

## A. Richiami di analisi

---

<b>A.1</b>	<b>Teoremi della divergenza e del rotore</b>	<b>23</b>
A.1.1	Lemma di Green	23
A.1.2	Due utili lemmi	26
A.1.3	Teorema della divergenza, del rotore e del gradiente	27
<b>A.2</b>	<b>Campi vettoriali conservativi</b>	<b>30</b>
<b>A.3</b>	<b>Descrizione lagrangiana e descrizione euleriana</b>	<b>34</b>
<b>A.4</b>	<b>Derivata temporale di integrali su domini dipendenti dal tempo: formule di Leibniz</b>	<b>36</b>
<b>A.5</b>	<b>Rappresentazione del termine di derivata temporale nelle equazioni di bilancio</b>	<b>39</b>
<b>A.6</b>	<b>Bilanci integrali</b>	<b>41</b>
A.6.1	Bilancio di massa	41
A.6.2	Prima equazione cardinale e bilancio della quantità di moto	41
A.6.3	Seconda equazione cardinale e bilancio del momento della quantità di moto	41
A.6.4	Bilancio di energia totale	41
A.6.5	Bilanci integrali per volumi in moto arbitrario	42

---

### A.1 Teoremi della divergenza e del rotore

#### A.1.1 Lemma di Green

In questa sezione vengono richiamati i teoremi della divergenza e del rotore, già incontrati nei corsi di Analisi. Viene introdotto il teorema del gradiente. Questi teoremi vengono dimostrati a partire da due lemmi, che risultano utili nella scrittura delle equazioni di bilancio di un continuo (solido o fluido che sia). Il punto di partenza è il lemma di Green,

necessario per la dimostrazione dei due lemmi. La sua dimostrazione viene riportata per motivi di completezza e per richiamare alcuni concetti già incontrati nei corsi di Analisi e per ricominciare ad utilizzarli.

**Teorema A.1.1 — Lemma di Green.** Sia  $\gamma_R$  una curva chiusa semplice nel piano positivamente orientata regolare a tratti, e sia  $R$  la superficie di cui è frontiera. Se  $P$  e  $Q$  sono due funzioni reali di due variabili reali che hanno le derivate parziali continue su una regione aperta che contiene  $R$ .

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_{\gamma_R} P dx, \quad \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{\gamma_R} Q dy \quad (\text{A.1})$$

La dimostrazione viene svolta prima per domini semplici, come il dominio  $R$  in figura A.1, e poi generalizzata per domini non semplici e non semplicemente connessi.

**R** Il verso positivo di percorrenza di una linea chiusa nel piano è quello antiorario, come indicato in figura A.1: seguendo questa convenzione, la regione limitata del piano viene lasciata a sinistra della curva, se percorsa nel verso positivo.

*Dimostrazione.* Se  $R$  è un dominio semplice, è possibile dimostrare la prima delle due equazioni (A.1) scomponendo il contorno  $\gamma_R = \partial R$  nelle due curve  $\ell_1 : y = Y_1(x)$  e  $\ell_2 : y = Y_2(x)$ , come in figura A.1. È possibile scrivere il contorno  $\gamma_R = \ell_1 \cup \ell_2^-$  come unione delle due curve  $\ell_1$  ed  $\ell_2$ , dove l'apice  $-$  su  $\ell_2$  indica che deve essere percorsa per  $x$  decrescenti affinché il contorno  $\gamma_R$  sia percorso in senso positivo.

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left( \int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b [P(x, Y_2(x)) - P(x, Y_1(x))] dx = - \oint_{\gamma_R} P dx \quad (\text{A.2})$$

In maniera analoga, è possibile dimostrare la seconda delle (A.1), scomponendo il contorno in due curve  $\ell_1 : x = X_1(y)$  e  $\ell_2 : x = X_2(y)$ , con  $X_2(y) > X_1(y)$ .

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_c^f \left( \int_{X_1(y)}^{X_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy = \int_c^f [P(X_2(y), y) - P(X_1(y), y)] dy = \oint_{\gamma_R} Q dy \quad (\text{A.3})$$

■

Sottraendo le due equazioni del teorema A.1.1, si ottiene la forma classica nella quale il teorema di Green viene presentato

$$\oint_{\gamma_R} [P dx + Q dy] = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (\text{A.4})$$

#### Domini non semplici e non semplicemente connessi.

Il caso di domini non semplici e non semplicemente connessi si riconduce al caso di domini semplici, in seguito all'introduzione di un 'taglio'  $\gamma_c$  nel dominio, sfruttando la regolarità (per ipotesi) della funzione all'interno del dominio. Nel caso di dominio non semplice, ci si riconduce a due o più domini semplici a due a due disgiunti, la cui unione è l'insieme non semplice di partenza. Nel caso di dominio non semplicemente connesso, ci si riconduce al caso di dominio semplicemente connesso.

Nel caso di dominio non semplice, si ha:

$$\begin{aligned}
 \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= & (R = R_1 \cup R_2) \\
 &= \iint_{R_1} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy + \iint_{R_2} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = & (l_1 = \partial R_1, l_2 = \partial R_2) \\
 &= - \oint_{l_1} P dx - \oint_{l_2} P dx = & (l_1 = \gamma_1 \cup \gamma_c, l_2 = \gamma_2 \cup \gamma_c^-) \\
 &= - \int_{\gamma_1} P dx - \int_{\gamma_c} P dx - \int_{\gamma_c^-} P dx - \int_{\gamma_2} P dx = & \left( \int_{\gamma_c^-} P dx = - \int_{\gamma_c} P dx, \right. \\
 & & \left. \gamma_1 \cup \gamma_2 = \partial R = \gamma \right) \\
 &= - \oint_{\gamma} P dx & (A.5)
 \end{aligned}$$

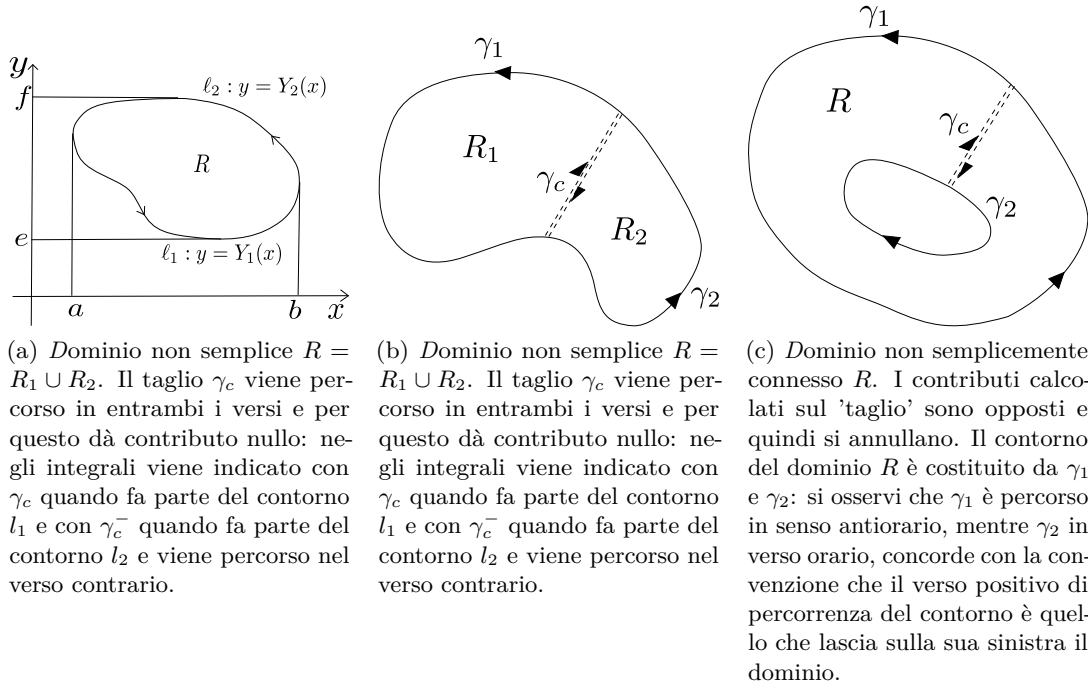


Figura A.1: Dominio semplice, semplicemente connesso e non semplicemente connesso.

