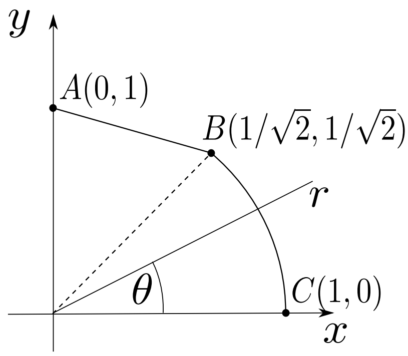
Esercizio 8.1 — Corrente irrotazionale nel piano. Un flusso incomprimibile, irrotazionale, bidimensionale e stazionario è descritto in coordinate polari dal potenziale cinetico

$$\phi(r,\theta) = r^2 cos(2\theta)$$

Si chiede di:

- determinare il campo di velocità, eventuali punti di ristagno, eventuali linee di corrente rettilinee;
- disegnare le linee di corrente;
- determinare il flusso attraverso il segmento che va dal punto $A = (x_A, y_A) = (0,1)$ al punto $B = (x_B, y_B) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e il flusso attraverso l'arco di circonferenza centrata nell'origine, da B a $C = (x_C, y_C) = (1,0)$. Discutere il risultato;
- dimostrare che le linee di corrente e le curve di livello del potenziale sono tra di loro perpendicolari.



Soluzione

Concetti. Legame tra potenziale e velocità. Funzione di corrente per problemi 2D incomprimibili.

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\phi \qquad \begin{cases} u_x = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \ . \end{cases} \tag{8.5}$$

Flusso di volume come differenza di funzione di corrente

$$\begin{aligned} \int_A^B \boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} &= \int_A^B u n_x + v n_y = \\ &= \int_A^B \frac{\partial \psi}{\partial x} t_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} t_y = \\ &= \int_A^B \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{ds} \right] ds = \\ &= \int_A^B \frac{d\psi}{ds}(x(s), y(s)) ds = \psi(B) - \psi(A) \ . \end{aligned} \tag{8.6}$$

Svolgimento.

- Campo di velocità, punto di ristagno e linee di corrente rettilinee
  - ϕ, $\boldsymbol{u}$, ψ:

$$\phi = r^2 \cos(2\theta) = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = x^2 - y^2$$

$$\begin{cases} u = \partial\phi/\partial x = 2x \\ v = \partial\phi/\partial y = -2y \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \psi(x,y) = 2xy + C$$

- punto di ristagno: $(x, y) = (0, 0)$.
- Linee di corrente rettilinee: $(x, y) = (0, y)$ entranti nell'origine, $(x, y) = (x, 0)$ uscenti dall'origine.

- ...
- flusso attraverso AB e BC. La normale considerata "punta a destra" mentre viene percorsa la curva: valgono quindi $n_x = t_y$ e $n_y = -t_x$.

$$\begin{cases} \Phi_{AB} = \psi(B) - \psi(A) = 1 - 0 = 1 \\ \Phi_{BC} = \psi(C) - \psi(B) = 0 - 1 = -1 \end{cases}$$

  Si consideri la curva chiusa costituita da AB, BC e dagli assi. Non c'è flusso attraverso gli assi e quello che entra in AB esce da BC. *il campo è regolare in tutto il dominio.*
- Il gradiente di una funzione è perpendicolare alle curve di livello: si può quindi verificare che i gradienti siano perpendicolari. Considerando le relazioni:

$$\begin{cases} u &= \partial\phi/\partial x = \partial\psi/\partial y \\ v &= \partial\phi/\partial y = -\partial\psi/\partial x \end{cases}$$

  Si può scrivere

$$\boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi = uv - vu = 0$$

Esercizio 8 .2 — Potenziale cinetico e funzione di corrente. Si consideri la corrente a potenziale piana e stazionaria descritta in un sistema di riferimento Cartesiano (x, y) dalla funzione potenziale cinetico $\phi(x, y)$:

$$\phi(x, y) = 5(x^2 - y^2) + 2x - 4y.$$

Si richiede di:

- derivare l'espressione analitica delle componenti in x e in y del campo di velocità;
- verificare che la corrente sia incomprimibile e irrotazionale;
- derivare l'espressione analitica della funzione di corrente $\psi(x, y)$;
- calcolare la portata volumetrica per unità di apertura q che scorre attraverso il segmento congiungente l'origine del piano con il punto di coordinate $(1, 1)$;

$(u_x = 10x + 2,\ u_y = -10y - 4,\ \psi(x, y) = 10xy + 2y + 4x + const.,\ q = 16)$ ■

Soluzione

Esercizio 8 .3 — Doppietta. Trovare il campo di moto generato da una doppietta. Sovrapporre ad esso una corente uniforme con lìvelocità asintotica lungo x, per trovare la corrente attorno al cilindro: stabilire il legame tra l'intensità della doppietta, la velocità asintotica e il raggio del cilindro. ■

Soluzione

Concetti. Soluzioni elementari dell'equazione di Laplace. Sovrapposizione di soluzioni elementari. Doppietta. Corrente attorno al cilindro.

