1. Statica

Definizione di fluido

Un fluido è un materiale che non è in grado di sopportare sforzi di taglio, quando è in quiete o in moto con velocità uniforme in un sistema di riferimento inerziale (invarianza galileiana). I fluidi "ordinari" sono isotropi, cioè sono indipendenti dall'orientazione nello spazio. Un fluido isotropo in quiete è quindi caratterizzato da uno stato di sforzo idrostatico,

$$\mathbb{T}^{(s)} = -p\mathbb{I} \ , \tag{1.1}$$

avendo indicato con $\mathbb{T}^{(s)}$ il tensore degli sforzi in quiete, p la pressione all'interno del fluido e $\mathbb{I}$ il tensore identità. Il vettore sforzo $\boldsymbol{t_n}$ *agente su* una superficie di fluido con normale $\boldsymbol{\hat{n}}$ si ottiene tramite il **teorema di Cauchy** per i mezzi continui

$$\boldsymbol{t_n} = \boldsymbol{\hat{n}} \cdot \mathbb{T} \ , \tag{1.2}$$

che lega il vettore sforzo al tensore degli sforzi tramite il versore normale alla superficie considerata, e che nel caso di fluido in quiete, diventa

$$\boldsymbol{t_n}^{(s)} = \boldsymbol{\hat{n}} \cdot \mathbb{T}^{(s)} = -p\boldsymbol{\hat{n}} \ . \tag{1.3}$$

Per il principio di azione e reazione, lo sforzo agente su un materiale a contatto con un fluido è di intensità uguale e direzione opposta. La risultante $\boldsymbol{R}$ delle forze agenti su un volume di fluido V è data dalla somma dell'integrale su V delle forze di volume $\boldsymbol{f}$ e dell'integrale sulla superficie S, contorno del volume V, del vettore sforzo $\boldsymbol{t_n}$,

$$\boldsymbol{R} = \int_V \boldsymbol{f} + \oint_S \boldsymbol{t_n} \ . \tag{1.4}$$

Equazione di equilibrio: forma integrale e differenziale

Un sistema meccanico è in equilibrio quando la risultante delle forze esterne e la risultante dei momenti esterni agenti sul fluido sono nulle,

$$\begin{cases} \boldsymbol{0} = \boldsymbol{R}^{ext} \\ \boldsymbol{0} = \boldsymbol{M}^{ext} \ . \end{cases} \tag{1.5}$$

Per un mezzo continuo non polare, è possibile dimostrare che l'equilibrio ai momenti si riduce alla condizione di simmetria del tensore degli sforzi. L'equilibrio delle forze agenti su un volume di fluido V in quiete, delimitato dalla superficie $\partial V = S$, soggetto a forze per unità di volume $\boldsymbol{f}$ in V e forze per unità di superficie $\boldsymbol{t_n} = -p\boldsymbol{\hat{n}}$ su S diventa

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{R}^{ext} = \int_V \boldsymbol{f} + \oint_S \boldsymbol{t_n} = \int_V \boldsymbol{f} - \oint_S p\boldsymbol{\hat{n}} \ . \tag{1.6}$$

La condizione appena ottenuta è una **condizione di equilibrio integrale**, per l'intero volume fluido V. Se il campo di pressione p è sufficientemente regolare, è possibile applicare il teorema del gradiente (A.3.1) all'integrale di superficie e raccogliere i termini a destra dell'uguale sotto un unico integrale di volume V,

$$\mathbf{0} = \int_V (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\nabla} p) \ . \tag{1.7}$$

Poiché la condizione di equilibrio deve essere valida indipendentemente dal volume V considerato, imponendo che l'integranda sia identicamente nulla, si ottiene l'**equazione di equilibrio in forma differenziale**

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{\nabla} p(\boldsymbol{r}) = \mathbf{0} \ , \tag{1.8}$$

dove è stata esplicitata la dipendenza dei campi vettoriali $\boldsymbol{f}$, p dall coordinata spaziale $\boldsymbol{r}$. Nel caso in cui sia noto il campo di forze di volume $\boldsymbol{f}$ all'interno del dominio considerato, l'equazione differenziale alle derivate parziali (1.8), con le opportune condizioni al contorno, permette di calcolare il campo di pressione $p(\boldsymbol{r})$.