■ **Esempio A.1** È possibile calcolare l'area di una superficie  $R$  tramite un integrale di linea, scegliendo le funzioni  $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$  e  $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$ . Infatti,

$$A_R = \iint_R dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\gamma_R} [x dy - y dx]. \quad (A.6)$$

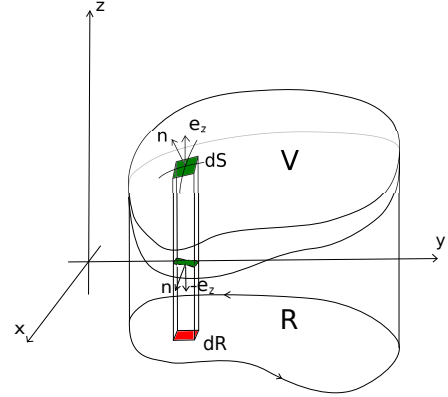
■

### A.1.2 Due utili lemmi

Il prossimo lemma è alla base dei più rinomati teoremi della divergenza e del gradiente: la dimostrazione di questi due teoremi si basa su un facile uso ripetuto di questo lemma. Data la facilità di questo lemma e la sua frequente applicazione nella scrittura di bilanci e in generale di integrazione per parti, è molto conveniente ricordarsi questo semplice risultato.

**Lemma A.1.2** Sotto le ipotesi del teorema di Green nel piano.

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial x_i} = \oint_S A n_i \quad (\text{A.7})$$



*Dimostrazione.* Si segue un ragionamento molto simile a quello utilizzato per la dimostrazione del lemma di Green nel piano. Per  $\partial A / \partial z$ :

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial A}{\partial z} &= \int_R \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} \frac{\partial A}{\partial z} dz dxdy = \\ &= \int_R [A(x, y, f_2(x, y)) - A(x, y, f_1(x, y))] dxdy \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Il passaggio più complicato è nel passare dall'integrale in  $(x, y) \in R$  all'integrale sulla superficie  $S$ , bordo del volume  $V$ : l'elemento infinitesimo  $dR$  di area nel piano-xy è uguale a  $dR = dxdy$ ; il disegno e la dimostrazione fanno riferimento a un volume *semplice* (come nel caso di lemma di Green nel piano, è possibile generalizzare i risultati ottenuti per domini di forma generica): è possibile suddividere la superficie  $S$  nelle due “semisuperfici”  $S^+ : z = f_2(x, y)$  e  $S^- : z = f_1(x, y)$  tali che  $S^+ \cup S^- = S$  e che la normale, uscente dal volume, abbia componente in  $z$  positiva e negativa rispettivamente ( $S^+ : \hat{n} \cdot \hat{z} > 0$ ,  $S^- : \hat{n} \cdot \hat{z} < 0$ ). La superficie elementare  $dR$  è inoltre la proiezione dell'elemento di superficie  $dS$  sul piano-xy: in generale  $dS$  non sarà parallela al piano-xy e quindi sarà maggiore di  $dR$ . Non è difficile dimostrare che

$$dxdy = dR = \begin{cases} dS \hat{z} \cdot \hat{n} & \text{su } S^+ \\ -dS \hat{z} \cdot \hat{n} & \text{su } S^- \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Si può quindi ora continuare nella dimostrazione

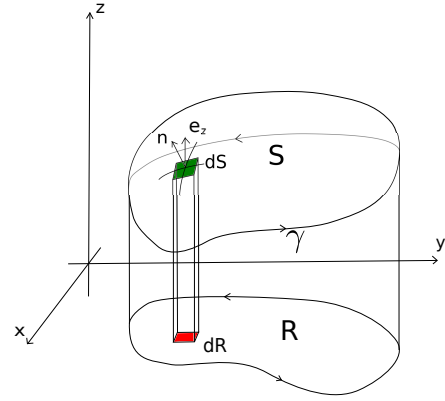
$$\begin{aligned} \int_R [A(x, y, f_2(x, y)) - A(x, y, f_1(x, y))] dxdy &= \\ &= \int_{S^+} A \hat{n} \cdot \hat{z} dS + \int_{S^-} A \hat{n} \cdot \hat{z} dS = \\ &= \oint_S A \hat{z} \cdot \hat{n} dS = \\ &= \oint_S A n_z dS \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

■

Come il lemma precedente è alla base della dimostrazione dei teoremi di gradiente e divergenza, il lemma successivo è alla base della dimostrazione del teorema del rotore.

**Lemma A.1.3** Sotto le ipotesi del teorema di Green nel piano.

$$\int_S [\nabla \times (A\hat{e}_i)] \cdot \hat{n} = \oint_\gamma A dx_i \quad (A.11)$$



*Dimostrazione.* Per  $A\hat{e}_x$ ,  $\nabla \times (A\hat{e}_x) = \partial A/\partial z \hat{e}_y - \partial A/\partial y \hat{e}_z$ . Si scrive la superficie  $S$  in forma parametrica come:  $\mathbf{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z(x, y)\hat{e}_z$ . Il vettore  $\partial \mathbf{r}/\partial y \hat{e}_y + \partial z/\partial y \hat{e}_z$  è parallelo alla superficie  $S$  e quindi perpendicolare alla normale  $\hat{n}$ :

$$0 = \hat{n} \cdot \left( \hat{e}_y + \frac{\partial z}{\partial y} \hat{e}_z \right) \quad (A.12)$$

Scrivendo  $[\nabla \times (A\hat{e}_x)] \cdot \hat{n}$ :

$$[\nabla \times (A\hat{e}_x)] \cdot \hat{n} = \frac{\partial A}{\partial z} \hat{e}_y \cdot \hat{n} - \frac{\partial A}{\partial y} \hat{e}_z \cdot \hat{n} = - \left[ \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial y} \right] \hat{e}_z \cdot \hat{n} \quad (A.13)$$

Se si riconosce  $\partial A(x, y, z(x, y))/\partial y = \partial A/\partial z \partial z/\partial y + \partial A/\partial y$ , si può scrivere:

$$\int_S [\nabla \times (A\hat{e}_x)] \cdot \hat{n} = - \int_S \frac{\partial A}{\partial y} \underbrace{\hat{e}_z \cdot \hat{n} dS}_{dR=dx dy} = - \int_R \frac{\partial A}{\partial y} dx dy = \int_\gamma A dx \quad (A.14)$$

■

### A.1.3 Teorema della divergenza, del rotore e del gradiente

Vengono ora enunciati i teoremi della divergenza, del rotore e del gradiente. Senza entrare nei dettagli delle ipotesi dei teoremi, affinché i loro enunciati siano validi, gli oggetti matematici coinvolti devono almeno esistere. L'ipotesi di "sufficiente regolarità" dei campi vettoriali viene tradotta volgarmente nel comportamento regolare della funzione all'interno del dominio, che esclude l'esistenza di poli (punti del dominio in cui funzione tende all'infinito) e comprende l'esistenza (e la continuità) delle derivate spaziali del campo.

Per far intuire l'utilità dei due lemmi presentati in precedenza, si riportano anche le dimostrazioni dei teoremi: una volta noti i due utili(ssimi) lemmi, queste dimostrazioni sono così immediate da occupare soltanto una riga.

**Teorema A.1.4** [Teorema della divergenza] Si consideri un insieme  $V \subset R^n$  compatto delimitato da una superficie liscia  $S = \partial V$ . Se  $\mathbf{v}$  è un campo vettoriale differenziabile con continuità (di classe  $C^1$ ) definito in un intorno di  $V$ , allora

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} = \oint_S \mathbf{v} \cdot \hat{n}, \quad (A.15)$$

essendo  $\hat{n}$  la normale alla superficie  $S$  uscente dal volume  $V$ .

