Esercizio 9 .4 — Strato limite di Blasius e sforzo a parete. Partendo dalle equazioni di Prandtl per lo strato limite bidimensionale stazionario laminare, ricavare l'equazione di Blasius per lo strato limite laminare e le condizioni al contorno per la corrente di stato limite su una lamina semi-infinita.
Ricavare poi l'espresisone dello sforzo viscoso a parete e gli spessori integrali di spostamento δ^* e di quantità di moto θ.
Infine, ricavare la soluzione dell'equazione di Blasius con un metodo numerico. ■

Soluzione

Concetti. Equazioni di Prandtl. Equazione di Blasius. Soluzione in similitudine. Shooting method.

Svolgimento.

Dalle equazioni di Prandtl al modello di Blasius.
Le equazioni di Prandtl dello strato limite possono essere ricavate tramite un'analisi degli ordini di grandezza delle quantità fisiche che compaiono nelle equazioni di Navier–Stokes.

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} - \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dP(x)}{dx} = U(x)U'(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \ , \end{cases} \tag{9.23}$$

avendo indicato con $U(x)$ la componente parallela alla parete della lamina semi infinita del campo di velocità della corrente esterna. Il modello di Blasius dello strato limite ipotizza che la corrente esterna sia uniforme,

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} - \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \ . \end{cases} \tag{9.24}$$

Si può ridurre il sistema di due equazioni nelle incognite $(u,\ v)$ a un'equazione sola in una incognita introducendo la funzione di corrente ψ,

$$u = \partial\psi/\partial y \qquad , \qquad v = -\partial\psi/\partial x \ . \tag{9.25}$$

Il vincolo di incomprimibilità è soddisfatto identicamente, mentre la componente x dell'equazione della quantità di moto diventa

$$\psi_y\psi_{yx} - \psi_x\psi_{yy} - \nu\,\psi_{yyy} = 0 \ . \tag{9.26}$$

Poiché il problema non ha una scala di lunghezza, si cerca una soluzione similare. Si introduce la variabile di similitudine $\eta = y/\delta(x)$, dove $\delta(x)$ rappresenta lo spessore convenzionale dello strato limite, e si cerca la soluzione del problema imponendo l'espressione della funzione di corrente

$$\psi(x,y) = U\delta(x)g(\eta(x,y)) \ . \tag{9.27}$$

Utilizzando le derivate della funzione di corrente,

$$\begin{aligned} &\psi_y = Ug'(\eta) \qquad , \qquad \psi_{yy} = \frac{U}{\delta(x)}g''(\eta) \qquad , \qquad \psi_{yyy} = \frac{U}{\delta^2(x)}g'''(\eta) \ , \\ &\psi_x = U\delta'(x)\left[g - \eta\, g'(\eta)\right] \qquad , \qquad \psi_{xy} = U\left[-\frac{\delta'(x)}{\delta(x)}\,\eta\, g''(\eta)\right] \ , \end{aligned} \tag{9.28}$$

all'interno dell'equazione della quantitàdi moto, si ottiene

$$\begin{aligned} & - U^2 \frac{\delta'}{\delta} \eta \, g' g'' - U^2 \frac{\delta'}{\delta} [g \, g'' - \eta \, g' g''] - \frac{\nu U}{\delta^2} g''' = 0 \ , \\ & \rightarrow \qquad \frac{U \, \delta'(x) \delta(x)}{\nu} g(\eta) \, g''(\eta) + g'''(\eta) = 0 \ . \end{aligned} \tag{9.29}$$

Affinché la funzione $g(\eta)$ dipenda solo da $\eta(x, y)$ e non dalle due variabili x, y in maniera indipendente, il coefficiente $U\delta'(x)\delta(x)/\nu$ deve essere uguale a una costante,

$$\frac{U\delta'(x)\delta(x)}{\nu} = \alpha \ . \tag{9.30}$$

Scegliendo in maniera arbitraria $\alpha = \frac{1}{2}$ e integrando questa ultima relazione in x (con condizioni al contorno $\delta(0) = 0$), si ottiene l'andamento dello spessore dello strato limite laminare di Blasius,

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \ , \tag{9.31}$$

e l'equazione di Blasius per la funzione $g(\eta)$,

$$g''' + \frac{1}{2} g g'' = 0 \ , \tag{9.32}$$

con le condizioni al contorno per il problema dello strato limite su lamina piana

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = 0 \\ \lim_{\eta \to \infty} g'(\eta) = 1 \ . \end{cases} \tag{9.33}$$

Sforzo viscoso a parete.
La formula per lo sforzo viscoso a parete è:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \bigg|_{y=0} = \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \bigg|_{\eta=0} = \mu \frac{U}{\delta(x)} g''(0) \ , \tag{9.34}$$

dove $g''(0) \approx 0.332$.