Legge di Stevino

La legge di Stevino descrive il campo di pressione come funzione della quota, nelle vicinanze della superficie terrestre. La legge di Stevino viene ricavata dall'integrazione dell'equilibrio in forma differenziale (1.8), nel caso in cui le forze di volume siano dovute alla gravità $\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{g} = -\rho g\boldsymbol{\hat{z}}$, avendo indicato con ρ la densità del fluido e avendo introdotto un sistema di riferimento cartesiano con l'asse z verticale e diretto verso l'alto

$$\boldsymbol{\nabla} p + \rho g \boldsymbol{\hat{z}} = \mathbf{0}. \tag{1.9}$$

Usando un sistema di riferimento cartesiano, nell'ipotesi di essere sufficientemente vicino alla terra e di poter considerare il campo vettoriale $\boldsymbol{g}$ uniforme e diretto verso il basso, è possibile integrare le componenti cartesiane dell'equazione precedente per ottenere il legame tra la densità e la pressione del fluido

$$\begin{cases} \partial p/\partial x = \partial p/\partial y = 0 & \rightarrow \quad p = p(z) \\ \partial p/\partial z = -\rho g & \rightarrow \quad dp(z)/dz = -\rho g \ . \end{cases} \tag{1.10}$$

Risulta ora chiaro che è necessaria una condizione al contorno del tipo $p(z_0) = p_0$. Nell'ipotesi che la densità ρ e la forza di gravità siano costanti, la legge di Stevino diventa

$$p(z) + \rho g z = p_0 = \text{cost} \ , \tag{1.11}$$

avendo imposto la condizione al contorno in $z_0 = 0$. Nel caso in cui la densità non sia costante, ma che dipenda dallo stato termodinamico, per risolvere il problema è necessaria l'equazione di stato del fluido.

Legge di Archimede. Forza di galleggiamento

Un corpo immerso in fluido riceve dal basso verso l'alto una spinta uguale al peso della massa del fluido spostato. Su un corpo di volume V_s, immerso completamente in un fluido di densità ρ_f, agisce una forza (di Archimede o di galleggiamento)

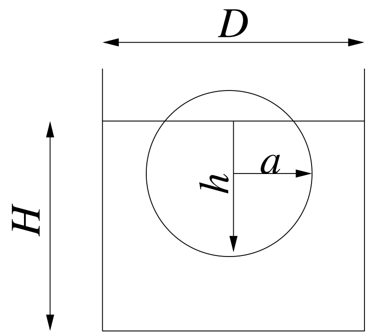
$$\boldsymbol{F}_{Arch} = -\int_{V_s} \rho_f \boldsymbol{g} = -\rho_f \boldsymbol{b} V_s \ . \tag{1.12}$$

La legge di Archimede vale per un sistema immerso nel campo di gravità $\boldsymbol{g}$, uniforme in spazio. Il termine sotto segno di integrale coincide con il gradiente del campo di pressione. Forze di galleggimento nascono su un corpo immerso in un fluido in cui c'è un gradiente di pressione: se il gradiente di pressione è costante all'interno del fluido, la forza di galleggiamento sul corpo è

$$\boldsymbol{F}_{gall} = -\int_{V_s} \boldsymbol{\nabla} p \ . \tag{1.13}$$

Ad esempio, quando si svolge un esperimento in galleria del vento, nella camera di prova è presente un gradiente di pressione, diretto in direzione $\hat{\boldsymbol{x}}$ della corrente. Se in prima approssimazione si considera un gradiente di pressione $\boldsymbol{\nabla} p = -G_P \hat{\boldsymbol{x}}$ costante, si può stimare la forza di galleggiamento $\boldsymbol{F}_{gall} = V_s G_P \hat{\boldsymbol{x}}$, dovuta al gradiente di pressione in galleria del vento, assente in condizioni di aria libera. La valutazione di questa azione "spuria" sul corpo e la correzione delle misure effettuate rientrano nell'ambito delle *correzioni di galleria.*