*Dimostrazione.* Il teorema viene dimostrato scrivendo la divergenza in un sistema di coordinate cartesiane,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ , e applicando il lemma A.1.2 a ogni derivata parziale nella sommatoria,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} = \int_V \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \oint_S \sum_i v_i n_i = \oint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (\text{A.16})$$

■

**Teorema A.1.5 — Teorema del rotore.** In maniera abbastanza generale, sotto le ipotesi dei teoremi precedenti, vale

$$\int_S [\nabla \times \mathbf{v}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}}, \quad (\text{A.17})$$

avendo ommesso l'elemento di lunghezza  $d\ell$  nell'integrale di linea e avendo indicato con  $\hat{\mathbf{t}}$  il versore tangente alla curva  $\gamma$ .

*Dimostrazione.* Il teorema viene dimostrato utilizzando un sistema di coordinate cartesiane e applicando il lemma A.1.3 a ogni componente del vettore  $\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{e}}_x + v_y \hat{\mathbf{e}}_y + v_z \hat{\mathbf{e}}_z = \sum_i v_i \hat{\mathbf{e}}_i$ ,

$$\int_S [\nabla \times \mathbf{v}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_S [\nabla \times (\sum_i v_i \hat{\mathbf{e}}_i)] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_\gamma \sum_i v_i dx_i = \int_\gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_\gamma \sum_i v_i dx_i = \int_\gamma \hat{\mathbf{t}}, \quad (\text{A.18})$$

avendo utilizzato le coordinate cartesiane e la definizione di versore tangente per esprimere l'elemento di lunghezza,  $d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{t}} ds$ . ■

**Teorema A.1.6 — Teorema del gradiente.** In maniera abbastanza generale, sotto le ipotesi dei teoremi precedenti, per un campo scalare  $f$  sufficientemente regolare vale

$$\int_V \nabla f = \oint_S f \hat{\mathbf{n}}. \quad (\text{A.19})$$

*Dimostrazione.* Il teorema viene dimostrato scrivendo il gradiente del campo scalare  $f$  in coordinate cartesiane,  $\nabla f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i$ , e applicando il lemma A.1.2 a ogni derivata parziale nella sommatoria,

$$\int_V \nabla f = \int_V \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i = \oint_S \sum_i f n_i \hat{\mathbf{e}}_i = \oint_S f \hat{\mathbf{n}}. \quad (\text{A.20})$$

■

Prima di continuare i richiami di analisi, viene fatta un'osservazione sulla notazione usata.

**R** Per indicare gli integrali di linea, superficie e volume verrà ommesso l'elemento infinitesimo di linea, superficie e volume, indicando il dominio di integrazione di fianco al segno di integrale. In maniera esplicita l'integrale sulla linea  $\ell$ , sulla superficie  $S$  e sul volume  $V$  di una quantità scalare  $f$  verranno indicati semplicemente con

$$\int_\ell f, \quad \int_S f, \quad \int_V f. \quad (\text{A.21})$$

Il valore di un integrale è indipendente dalle coordinate utilizzate per svolgerlo. Per calcolare il valore dell'integrale è necessario introdurre un sistema di coordinate per parametrizzare in una maniera conveniente la funzione, il dominio e gli elementi infinitesimi di lunghezza, superficie o volume. Spesso questa scelta può essere dettata dalla geometria del dominio. Per completezza vengono riportate esplicitamente le espressioni degli elementi infinitesimi di:

- lunghezza (con versore tangente) della curva  $\ell$ , descritta dalla parametrizzazione  $\ell : \mathbf{r} = \mathbf{r}(l) = \mathbf{r}(l(s)) = \tilde{\mathbf{r}}(s)$ ,

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dl} dl = \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{ds}}_{\hat{\mathbf{t}}} ds = \hat{\mathbf{t}} ds, \quad (\text{A.22})$$

avendo riconosciuto il versore  $\hat{\mathbf{t}}$  tangente alla curva, introdotto l'ascissa curvilinea  $s$ , e indicato con  $\mathbf{r}(l)$  la parametrizzazione in funzione di  $l$  e con  $\tilde{\mathbf{r}}(s)$  la parametrizzazione in funzione di  $s$ .

- di superficie (con versore normale) della superficie bidimensionale  $S$ , descritta dalla parametrizzazione  $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ,

$$\hat{\mathbf{n}} dS = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} du dv \quad (\text{A.23})$$

- di volume del volume tridimensionale  $V$ , descritto dalla parametrizzazione dello spazio  $V : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, w)$ ,

$$dV = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right) du dv dw. \quad (\text{A.24})$$

Si fanno quindi alcuni esempi.

■ **Esempio A.2** Si vuole calcolare l'elemento infinitesimo di curva di una circonferenza  $C$  di raggio  $R$ . Si utilizza un sistema di riferimento cartesiano con origine nel centro della circonferenza e l'angolo  $\theta$  che il vettore posizione  $\mathbf{r}$  forma con l'asse  $x$  per parametrizzare la curva

$$C : \mathbf{r}(\theta) = x(\theta)\hat{\mathbf{x}} + y(\theta)\hat{\mathbf{y}} = R \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + R \sin \theta \hat{\mathbf{y}}. \quad (\text{A.25})$$

L'elemento di curva  $d\mathbf{r}$  risulta

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = (-\sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \hat{\mathbf{y}}) R d\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}} R d\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}} ds, \quad (\text{A.26})$$

avendo introdotto l'ascissa curvilinea  $s = R\theta$  e il versore  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  tangente alla circonferenza.

■

■ **Esempio A.3** Si vuole calcolare la superficie elementare (con versore normale) di una superficie sferica  $S$  parametrizzata con gli angoli  $\varphi$  e  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\varphi, \theta) &= x(\varphi, \theta)\hat{\mathbf{x}} + y(\varphi, \theta)\hat{\mathbf{y}} + z(\varphi, \theta)\hat{\mathbf{z}} = \\ &= R \sin \varphi \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + R \sin \varphi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + R \cos \varphi \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Da un calcolo diretto, senza riportare tutti i passaggi, si ottiene

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} dS &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} d\varphi d\theta = \\ &= (\sin \varphi \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{z}}) R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = \\ &= \hat{\mathbf{R}} R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

■

■ **Esempio A.4** Si vuole calcolare il volume elementare di una volume  $V$  parametrizzato in coordinate sferiche, cioè con il raggio  $R$  e gli angoli  $\varphi$  e  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\varphi, \theta) &= x(R, \varphi, \theta)\hat{\mathbf{x}} + y(R, \varphi, \theta)\hat{\mathbf{y}} + z(R, \varphi, \theta)\hat{\mathbf{z}} = \\ &= R \sin \varphi \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + R \sin \varphi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + R \cos \varphi \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Da un calcolo diretto, senza riportare tutti i passaggi, si ottiene

$$\begin{aligned}
 dV &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial R} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} dR d\varphi d\theta = \\
 &= \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}} R^2 \sin \varphi dR d\varphi d\theta = \\
 &= R^2 \sin \varphi dR d\varphi d\theta.
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

■

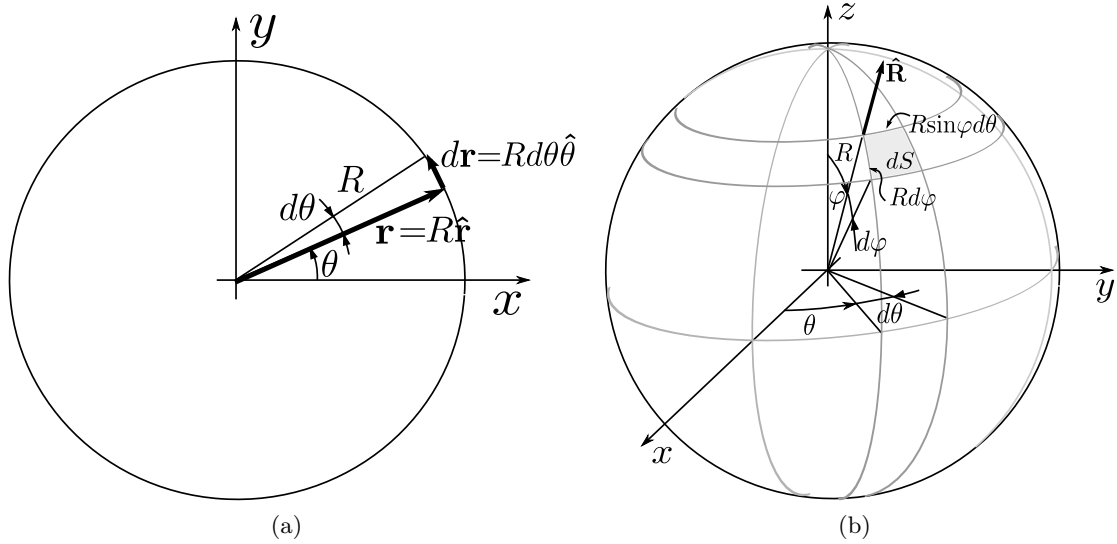


Figura A.2: Sistemi di coordinate usati negli esempi A.2-A.4. (a) Coordinate polari. (b) Coordinate sferiche.

