavata utilizzando il legame  $\theta_2 = \theta_1 + \beta$  tra angoli interni ed esterni di un triangolo ed elaborando il termine del logaritmo come

$$\ln \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \ln \frac{\sin \theta_2 / y_0}{\sin \theta_1 / y_0} = \ln \frac{1/|\mathbf{r}_2|}{1/|\mathbf{r}_1|} = \ln \frac{|\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_2|} = -\ln \frac{|\mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_1|} . \quad (8.53)$$

**Esercizio 8.12 — Vortice lineare nel piano.** Utilizzando l'espressione della velocità indotta da un vortice irrotazionale puntiforme di intensità unitaria,

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\pi r} \hat{\theta}, \quad (8.54)$$

dimostrare che la velocità indotta nel punto  $\mathbf{P}$  da un vortice di intensità unitaria uniforme distribuito sul segmento che congiunge i due punti  $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$  vale

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2\pi} \beta \hat{x} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_1|} \hat{y}, \quad (8.55)$$

essendo  $\hat{x}, \hat{y}$  i versori in direzione tangente e normale al segmento  $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2$ , i vettori  $\mathbf{r}_i = \mathbf{P} - \mathbf{N}_i$ ,  $i = 1 : 2$  e  $\beta$  l'angolo compreso tra il vettore  $\mathbf{r}_1$  e il vettore  $\mathbf{r}_2$ , positivo se si deve ruotare il vettore  $\mathbf{r}_1$  in senso antiorario per farlo coincidere con  $\mathbf{r}_2$ . ■

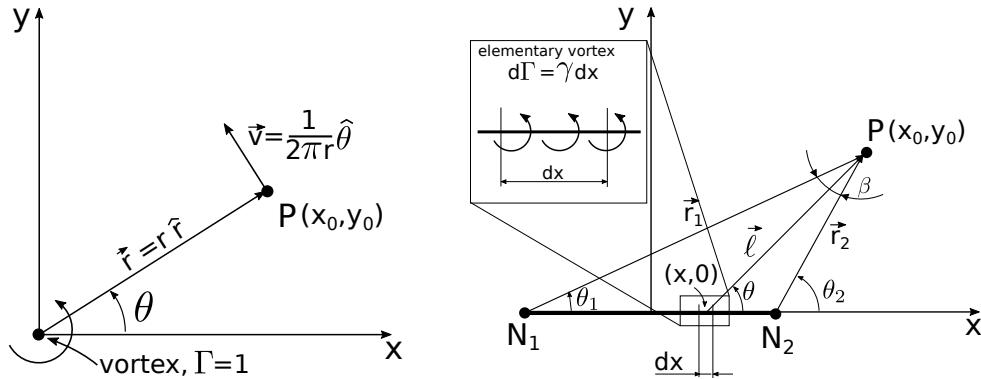


Figura 8.5: Rappresentazione di un vortice irrotazionale puntiforme e del vortice distribuita sul segmento  $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2$ : definizione della “densità lineare di vortice”  $\gamma$  e delle quantità geometriche.

## 8.1 Metodo di Hess-Smith

Si vuole calcolare la corrente incomprimibile irrotazionale bidimensionale attorno a un profilo aerodinamico, utilizzando il principio di sovrapposizione delle cause e degli effetti per ottenere il campo di moto attorno al profilo come somma della velocità uniforme e della velocità di alcune soluzioni elementari dell'equazione di Laplace per il potenziale, come sorgenti e vortici.

Per motivi di accuratezza del metodo, non vengono utilizzate singolarità puntiformi (come sorgenti o vortici puntiformi), ma vengono utilizzate delle singolarità distribuite su i segmenti che descrivono la geometria discretizzata del profilo.

### 8.1.1 Descrizione della geometria

Il profilo aerodinamico viene suddiviso da  $N + 1$  punti in  $N$  elementi (o pannelli). Per ogni elemento, vengono definite alcune grandezze geometriche: la lunghezza  $\ell_k$ , i versori normali e tangenti  $\hat{\mathbf{n}}_k$ ,  $\hat{\mathbf{t}}_k$ , i punti estremi del pannello  $\mathbf{x}_k^1$ ,  $\mathbf{x}_k^2$  (che verranno utilizzate per calcolare le velocità indotte dai pannelli) e il punto di controllo coincidente con il centro del pannello  $\mathbf{x}_k^c$  (che sarà il punto nel quale verranno imposte le condizioni al contorno).

La funzione `build_geometry()` legge i dati di un profilo NACA, le sue dimensioni e posizione nello spazio e restituisce la struttura `elems` che contiene le informazioni sui pannelli, insieme alle matrici che contengono coordinate dei punti `rr`, la connettività nodi-elementi `ee`, l'indice dei pannelli al bordo di uscita `ii_te`, il numero `nelems` di elementi e `npoints` di punti.

```
[ rr, ee, ii_te, elems, nelems, npoints ] = build_geometry(
airfoil)
```

### 8.1.2 Principio di sovrapposizione delle cause e degli effetti: campo di velocità

Vengono utilizzate i seguenti campi di velocità irrotazionali:

- corrente uniforme  $\mathbf{U}_\infty$ ;
- $N$  distribuzioni costanti di sorgenti su ogni pannello, di intensità  $\sigma_k$ ,  $k = 1 : N$ ;
- $N$  distribuzioni costanti di vortici su ogni pannello, di intensità  $\gamma_k$ ,  $k = 1 : N$ .

La velocità indotta nel punto  $\mathbf{x}$  da una distribuzione costante di sorgente su un pannello di intensità  $\sigma_k$  è

$$\mathbf{u}_k^s(\mathbf{x}) = \left[ -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_1|} \hat{\mathbf{t}}_k + \frac{1}{2\pi} \beta \hat{\mathbf{n}}_k \right] \sigma_k = \mathbf{u}_k^{s,1}(\mathbf{x}) \sigma_k , \quad (8.56)$$

essendo  $\hat{\mathbf{t}}_k$ ,  $\hat{\mathbf{n}}_k$  i versori tangente e normale<sup>2</sup> al  $k$ -esimo pannello, i vettori  $\mathbf{r}_i = \mathbf{x} - \mathbf{x}_k^i$ ,  $i = 1 : 2$  e  $\beta$  l'angolo compreso tra il vettore  $\mathbf{r}_1$  e il vettore  $\mathbf{r}_2$ , positivo se si deve ruotare il

<sup>2</sup> Per ottenere le componenti della velocità nel sistema globale, è necessario esprimere i versori  $\hat{\mathbf{t}}_k$ ,  $\hat{\mathbf{n}}_k$  nel sistema di riferimento globale formato dai versori  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$ . La legge di trasformazione dei vettori delle basi si ottiene proiettando i vettori della base locale nella base globale,

$$\hat{\mathbf{t}}_k = (\hat{\mathbf{t}}_k \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{t}}_k \cdot \hat{\mathbf{y}})\hat{\mathbf{y}} \quad , \quad \hat{\mathbf{n}}_k = (\hat{\mathbf{n}}_k \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{n}}_k \cdot \hat{\mathbf{y}})\hat{\mathbf{y}} \quad (8.57)$$

e la legge di trasformazione delle componenti si ottiene come

$$\mathbf{u} = u_{k,t}\hat{\mathbf{t}}_k + u_{k,n}\hat{\mathbf{t}}_n = (t_{k,x}u_{k,t} + n_{k,x}u_{k,n})\hat{\mathbf{x}} + (t_{k,y}u_{k,t} + n_{k,y}u_{k,n})\hat{\mathbf{y}} = u_x\hat{\mathbf{x}} + u_y\hat{\mathbf{y}} , \quad (8.58)$$

o in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{k,x} & n_{k,x} \\ t_{k,y} & n_{k,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k,t} \\ u_{k,n} \end{bmatrix} . \quad (8.59)$$

vettore  $\mathbf{r}_1$  in senso antiorario per farlo coincidere con  $\mathbf{r}_2$ . Infine è stata espressa la velocità indotta dalla sorgente di intensità  $\sigma_k$  come prodotto della velocità indotta da una sorgente unitaria  $\mathbf{u}_k^{s,1}$  e dell'intensità  $\sigma_k$ .

Allo stesso modo, si può scrivere la velocità indotta da una distribuzione di vortici come

$$\mathbf{u}_k^v(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_k^{v,1}(\mathbf{x})\gamma_k . \quad (8.60)$$

Il campo di velocità risultante dalla sovrapposizione della corrente uniforme e delle singolarità introdotte è

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}_\infty + \sum_{k=1}^N \mathbf{u}_k^{s,1}(\mathbf{x})\sigma_k + \sum_{k=1}^N \mathbf{u}_k^{v,1}(\mathbf{x})\gamma_k . \quad (8.61)$$

Questa espressione del campo di velocità contiene  $2N$  incognite, le intensità delle sorgenti  $\sigma_k$  e dei vortici  $\gamma_k$ ,  $k = 1 : N$ .

Le funzioni

```
v = compute_velocity_source( elems_k , rr_i )
v = compute_velocity_vortex( elems_k , rr_i )
```

calcolano la velocità  $v$  nel punto  $rr_i$  indotta da singolarità di intensità unitaria distribuita sull'elemento  $elems_k$ . Il vettore colonna  $v$  contiene le componenti  $x$  e  $y$  della velocità, nel sistema di riferimento globale.

### 8.1.3 Metodo di Hess-Smith

Il metodo di Hess-Smith consiste nell'imporre che le intensità dei vortici siano tutte uguali,  $\gamma_k = \gamma$ ,  $k = 1 : N$ . L'espressione della velocità contiene ora  $N + 1$  incognite.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}_\infty + \sum_{k=1}^N \mathbf{u}_k^{s,1}(\mathbf{x})\sigma_k + \sum_{k=1}^N \mathbf{u}_k^{v,1}(\mathbf{x})\gamma . \quad (8.62)$$

### 8.1.4 Sistema lineare: condizioni al contorno

Si possono scrivere  $N$  equazioni imponendo la condizione al contorno di non penetrazione  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_i) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i = 0$  nei punti di controllo dei pannelli  $\mathbf{x}_i^c$ ,

$$0 = \hat{\mathbf{n}}_i \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^c) = \hat{\mathbf{n}}_i \cdot \mathbf{U}_\infty + \sum_{k=1}^N \hat{\mathbf{n}}_i \cdot \mathbf{u}_k^{s,1}(\mathbf{x}_i^c)\sigma_k + \sum_{\ell=1}^N \hat{\mathbf{n}}_i \cdot \mathbf{u}_\ell^{v,1}(\mathbf{x}_i^c)\gamma , \quad i = 1 : N . \quad (8.63)$$

Manca ora un'altra equazione che renda il sistema determinato e garantisca l'unicità della soluzione del problema aerodinamico in un dominio non semplicemente connesso.

### 8.1.5 Sistema lineare: condizione di Kutta

La condizione di Kutta stabilisce il criterio per recuperare l'unicità della soluzione, scegliendo la “soluzione più fisica” tra le infinite soluzioni del problema aerodinamico con dominio non semplicemente connesso.

Si può approssimare al condizione di Kutta imponendo l'uguaglianza delle componenti tangenziali della velocità dei pannelli in corrispondenza del bordo di uscita,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_1^c) \cdot \hat{\mathbf{t}}_1 + \mathbf{u}(\mathbf{x}_N^c) \cdot \hat{\mathbf{t}}_N = 0 . \quad (8.64)$$

come  $N + 1$ -esima equazione per ottenere un sistema lineare determinato. Esplicitando l'espressione della velocità, si può scrivere

$$0 = \hat{\mathbf{t}}_1 \cdot \mathbf{U}_\infty + \hat{\mathbf{t}}_N \cdot \mathbf{U}_\infty + \sum_{k=1}^N \left[ \hat{\mathbf{t}}_1 \cdot \mathbf{u}_k^{s,1}(\mathbf{x}_1^c) + \hat{\mathbf{t}}_N \cdot \mathbf{u}_k^{s,1}(\mathbf{x}_N^c) \right] \sigma_k + \sum_{\ell=1}^N \left[ \hat{\mathbf{t}}_1 \cdot \mathbf{u}_\ell^{v,1}(\mathbf{x}_1^c) + \hat{\mathbf{t}}_N \cdot \mathbf{u}_\ell^{v,1}(\mathbf{x}_N^c) \right] \gamma. \quad (8.65)$$

### 8.1.6 Sistema lineare in forma matriciale

Si può scrivere il sistema lineare in forma matriciale  $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b}$  distinguendo i contributi delle sorgenti da quello del vortice e le condizioni al contorno di non penetrazione dalla condizione di Kutta, partizionando la matrice  $\underline{\underline{A}}$ , il vettore incognito  $\underline{x}$  e il termine noto  $\underline{b}$ ,

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}^{bc,s} & | & \underline{\underline{A}}^{bc,v} \\ \hline \underline{\underline{A}}^{K,s}{}^T & | & \underline{\underline{A}}^{K,v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\sigma} \\ \hline \underline{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}^{bc} \\ \hline \underline{b}^K \end{bmatrix}. \quad (8.66)$$