Esercizio 1.1 — Legge di Archimede. Si consideri, sulla superficie terrestre, un recipiente di diametro $D = 2\ m$ e profondità $H = 3\ m$ contenente acqua ($\rho = 998\ kg/m^3$). Al suo interno è inserita una sfera di raggio $a = 0.2\,m$ e densità pari a $\rho_s = 842.06\ kg/m^3$. Determinare in modo univoco la posizione assunta dalla sfera nel liquido. Tale posizione varia se invece che sulla terra ci si trova sulla luna?
($h = 0.3\ m$, non varia sulla luna.) ■



Soluzione

Concetti. Legge di Archimede. Condizione di equilibrio. Calcolo del volume di solidi (integrali di volume). Adimensionalizzazione. Soluzione di semplici equazioni non lineari per via grafica (studio di funzione) e/o numerica.

Svolgimento. Per svolgere l'esercizio bisogna calcolare la condizione di equilibrio del corpo, soggetto alla propria forza peso e alla forza che il fluido esercita su di esso (legge di Archimede). Nell'equazione di equilibrio, l'incognita h compare nella formula del volume immerso nel fluido. L'equazione di equilibrio è un'equazione non lineare in h, da risolvere per via grafica o numerica.

- Scrittura dell'equazione di equilibrio del corpo soggetto al proprio peso e alla forza esercitata su di esso dal fluido, diretta verso l'alto e pari al peso del volume del fluido spostato (legge di Archimede).

$$\rho_s V_s g = \rho V_c g \quad \Rightarrow \quad \rho_s V_s = \rho V_c \tag{1.14}$$

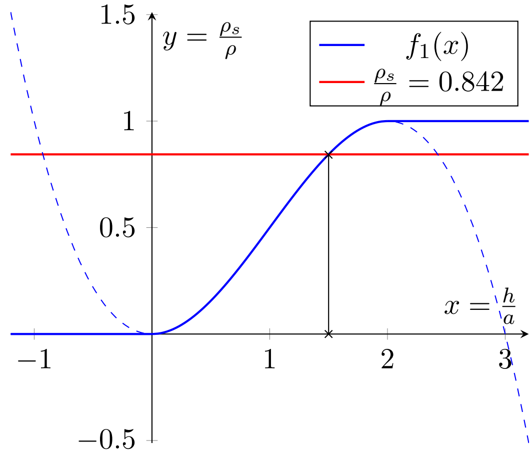
  Osservazione. Si trova subito la risposta all'ultimo quesito: poiché g non compare nell'equazione di equilibrio, la condizione di equilibrio sulla Luna è uguale a quella che si ha sulla Terra.
- Calcolo del volume della sfera e della calotta sferica:
  - Volume della sfera: $V_s = \frac{4}{3}\pi a^3$
  - Volume della calotta sferica: $V_c = \pi h^2 (a - \frac{h}{3})$
    (per credere, verificare casi limite: $h = 0$, $h = a$, $h = 2a$; alla fine dell'esercizio è riportato il calcolo, tramite un integrale di volume)
- Le formule per i volumi V_c e V_s sono inserite nell'eq. 1.14. L'equazione viene semplificata e scritta in forma adimensionale, introducendo la variabile $x = \frac{h}{a}$, per mettere in evidenza il parametro che governa il problema, cioè il rapporto di densità ρ_s/ρ. L'equazione di terzo grado in x viene risolta, considerando i limiti fisici del problema ($0 \le x \le 2$):

$$\rho \pi h^2 \Big(a - \frac{h}{3}\Big) = \rho_s \frac{4}{3}\pi a^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}x^2 \Big(1 - \frac{x}{3}\Big) = \frac{\rho_s}{\rho} \tag{1.15}$$

  Alcuni metodi per risolvere equazioni non lineari possono essere ad esempio:
  - metodi iterativi. Ad esempio metodo di Newton

```
x        res
1.0000   -3.437475e-01
1.4583   -2.406993e-02
1.4990   -5.841602e-04
1.5000   -4.027539e-07
1.5000   -1.924017e-13
```

– metodo grafico (educativo: per problemi più complicati, prima di calcolare le soluzioni con metodi numerici, è bene avere un'idea di cosa si sta cercando). Si cercano le intersezioni delle funzioni $f_1(x) = \frac{3}{4}x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right)$ e $f_2(x) = \frac{\rho_s}{\rho}$.