## A.2 Campi vettoriali conservativi

In alcuni casi l'integrale  $I = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}}$  è indipendente dal percorso di integrazione  $\gamma$ . L'indipendenza del valore dell'integrale  $I$  da  $\gamma$  è strettamente collegata all'idea di differenziale esatto: quando  $I$  è indipendente da  $\gamma$ , ma dipende solo dai suoi estremi  $a, b$ , si può scrivere  $I = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \int_a^b d\phi = \phi(b) - \phi(a)$ . Se l'integrale di linea  $I$  su ogni curva nel dominio  $V$  dipende solo dagli estremi di integrazione, il campo vettoriale  $\mathbf{F}$  viene definito **conservativo**.

L'indipendenza del valore dell'integrale dal percorso di integrazione ha alcune conseguenze:

- l'integrale su ogni percorso chiuso è nullo:  $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ ;
- il campo  $\mathbf{F}$  può essere scritto come gradiente di una funzione scalare  $\phi$ , che assume il significato di potenziale:  $\mathbf{F} = \nabla \phi$ ;
- il rotore del campo vettoriale è nullo:  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$  (infatti  $\nabla \times \nabla \phi = 0$ , per ogni funzione scalare  $\phi$ ).

Le condizioni elencate sono quindi **condizioni necessarie** per l'indipendenza dell'integrale dal percorso di integrazione. Se prese a se stanti, esse non sono anche condizioni sufficienti. Affinchè la seconda e la terza condizione siano anche sufficienti, è necessario che il dominio sia semplicemente connesso.

Si fa ora un esempio su due campi vettoriali definiti su un dominio non semplicemente connesso, cioè dove tutti i percorsi chiusi sono riducibili a un punto. Entrambi hanno rotore nullo all'interno del dominio, ma solo uno dei due è conservativo.



■ **Esempio A.5** Dati i seguenti campi vettoriali

$$\mathbf{F}_1 = \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{y}} \quad , \quad \mathbf{F}_2 = -\frac{y}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{A.31})$$

si chiede di

1. definire il dominio e 'disegnare' i campi vettoriali;
  2. calcolare il rotore, la divergenza e (se esiste) la funzione  $\phi$  t.c.  $\mathbf{F} = \nabla\phi$ ;
  3. calcolare la circuitazione ( $\Gamma = \oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ ) sulle circonferenze di raggio unitario  $C$  centrata in  $(0,0)$  e  $C'$  centrata in  $(2,1)$ ;
  4. calcolare il flusso ( $\Phi = \oint_l \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ ) uscente dalle curve  $C$  e  $C'$ ;
  5. calcolare l'integrale  $\int_\gamma \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}$  su una curva  $\gamma$  che avvolge due volte l'origine in senso antiorario.
1. Il dominio  $\Omega$  dei due campi vettoriali è  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ : non è semplicemente connesso.  
*Osservazione.* A differenza di  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  è semplicemente connesso (perchè?).  
*Grafici...*
2. • Rotore: all'interno del dominio  $\Omega$  il rotore dei due campi vettoriali è nullo. Infatti, la componente lungo  $z$  è l'unica che può essere non nulla, poichè il campo è definito nel piano  $xy$  e dipende solo da  $x$  e  $y$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial F_{1x}}{\partial y} &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \\ \frac{\partial F_{2y}}{\partial x} - \frac{\partial F_{2x}}{\partial y} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

- Divergenza: all'interno del dominio  $\Omega$  la divergenza dei due campi vettoriali è nullo.  
 (...)
- $\phi$ : all'interno del dominio  $\Omega$ , le funzioni  $\phi$ , a meno di una costante (ininfluente) valgono

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \quad , \quad \phi_2 = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) . \quad (\text{A.33})$$

Ad esempio per il campo  $\mathbf{F}_1$ , si può scrivere la relazione  $\mathbf{F} = \nabla\phi$  in coordinate cartesiane

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} . \quad (\text{A.34})$$

Integrando la prima in  $x$  e la seconda in  $y$ :

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \int \frac{x}{x^2 + y^2} dx = \int \frac{1}{x^2 + y^2} d(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + f(y) \\ \phi(x, y) &= \int \frac{y}{x^2 + y^2} dy = \int \frac{1}{x^2 + y^2} d(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + g(x) \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

dove compaiono le funzioni  $f(y)$  e  $g(x)$ , che tengono conto dell'arbitrarietà dell'integrale di una derivata parziale: si pensi di fare la derivata parziale delle relazioni appena trovate. Derivando la prima rispetto a  $x$  si ha:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right) + \frac{\partial f(y)}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} + 0 \quad (\text{A.36})$$

La derivata  $\frac{\partial f(y)}{\partial x}$  è identicamente nulla, poichè la funzione  $f(y)$  non dipende da  $x$ . Da un confronto tra le due forme di  $\phi$ , segue che  $f(y)$  e  $g(x)$  devono essere uguali e costanti: il valore di questa costante additiva è comunque ininfluente ai termini della definizione di un potenziale.

3. • Circuitazione su  $C'$ : entrambi gli integrali calcolati su  $C'$  sono nulli, poichè il percorso di integrazione è una linea chiusa che non circonda l'origine ma una regione semplicemente connessa nella quale il campo ammette potenziale. In altre parole,  $C'$  circonda una regione del dominio che è semplicemente connessa ed è possibile applicare direttamente il teorema del rotore, avendo definito  $R'$  come la parte del dominio interna a  $C'$ ,

$$\Phi = \oint_{C'} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \int_{R'} [\nabla \times \mathbf{F}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad (\text{A.37})$$

poichè il rotore è nullo in tutto  $\Omega$  e quindi anche in  $R' \subset \Omega$ .

- Circuitazione su  $C'$ :  $C$  invece circonda l'origine, causa della non semplice connessione del dominio; una diretta applicazione del teorema del rotore non è quindi possibile; gli integrali su  $C$  devono essere calcolati e valgono

$$I_1 = \oint_C \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad I_2 = \oint_C \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} = 2\pi \quad (\text{A.38})$$

I due integrali possono essere calcolati facilmente in coordinate polari. L'elemento  $d\mathbf{r}$  sulla circonferenza di raggio  $r$  è  $d\mathbf{r} = r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ . I due campi possono essere scritti in coordinate polari come:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{r} \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{F}_2 = \frac{1}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.39})$$

Si può notare che il campo  $\mathbf{F}_1$ , calcolato sul contorno, è sempre perpendicolare ad esso. Il primo integrale è quindi nullo.

$$\begin{aligned} I_{1C} &= \int_C \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} 0 d\theta = 0 \\ I_{2C} &= \int_C \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

4. • Flussi su  $C'$ : Poichè  $R'$  (vedi sopra) è semplicemente connesso, si può applicare il teorema della divergenza. I flussi di entrambi i campi su  $C'$  sono nulli, poichè la divergenza dei due campi è nulla in tutto il dominio  $\Omega$ .
- Flussi su  $C$ :  $C$  invece circonda l'origine, causa della non semplice connessione del dominio; una diretta applicazione del teorema della divergenza non è quindi possibile; gli integrali su  $C$  devono essere calcolati e valgono

