Esercizio 8.11 — Sorgente lineare nel piano. Utilizzando l'espressione dela velocità indotta da una sorgente puntiforme di intensità unitaria,

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{r}} \ , \tag{8.45}$$

dimostrare che la velocità indotta nel punto $\boldsymbol{P}$ da una sorgente di intensità unitaria uniforme distribuita sul segmento che congiunge i due punti $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$ vale

$$\boldsymbol{u} = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|\boldsymbol{r}_2|}{|\boldsymbol{r}_1|}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2\pi}\beta\hat{\boldsymbol{y}} \ , \tag{8.46}$$

essendo $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ i versori in direzione tangente e normale al segmento $\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2$, i vettori $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{N}_i$, $i = 1:2$ e β l'angolo compreso tra il vettore $\boldsymbol{r}_1$ e il vettore $\boldsymbol{r}_2$, positivo se si deve ruotare il vettore $\boldsymbol{r}_1$ in senso antiorario per farlo coincidere con $\boldsymbol{r}_2$. ■

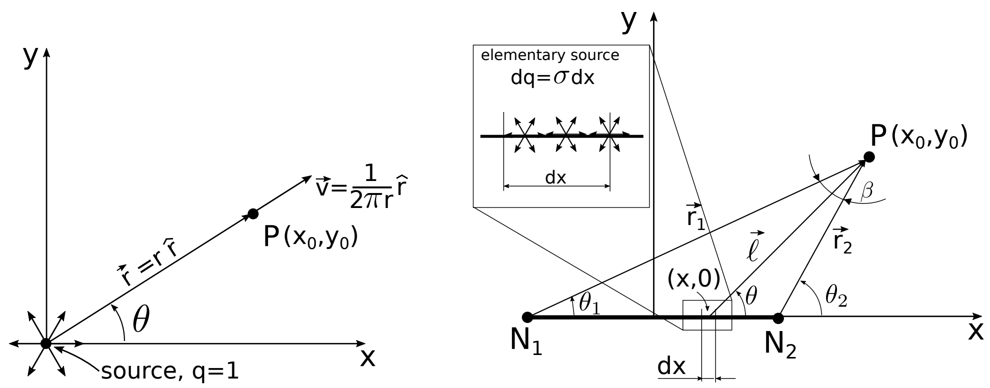


Figura 8.4: Rappresentazione di una sorgente puntiforme e della sorgente distribuita sul segmento $\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2$: definizione della "densità lineare di sorgente" σ e delle quantità geometriche.

Facendo riferimento alla figura 8.4, i punti appartenenti al segmento hanno coordinate $(x, 0)$, con $x \in (x_{N_1}, x_{N_2})$. Il contributo elementare di velocità indotta nel punto $\boldsymbol{P}$ dal segmento di lunghezza infinitesima dx vale

$$d\boldsymbol{u} = \frac{\sigma dx}{2\pi\ell}\hat{\boldsymbol{\ell}} = \frac{\sigma dx}{2\pi\ell^2}\boldsymbol{\ell} \ , \tag{8.47}$$

avendo indicato con $\boldsymbol{\ell} = (x_0 - x)\,\hat{\boldsymbol{x}} + y_0\,\hat{\boldsymbol{y}}$ il vettore di lunghezza ℓ che congiunge il generico punto sul segmento $\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2$ con il punto $\boldsymbol{P}$ e con $\hat{\boldsymbol{\ell}} = \boldsymbol{\ell}/\ell$ il versore che ne identifica la direzione. Per risolvere il problema risulta comodo esprimere la coordinata x in funzione dell'angolo θ formato dal vettore $\boldsymbol{\ell}$ con l'asse x e usare l'angolo θ come coordinata indipendente per parametrizzare i punti del segmento. Si può scrivere

$$\boldsymbol{\ell} = \ell\cos\theta\hat{\boldsymbol{x}} + \ell\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}} = (x_0 - x)\hat{\boldsymbol{x}} + y_0\hat{\boldsymbol{x}} \ , \tag{8.48}$$

per ricavare il legame tra x e θ,

$$\ell\cos\theta = x_0 - x \qquad , \qquad \ell\sin\theta = y_0 \qquad \rightarrow \qquad x - x_0 = y_0\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \ , \tag{8.49}$$

e l'espressione che lega i differenziali dx e $d\theta$,

$$dx = \frac{y_0}{\sin^2\theta} d\theta \ . \tag{8.50}$$

Se la sorgente ha densità uniforme unitaria, allora $\sigma = 1$ e si può scrivere

