

# **Note ed esercizi di fluidodinamica**

# Esercizi

1	Statica .....	5
2	Tensione superficiale .....	17
3	Cinematica .....	23
4	Bilanci .....	31
4.10	Equazioni di bilancio	
4.11	Relazioni di salto	
5	Teorema di Bernoulli .....	57
6	Soluzioni esatte .....	71
7	Similitudine .....	93
8	Aerodinamica .....	103
9	Strato limite .....	119
10	Turbolenza .....	131



# 1. Statica

## Definizione di fluido

Un fluido è un materiale che non è in grado di sopportare sforzi di taglio, quando è in quiete o in moto con velocità uniforme in un sistema di riferimento inerziale (invarianza galileiana). I fluidi “ordinari” sono isotropi, cioè sono indipendenti dall’orientazione nello spazio. Un fluido isotropo in quiete è quindi caratterizzato da uno stato di sforzo idrostatico,

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I}, \quad (1.1)$$

avendo indicato con  $\mathbb{T}$  il tensore degli sforzi,  $p$  la pressione all’interno del fluido e  $\mathbb{I}$  il tensore identità. Il vettore sforzo  $\mathbf{t}_n$  agente *sul fluido* (su una superficie di fluido con versore normale  $\hat{\mathbf{n}}$  uscente dal volume fluido) è

$$\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}}. \quad (1.2)$$

Per il principio di azione e reazione, lo sforzo agente su una parete solida a contatto con un fluido è di intensità uguale e direzione opposta. La risultante delle forze coincide con l’integrale di superficie del vettore sforzo.

## Equazione di equilibrio: forma integrale e differenziale

Nella condizione di equilibrio di un fluido in quiete, la risultante delle forze esterne agenti sul fluido è nulla. L’equilibrio di un volume di fluido  $V$ , delimitato dalla superficie  $\partial V = S$ , soggetto a forze per unità di volume  $\mathbf{f}$  in  $V$  e forze per unità di superficie  $\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}}$  su  $S$

$$\mathbf{0} = \int_V \mathbf{f} + \oint_S \mathbf{t}_n = \int_V \mathbf{f} - \oint_S p\hat{\mathbf{n}}. \quad (1.3)$$

La condizione appena ottenuta è una condizione integrale, per l’intero volume fluido  $V$ . Se il campo di pressione  $p$  è sufficientemente regolare, è possibile applicare il teorema del gradiente (A.3.1) all’integrale di superficie e raccogliere i termini a destra dell’uguale sotto un unico integrale di volume  $V$

$$\mathbf{0} = \int_V \mathbf{f} - \nabla p. \quad (1.4)$$

Poiché la condizione di equilibrio è valida indipendentemente dal volume  $V$  considerato, l'equazione di equilibrio in forma differenziale

$$\mathbf{f} - \nabla p = \mathbf{0} \quad (1.5)$$

viene ottenuta imponendo che il termine sotto segno di integrale sia identicamente nullo.

### Legge di Stevino

La legge di Stevino viene ricavata dall'integrazione dell'equilibrio in forma differenziale (1.5), nel caso in cui le forze di volume siano dovute alla gravità  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g} = -\rho g \hat{\mathbf{z}}$ , avendo indicato con  $\rho$  la densità del fluido e avendo introdotto un sistema di riferimento cartesiano con l'asse  $z$  verticale e diretto verso l'alto

$$\nabla p + \rho g \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0}. \quad (1.6)$$

Usando un sistema di riferimento cartesiano, nell'ipotesi di essere sufficientemente vicino alla terra e di poter considerare il campo vettoriale  $\mathbf{g}$  uniforme e diretto verso il basso, è possibile integrare le componenti cartesiane dell'equazione precedente per ottenere il legame tra la densità e la pressione del fluido

$$\begin{cases} \partial p / \partial x = \partial p / \partial y = 0 & \rightarrow & p = p(z) \\ \partial p / \partial z = -\rho g. \end{cases} \quad (1.7)$$

Nell'ipotesi che la densità  $\rho$  e la forza di gravità siano costanti, si ottiene la legge di Stevino

$$p(z) + \rho g z = \text{cost}. \quad (1.8)$$

### Legge di Archimede. Forza di galleggiamento

Un corpo immerso in fluido riceve dal basso verso l'alto una spinta uguale al peso della massa del fluido spostato. Su un corpo di volume  $V_s$ , immerso completamente in un fluido di densità  $\rho_f$ , agisce una forza (di Archimede o di galleggiamento)

$$\mathbf{F}_{Arch} = - \int_{V_s} \rho_f \mathbf{g}. \quad (1.9)$$

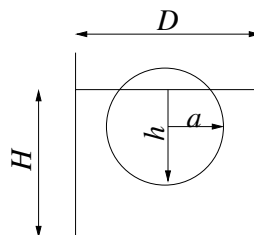
La legge di Archimede vale per un sistema immerso nel campo di gravità  $\mathbf{g}$ , uniforme in spazio. Il termine sotto segno di integrale coincide con il gradiente del campo di pressione. Forze di galleggiamento nascono su un corpo immerso in un fluido in cui c'è un gradiente di pressione: se il gradiente di pressione è costante all'interno del fluido, la forza di galleggiamento sul corpo è

$$\mathbf{F}_{gall} = - \int_{V_s} \nabla p. \quad (1.10)$$

Ad esempio, quando si svolge un esperimento in galleria del vento, nella camera di prova è presente un gradiente di pressione, diretto in direzione  $\hat{\mathbf{x}}$  della corrente. Se in prima approssimazione si considera un gradiente di pressione  $\nabla = -G_P \hat{\mathbf{x}}$  costante, si può stimare la forza di galleggiamento  $\mathbf{F}_{gall} = V_s G_P \hat{\mathbf{x}}$ , dovuta al gradiente di pressione in galleria del vento, assente in condizioni di aria libera.

La valutazione di questa azione “spuria” sul corpo e la correzione delle misure effettuate rientrano nell'ambito delle *correzioni di galleria*.

**Esercizio 1.1 — Legge di Archimede.** Si consideri, sulla superficie terrestre, un recipiente di diametro  $D = 2 \text{ m}$  e profondità  $H = 3 \text{ m}$  contenente acqua ( $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$ ). Al suo interno è inserita una sfera di raggio  $a = 0.2 \text{ m}$  e densità pari a  $\rho_s = 842.06 \text{ kg/m}^3$ . Determinare in modo univoco la posizione assunta dalla sfera nel liquido. Tale posizione varia se invece che sulla terra ci si trova sulla luna?  
( $h = 0.3 \text{ m}$ , non varia sulla luna.) ■



### Soluzione

**Concetti.** Legge di Archimede. Condizione di equilibrio. Calcolo del volume di solidi (integrali di volume). Soluzione di semplici equazioni non lineari per via grafica (studio di funzione) e/o numerica.

**Svolgimento.** Per svolgere l'esercizio bisogna calcolare la condizione di equilibrio del corpo, soggetto alla propria forza peso e alla forza che il fluido esercita su di esso (legge di Archimede). Nell'equazione di equilibrio, l'incognita  $h$  compare nella formula del volume immerso nel fluido. L'equazione di equilibrio è un'equazione non lineare in  $h$ , da risolvere per via grafica o numerica.

- Scrittura dell'equazione di equilibrio del corpo soggetto al proprio peso e alla forza esercitata su di esso dal fluido, diretta verso l'alto e pari al peso del volume del fluido spostato (legge di Archimede).

$$\rho_s V_s g = \rho V_c g \quad \Rightarrow \quad \rho_s V_s = \rho V_c \quad (1.11)$$

*Osservazione.* Si trova subito la risposta all'ultimo quesito: poiché  $g$  non compare nell'equazione di equilibrio, la condizione di equilibrio sulla Luna è uguale a quella che si ha sulla Terra.

- Calcolo del volume della sfera e della calotta sferica:
  - Volume della sfera:  $V_s = \frac{4}{3}\pi a^3$
  - Volume della calotta sferica:  $V_c = \pi h^2(a - \frac{h}{3})$   
(per credere, verificare casi limite:  $h = 0$ ,  $h = a$ ,  $h = 2a$ ; alla fine dell'esercizio è riportato il calcolo, tramite integrale di volume)
- Le formule per i volumi  $V_c$  e  $V_s$  sono inserite nell'eq. 1.11. L'equazione viene semplificata e scritta in forma adimensionale, introducendo la variabile  $x = \frac{h}{a}$ . L'equazione di terzo grado in  $x$  viene risolta, considerando i limiti fisici del problema ( $0 \leq x \leq 2$ ):

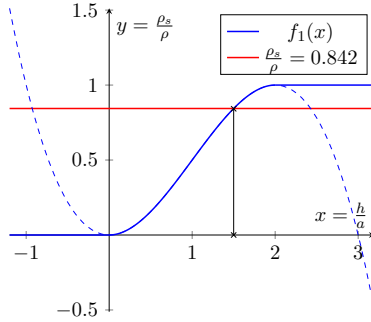
$$\rho \pi h^2 \left(a - \frac{h}{3}\right) = \rho_s \frac{4}{3} \pi a^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} x^2 \left(1 - \frac{x}{3}\right) = \frac{\rho_s}{\rho} \quad (1.12)$$

Alcuni metodi per risolvere equazioni non lineari possono essere ad esempio:

- metodi iterativi. Ad esempio metodo di Newton

x	res
1.0000	-3.437475e-01
1.4583	-2.406993e-02
1.4990	-5.841602e-04
1.5000	-4.027539e-07
1.5000	-1.924017e-13

- metodo grafico (educativo: per problemi più complicati, prima di calcolare le soluzioni con metodi numerici, è bene avere un'idea di cosa si sta cercando). Si cercano le intersezioni delle funzioni  $f_1(x) = \frac{3}{4}x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right)$  e  $f_2(x) = \frac{\rho_s}{\rho}$ .