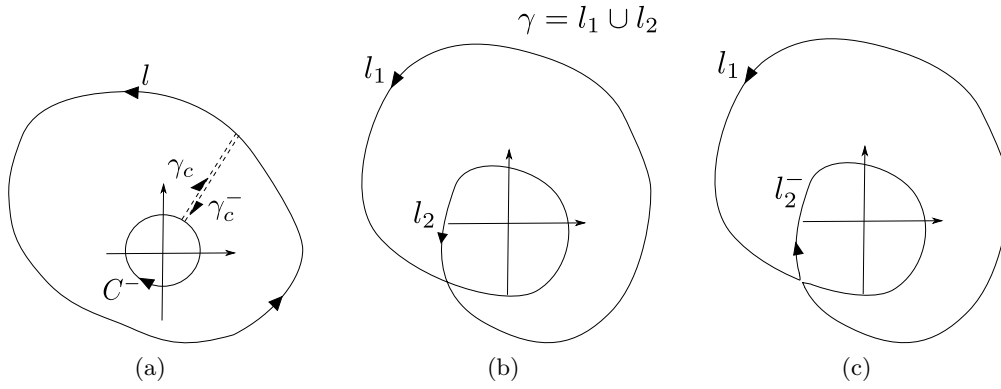
$$\Phi_{C1} = \oint_C \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{n} = 2\pi, \quad \Phi_{C2} = \oint_C \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{n} = 0. \quad (\text{A.41})$$

5. L'integrale di  $\int_{\gamma} \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}$  vale  $4\pi$ .

- Se la circuitazione calcolata sul contorno  $C$  vale  $\Gamma$  ( $2\pi$  nel caso dell'esercizio), la circuitazione calcolata su qualsiasi altra curva  $l$  che avvolge l'origine una sola volta avrà lo stesso valore. Infatti, se viene introdotto il 'taglio'  $\gamma_c$  (invalicabile), si ottiene che il dominio 'tagliato' è semplicemente connesso e la circuitazione sul suo contorno ( $\partial \cup \gamma_c \cup C^- \cup \gamma_c^-$ ) è nulla, dove con  $C^-$  si è indicata la circonferenza percorsa in senso orario. Ricordando che i contributi su  $\gamma_c$  si annullano a vicenda e che se si inverte il verso di percorrenza di una curva la circuitazione cambia segno

$$0 = \int_{\partial \cup \gamma_c \cup C^- \cup \gamma_c^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_c} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_c^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (\text{A.42})$$

e quindi  $\int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma$ .

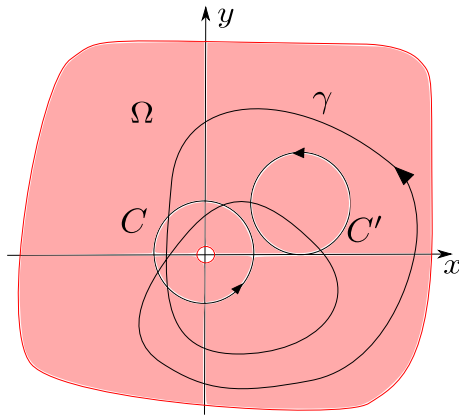


- Ora il percorso  $\gamma$  può essere 'suddiviso' nelle curve  $l_1, l_2$ . Si può definire ora la curva composta da  $l_1$  e  $l_2^-$  (il verso è importante!!). Con ragionamenti analoghi a quelli fatti in precedenza:

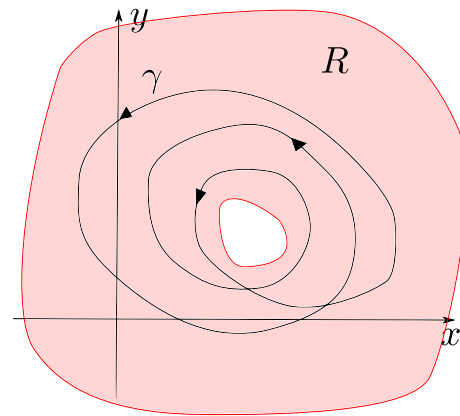
$$0 = \int_{l_1 \cup l_2^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{A.43})$$

Da questo si ricava che  $\int_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma$ . Poichè l'integrale su  $\gamma$  è la somma dei due integrali, si ottiene:

$$\int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{l_1 \cup l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\Gamma = 4\pi \quad (\text{A.44})$$



(a) Percorsi di integrazione dell'esercizio.  $C$  avvolge una volta sola in 'buco' nel dominio,  $C'$  mai,  $\gamma$  due volte.



(b) Integrale su un percorso non riducibile. Il dominio  $R$  (in rosa) non è semplicemente connesso. Si può dimostrare che se l'integrale  $I_1$  definito su un percorso 'che circonda' una sola volta 'il buco' all'interno del dominio  $I_1 = \oint_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma$ , allora l'integrale  $I$  definito su  $\gamma$  che circonda  $N$  (indice di avvolgimento) volte 'il buco' nello stesso verso di  $l_1$ , vale  $I_1 = \oint_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = N\Gamma$ .

■

### A.3 Descrizione lagrangiana e descrizione euleriana

La dinamica dei mezzi continui, ad esempio i solidi o i fluidi, può essere descritta con un approccio lagrangiano o euleriano. La **descrizione lagrangiana**, utilizzata spesso in meccanica dei solidi, consiste nel seguire il moto nello spazio delle singole particelle del mezzo continuo. La **descrizione euleriana**, utilizzata spesso in meccanica dei fluidi, consiste nel fissare un volume di controllo e descrivere la variazione delle quantità meccaniche al suo interno, tenendo in considerazione i flussi della quantità meccanica attraverso le pareti fisse del volume di controllo. È possibile descrivere l'evoluzione delle quantità meccaniche di particelle e volumi in moto arbitrario, come si vedrà in §.

Si introducono due sistemi di coordinate: uno è solidale con il mezzo continuo che occupa il volume  $V(t)$  dipendente dal tempo, mentre l'altro è fisso. Si può pensare al sistema di riferimento solidale con il continuo come un' "etichetta" che viene applicata a ogni **punto materiale** del mezzo continuo che occupa il volume  $V(t)$ . Un sistema di riferimento fisso è indipendente dal moto del mezzo continuo, come ad esempio il sistema di coordinate cartesiane, la cui origine e i cui assi sono fissi nel tempo. Mentre il volume  $V(t)$  cambia nel tempo (trasla, ruota, si deforma ...), un punto del volume  $V(t)$  ha coordinate costanti  $\mathbf{x}_0$  rispetto al sistema di riferimento solidale al volume, cioè che si muove e si deforma insieme al volume: questa coordinata, detta lagrangiana, può essere pensata come l'"etichetta" assegnata al punto materiale del continuo. La coordinata euleriana  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ , relativa al sistema di riferimento fisso, descrive il moto del punto.

**R** Il sistema di riferimento solidale al corpo, dipende dal tempo mentre le coordinate  $\mathbf{x}_0$  di un punto del volume sono costanti. Il sistema di riferimento è indipendente dal tempo, mentre le coordinate  $\mathbf{x}$  di un punto materiale del volume (quindi con  $\mathbf{x}_0$  costante) sono dipendenti dal tempo.