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{u} &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\ell^2}\ \boldsymbol{\ell}\ dx = \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{y_0^2}\left[y_0\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\hat{\boldsymbol{x}} + y_0\hat{\boldsymbol{y}}\right]\ \frac{y_0}{\sin^2\theta}d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}\right] d\theta \end{aligned} \tag{8.51}$$

Per ottenere il contributo integrale di tutta la sorgente lineare, è necessario svolgere l'integrale del contributo elementare su tutto il segmento

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \int_{\boldsymbol{N}_1}^{\boldsymbol{N}_2} d\boldsymbol{u} = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}\right] d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\hat{\boldsymbol{x}} + (\theta_2 - \theta_1)\hat{\boldsymbol{y}}\right] = \\ &= -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|\boldsymbol{r}_2|}{|\boldsymbol{r}_1|}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2\pi}\beta\hat{\boldsymbol{y}} \ . \end{aligned} \tag{8.52}$$

L'ultima espressione è stata ricavata utilizzando il legame $\theta_2 = \theta_1 + \beta$ tra angoli interni ed esterni di un triangolo ed elaborando il termine del logaritmo come

$$\ln\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \ln\frac{\sin\theta_2/y_0}{\sin\theta_1/y_0} = \ln\frac{1/|\boldsymbol{r}_2|}{1/|\boldsymbol{r}_1|} = \ln\frac{|\boldsymbol{r}_1|}{|\boldsymbol{r}_2|} = -\ln\frac{|\boldsymbol{r}_2|}{|\boldsymbol{r}_1|} \ . \tag{8.53}$$

Esercizio 8.12 — Vortice lineare nel piano. Utilizzando l'espressione dela velocità indotta da un vortice irrotazionale puntiforme di intensità unitaria,

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\theta}} \ , \tag{8.54}$$

dimostrare che la velocità indotta nel punto $\boldsymbol{P}$ da un vortice di intensità unitaria uniforme distribuito sul segmento che congiunge i due punti $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$ vale

$$\boldsymbol{u} = -\frac{1}{2\pi}\beta\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|\boldsymbol{r}_2|}{|\boldsymbol{r}_1|}\hat{\boldsymbol{y}} \ , \tag{8.55}$$

essendo $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ i versori in direzione tangente e normale al segmento $\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2$, i vettori $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{N}_i$, $i = 1:2$ e β l'angolo compreso tra il vettore $\boldsymbol{r}_1$ e il vettore $\boldsymbol{r}_2$, positivo se si deve ruotare il vettore $\boldsymbol{r}_1$ in senso antiorario per farlo coincidere con $\boldsymbol{r}_2$. ■