*Osservazione.* Per valori di  $\frac{\rho_s}{\rho}$  compresi tra 0 e 1, esiste una e una sola soluzione fisica del problema. Come giustamente **suggerito da un vostro compagno**, per i valori di densità “estremi”  $\rho_s = 0$ ,  $\rho_s = \rho_f$ , esistono infinite soluzioni: nel caso di  $\rho_s = \rho_f$ , la posizione di equilibrio è indipendente dalla profondità alla quale è posta la sfera. Nel grafico, la funzione  $f_1(x)$  rappresenta il volume immerso della sfera (diviso il volume totale della sfera stessa) al variare della distanza  $h$  del punto più basso dal pelo libero: questa deve quindi essere rappresentata, come in figura, nulla per valori di  $x < 0$  (sfera completamente fuori dall’acqua), con il ramo di cubica per  $0 < x < 2$  (sfera parzialmente immersa), uguale a 1 per  $x > 2$  (sfera completamente immersa). La funzione  $f_1(x)$  può quindi essere definita a tratti:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{3}{4}x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right) & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases} \quad (1.13)$$

*Discussione dei risultati.* Quando diminuisce la densità relativa del solido, la linea rossa si abbassa e la soluzione  $x = \frac{h}{a}$  diminuisce (la sfera ha una porzione maggiore al di fuori dall’acqua). Esiste una e una sola soluzione che abbia senso fisico, fino a quando la densità relativa è compresa tra 0 e 1: non ha senso considerare valori negativi (la densità è una quantità positiva), mentre per valori di  $\frac{\rho_s}{\rho}$  maggiori di 1 non può esistere una condizione di equilibrio statico (la sfera affonda...).

**Calcolo volume cupola sferica.** È comodo svolgere il calcolo in coordinate cilindriche  $(r, \theta, z)$ .

Il volume della parte immersa è uguale a

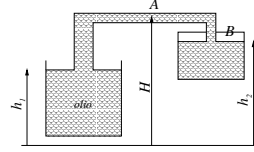
$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_V dV = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-a}^l \int_{r=0}^{\sqrt{a^2-z^2}} dV \\
 &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-a}^l \int_{r=0}^{\sqrt{a^2-z^2}} r dr dz d\theta \\
 &= 2\pi \int_{z=-a}^l \frac{a^2 - z^2}{2} dz \\
 &= \frac{\pi}{3} [2a^3 + 3a^2l - l^3]
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Definendo  $h = R + l$  come la quota immersa della sfera, si ottiene:

$$V = \pi h^2 \left( a - \frac{h}{3} \right) \tag{1.15}$$



**Esercizio 1.1 — Stevino: serbatoi.** Si consideri il sistema rappresentato in figura in cui un recipiente aperto all'atmosfera, contenente olio con densità  $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ , è collegato tramite una tubazione a un secondo recipiente, contenente a sua volta olio e aria non miscelati. Date le due altezze  $h_1 = 1.5 \text{ m}$  e  $h_2 = 1.8 \text{ m}$  del pelo libero nei due recipienti e l'altezza  $H = 2.5 \text{ m}$  della tubatura, determinare il valore della pressione nei punti A e B in figura, esprimendolo sia in Pascal sia in metri d'acqua. Considerare la pressione atmosferica standard ( $101325 \text{ Pa}$ ). ( $p_A = 93477 \text{ Pa} = 9.53 \text{ m}_{H_2O}$ ,  $p_B = 98970.6 \text{ Pa} = 10.10 \text{ m}_{H_2O}$ .) ■



### Soluzione

**Concetti.** Legge di Stevino. Conversioni: definizione di  $1 \text{ m}_{H_2O}$ .

Legge di Stevino:

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2 \quad (1.16)$$

Conversione Pascal  $Pa$  - metri di  $H_2O$ :

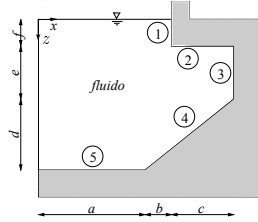
$$1 \text{ m}_{H_2O} = P[Pa] = \rho_{H_2O} \cdot g \cdot 1 \text{ m} = 9810 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}^2} \cdot 1 \text{ m} = 9810 \text{ Pa} \quad (1.17)$$

**Svolgimento.** Il problema si risolve applicando due volte la legge di Stevino e la conversione da Pascal  $Pa$  a metri d'acqua  $\text{m}_{H_2O}$ . Sia  $O$  il punto sul pelo libero nel serbatoio di sinistra, sul quale agisce la pressione ambiente.

$$\begin{cases} P_A = P_O + \rho g(h_1 - H) = 93477 \text{ Pa} = \frac{93477}{9810} \text{ m}_{H_2O} = 9.53 \text{ m}_{H_2O} & (\text{Stevino O-A}) \\ P_B = P_O + \rho g(h_1 - h_2) = 98970.6 \text{ Pa} = \frac{98970.6}{9810} \text{ m}_{H_2O} = 10.10 \text{ m}_{H_2O} & (\text{Stevino O-B}) \end{cases} \quad (1.18)$$

**Esercizio 1.2 — Azioni statiche: diga.** Si consideri la sezione di diga rappresentata in figura. Si determini il modulo e la direzione del risultante delle forze per unità di apertura agente sui diversi tratti rettilinei della diga stessa sapendo che la pressione atmosferica è di  $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ . Dimensioni:  $a = 10 \text{ m}$ ,  $b = 2 \text{ m}$ ,  $c = 8 \text{ m}$ ,  $d = 10 \text{ m}$ ,  $e = 5 \text{ m}$ ,  $f = 3 \text{ m}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= 347100 \hat{\mathbf{x}} \text{ N/m}, \\ \mathbf{R}_2 &= -1043200 \hat{\mathbf{z}} \text{ N/m}, \\ \mathbf{R}_3 &= 774500 \hat{\mathbf{x}} \text{ N/m}, \\ \mathbf{R}_4 &= 2284000 \text{ N/m} \hat{\mathbf{x}} + 2284000 \text{ N/m} \hat{\mathbf{z}}, \\ \mathbf{R}_5 &= 2774000 \hat{\mathbf{z}} \text{ N/m}. \end{aligned}$$



### Soluzione

**Concetti.** Legge di Stevino. Calcolo della risultante delle azioni statiche, data la distribuzione di pressione e la normale  $\hat{\mathbf{n}}$  uscente dal volume fluido.

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2 \quad (1.19)$$

$$\mathbf{R} = \int_l P \hat{\mathbf{n}} \quad (1.20)$$

**Svolgimento.** Per ogni lato si calcola la distribuzione di pressione, grazie alla legge di Stevino. Si integra la distribuzione di pressione per ottenere il modulo della risultante; la direzione coincide con quella della normale (uscente dal volume occupato dal fluido). Per lo svolgimento, è stato scelto il sistema di riferimento rappresentato in figura, con l'asse  $x$  diretto verso destra e l'asse  $z$  verso il basso.

- Lato 1. Pressione lineare in  $z$ ,  $P(z) = P_O + \rho g z$ ,  $z \in [0, f]$ .

$$\mathbf{R}_1 = \int_l P \hat{\mathbf{n}} dl = \int_0^f (P_O + \rho g z) \hat{\mathbf{x}} dz = \left( P_O f + \frac{1}{2} \rho g f^2 \right) \hat{\mathbf{x}} = 347100 \frac{N}{m} \hat{\mathbf{x}} \quad (1.21)$$

- Lato 2. Pressione costante,  $P = P_O + \rho g f$ . Risultante:

$$\mathbf{R}_2 = P \cdot c(-\hat{\mathbf{z}}) = (P_O + \rho g f) \cdot c(-\hat{\mathbf{z}}) = -1043200 \frac{N}{m} \hat{\mathbf{z}} \quad (1.22)$$

- Lato 3. Pressione lineare in  $z$ ,  $P(z) = P_O + \rho g z$ ,  $z \in [f, f + e]$ .

$$\mathbf{R}_3 = \int_l P \hat{\mathbf{n}} dl = \int_f^{f+e} (P_O + \rho g z) \hat{\mathbf{x}} dz = \left( P_O f + \frac{1}{2} \rho g [(f + e)^2 - f^2] \right) \hat{\mathbf{x}} = 774500 \frac{N}{m} \hat{\mathbf{x}} \quad (1.23)$$

- Lato 4. Pressione lineare in  $z$ ,  $P(z) = P_O + \rho g z$ ,  $z \in [f + e, f + e + d]$ .

$$\begin{aligned} R_4 &= \int_l P dl = \int_{f+e}^{f+e+d} P(z) \frac{\sqrt{(b+c)^2 + d^2}}{d} dz = \left( dl = \frac{\sqrt{(b+c)^2 + d^2}}{d} dz \right) \\ &= \int_{f+e}^{f+e+d} (P_O + \rho g z) \frac{\sqrt{(b+c)^2 + d^2}}{d} dz = \\ &= \frac{\sqrt{(b+c)^2 + d^2}}{d} \left[ P_O d + \frac{1}{2} \rho g \left( (f + e + d)^2 - (f + e)^2 \right) \right] = \sqrt{2} \cdot 2284000 \frac{N}{m} \end{aligned}$$

(1.24)

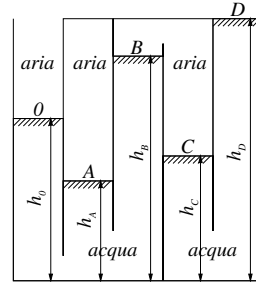
La forza può essere scritta come  $\mathbf{R}_4 = R_4 \hat{\mathbf{n}}_4$ , con  $\hat{\mathbf{n}}_4 = 1/\sqrt{2} \hat{\mathbf{x}} + 1/\sqrt{2} \hat{\mathbf{z}}$ . Proiettando  $\mathbf{R}_4$  lungo gli assi si ottengono le componenti orizzontali e verticali

$$\mathbf{R}_4 = 2284000 \frac{N}{m} \hat{\mathbf{x}} + 2284000 \frac{N}{m} \hat{\mathbf{z}} \quad (1.25)$$