Osservazione. Per valori di $\frac{\rho_s}{\rho}$ compresi tra 0 e 1, esiste una e una sola soluzione fisica del problema. Per i valori di desità "estremi" $\rho_s = 0$ (la sfera non pesa niente), $\rho_s = \rho_f$ (la sfera ha la stessa densità del fluido), esistono infinite soluzioni: ad esempio, nel caso di $\rho_s = \rho_f$ la posizione di equilibrio è indipendente dalla profondità alla quale è posta la sfera. Nel grafico, la funzione $f_1(x)$ rappresenta il volume immerso della sfera (diviso il volume totale della sfera stessa) al variare della distanza h del punto più basso dal pelo libero: questa deve quindi essere rappresentata, come in figura, nulla per valori di $x < 0$ (sfera completamente fuori dall'acqua), con il ramo di cubica per $0 < x < 2$ (sfera parzialmente immersa), uguale a 1 per $x > 2$ (sfera completamente immersa). La funzione $f_1(x)$ può quindi essere definita a tratti:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{3}{4}x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right) & 0 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases} \tag{1.16}$$

Discussione dei risultati. Quando diminuisce la denistà relativa del solido, la linea rossa si abbassa e la soluzione $x = \frac{h}{a}$ diminuisce (la sfera ha una porzione maggiore al di fuori dall'acqua). Esiste una e una sola soluzione che abbia senso fisico, fino a quando la densità relativa è compresa tra 0 e 1: non ha senso considerare valori negativi (la densità è una quantità positiva), mentre per valori di $\frac{\rho_s}{\rho}$ maggiori di 1 non può esistere una condizione di equilibrio statico (la sfera affonda...).

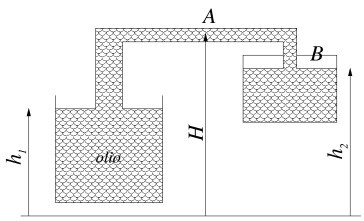
Calcolo volume cupola sferica. É comodo svolgere il calcolo in coordinate cilindriche (r, θ, z). Il volume V_{im} della parte immersa è uguale a

$$
\begin{aligned}
V_{im} = \iiint_{V_{im}} dV &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-a}^{l} \int_{r=0}^{\sqrt{a^2-z^2}} dV \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-a}^{l} \int_{r=0}^{\sqrt{a^2-z^2}} r dr dz d\theta \\
&= 2\pi \int_{z=-a}^{l} \frac{a^2 - z^2}{2} dz \\
&= \frac{\pi}{3} [2a^3 + 3a^2 l - l^3]
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Definendo $h = R + l$ come la quota immersa della sfera, si ottiene:

$$
V_{im} = \pi h^2 \left(a - \frac{h}{3} \right) \tag{1.18}
$$

Esercizio 1.1 — Stevino: serbatoi. Si consideri il sistema rappresentato in figura in cui un recipiente aperto all'atmosfera, contenente olio con densità $\rho = 800\ kg/m^3$, è collegato tramite una tubazione a un secondo recipiente, contenente a sua volta olio e aria non miscelati. Date le due altezze $h_1 = 1.5\ m$ e $h_2 = 1.8\ m$ del pelo libero nei due recipienti e l'altezza $H = 2.5\ m$ della tubatura, determinare il valore della pressione nei punti A e B in figura, esprimendolo sia in Pascal sia in metri d'acqua. Considerare la pressione atmosferica standard (101325 Pa).
($p_A = 93477\ Pa = 9.53\ m_{H_2O}$, $p_B = 98970.6\ Pa = 10.10\ m_{H_2O}$.) ■



Soluzione

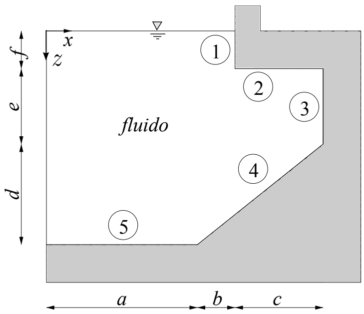
Concetti. Legge di Stevino, $P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2$. Conversione Pa - metri di H_2O,

$$1 m_{H_2O} = P[Pa] = \rho_{H_2O} \cdot g \cdot 1m = 9810 \frac{kg}{m^2 s^2} \cdot 1m = 9810 Pa\ . \tag{1.19}$$