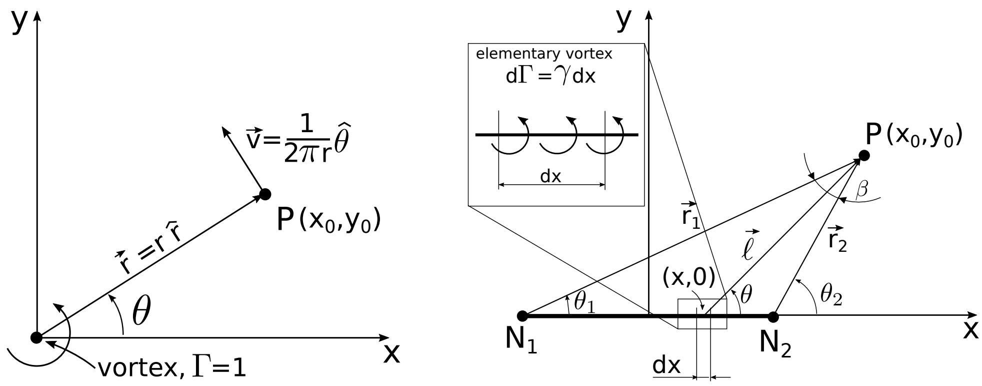


Figura 8.5: Rappresentazione di un vortice irrotazionale puntiforme e del vortice distribuita sul segmento $\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2$: definizione della "densità lineare di vortice" γ e delle quantità geometriche.

8.1 Metodo di Hess-Smith

Si vuole calcolare la corrente incomprimibile irrotazionale bidimensionale attorno a un profilo aerodinamico, utilizzando il principio di sovrapposizione delle cause e degli effetti per ottenere il campo di moto attorno al profilo come somma della velocità uniforme e della velocità di alcune soluzioni elementari dell'equazione di Laplace per il potenziale, come sorgenti e vortici.
Per motivi di accuratezza del metodo, non vengono utilizzate singolarità puntiformi (come sorgenti o vortici puntiformi), ma vengono utilizzate delle singolarità distribuite su i segmenti che descrivono la geometria discretizzata del profilo.

8.1.1 Descrizione della geometria

Il profilo aerodinamico viene suddiviso da $N+1$ punti in N elementi (o pannelli). Per ogni elemento, vengono definite alcune grandezze geometriche: la lunghezza ℓ_k, i versori normali e tangenti $\boldsymbol{\hat{n}}_k$, $\boldsymbol{\hat{t}}_k$, i punti estremi del pannello $\boldsymbol{x}_k^1$, $\boldsymbol{x}_k^2$ (che verrano utilizzate per calcolare le velocità indotte dai pannelli) e il punto di controllo coincidente con il centro del pannello $\boldsymbol{x}_k^c$ (che sarà il punto nel quale verranno imposte le condizioni al contorno).

La funzione `build_geometry()` legge i dati di un profilo NACA, le sue dimensioni e posizione nello spazio e resitituisce la struttura `elems` che contiene le informazioni sui pannelli, insieme alle matrici che contengono coordinate dei punti `rr`, la connettività nodi-elementi `ee`, l'indice dei pannelli al bordo di uscita `ii_te`, il numero `nelems` di elementi e `npoints` di punti.

```
[ rr, ee, ii_te, elems, nelems, npoints ] = build_geometry( airfoil)
```

8.1.2 Principio di sovrapposizione delle cause e degli effetti: campo di velocità

Vengono utilizzate i seguenti campi di velocità irrotazionali:

- corrente uniforme $\boldsymbol{U}_\infty$;
- N distribuzioni costanti di sorgenti su ogni pannello, di intensità σ_k, $k = 1 : N$;
- N distribuzioni costanti di vortici su ogni pannello, di intensità γ_k, $k = 1 : N$.

La velocità indotta nel punto $\boldsymbol{x}$ da una distribuzione costante di sorgente su un pannello di intensità σ_k è

$$\boldsymbol{u}_k^s(\boldsymbol{x}) = \left[-\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\boldsymbol{r}_2|}{|\boldsymbol{r}_1|} \boldsymbol{\hat{t}}_k + \frac{1}{2\pi} \beta \boldsymbol{\hat{n}}_k \right] \sigma_k = \boldsymbol{u}_k^{s,1}(\boldsymbol{x}) \sigma_k \ , \tag{8.56}$$

essendo $\boldsymbol{\hat{t}}_k$, $\boldsymbol{\hat{n}}_k$ i versori tangente e normale[2] al k-esimo pannello, i vettori $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k^i$, $i = 1 : 2$ e β l'angolo compreso tra il vettore $\boldsymbol{r}_1$ e il vettore $\boldsymbol{r}_2$, positivo se si deve ruotare il