Assumendo che all'istante  $t = 0$  i due sistemi coincidano (e quindi  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0$ ), si può pensare alle coordinate  $\mathbf{x}_0$  come una configurazione di riferimento della configurazione attuale  $\mathbf{x}$ . La trasformazione  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  descrive l'evoluzione dei punti  $\mathbf{x}_0$  del volume  $V_0 = V(0)$  nel tempo  $t$ . La velocità del punto etichettato con  $\mathbf{x}_0$  (cioè quello passante in  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  in  $t = 0$ ) nel sistema di riferimento fisso è

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} =: \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (\text{A.45})$$

Sia  $f(\mathbf{x}, t)$  una funzione (scalare, vettoriale, tensoriale) dipendente sia dallo spazio, sia dal tempo, si indica con  $\frac{\partial f}{\partial t}$  la derivata parziale rispetto al tempo, che tiene conto delle variazioni del valore di  $f$  in punto  $\mathbf{x}$  costante.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} \quad (\text{A.46})$$

Si riporta poi per completezza e per dare un'interpretazione anche la definizione di  $\frac{df}{dt}$ , già usata sopra nella definizione della velocità di un punto del volume

$$\frac{df}{dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} \quad (\text{A.47})$$

che viene svolta a  $\mathbf{x}_0$  costante: questa derivata temporale è quella che consente di considerare la variazione della funzione  $f$ , percepita dal punto etichettato  $\mathbf{x}_0$  che evolve con il volume. Non è difficile trovare il legame tra le due derivate utilizzando semplicemente la legge di

derivazione di funzioni composte. Data una funzione  $f(\mathbf{x}, t)$ , si definisce  $f_0(\mathbf{x}_0, t)$  come la funzione composta  $f_0 = f \circ x$ .

$$f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) = f_0(\mathbf{x}_0, t) = f_0(\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t), t) \quad (\text{A.48})$$

Si può quindi scrivere

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_t \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}_0} + \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f \quad (\text{A.49})$$

dove si è riconsociuto l'operatore  $\nabla$  nell'ultimo passaggio. Si può infine “rimuovere” la funzione  $f$  per ottenere la relazione tra la forma delle due derivate, valida per funzioni scalari, vettoriali, tensoriali

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (\text{A.50})$$

#### A.4 Derivata temporale di integrali su domini dipendenti dal tempo: formule di Leibniz

In questa sezione si enunciano e dimostrano i teoremi per la derivazione in tempo su domini mobili di integrali di volume, flussi e circuitazioni.

**Teorema A.4.1 — Integrale di volume (Teorema di Reynolds).**

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \oint_{S(t)} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{A.51})$$

*Dimostrazione.* Il volume al tempo  $t + \Delta t$  può essere pensato come la somma del volume al tempo  $t$  e della variazione di volume  $v(t, \Delta t)$ , che si riscontra nell'unione, con segno, dei volumi di integrazione: formalmente “ $V(t + \Delta t) = V(t) + v(t, \Delta t)$ ”. Il volume elementare  $dv$  può essere ricavato dal prodotto scalare tra la superficie elementare (con normale uscente)  $\hat{\mathbf{n}} dS$  e lo spazio infinitesimo percorso dal punto della superficie  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{v} \Delta t$ , trascurando gli infinitesimi di ordine superiore:  $dv = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \Delta t dS$ , cfr. figura A.3. Infine è possibile usare l'espansione di serie  $f(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f(\mathbf{x}, t) + \partial f / \partial t(\mathbf{x}, t) \Delta t$ . Si scrive l'incremento dell'integrale di volume:

$$\begin{aligned} \int_{V(t+\Delta t)} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) &= \\ &= \int_{V(t)} [f(\mathbf{x}, t + \Delta t) - f(\mathbf{x}, t)] + \int_{v(t)} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \\ &= \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \Delta t + \oint_{S(t)} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta t \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Dividendo per  $\Delta t$ , nel limite  $\Delta t \rightarrow 0$  è possibile riconoscere a sinistra dell'uguale la derivata desiderata e scrivere:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \oint_{S(t)} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{A.53})$$

■

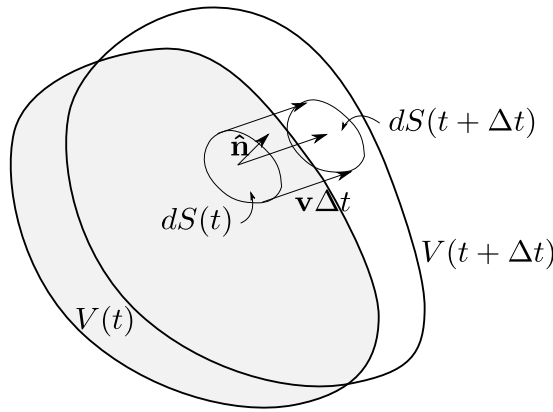


Figura A.3: Schema che illustra il moto della volume  $V$ , tra gli istanti temporali  $t$  e  $t + \Delta t$ . Il volume  $V$  ha come frontiera la superficie esterna  $S$ . Viene messo in evidenza un elemento infinitesimo  $dS$  della superficie  $S$  e viene descritta la sua evoluzione. Si osservi la convenzione del versore normale  $\hat{\mathbf{n}}$ , uscente dalla superficie  $S$ . Il volume si muove all'interno di un dominio nel quale è definito il campo  $f(\mathbf{x}, t)$ , non rappresentato in figura.

**Teorema A.4.2 — Derivata temporale del flusso.**

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{S(t)} \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{v} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\gamma(t)} \mathbf{f} \times \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad (\text{A.54})$$

*Dimostrazione.* Si procede in maniera analoga a quanto fatto in precedenza per l'integrale di volume. Per ricavare l'identità è richiesta la “sufficiente regolarità” del campo, poichè viene utilizzato il teorema della divergenza. Si scrive l'incremento del flusso

$$\begin{aligned} \int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t + \Delta t) \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{S(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \\ &= \int_{S(t+\Delta t)} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{S(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Facendo riferimento alla figura A.4, si applica il teorema della divergenza al volume (volume elementare  $dv = dS(t) \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \Delta t$ ) delimitato dalle superfici  $S(t + \Delta t)$ ,  $S(t)$  e dalla superficie laterale  $S_{lat}$ , che ha per elemento di superficie  $\hat{\mathbf{n}} dS_{lat} = d\mathbf{l} \times \mathbf{v} \Delta t$ , da considerarsi con segno, e si ottiene

$$\int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{S(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\gamma(t)} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{t}} \times \mathbf{v} \Delta t = \int_{S(t)} (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta t \quad (\text{A.56})$$

Si rielaborano i termini in (A.56) usando la proprietà ciclica del prodotto misto  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$  e le proprietà del prodotto vettoriale. Si sostituisce poi in (A.55), si divide per  $\Delta t$  e si riconosce la derivata cercata facendo tendere al limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , concludendo così la dimostrazione:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{S(t)} \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{v} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\gamma(t)} \mathbf{f} \times \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad (\text{A.57})$$

■

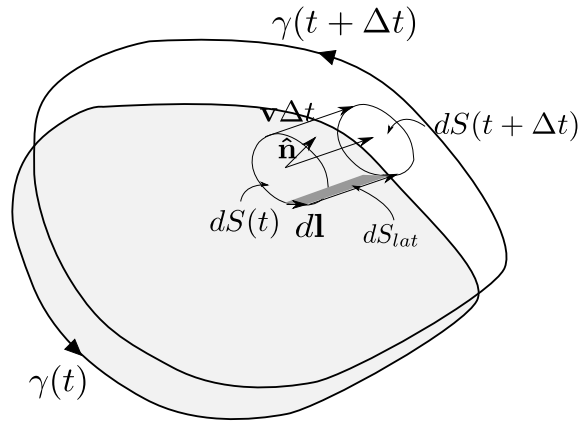


Figura A.4: Schema che illustra il moto della superficie  $S$ , tra gli istanti temporali  $t$  e  $t + \Delta t$ . La superficie  $S$  ha come frontiera la curva  $\gamma$ . Vengono messi in evidenza l'elemento di superficie  $\hat{\mathbf{n}} dS$ , l'elemento di superficie laterale  $\hat{\mathbf{n}}_{lat} dS_{lat} = d\mathbf{l} \times \mathbf{v} \Delta t$  del volumetto infinitesimo  $dv$ . Si osservi la convenzione che lega il verso di percorrenza della frontiera  $\gamma$  con la normale  $\hat{\mathbf{n}}$  alla superficie tramite la regola della mano destra. La superficie si muove all'interno di un dominio nel quale è definito il campo  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ , non rappresentato in figura.