Svolgimento. Il problema si risolve applicando due volte la legge di Stevino e la conversione da Pascal Pa a metri d'acqua m_{H_2O}. Sia O il punto sul pelo libero nel serbatoio *aperto* di sinistra, sul quale agisce la pressione ambiente.

$$\begin{cases} P_A = P_O + \rho g (h_1 - H) = 93477 Pa = \dfrac{93477}{9810} m_{H_2O} = 9.53 m_{H_2O} & \text{(Stevino O-A)} \\[2ex] P_B = P_O + \rho g (h_1 - h_2) = 98970.6 Pa = \dfrac{98970.6}{9810} m_{H_2O} = 10.10 m_{H_2O} & \text{(Stevino O-B)} \end{cases} \tag{1.20}$$

Esercizio 1.2 — Azioni statiche: diga. Si consideri la sezione di diga rappresentata in figura. Si determini il modulo e la direzione del risultante delle forze per unità di apertura agente sui diversi tratti rettilinei della diga stessa sapendo che la pressione atmosferica è di $1.01 \times 10^5\ Pa$. Dimensioni: $a = 10\ m$, $b = 2\,m$, $c = 8\ m$, $d = 10\ m$, $e = 5\ m$, $f = 3\ m$.
($\boldsymbol{R}_1 = 347100\hat{\boldsymbol{x}}\ N/m$,
$\boldsymbol{R}_2 = -1043200\hat{\boldsymbol{z}}\ N/m$,
$\boldsymbol{R}_3 = 774500\hat{\boldsymbol{x}}\ N/m$,
$\boldsymbol{R}_4 = 2284000 N/m\hat{\boldsymbol{x}} + 2284000 N/m\hat{\boldsymbol{z}}$,
$\boldsymbol{R}_5 = 2774000\hat{\boldsymbol{z}}\ N/m$.)



Soluzione

Concetti. Legge di Stevino, $P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2$. Calcolo della risultante delle azioni statiche, data la distribuzione di pressione e la normale $\hat{\boldsymbol{n}}$ uscente dal volume fluido,

$$\boldsymbol{R} = \int_S P\hat{\boldsymbol{n}}\ . \tag{1.21}$$

Svolgimento. Si risolve il problema bidimensionale, al quale "manca" la dimensione perpendicolare al piano del disegno. La risultante per unità di apertura agente sul lato ℓ (unità di misura nel SI, N/m) sarà quindi il risultato dell'integrale di linea

$$\boldsymbol{R} = \int_\ell P\hat{\boldsymbol{n}}\ . \tag{1.22}$$

Per ogni lato si calcola la distribuzione di pressione, grazie alla legge di Stevino. Si integra la distribuzione di pressione per ottenere il modulo della risultante; la direzione coincide con quella della normale (uscente dal volume occupato dal fluido). Per lo svolgimento, è stato scelto il sistema di riferimento rappresentato in figura, con l'asse x diretto verso destra e l'asse z verso il basso.

- Lato 1. Pressione lineare in z, $P(z) = P_O + \rho g z,\ \ z \in [0, f]$. Risultante

$$\boldsymbol{R}_1 = \int_{\ell_1} P\hat{\boldsymbol{n}} = \int_0^f (P_O + \rho g z)\hat{\boldsymbol{x}} dz = \left(P_O f + \frac{1}{2}\rho g f^2\right)\hat{\boldsymbol{x}} = 347100 N/m\hat{\boldsymbol{x}} \tag{1.23}$$

- Lato 2. Pressione costante, $P = P_O + \rho g f$. Risultante

$$\boldsymbol{R}_2 = \int_{\ell_2} P\hat{\boldsymbol{n}} = P \cdot c(-\hat{\boldsymbol{z}}) = (P_O + \rho g f) \cdot c(-\hat{\boldsymbol{z}}) = -1043200 N/m\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1.24}$$