[2] Per ottenere le componenti della velocità nel sistema globale, è necessario esprimere i versori $\boldsymbol{\hat{t}}_k$, $\boldsymbol{\hat{n}}_k$ nel sistema di riferimento globale formato dai versori $\boldsymbol{\hat{x}}$, $\boldsymbol{\hat{y}}$. La legge di trasformazione dei vettori delle basi si ottiene proiettando i vettori della base locale nella base globale,

$$\boldsymbol{\hat{t}}_k = (\boldsymbol{\hat{t}}_k \cdot \boldsymbol{\hat{x}})\boldsymbol{\hat{x}} + (\boldsymbol{\hat{t}}_k \cdot \boldsymbol{\hat{y}})\boldsymbol{\hat{y}} \qquad , \qquad \boldsymbol{\hat{n}}_k = (\boldsymbol{\hat{n}}_k \cdot \boldsymbol{\hat{x}})\boldsymbol{\hat{x}} + (\boldsymbol{\hat{n}}_k \cdot \boldsymbol{\hat{y}})\boldsymbol{\hat{y}} \tag{8.57}$$

e la legge di trasformazione delle componenti si ottiene come

$$\boldsymbol{u} = u_{k,t}\boldsymbol{\hat{t}}_k + u_{k,n}\boldsymbol{\hat{t}}_n = (t_{k,x}u_{k,t} + n_{k,x}u_{k,n})\boldsymbol{\hat{x}} + (t_{k,y}u_{k,t} + n_{k,y}u_{k,n})\boldsymbol{\hat{y}} = u_x\boldsymbol{\hat{x}} + u_y\boldsymbol{\hat{y}} \ , \tag{8.58}$$

o in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{k,x} & n_{k,x} \\ t_{k,y} & n_{k,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k,t} \\ u_{k,n} \end{bmatrix} \ . \tag{8.59}$$

vettore $\boldsymbol{r}_1$ in senso antiorario per farlo coincidere con $\boldsymbol{r}_2$. Infine é stata espressa la velocità indotta dalla sorgente di intensità σ_k come prodotto della velocità indotta da una sorgente unitaria $\boldsymbol{u}_k^{s,1}$ e dell'intensità σ_k.
Allo stesso modo, si può scrivere la velocità indotta da una distribuzione di vortici come

$$\boldsymbol{u}_k^v(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_k^{v,1}(\boldsymbol{x})\gamma_k \ . \tag{8.60}$$

Il campo di velocità risultante dalla sovrapposizione della corrente uniforme e delle singolarità introdotte è

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{U}_\infty + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{u}_k^{s,1}(\boldsymbol{x})\sigma_k + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{u}_k^{v,1}(\boldsymbol{x})\gamma_k \ . \tag{8.61}$$

Questa espressione del campo di velocità contiene $2\,N$ incognite, le intensità delle sorgenti σ_k e dei vortici γ_k, $k = 1 : N$.

Le funzioni

```
v = compute_velocity_source( elems_k , rr_i )
v = compute_velocity_vortex( elems_k , rr_i )
```

calcolano la velocità `v` nel punto `rr_i` indotta da singolarità di intensità unitaria distribuita sull'elemento `elems_k`. Il vettore colonna `v` contiene le componenti x e y della velocità, nel sistema di riferimento globale.

8.1.3 Metodo di Hess-Smith

Il metodo di Hess-Smith consiste nell'imporre che le intensità dei vortici siano tutte uguali, $\gamma_k = \gamma$, $k = 1 : N$. L'espressione della velocità contiene ora $N + 1$ incognite.