Le componenti della matrice  $\underline{\underline{A}}$  sono

$$\begin{aligned} \{\underline{\underline{A}}^{bc,s}\}_{ik} &= \hat{\mathbf{n}}_i \cdot \mathbf{u}_k^{s,1}(\mathbf{x}_i^c) \quad , \quad \{\underline{\underline{A}}^{bc,v}\}_i = \sum_{k=1}^N \hat{\mathbf{n}}_i \cdot \mathbf{u}_k^{v,1}(\mathbf{x}_i^c) \quad , \\ \{\underline{\underline{A}}^{K,s}\}_k &= \hat{\mathbf{t}}_1 \cdot \mathbf{u}_k^{s,1}(\mathbf{x}_1^c) + \hat{\mathbf{t}}_N \cdot \mathbf{u}_k^{s,1}(\mathbf{x}_N^c) \quad , \quad A^{K,v} = \sum_{k=1}^N \hat{\mathbf{t}}_1 \cdot \mathbf{u}_k^{v,1}(\mathbf{x}_1^c) + \hat{\mathbf{t}}_N \cdot \mathbf{u}_k^{v,1}(\mathbf{x}_N^c) \quad , \end{aligned} \quad (8.67)$$

il vettore delle incognite contiene le intensità delle sorgenti e del vortice, mentre le componenti del termine noto sono

$$\{\underline{b}^{bc}\}_i = -\hat{\mathbf{n}}_i \cdot \mathbf{U}_\infty \quad , \quad b^K = -\hat{\mathbf{t}}_1 \cdot \mathbf{U}_\infty - \hat{\mathbf{t}}_N \cdot \mathbf{U}_\infty. \quad (8.68)$$

### 8.1.7 Ricostruzione delle grandezze fisiche

Una volta risolto il sistema lineare, sono note le intensità delle singolarità distribuite sul corpo ed è quindi possibile ricostruire il campo di velocità in un punto  $\mathbf{x}$  qualsiasi del dominio. Si possono utilizzare le funzioni `compute_velocity_source()`, `compute_velocity_vortex()`, per calcolare i contributi di velocità  $\mathbf{u}_k^{s,1}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}_k^{v,1}(\mathbf{x})$  del  $k$ -esimo elemento da modulare con le intensità delle singolarità, come descritto dalla formula del campo di velocità,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}_\infty + \sum_{k=1}^N \mathbf{u}_k^{s,1}(\mathbf{x}) \sigma_k + \sum_{k=1}^N \mathbf{u}_k^{v,1}(\mathbf{x}) \gamma. \quad (8.69)$$

Per calcolare la velocità in corrispondenza dei punti di controllo  $\mathbf{x}_i^c$ , si può evitare di eseguire il ciclo su tutti gli elementi, se si salvano le matrici  $\underline{\underline{A}}_u$ ,  $\underline{\underline{A}}_v$  dei coefficienti aerodinamici durante la costruzione del sistema lineare che permettono di ottenere le due componenti della velocità, tramite il prodotto con il vettore  $\underline{x}$  delle intensità delle singolarità. Le due componenti  $x$  e  $y$  della velocità sono infatti uguali a

$$\begin{aligned} u^c(\mathbf{x}_i) &= U_\infty + \sum_{k=1}^N u_k^{s,1}(\mathbf{x}_i^c) \sigma_k + \sum_{\ell=1}^N u_\ell^{v,1}(\mathbf{x}_i^c) \gamma, & i &= 1 : N \\ v^c(\mathbf{x}_i) &= V_\infty + \sum_{k=1}^N v_k^{s,1}(\mathbf{x}_i^c) \sigma_k + \sum_{\ell=1}^N v_\ell^{v,1}(\mathbf{x}_i^c) \gamma, & i &= 1 : N, \end{aligned} \quad (8.70)$$

e possono essere ricavate come

$$\begin{aligned}\underline{u} &= U_\infty \underline{1} + \underline{\underline{A}_u} \underline{x}, \\ \underline{v} &= V_\infty \underline{1} + \underline{\underline{\underline{A}}_v} \underline{x}.\end{aligned}\tag{8.71}$$

Infine il campo di pressione può essere ricavato utilizzando il teorema di Bernoulli, nella forma valida per correnti stazionarie incomprimibili irrotazionali di fluidi non viscosi,

$$P + \frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{u}|^2 = P_\infty + \frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{U}_\infty|^2,\tag{8.72}$$

avendo trascurato le forze di volume.

Viene riportato lo pseudo-codice della funzione `build_linsys()` per costruire il sistema lineare.

```
[ A , b , Au , Av ] = build_linsys( freeStream , elems , ii_te )

nelems = length(elems)

% === Initialize matrices to zero ===
A = zeros(nelems,nelems) ; b = zeros(nelems,1) ;
Au= zeros(nelems,nelems+1) ; Av= zeros(nelems,nelems+1) ;

% === Fill A matrix and RHS b vector ===
% => 1. assign the non-penetration b.c. ( u.n = 0 ),
%       filling A(1:nelems,1:nelems+1) and b(1:nelems)

for ii = 1 : nelems      % elems where velocity is induced
    for jj = 1 : nelems      % inducing elems

        % === Compute induced velocity ===
        % and store it in vs(:, :).v, vv(:, :).v (memory inefficient!)
        vs(ii,jj).v = compute_velocity_source(elems(jj),elems(ii).cen);
        vv(ii,jj).v = compute_velocity_vortex(elems(jj),elems(ii).cen);

        % === Fill b.c. block of the matrix A with source AIC ===
        A (ii,jj) = elems(ii).nver' * vs(ii,jj).v ;
        % === Accumulate vortex AIC in the b.c. block of the matrix A ===
        A( ii,nelems+1 ) += elems(ii).nver' * vv(ii,jj).v ;

        % === Fill matrices to retrieve the velocity field ===
        % as before, fill sources block, accumulate vortex contributions
        % -> component x of the velocity field
        Au(ii,jj)          = vs(ii,jj).v(1) ; % sources
        Au(ii,nelems+1) += vv(ii,jj).v(1) ; % vortices
        % -> component y of the velocity field
        Av(ii,jj)          = vs(ii,jj).v(2) ; % sources
        Av(ii,nelems+1) += vv(ii,jj).v(2) ; % vortices

    end

    % === Fill the b.c. block of the rhs vector b ===
    b(ii) = - elems(ii).nver' * freeStream.vvec ;

end

% ... continue ...

```

```
% ... continue ...

% => 2. assign Kutta condition
%      ( U_TE_upper . tTE_upper + U_TE_lower . tTE_lower = 0 ),
%      filling A(nelems+1,:) and b(nelems+1)

% indices of the elems at the te
i_te_1 = ii_te(1,1) ; i_te_N = ii_te(1,2) ;

for jj = 1 : nelems

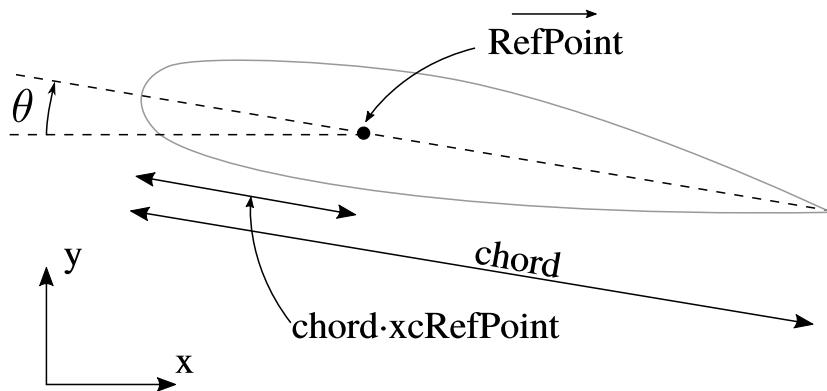
    % === Fill the Kutta condition row for sources ===
    A(nelems+1, jj) = elems(i_te_1).tver' * vs(i_te_1,jj).v + ...
                      elems(i_te_N).tver' * vs(i_te_N,jj).v ;
    % === Accumulate the contribution of the vortex ===
    A(nelems+1,nelems+1) += ...
        elems(i_te_1).tver' * vv(i_te_1,jj).v + ...
        elems(i_te_N).tver' * vv(i_te_N,jj).v ;
end

% fill the last component of the rhs ( -(t1+tN).U_inf )
b(nelems+ia) = - ( elems( i_te_1 ).tver + elems( i_te_2 ).tver )' * ...
                 freeStream.vvec ;
```

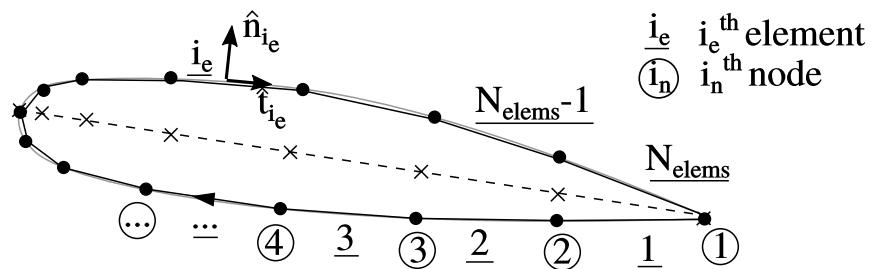
Infine viene riportato lo pseudo-codice del programma.

```
% === Input ===
% -> freeStream
freeStream.rho = ... ; .P = ... ; .v = ... ; .alpha = ... ;
freeStream.vvec = freeStream.v * [ cos(freeStream.alpha) ; ...
                                    sin(freeStream.alpha) ] ;
% -> airfoil
airfoil.id     = 1     ; airfoil.airfoil_str = 'NACA0012'
airfoil.chord = 1.0   ; airfoil.theta = 2.0 *pi/180.0 ; % ...

% === Build geometry ===
[ rr, ee, ii_te, elems, nelems, npoints ] = build_geometry(airfoil)
% === Build the linear system ===
[ A , b , Au , Av ] = build_linsys( freeStream , elems , ii_te ) ;
% === Solve the linear system ===
x = A \ b ;
% === Retrieve physical fields ===
% -> Compute velocity at control points
u = Au * x + freeStream.v * cos(freeStream.alpha);
v = Av * x + freeStream.v * sin(freeStream.alpha); % ...
```



----- chord discretised with  $n_{ChordPanels}$  segments.  
 Points  $x$  are the extreme points of these panels and  
 are useful to compute points on the surface of the  
 airfoil, exploiting analytical expressions of the  
 mean camber line and thickness of the airfoil.





## 9. Strato limite

**Esercizio 9.1 — Spessori di strato limite: strato limite laminare.** Dato il profilo di velocità, determinare il rapporto di forma  $H$ .

$$u(x, y) = \begin{cases} U(x) \left( 2 \frac{y}{\delta(x)} - \frac{y^2}{\delta^2(x)} \right) & y \leq \delta(x) \\ U(x) & y > \delta(x) \end{cases} \quad (9.1)$$

$$(H = 5/2)$$

■

### Soluzione

**Concetti.** Spessori di strato limite. Rapporto di forma  $H = \delta_1/\delta_2$ .

$$\begin{aligned} \delta_1(x) &= \int_0^\infty \left( 1 - \frac{u(x, y)}{U(x)} \right) dy \\ \delta_2(x) &= \int_0^\infty \frac{u(x, y)}{U(x)} \left( 1 - \frac{u(x, y)}{U(x)} \right) dy \end{aligned} \quad (9.2)$$

**Svolgimento.** L'esercizio viene risolto calcolando prima gli integrali nelle definizioni degli spessori di strato limite e poi il loro rapporto.

Lo spessore di spostamento:

$$\begin{aligned}
 \delta_1 &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy = \\
 &= \int_0^{\delta(x)} \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy + \underbrace{\int_{\delta(x)}^\infty \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy}_{=0} = \\
 &= \int_0^{\delta(x)} \left(1 - 2\frac{y}{\delta(x)} + \frac{y^2}{\delta^2(x)}\right) dy = \\
 &= \frac{1}{3}\delta(x)
 \end{aligned} \tag{9.3}$$

Lo spessore di quantità di moto:

$$\begin{aligned}
 \delta_2 &= \int_0^\infty \frac{u(x, y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy \\
 &= \int_0^{\delta(x)} \frac{u(x, y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy + \underbrace{\int_{\delta(x)}^\infty \frac{u(x, y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy}_{=0} = \\
 &= \frac{2}{15}\delta(x)
 \end{aligned} \tag{9.4}$$

Il rapporto di forma vale quindi  $H = 5/2$ .

**Esercizio 9.2 — Spessori di strato limite: strato limite turbolento.** Dato il profilo di velocità, determinare il rapporto di forma  $H$ .

$$\frac{u(x, y)}{U(x)} = \begin{cases} \left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^{\frac{1}{7}} & y \leq \delta(x) \\ 1 & y > \delta(x) \end{cases} \quad (9.5)$$

$$(H = 9/7) \quad \blacksquare$$

### Soluzione

**Concetti.** Spessori di strato limite. Rapporto di forma  $H = \delta_1/\delta_2$ .

$$\begin{aligned} \delta_1(x) &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy \\ \delta_2(x) &= \int_0^\infty \frac{u(x, y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy \end{aligned} \quad (9.6)$$

**Svolgimento.** L'esercizio viene risolto calcolando prima gli integrali nelle definizioni degli spessori di strato limite e poi il loro rapporto.

Lo spessore di spostamento:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy = \\ &= \int_0^{\delta(x)} \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy + \underbrace{\int_{\delta(x)}^\infty \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy}_{=0} = \\ &= \frac{1}{8}\delta(x) \end{aligned} \quad (9.7)$$

Lo spessore di quantità di moto:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \int_0^\infty \frac{u(x, y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy \\ &= \int_0^{\delta(x)} \frac{u(x, y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy + \underbrace{\int_{\delta(x)}^\infty \frac{u(x, y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy}_{=0} = \\ &= \frac{7}{72}\delta(x) \end{aligned} \quad (9.8)$$

Il rapporto di forma vale quindi  $H = 9/7$ .