Spessori integrali dello strato limite.
Si calcolano gli spessori integrali dello strato limite di Blasius. Usando le relazioni dello strato limite di Blasius, si trova

$$\begin{aligned} & \delta^* = \int_0^\infty (1 - g'(\eta(y))) dy = \delta(x) \int_0^\infty (1 - g'(\eta)) d\eta \ , \\ & \theta = \int_0^\infty g'(\eta)(1 - g'(\eta(y))) dy = \delta(x) \int_0^\infty g'(\eta)(1 - g'(\eta)) d\eta \ . \end{aligned} \tag{9.35}$$

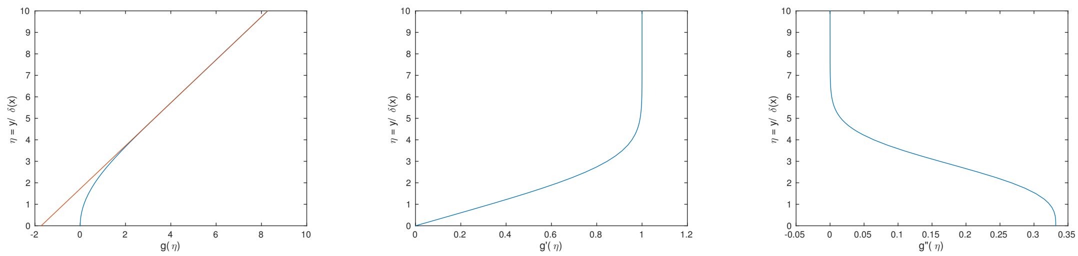
Per lo spessore di spostamento si ha:

$$\begin{aligned} \delta^* = \delta(x) \int_0^\infty (1 - g'(\eta)) d\eta = & \\ = \delta(x) [\eta - g(\eta)] |_0^\infty = & \qquad (g(0) = 0) \\ = \delta(x) \lim_{\eta \to \infty} [\eta - g(\eta)] = & \qquad (\lim_{\eta \to \infty} [\eta - g(\eta)] = 1.721) \\ = 1.721 \cdot \delta = & \qquad (\delta = \sqrt{\nu x / U}) \\ = 1.721 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \ . & \end{aligned} \tag{9.36}$$

Per lo spessore di quantità di moto:

$$
\begin{aligned}
\theta = \delta(x) \int_0^\infty g'(\eta)(1-g'(\eta))d\eta = & \\
= \delta \int_0^\infty g'(\eta)d\eta - \delta \int_0^\infty g'^2(\eta)d\eta = & \\
= \delta[g(\eta)]|_0^\infty - \delta \int_0^\infty g'^2(\eta)d\eta = & \qquad (g(0)=0 \text{ e IxP}) \\
= \delta \lim_{\eta\to\infty} g(\eta) - \delta \int_0^\infty [(gg')' - gg'']d\eta = & \qquad (\text{eq. di Blasius: } \frac{1}{2}gg'' + g''' = 0) \\
= \delta \lim_{\eta\to\infty} g(\eta) - \delta[gg']|_0^\infty - \delta \int_0^\infty 2g'''d\eta = & \qquad (g(0)=0) \\
= \delta \lim_{\eta\to\infty} g(\eta) - \delta \lim_{\eta\to\infty} g(\eta)g'(\eta) - 2\delta[g''(\eta)]|_0^\infty = & \qquad (\lim_{\eta\to\infty} g'(\eta) = 1,\ \lim_{\eta\to\infty} g''(\eta) = 0) \\
= 2\delta(x)g''(0) = & \\
= 0.664\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \ . &
\end{aligned}
\tag{9.37}
$$

Il rapporto di forma vale quindi $H = \delta^*/\theta = 1.721/0.664$, cioè $H = 2.59$.



(a) *Grafico di* $g(\eta)$: per $\eta \to \infty$ g ha derivata uguale a 1; l'intersezione dell'asintoto con l'asse orizzontale avviene per $g(0) = 1.721$: $g(\eta) \sim \eta - 1.721$ per $\eta \to \infty$.

(b) *Grafico di* $g'(\eta)$: rappresenta il profilo adimensionale dela velocità. Per $\eta \to \infty$ $g'(\eta) \to 1$.