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{U}_\infty + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{u}_k^{s,1}(\boldsymbol{x})\sigma_k + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{u}_k^{v,1}(\boldsymbol{x})\gamma \ . \tag{8.62}$$

8.1.4 Sistema lineare: condizioni al contorno

Si possono scrivere N equazioni imponendo la condizione al contorno di non penetrazione $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_i) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_i = 0$ nei punti di controllo dei pannelli $\boldsymbol{x}_i^c$,

$$0 = \hat{\boldsymbol{n}}_i \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_i^c) = \hat{\boldsymbol{n}}_i \cdot \boldsymbol{U}_\infty + \sum_{k=1}^{N} \hat{\boldsymbol{n}}_i \cdot \boldsymbol{u}_k^{s,1}(\boldsymbol{x}_i^c)\sigma_k + \sum_{\ell=1}^{N} \hat{\boldsymbol{n}}_i \cdot \boldsymbol{u}_\ell^{v,1}(\boldsymbol{x}_i^c)\gamma \ , \qquad i = 1 : N \ . \tag{8.63}$$

Manca ora un'altra equazione che renda il sistema determinato e garantisca l'unicità della soluzione del problema aerodinamico in un dominio non semplicemente connesso.

8.1.5 Sistema lineare: condizione di Kutta

La condizione di Kutta stabilisce il criterio per recuperare l'unicità della soluzione, scegliendo la "soluzione più fisica" tra le infinite soluzioni del problema aerodinamico con dominio non semplicmente connesso.
Si può approssimare al condizione di Kutta imponendo l'uguaglianza delle componenti tangenziali della velocità dei pannelli in corrispondenza del bordo di uscita,

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_1^c) \cdot \hat{\boldsymbol{t}}_1 + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_N^c) \cdot \hat{\boldsymbol{t}}_N = 0 \ . \tag{8.64}$$

come $N+1$-esima equazione per ottenere un sistema lineare determinato. Esplicitando l'espressione della velocità, si può scrivere

$$0 = \hat{\boldsymbol{t}}_1 \cdot \boldsymbol{U}_\infty + \hat{\boldsymbol{t}}_N \cdot \boldsymbol{U}_\infty + \sum_{k=1}^{N} \left[\hat{\boldsymbol{t}}_1 \cdot \boldsymbol{u}_k^{s,1}(\boldsymbol{x}_1^c) + \hat{\boldsymbol{t}}_N \cdot \boldsymbol{u}_k^{s,1}(\boldsymbol{x}_N^c) \right] \sigma_k + \sum_{\ell=1}^{N} \left[\hat{\boldsymbol{t}}_1 \cdot \boldsymbol{u}_\ell^{v,1}(\boldsymbol{x}_1^c) + \hat{\boldsymbol{t}}_N \cdot \boldsymbol{u}_\ell^{v,1}(\boldsymbol{x}_N^c) \right] \gamma \, . \tag{8.65}$$

8.1.6 Sistema lineare in forma matriciale

Si può scrivere il sistema lineare in forma matriciale $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ distingunedo i contributi delle sorgenti da quello del vortice e le condizioni al contorno di non penetrazione dalla condizione di Kutta, partizionando la matrice $\underline{\underline{A}}$, il vettore incognito $\underline{x}$ e il termine noto $\underline{b}$,

$$\left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{A}}^{bc,s} & \underline{A}^{bc,v} \\ \hline \underline{A}^{K,s\,T} & A^{K,v} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \underline{\sigma} \\ \hline \gamma \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \underline{b}^{bc} \\ \hline b^K \end{array} \right] \, . \tag{8.66}$$

Le componenti della matrice $\underline{\underline{A}}$ sono

$$\begin{gathered} \left\{ \underline{\underline{A}}^{bc,s} \right\}_{ik} = \hat{\boldsymbol{n}}_i \cdot \boldsymbol{u}_k^{s,1}(\boldsymbol{x}_i^c) \quad , \quad \left\{ \underline{A}^{bc,v} \right\}_i = \sum_{k=1}^{N} \hat{\boldsymbol{n}}_i \cdot \boldsymbol{u}_k^{v,1}(\boldsymbol{x}_i^c) \quad , \\ \left\{ \underline{A}^{K,s} \right\}_k = \hat{\boldsymbol{t}}_1 \cdot \boldsymbol{u}_k^{s,1}(\boldsymbol{x}_1^c) + \hat{\boldsymbol{t}}_N \cdot \boldsymbol{u}_k^{s,1}(\boldsymbol{x}_N^c) \quad , \quad A^{K,v} = \sum_{k=1}^{N} \hat{\boldsymbol{t}}_1 \cdot \boldsymbol{u}_k^{v,1}(\boldsymbol{x}_1^c) + \hat{\boldsymbol{t}}_N \cdot \boldsymbol{u}_k^{v,1}(\boldsymbol{x}_N^c) \quad , \end{gathered} \tag{8.67}$$