Svolgimento. Dopo aver ricordato la definizione di doppietta, si calcolano il campo di moto e il potenziale cinetico da essa generato. Fatto questo, si sommano gli effetti della corrente indisturbata e si trovano le condizioni in cui esiste un raggio a (il raggio del cilindro) per il quale si annulla la velocità normale per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$.

- Definizione di doppietta ed equazioni. Per d finito:

$$\begin{aligned}
\phi &= \phi^+ + \phi^- = \\
&= \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2} - \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2} = \\
&= \frac{q}{4\pi} \ln \frac{(x - d/2)^2 + y^2}{(x + d/2)^2 + y^2}
\end{aligned} \tag{8.7}$$

Facendo tendere $d \to 0$ in modo tale che $qd = \mu$ sia finito e diverso da zero, sfruttando $\ln(1 + x) \sim x$ per $x \to 0$:

$$\frac{q}{4\pi} \ln \frac{(x - d/2)^2 + y^2}{(x + d/2)^2 + y^2} = \frac{q}{4\pi} \ln \left[1 - \frac{2xd}{(x + d/2)^2 + y^2}\right] \sim -\frac{qd}{2\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2)} \tag{8.8}$$

Quindi, il potenziale cinetico della doppietta espresso in coordinate cartesiane e cilindriche è:

$$\phi = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2)} = -\frac{\mu}{2\pi r} \cos\theta \tag{8.9}$$

Le componenti cartesiane della velocità sono:

$$\begin{cases}
u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{r^2} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{r^2} \\
v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{2\cos\theta \sin\theta}{r^2} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\sin(2\theta)}{r^2}
\end{cases} \tag{8.10}$$

Quelle cilindriche:

$$\begin{cases}
u_r = u\cos\theta + v\sin\theta = \frac{\mu}{2\pi r^2}[\cos(2\theta)\cos\theta + \sin(2\theta)\sin\theta] = \frac{\mu}{2\pi r^2}\cos\theta \\
u_\theta = -u\sin\theta + v\cos\theta = \frac{\mu}{2\pi r^2}[-\cos(2\theta)\sin\theta + \sin(2\theta)\cos\theta] = \frac{\mu}{2\pi r^2}\sin\theta
\end{cases} \tag{8.11}$$

- Si svovrappone alla soluzione appena trovata, quella della corrente uniforme

$$\begin{cases}
u_r = \left(U_\infty + \frac{\mu}{2\pi r^2}\right)\cos\theta \\
u_\theta = \left(-U_\infty + \frac{\mu}{2\pi r^2}\right)\sin\theta
\end{cases} \tag{8.12}$$

- Si impongono le condizioni al contorno $u_r(a, \theta) = 0, \theta \in [0, 2\pi]$, per trovare il legame tra il raggio del cilindro a, la velocità asintotica U_∞ e l'intensità della doppietta μ.

$$0 = u_r(a, \theta) = \left(U_\infty + \frac{\mu}{2\pi a^2}\right)\cos\theta \Rightarrow \frac{\mu}{2\pi} = -a^2 U_\infty \tag{8.13}$$

- Si ricostruisce infine la soluzione (alla quale è immediato sommare un eventuale vortice nel centro del cilindro) del flusso potenziale all'esterno del cilindro:

$$\begin{cases} u_r = U_\infty \left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right) \cos\theta \\ u_\theta = -U_\infty \left(1 + \dfrac{a^2}{r^2}\right) \sin\theta \end{cases} \tag{8.14}$$

Esercizio 8 .4 — Corrente attorno al cilindro. Una corrente piana con velocità asintotica $U_\infty = 10\ m/s$ investe un profilo circolare di raggio $a = 0.1\ m$. Determinare il valore di circolazione Γ affinché nel punto sulla superficie del cilindro posto a $\theta = \pi/3$ la velocità aumenti fino al valore $2U_\infty$ in modulo.
($\Gamma = -1.68\ m^2/s$, $23.45\ m^2/s$) ■