- Lato 5. Pressione costante,  $P = P_O + \rho g(f + e + d)$ . Risultante:

$$\mathbf{R}_5 = P \cdot a \hat{\mathbf{z}} = (P_O + \rho g(f + e + d)) \cdot a \hat{\mathbf{z}} = 2774000 \frac{N}{m} \hat{\mathbf{z}} \quad (1.26)$$

**Esercizio 1.3 — Stevino: recipiente labirintico.** Si consideri il sistema di recipienti rappresentato in figura, in cui la zona tratteggiata contiene acqua, di densità pari a  $10^3 \text{ kg/m}^3$  mentre nella restante parte è presente aria di densità pari a  $1.2 \text{ kg/m}^3$ . Determinare la pressione nei punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  sapendo che le rispettive altezze sono  $h_A = 1 \text{ m}$ ,  $h_B = 1.4 \text{ m}$ ,  $h_C = 1.2 \text{ m}$  e  $h_D = 1.6 \text{ m}$ . Sia inoltre  $h_0 = 1.3 \text{ m}$  e la pressione esterna  $P_0 = 101325 \text{ Pa}$ . ( $P_A = 104262 \text{ Pa}$ ,  $P_B = 100346 \text{ Pa}$ ,  $P_C = 100348 \text{ Pa}$ ,  $P_D = 97424 \text{ Pa}$ .) ■



#### Soluzione

**Concetti.** Legge di Stevino, facendo attenzione a quale densità usare (quella del fluido comune alle due superfici).

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2 \quad (\text{Legge di Stevino}) \quad (1.27)$$

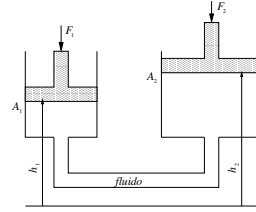
**Svolgimento.** Il problema viene risolto applicando ripetutamente la legge di Stevino, a partire dalla superficie 0 sulla quale agisce la pressione ambiente  $P_0$ . Nella legge di Stevino è necessario prestare attenzione ad usare la densità del fluido che mette in collegamento i due punti considerati. I punti  $A$  e  $B$  sono messi in collegamento con il punto 0 dall'acqua. I punti  $B$  e  $C$  sono messi in collegamento tra di loro dall'aria. I punti  $C$  e  $D$  di nuovo dall'acqua.

$$\begin{aligned} P_0 &= 101325 \text{ Pa} && \text{dato} \\ P_A &= P_0 + \rho g(h_0 - h_A) = \dots \\ P_B &= P_0 + \rho g(h_0 - h_B) = \dots \\ P_C &= P_B + \rho_a g(h_B - h_C) = \dots \\ P_D &= P_C + \rho g(h_C - h_D) = \dots \end{aligned} \quad (1.28)$$

**Esercizio 1.4 — Leva idraulica.** La leva idraulica, rappresentata in figura, è formata da due sistemi cilindro-pistone. Determinare la forza che è necessario applicare al secondo pistone per mantenere il sistema in equilibrio quando sul primo agisce una forza  $F_1 = 5000 \text{ N}$ , allorché i pistoni si trovano nella posizione indicata in figura.

Dati: diametro primo cilindro:  $d_1 = 0.2 \text{ m}$ ; diametro secondo cilindro:  $d_2 = 0.4 \text{ m}$ ; diametro del condotto che unisce i due cilindri:  $0.025 \text{ m}$ ; densità del fluido di lavoro:  $600 \text{ kg/m}^3$ ; altezza del primo pistone  $h_1 = 1 \text{ m}$ , altezza del secondo pistone  $h_2 = 2 \text{ m}$ .

( $p_1 = 159155 \text{ Pa}$ ,  $p_2 = 153269 \text{ Pa}$ ,  $F_2 = -19260.3 \hat{z} \text{ N}$ .)



### Soluzione

**Concetti.** Legge di Stevino. Risultante statica. Leva idraulica.

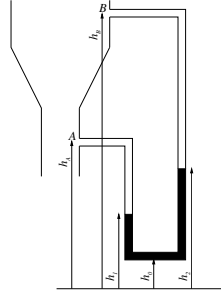
**Svolgimento.** Il problema si risolve scrivendo le condizioni di equilibrio tra le forze esterne e la risultante dello sforzo di pressione sulle facce opposte dei pistoni e applicando la legge di Stevino tra le due sezioni  $A_1$  e  $A_2$ . Si ottiene un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite  $p_1, p_2, F_2$ .

$$\begin{cases} F_1 = p_1 \pi \frac{d_1^2}{4} & \text{(Equilibrio pistone 1)} \\ p_2 = p_1 - \rho g(h_2 - h_1) & \text{(Legge di Stevino)} \\ F_2 = p_2 \pi \frac{d_2^2}{4} & \text{(Equilibrio pistone 2)} \end{cases} \quad (1.29)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{4}{\pi} \frac{F_1}{d_1^2} & = 159155 \text{ Pa} \\ p_2 = \frac{4}{\pi} \frac{F_1}{d_1^2} - \rho g(h_2 - h_1) & = 153269 \text{ Pa} \\ F_2 = \frac{d_1^2}{d_2^2} F_1 - \frac{\pi}{4} d_2^2 \rho g(h_2 - h_1) & = 19260.3 \text{ N} \end{cases} \quad (1.30)$$

La componente verticale  $F_2$  della forza  $\mathbf{F}_2$  è positiva diretta verso il basso, come nel disegno. Si può scrivere quindi  $\mathbf{F}_2 = -F_2 \hat{z}$ .

**Esercizio 1.5 — Manometro nel Venturi.** Si consideri il manometro riportato in figura utilizzato per misurare la differenza di pressione esistente fra due sezioni diverse di un condotto. Determinare la differenza di pressione fra i punti  $A$  e  $B$  riportati sul disegno sapendo che il liquido manometrico è acqua e ha una densità di  $998 \text{ kg/m}^3$ , che il fluido che scorre all'interno del condotto è aria e ha una densità di  $1.225 \text{ kg/m}^3$ , che  $h_A = 1 \text{ m}$ , che  $h_B = 1.2 \text{ m}$ , che  $h_0 = 0.1 \text{ m}$ , che  $h_1 = 0.3 \text{ m}$  e che  $h_2 = 0.7 \text{ m}$ . ( $p_B - p_A = -3913.75 \text{ Pa}$ ) ■



### Soluzione

**Concetti.** Legge di Stevino. Manometro. Venturi.

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2 \quad (1.31)$$

**Svolgimento.** Si scrive la legge di Stevino tra i punti A e 1, 1 e 2, 2 e B:

$$\begin{cases} P_B + \rho_a g z_B = P_2 + \rho_a g z_2 \\ P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2 \\ P_A + \rho_a g z_A = P_1 + \rho_a g z_1 \\ \Delta P = P_B - P_A \end{cases} \quad (1.32)$$

Si risolve il sistema lineare (come più piace). Ad esempio, partendo dalla terza e inserendo nella seconda e nella prima i risultati trovati:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_A + \rho_a g(z_A - z_1) \\ P_2 &= P_A + \rho_a g(z_A - z_1) + \rho g(z_1 - z_2) \\ P_B &= P_A + \rho_a g(z_A - z_1) + \rho g(z_1 - z_2) + \rho_a g(z_2 - z_B) \end{aligned} \quad (1.33)$$

E quindi, portando  $P_A$  a sinistra:

$$\Delta P = -(\rho - \rho_a)g(z_2 - z_1) - \rho_a g(z_B - z_A) = -3909.8 Pa \quad (1.34)$$



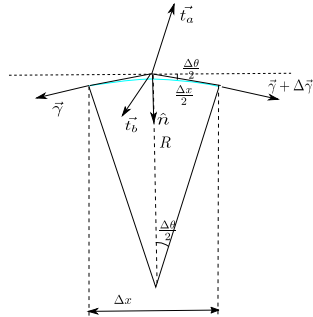
## 2. Tensione superficiale

### Legge di Young-Laplace.

La superficie di interfaccia tra due liquidi può essere modellata come una membrana, una superficie bidimensionale all'interno della quale agisce una forza per unità di lunghezza, tangente alla superficie stessa. La forza per unità di superficie  $\gamma$  agente nella membrana viene definita *tensione superficiale*. La legge di Young-Laplace lega la tensione superficiale, il salto di pressione attraverso la superficie di interfaccia e la curvatura della superficie stessa. Nel caso di tensione superficiale costante, vale

$$p_b - p_a = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 2\gamma H \quad (2.1)$$

dove con  $R_1$  e  $R_2$  sono stati indicati i due raggi di curvatura della superficie e con  $H$  si è indicata la curvatura media.



### Legge di Young-Laplace in due dimensioni.

Viene ricavata la legge di Young-Laplace in due dimensioni, scrivendo l'equilibrio di un elemento di membrana (monodimensionale) soggetta agli sforzi esercitati dai due fluidi su di essa e alla tensione superficiale al suo interno. L'equazione vettoriale di equilibrio viene proiettata in direzione normale e tangente alla superficie. La superficie nell'intorno di un punto, viene approssimata come un arco infinitesimo di una circonferenza, come in figura.

Si considera un elemento infinitesimo di superficie di dimensioni  $\Delta x \sim R\Delta\theta$ . Anche l'angolo  $\Delta\theta$  è "piccolo" ( $\cos \Delta\theta \sim 1$ ,  $\sin \Delta\theta \sim \Delta\theta$ , la dimensione dell'elemento di superficie è approssimabile con la sua proiezione su un piano normale a  $\hat{n}$ , ...). Con  $R$  viene indicato il raggio di curvatura della superficie.



