1. Statica

Definizione di fluido

Un fluido è un materiale che non è in grado di sopportare sforzi di taglio, quando è in quiete o in moto con velocità uniforme in un sistema di riferimento inerziale (invarianza galileiana). I fluidi "ordinari" sono isotropi, cioè sono indipendenti dall'orientazione nello spazio. Un fluido isotropo in quiete è quindi caratterizzato da uno stato di sforzo idrostatico,

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I}, \tag{1.1}$$

avendo indicato con $\mathbb{T}$ il tensore degli sforzi, p la pressione all'interno del fluido e $\mathbb{I}$ il tensore identità. Il vettore sforzo $\boldsymbol{t_n}$ *agente sul fluido* (su una superficie di fluido con versore normale $\boldsymbol{\hat{n}}$ uscente dal volume fluido) è

$$\boldsymbol{t_n} = -p\boldsymbol{\hat{n}}. \tag{1.2}$$

Per il principio di azione e reazione, lo sforzo agente su una parete solida a contatto con un fluido è di intensità uguale e direzione opposta. La risultante dell forze coincide con l'integrale di superficie del vettore sforzo.

Equazione di equilibrio: forma integrale e differenziale

Nella condizione di equilibrio di un fluido in quiete, la risultante delle forze esterne agenti sul fluido è nulla. L'equilibrio di un volume di fluido V, delimitato dalla superficie $\partial V = S$, soggetto a forze per unità di volume $\boldsymbol{f}$ in V e forze per unità di superficie $\boldsymbol{t_n} = -p\boldsymbol{\hat{n}}$ su S

$$\boldsymbol{0} = \int_V \boldsymbol{f} + \oint_S \boldsymbol{t_n} = \int_V \boldsymbol{f} - \oint_S p\boldsymbol{\hat{n}}. \tag{1.3}$$

La condizione appena ottenuta è una condizione integrale, per l'intero volume fluido V. Se il campo di pressione p è sufficientemente regolare, è possibile applicare il teorema del gradiente (A.3.1) all'integrale di superficie e raccogliere i termini a destra dell'uguale sotto un unico integrale di volume V

$$\boldsymbol{0} = \int_V \boldsymbol{f} - \boldsymbol{\nabla} p. \tag{1.4}$$

Poiché la condizione di equilibrio è valida indipendentemente dal volume V considerato, l'equazione di equilibrio in forma differenziale

$$\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\nabla} p = \boldsymbol{0} \tag{1.5}$$

viene ottenuta imponendo che il termine sotto segno di integrale sia identicamente nullo.

Legge di Stevino

La legge di Stevino viene ricavata dall'integrazione dell'equilibrio in forma differenziale (1.5), nel caso in cui le forze di volume siano dovute alla gravità $\boldsymbol{f} = \rho \boldsymbol{g} = -\rho g \hat{\boldsymbol{z}}$, avendo indicato con ρ la densità del fluido e avendo introdotto un sistema di riferimento cartesiano con l'asse z verticale e diretto verso l'alto

$$\boldsymbol{\nabla} p + \rho g \hat{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{0}. \tag{1.6}$$

Usando un sistema di riferimento cartesiano, nell'ipotesi di essere sufficientemente vicino alla terra e di poter considerare il campo vettoriale $\boldsymbol{g}$ uniforme e diretto verso il basso, è possibile integrare le componenti cartesiane dell'equazione precedente per ottenere il legame tra la densità e la pressione del fluido

$$\begin{cases} \partial p/\partial x = \partial p/\partial y = 0 \quad \rightarrow \quad p = p(z) \\ \partial p/\partial z = -\rho g. \end{cases} \tag{1.7}$$