Soluzione

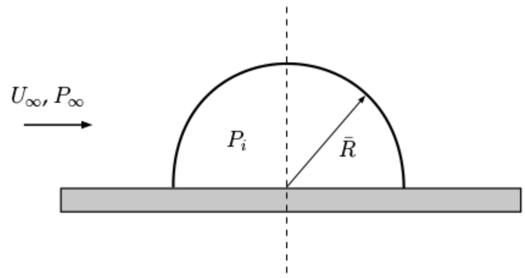
Esercizio 8 .5 — Corrente attorno al cilindro. Una corrente piana con velocità asintotica orizzontale (parallela all'asse x) $U_\infty = 1$ viene perturbata introducendo nell'origine del piano un vortice in modo tale da accelerare la corrente nel semipiano superiore e rallentarla in quello inferiore per valori positivi di Γ. Determinare la circolazione necessaria ad ottenere una differenza di componente x della velocità pari a 1 tra i due punti di coordinate (polari) $R = 1$ e $\theta = \pm\pi/2$. $(\Gamma = -\pi)$ ■

Soluzione

Esercizio 8 .6 — Semicilindro. Risultante delle forze. Si consideri la copertura rigida di un campo da calcio avente sezione semicircolare di raggio $\bar{R} = 50\ m$ rappresentata schematicamente in figura. Sulla struttura soffia un vento uniforme ($\rho = 1.225\, kg/m^3$, $P_\infty = 101325\ Pa$) in direzione orizzontale con velocità $U_\infty = 15\, km/h$. Assumendo di poter approssimare la corrente esterna come stazionaria, bidimensionale e a potenziale, si richiede di determinare:

1.1) la distribuzione della pressione esterna sulla sezione della struttura;
1.2) la risultante per unità di apertura delle forze agenti sulla struttura, ipotizzando che la pressione interna P_i sia pari a P_∞.

($P(\theta) = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2(1 - 4\sin^2\theta)$, $\boldsymbol{F} = 425.35\hat{\mathbf{y}}\ N/m$) ▪



Soluzione

Concetti. Flusso non viscoso 2D, incomprimibile e irrotazionale attorno al cilindro. Circolazione.

Svolgimento. Una volta scritte (come si ricavano?) le componenti della velocità nel campo di moto, tramite il teorema di Bernoulli (nel caso incomprimibile, stazionario, inviscido, irrotazionale,...) si calcola la pressione agente sulla superficie del cilindro. Integrando gli sforzi di pressione (interna ed esterna al cilindro) sul contorno, si ottiene la risultante.

- Campo di moto nel dominio esterno alla metà cilindro ($(r,\theta) \in [0,\infty) \times [0,\pi]$).

$$\begin{cases} u_r(r,\theta) = U_\infty \left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta \\ u_\theta(r,\theta) = -U_\infty \left(1 + \dfrac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta \end{cases} \tag{8.15}$$

- Grazie al teorema di Bernoulli (ipotesi...) si ottiene la pressione esterna sulla superficie della metà di cilindro. Sulla superficie del cilindro la componente radiale è nulla, quindi il modulo della velocità coincide con il valore assoluto della componente radiale.

$$\begin{aligned} P(\theta) &= P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho u_\theta(a,\theta)^2 = \\ &= P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho(2U_\infty\sin\theta)^2 = \\ &= P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2(1 - 4\sin^2\theta) \end{aligned} \tag{8.16}$$

- Integrale sulla superficie (interna ed esterna) degli sforzi di pressione per ottenere la risultante. Con $\hat{\boldsymbol{b}}$ si indica la normale diretta verso il centro del cilindro.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \int_0^\pi (P(\theta) - P_\infty)\hat{\boldsymbol{b}} a d\theta = \\ &= \int_0^\pi (\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 (1 - 4\sin^2\theta)(-\cos\theta\hat{\boldsymbol{x}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{y}}) a d\theta = \end{aligned} \tag{8.17}$$

Usando i risultati (integrare!!)

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi \sin\theta d\theta = 2 \\ &\int_0^\pi \cos\theta d\theta = 0 \\ &\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3} \\ &\int_0^\pi \cos\theta \sin^2\theta d\theta = 0\end{aligned} \tag{8.18}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \int_0^\pi (P(\theta) - P_\infty)\hat{\boldsymbol{b}} a d\theta = \\ &= -\frac{1}{2}\rho a U_\infty^2 \int_0^\pi (1 - 4\sin^2\theta)\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}} d\theta = \\ &= -\frac{1}{2}\rho a U_\infty^2 \left(2 - \frac{16}{3}\right)\hat{\boldsymbol{y}}\end{aligned} \tag{8.19}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{5}{3}\rho a U_\infty^2 \hat{\boldsymbol{y}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F} = 425.35\hat{\boldsymbol{y}} N/m$$