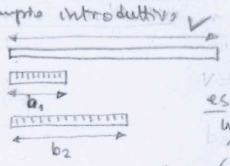
INQUADRAMENTO DEL PROBLEMA

- La fisica è invariante al sistema di coord usato
  - Eqn vettoriali (tensoriali) → notaz. astratta (generale e compatta)
  - in componenti {es: durante esercizi...}
- Fluido come mezzo continuo
  - → Stato del sistema: campi $\vec{u}(\vec{r},t)$, $P(\vec{r},t)$
  - → Eqn che governano il sist: PDE: $\frac{\partial}{\partial t}, \nabla_k, \nabla\cdot, \nabla_k, \Delta$ + i.c. + b.c.
  - → Descrizione di: Lagr., eul., arbitraria
- Eq NON LINEARI

INVARIANZA DELLE LEGGI FISICHE

Esempio introduttivo



es: conversione unità di misura (ENG vs SI)

$V = v^1 b_1 = v^2 b_2$

$b_2 = \lambda b_1 \longrightarrow v_2^2 = \frac{1}{\lambda} v_1$

covarianza × contravarianza = invariante

Vettori

$\vec{v} = v^k \vec{b}_k$ ← componenti; ← elementi di una base $k=1:N$

- Def: base duale $\{\vec{b}^i\}_{i=1:N}$

$\vec{b}^i \cdot \vec{b}_k = \delta_k^i$

e componenti covarianti

$\vec{v} = v_k \vec{b}^k$

- Def simboli $g_{ik} = \vec{b}_i \cdot \vec{b}_k$ $\quad g^{ik} = \vec{b}^i \cdot \vec{b}^k$

Proprietà $[g_{ik}] = [g^{ik}]^{-1}$; $\vec{b}^i = g^{ik}\vec{b}_k$; $v_i = \dots$; $\vec{b}_i = \dots$; $v^i = \dots$

Trasformazione di componenti in seguito a un cambio di base

$\hat{\vec{b}}_k := \hat{T}^q_k \hat{\vec{b}}_q$; $\hat{\vec{b}}_k = T^q_k \hat{\vec{b}}_q$

base: T mat cambio base; $\hat{T}$: trasf inversa $\hat{T} = T^{-1}$

vettore $\vec{v} = v^k \vec{b}_k = v^k \hat{T}^q_k \hat{\vec{b}}_q$ — vettore invariante

$v^q = T^q_k \hat{v}^k$ (inv), $\hat{v}^q = \hat{T}^q_k v^k$ — componenti (contravarianti)!

Come si calcola $\hat{T}^q_k$? → Indurre a errore!

$\hat{T}^q_k = \vec{b}_k \cdot \hat{\vec{b}}^q$

$\left(\hat{\vec{b}}^i \cdot \vec{b}_k = \hat{T}^q_k \underbrace{\hat{\vec{b}}_q \cdot \hat{\vec{b}}^i}_{\delta_q^i} = \hat{T}^i_k \right)$

- Trasformazione componenti a seguito di cambio base

$\boxed{\hat{\vec{b}}_i = \hat{T}^k_i \hat{\vec{b}}_k \quad , \quad \hat{\vec{b}}_i = T_i^k \vec{b}_k}$ base

$A = A^{i_1 \dots i_r} \vec{b}_{i_1} \otimes \dots \vec{b}_{i_r} =$ tensore (invariante)

$= A^{i_1 \dots i_r} (\hat{T}^{k_1}_{i_1} \hat{\vec{b}}_{k_1}) \otimes \dots \otimes (\hat{T}^{k_r}_{i_r} \hat{\vec{b}}_{k_r}) =$

$= \hat{T}^{k_1}_{i_1} \dots \hat{T}^{k_r}_{i_r} A^{i_1 \dots i_r} \hat{\vec{b}}_{k_1} \otimes \dots \hat{\vec{b}}_{k_r}$ — componenti (contravarianti)