Si scrive l'equilibrio.

$$\mathbf{t}_a \Delta x + \mathbf{t}_b \Delta x - \gamma(x) + \gamma(x) + \Delta\gamma = 0 \quad (2.2)$$

Proiettando nelle direzioni normale e tangente alla superficie,

$$\begin{aligned} (t_{an} + t_{bn})\Delta x + \gamma \sin \frac{\Delta\theta}{2} + (\gamma + \Delta\gamma) \sin \frac{\Delta\theta}{2} &= 0 \\ (t_{at} + t_{bt})\Delta x - \gamma \cos \frac{\Delta\theta}{2} + (\gamma + \Delta\gamma) \cos \frac{\Delta\theta}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Inserendo i valori approssimati di  $\sin \Delta\theta$  e  $\cos \Delta\theta$ , trascurando i termini di ordine superiore ( $\Delta\gamma\Delta\theta$ ):

$$\begin{aligned} (t_{an} + t_{bn})\Delta x + 2\gamma \frac{\Delta\theta}{2} &= 0 \\ (t_{at} + t_{bt})\Delta x + \Delta\gamma &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Se si può confondere la coordinata che descrive la superficie con la coordinata  $x$ , si può approssimare  $\Delta\gamma \sim \frac{\partial\gamma}{\partial x} \Delta x$ . Usando la relazione  $\frac{\Delta x}{2} \sim R \frac{\Delta\theta}{2}$  e semplificando l'elemento  $\Delta x$ :

$$\begin{aligned} (t_{an} + t_{bn}) + \frac{\gamma}{R} &= 0 \\ (t_{at} + t_{bt}) + \frac{\partial\gamma}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Nel caso in cui si consideri un problema di statica, lo sforzo **sul** fluido è dovuto solo al contributo di pressione, che agisce in direzione normale alla superficie:  $\mathbf{t}_a = -P_a \hat{\mathbf{n}}_a$ ,  $\mathbf{t}_b = -P_b \hat{\mathbf{n}}_b$ . Lo sforzo che il fluido esercita sulla superficie di interfaccia è uguale in modulo e opposto in direzione. Le due normali sono tra di loro opposte: si sceglie di definire la normale  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_a = -\hat{\mathbf{n}}_b$ . Di conseguenza, le componenti degli sforzi agenti sulla superficie di interfaccia, proiettati lungo  $\hat{\mathbf{n}}$  e un versore tangente sono:  $t_{an} = P_a$ ,  $t_{bn} = -P_b$ ,  $t_{at} = 0$ ,  $t_{bt} = 0$ . Se  $\gamma$  è costante (la tensione superficiale può avere gradienti non nulli a causa di gradienti di temperatura o di concentrazione), l'equilibrio in direzione tangente è identicamente soddisfatto.

$$P_a - P_b + \frac{\gamma}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_b - P_a = \frac{\gamma}{R} \quad (2.6)$$

### Estensione al caso 3D.

Per estendere la dimostrazione al caso 3D, nel quale la superficie è 2D, si procede in modo analogo a quanto nel paragrafo precedente. Va considerata la curvatura di una superficie e non di una curva (esistono due raggi di curvatura), ... Un utile primo riferimento di *geometria differenziale* di curve e superfici, è disponibile in rete seguendo il collegamento

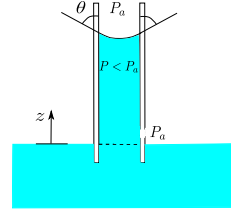
[Differential Geometry, Shiffrin.](#)

L'esistenza della tensione superficiale spiega il fenomeni della capillarità, l'esistenza dei menischi formati dalla superficie di separazione di due fluidi, il galleggiamento di insetti, graffette... sull'acqua, la formazione di superfici "minimali" di sapone, la bagnabilità delle superfici e la rottura di getti di piccolo diametro e la formazione di gocce. Infine, può essere utilizzata anche come mezzo non convenzionale di propulsione per barchette di carta

[Boat without a motor - Marangoni effect](#)

**Esercizio 2.1 — Capillare.** Sia  $\theta$  l'angolo di contatto all'interfaccia tra aria, liquido e solido; sia  $\gamma$  la tensione superficiale tra aria e liquido; sia  $\rho$  la densità del liquido. Determinare l'altezza  $h$  dal liquido in una colonnina cilindrica di raggio  $r = 0.5 \text{ mm}$  rispetto al livello nella vasca. Calcolare poi la pressione all'interno della colonnina. (Si può considerare valida l'approssimazione che la pressione agente sulla vasca e sulla superficie superiore del liquido all'interno della colonnina sia uguale).

Si considerino condizioni termodinamiche e materiale della colonnina tali che: se il liquido è acqua:  $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$ ,  $\theta = 1^\circ$ ,  $\gamma = 0.073 \text{ N/m}$ . se il liquido è mercurio:  $\rho = 13579 \text{ kg/m}^3$ ,  $\theta = 140^\circ$ ,  $\gamma = 0.559 \text{ N/m}$ . ( $h_{H_2O} = 2.97 \text{ cm}$ ,  $P_{H_2O} - P_0 = -291.95 \text{ Pa}$ ;  $h_{Hg} = -1.28 \text{ cm}$ ,  $P_{Hg} - P_0 = 1712.87 \text{ Pa}$ ) ■



### Soluzione

**Concetti.** Tensione superficiale. Angolo di contatto. Capillarità. Menisco.

**Svolgimento.** Scrivendo l'equilibrio per il volume di fluido nel capillare si trova l'altezza  $h$ . Successivamente si trova la  $p$  usando la legge di Stevino. Infine si fanno osservazioni su angolo di contatto, menisco e salto di pressione all'interfaccia.

- Si scrive l'equilibrio del volume di fluido. Il problema è di statica. Le forze agenti sono la forza dovuta alla tensione superficiale (che agisce sul perimetro della superficie superiore) e la forza peso, poichè per ipotesi la pressione agente sulla superficie superiore è uguale alla pressione ambiente  $P_a$ ; e quindi??? Perchè la componente verticale della risultante dovuta alla pressione esterna è zero??? Vedere immagine...).

$$F_\gamma = F_g \quad \Rightarrow \quad 2\pi r \gamma \cos \theta = \pi r^2 h \rho g \quad (2.7)$$

E quindi:

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h_{H_2O} = 2.97 \text{ cm} \\ h_{Hg} = -1.28 \text{ cm} \end{cases} \quad (2.8)$$

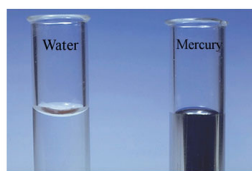
*Commenti sul risultato.* L'effetto della capillarità è più evidente per tubi stretti (proporzionalità con  $1/r$ ). La quota  $h$  può assumere sia valori positivi, sia valori negativi, in base al valore dell'angolo di contatto:  $h \leq 0$ , per  $\theta \geq \pi/2$ .

- Si calcola la pressione nel fluido in cima alla colonnina sfruttando la legge di Stevino.

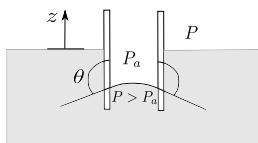
$$P = P_0 - \rho g h = P_0 - \frac{2\gamma \cos \theta}{r} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_{H_2O} - P_0 = -291.95 \text{ Pa} \\ P_{Hg} - P_0 = 1712.87 \text{ Pa} \end{cases} \quad (2.9)$$

*Commenti sul risultato.*  $P - P_0 \leq 0$ , per  $\theta \leq \pi/2$ . Al contrario  $P - P_0 \geq 0$ , per  $\theta \geq \pi/2$ . Questi risultati sono compatibili (meno male) con le relazioni tra curvatura (stretta parente del menisco e dell'angolo di contatto) e il salto di pressione.

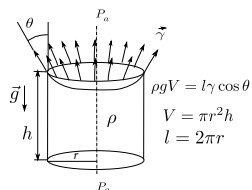
$\theta \leq \pi/2$	$h \geq 0$	$P \leq P_a$
$\theta \geq \pi/2$	$h \leq 0$	$P \geq P_a$



(a) Differenza tra il menisco formato dall'acqua e dal mercurio con aria e solido (quale?): diversa concavità della superficie.

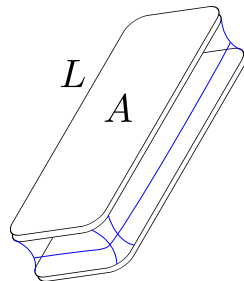


(b) Rappresentazione del caso del problema in cui il liquido è mercurio: l'angolo di contatto è maggiore dell'angolo retto, la quota all'interno del capillare è minore di quella nella vasca. Il caso dell'acqua è rappresentato a fianco del testo del problema.



(c) Equilibrio del volume di fluido nella colonnina. La pressione atmosferica  $P_a$  non influenza l'equilibrio. Perché?

**Esercizio 2.2 — Attrazione di due superfici.** Due lamine piane uguali parallele sono separate da una distanza  $d$ . Tra le lamine è presente un sottile strato di liquido. Sono note l'area della superficie  $A$  e il perimetro  $L$  delle due lamine, la pressione ambiente  $p_a$ , la tensione superficiale del liquido  $\gamma$  e l'angolo di contatto  $\theta$ . Si chiede di determinare la componente perpendicolare alle lamine della forza agente su ciascuna delle due lamine. ■



### Soluzione

**Concetti.** Tensione superficiale. Angolo di contatto.

**Svolgimento.** La condizione descritta nell'esercizio è una condizione equilibrio. La forza agente su una lamina è dovuta a due fenomeni: la tensione superficiale sul perimetro del fluido e la differenza di pressione tra fluido e ambiente. Si consideri positiva la forza se è una forza di attrazione.

$$F = F_\gamma + F_p \quad (2.10)$$

- Calcolo di  $F_\gamma$ .

$$F_\gamma = \gamma L \sin \gamma \quad (2.11)$$

- Calcolo di  $F_p$ . Il salto di pressione viene calcolato scrivendo l'equilibrio all'interfaccia.