- Lato 3. Pressione lineare in z, $P(z) = P_O + \rho g z,\ \ z \in [f, f+e]$. Risultante

$$\boldsymbol{R}_3 = \int_{\ell_3} P\hat{\boldsymbol{n}} = \int_f^{f+e} (P_O + \rho g z)\hat{\boldsymbol{x}} dz = \left(P_O f + \frac{1}{2}\rho g\left[(f+e)^2 - f^2\right]\right)\hat{\boldsymbol{x}} = 774500 N/m\hat{\boldsymbol{x}} \tag{1.25}$$

- Lato 4. Pressione lineare in z, $P(z) = P_O + \rho g z,\ \ z \in [f+e, f+e+d]$. Poichè il tratto di parete è rettilineo, il vettore normale è costante e può essere portato fuori dall'integrale. Si calcola prima il modulo della risultante e poi lo si moltiplica per il versore normale. Il modulo della risultante vale

$$\begin{aligned}
R_4 &= \int_{\ell_4} P d\ell = \int_{f+e}^{f+e+d} P(z)\frac{\sqrt{(b+c)^2+d^2}}{d}dz = \qquad \left(d\ell = \frac{\sqrt{(b+c)^2+d^2}}{d}dz\right)\\
&= \int_{f+e}^{f+e+d} (P_O + \rho g z)\frac{\sqrt{(b+c)^2+d^2}}{d}dz = \\
&= \frac{\sqrt{(b+c)^2+d^2}}{d}\left[P_O d + \frac{1}{2}\rho g\left((f+e+d)^2 - (f+e)^2\right)\right] = \sqrt{2}\cdot 2284000 N/m
\end{aligned} \tag{1.26}$$

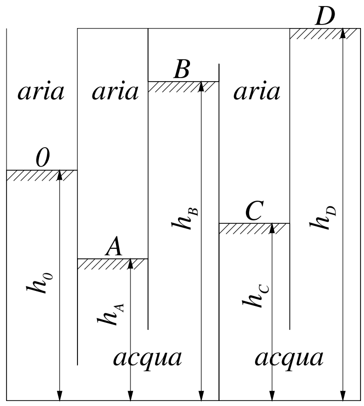
La forza può essere scritta come $\boldsymbol{R}_4 = R_4\hat{\boldsymbol{n}}_4$, con $\hat{\boldsymbol{n}}_4 = 1/\sqrt{2}\,\hat{\boldsymbol{x}} + 1/\sqrt{2}\,\hat{\boldsymbol{z}}$. Proietttando $\boldsymbol{R}_4$ lungo gli assi si ottengono le componenti orizzontali e verticali

$$\boldsymbol{R}_4 = 2284000 N/m\hat{\boldsymbol{x}} + 2284000 N/m\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1.27}$$

- Lato 5. Pressione costante, $P = P_O + \rho g(f+e+d)$. Risultante

$$\boldsymbol{R}_5 = P\cdot a\hat{\boldsymbol{z}} = (P_O + \rho g(f+e+d))\cdot a\hat{\boldsymbol{z}} = 2774000 N/m\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1.28}$$

Esercizio 1.3 — Stevino: recipiente labirintico. Si consideri il sistema di recipienti rappresentato in figura, in cui la zona tratteggiata contiene acqua, di densità pari a $10^3\ kg/m^3$ mentre nella restante parte è presente aria di densità pari a $1.2\ kg/m^3$. Determinare la pressione nei punti A, B, C e D sapendo che le rispettive altezze sono $h_A = 1\ m$, $h_B = 1.4\ m$, $h_C = 1.2\ m$ e $h_D = 1.6\ m$. Sia inoltre $h_0 = 1.3\ m$ e la pressione esterna $P_0 = 101325\ Pa$. ($P_A = 104262\ Pa$, $P_B = 100346\ Pa$, $P_C = 100348\ Pa$, $P_D = 97424\ Pa$.) ■



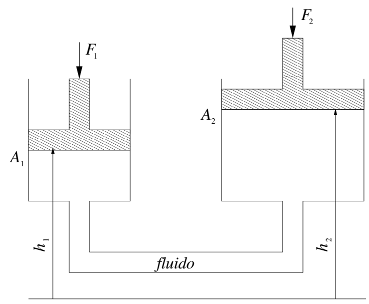
Soluzione

Concetti. Legge di Stevino, $P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2$.