**Osservazione.** Questo profilo di velocità viene usato come approssimazione del profilo di strato limite turbolento. Questo profilo ha  $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}$  infinita, che implica sforzo a parete infinito. Una formula per lo sforzo di parete, associata a questo profilo di velocità è:

$$\tau_w = 0.0225\rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (9.9)$$

**Esercizio 9.3 — Equazione integrale di Von Karman.** Dati  $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  e velocità esterna  $U(x) = 1.45 \text{ m/s}$ , utilizzando le formule per il profilo di velocità e sforzo a parete per lo strato limite turbolento, calcolare lo spessore  $\delta(x)$  dello strato limite.

$$\frac{u(x, y)}{U(x)} = \begin{cases} \left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^{\frac{1}{7}} & y \leq \delta(x) \\ 1 & y > \delta(x) \end{cases} \quad (9.10)$$

$$\tau_w = 0.0225 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (9.11)$$

■

### Soluzione

**Concetti.** Spessori di strato limite. Rapporto di forma. Coefficiente di attrito. Equazione integrale di Von Karman.

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} \quad (9.12)$$

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\delta_2}{U(x)} \frac{dU(x)}{dx} (2 + H) = \frac{c_f}{2} \quad (9.13)$$

**Svolgimento.** Si calcolano gli spessori di strato limite  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , il rapporto di forma  $H$  e il coefficiente di attrito  $c_f$ ; poi si inseriscono nell'equazione integrale di Von Karman. Poiché la velocità esterna non varia in  $x$ , il secondo termine si annulla.

Gli spessori di strato limite e il rapporto di forma hanno valore  $\delta_1 = \frac{1}{8}\delta$ ,  $\delta_2 = \frac{7}{72}\delta$ ,  $H = \frac{9}{7}$ .

Il coefficiente di attrito vale:

$$\begin{aligned} c_f &= \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \\ &= \frac{2}{\rho U^2} 0.0225 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} = \\ &= 0.045 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (9.14)$$

Inserendo nell'equazione di Von Karman:

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{c_f}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{72} \frac{d\delta(x)}{dx} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (9.15)$$

Integrando tra 0 e  $x$ , avendo imposto  $\delta(0) = 0$ , si ottiene:

$$\delta(x) = 0.0225 \frac{90}{7} \left(\frac{\nu}{U}\right)^{\frac{1}{4}} x^{\frac{4}{5}} \quad (9.16)$$

**Dalle equazioni di Prandtl per lo strato limite all'equazione integrale di VK.**

L'equazione integrale di VK (9.13) viene ricavata integrando in  $y$  tra 0 e  $\infty$  la componente  $x$  della quantità di moto delle equazioni di Prandtl per lo strato limite

$$\underbrace{\int_{y=0}^{\infty} u \frac{\partial u}{\partial x} dy}_{(a)} + \underbrace{\int_{y=0}^{\infty} v \frac{\partial u}{\partial y} dy}_{(b)} - \underbrace{\int_{y=0}^{\infty} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy}_{(c)} - \underbrace{\int_{y=0}^{\infty} UU'(x) dy}_{(d)} = 0 \quad (9.17)$$

dove è stata indicata con  $U(x)$  la velocità della corrente esterna allo strato limite. Si calcolano ora i termini (c), (b). Da (c) si ricava un termine nel quale compare lo sforzo tangenziale a parete  $\tau_w$

$$-\int_{y=0}^{\infty} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) dy = -\nu \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0}^{\infty} = \nu \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\tau_w(x)}{\rho} \quad (9.18)$$

Il termine (b) richiede un po' di lavoro e attenzione in più (IxP indica l'integrazione per parti).

$$\begin{aligned} & \int_{y=0}^{\infty} v(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy = && \left( \text{IxP} : \int_0^{\infty} v \frac{\partial u}{\partial y} = [vu] \Big|_{y=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{\partial v}{\partial y} u \right) \\ &= v(x, \infty) u(x, \infty) - \underbrace{v(x, 0) u(x, 0)}_{=0} - \int_0^{\infty} \frac{\partial v}{\partial y} u = && \left( u(x, \infty) = U(x); \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= v(x, \infty) U(x) + \int_{y=0}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} u = && \left( v(x, \infty) = \int_{y=0}^{\infty} \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) dy = - \int_{y=0}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy \right) \\ &= - \int_{y=0}^{\infty} U(x) \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_{y=0}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) u(x, y) dy \end{aligned} \quad (9.19)$$

Inserendo le espressioni (9.18), (9.19) nell'equazione (9.17), si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\infty} \left[ 2u \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{dU}{dx} \right] dy + \frac{\tau_w}{\rho} = \\ &= \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial(Uu)}{\partial x} + u \frac{dU}{dx} - u \frac{dU}{dx} \right] dy + \frac{\tau_w}{\rho} = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [u^2 - Uu] dy - \frac{dU}{dx} \int_0^{\infty} [U - u] dy + \frac{\tau_w}{\rho} = \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} [u^2 - Uu] dy - \frac{dU}{dx} \int_0^{\infty} [U - u] dy + \frac{\tau_w}{\rho} = \\ &= -\frac{d}{dx} \left( U^2(x) \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left[ 1 - \frac{u}{U} \right] dy \right) - \frac{dU}{dx} U \int_0^{\infty} \left[ 1 - \frac{u}{U} \right] dy + \frac{\tau_w}{\rho} = \\ &= -\frac{d}{dx} \left[ U^2(x) \delta_2(x) \right] - U(x) U'(x) \delta_1(x) + \frac{\tau_w(x)}{\rho} \end{aligned} \quad (9.20)$$

Riassumendo,

$$\frac{d}{dx} \left[ U^2(x) \delta_2(x) \right] + U(x) U'(x) \delta_1(x) = \frac{\tau_w(x)}{\rho} \quad (9.21)$$

Infine espandendo i termini, ricordando la definizione di rapporto di forma  $H = \delta_1/\delta_2$ , coefficiente di attrito  $c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2}$

$$\begin{aligned} 2UU'\delta_2 + U^2\delta'_2 + UU'\delta_1(x) &= \frac{\tau_w(x)}{\rho} \\ [2\delta_2 + \delta_1]UU' + U^2\delta'_2 &= \frac{\tau_w(x)}{\rho} \\ [2 + H]\delta_2 \frac{U'}{U} + \delta'_2 &= \frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{c_f}{2} \end{aligned} \tag{9.22}$$

**Esercizio 9.4 — Strato limite di Blasius e sforzo a parete.** Partendo dalle equazioni di Prandtl per lo strato limite bidimensionale stazionario laminare, ricavare l'equazione di Blasius per lo strato limite laminare e le condizioni al contorno per la corrente di stato limite su una lamina semi-infinita.

Ricavare poi l'espressione dello sforzo viscoso a parete e gli spessori integrali di spostamento  $\delta^*$  e di quantità di moto  $\theta$ .

Infine, ricavare la soluzione dell'equazione di Blasius con un metodo numerico. ■

### Soluzione

**Concetti.** Equazioni di Prandtl. Equazione di Blasius. Soluzione in similitudine. Shooting method.

#### Svolgimento.

##### Dalle equazioni di Prandtl al modello di Blasius.

Le equazioni di Prandtl dello strato limite possono essere ricavate tramite un'analisi degli ordini di grandezza delle quantità fisiche che compaiono nelle equazioni di Navier-Stokes.

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP(x)}{dx} = U(x)U'(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 , \end{cases} \quad (9.23)$$

avendo indicato con  $U(x)$  la componente parallela alla parete della lamina semi infinita del campo di velocità della corrente esterna. Il modello di Blasius dello strato limite ipotizza che la corrente esterna sia uniforme,

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 . \end{cases} \quad (9.24)$$

Si può ridurre il sistema di due equazioni nelle incognite  $(u, v)$  a un'equazione sola in una incognita introducendo la funzione di corrente  $\psi$ ,

$$u = \partial\psi/\partial y \quad , \quad v = -\partial\psi/\partial x . \quad (9.25)$$

Il vincolo di incompressibilità è soddisfatto identicamente, mentre la componente  $x$  dell'equazione della quantità di moto diventa

$$\psi_y \psi_{yx} - \psi_x \psi_{yy} - \nu \psi_{yyy} = 0 . \quad (9.26)$$

Poiché il problema non ha una scala di lunghezza, si cerca una soluzione similare. Si introduce la variabile di similitudine  $\eta = y/\delta(x)$ , dove  $\delta(x)$  rappresenta lo spessore convenzionale dello strato limite, e si cerca la soluzione del problema imponendo l'espressione della funzione di corrente

$$\psi(x, y) = U\delta(x)g(\eta(x, y)) . \quad (9.27)$$

Utilizzando le derivate della funzione di corrente,

$$\begin{aligned} \psi_y &= Ug'(\eta) \quad , \quad \psi_{yy} = \frac{U}{\delta(x)}g''(\eta) \quad , \quad \psi_{yyy} = \frac{U}{\delta^2(x)}g'''(\eta) , \\ \psi_x &= U\delta'(x)[g - \eta g'(\eta)] \quad , \quad \psi_{xy} = U\left[-\frac{\delta'(x)}{\delta(x)}\eta g''(\eta)\right] , \end{aligned} \quad (9.28)$$

all'interno dell'equazione della quantità di moto, si ottiene

$$\begin{aligned} -U^2 \frac{\delta'}{\delta} \eta g' g'' - U^2 \frac{\delta'}{\delta} [g g'' - \eta g' g''] - \frac{\nu U}{\delta^2} g''' &= 0 , \\ \rightarrow \quad \frac{U \delta'(x) \delta(x)}{\nu} g(\eta) g''(\eta) + g'''(\eta) &= 0 . \end{aligned} \quad (9.29)$$

Affinché la funzione  $g(\eta)$  dipenda solo da  $\eta(x, y)$  e non dalle due variabili  $x, y$  in maniera indipendente, il coefficiente  $U \delta'(x) \delta(x) / \nu$  deve essere uguale a una costante,

$$\frac{U \delta'(x) \delta(x)}{\nu} = \alpha . \quad (9.30)$$

Scegliendo in maniera arbitraria  $\alpha = \frac{1}{2}$  e integrando questa ultima relazione in  $x$  (con condizioni al contorno  $\delta(0) = 0$ ), si ottiene l'andamento dello spessore dello strato limite laminare di Blasius,

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} , \quad (9.31)$$

e l'equazione di Blasius per la funzione  $g(\eta)$ ,

$$g''' + \frac{1}{2} g g'' = 0 , \quad (9.32)$$

con le condizioni al contorno per il problema dello strato limite su lamina piana

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = 0 \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} g'(\eta) = 1 . \end{cases} \quad (9.33)$$

### Sforzo viscoso a parete.

La formula per lo sforzo viscoso a parete è:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{\eta=0} = \mu \frac{U}{\delta(x)} g''(0) , \quad (9.34)$$

dove  $g''(0) \approx 0.332$ .

### Spessori integrali dello strato limite.

Si calcolano gli spessori integrali dello strato limite di Blasius. Usando le relazioni dello strato limite di Blasius, si trova

$$\begin{aligned} \delta^* &= \int_0^\infty (1 - g'(\eta)) dy = \delta(x) \int_0^\infty (1 - g'(\eta)) d\eta , \\ \theta &= \int_0^\infty g'(\eta)(1 - g'(\eta)) dy = \delta(x) \int_0^\infty g'(\eta)(1 - g'(\eta)) d\eta . \end{aligned} \quad (9.35)$$

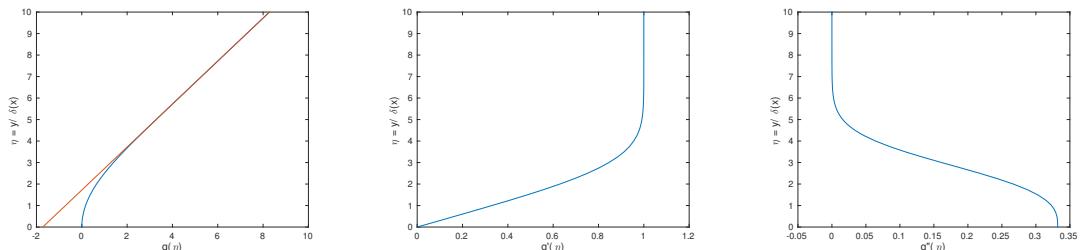
Per lo spessore di spostamento si ha:

$$\begin{aligned} \delta^* &= \delta(x) \int_0^\infty (1 - g'(\eta)) d\eta = \\ &= \delta(x) [\eta - g(\eta)] \Big|_0^\infty = \quad (g(0) = 0) \\ &= \delta(x) \lim_{\eta \rightarrow \infty} [\eta - g(\eta)] = \quad (\lim_{\eta \rightarrow \infty} [\eta - g(\eta)] = 1.721) \\ &= 1.721 \cdot \delta = \quad (\delta = \sqrt{\nu x / U}) \\ &= 1.721 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} . \end{aligned} \quad (9.36)$$

Per lo spessore di quantità di moto:

$$\begin{aligned}
 \theta &= \delta(x) \int_0^\infty g'(\eta)(1 - g'(\eta))d\eta = \\
 &= \delta \int_0^\infty g'(\eta)d\eta - \delta \int_0^\infty g'^2(\eta)d\eta = \\
 &= \delta[g(\eta)]|_0^\infty - \delta \int_0^\infty g'^2(\eta)d\eta = \quad (g(0) = 0 \text{ e IxP}) \\
 &= \delta \lim_{\eta \rightarrow \infty} g(\eta) - \delta \int_0^\infty [(gg')' - gg'']d\eta = \quad (\text{eq. di Blasius: } \frac{1}{2}gg'' + g''' = 0) \\
 &= \delta \lim_{\eta \rightarrow \infty} g(\eta) - \delta[gg']|_0^\infty - \delta \int_0^\infty 2g'''d\eta = \quad (g(0) = 0) \\
 &= \delta \lim_{\eta \rightarrow \infty} g(\eta) - \delta \lim_{\eta \rightarrow \infty} g(\eta)g'(\eta) - 2\delta[g''(\eta)]|_0^\infty = \quad (\lim_{\eta \rightarrow \infty} g'(\eta) = 1, \lim_{\eta \rightarrow \infty} g''(\eta) = 0) \\
 &= 2\delta(x)g''(0) = \\
 &= 0.664\sqrt{\frac{\nu x}{U}}. \quad (9.37)
 \end{aligned}$$

Il rapporto di forma vale quindi  $H = \delta^*/\theta = 1.721/0.664$ , cioè  $H = 2.59$ .



