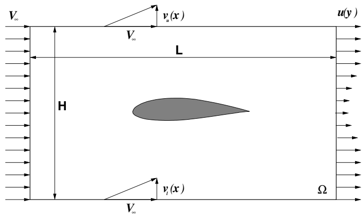
Esercizio 4.3 — Difetto di scia: stima resistenza. Calcolare la resistenza di un profilo immerso in una corrente stazionaria con velocità asintotica $\boldsymbol{V}_\infty$, sapendo la distribuzione della componente di velocità $u(y)$ parallela a $\boldsymbol{V}_\infty$ a valle del profilo e assumendo che:

- la pressione statica sul contorno del volume di controllo sia costante e pari a quella della corrente indisturbata a monte del profilo;
- sul lato superiore e inferiore del volume di controllo sia possibile trascurare la componente lungo l'asse x della perturbazione della velocità dovuta alla presenza del profilo: $\boldsymbol{V} = (V_\infty + u, v) \simeq (V_\infty, v)$.

$(R = \int_0^H \rho\, u(y)[V_\infty - u(y)]dy.)$ ■



Soluzione

Concetti. Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo. Esperienza in laboratorio sul *difetto di scia*.

Svolgimento. Vengono scritti i bilanci integrali di massa e quantità di moto, opportunamente semplificati (ipotesi di stazionarietà $\frac{d}{dt} \equiv 0$, densità costante $\rho = \bar{\rho}$, ipotesi sulle condizioni sul bordo esterno del dominio); all'interno dei bilanci si possono riconoscere i termini legati alle azioni scambiate dal fluido con il profilo (l'incognita del problema); si sfrutta infine la geometria rettangolare del contorno esterno e le ipotesi su di esso per ottenere una forma ulteriormente semplificata dei bilanci e trovare la soluzione del problema.

- Scrittura e semplificazione dei bilanci di massa e quantità di moto.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\int_\Omega \rho + \oint_{\partial\Omega} \rho \boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\boldsymbol{u} + \oint_{\partial\Omega} \rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} + \oint_{\partial\Omega} p\hat{\boldsymbol{n}} - \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{s_n} = 0 & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \tag{4.10}$$

Nel problema, il controno del dominio fluido $\partial\Omega$ è costituito dal bordo rettangolare γ_∞ lontano dal profilo e dal bordo γ_p coincidente con il profilo stesso. La forza $\boldsymbol{F}$ agente sul profilo è l'integrale degli sforzi generati dal fluido (uguali e contrari agli sforzi agenti sul fluido) sul contorno del profilo. Inoltre si può fare l'ipotesi di sforzi viscosi nulli e pressione costante sul bordo esterno: l'integrale sul dominio esterno si riduce all'integrale della normale su una superficie chiusa ed è quindi nullo. Si può dunque scrivere:

$$\oint_{\partial\Omega}(-p\hat{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{s_n}) = \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{t_n} = \underbrace{\oint_{\gamma_p} \boldsymbol{t_n}}_{=-\boldsymbol{F}} + \underbrace{\oint_{\gamma_\infty} \boldsymbol{t_n}}_{=0} = -\boldsymbol{F} \tag{4.11}$$

Osservazione. A differenza di quanto fatto in classe, non è stata fatta l'ipotesi di fluido non viscoso; il contributo all'infinito si annulla con l'ipotesi di pressione costante all'infinito e sforzi viscosi trascurabili. Per ritrovarsi con gli appunti, sostituire $\boldsymbol{t_n}$ *con* $-p\hat{\boldsymbol{n}}$.