$\boxed{A^{i_1 \dots i_r} = T^{i_1}_{k_1} \dots T^{i_r}_{k_r} \hat{A}^{k_1 \dots k_r}} \leftarrow \hat{A}^{k_1 \dots k_r} = \hat{T}^{k_1}_{i_1} \dots \hat{T}^{k_r}_{i_r} A^{i_1 \dots i_r}$ — DEF TENSORE (classica)

- Alcune operazioni → danno come risultato un altro tensore!
  - Contrazione di 2 indici → $r-2$ — avviene "naturalmente" tra indici di natura ≠
  - es. $C_3^1 A = C_3^1 \left(A^{i_1 i_2 j}{}_{i_3} \vec{b}_{i_1} \otimes \vec{b}_{i_2} \otimes \vec{b}^{i_3} \right) =$

    $= A^{j i_2}{}_j \vec{b}_{i_2}$

    In sistemi di rif ortonormali non si fa ≠
- Prodotto punto $\overset{m}{A} \cdot \overset{n}{B} \to m+n-2$ $\quad \delta^{i_3}_{j_1}$

  es $A \cdot B = (A^{i_1 i_2}{}_{i_3}) \vec{b}_{i_1} \otimes \vec{b}_{i_2} \otimes \vec{b}^{i_3} \cdot (B^{j_1 j_2} \vec{b}_{j_1} \otimes \vec{b}_{j_2}) =$

  $= A^{i_1 i_2}{}_k B^{k j_2} \vec{b}_{i_1} \otimes \vec{b}_{i_2} \otimes \vec{b}_{j_2}$
- Prodotto punto "doppio"

  (...)

- Basi ortonormali

$g_{ik} = \vec{b}_i \cdot \vec{b}_k = \delta_{ik} \to \vec{b}_i \equiv \vec{b}^i$, $v^i \equiv v_i$ → si possono confondere indici e pedici!

* TENSORI (ALGEBRA MULTILINEARE)

← "cos'è un tensore?"

- Tensore ≠ matrice
- def classica: insieme di simboli che ha precise regole di trasf in seguito a un cambio di base, x garantire INV

- Prodotto tensoriale tra vettori $\vec{v}_i \in V$, $N = \dim(V)$, $i = 1:r$

  $\vec{v}_1 \otimes \dots \otimes \vec{v}_r$: tensore di ordine r

  Operazione NON commutativa

- Base prodotto: data una base $\{b_k\}_{k=1:N}$ di V

  $\{b_{i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_r}\}_{i_1, \dots i_r = 1:N}$ è la base prodotto per i tensori di ordine r

  esempio: $V = \mathbb{R}^3$, tensori di ordine $r=2$, $B_k = \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$

  $\{\hat{x}\otimes\hat{x}, \hat{x}\otimes\hat{y}, \hat{x}\otimes\hat{z}, \dots, \hat{z}\otimes\hat{z}\}$ ← N^r elementi!

- Scrittura in componenti

  $A = A^{i_1 \dots i_r} \vec{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{b}_{i_r}$

- Operazioni
  - Somma $A, B \in \mathcal{T}^r(V) \to A+B \in \mathcal{T}^r$

    $A + B$
  - Prodotto per scalare $\alpha A \in \mathcal{T}^r$

    αA
  - Prodotto tensoriale $A \in \mathcal{T}^r(V)$ $B \in \mathcal{T}^s(V)$ $A \otimes B \in \mathcal{T}^{r+s}(V)$

    $A \otimes B$

→ $\mathcal{T}^r(V)$ sp vettoriale

Quando compaiono?

es: * div è una contrazione del grad (ESE 02)

* $tr(A) := C_1^2(A)$

$\vec{t}_n = \hat{n} \cdot \Pi$ sforzo

$\vec{q} = -\mathbb{K} \cdot \nabla T$ legge di Fourier

$\vec{\Gamma}_G = \mathbb{I}_G \cdot \vec{\omega}$ momento angolare, tens di inerzia e vel. angolare

$\sigma = \mathbb{C} : \varepsilon$ legge costitutiva elastica

$\mathbb{D} : \mathbb{D}$ dissipazione di energia nei fluidi