(a) Grafico di  $g(\eta)$ : per  $\eta \rightarrow \infty$   $g$  ha derivata uguale a 1; l'intersezione dell'asintoto con l'asse orizzontale avviene per  $g(0) = 1.721$ :  $g(\eta) \sim \eta - 1.721$  per  $\eta \rightarrow \infty$ .

(b) Grafico di  $g'(\eta)$ : rappresenta il profilo adimensionale della velocità. Per  $\eta \rightarrow \infty$   $g'(\eta) \rightarrow 1$ .

(c) Grafico di  $g''(\eta)$ : è legato alla derivata parziale  $\partial u / \partial y$ . Per determinare lo sforzo a parete è necessario trovare il valore di  $g''(0)$ :  $g''(0) = 0.332$

### Soluzione numerica: shooting method.

Per risolvere l'equazione di Blasius con metodi numerici, si può incontrare qualche difficoltà nell'imporre la condizione al contorno per  $\eta \rightarrow \infty$ . Tramite uno *shooting method* si può risolvere il problema ai valori al contorno, tramite la soluzione di problemi ai valori iniziali insieme a un metodo per trovare gli zeri di una funzione (es. Newton). Il dominio semi-infinito viene troncato. Il dominio numerico è quindi  $[0, \bar{\eta}]$ . L'equazione scalare di terzo ordine, viene scritta come sistema del primo ordine. Invece di imporre la condizione all'infinito, viene imposto il valore di  $g''(0) = \alpha$ . Si risolve l'equazione. Si trova il valore di  $g'_n$  in  $\bar{\eta}$ . Si itera fino a quando il valore assoluto di  $F(\alpha) = g'_n(\bar{\eta}; \alpha) - \lim_{\eta \rightarrow \infty} g'(\eta)$  non è inferiore a una tolleranza stabilita. Per esempio, partendo da  $\alpha = 0.1$ , con una tolleranza  $tol = 1E - 09$ :

nIter	$g''(0)$	res
1	0.1000	5.508e-01
2	0.2836	9.975e-02
3	0.3308	2.575e-03

---

4	0.3320	1.660e-06
5	0.3320	1.804e-12

**Esercizio 9.5 — Strato limite di Blasius: resistenza di una lamina.** Una lamina piana molto sottile viene investita parallelamente su entrambe le sue facce da una corrente di velocità uniforme  $U$  di un fluido di densità  $\rho$  e viscosità dinamica  $\mu$ . Nell'ipotesi che il problema possa essere approssimato con le equazioni bidimensionali dello strato limite laminare con velocità asintotica costante (Blasius):

- determinare l'espressione della resistenza di attrito della lamina rettangolare in funzione della sua lunghezza  $\ell$  (lati paralleli alla velocità della corrente esterna) e della sua larghezza  $b$ ;
- determinare la forma della lamina rettangolare di area data  $A = \ell b$  che ha resistenza minima.

■

### Soluzione

**Concetti.** Strato limite laminare. Equazione di Blasius.

**Svolgimento.** Nell'ipotesi in cui si possa utilizzare la soluzione di Blasius, considerata omogenea in apertura, la resistenza di attrito della lamina è

$$\begin{aligned} D &= 2b \int_0^\ell \tau_w(x) dx = & \left( \tau_w = \mu \frac{U}{\delta(x)} g''(0) \right) \\ &= 2g''(0) \mu b U \int_0^\ell \frac{1}{\delta(x)} dx = & \left( \delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \right) \\ &= 2g''(0) \frac{\mu b U^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\nu}} \int_0^\ell \frac{1}{\sqrt{x}} dx = & \\ &= 4g''(0) \sqrt{\rho \mu U^{\frac{3}{2}}} b \sqrt{\ell}, & \end{aligned} \quad (9.38)$$

o raccogliendo nel coefficiente  $K$  tutti i parametri costanti del problema,  $D(\ell, b) = K b \sqrt{\ell}$ .

#### Resistenza minima, ad area $A$ fissata.

Per trovare il valore minimo della resistenza di una lamina, si inserisce il vincolo  $A = \ell b$  all'interno dell'espressione della resistenza per ottenere l'espressione in funzione di una sola variabile,

$$D_A(\ell) = K A \frac{1}{\sqrt{\ell}} = \tilde{K} \frac{1}{\sqrt{\ell}}. \quad (9.39)$$

Si osserva che la resistenza minima si ottiene per una lamina di lunghezza  $\ell$  infinita e di spessore  $b$  infinitesimo,  $D_A(\ell \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ .

#### Commento.

Il problema considera un modello laminare dello strato limite su tutta la lunghezza della lamina, senza considerare la transizione a un regime di moto turbolento. In generale la transizione a un regime di moto turbolento avviene a una determinata distanza dal bordo di attacco della lamina. Se avviene la transizione a un regime di moto turbolento, aumentando la lunghezza della lamina aumenta la sua superficie soggetta a un regime turbolento, nel quale gli sforzi a parete sono generalmente maggiori, rispetto a uno strato limite laminare.

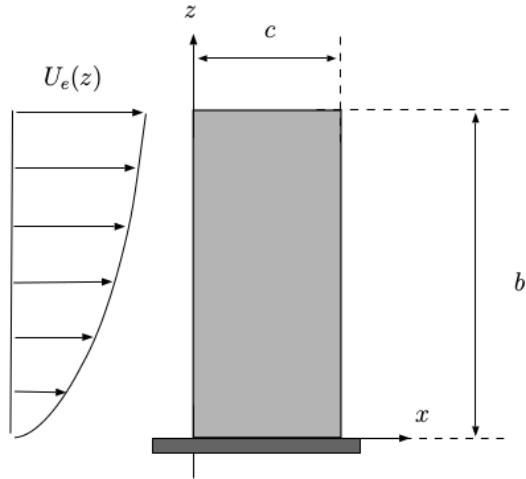
**Esercizio 9.6 — Strato limite di Blasius**

**3D.** Nella figura accanto una lastra piana di corda  $c = 30 \text{ cm}$ , apertura  $b = 75 \text{ cm}$  e spessore trascurabile è investita da una corrente esterna d'aria ( $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 1.76 \times 10^{-5} \text{ kg/(ms)}$ ) uniforme in corda e variabile in apertura secondo la legge

$$U_e(z) = U_e(z)\hat{x} = \bar{U} \left( \frac{z}{b} \right)^{2/3} \hat{x}$$

con  $\bar{U} = 5 \text{ m/s}$ . Assumendo la corrente laminare, stazionaria e bidimensionale su ciascuna sezione  $z$  in apertura, e potendone approssimare lo strato limite attraverso la soluzione di Blasius, si richiede di:

- 2.1) calcolare la resistenza  $D$  della lastra ed il corrispondente momento all'incastro  $M_y$ ;
- 2.2) calcolare lo spessore di spostamento  $\delta^*(x, z)$  e di quantità di moto  $\theta(x, z)$  dello strato limite sulla superficie della lamina;

**Soluzione**

**Concetti.** Soluzione di Blasius dello strato limite. Spessori di strato limite.

**Svolgimento.** Assumendo valido il modello 2D di Blasius per lo strato limite *quasi-3D* del problema, lo spessore convenzionale dello strato limite vale

$$\delta(x, z) = \sqrt{\frac{x\nu}{U_e(z)}} , \quad (9.40)$$

e lo sforzo viscoso a parete in direzione  $x$  vale

$$\tau_w(x, z) = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \mu g''(0) \frac{U_e(z)}{\delta(x, z)} = g''(0) \mu \frac{U_e^{3/2}(z)}{\sqrt{\nu x}} . = g''(0) \sqrt{\mu\rho} \frac{U_e^{3/2}(z)}{\sqrt{x}} . \quad (9.41)$$

Utilizzando il profilo di velocità fornito dal problema,

$$\delta(x, z) = \sqrt{\frac{x\nu b^{1/3}}{U z^{1/3}}} , \quad \tau_w(x, z) = g''(0) \sqrt{\mu\rho} \frac{\bar{U}^{3/2}}{b} \frac{z}{\sqrt{x}} . \quad (9.42)$$

- Per il calcolo della resistenza e del momento alla radice è necessario calcolare lo sforzo a parete sulla lamina piana  $\tau_w(x, z)$ . La resistenza è l'integrale di  $\tau_w$  sulla superficie; il momento  $M_y$  è l'integrale di  $z\tau_w(x, z)$  esteso alla superficie,

$$D = \int_{x=0}^c \int_{z=0}^b \tau_w(x, z) dx dz = g''(0) \sqrt{\mu\rho} \bar{U}^{3/2} b \sqrt{c} , \quad (9.43)$$

$$M_y = \int_{x=0}^c \int_{z=0}^b z \tau_w(x, z) dx dz = \frac{2}{3} g''(0) \sqrt{\mu \rho} \bar{U}^{3/2} b^2 \sqrt{c} . \quad (9.44)$$

- Nel modello *quasi-3D* dello strato limite, gli spessori integrali sono funzione di  $(x, z)$ ,

$$\delta^*(x, z) = \int_0^\infty \left[ 1 - \frac{u(x, y, z)}{U_e(x, z)} \right] dy, \quad \theta(x, z) = \int_0^\infty \frac{u(x, y, z)}{U_e(x, z)} \left[ 1 - \frac{u(x, y, z)}{U_e(x, z)} \right] dy , \quad (9.45)$$

e utilizzando le relazioni dello strato limite di Blasius

$$\delta^*(x, z) = 1.721 \delta(x, z) , \quad \theta(x, z) = 0.644 \delta(x, z) . \quad (9.46)$$



# 10. Stabilità fluidodinamica e turbolenza

## 10.1 Stabilità idrodinamica

In questa sezione viene data una breve introduzione allo studio della stabilità idrodinamica, viene accennato alla possibile inadeguatezza dell'analisi modale e viene introdotta l'analisi lineare non modale, in grado di spiegare la dinamica di alcune correnti che non viene colta dall'analisi modale.

La stabilità idrodinamica si occupa delle prime instabilità delle correnti laminari, di solito descritte con l'approccio deterministico della teoria dei sistemi dinamici. Le equazioni di Navier–Stokes dotate delle appropriate condizioni iniziali, condizioni al contorno (ed eventualmente condizioni di compatibilità) descrivono il moto di una corrente incomprimibile di un fluido newtoniano. Nella forma adimensionale delle equazioni,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (10.1)$$

il numero di Reynolds  $Re$  è un parametro che rappresenta il rapporto tra la “scala” degli effetti inerziali e quella degli effetti viscosi. Fin dai primi studi di Reynolds (1883) sulla transizione al regime turbolento nelle correnti in canali, questo numero adimensionale è stato riconosciuto come il principale parametro che determina il regime della corrente, laminare o turbolento.

La turbolenza è frequentemente considerata come l'ultimo problema non risolto della meccanica classica, e solo recentemente sono stati spiegati alcuni fenomeni riguardanti la stabilità idrodinamica. L'approccio tradizionale all'analisi di stabilità dei sistemi dinamici consiste nella ricerca dei punti di equilibrio, ossia le soluzioni stazionarie del sistema, e nella soluzione del problema agli autovalori del sistema linearizzato attorno all'equilibrio. L'approccio modale, “alla Lyapunov”, permette di ottenere alcune informazioni locali sulla stabilità di un equilibrio in seguito a condizioni iniziali perturbate. È noto che l'analisi modale delle correnti stazionarie, che rappresentano equilibri delle equazioni di Navier–Stokes, riesce a descrivere il comportamento di alcune correnti, come ad esempio

la convezione di Rayleigh–Benard, la corrente di Taylor–Couette tra due cilindri coassiali rotanti o la scia di Von Kármán dietro un cilindro, mentre non è in grado di descrivere le osservazioni sperimentali di altre correnti, come la corrente di Newton–Couette e la corrente di Poiseuille, sia in canali piani sia in canali cilindrici, e alcune correnti a getto.

### 10.1.1 Fallimento dell'analisi modale: correnti amplificatrici di disturbi

Per le *correnti aperte*, per le quali le particelle fluide rimangono nel dominio euleriano considerato in un intervallo di tempo finito, vengono definiti i concetti di *instabilità assoluta* e *instabilità convettiva*. Queste definizioni sono legate alla risposta impulsiva del sistema e determinano la classificazione storica delle correnti aperte in **oscillatori fluidodinamici** e **correnti amplificatrici del rumore**: gli oscillatori fluidodinamici mostrano una dinamica oscillatoria intrinseca (auto-sostenuta) a una precisa frequenza e sono poco influenzate da disturbi esterni; nelle correnti amplificatrici del rumore, invece, disturbi con un ampio spettro di frequenze mostrano un'enorme amplificazione mentre vengono trasportate lungo il dominio.

Per spiegare il fallimento dell'analisi modale, alcuni studiosi si sono concentrati sull'inadeguatezza dello studio di stabilità del sistema linearizzato e hanno incluso alcuni termini non lineari per lo studio di stabilità dei sistemi con la cosiddetta *teoria dell'instabilità secondaria*. Comunque, è emerso che la principale ragione della discrepanza tra i risultati dell'analisi modale e le osservazioni sperimentali riguardanti correnti amplificatrici di rumore, dominate dalla convezione, è dovuta alla **non-normalità** del sistema linearizzato di Navier–Stokes. In particolare, il termine convettivo rende il problema linearizzato di Navier–Stokes non-normale, cioè descritto da un operatore linearizzato (l'equivalente della matrice jacobiana) non simmetrico, che in generale ha modi (autofunzioni, autovettori) non ortogonali. I sistemi non-normali hanno una dinamica lineare attorno a un equilibrio stabile più complicata rispetto alla dinamica dei sistemi lineari normali, caratterizzati da autovettori ortogonali.