Nell'ipotesi che la densità ρ e la forza di gravità siano costanti, si ottiene la legge di Stevino

$$p(z) + \rho g z = \text{cost.} \tag{1.8}$$

Legge di Archimede. Forza di galleggiamento

Un corpo immerso in fluido riceve dal basso verso l'alto una spinta uguale al peso della massa del fluido spostato. Su un corpo di volume V_s, immerso completamente in un fluido di densità ρ_f, agisce una forza (di Archimede o di galleggiamento)

$$\boldsymbol{F}_{Arch} = -\int_{V_s} \rho_f \boldsymbol{g}. \tag{1.9}$$

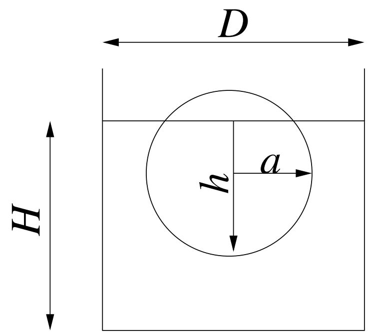
La legge di Archimede vale per un sistema immerso nel campo di gravità $\boldsymbol{g}$, uniforme in spazio. Il termine sotto segno di integrale coincide con il gradiente del campo di pressione. Forze di galleggimento nascono su un corpo immerso in un fluido in cui c'è un gradiente di pressione: se il gradiente di pressione è costante all'interno del fluido, la forza di galleggiamento sul corpo è

$$\boldsymbol{F}_{gall} = -\int_{V_s} \boldsymbol{\nabla} p. \tag{1.10}$$

Ad esempio, quando si svolge un esperimento in galleria del vento, nella camera di prova è presente un gradiente di pressione, diretto in direzione $\hat{\boldsymbol{x}}$ della corrente. Se in prima approssimazione si considera un gradiente di pressione $\boldsymbol{\nabla} = -G_P \hat{\boldsymbol{x}}$ costante, si può stimare la forza di galleggiamento $\boldsymbol{F}_{gall} = V_s G_P \hat{\boldsymbol{x}}$, dovuta al gradiente di pressione in galleria del vento, assente in condizioni di aria libera.

La valutazione di questa azione "spuria" sul corpo e la correzione delle misure effettuate rientrano nell'ambito delle *correzioni di galleria*.

Esercizio 1.1 — Legge di Archimede. Si consideri, sulla superficie terrestre, un recipiente di diametro $D = 2\ m$ e profondità $H = 3\ m$ contenente acqua ($\rho = 998\ kg/m^3$). Al suo interno è inserita una sfera di raggio $a = 0.2\,m$ e densità pari a $\rho_s = 842.06\ kg/m^3$. Determinare in modo univoco la posizione assunta dalla sfera nel liquido. Tale posizione varia se invece che sulla terra ci si trova sulla luna?
($h = 0.3\ m$, non varia sulla luna.)



Soluzione

Concetti. Legge di Archimede. Condizione di equilibrio. Calcolo del volume di solidi (integrali di volume). Soluzione di semplici equazioni non lineari per via grafica (studio di funzione) e/o numerica.

Svolgimento. Per svolgere l'esercizio bisogna calcolare la condizione di equilibrio del corpo, soggetto alla propria forza peso e alla forza che il fluido esercita su di esso (legge di Archimede). Nell'equazione di equilibrio, l'incognita h compare nella formula del volume immerso nel fluido. L'equazione di equilibrio è un'equazione non lineare in h, da risolvere per via grafica o numerica.

- Scrittura dell'equazione di equilibrio del corpo soggetto al proprio peso e alla forza esercitata su di esso dal fluido, diretta verso l'alto e pari al peso del volume del fluido spostato (legge di Archimede).

$$\rho_s V_s g = \rho V_c g \quad \Rightarrow \quad \rho_s V_s = \rho V_c \tag{1.11}$$

  Osservazione. Si trova subito la risposta all'ultimo quesito: poiché g non compare nell'equazione di equilibrio, la condizione di equilibrio sulla Luna è uguale a quella che si ha sulla Terra.