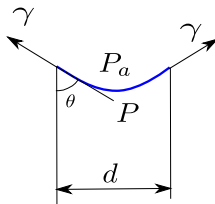
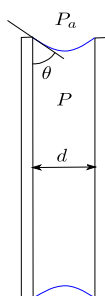
$$F_p = (p_a - p)A \quad (2.12)$$

con:

$$(p_a - p)d = 2\gamma \cos \theta \quad (2.13)$$

- La componente totale richiesta risulta quindi:

$$F = \frac{2\gamma A \cos \theta}{d} + L\gamma \sin \theta \quad (2.14)$$



$$P_a - P = 2d\gamma \cos \theta$$



### 3. Cinematica

Per descrivere la cinematica di un fluido vengono definite quattro famiglie di curve: le linee di corrente, le traiettorie, le curve di emissione (o linee di fumo) e le tracce. Viene data una definizione matematica di queste curve, che possono essere ottenute durante le attività sperimentali tramite delle tecniche di visualizzazione del campo di moto, come mostrato nel seguente video

[Stanford 1963 - Flow Visualization](#).

- Le linee di corrente sono curve  $\mathbf{S}$  tangenti al campo vettoriale  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  in ogni punto dello spazio  $\mathbf{r}$  e per ogni istante temporale  $t$ . Essendo curve (1 dimensione), possono essere espresse in forma parametrica, come funzioni di un parametro scalare  $p$ . La 'traduzione' della definizione in formula è quindi:

$$\frac{d\mathbf{S}(p)}{dp} = \mathbf{u}(\mathbf{S}(p), t) \quad (3.1)$$

Il vettore tangente  $d\mathbf{S}(p)/dp$  alla curva  $\mathbf{S}(p)$  nel punto  $\mathbf{S}(p)$  è parallelo al vettore velocità  $\mathbf{u}$  nello stesso punto  $\mathbf{S}(p)$ , al tempo considerato  $t$ .

- Le traiettorie descrivono il moto della singola particella fluida e sono descritte dall'equazione:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t) \\ \mathbf{R}(t_0) = \mathbf{R}_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

La traiettoria descritta sopra è quella della particella che all'istante  $t_0$  passa per il punto  $\mathbf{R}_0$ . Interpretazione della formula: la velocità  $d\mathbf{R}(t)/dt$  della particella (derivata della posizione della particella  $\mathbf{R}(t)$  nel tempo) è uguale alla velocità del fluido nella posizione  $\mathbf{R}(t)$  nella quale si trova la particella all'istante  $t$ .

Fissati  $t_0$  e  $\mathbf{R}_0$ , si descrive la traiettoria della particella al variare del tempo  $t$ .

- Le linee di fumo sono un modo per tracciare tutte le particelle di fluido passate per un determinato punto nello spazio a diversi istanti temporali. La loro equazione è:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{R}, t) \\ \mathbf{R}(\tau) = \bar{\mathbf{R}} \end{cases} \quad (3.3)$$

L'equazione è identica all'equazione delle traiettorie. Cambia la variabile che descrive la curva: si considerano fissi il punto di emissione  $\bar{\mathbf{R}}$  e il tempo  $t$  al quale viene osservata la curva di emissione; la variabile che descrive la curva di emissione è il tempo  $\tau$  al quale le particelle passano da  $\bar{\mathbf{R}}$ .

Nel caso di campi stazionari linee di corrente, traiettorie e linee di fumo coincidono.

- Tracce:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{R}, t) \\ \mathbf{R}(\tau) = \bar{\mathbf{R}} \end{cases} \quad (3.4)$$

L'equazione è identica all'equazione delle traiettorie e delle curve di emissione. Cambia la variabile che descrive la curva: si considerano fissi il tempo  $\tau$  e il tempo  $t$  al quale viene osservata la curva di emissione; la variabile che descrive la curva di emissione è la posizione  $\bar{\mathbf{R}}$  dalle quali passano le particelle.

*Osservazione.* Non c'è nessuna differenza formale tra  $\tau$  e  $t_0$  e  $\mathbf{R}_0$  e  $\bar{\mathbf{R}}$ .

**Esercizio 3.1 — Linee di corrente, traiettorie e linee di fumo.** Sia dato il campo di moto

$$\mathbf{u}(x, y) = 2Ax\hat{\mathbf{x}} - 2Ay\hat{\mathbf{y}} \quad (3.5)$$

Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle. ■

### Soluzione

**Concetti.** Definizione di linee di corrente, traiettorie, linee di fumo, tracce. Soluzione di sistemi di equazioni differenziali.

#### Svolgimento.

- Linee di corrente.

$$\begin{cases} \frac{dX}{dp} = \lambda(p)2AX \\ \frac{dY}{dp} = -\lambda(p)2AY \end{cases} \Rightarrow \frac{dX}{dY} = -\frac{X}{Y} \Rightarrow \ln X = -\ln Y + c \Rightarrow XY = c \quad (3.6)$$

- Traiettorie.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2Ax \\ \frac{dy}{dt} = -2Ay \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 e^{2At} \\ y(t) = y_0 e^{-2At} \end{cases} \quad (3.7)$$

*Osservazione.* Si osserva che moltiplicando tra di loro le componenti delle traiettorie, si ottiene  $x(t)y(t) = x_0 y_0 = c$ , cioè si ricava quello che già si sapeva (o si dovrebbe sapere!!!) che le traiettorie e le linee di corrente coincidono nel caso di campi stazionari.

- Linee di fumo.

...

*Grafici.* Iperboli. Disegnare le traiettorie (con verso dipendente dal valore di  $A$ ).



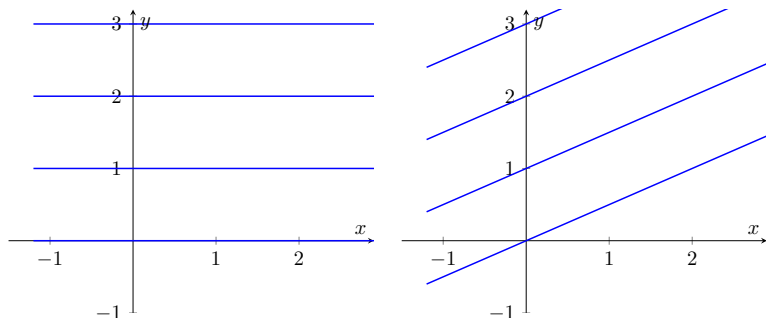


Figura 3.1: Linee di corrente a  $t = 0.0$  (sinistra) e  $t = 0.5$  (destra).

**Esercizio 3.2** — **Linee di corrente, traiettorie e linee di fumo: non stazionario.** Sia dato il campo di moto

$$\mathbf{u}(x, y) = 3\hat{x} + 3t\hat{y} \quad (3.8)$$

Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle. ■

#### Soluzione

**Concetti.** Definizione di linee di corrente, traiettorie, linee di fumo, tracce. Soluzione di sistemi di equazioni differenziali.

#### Svolgimento.

- Linee di corrente.

$$\begin{cases} \frac{dX}{dp} = \lambda(p)3 \\ \frac{dY}{dp} = \lambda(p)3t \end{cases} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = t \Rightarrow Y = Xt + c \quad (3.9)$$

- Traiettorie.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3 \\ \frac{dy}{dt} = 3t \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + 3(t - t_0) \\ y(t) = y_0 + \frac{3}{2}(t^2 - t_0^2) \end{cases} \quad (3.10)$$

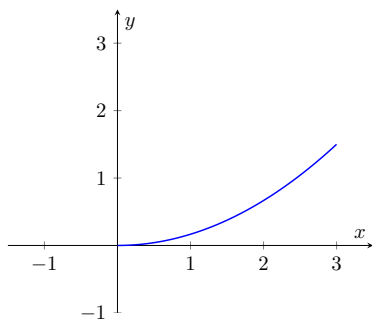
- Linee di fumo (curve di emissione).

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = 3 \\ \frac{dy}{d\tau} = 3\tau \\ x(\tau) = x_0, \quad y(\tau) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + 3(t - \tau) \\ y(t) = y_0 + \frac{3}{2}(t^2 - \tau^2) \end{cases} \quad (3.11)$$

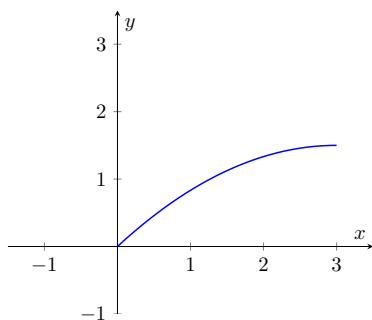
- Tracce.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3 \\ \frac{dy}{dt} = 3t \\ x(\tau) = x_0, \quad y(\tau) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + 3(t - \tau) \\ y(t) = y_0 + \frac{3}{2}(t^2 - \tau^2) \end{cases} \quad (3.12)$$

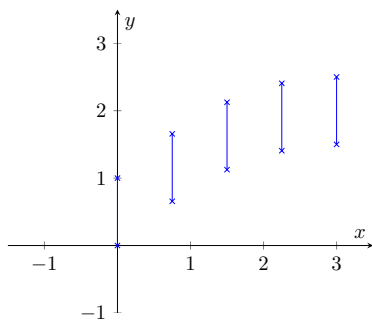
Collegamento al video del National Committee sulle visualizzazioni.



Traiettoria per  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{0}$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t \in [0, 1]$



Curva di emissione con  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\tau \in [0, t]$ ,  $t = 1$



Tracce uscenti dalla curva  $\mathbf{R}_0 = (0, y_0)$ ,  $y_0 \in [0, 1]$ ; vengono segnate le particelle passanti per tale curva negli istanti di tempo  $\tau = 0; 0.25; 0.5; 0.75; 1$ ; le tracce vengono osservate nell'istante di tempo  $t = 1$ .

**Esercizio 3.3** — **Linee di corrente, traiettorie e linee di fumo: 3D.** Sia dato il campo di moto

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \hat{\mathbf{z}} \quad (3.13)$$

Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle. ■

#### Soluzione

**Concetti.** Definizione di linee di corrente, traiettorie, linee di fumo, tracce. Soluzione di sistemi di equazioni differenziali.

**Svolgimento.** Per risolvere l'esercizio in maniera semplice, si osservi che il campo ha simmetria sferica. Il campo di moto scritto in coordinate sferiche  $(R, \theta, \phi)$  è

$$\mathbf{u}(R, \theta, \phi) = \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} \quad (3.14)$$

Le linee di corrente, le traiettorie e le linee di fumo sono delle rette uscenti dall'origine.