I sistemi non-normali possono ad esempio mostrare il fenomeno del **crescita transitoria**: partendo nelle vicinanze di un equilibrio stabile, lo stato del sistema può momentaneamente allontanarsi dall'equilibrio (ad esempio, misurando la distanza con una norma energetica) per poi tendere asintoticamente ad esso. Quando sono forzati, i sistemi non-normali possono mostrare una **pseudorisonanza**, una grande amplificazione di disturbi con frequenza lontana da quella del autovalore meno stabile, e una grande amplificazione di disturbi stocastici. A causa della loro natura non-normale, sia la risposta deterministica sia la risposta stocastica delle correnti amplificatrici di rumore attorno a equilibri stabili sono state studiate con analisi di risposta lineari non-modali, sia nel dominio del tempo sia nel dominio della frequenza. L'analisi della risposta di questi sistemi viene affrontato come un problema di ottimizzazione: nel dominio del tempo, tecniche classiche di algebra lineare vengono usate insieme a un'integrazione “avanti e indietro” nel tempo per risolvere il problema di ottimizzazione e ricavare la condizione iniziale ottimale, cioè quella associata alla massima crescita transitoria; nel dominio delle frequenze, tecniche basate su una decomposizione ai valori singolari (SVD) della trasformata di Fourier del *resolvent operator*<sup>1</sup> per determinare la perturbazione armonica maggiormente amplificata dal sistema

<sup>1</sup> La risposta armonica di un sistema lineare può essere studiata nel dominio delle frequenze. La trasformata di Fourier del sistema lineare  $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{f}$  è  $i\omega\hat{\underline{x}} = \underline{A}\hat{\underline{x}} + \underline{B}\hat{\underline{f}}$ . Il *resolvent operator*  $\mathcal{R}(\omega)$  del sistema nel dominio delle frequenze è l'operatore che lega la trasformata di Fourier  $\hat{\underline{f}}(\omega)$

e la sua amplificazione; la risposta stocastica del sistema può infine essere determinata dalla risposta armonica del sistema in tutto lo spettro di frequenze.

### Approccio variazionale e metodi dell'aggiunto

#### Analisi di sensitività

#### Tecniche di controllo

## 10.1.2 Sistemi dipendenti da un parametro e stabilità strutturale

Spesso la dinamica di un sistema è influenzata dal valore di alcuni suoi parametri caratteristici. Ad esempio la dinamica di una corrente incomprimibile di un fluido viscoso newtoniano dipende dal numero di Reynolds  $Re$ , come facilmente intuibile dalla forma adimensionale delle equazioni di Navier–Stokes. Tipicamente, il numero di Reynolds determina il regime di moto della corrente: qualitativamente, in alcune correnti quando il numero di Reynolds supera un valore critico la soluzione laminare stabile lascia spazio a un regime caotico, turbolento.

Lo studio della stabilità di un sistema dipendente dal valore di uno o più parametri è l'oggetto della **teoria delle biforcazioni**, che si occupa di studiare i cambiamenti qualitativi della dinamica di un sistema al variare dei suoi parametri. Di seguito, viene fornito lo studio di stabilità del sistema di Lorenz in funzione del valore di un suo parametro, come primo esempio di studio di stabilità di un sistema fluidodinamico ridotto: infatti il sistema tridimensionale di Lorenz può essere ricavato da un'approssimazione di Galerkin con base armonica della soluzione delle equazioni di Boussinesq per il problema della convezione di un fluido tra due superfici parallele. La stabilità del sistema viene studiata al variare di un parametro che è proporzionale al numero di Rayleigh  $Ra$  caratteristico del problema,

$$\rho \sim Ra = \frac{\alpha g \Delta T h^3}{\nu D} . \quad (10.3)$$

Prima di indagare il sistema di Lorenz vengono introdotti alcuni concetti utili per studiare la stabilità di un generico sistema dinamico,

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t) , \quad x(0) = x_0 . \quad (10.4)$$

Alcuni di questi concetti non sono nuovi; tutte queste definizioni verranno usate (e risulteranno più chiare) nella sezione successiva dedicata al sistema di Lorenz.

**Spazio delle fasi e stati di un sistema.** Lo spazio delle fasi è uno spazio nel quale i punti rappresentano i possibili stati del sistema. Lo stato di un sistema dinamico è identificato dal valore delle sue variabili di stato, ovvero le variabili che lo descrivono in maniera esaustiva da poterne prevederne l'evoluzione.<sup>2</sup> L'evoluzione libera di un sistema dinamico viene descritta dalle traiettorie nel suo spazio delle fasi.

**Equilibri e cicli limite.** Un equilibrio  $\bar{x}$  del sistema è una soluzione stazionaria delle equazioni del sistema dinamico, cioè

$$\mathbf{0} = f(\bar{x}) . \quad (10.5)$$

---

della forzante  $\underline{f}(t)$  alla trasformata di Fourier  $\hat{x}(\omega)$  dello stato (o dell'uscita)  $x(t)$  del sistema,

$$\hat{x}(\omega) = [-i\omega \underline{I} + \underline{\underline{A}}]^{-1} \underline{\underline{B}} \hat{f}(\omega) = \mathcal{R}(\omega) \hat{f}(\omega) \quad \rightarrow \quad \mathcal{R}(\omega) = [-i\omega \underline{I} + \underline{\underline{A}}]^{-1} . \quad (10.2)$$

<sup>2</sup>Conoscendo lo stato del sistema **con esattezza** è possibile descrivere l'evoluzione libera del sistema, in assenza di perturbazioni e forze esterne. In fondo a questa sezione, sarà più chiara la necessità di conoscere *con esattezza* lo stato iniziale del sistema, per prevederne l'evoluzione.

Un ciclo limite di periodo  $T$  è una traiettoria periodica del sistema, tale per cui

$$\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t) \quad , \quad \forall t , \quad (10.6)$$

rappresentata nello spazio delle fasi da un'orbita chiusa (e isolata).

**Stabilità alla Lyapunov.** Lo studio di stabilità alla Lyapunov riguarda l'evoluzione locale del sistema dinamico con **condizioni iniziali perturbate**. Qualitativamente, un punto di equilibrio è stabile se, partendo da uno stato “vicino” all'equilibrio, lo stato del sistema rimane per sempre “vicino” all'equilibrio. Inoltre, l'equilibrio è asintoticamente stabile se lo stato converge verso il punto di equilibrio,  $\mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$  per  $t \rightarrow \infty$ .

La stabilità di Lyapunov di un equilibrio può essere indagata attraverso l'analisi degli autovalori del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio.

**Stabilità strutturale.** La stabilità strutturale considera l'evoluzione del sistema in seguito a perturbazioni del sistema stesso. Un sistema dinamico è strutturalmente stabile se le traiettorie nel suo spazio delle fasi non cambiano qualitativamente: ad esempio, in un sistema strutturalmente stabile alla perturbazione di un parametro, non cambiano il numero dei punti di equilibrio e cicli limite.

### Sistema dinamico di Lorenz

In questa sezione si descrive, senza nessuna pretesa di completezza, lo studio di stabilità del sistema dinamico di Lorenz,

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} = -Y + \rho X - XZ \\ \dot{Z} = -\beta Z + XY , \end{cases} \quad (10.7)$$

come primo esempio di studio di stabilità di un sistema fluidodinamico. Si studia la stabilità del sistema di Lorenz al variare del parametro  $\rho$ , mantenendo costante il valore dei parametri  $\sigma$  e  $\beta$ . Lorenz usò come valori  $\sigma = 10$  e  $\beta = 8/3$ . Il numero di Prandtl assume un valore paragonabile a quello dell'acqua alla temperatura di  $20^\circ C$ , che vale circa  $Pr \approx 7$ . Il numero di Prandtl per l'aria e altri gas vale circa 0.7. Il valore  $\beta = 8/3$  corrisponde a un numero d'onda fondamentale in direzione  $x$  uguale a  $\frac{k}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{\beta} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.3536$ .

### Punti di equilibrio

I punti di equilibrio del sistema di Lorenz soddisfano le equazioni stazionarie

$$\begin{cases} 0 = -\sigma X + \sigma Y & \rightarrow Y = X \\ 0 = -Y + \rho X - XZ & \searrow \rightarrow X[X^2 - (\rho - 1)] = 0 \\ 0 = -\beta Z + XY & \rightarrow X^2 = \beta Z \nearrow \end{cases} \quad (10.8)$$

L'equazione  $X(X^2 - \rho) = 0$  ha una sola soluzione reale se  $\rho < 1$ , tre soluzioni per  $\rho \geq 1$ . Quindi per valori di  $\rho < 1$  esiste un unico punto di equilibrio,

$$\mathbf{E1}: (\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{Z}_1) = (0, 0, 0) . \quad (10.9)$$

Per valori di  $\rho \geq 1$  esistono tre punti di equilibrio,

$$\begin{aligned} \mathbf{E1}: & (\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{Z}_1) = (0, 0, 0) , \\ \mathbf{E2}: & (\bar{X}_2, \bar{Y}_2, \bar{Z}_2) = (-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1) , \\ \mathbf{E3}: & (\bar{X}_3, \bar{Y}_3, \bar{Z}_3) = (+\sqrt{\beta(\rho - 1)}, +\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1) . \end{aligned} \quad (10.10)$$

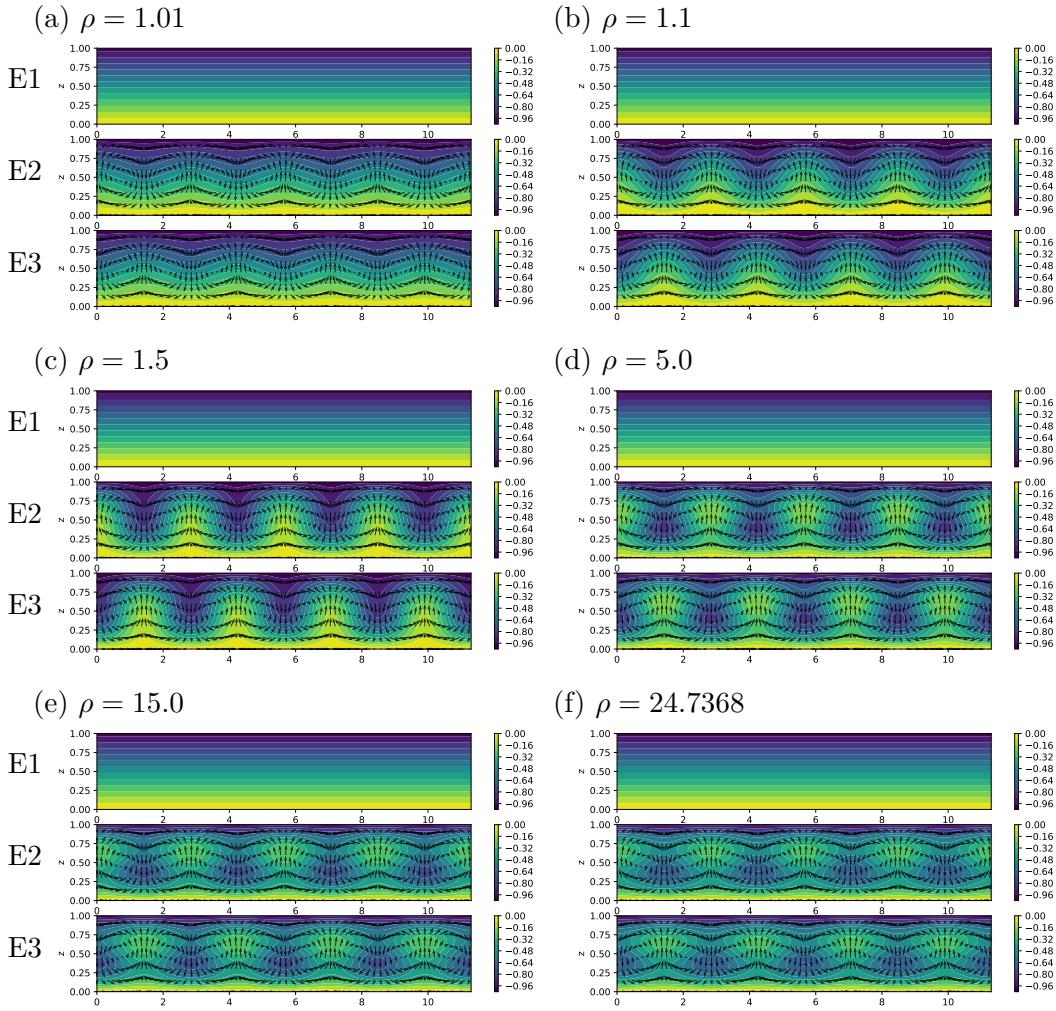


Figura 10.1: Equilibri del sistema di Lorenz per diversi valori del parametro  $\rho > 1$ . Il campo vettoriale della velocità è sovrapposto al campo di temperatura “scalato”  $\tilde{T} = \frac{T(x,z) - T_w}{\delta T}$ , i cui valori al contorno sono  $\tilde{T}_w = 0$  sulla superficie inferiore a  $z = 0$  e  $\tilde{T}_c = -1$  sulla superficie superiore a  $z = 1$ .