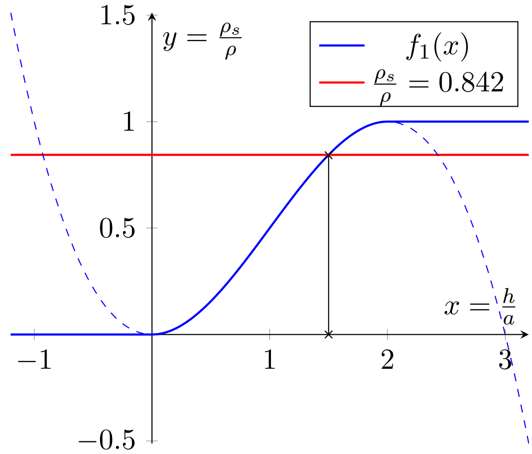
- Calcolo del volume della sfera e della calotta sferica:
  - Volume della sfera: $V_s = \frac{4}{3}\pi a^3$
  - Volume della calotta sferica: $V_c = \pi h^2 (a - \frac{h}{3})$
    (per credere, verificare casi limite: $h = 0$, $h = a$, $h = 2a$; alla fine dell'esercizio è riportato il calcolo, tramite integrale di volume)
- Le formule per i volumi V_c e V_s sono inserite nell'eq. 1.11. L'equazione viene semplificata e scritta in forma adimensionale, introducendo la variabile $x = \frac{h}{a}$. L'equazione di terzo grado in x viene risolta, considerando i limiti fisici del problema ($0 \leq x \leq 2$):

$$\rho \pi h^2 \Big(a - \frac{h}{3}\Big) = \rho_s \frac{4}{3}\pi a^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}x^2\Big(1 - \frac{x}{3}\Big) = \frac{\rho_s}{\rho} \tag{1.12}$$

  Alcuni metodi per risolvere equazioni non lineari possono essere ad esempio:
  - metodi iterativi. Ad esempio metodo di Newton

```
x          res
1.0000    -3.437475e-01
1.4583    -2.406993e-02
1.4990    -5.841602e-04
1.5000    -4.027539e-07
1.5000    -1.924017e-13
```

- metodo grafico (educativo: per problemi più complicati, prima di calcolare le soluzioni con metodi numerici, è bene avere un'idea di cosa si sta cercando). Si cercano le intersezioni delle funzioni $f_1(x) = \frac{3}{4}x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right)$ e $f_2(x) = \frac{\rho_s}{\rho}$.



Osservazione. Per valori di $\frac{\rho_s}{\rho}$ compresi tra 0 e 1, esiste una e una sola soluzione fisica del problema.Come giustamente **suggerito da un vostro compagno**, per i valori di desità "estremi" $\rho_s = 0$, $\rho_s = \rho_f$, esistono infinite soluzioni: nel caso di $\rho_s = \rho_f$, la posizione di equilibrio è indipendente dalla profondità alla quale è posta la sfera. Nel grafico, la funzione $f_1(x)$ rappresenta il volume immerso della sfera (diviso il volume totale della sfera stessa) al variare della distanza h del punto più basso dal pelo libero: questa deve quindi essere rappresentata, come in figura, nulla per valori di $x < 0$ (sfera completamente fuori dall'acqua), con il ramo di cubica per $0 < x < 2$ (sfera parzialmente immersa), uguale a 1 per $x > 2$ (sfera completamente immersa). La funzione $f_1(x)$ può quindi essere definita a tratti:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{3}{4}x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right) & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases} \tag{1.13}$$

Discussione dei risultati. Quando diminuisce la denistà relativa del solido, la linea rossa si abbassa e la soluzione $x = \frac{h}{a}$ diminuisce (la sfera ha una porzione maggiore al di fuori dall'acqua). Esiste una e una sola soluzione che abbia senso fisico, fino a quando la densità relativa è compresa tra 0 e 1: non ha senso considerare valori negativi (la densità è una quantità positiva), mentre per valori di $\frac{\rho_s}{\rho}$ maggiori di 1 non può esistere una condizione di equilibrio statico (la sfera affonda...).