(c) *Grafico di* $g''(\eta)$: è legato alla derivata parziale $\partial u/\partial y$. Per determinare lo sforzo a parete è necessario trovare il valore di $g''(0)$: $g''(0) = 0.332$

Soluzione numerica: shooting method.

Per risolvere l'equazione di Blasius con metodi numerici, si può incontrare qualche difficoltà nell'imporre la condizione al contorno per $\eta \to \infty$. Tramite uno *shooting method* si può risolvere il problema ai valori al contorno, tramite la soluzione di problemi ai valori iniziali insieme a un metodo per trovare gli zeri di una funzione (es. Newton). Il dominio semi-infinito viene troncato. Il dominio numerico è quindi $[0, \bar{\eta}]$. L'equazione scalare di terzo ordine, viene scritta come sistema del primo ordine. Invece di imporre la condizione all'infinito, viene imposto il valore di $g''(0) = \alpha$. Si risolve l'equazione. Si trova il valore di g'_nin $\bar{\eta}$. Si itera fino a quando il valore assoluto di $F(\alpha) = g'_n(\bar{\eta};\alpha) - \lim_{\eta\to\infty} g'(\eta)$ non è inferiore a una tolleranza stabilita. Per esempio, partendo da $\alpha = 0.1$, con una tolleranza $tol = 1E-09$:

```
nIter    g"(0)    res
  1      0.1000   5.508e-01
  2      0.2836   9.975e-02
  3      0.3308   2.575e-03
```

```
  4      0.3320  1.660e-06
  5      0.3320  1.804e-12
```

Esercizio 9 .5 — Strato limite di Blasius: resistenza di una lamina. Una lamina piana molto sottile viene investita parallelamente su entrambe le sue facce da una corrente di velocità uniforme U di un fluido di densità ρ e viscosità dinamica μ. Nell'ipotesi che il problema possa essere approssimato con le equazioni bidimensionali dello strato limite laminare con velocità asintotica costante (Blasius):

- determinare l'espressione della resistenza di attrito della lamina rettangolare in funzione della sua lunghezza ℓ (lati paralleli alla velocità della corrente esterna) e della sua larghezza b;
- determinare la forma della lamina rettangolare di area data $A = \ell\, b$ che ha resistenza minima.

Soluzione

Concetti. Strato limite laminare. Equazione di Blasius.

Svolgimento. Nell'ipotesi in cui si possa utilizzare la soluzione di Blasius, considerata omogenea in apertura, la resistenza di attrito della lamina è

$$\begin{aligned}
D &= 2b \int_0^\ell \tau_w(x) dx = & \left(\tau_w = \mu \frac{U}{\delta(x)} g''(0)\right) \\
&= 2g''(0)\mu b U \int_0^\ell \frac{1}{\delta(x)} dx = & \left(\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}\right) \\
&= 2g''(0)\frac{\mu b U^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\nu}} \int_0^\ell \frac{1}{\sqrt{x}} dx = & \\
&= 4g''(0)\sqrt{\rho\mu} U^{\frac{3}{2}}\, b\sqrt{\ell}\ , &
\end{aligned} \tag{9.38}$$

o raccogliendo nel coefficiente K tutti i parametri costanti del problema, $D(\ell, b) = K\, b\sqrt{\ell}$.

Resistenza minima, ad area A fissata.

Per trovare il valore minimo della resistenza di una lamina, si inserisce il vincolo $A = \ell\, b$ all'interno dell'espressione della resistenza per ottenere l'espressione in funzione di una sola variabile,

$$D_A(\ell) = K\, A \frac{1}{\sqrt{\ell}} = \tilde{K} \frac{1}{\sqrt{\ell}}\ . \tag{9.39}$$

Si osserva che la resistenza minima si ottiene per una lamina di lunghezza ℓ infinita e di spessore b infinitesimo, $D_A(\ell \to \infty) \to 0$.

Commento.

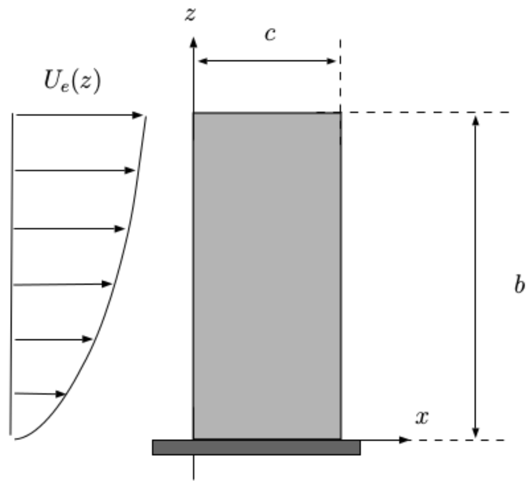
Il problema considera un modello laminare dello strato limite su tutta la lunghezza della lamina, senza considerare la transizione a un regime di moto turbolento. In generale la transizione a un regime di moto turbolento avviene a una determinata distanza dal bordo di attacco della lamina. Se avviene la transizione a un regime di moto turbolento, aumentando la lunghezza della lamina aumenta la sua superficie soggetta a un regime turbolento, nel quale gli sforzi a parete sono generalmente maggiori, rispetto a uno strato limite laminare.