Dopo aver fatto l'ipotesi di stazionarietà e aver inserito la definizione di $\boldsymbol{F}$ appena data, le equazioni di bilancio possono essere scritte come:

$$\begin{cases} \oint_{\partial\Omega} \rho \boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 0 \\ \boldsymbol{F} = -\oint_{\partial\Omega} \rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \end{cases} \tag{4.12}$$

Il bilancio di quantità di moto può essere scritto esplicitando e separando le componenti vettoriali.

$$\begin{aligned} F_x \hat{\boldsymbol{x}} + F_y \hat{\boldsymbol{y}} &= -\oint_{\partial\Omega} \rho(u\boldsymbol{x} + v\boldsymbol{y})\boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \\ &= -\hat{\boldsymbol{x}} \oint_{\partial\Omega} \rho u \boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} - \hat{\boldsymbol{y}} \oint_{\partial\Omega} \rho v \boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \end{aligned} \tag{4.13}$$

- Scrittura delle equazioni di bilancio in componenti (sfruttando la geometria rettangolare del bordo esterno: γ_1 indica il bordo di sinistra, γ_2 il bordo inferiore, γ_3 quello di destra, γ_4 quello superiore).
  Attenzione: la normale è quella uscente dal dominio fluido. Sul contorno del profilo, la normale è entrante nel profilo. In più: non fare confusione tra azioni del profilo agenti sul fluido e azioni del fluido agenti sul profilo!

$$\begin{cases} 0 = \oint_{\partial\Omega} \rho \boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = -\int_{\gamma_1} \rho u - \int_{\gamma_2} \rho v + \int_{\gamma_3} \rho u + \int_{\gamma_4} \rho v \\ F_x = +\int_{\gamma_1} \rho u^2 + \int_{\gamma_2} \rho uv - \int_{\gamma_3} \rho u^2 - \int_{\gamma_4} \rho uv \\ F_y = +\int_{\gamma_1} \rho uv + \int_{\gamma_2} \rho v^2 - \int_{\gamma_3} \rho uv - \int_{\gamma_4} \rho v^2 \end{cases} \tag{4.14}$$

- Ipotesi sulla velocità sui lati orizzontali ($u|_{\gamma_2} = u|_{\gamma_4} = V_\infty$ costante), per poter ulteriormente semplificare il risultato.

$$\begin{cases} \int_{\gamma_2} \rho v - \int_{\gamma_4} \rho v = -\int_{\gamma_1} \rho u + \int_{\gamma_3} \rho u \\ F_x = +\int_{\gamma_1} \rho u^2 - \int_{\gamma_3} \rho u^2 + V_\infty \left[\int_{\gamma_2} \rho v - \int_{\gamma_4} \rho v \right] \end{cases} \tag{4.15}$$

E inserendo la prima nella seconda:

$$\begin{aligned} F_x &= \int_{\gamma_1} \rho u^2 - \int_{\gamma_3} \rho u^2 + V_\infty \left[-\int_{\gamma_1} \rho u + \int_{\gamma_3} \rho u \right] = \\ &= \int_{\gamma_1} \rho u(u - V_\infty) + \int_{\gamma_3} \rho u(V_\infty - u) = \quad (u|_{\gamma_1} = V_\infty \Rightarrow \text{il primo integrale è nullo}) \\ &= \int_{\gamma_3} \rho u(V_\infty - u) = \\ &= \int_0^H \rho u(y)(V_\infty - u(y))dy \end{aligned} \tag{4.16}$$

Osservazioni. Tramite la misura dei profili di velocità in galleria, è possibile stimare la resistenza del corpo. Le condizioni di 'aria libera' e in galleria sono diverse. In generale si può dire che in galleria il fluido è confinato dalle pareti di galleria, maggiormente 'vincolato'. Inoltre sulle pareti della galleria esiste una condizione di adesione: per la conservazione della massa, in galleria si osserva una velocità maggiore sulla "sezione di uscita" rispetto a un corpo in aria libera. Per tenere conto di effetti di **bloccaggio** dovuti al confinamento in galleria, è necessario compiere delle correzioni delle misure sperimentali. Agli effetti di bloccaggio, vanno aggiunti gli effetti di **galleggiamento** dovuti al gradiente di pressione