**Teorema A.4.3 — Derivata temporale della circuitazione.**

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma(t)} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \int_{\gamma(t)} \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{f}) \times \mathbf{v} \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \Big|_A^B \quad (\text{A.58})$$

*Dimostrazione.* Seguendo un procedimento analogo a quello svolto finora si scrive l'incremento dell'integrale desiderato. Per ricavare l'identità è richiesta la “sufficiente regolarità” del campo, poichè viene utilizzato il teorema del rotore.

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma(t+\Delta t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t + \Delta t) \cdot \hat{\mathbf{t}} - \int_{\gamma(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{t}} = \\ &= \int_{\gamma(t+\Delta t)} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \int_{\gamma(t+\Delta t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{t}} - \int_{\gamma(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{t}} \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

Facendo riferimento alla figura A.5, si applica il teorema della rotore alla superficie (superficie elementare  $\hat{\mathbf{n}}dS = d\hat{\mathbf{t}} \times \mathbf{v}\Delta t$ ) delimitata dalle curve  $\gamma(t + \Delta t)$ ,  $\gamma(t)$  e dalle curve “lateral”  $\Delta \mathbf{x}_A = \mathbf{v}_A \Delta t$ ,  $\Delta \mathbf{x}_B = \mathbf{v}_B \Delta t$ , da considerarsi con segno, e si ottiene

$$- \int_{\gamma(t+\Delta t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{t}} + \int_{\gamma(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{t}} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_B, t) \cdot \mathbf{v}_B \Delta t - \mathbf{f}(\mathbf{x}_A, t) \cdot \mathbf{v}_A \Delta t = \int_{\gamma(t)} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \hat{\mathbf{t}} \times \mathbf{v} \Delta t \quad (\text{A.60})$$

Si rielaborano i termini in (A.60) usando la proprietà ciclica del prodotto misto  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$  e le proprietà del prodotto vettoriale. Si sostituisce poi in (A.59), si divide per  $\Delta t$  e si riconosce la derivata cercata facendo tendere al limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , concludendo così la dimostrazione:

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma(t)} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \int_{\gamma(t)} \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{f}) \times \mathbf{v} \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \Big|_A^B \quad (\text{A.61})$$

Se il campo  $\mathbf{f}$  e la curva  $\gamma(t)$  sono continui e la curva  $\gamma(t)$  è chiusa, i termini di contorno si annullano. Si ottiene così la derivata della circuitazione

$$\frac{d}{dt} \oint_{\gamma(t)} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \oint_{\gamma(t)} \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{f}) \times \mathbf{v} \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad (\text{A.62})$$

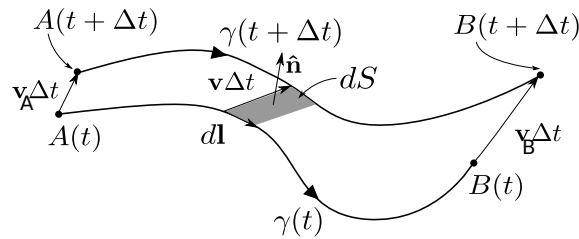


Figura A.5: Schema che illustra il moto della curva  $\gamma$ , tra gli istanti temporali  $t$  e  $t + \Delta t$ . La curva  $\gamma$  ha come frontiera i punti  $A(t)$  e  $B(t)$ . Vengono messi in evidenza l'elemento di lunghezza  $d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{t}}dl$  e l'elemento di superficie tra le due curve  $\hat{\mathbf{n}}dS = d\hat{\mathbf{t}} \times \mathbf{v}\Delta t$ . Si osservi che per applicare il teorema del rotore con la normale scelta in figura, è necessario invertire il verso di percorrenza (e di conseguenza i segni degli integrali, cfr. eq. A.60) della curva  $\gamma(t + \Delta t)$  e del segmento elementare  $\mathbf{v}_A \Delta t$ , al fine di rispettare la convenzione dettata dalla regola della mano destra che lega la normale a una superficie e il verso di percorrenza della sua frontiera (cfr. figura A.4). La curva si muove all'interno di un dominio nel quale è definito il campo  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ , non rappresentato in figura.



### A.5 Rappresentazione del termine di derivata temporale nelle equazioni di bilancio

Nella forma integrale delle equazioni di bilancio per un volume materiale  $V(t)$  che descrivono la dinamica di un mezzo continuo compare la derivata temporale dell'integrale di volume della quantità fisica di interesse,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f. \quad (\text{A.63})$$

Il volume materiale  $V(t)$  si muove con la velocità del mezzo continuo e il teorema di Reynolds A.4.1 permette di rielaborare questo termine ed esprimere questa derivata temporale in termini di integrali svolti su un volume di controllo  $V_c$  fisso nello spazio. Tramite il teorema di Reynolds A.4.1 lo stesso termine può essere scritto in termini di integrali svolti su un volume generico  $v(t)$  in moto arbitrario, che risulta solidale nel sistema di coordinate  $\chi$ . Il cambio di coordinate preso in considerazione ora è  $\mathbf{x}(\chi, t)$ , dove  $\chi$  può essere pensato come il sistema di “etichettatura” applicato ai punti del volume  $v(t)$ . Rispetto al sistema di riferimento fisso  $\mathbf{x}$ , le particelle di tale volume sono in moto con velocità

$$\mathbf{w} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\chi} \mathbf{x}(\chi, t). \quad (\text{A.64})$$

Il volume  $v(t)$  risulta quindi definito dalla sua condizione iniziale e dalla velocità  $\mathbf{w}$  dei punti della sua superficie. La derivata sul volume mobile  $v(t)$  è

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} f dv &= \quad (\text{thm Reynolds per } v(t)) \\ &= \int_{v(t)} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} f dv + \oint_{\partial v(t)} f \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad \left( + \oint_{\partial v(t)} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \oint_{\partial v(t)} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) \\ &= \int_{v(t)} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} f dv + \oint_{\partial v(t)} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds - \oint_{\partial v(t)} f (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad (\text{thm di Reynolds per } V(t)) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{V(t) \equiv v(t)} f dV - \oint_{\partial v(t)} f (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds, \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

dove è stata usata la formula ricavata in precedenza per  $\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dV$ .

Quanto scritto vale per qualsiasi volume  $v(t)$  in moto generico con velocità  $\mathbf{w}$  della superficie  $\partial v(t)$  a qualsiasi istante di tempo. Se si considerano il volume di controllo  $V_c$  (fisso,  $\mathbf{w} = 0$ ) e il volume generico  $v(t)$  coincidenti al tempo  $t$  con il volume materiale  $V(t)$  (in moto con la stessa velocità  $\mathbf{w} = \mathbf{v}$  del continuo), si ricava la regole per trasformare la derivata temporale su un dominio materiale  $V(t)$  usata nell'approccio lagrangiano, in termini di integrali svolti sul volume di controllo  $V_c$  e sul suo contorno  $S_c$ , impiegati nella descrizione euleriana del problema, come caso particolare della descrizione euleriana di un volume  $v(t)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} f &= \quad (\text{Lagrange}) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{V_c \equiv V(t)} f + \oint_{\partial V_c \equiv \partial V(t)} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{Eulero}) \quad (\text{A.66}) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{v(t) \equiv V(t)} f + \oint_{\partial v(t) \equiv \partial V(t)} f (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{“ALE”}) \end{aligned}$$

Si sono ottenute le tre forme di rappresentazione più comuni per la derivata di integrali su volumi mobili per problemi di meccanica del continuo. Quando vengono scritte le equazioni

di bilancio (ad esempio massa, quantità di moto, energia ...) in forma integrale, queste possono essere scritte per

- un volume materiale, le cui particelle sono in moto con la stessa velocità del continuo (sia esso un fluido, un solido elastico o no, ...): se la velocità  $\mathbf{v}$  dei punti volume  $V(t)$  coincide con quella di punti del continuo, il volume  $V(t)$  è un volume materiale.
- un volume di controllo, fisso:  $V_c$
- un volume in moto generico: usiamo il volume  $v(t)$  i cui punti si muovono con velocità  $\mathbf{w}$  generica.