il vettore delle incognite contiene le intensità delle sorgenti e del vortice, mentre le componenti del termine noto sono

$$\left\{ \underline{b}^{bc} \right\}_i = -\hat{\boldsymbol{n}}_i \cdot \boldsymbol{U}_\infty \quad , \quad b^K = -\hat{\boldsymbol{t}}_1 \cdot \boldsymbol{U}_\infty - \hat{\boldsymbol{t}}_N \cdot \boldsymbol{U}_\infty \, . \tag{8.68}$$

8.1.7 Ricostruzione delle grandezze fisiche

Una volta risolto il sistema lineare, sono note le intensità delle singolarità distribuite sul corpo ed è quindi possibile ricostruire il campo di velocità in un punto $\boldsymbol{x}$ qualsiasi del dominio. Si possono utilizzare le funzioni `compute_velocity_source()`, `compute_velocity_vortex()`, per calcolare i contributi di velocità $\boldsymbol{u}_k^{s,1}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{u}_k^{v,1}(\boldsymbol{x})$ del k-esimo elemento da modulare con le intensità delle singolarità, come descritto dalla formula del campo di velocità,

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{U}_\infty + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{u}_k^{s,1}(\boldsymbol{x})\sigma_k + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{u}_k^{v,1}(\boldsymbol{x})\gamma \, . \tag{8.69}$$

Per calcolare la velocità in corrispondenza dei punti di controllo $\boldsymbol{x}_i^c$, si può evitare di eseguire il ciclo su tutti gli elementi, se si salvano le matrici $\underline{\underline{A}}_u$, $\underline{\underline{A}}_v$ dei coefficienti aerodinamici durante la costruzione del sistema lineare che permettono di ottenere le due componenti della velocità, tramite il prodotto con il vettore $\underline{x}$ delle intensità delle singolarità. Le due componenti x e y della velocità sono infatti uguali a

$$\begin{aligned} u^c(\boldsymbol{x}_i) &= U_\infty + \sum_{k=1}^{N} u_k^{s,1}(\boldsymbol{x}_i^c)\sigma_k + \sum_{\ell=1}^{N} u_\ell^{v,1}(\boldsymbol{x}_i^c)\gamma \, , && i = 1:N \\ v^c(\boldsymbol{x}_i) &= V_\infty + \sum_{k=1}^{N} v_k^{s,1}(\boldsymbol{x}_i^c)\sigma_k + \sum_{\ell=1}^{N} v_\ell^{v,1}(\boldsymbol{x}_i^c)\gamma \, , && i = 1:N \, , \end{aligned} \tag{8.70}$$

e possono essere ricavate come

$$\begin{aligned} \underline{u} &= U_\infty \underline{1} + \underline{\underline{A_u}}\, \underline{x} \ , \\ \underline{v} &= V_\infty \underline{1} + \underline{\underline{A_v}}\, \underline{x} \ . \end{aligned} \tag{8.71}$$

Infine il campo di pressione può essere ricavato utilizzando il teorema di Bernoulli, nella forma valida per correnti stazionarie incomprimibili irrotazionali di fluidi non viscosi,

$$P + \frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{u}|^2 = P_\infty + \frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{U}_\infty|^2 \ , \tag{8.72}$$

avendo trascurato le forze di volume.