I campi di velocità e temperatura degli equilibri del sistema fisico corrispondenti ai punti di equilibrio del sistema di Lorenz sono raffigurati in figura 10.1. L’equilibrio **E1** rappresenta la soluzione statica, il cui campo di velocità è nullo: non sono presenti moti convettivi e la trasmissione della temperatura avviene solo per conduzione (diffusione). Questo equilibrio è stabile per valori del parametro  $\rho < 1$ . Per valori  $\rho > 1$  questo equilibrio diventa instabile e nascono i due equilibri “simmetrici” **E2,3** che rappresentano dei moti convettivi stabili, traslati tra di loro di metà della lunghezza d’onda  $\frac{k}{2}$ : i moti convettivi tendono a portare il fluido caldo dalla parete inferiore (a temperatura maggiore, per  $\rho > 0$ , corrispondente a  $Ra > 0$ , e quindi  $\Delta T = T_w - T_c > 0$ ) verso la parete superiore. La nascita di due equilibri stabili in corrispondenza di un cambio di stabilità di un equilibrio esistente è caratteristico dei sistemi dotati di simmetria.<sup>3</sup> Questo cambiamento qualitativo nel piano delle fasi,

<sup>3</sup> Un esempio strutturale è quello della trave caricata di punta a compressione. Per valori limitati del carico esiste un’unica soluzione, stabile, rappresentata dalla trave senza freccia. Quando il carico di compressione supera il valore critico, questa soluzione diventa instabile. Nel problema piano, nascono due configurazioni di equilibrio stabili del sistema strutturale: la trave può inflettersi (in maniera indifferente in

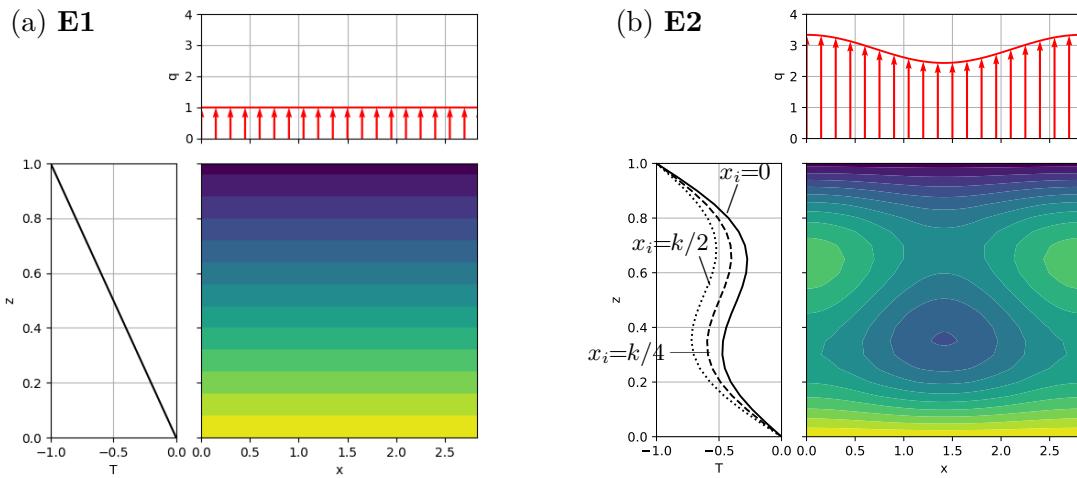


Figura 10.2: Distribuzione della tempreatuta nel dominio  $T(x, z)$ , andamento della temperatura  $T(x_i, z)$  in funzione della coordinata  $z$ , flusso di calore  $q = -k \partial T / \partial z(x, 1)$  per conduzione sulla superficie superiore, normalizzato sul valore del flusso dell'equilibrio “statico” **E1**: (a) equilibrio instabile **E1**, (b) equilibrio marginalmente stabile **E2** per  $\rho = 24.7368$ .

corrisponde alla *biforcazione pitchfork* che verrà descritta, almeno brevemente, nelle sezioni successive.

I moti convettivi rappresentati dagli equilibri **E2,3** contribuiscono al mescolamento del fluido e a una maggiore trasmissione del calore tra le due superfici. Calcolando il flusso di calore trasmesso attraverso le superfici che delimitano il dominio in  $z = 0$  e  $z = 1$ , si può verificare che la convezione è un fenomeno fisico più efficiente per la trasmissione del calore nei fluidi rispetto alla conduzione, come mostrato in figura 10.2. Per esempio, il problema della trasmissione del calore tra due superfici parallele separate da un fluido si trova nella costruzione di infissi con **doppi vetri**: lo scopo dei doppi vetri separati da una sottile intercapedine d’aria è quello di sfruttare l’aria (ferma!) come ottimo isolante termico. L’intercapedine tra i due vetri deve essere sufficiente piccola da impedire la nascita dei moti convettivi, che ridurrebbero l’efficienza dell’infisso (e l’efficienza energetica della casa). Le soluzioni convettive nel problema di Lorenz nascono quando il parametro  $\rho$  supera il valore critico  $\rho_{cr} = 1$ . Il parametro  $\rho$  è proporzionale al numero di Rayleigh,

$$\rho \sim Ra = \frac{\alpha g \Delta Th^3}{\nu D}, \quad (10.11)$$

e quindi proporzionale al cubo della distanza tra le due superfici,  $\rho \sim h^3$ . Si ricava la stessa conclusione utilizzata nella costruzione dei doppi vetri: per distanze  $h$  tra le due superfici limitate, il parametro  $\rho$  è inferiore del valore critico e l’unica soluzione stabile esistente è quella isolante di fluido in quiete.

Prima di studiare la stabilità locale “alla Lyapunov” dei punti di equilibrio, riprendendo la definizione di *stabilità strutturale* si scopre che il sistema di Lorenz non è strutturalmente stabile a perturbazioni del valore di  $\rho$ , quando  $\rho = 1$ : infatti per  $\rho < 1$  esiste un solo punto assenza di imperfezioni) verso destra o verso sinistra.

di equilibrio, per  $\rho > 1$  esistono tre punti di equilibrio e di conseguenza le traiettorie nel piano delle fasi subiscono un cambiamento qualitativo.

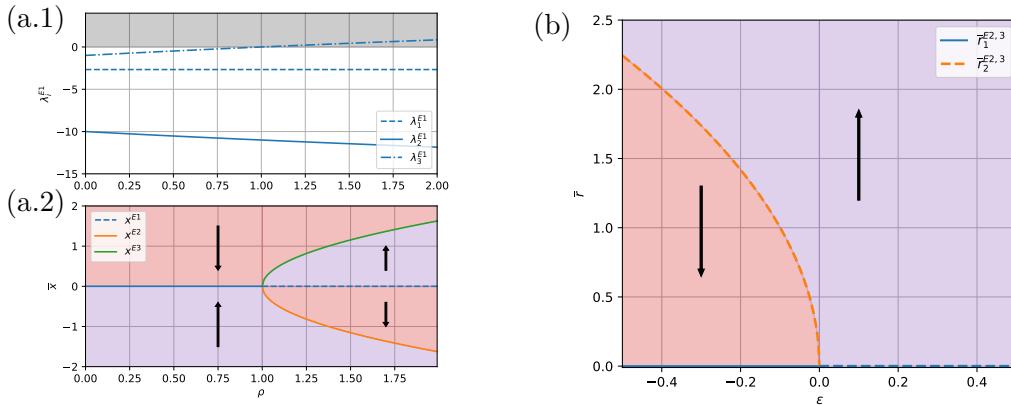


Figura 10.3: Diagrammi di biforcazione. (a) Biforcazione pitchfork per  $\rho = 1$ : (a.1) luogo delle radici dell'equilibrio **E1** e (a.2) diagramma di biforcazione. Per  $\rho = 1$  l'equilibrio **E1** diventa instabile e nascono i due equilibri stabili **E2,3**. (b) Biforcazione di Hopf degli equilibri **E2,2**: diagramma di biforcazione, rappresentato utilizzando la forma normale. Per  $\epsilon = 0$ ,  $\rho = 24.7368$ , il ciclo limite instabile collassa sull'equilibrio stabile, che diventa instabile.

### Stabilità dell'equilibrio **E1**

Si studia la stabilità “alla Lyapunov” dell’equilibrio **E1**:  $(0, 0, 0)$ . Linearizzando il sistema non lineare di Lorenz attorno all’equilibrio **E1**, si ottiene il sistema linearizzato

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \\ \delta \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}, \quad \delta \dot{x} = \mathbf{J}|_{\mathbf{E}1} \delta \mathbf{x} \quad (10.12)$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) &= -(\beta + \lambda)[(\sigma + \lambda)(1 + \lambda) - \sigma\rho] = \\ &= -(\beta + \lambda)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - \rho)]. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Gli autovalori del sistema linearizzato attorno al primo equilibrio sono quindi

$$\lambda_1^{E1} = -\beta, \quad \lambda_{2,3}^{E1} = -\frac{\sigma+1}{2} \mp \frac{\sqrt{(\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-\rho)}}{2}. \quad (10.14)$$

Per valori positivi dei parametri, tutti gli autovalori sono reali. Gli autovalori  $\lambda_1^{E1}$  e  $\lambda_2^{E1}$  sono negativi per ogni valore di  $\rho$ , mentre l’autovalore  $\lambda_3^{E1}$  cambia segno per  $\rho = 1$ , come mostrato in figura 10.3(a.1). L’analisi lineare di stabilità permette di concludere che l’equilibrio **E1** è linearmente stabile per  $\rho < 1$  e instabile per  $\rho > 1$ , mentre non permette di affermare nulla sul caso  $\rho = 1$ .

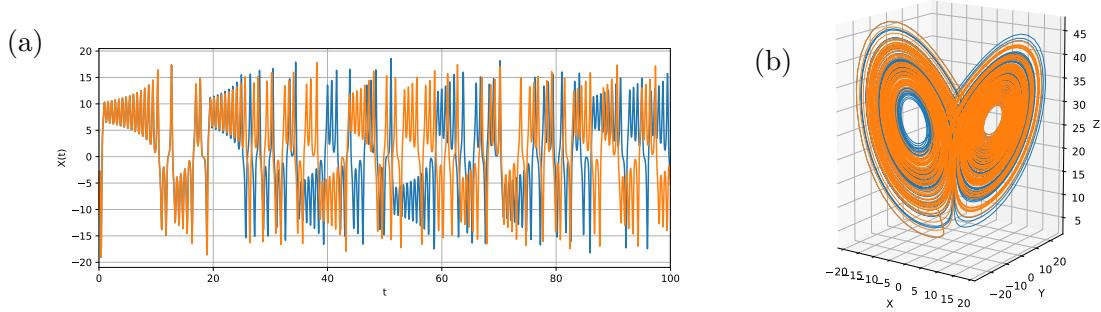


Figura 10.4: Dinamica caotica del sistema di Lorenz per  $\rho = 24.74$ : evoluzione del sistema con condizioni iniziali  $\mathbf{x}_0^{(1)} = (-10, 10, 1)$ , in blu, e  $\mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(1)} + 1.0 \cdot 10^{-9}$ , in arancione. (a) Evoluzione temporale della variabile  $X(t)$ : partendo da due condizioni iniziali “vicine”, le due traiettorie del sistema si discostano in maniera “non banale”. Il sistema dimostra un’evoluzione non periodica, estremamente sensibile alle condizioni iniziali e quindi caotica. (b) Attrattore di Lorenz nello spazio delle fasi: le traiettorie nello spazio delle fasi rivelano la presenza di un attrattore, “nelle vicinanze” del quale si svolge la dinamica asintotica del sistema.

### Stabilità degli equilibri E2, E3

Per valori di  $\rho \geq 1$  esistono i due equilibri **E2**, **E3**. Si studia la loro stabilità “alla Lyapunov” tramite lo studio degli autovalori del sistema linearizzato attorno ai punti di equilibrio,

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \pm\sqrt{\beta(\rho-1)} & \pm\sqrt{\beta(\rho-1)} & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}, \quad \delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}|_{\mathbf{E2,3}} \delta\mathbf{x}. \quad (10.15)$$

Si può dimostrare (con il criterio di Routh-Hurwitz analiticamente, o calcolandone numericamente il valore) che i due punti di equilibrio sono stabili se  $\rho < \frac{\sigma(\sigma+\beta+3)}{\sigma-1-\beta} \approx 24.7368$ , utilizzando i valori  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$ .

### Biforcazioni, cicli limite e attrattori strani

L’analisi degli autovalori del sistema linearizzato attorno ai punti di equilibrio permette di determinarne le caratteristiche locali quando gli autovalori hanno parte reale diversa da zero. In corrispondenza del cambio di stabilità di un punto di equilibrio e/o della comparsa/scomparsa di punti di equilibrio (ma non solo!), le traiettorie nello spazio delle fasi del sistema subiscono un cambiamento qualitativo: il sistema non è strutturalmente stabile e si verifica una **biforcazione**.

Per studiare la stabilità locale di un equilibrio in presenza di autovalori a parte reale nulla è necessario costruire un’approssimazione non lineare del sistema. Si considera un punto di equilibrio per il quale il sistema linearizzato non ha autovalori instabili, ha  $N_s$  autovalori stabili e  $N_c$  autovalori a parte reale nulla e si vuole determinare l’evoluzione del sistema nelle vicinanze del punto di equilibrio. Si può dimostrare che la dinamica del sistema  $N = N_s + N_c$ -dimensionale si riduce velocemente alla dinamica di un sistema  $N_c$  dimensionale: le  $N_s$  dinamiche asintoticamente stabili associate agli autovalori con parte reale negativa tendono asintoticamente ad annullarsi nell’intorno dell’equilibrio, mentre rimangono solo le dinamiche associate alle  $N_c$  dinamiche marginalmente stabili.

Si può usare un’espansione polinomiale per approssimare il sistema non lineare originale e

costruire la **varietà centrale**, cioè la regione dello spazio delle fasi nella quale si svolgono le dinamiche marginalmente stabili.