Svolgimento. Il problema viene risolto applicando ripetutamente la legge di Stevino, a partire dalla superficie 0 sulla quale agisce la pressione ambiente P_0. Nella legge di Stevino è necessario prestare attenzione ad usare la densità del fluido che mette in collegamento i due punti considerati. I punti A e B sono messi in collegamento con il punto 0 dall'acqua. I punti B e C sono messi in collegamento tra di loro dall'aria. I punti C e D di nuovo dall'acqua. La soluzione del problema è quindi

$$\begin{aligned}
&P_0 = 101325 Pa && \text{dato} \\
&P_A = P_0 + \rho g(h_0 - h_A) = ... \\
&P_B = P_0 + \rho g(h_0 - h_B) = ... \\
&P_C = P_B + \rho_a g(h_B - h_C) = ... \\
&P_D = P_C + \rho g(h_C - h_D) = ...
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Esercizio 1.4 — Leva idraulica. La leva idraulica, rappresentata in figura, è formata da due sistemi cilindro-pistone. Determinare la forza che è necessario applicare al secondo pistone per mantenere il sistema in equilibrio quando sul primo agisce una forza $F_1 = 5000\ N$, allorché i pistoni si trovano nella posizione indicata in figura.
Dati: diametro primo cilindro: $d_1 = 0.2\ m$; diametro secondo cilindro: $d_2 = 0.4\ m$; diametro del condotto che unisce i due cilindri: $0.025\ m$; densità del fluido di lavoro: $600\ kg/m^3$; altezza del primo pistone $h_1 = 1\ m$, altezza del secondo pistone $h_2 = 2\ m$.
($p_1 = 159155\ Pa$, $p_2 = 153269\ Pa$, $\boldsymbol{F}_2 = -19260.3\hat{\boldsymbol{z}}\ N$.) ■



Soluzione

Concetti. Legge di Stevino. Risultante statica. Leva idraulica.

Svolgimento. Il problema si risolve scrivendo le condizioni di equilibrio tra le forze esterne e la risultante dello sforzo di pressione sulle facce opposte dei pistoni e applicando la legge di Stevino tra le due sezioni A_1 e A_2. Si ottiene un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite p_1, p_2, F_2),

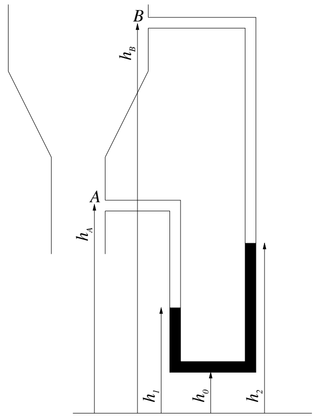
$$\begin{cases} F_1 = p_1 \pi \dfrac{d_1^2}{4} & \text{(Equilibrio pistone 1)} \\ p_2 = p_1 - \rho g (h_2 - h_1) & \text{(Legge di Stevino)} \\ F_2 = p_2 \pi \dfrac{d_2^2}{4} & \text{(Equilibrio pistone 2)}\ , \end{cases} \tag{1.30}$$

la cui soluzione è

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{4}{\pi}\dfrac{F_1}{d_1^2} & = 159155 Pa \\ p_2 = \dfrac{4}{\pi}\dfrac{F_1}{d_1^2} - \rho g (h_2 - h_1) & = 153269 Pa \\ F_2 = \dfrac{d_1^2}{d_2^2} F_1 - \dfrac{\pi}{4} d_2^2\ \rho g (h_2 - h_1) & = 19260.3 N\ . \end{cases} \tag{1.31}$$

La componente verticale F_2 della forza $\boldsymbol{F_2}$ è positiva diretta verso il basso, come nel disegno. Si può scrivere quindi $\boldsymbol{F_2} = -F_2 \hat{\boldsymbol{z}}$, se il versore $\hat{\boldsymbol{z}}$ è orientato verso l'alto.