- Linee di corrente. ...
- Traiettorie. ...
- Linee di fumo. ...

**Esercizio 3.4** — **Linee di corrente, traiettorie, linee di fumo: non stazionario.** Sia dato il campo di moto

$$\mathbf{u}(x, y, z) = 3y\hat{x} - 3x\hat{y} + t\hat{z} \quad (3.15)$$

Calcolare l'equazione delle linee di corrente, delle traiettorie e delle linee di fumo (curve di emissione) e disegnarle. ■

### Soluzione

**Concetti.** Definizione di linee di corrente, traiettorie, linee di fumo, tracce. Soluzione di sistemi di equazioni differenziali.

#### Svolgimento.

- Linee di corrente.

$$\begin{cases} \frac{dX}{dp} = \lambda(p)3Y \\ \frac{dY}{dp} = -\lambda(p)3X \\ \frac{dZ}{dp} = \lambda(p)t \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} X(p) = R \cos(p) \\ Y(p) = R \sin(p) \\ Z(p) = Z_0 + tp \end{cases} \text{ se } \lambda(p) = \frac{1}{3} \quad (3.16)$$

- Traiettorie.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3y \\ \frac{dy}{dt} = -3x \\ \frac{dz}{dt} = t \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3y \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 9y = 0 \\ z(t) = \frac{t^2}{2} + C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = A \cos(3t) + B \sin(3t) \\ y(t) = -A \sin(3t) + B \cos(3t) \\ z(t) = \frac{t^2}{2} + C \end{cases} \quad (3.17)$$

Inserendo le condizioni iniziali si ottiene

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(3t) + y_0 \sin(3t) \\ y(t) = -x_0 \sin(3t) + y_0 \cos(3t) \\ z(t) = \frac{t^2}{2} + z_0 \end{cases} \quad (3.18)$$

*Osservazione.* Ottenere  $y$  in funzione di  $x$  e confrontare con le linee di corrente. Commentare...

- Linee di fumo. Inserendo nelle soluzioni generali trovate per le traiettorie, le condizioni

$$\begin{cases} x(\tau) = x_0 \\ y(\tau) = y_0 \\ z(\tau) = z_0 \end{cases} \quad (3.19)$$

si ottengono le linee di fumo

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(3(t - \tau)) + y_0 \sin(3(t - \tau)) \\ y(t) = -x_0 \sin(3(t - \tau)) + y_0 \cos(3(t - \tau)) \\ z(t) = \frac{t^2 - \tau^2}{2} + z_0 \end{cases} \quad (3.20)$$



## 4. Bilanci

I bilanci integrali di massa e quantità di moto consentono di calcolare le azioni integrali (forze e momenti) scambiati tra un fluido e un corpo. Se si studia un corpo fermo (in un sistema di riferimento inerziale) investito da un fluido è conveniente usare la descrizione euleriana del problema (A.78), scrivendo i bilanci delle quantità meccaniche per un volume di controllo  $V_c$  fisso

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho + \oint_{S_c} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \mathbf{u} + \oint_{S_c} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V_c} \mathbf{f} + \oint_{S_c} \mathbf{t}_n. \end{cases} \quad (4.1)$$

Nel caso stazionario in cui la pressione del fluido è uniforme sulla superficie esterna  $S_f$  del volume di controllo e le forze di volume sono trascurabili, la forza e il momento agenti su un solido valgono

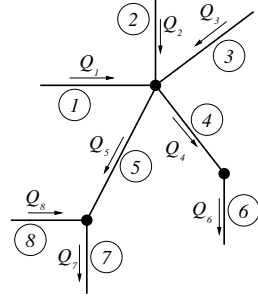
$$\begin{cases} \mathbf{R} = - \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{M} = - \oint_{S_f} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \end{cases} \quad (4.2)$$

avendo indicato con  $\mathbf{r}$  il raggio tra il punto nel fluido e il polo, rispetto al quale è calcolato il momento. Per casi più generali, in cui la pressione non è uniforme, si rimanda allo svolgimento degli esercizi.

In fondo alla sezione viene data una lettura “non convenzionale” di alcuni bilanci e vengono ricavate le relazioni di salto delle grandezze meccaniche attraverso superfici di discontinuità, dove le equazioni in forma differenziale non sono valide. La scrittura in forma lagrangiana dei bilanci di massa, di quantità di moto e di vorticità permette di apprezzare il convetto di incomprimibilità, intuire il ruolo della pressione (e dello sforzo) nel determinare la traiettoria di una particella fluida e intuire il legame tra evoluzione della vorticità e del campo di velocità. Le relazioni di salto verranno usate nel capitolo successivo per ricavare le grandezze attraverso superfici di discontinuità *di contatto*, ma risultano valide anche

attraverso le discontinuità (onde d'urto) che si formano nel campo di moto quando gli effetti viscosi sono trascurabili.

**Esercizio 4.1 — Bilancio di massa: teoria delle reti.** Si consideri una rete idraulica come quella rappresentata in figura. All'interno dei tubi scorre acqua. Siano note le velocità medie dell'acqua all'interno di alcuni dei rami della rete:  $U_1 = 1 \text{ m/s}$ ,  $U_2 = 1.5 \text{ m/s}$ ,  $U_3 = 0.5 \text{ m/s}$ ,  $U_7 = 2 \text{ m/s}$  e  $U_8 = 0.3 \text{ m/s}$ . Si assume come verso della velocità quello indicato dalle frecce sul disegno. Determinare la portata volumetrica, la portata in massa e la velocità media all'interno di ciascun ramo della rete sapendo che l'acqua ha una densità pari a  $\bar{\rho} = 999 \text{ kg/m}^3$ , e che il diametro dei tubi è rispettivamente  $D_1 = 0.4 \text{ m}$ ,  $D_2 = 0.2 \text{ m}$ ,  $D_3 = 0.2 \text{ m}$ ,  $D_4 = 0.3 \text{ m}$ ,  $D_5 = 0.5 \text{ m}$ ,  $D_6 = 0.25 \text{ m}$ ,  $D_7 = 0.3 \text{ m}$ ,  $D_8 = 0.6 \text{ m}$ .  
 $(Q_1 = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}, Q_2 = 0.05 \text{ m}^3/\text{s}, Q_3 = 0.02 \text{ m}^3/\text{s}, Q_4 = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}, Q_5 = 0.06 \text{ m}^3/\text{s}, Q_6 = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}, Q_7 = 0.14 \text{ m}^3/\text{s}, Q_8 = 0.08 \text{ m}^3/\text{s}, U_1 = 1 \text{ m}^3/\text{s}, U_2 = 1.5 \text{ m}^3/\text{s}, U_3 = 0.5 \text{ m}^3/\text{s}, U_4 = 1.87 \text{ m}^3/\text{s}, U_5 = 0.29 \text{ m}^3/\text{s}, U_6 = 2.69 \text{ m}^3/\text{s}, U_7 = 2 \text{ m}^3/\text{s}, U_8 = 0.3 \text{ m}^3/\text{s}, \bar{Q}_1 = 125.5 \text{ kg/s}, \bar{Q}_2 = 47.08 \text{ kg/s}, \bar{Q}_3 = 15.69 \text{ kg/s}, \bar{Q}_4 = 131.8 \text{ kg/s}, \bar{Q}_5 = 54.49 \text{ kg/s}, \bar{Q}_6 = 131.8 \text{ kg/s}, \bar{Q}_7 = 141.2 \text{ kg/s}, \bar{Q}_8 = 84.74 \text{ kg/s})$  ■



### Soluzione

**Concetti.** Bilancio integrale della massa. Teoria delle reti.

### Svolgimento.

In questo problema la densità del fluido  $\rho$  è costante. Il bilancio della massa può essere semplificato in un 'bilancio di volume'.

- Per prima cosa si calcolano le portate volumetriche nei condotti nei quali sono note le velocità e le sezioni.

$$Q_i = U_i S_i = \frac{\pi}{4} D_i^2 U_i, \quad i = 1, 2, 3, 7, 8 \quad (4.3)$$

- Successivamente si calcolano le portate volumetriche incognite, grazie al bilancio ai nodi della rete. Si ottiene un sistema lineare

$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_4 - Q_5 = 0 & (\text{bil. al nodo in alto}) \\ Q_5 + Q_8 - Q_7 = 0 & (\text{bil. al nodo a sinistra}) \\ Q_4 - Q_6 = 0 & (\text{bil. al nodo a destra}) \end{cases} \quad (4.4)$$

- Si ricavano le velocità ancora incognite:

$$U_i = \frac{Q_i}{S_i}, \quad i = 4, 5, 6 \quad (4.5)$$

- Infine si calcolano le portate in massa semplicemente moltiplicando quelle volumetriche per la densità  $\bar{\rho}$ :

$$\bar{Q}_i = \bar{\rho} Q_i, \quad i = 1 : 8 \quad (4.6)$$



**Esercizio 4.2 — Bilancio di massa: riempimento bombola.** Si sta riempiendo una bombola per immersioni subacquee. Sapendo che la pompa aspira aria a pressione ambiente di  $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$  e alla temperatura di  $293 \text{ K}$  in un condotto di sezione  $1 \text{ cm}^2$  in cui la velocità media è di  $0.5 \text{ m/s}$  e che non ci sono perdite nel sistema di pompaggio, determinare la rapidità di variazione della massa d'aria e della sua densità all'interno della bombola, sapendo che il volume della bombola è pari a  $0.02 \text{ m}^3$ .  
 $(\frac{dM}{dt} = 6.01 \times 10^{-5} \text{ kg/s}, \frac{d\rho}{dt} = 3.00 \times 10^{-3} \text{ kg/(m}^3\text{s)}).$  ■

#### Soluzione

**Concetti.** Bilancio integrale della massa. Legge dei gas perfetti.

**Svolgimento.** Sono date la pressione  $p$  e la temperatura  $T$  all'uscita della pompa. È nota l'area  $S$  della sezione e la velocità media  $U$  su quella sezione. Se si suppone che il gas sia un gas ideale perfetto, si ricava la densità come  $\rho = \frac{p}{RT}$ . Si può quindi calcolare il flusso di massa  $\dot{m}$ .

$$\dot{m} = \rho S U \quad (4.7)$$

La derivata della massa contenuta nella bombola è uguale al flusso entrante nella bombola, uguale al flusso uscente dalla pompa (nell'ipotesi che non ci siano perdite).

$$\frac{dM}{dt} = \rho S U \quad \Rightarrow \quad \frac{dM}{dt} = 6.0 \cdot 10^{-5} \text{ kg/s} \quad (4.8)$$

Per calcolare la derivata della densità all'interno della bombola, si osserva che il volume della bombola non cambia. La derivata della massa è  $\frac{dM}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = V \frac{d\rho}{dt}$ .