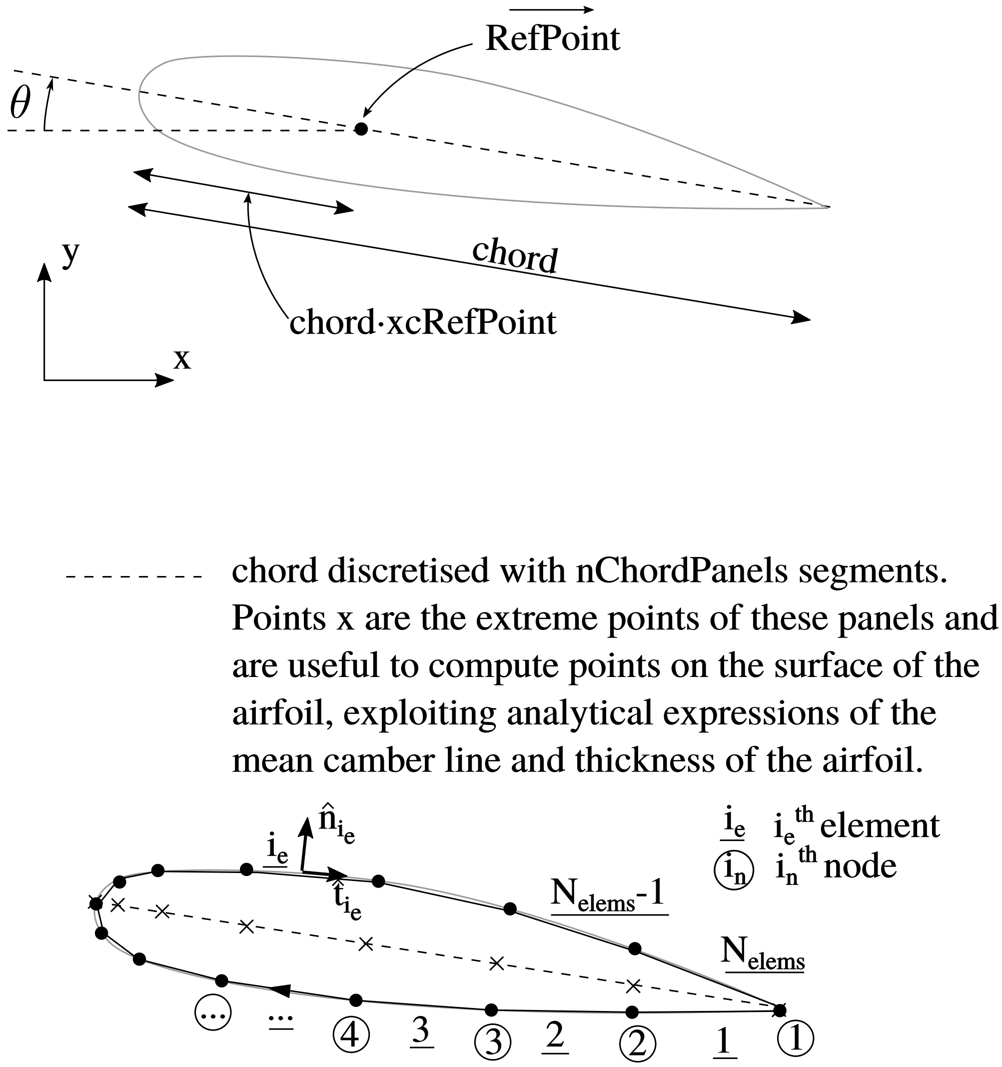
Viene riportato lo pseudo-codice della funzione `build_linsys()` per costruire il sistema lineare.

```
[ A , b , Au , Av ] = build_linsys( freeStream , elems , ii_te )

nelems = length(elems)

% === Initialize matrices to zero ===
A = zeros(nelems,nelems)   ; b = zeros(nelems,1) ;
Au= zeros(nelems,nelems+1) ; Av= zeros(nelems,nelems+1) ;

% === Fill A matrix and RHS b vector ===
% => 1. assign the non-penetration b.c. ( u.n = 0 ),
%       filling A(1:nelems,1:nelems+1) and b(1:nelems)

for ii = 1 : nelems    % elems where velocity is induced
    for jj = 1 : nelems    % inducing elems

      % === Compute induced velocity ===
      %  and store it in vs(:,:).v, vv(:,:).v (memory inefficient!)
      vs(ii,jj).v = compute_velocity_source(elems(jj),elems(ii).cen);
      vv(ii,jj).v = compute_velocity_vortex(elems(jj),elems(ii).cen);

      % === Fill b.c. block of the matrix A with source AIC ===
      A (ii,jj) = elems(ii).nver' * vs(ii,jj).v ;
      % === Accumulate vortex AIC in the b.c. block of the matrix A ===
      A( ii,nelems+1 ) += elems(ii).nver' * vv(ii,jj).v ;

      % === Fill matrices to retrieve the velocity field ===
      % as before, fill sources block, accumulate vortex contributions
      % -> component x of the velocity field
      Au(ii,jj)         = vs(ii,jj).v(1) ; % sources
      Au(ii,nelems+1 ) += vv(ii,jj).v(1) ; % vortices
      % -> component y of the velocity field
      Av(ii,jj)         = vs(ii,jj).v(2) ; % sources
      Av(ii,nelems+1 ) += vv(ii,jj).v(2) ; % vortices

    end

    % === Fill the b.c. block of the rhs vector b ===
    b(ii) = - elems(ii).nver' * freeStream.vvec ;

end

% ... continue ...
```

```
% ... continue ...

% => 2. assign Kutta condition
%       ( U_TE_upper . tTE_upper + U_TE_lower . tTE_lower = 0 ),
%       filling A(nelems+1,:) and b(nelems+1)

% indices of the elems at the te
i_te_1 = ii_te(1,1) ;  i_te_N = ii_te(1,2) ;

for jj = 1  : nelems

  % === Fill the Kutta condition row for sources ===
  A(nelems+1, jj ) = elems(i_te_1).tver' * vs(i_te_1,jj).v + ...
                     elems(i_te_N).tver' * vs(i_te_N,jj).v ;
  % === Accumulate the contribution of the vortex ===
  A(nelems+1,nelems+1) += ...
            elems(i_te_1).tver' * vv(i_te_1,jj).v +  ...
            elems(i_te_N).tver' * vv(i_te_N,jj).v ;
end

% fill the last component of the rhs ( -(t1+tN).U_inf )
b(nelems+ia) = - ( elems( i_te_1 ).tver + elems( i_te_2 ).tver )' * ...
                   freeStream.vvec ;
```