Esercizio 1.5 — Manometro e Venturi. Si consideri il manometro riportato in figura utilizzato per misurare la differenza di pressione esistente fra due sezioni diverse di un condotto. Determinare la differenza di pressione fra i punti A e B riportati sul disegno sapendo che il liquido manometrico è acqua e ha una densità di 998 kg/m^3, che il fluido che scorre all'interno del condotto è aria e ha una densità di 1.225 kg/m^3, che $h_A = 1\ m$, che $h_B = 1.2\ m$, che $h_0 = 0.1\ m$, che $h_1 = 0.3\ m$ e che $h_2 = 0.7\ m$.
$(p_B - p_A = -3913.75\ Pa)$ ■



Soluzione

Concetti. Legge di Stevino. Manometro. Venturi.

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2 \tag{1.32}$$

Svolgimento. Si scrive la legge di Stevino tra i punti A e 1, 1 e 2, 2 e B:

$$\begin{cases} P_B + \rho_a g z_B = P_2 + \rho_a g z_2 \\ P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2 \\ P_A + \rho_a g z_A = P_1 + \rho_a g z_1 \\ \Delta P = P_B - P_A \end{cases} \tag{1.33}$$

Si risolve il sistema lineare (come più piace). Ad esempio, partendo dalla terza e inserendo nella seconda e nella prima i risultati trovati:

$$\begin{aligned} &P_1 = P_A + \rho_a g(z_A - z_1) \\ &P_2 = P_A + \rho_a g(z_A - z_1) + \rho g(z_1 - z_2) \\ &P_B = P_A + \rho_a g(z_A - z_1) + \rho g(z_1 - z_2) + \rho_a g(z_2 - z_B) \end{aligned} \tag{1.34}$$

E quindi, portando P_A a sinistra:

$$\Delta P = -(\rho - \rho_a) g(z_2 - z_1) - \rho_a g(z_B - z_A) = -3909.8 Pa \tag{1.35}$$

Osservazione.
Il sistema lineare (1.33) è sotto determinato (se esiste una soluzione, ne esistono infinite), essendo un sistema lineare di 4 equazioni in 5 incognite, P_1, P_2, P_A, P_B, ΔP. Il sistema lineare può essere scritto usando il formalismo matriciale come $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b}$ con

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} P_A \\ P_B \\ P_1 \\ P_2 \\ \Delta P \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} \rho_a g(h_2 - h_B) \\ \rho g(h_1 - h_2) \\ \rho_a g(h_A - h_1) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1.36}$$

Poichè la matrice $\underline{\underline{A}}$ ha rango massimo (=4), esiste una soluzione $\underline{x}^*$ del problema, tale che $\underline{\underline{A}}\underline{x}^* = \underline{b}$. Dal teorema del rango, si sa che il numero delle colonne (= 5) di una matrice è uguale alla dimensione del suo rango (= 4) e del suo nucleo (quindi = 1). Il nucleo della matrice $\underline{\underline{A}}$, tutti i vettori $\underline{v}$ t.c. $\underline{\underline{A}}\underline{v} = \underline{0}$, è uno spazio vettoriale di dimensione uno. Se $\underline{x}^*$ è soluzione del sistema, allora anche tutti i vettori $\underline{x}^* + a\underline{v}$, $a \in \mathbb{R}$, sono soluzione del sistema, poichè $\underline{\underline{A}}(\underline{x}^* + \underline{v}) = \underline{\underline{A}}\underline{x}^* + \underline{\underline{A}}\underline{v} = \underline{b} + \underline{0}$. Si può dimostrare il nucleo di $\underline{\underline{A}}$ è generato dal vettore $\underline{v} = (1, 1, 1, 1, 0)^T$. Quindi le infinite soluzioni del problema hanno la forma

$$\begin{bmatrix} P_A \\ P_B \\ P_1 \\ P_2 \\ \Delta P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_A^* \\ P_B^* \\ P_1^* \\ P_2^* \\ \Delta P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ a \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{1.37}$$

Ora dovrebbe apparire chiaro come non sia possibile determinare il valore assoluto delle pressioni P_1, P_2, P_A, P_B solamente da una misura di pressione con un manometro *differenziale*: questi valori sono noti a meno di una costante additiva a, indeterminata. Al contrario, la differenza di due di questi valori, come $\Delta P = P_B - P_A$, è unica (e uguale al risultato ottenuto nello svolgimento del problema): l'unicità di ΔP dipende dalla forma dei vettori del nucleo di $\underline{\underline{A}}$ che hanno componente ΔP nulla.