Esercizio 9.6 — Strato limite di Blasius 3D. Nella figura accanto una lastra piana di corda $c = 30\ cm$, apertura $b = 75\ cm$ e spessore trascurabile è investita da una corrente esterna d'aria ($\rho = 1.225\ kg/m^3$, $\mu = 1.76 \times 10^{-5}\ kg/(ms)$) uniforme in corda e variabile in apertura secondo la legge

$$\boldsymbol{U}_e(z) = U_e(z)\hat{\mathbf{x}} = \overline{U}\left(\frac{z}{b}\right)^{2/3}\hat{\mathbf{x}}$$

con $\overline{U} = 5\ m/s$. Assumendo la corrente laminare, stazionaria e bidimensionale su ciascuna sezione z in apertura, e potendone approssimare lo strato limite attraverso la soluzione di Blasius, si richiede di:

2.1) calcolare la resistenza D della lastra ed il corrispondente momento all'incastro M_y;
2.2) calcolare lo spessore di spostamento $\delta^*(x,z)$ e di quantità di moto $\theta(x,z)$ dello strato limite sulla superficie della lamina;



Soluzione

Concetti. Soluzione di Blasius dello strato limite. Spessori di strato limite.

Svolgimento. Assumendo valido il modello 2D di Blasius per lo strato limite *quasi-3D* del problema, lo spessore convenzionale dello strato limite vale

$$\delta(x,z) = \sqrt{\frac{x\nu}{U_e(z)}}\ , \tag{9.40}$$

e lo sforzo viscoso a parete in direzione x vale

$$\tau_w(x,z) = \mu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \mu\, g''(0)\frac{U_e(z)}{\delta(x,z)} = g''(0)\mu\frac{U_e^{3/2}(z)}{\sqrt{\nu x}}\ . = g''(0)\sqrt{\mu\rho}\frac{U_e^{3/2}(z)}{\sqrt{x}}\ . \tag{9.41}$$

Utilizzando il profilo di velocità fornito dal problema,

$$\delta(x,z) = \sqrt{\frac{x\nu b^{1/3}}{\overline{U}z^{1/3}}} \qquad , \qquad \tau_w(x,z) = g''(0)\sqrt{\mu\rho}\,\frac{\overline{U}^{3/2}}{b}\frac{z}{\sqrt{x}}\ . \tag{9.42}$$

- Per il calcolo della resistenza e del momento alla radice è necessario calcolare lo sforzo a parete sulla lamina piana $\tau_w(x,z)$. La resistenza è l'integrale di τ_w sulla superficie; il momento M_y è l'integrale di $z\tau_w(x,z)$ esteso alla superficie,

$$D = \int_{x=0}^{c}\int_{z=0}^{b}\tau_w(x,z)dx\,dz = g''(0)\sqrt{\mu\rho}\,\overline{U}^{3/2}\,b\sqrt{c}\ , \tag{9.43}$$

$$M_y = \int_{x=0}^{c} \int_{z=0}^{b} z\tau_w(x,z) dx\, dz = \frac{2}{3} g''(0) \sqrt{\mu\rho}\, \overline{U}^{3/2}\, b^2 \sqrt{c}\ . \tag{9.44}$$

- Nel modello *quasi-3D* dello strato limite, gli spessori integrali sono funzione di (x,z),

$$\delta^*(x,z) = \int_0^\infty \left[1 - \frac{u(x,y,z)}{U_e(x,z)} \right] dy, \qquad \theta(x,z) = \int_0^\infty \frac{u(x,y,z)}{U_e(x,z)} \left[1 - \frac{u(x,y,z)}{U_e(x,z)} \right] dy\ , \tag{9.45}$$

  e utilizzando le relazioni dello strato limite di Blasius

$$\delta^*(x,z) = 1.721\, \delta(x,z) \qquad , \qquad \theta(x,z) = 0.644\, \delta(x,z)\ . \tag{9.46}$$