Infine viene riportato lo pseudo-codice del programma.

```
% === Input ===
% -> freeStream
freeStream.rho = ... ; .P = ... ; .v = ... ; .alpha = ... ;
freeStream.vvec  = freeStream.v * [ cos(freeStream.alpha) ; ...
                                    sin(freeStream.alpha) ] ;
% -> airfoil
airfoil.id    = 1   ; airfoil.airfoil_str = 'NACA0012'
airfoil.chord = 1.0 ; airfoil.theta = 2.0 *pi/180.0 ; % ...

% === Build geometry ===
[ rr, ee, ii_te, elems, nelems, npoints ] = build_geometry(airfoil)
% === Build the linear system ===
[ A , b , Au , Av ] = build_linsys( freeStream , elems , ii_te ) ;
% === Solve the linear system ===
x = A \ b ;
% === Retrieve physical fields ===
% -> Compute velocity at control points
u = Au * x + freeStream.v * cos(freeStream.alpha);
v = Av * x + freeStream.v * sin(freeStream.alpha); % ...
```


RefPoint
θ
chord
chord·xcRefPoint
y
x
chord discretised with nChordPanels segments.
Points x are the extreme points of these panels and are useful to compute points on the surface of the airfoil, exploiting analytical expressions of the mean camber line and thickness of the airfoil.
$\hat{n}_{i_e}$
i_e
$\hat{t}_{i_e}$
i_e i_e^{th} element
i_n i_n^{th} node
N_{elems}-1
N_{elems}
... ... 4 3 3 2 2 1 1