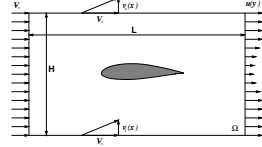
$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho U S}{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} = 2.0 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m}^3\text{s)} \quad (4.9)$$

**Esercizio 4.3 — Difetto di scia: stima resistenza.** Calcolare la resistenza di un profilo immerso in una corrente stazionaria con velocità asintotica  $V_\infty$ , sapendo la distribuzione della componente di velocità  $u(y)$  parallela a  $V_\infty$  a valle del profilo e assumendo che:

- la pressione statica sul contorno del volume di controllo sia costante e pari a quella della corrente indisturbata a monte del profilo;
- sul lato superiore e inferiore del volume di controllo sia possibile trascurare la componente lungo l'asse  $x$  della perturbazione della velocità dovuta alla presenza del profilo:

$$\mathbf{V} = (V_\infty + u, v) \simeq (V_\infty, v).$$

$$(R = \int_0^H \rho u(y)[V_\infty - u(y)]dy.) \quad \blacksquare$$



### Soluzione

**Concetti.** Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo. Esperienza in laboratorio sul difetto di scia.

**Svolgimento.** Vengono scritti i bilanci integrali di massa e quantità di moto, opportunamente semplificati (ipotesi di stazionarietà  $\frac{d}{dt} \equiv 0$ , densità costante  $\rho = \bar{\rho}$ , ipotesi sulle condizioni sul bordo esterno del dominio); all'interno dei bilanci si possono riconoscere i termini legati alle azioni scambiate dal fluido con il profilo (l'incognita del problema); si sfrutta infine la geometria rettangolare del contorno esterno e le ipotesi su di esso per ottenere una forma ulteriormente semplificata dei bilanci e trovare la soluzione del problema.

- Scrittura e semplificazione dei bilanci di massa e quantità di moto.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & (\text{massa}) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial\Omega} p \hat{\mathbf{n}} - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{s}_n = 0 & (\text{quantità di moto}) \end{cases} \quad (4.10)$$

Nel problema, il contorno del dominio fluido  $\partial\Omega$  è costituito dal bordo rettangolare  $\gamma_\infty$  lontano dal profilo e dal bordo  $\gamma_p$  coincidente con il profilo stesso. La forza  $\mathbf{F}$  agente sul profilo è l'integrale degli sforzi generati dal fluido (uguali e contrari agli sforzi agenti sul fluido) sul contorno del profilo. Inoltre si può fare l'ipotesi di sforzi viscosi nulli e pressione costante sul bordo esterno: l'integrale sul dominio esterno si riduce all'integrale della normale su una superficie chiusa ed è quindi nullo. Si può dunque scrivere:

$$\oint_{\partial\Omega} (-p\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{s}_n) = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}_n = \underbrace{\oint_{\gamma_p} \mathbf{t}_n}_{=-\mathbf{F}} + \underbrace{\oint_{\gamma_\infty} \mathbf{t}_n}_{=0} = -\mathbf{F} \quad (4.11)$$

*Osservazione.* A differenza di quanto fatto in classe, non è stata fatta l'ipotesi di fluido non viscoso; il contributo all'infinito si annulla con l'ipotesi di pressione costante all'infinito e sforzi viscosi trascurabili. Per ritrovarsi con gli appunti, sostituire  $\mathbf{t}_n$  con  $-p\hat{\mathbf{n}}$ .

Dopo aver fatto l'ipotesi di stazionarietà e aver inserito la definizione di  $\mathbf{F}$  appena data, le equazioni di bilancio possono essere scritte come:

$$\begin{cases} \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \mathbf{F} = - \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{cases} \quad (4.12)$$

Il bilancio di quantità di moto può essere scritto esplicitando e separando le componenti vettoriali.

$$\begin{aligned} F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} &= - \oint_{\partial\Omega} \rho (u\mathbf{x} + v\mathbf{y}) \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ &= - \hat{\mathbf{x}} \oint_{\partial\Omega} \rho u \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{y}} \oint_{\partial\Omega} \rho v \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

- Scrittura delle equazioni di bilancio in componenti (sfruttando la geometria rettangolare del bordo esterno:  $\gamma_1$  indica il bordo di sinistra,  $\gamma_2$  il bordo inferiore,  $\gamma_3$  quello di destra,  $\gamma_4$  quello superiore).

*Attenzione: la normale è quella uscente dal dominio fluido. Sul contorno del profilo, la normale è entrante nel profilo. In più: non fare confusione tra azioni del profilo agenti sul fluido e azioni del fluido agenti sul profilo!*

$$\begin{cases} 0 = \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = - \int_{\gamma_1} \rho u - \int_{\gamma_2} \rho v + \int_{\gamma_3} \rho u + \int_{\gamma_4} \rho v \\ F_x = + \int_{\gamma_1} \rho u^2 + \int_{\gamma_2} \rho uv - \int_{\gamma_3} \rho u^2 - \int_{\gamma_4} \rho uv \\ F_y = + \int_{\gamma_1} \rho uv + \int_{\gamma_2} \rho v^2 - \int_{\gamma_3} \rho uv - \int_{\gamma_4} \rho v^2 \end{cases} \quad (4.14)$$

- Ipotesi sulla velocità sui lati orizzontali ( $u|_{\gamma_2} = u|_{\gamma_4} = V_\infty$  costante), per poter ulteriormente semplificare il risultato.

$$\begin{cases} \int_{\gamma_2} \rho v - \int_{\gamma_4} \rho v = - \int_{\gamma_1} \rho u + \int_{\gamma_3} \rho u \\ F_x = + \int_{\gamma_1} \rho u^2 - \int_{\gamma_3} \rho u^2 + V_\infty \left[ \int_{\gamma_2} \rho v - \int_{\gamma_4} \rho v \right] \end{cases} \quad (4.15)$$

E inserendo la prima nella seconda:

$$\begin{aligned} F_x &= \int_{\gamma_1} \rho u^2 - \int_{\gamma_3} \rho u^2 + V_\infty \left[ - \int_{\gamma_1} \rho u + \int_{\gamma_3} \rho u \right] = \\ &= \int_{\gamma_1} \rho u (u - V_\infty) + \int_{\gamma_3} \rho u (V_\infty - u) = \quad (u|_{\gamma_1} = V_\infty \Rightarrow \text{il primo integrale è nullo}) \\ &= \int_{\gamma_3} \rho u (V_\infty - u) = \\ &= \int_0^H \rho u(y) (V_\infty - u(y)) dy \end{aligned} \quad (4.16)$$

*Osservazioni.* Tramite la misura dei profili di velocità in galleria, è possibile stimare la resistenza del corpo. Le condizioni di 'aria libera' e in galleria sono diverse. In generale si può dire che in galleria il fluido è confinato dalle pareti di galleria, maggiormente 'vincolato'. Inoltre sulle pareti della galleria esiste una condizione di adesione: per la conservazione della massa, in galleria si osserva una velocità maggiore sulla "sezione di uscita" rispetto a un corpo in aria libera. Per tenere conto di effetti di **bloccaggio** dovuti al confinamento in galleria, è necessario compiere delle correzioni delle misure sperimentali. Agli effetti di bloccaggio, vanno aggiunti gli effetti di **galleggiamento** dovuti al gradiente di pressione

lungo la galleria, che danno un effetto di resistenza aggiuntiva. Inoltre è importante che la dimensione del corpo rispetto alla dimensione della galleria non sia né 'troppo grosso' (per problemi di 'bloccaggio'), né 'troppo piccolo' (per motivi di similitudine; ma sarà argomento di puntate successive del corso...). È importante avere in mente la necessità di prestare attenzione a questi aspetti, quando vengono svolte attività sperimentali. Ma questo sarà argomento di altri corsi...

#### 4.3.1 Attività sperimentali: difetto di scia e volume di controllo.

L'esercizio svolto in precedenza risulta propedeutico ad alcune attività sperimentali che svolgerete durante il corso di studi o in attività sperimentali future. Le attività svolte nel mondo reale sono affette da imprecisioni e incertezze; i *datasheet* che accompagnano uno strumento raccolgono anche le informazioni sulla sua incertezza di misura, spesso in forma di intervallo di confidenza di probabilità nota o di scarto quadratico medio. Le grandezze misurate permettono poi di calcolare delle grandezze derivate. L'incertezza di misura dei singoli strumenti si propaga sulla grandezza derivata: nell'ipotesi che le incertezze siano tra di loro indipendenti e non correlate, è possibile utilizzare la formula RSS (*root-sum-squares*). Se la grandezza derivata  $f$  è funzione delle  $N$  grandezze misurate  $x_i$ , sulle quali si ha incertezza  $\sigma_{x_i}$ , è possibile stimare l'incertezza su  $f$

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (4.17)$$

L'incertezza  $\sigma_f$  è parte integrante del risultato di una attività sperimentale e un indicatore della bontà dell'apparato sperimentale pensato per tale attività. In generale, l'incertezza sulla grandezza desiderata deve essere "molto minore" della grandezza stessa: in caso contrario, l'apparato sperimentale risulterebbe indatto all'attività da svolgere. Essendo parte integrante del risultato, è buona regola indicare l'incertezza sulla grandezza misurata, ad esempio indicandone il valore numerico, il valore relativo alla misura, gli intervalli di confidenza sui grafici...