Ad esempio, quando  $\rho = 1$  il sistema di Lorenz nell'intorno dell'equilibrio **E1** (e dei nascenti equilibri **E2,3**) può essere ricondotto alla dinamica del sistema monodimensionale

$$\dot{a}(t) = f(a(t)) = a(t)[\alpha\varepsilon - \beta a(t)^2] \quad , \quad \text{con } \varepsilon := \rho - 1 , \quad (10.16)$$

con  $\alpha \approx 0.909$  e  $\beta \approx 0.170$ . Questo sistema coincide alla **forma normale** della biforcazione, cioè il sistema più semplice in grado di descrivere il cambiamento qualitativo del sistema. Lo studio della forma normale della biforcazione rivela l'esistenza di un unico equilibrio stabile  $\bar{a}_1 = 0.0$  per  $\varepsilon \leq 0$ , cioè  $\rho \leq 1$ . Per  $\rho > 1$  l'equilibrio  $\bar{a}_1$  diventa instabile e nascono due equilibri stabili  $\bar{a}_{2,3} = \mp\sqrt{\alpha\varepsilon/\beta}$ . L'equazione (10.16) rappresenta la forma normale di una *biforcazione pitchfork*. Poiché  $\beta > 0$ , la biforcazione si definisce *supercritica*.

Analogamente, quando  $\rho \approx 24.7368$  i due equilibri **E2,3** cambiano stabilità: una coppia di autovalori complessi coniugati attraversa l'asse immaginario e la loro parte reale diventa positiva. Questo tipo di instabilità strutturale viene definita *biforcazione di Hopf*: cambia la stabilità del punto di equilibrio considerato e nasce/sparisce un ciclo limite nel suo intorno (il ciclo limite nasce da o si riduce al punto di equilibrio). L'approssimazione sulla varietà centrale del sistema attorno a uno dei due equilibri conduce al sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = \alpha_r r\varepsilon - \beta_r r^3 \\ \dot{\theta}(t) = \omega + \alpha_i \varepsilon + \beta_i r^2 \end{cases} \quad , \quad \text{con } \varepsilon := \rho - 24.7368 , \quad (10.17)$$

dove è stata utilizzata la rappresentazione polare complessa  $a(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$  della variabile  $a(t)$  che descrive la dinamica del sistema ridotta alla varietà centrale. Il parametro  $\omega = 9.6245$  coincide con la parte immaginaria degli autovalori marginalmente stabili e gli altri parametri valgono:

$$\begin{aligned} \alpha_r &= 0.0302 & \beta_r &= -0.003 \\ \alpha_i &= 0.1815 & \beta_i &= -0.028 . \end{aligned} \quad (10.18)$$

La prima equazione delle (10.17) è identica all'equazione che descrive la biforcazione pitchfork. In questo caso, però, il coefficiente  $\beta_r$  è minore di zero. Questo tipo di biforcazione si definisce *subcritica*. Si può facilmente dimostrare che per  $\varepsilon < 0$  esistono due (il raggio  $r$  di una rappresentazione polare deve essere  $\geq 0$ ) equilibri

$$\bar{r}_1 = 0 \quad , \quad \bar{r}_2 = \sqrt{-\alpha_r \varepsilon / \beta_r} . \quad (10.19)$$

Il primo equilibrio dell'equazione in  $r$  corrisponde a un punto fisso, poiché il raggio è nullo. Il secondo equilibrio corrisponde al raggio  $\bar{r}_2$  del ciclo limite esistente per  $\varepsilon < 0$ . Si dimostra quindi che un ciclo limite instabile coesiste con ognuno dei due punti di equilibri stabili **E2,3** per  $\varepsilon < 0$  (cioè  $\rho < 24.7368$ ), almeno in un intervallo finito di valori di  $\rho$ . Quando  $\varepsilon = 0$  (cioè  $\rho < 24.7368$ ), il ciclo limite instabile si riduce al punto di equilibrio. Per  $\varepsilon > 0$  il punto di equilibrio diventa instabile, mentre scompare il ciclo limite.

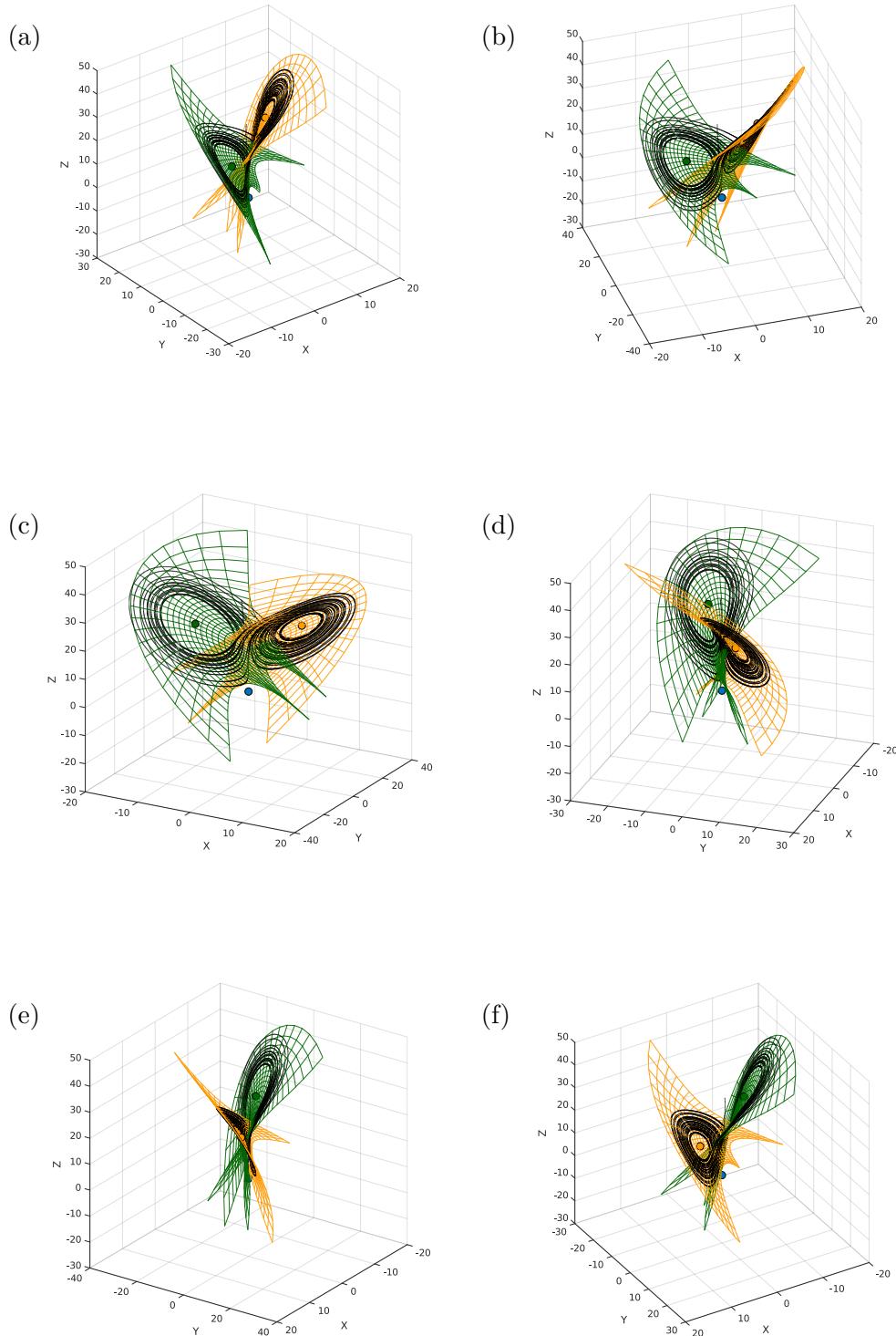


Figura 10.5: Evoluzione del sistema di Lorenz per  $\rho = 24.7368$  nel piano delle fasi. Dinamica caotica, equilibri (**E1** in azzurro, **E2** in arancione e **E3** in verde) e varietà centrali dei due equilibri marginalmente stabili **E2,3**. La dinamica asintotica del sistema caotica del sistema alterna in maniera irregolare delle oscillazioni attorno ai due equilibri instabili sulle “nelle vicinanze” delle rispettive varietà centrali.

Rimangono aperte alcune questioni: è possibile descrivere i cicli limite esistenti per (alcuni) valori del parametro  $\rho < 24.7368$ ? Qual è l'evoluzione del sistema per valori di  $\rho > 24.7368$ ? Ha senso utilizzare il modello di Lorenz, un brutale troncamento di un sistema continuo che dà origine a un sistema tridimensionale, per descrivere l'evoluzione del sistema fisico per valori crescenti del numero di Rayleigh  $Ra$ , e quindi del parametro  $\rho$ ?

Partendo dall'espressione approssimata del ciclo limite ottenuta dalla forma normale della biforcazione di Hopf per  $\rho \lesssim 24.7368$  è possibile calcolare la forma del ciclo limite per valori inferiori del parametro, tramite tecniche di **continuazione**: negli algoritmi di continuazione la soluzione di un problema, nota per un valore del parametro, viene utilizzata per stimare la guess iniziale dello stesso problema per un valore diverso del parametro. In particolare, per identificare la traiettoria periodica corrispondente a un ciclo limite si può utilizzare una tecnica di **bilanciamento armonico**: la traiettoria periodica viene scritta come serie di Fourier, della quale è necessario determinare i coefficienti.

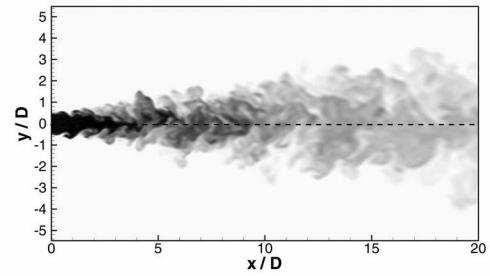
Per valori di  $\rho > 24.7368$  non esistono punti di equilibrio stabili punti di equilibrio stabili e non esistono cicli limite stabili. La dinamica del sistema rimane confinata in una regione limitata dello spazio delle fasi, senza divergere. L'evoluzione del sistema rappresentata in figura 10.4 dimostra l'elevata sensibilità della soluzione alle condizioni iniziali e l'assenza di equilibri o dinamiche periodiche stabili, caratteristici di un **regime caotico**. L'evoluzione di lungo tempo del sistema avviene “nelle vicinanze” dell'attrattore di Lorenz, del quale si può intuire la forma grazie alle traiettorie rappresentate in figura 10.4(b). La figura 10.5 rappresenta la traiettoria del sistema di Lorenz e le *varietà centrali* dei due equilibri **E2,3** marginalmente stabili per  $\rho = 24.7368$ . Qualitativamente, lo stato del sistema viene attratto su queste superfici, lungo le direzioni stabili. Su queste superfici poi, si può osservare la dinamica marginalmente stabile (di dimensione ridotta: per il sistema di Lorenz, di dimensione 2, invece della dimensione 3 del sistema completo) del sistema: lo stato del sistema inizialmente oscilla attorno all'equilibrio **E2** (ad esempio), prima di essere attratta in maniera “difficilmente prevedibile” dalla varietà centrale dell'equilibrio **E3** e iniziare ad oscillare attorno a quest'ultimo equilibrio.

L'approssimazione di Lorenz di dimensioni ridotte del sistema fisico continuo (e quindi di dimensione infinita) perde significato all'aumentare del numero di Rayleigh: all'aumentare del numero di Rayleigh infatti si attivano delle dinamiche più complesse, di dimensione maggiore, non descrivibili a un sistema tridimensionale.

### 10.1.3 ...

**Esercizio 10.1 — Getto piano turbolento.** Calcolare la soluzione in similitudine per un getto turbolento piano.

**Concetti.** Equazioni mediate di Reynolds. Equazioni di Prandtl per lo strato limite turbolento. Correnti debolmente non parallele. Soluzioni in similitudine. Entrainment.



### Soluzione

Si descrive schematicamente il procedimento:

- Il problema turbolento viene descritto dalle equazioni mediate di Reynolds.
- I problemi di "strato limite" possono essere ben descritti dalle equazioni di Prandtl, ricavabili grazie a ragionamenti sugli ordini di grandezza, analoghe alle equazioni di Prandtl laminari.
- Viene introdotta una variabile di similitudine  $\eta$ ; si ipotizza la forma della soluzione:  $u = U_0 f$ ,  $\langle u'v' \rangle = U_0^2 g$
- Vengono calcolati i flussi integrali di massa, quantità di moto ed energia cinetica.
- Si inserisce l'ansatz sulla soluzione nelle equazioni di Prandtl per ottenere un'equazione per i profili similiari di velocità  $f$  e degli sforzi turbolenti  $g$ . Si ricava l'andamento dello spessore dello  $\delta(x)$  "strato limite", necessario affinché esista una soluzione simile.
- Per ottenere una equazione chiusa, si introduce l'ipotesi di Boussinesq, che lega  $f$  e  $g$ . Infine si risolve, con le opportune condizioni al contorno, l'equazione in  $f$ .

### Svolgimento.

- Il punto di partenza del problema sono le equazioni mediate di Reynolds (RANS)

$$\begin{cases} (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \nabla \cdot (\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}') - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{U} + \nabla P = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \end{cases} \quad (10.20)$$

ottenibili inserendo la decomposizione di Reynolds delle variabili in moto medio e fluttuazione  $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$  all'interno delle equazioni di Navier-Stokes.

Se si considera un problema bidimensionale (per le grandezze medie), le RANS in coordinate cartesiane sono

$$\begin{cases} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'u' \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v'v' \rangle}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (10.21)$$

- Per problemi "di strato limite" le equazioni RANS possono essere semplificate, considerando gli ordini di grandezza delle coordinate e dei campi che compaiono all'interno delle equazioni. Per la regione "interna" (la lunghezza caratteristica in  $y$  è "molto minore" di quella in  $x$ ), assumendo che la pressione "esterna" sia costante e

trascurando i termini di fluttuazione con contributo minore

$$\begin{cases} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (10.22)$$

Da queste prime semplificazioni, a differenza delle equazioni di strato limite per il caso laminare, la pressione non è funzione solo della coordinata  $x$ , ma  $P + \langle v'^2 \rangle$  è funzione solo di  $x$ . Con ulteriori considerazioni sui termini di fluttuazione nel caso di getti, è possibile scrivere in prima approssimazione

$$\begin{cases} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \\ P + \langle v'^2 \rangle = P_0(x) \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (10.23)$$

avendo indicato con  $P_0(x)$  la pressione del problema esterno e avendo usato l'approssimazione  $\partial P / \partial x = \partial P_0 / \partial x - \partial \langle v'^2 \rangle / \partial x \simeq \partial P_0 / \partial x = 0$ . Le fluttuazioni nel problema esterno sono considerate nulle.