Quando le equazioni di bilancio vengono scritte riferite ai tre volumi elencati sopra, si definiscono i tre tipi di rappresentazione usati in meccanica del continuo (di nuovo, sia esso un fluido, un solido, ...)

- rappresentazione **lagrangiana**: si segue l'evoluzione del continuo seguendo la traiettoria di ogni particella. Il volume mobile nel sistema di riferimento "fisso", si muove con la stessa velocità delle particelle; questa descrizione viene usata frequentemente in meccanica dei solidi, quando gli spostamenti delle particelle sono sufficientemente piccoli e il determinante  $J$  della trasformazione è non singolare (e spesso  $\approx 1$ , es. piccole deformazioni).
- rappresentazione **euleriana**: si segue l'evoluzione del continuo sfruttando il volume di controllo  $V_c$  solidale al sistema di riferimento "fisso" e scrivendo le equazioni di bilancio considerando le variazioni dovute alla sola variazione in tempo e ai flussi attraverso la superficie del volume di controllo. Questa descrizione viene frequentemente usata in meccanica dei fluidi, dove spesso gli spostamenti delle particelle sono "molto grandi".
- rappresentazione **arbitraria** (ALE: arbitrary Lagrangian Eulerian): il volume  $v(t)$  ha un moto "generale", indipendente da quello delle particelle del continuo: la variazione della quantità è composta dalla sola variazione temporale e dal contributo dei flussi "relativi" attraverso la superficie del volume di controllo (se  $\mathbf{v}$  è la velocità delle particelle e  $\mathbf{w}$  quella della superficie del volume  $v(t)$  rispetto allo stesso sistema di riferimento,  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$  è la velocità relativa del fluido rispetto al volume  $v(t)$ ). Può essere spesso usata quando il dominio del problema varia nel tempo: si pensi a una simulazione numerica di una corrente attorno a un corpo rigido che subisce degli spostamenti o rotazioni (moderate) nel tempo o una corrente attorno a un'ala deformabile.

Si noti come la rappresentazione "ALE" generalizza le altre due. Se il volume  $v(t)$  coincide con il volume materiale  $V(t)$  si ritorna alla descrizione lagrangiana: allora  $\mathbf{w} = \mathbf{v}$  e non c'è flusso attraverso la superficie. Se il volume  $v(t)$  coincide con il volume materiale  $V_c$ , allora  $\mathbf{w} = 0$  e si ottiene la rappresentazione euleriana.

## A.6 Bilanci integrali

I bilanci integrali vengono scritti partendo da un volume materiale  $V(t)$  qualsiasi, partendo dai principi della fisica classica

- conservazione della massa;
- prima e seconda equazione cardinale della dinamica;
- bilancio di energia totale, somma di meccanica ed interna, che include i termini di flusso di calore, e che può essere ricondotto al primo principio della termodinamica.

### A.6.1 Bilancio di massa

La massa di un volume materiale  $V(t)$  è costante nel tempo, poichè il volume materiale è costituito sempre dalle stesse particelle del continuo.

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho = 0 \quad (\text{A.67})$$

### A.6.2 Prima equazione cardinale e bilancio della quantità di moto

La prima equazione cardinale della dinamica lega la quantità di moto  $\mathbf{Q}$  di un sistema alla risultante delle forze esterne  $\mathbf{R}^{ext}$  agenti su di esso.

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}^{ext} \quad (\text{A.68})$$

Separando i contributi di forze di volume e di superficie, il bilancio di quantità di moto per un volume materiale  $V(t)$  arbitrario

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} = \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n + \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} \quad (\text{A.69})$$

avendo indicato con  $\mathbf{t}_n$  il vettore sforzo agente sulla superficie esterna  $S(t)$  del volume materiale e  $\mathbf{g}$  le forze per unità di massa (come ad esempio l'accelerazione di gravità).

### A.6.3 Seconda equazione cardinale e bilancio del momento della quantità di moto

La seconda equazione cardinale della dinamica lega il momento della quantità di moto  $\Gamma_H$  rispetto a un polo H con il momento risultante delle azioni esterne  $\mathbf{M}^{ext}$  (e con il moto del polo H)

$$\frac{d\Gamma_H}{dt} = -\dot{\mathbf{x}}_H \times \mathbf{Q} + \mathbf{M}^{ext} \quad (\text{A.70})$$

Se si considera un polo H fisso e si indica con  $\mathbf{r}$  il raggio vettore dal polo H ai “punti fisici” del volume materiale, il bilancio integrale di momento angolare per un volume materiale (in assenza di coppie esterne) è

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{u} = \oint_{S(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n + \int_{V(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{g} \quad (\text{A.71})$$

### A.6.4 Bilancio di energia totale

L'energia totale di un sistema è la somma della sua energia interna e cinetica. La variazione di energia totale è dovuta al lavoro delle forze agenti sul sistema e ai flussi di calore attraverso la superficie del volume (in assenza di fonti di calore interne al volume).

$$\frac{dE^{tot}}{dt} = L - Q \quad (\text{A.72})$$

dove con  $L$  si è indicato il lavoro svolto sul sistema e con  $Q$  i flussi di calore uscenti da esso. Per un volume materiale

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e^{tot} = \oint_{S(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_n + \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \oint_{S(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{A.73})$$

dove  $\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  positivo indica un flusso di calore uscente. L'energia totale per unità di massa può essere scritta come somma del contributo interno e del contributo cinetico

$$e^t = e + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \quad (\text{A.74})$$

Introducendo la definizione di entalpia  $h = e + Pv = e + P/\rho$  ci si può ricondurre a molti casi analizzati durante il corso di Fisica Tecnica, partendo ora da unquadro generale sui bilanci integrali: partendo dai bilanci generali, si possono introdurre le ipotesi di sistema chiuso, adiabatico o isolato, annullando i termini di flusso di massa, di flusso di calore o i termini di energia e calore. Il bilancio di energia per un volume di controllo  $V_c$  fisso (vedi sezione successiva), dopo aver scritto il termine di sforzo separando il contributo di pressione da quello di sforzi viscosi  $\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{s}_n$ , diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho e^t &= - \oint_{S_c} \rho e^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_c} P \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{S_c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}_n + \int_{V_c} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \oint_{S_c} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = (\rho h^t = \rho(e^t + P/\rho)) \\ &= - \oint_{S_c} \rho h^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{S_c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}_n + \int_{V_c} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \oint_{S_c} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

avendo messo in evidenza il flusso di entalpia totale  $h^t$ .

### A.6.5 Bilanci integrali per volumi in moto arbitrario

I bilanci integrali per un volume  $v(t)$  in moto generico con velocità  $\mathbf{w}$  possono essere ricavati partendo da quelli per un volume  $V(t)$  materiale, ricavati nella sezione precedente, con l'utilizzo del teorema del trasporto di Reynolds per modificare il termine di derivata temporale. Per un volume  $v(t)$ , la cui superficie  $\partial s(t)$  ha velocità  $\mathbf{w}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho + \oint_{s(t)} \rho (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{u} + \oint_{s(t)} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{s(t)} \mathbf{t}_n + \int_{v(t)} \rho \mathbf{g} \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{u} + \oint_{s(t)} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{u}) (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{s(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n + \int_{v(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{g} \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^{tot} + \oint_{s(t)} \rho e^t (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{s(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_n + \int_{v(t)} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \oint_{s(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

Per un volume di controllo  $V_c$  fisso,  $\mathbf{w} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho + \oint_{S_c} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \mathbf{u} + \oint_{S_c} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{S_c} \mathbf{t}_n + \int_{V_c} \rho \mathbf{g} \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{u} + \oint_{S_c} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{S_c} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n + \int_{V_c} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{g} \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho e^t + \oint_{S_c} \rho e^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{S_c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_n + \int_{V_c} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \oint_{S_c} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$