Calcolo volume cupola sferica. É comodo svolgere il calcolo in coordinate cilindriche (r, θ, z).

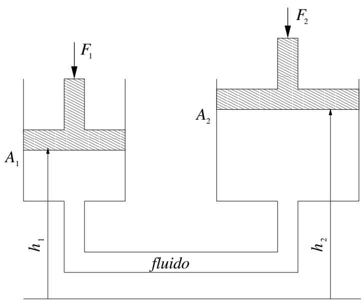
Il volume della parte immersa è uguale a

$$
\begin{aligned}
V = \iiint_V dV &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-a}^{l} \int_{r=0}^{\sqrt{a^2-z^2}} dV \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-a}^{l} \int_{r=0}^{\sqrt{a^2-z^2}} r dr dz d\theta \\
&= 2\pi \int_{z=-a}^{l} \frac{a^2-z^2}{2} dz \\
&= \frac{\pi}{3}[2a^3 + 3a^2 l - l^3]
\end{aligned} \tag{1.14}
$$

Definendo $h = R + l$ come la quota immersa della sfera, si ottiene:

$$
V = \pi h^2 \left(a - \frac{h}{3} \right) \tag{1.15}
$$

Esercizio 1.4 — Leva idraulica. La leva idraulica, rappresentata in figura, è formata da due sistemi cilindro-pistone. Determinare la forza che è necessario applicare al secondo pistone per mantenere il sistema in equilibrio quando sul primo agisce una forza $F_1 = 5000\ N$, allorché i pistoni si trovano nella posizione indicata in figura.
Dati: diametro primo cilindro: $d_1 = 0.2\ m$; diametro secondo cilindro: $d_2 = 0.4\ m$; diametro del condotto che unisce i due cilindri: $0.025\ m$; densità del fluido di lavoro: $600\ kg/m^3$; altezza del primo pistone $h_1 = 1\ m$, altezza del secondo pistone $h_2 = 2\ m$.
($p_1 = 159155\ Pa$, $p_2 = 153269\ Pa$, $\boldsymbol{F_2} = -19260.3\hat{\boldsymbol{z}}\ N$.) ■



Soluzione

Concetti. Legge di Stevino. Risultante statica. Leva idraulica.

Svolgimento. Il problema si risolve scrivendo le condizioni di equilibrio tra le forze esterne e la risultante dello sforzo di pressione sulle facce opposte dei pistoni e applicando la legge di Stevino tra le due sezioni A_1 e A_2. Si ottiene un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite p_1, p_2, F_2).

$$\begin{cases} F_1 = p_1 \pi \dfrac{d_1^2}{4} & \text{(Equilibrio pistone 1)} \\ p_2 = p_1 - \rho g (h_2 - h_1) & \text{(Legge di Stevino)} \\ F_2 = p_2 \pi \dfrac{d_2^2}{4} & \text{(Equilibrio pistone 2)} \end{cases} \tag{1.29}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = \dfrac{4}{\pi} \dfrac{F_1}{d_1^2} & = 159155 Pa \\ p_2 = \dfrac{4}{\pi} \dfrac{F_1}{d_1^2} - \rho g (h_2 - h_1) & = 153269 Pa \\ F_2 = \dfrac{d_1^2}{d_2^2} F_1 - \dfrac{\pi}{4} d_2^2\ \rho g (h_2 - h_1) & = 19260.3 N \end{cases} \tag{1.30}$$

La componente verticale F_2 della forza $\boldsymbol{F_2}$ è positiva diretta verso il basso, come nel disegno. Si può scrivere quindi $\boldsymbol{F_2} = -F_2 \hat{\boldsymbol{z}}$.