Prima di procedere con la ricerca di soluzioni in similitudine, viene fatta l'ultima ipotesi: consideriamo numeri di Reynolds sufficientemente alti da rendere trascurabile l'effetto degli sforzi viscosi del moto medio rispetto agli effetti delle fluttuazioni.

$$\begin{cases} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} = 0 \\ P + \langle v'^2 \rangle = P_0(x) \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (10.24)$$

- Partendo dalle equazioni di Prandtl turbolente semplificate, si introduce la variabile di similitudine

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)} \quad (10.25)$$

con  $\delta(x)$  una grandezza caratteristica (convenzionale) della sezione del getto; si ipotizzano poi il profilo di velocità della componente  $x$  della velocità e del termine di fluttuazione  $\langle u'v' \rangle$ :

$$\begin{aligned} U(x, y) &= U_0 f(\eta(x, y)) \\ \langle u'v' \rangle(x, y) &= U_0^2 g(\eta(x, y)) \end{aligned} \quad (10.26)$$

Si calcola la derivata parziale di  $U$  in  $x$ , che verrà usata in seguito:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= U'_0(x) f(\eta) - U_0(x) \frac{y \delta'(x)}{\delta^2(x)} f'(\eta) = \\ &= U'_0(x) f(\eta) - U_0(x) \frac{\delta'(x) \eta}{\delta(x)} f'(\eta) \end{aligned} \quad (10.27)$$

Tramite il vincolo di incompressibilità si ricava la forma della componente  $V$  della velocità. Nel trasformare l'integrale su  $y$  in un integrale su  $\eta$ , si usa  $y = \delta(x)\eta$ ,  $d\xi = \delta(x)d\chi$ .

$$\begin{aligned} V(x, y) - \underbrace{V(x, 0)}_{=0} &= \int_{\xi=0}^y \frac{\partial V(x, \xi)}{\partial y} d\xi = - \int_{\xi=0}^y \frac{\partial U(x, \xi)}{\partial x} = \\ &= - \int_{\chi=0}^{\eta} \left[ U'_0(x)f(\chi) - U_0(x) \frac{\delta'(x)\chi}{\delta(x)} f'(\chi) \right] \delta(x) d\chi = (10.28) \\ &= - \int_{\chi=0}^{\eta} [\delta(x)U'_0(x)f(\chi) - U_0(x)\delta'(x)\chi f'(\chi)] d\chi \end{aligned}$$

- Prima di scrivere le equazioni di Prandtl per le variabili adimensionali, conviene calcolare il flusso di quantità di moto in direzione  $x$  attraverso dei piani verticali. Questo consente di trovare una relazione tra  $U_0$  e  $\delta$  da usare in seguito.

$$Q = \rho \int_{y=-\infty}^{\infty} U^2(x, y) dy \quad (10.29)$$

Si calcola la derivata in direzione  $x$  di  $Q$ , usando le equazioni di Prandtl della componente  $x$  della quantità di moto:

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d}{dx} \rho \int_{y=-\infty}^{\infty} U^2(x, y) dy = \rho \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{\partial U^2}{\partial x} dy = -\rho \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} dy = 0 \quad (10.30)$$

se si considera un fluido in quiete all'infinito. Utilizzando i profili in similitudine

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dQ}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{y=-\infty}^{\infty} U^2 dy = \\ &= \frac{d}{dx} \left( U_0^2(x) \delta(x) \right) \int_{\eta=-\infty}^{\infty} f^2(\eta) d\eta \quad (10.31) \end{aligned}$$

Deve quindi essere  $\frac{d}{dx}(U_0^2 \delta) = 0$ , cioè

$$2U_0 U'_0 \delta + U_0^2 \delta' = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \frac{U'_0}{U_0} = -\frac{1}{2} \delta' \quad (10.32)$$

- Inseriamo ora la forma di  $U$ ,  $V$ ,  $\langle u'v' \rangle$  espresse in termini della variabile e delle funzioni di similitudine nella componente  $x$  dell'equazione della quantità di moto.

$$U_0 f \left[ U'_0 f - U_0 \frac{\delta'}{\delta} \eta f' \right] - \left[ \int_{\chi=0}^{\eta} [\delta(x)U'_0(x)f(\chi) - U_0(x)\delta'(x)\chi f'(\chi)] d\chi \right] \frac{U_0}{\delta} f' + \frac{U_0^2}{\delta} g' = 0 \quad (10.33)$$

Moltiplicando per  $\frac{\delta}{U_0^2}$  e integrando per parti l'integrale che contiene  $\eta f'(\eta)$

$$\delta \frac{U'_0}{U_0} f^2 - \delta' \eta f f' - \delta \frac{U'_0}{U_0} f' \int_0^{\eta} f d\chi + \delta' f'(\eta) [\chi f(\chi)] \Big|_0^{\eta} - \delta' f(\eta) \int_0^{\eta} f(\chi) d\chi + g'(\eta) = 0 \quad (10.34)$$

Usando la relazione tra  $U_0$  e  $\delta$  trovata al punto precedente è possibile scrivere l'equazione come

$$\frac{1}{2}\delta'(x) \left[ f^2(\eta) + f'(\eta) \int_{\chi=0}^{\eta} f(\chi)d\chi \right] = g'(\eta) \quad (10.35)$$

Affinchè sia possibile trovare una soluzione in similitudine, non ci possono essere coefficienti dipendenti da  $x$  o  $y$  se non tramite  $\eta$ . Deve quindi essere:

$$\delta'(x) = S \quad \Rightarrow \quad \delta(x) = S(x - x_0) \quad (10.36)$$

Seguendo questo procedimento è stato possibile ottenere una stima dell'evoluzione in  $x$  della grandezza trasversale caratteristica  $\delta(x)$ : la grandezza trasversale caratteristica di un getto turbolento è lineare in  $x$ . Dalla costanza del flusso di quantità di moto  $U_0^2(x)\delta(x) = \text{cost}$  e quindi la velocità caratteristica del getto evolve come

$$U_0(x) \sim x^{-1/2} \quad (10.37)$$

- Come fatto in precedenza per il flusso di quantità di moto (costante in  $x$ ), vengono calcolate le derivate in  $x$  dei flussi di massa e di energia cinetica del moto medio per la soluzione in similitudine attraverso piani perpendicolari all'asse  $x$ . Il flusso di massa  $M$  è:

$$M = \rho \int_{y=-\infty}^{\infty} U dy = \rho U_0(x) \delta(x) \int_{\eta=-\infty}^{\infty} f(\eta) d\eta \sim x^{1/2} \quad (10.38)$$

$$\frac{dM}{dx} \sim x^{-1/2} > 0, \quad \text{per } x > 0$$

Il flusso di massa aumenta allontanandosi dall'ugello. Il getto riesce a “trascinare” anche del fluido che non esce dall'ugello (entrainment). Il flusso di energia cinetica del moto medio è:

$$E = \frac{1}{2} \rho \int_{y=-\infty}^{\infty} U^3 dy = \frac{1}{2} \rho U_0^3(x) \delta(x) \int_{\eta=-\infty}^{\infty} f^3(\eta) d\eta \sim x^{-1/2} \quad (10.39)$$

$$\frac{dE}{dx} \sim -x^{-3/2} < 0, \quad \text{per } x > 0$$

Il flusso di energia cinetica del moto medio diminuisce allontanandosi dall'ugello, nonostante l'equazioni utilizzate nella soluzione in similitudine non contengano il termine dissipativo degli sforzi viscosi, che quindi non può avere nessuna influenza sulla diminuzione di energia cinetica del moto medio: l'energia del moto medio viene trasferita alle fluttuazioni di velocità. Scrivendo le equazioni di bilancio dell'energia cinetica del moto medio e dell'energia cinetica delle fluttuazioni (energia turbolenta) si trovano due termini opposti: il termine che in generale fa diminuire l'energia cinetica del moto medio, si trova nell'equazione dell'energia turbolenta con segno opposto.

- Nell'eq. 10.34, anche dopo aver sostituito  $\delta' = S$ , rimangono due equazioni incognite  $f(\eta)$ ,  $g(\eta)$ . Così come le RANS non sono un problema chiuso, anche il problema semplificato non è chiuso. Per ottenere una soluzione si può introdurre l'ipotesi di Boussinesq (validità di questa ipotesi? Nessuna giustificazione rigorosa ...) per

esprimere il termine di fluttuazioni in funzione del moto medio. Per il getto piano, l'ipotesi di Boussinesq si riduce a

$$-\langle u'v' \rangle = \nu_T \frac{\partial U}{\partial y} \quad (10.40)$$

avendo indicato con  $\nu_T$  la viscosità turbolenta.

$$-U_0^2 g(\eta) = \nu_T \frac{U_0}{\delta(x)} f(\eta) \quad (10.41)$$

$$g(\eta) = -\frac{\nu_T}{U_0(x)\delta(x)} f(\eta) \quad (10.42)$$

$$(10.43)$$

Fatte già molte ipotesi (non tutte con fondamento fisico), facciamo l'ultima ipotesi che consente di ottenere una soluzione in forma chiusa del problema. Si ipotizza che

$$\hat{\nu}_T = \frac{\nu_T}{U_0(x)\delta(x)} = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad g(\eta) = -\nu_T f'(\eta) \quad (10.44)$$

### La validità di queste ipotesi andrà controllata a posteriori.

L'equazione in  $f(\eta)$  diventa:

$$\frac{1}{2} S \left[ f^2(\eta) + f'(\eta) \int_{\chi=0}^{\eta} f(\chi) d\chi \right] = -\hat{\nu}_T f'''(\eta) \quad (10.45)$$

Si introduce la funzione  $F(\eta) = \int_{\chi=0}^{\eta} f(\chi) d\chi$  per eliminare il termine integrale e ottenere un'equazione differenziale in  $F(\eta)$  (osservare che  $F'(\eta) = f(\eta)$  e  $F(0) = 0$  poiché l'intervallo di integrazione ha dimensione nulla):

$$\frac{1}{2} S (F'^2 + F''F) = -\hat{\nu}_T F''' \quad (10.46)$$

$$\frac{1}{2} S (F'F)' = -\hat{\nu}_T F''' \quad (10.47)$$

$$(10.48)$$

Le condizioni di simmetria sull'asse del getto sono

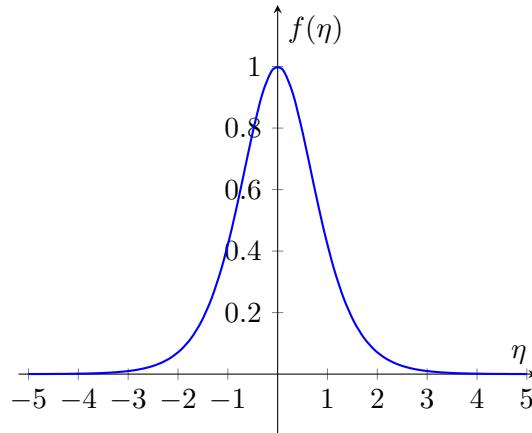
$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(\eta=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad F''(\eta=0) = 0 \quad (10.49)$$

Si integra ora due volte. Dopo aver integrato la prima volta, la prima costante di integrazione è nulla dalle condizioni  $F(0) = 0$ ,  $F''(0) = 0$ . Si integra la seconda volta e si definisce la velocità di riferimento  $U_0(x)$  (fino ad ora generica) con la condizione  $F'(0) = f(0) = 1$ : ricordando  $U(x, y) = U_0(x)f(\eta(x, y))$ , si ottiene che  $U_0(x)$  è la velocità sull'asse ( $y = 0, \eta = 0$ ).

$$\frac{1}{2} S F'(\eta) F(\eta) + \hat{\nu}_T F''(\eta) = C \stackrel{\text{b.c}}{=} 0 \quad ((F^2)' = 2FF') \quad (10.50)$$

$$\frac{1}{4} S (F^2)' + \hat{\nu}_T F'' = 0 \quad (\text{integrare...}) \quad (10.50)$$

$$F' = -\frac{S}{4\hat{\nu}_T} F^2 + B \stackrel{F'(0)=1}{=} 1 - \frac{S}{4\hat{\nu}_T} F^2$$



Profilo di velocità similare  $f(\eta)$  in variabile di similitudine  $\eta$ .

Integrando un’ultima volta si ottiene la soluzione  $F(\eta)$ , la cui derivata  $f(\eta)$  è il profilo in similitudine della velocità  $U$

$$F(\eta) = \frac{1}{\alpha} \tanh(\alpha\eta) \quad \Rightarrow \quad f(\eta) = \frac{1}{\cosh^2(\alpha\eta)} = \frac{U(x, y)}{U_0(x)} \quad (10.51)$$

$$\text{con } \alpha = \sqrt{\frac{S}{4\hat{\nu}_T}}.$$

Mancano da determinare i valori delle costanti che compaiono nella soluzione, ottenibili usando dei confronti con le misure sperimentali e introducendo una definizione per la dimensione di riferimento  $\delta(x)$  della dimensione trasversale del getto: di solito si definisce  $\delta(x) = r_{1/2}(x)$  l’ordinata in cui la velocità  $U(x, \delta(x))$  è la metà della velocità sull’asse (o sul piano di simmetria), cioè

$$U(x, r_{1/2}(x)) = \frac{1}{2}U(x, 0) = \frac{1}{2}U_0(x) \quad (10.52)$$

Per questa scelta di  $\delta(x)$  il coefficiente  $S$  risulta  $S \sim 0.1$ .