#### Difetto di scia e resistenza del profilo.

È possibile stimare la resistenza di un profilo a partire dalla misura del difetto di scia. La misura di velocità in scia viene effettuata (con una sonda di Pitot o altro...) in punti discreti, più radi lontano dalla scia del profilo, fù fitti in corrispondenza della scia dove i gradienti sono maggiori. L'integrale nella formula (4.16) viene approssimato con un metodo numerico, come ad esempio la formula del punto medio, quella del trapezio, ... Utilizzando qui per semplicità la formula del punto medio, è possibile scrivere

$$F_x = \int_0^H \rho u(y)(U_\infty - u(y))dy \approx \sum_{k=1}^N \rho [u_k(U_\infty - u_k)] \Delta s_k \quad (4.18)$$

Le misure ottenute dalla sonda sono affette da incertezza  $\sigma_{u_i}$ ; la derivata  $\partial F_x / \partial u_i$  è

$$\frac{\partial F_x}{\partial u_m} = \rho (U_\infty - 2u_m) \Delta s_m \quad (4.19)$$

La stima dell'incertezza sulla resistenza è quindi

$$\sigma_{F_x}^2 = \sum_{i=1}^N [\rho (U_\infty - 2u_i) \Delta s_i]^2 \sigma_{u_i}^2 \quad (4.20)$$

**Volume di controllo.**

Esistono metodi sperimentali (es. PIV) che permettono di ottenere il campo di velocità in un determinato istante su una griglia di punti. Si pensi al campo di moto attorno a un'ala allungata, a bassi angoli di incidenza. Se il campo di moto è bidimensionale (in buona approssimazione) è possibile utilizzare tecniche sperimentali bidimensionali (PIV-2D) per misurare il campo di velocità su un piano: è possibile ottenere una stima delle azioni (per unità di apertura) che esercita il fluido sul profilo di ala tagliato dal piano di misura, tramite l'equazione di bilancio di quantità di moto in (4.12).

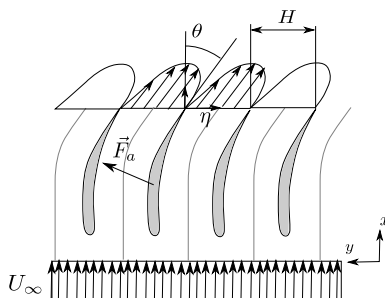
*(In questa formula compare solo il termine di flusso di quantità di moto, mentre non è presente il termine di sforzi di superficie  $\oint_S \mathbf{t}_n$ , che include il contributo della pressione, **non** sempre trascurabile.)*

Seguendo il procedimento svolto nel pragrafo precedente applicato all'integrale di superficie, è possibile stimare l'incertezza sulla resistenza e sulla portanza ottenute tramite questo metodo. Si scopre che l'incertezza sulla misura dipende dalla risoluzione della griglia e dalle condizioni di prova. Come indicazione generale, l'incertezza su portanza e resistenza sono dello stesso ordine di grandezza, e possono raggiungere fino al 30% della misura della resistenza. In molte applicazioni la portanza è maggiore della resistenza: in una prova ad efficienza del profilo  $E = 10$ , si ottiene un 3% di incertezza sulla portanza. In questo caso, questo metodo risulta accettabile per una stima della portanza, non per la resistenza.

**Esercizio 4.4 — Profili in schiera.** Un numero elevato di profili è disposto come in figura. Il profilo di ingresso è uniforme  $\mathbf{u} = U_\infty \hat{\mathbf{x}}$ , mentre il profilo di uscita ha andamento  $\mathbf{u} = \beta U_\infty (\cos \theta \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta \hat{\mathbf{y}}) \sin \frac{\pi \eta}{H}$  in ogni canale (sia  $\eta$  la coordinata che descrive la sezione di uscita). Sulla sezione di ingresso la pressione media vale  $P_1$ , sulla sezione di uscita  $P_2$ .

Calcolare il fattore  $\beta$  del profilo di velocità in uscita e la risultante delle forze (per unità di apertura) agente sul singolo profilo.

(Risultati:  $\beta = \frac{\pi}{2 \cos \theta}$ ,  $\mathbf{F} = [(P_1 - P_2)H + \rho U^2 H ((1 - \pi^2/8))] \hat{\mathbf{x}} + \pi^2/8 \tan \theta \hat{\mathbf{y}})$  ■



### Soluzione

**Concetti.** Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo. Simmetria.

- Ricavare il coefficiente  $\beta$  dal bilancio di massa
- Usare le ipotesi di simmetria nel bilancio di quantità di moto per annullare alcuni termini

### Svolgimento.

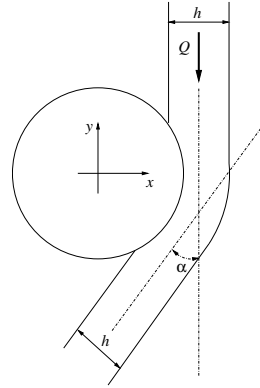
Si ricava il coefficiente  $\beta$  dal bilancio di massa in forma integrale. Si utilizza la simmetria del problema nel bilancio di quantità moto per ricavare le azioni sui profili.

**Esercizio 4.5 — Effetto Coanda sul cilindro.** Un getto d'acqua ( $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$ ) stazionario, piano e orizzontale viene indirizzato su un cilindro, lambendone la superficie e venendo deviato di un angolo  $\alpha = 15^\circ$ . Determinare la forza agente su una porzione del cilindro di lunghezza pari a  $2 \text{ m}$ , dovuta sia al getto d'acqua, sia all'aria circostante, sapendo che:

- il fluido che circonda il getto e il cilindro è aria in quiete a pressione atmosferica di  $101325 \text{ Pa}$ ;
- la larghezza del getto è  $h = 2 \text{ cm}$ ;
- la portata d'acqua per unità di lunghezza nel getto è  $Q = 199 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .

Illustrare tutte le ipotesi semplificative adottate nella risoluzione dell'esercizio.

( $\mathbf{F} = 1026 \hat{x} - 135 \hat{y} \text{ N}$ )



### Soluzione

**Concetti.** Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo. Effetto Coanda (esempio della bustina da té sotto il rubinetto).

**Svolgimento.** Ipotesi: problema stazionario; sulla superficie libera del cilindro e del fluido agisce solo la pressione ambiente  $p_a$ ; profilo di velocità uniforme sulle sezioni di ingresso e uscita.

- Scrittura delle equazioni di bilancio per il fluido.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & (\text{massa}) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial\Omega} p \hat{\mathbf{n}} - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{s} \mathbf{n} = 0 & (\text{quantità di moto}) \end{cases} \quad (4.21)$$

- Le equazioni vengono opportunamente semplificate secondo le ipotesi fatte. Il bordo del dominio fluido  $\partial\Omega$  viene indicato con  $S_f$ . I contributi di pressione e viscosi vengono raccolti nel vettore di sforzo complessivo.

$$\oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_f} \mathbf{s} \mathbf{n} - \oint_{S_f} p \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_f} \mathbf{t} \mathbf{n} \quad (4.22)$$

- Riscrittura del termine di contorno. Si indica con  $S_f$  il contorno fluido: questo è costituito dall'unione del contorno a contatto con il cilindro  $S_c$  e quella libera  $S_l$ . Il contorno del cilindro  $S_{cyl}$  è suddiviso nel contorno  $S_c$  a contatto con il fluido e nel contorno libero  $S_{cl}$ .

Nei passaggi successivi si ricava il legame tra sforzi sul contorno del dominio fluido e la forza agente sul cilindro. Si usa le ipotesi che sulle superfici libere agisca solo la pressione ambiente. Si usa il fatto che l'integrale di una quantità costante per la normale su una superficie chiusa è nullo. Si usa infine il fatto che  $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_{cyl}$  (normali

uscanti dai due domini, uguali e contrarie) e  $\mathbf{t}_n = -\mathbf{t}_{n_{cyl}}$  (sforzi agenti sulla superficie comune, uguali e contrari).

$$\begin{aligned}
 \oint_{S_f} \mathbf{t}_n &= \int_{S_l} \mathbf{t}_n + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = & (\mathbf{t}_n|_{S_l} &= -p_a \mathbf{n}) \\
 &= - \int_{S_l} p_a \mathbf{n} + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = & (\text{somma e sottrazione di } \int_{S_c} p_a \mathbf{n}) \\
 &= - \underbrace{\int_{S_l} p_a \mathbf{n} - \int_{S_c} p_a \mathbf{n}}_{=0} + \int_{S_c} p_a \mathbf{n} + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = & (\mathbf{n} = -\mathbf{n}_{cyl}) \\
 &= - \int_{S_c} p_a \mathbf{n}_{cyl} + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = & (S_{cyl} = S_c \cup S_{cl} \text{ e } \int_{S_{cyl}} p_a \mathbf{n} = 0) \\
 &= \int_{S_{cl}} p_a \mathbf{n}_{cyl} + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = & (\mathbf{t}_{n_{cyl}}|_{S_{cl}} = -p_a \mathbf{n}_{cyl}, \mathbf{t}_{n_{cyl}}|_{S_c} = -\mathbf{t}_n) \\
 &= - \int_{S_{cl}} \mathbf{t}_{n_{cyl}} - \int_{S_c} \mathbf{t}_{n_{cyl}} = \\
 &= - \int_{S_{cyl}} \mathbf{t}_{n_{cyl}} \\
 &= -\mathbf{R}
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

- Sostituendo nell'equazione del bilancio della quantità di moto si ottiene:

$$\mathbf{R} = - \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{4.24}$$

- Si ipotizza un profilo di velocità uniforme sulle sezioni, con la velocità diretta lungo la linea media del getto. L'area della sezione è  $A = Hh$  e la portata per unità di larghezza è  $Q = \rho U h$  (quindi  $\rho U^2 A = \frac{Q^2 H}{\rho h}$ ).

Si scrive l'equazione precedente in componenti, proiettando lungo gli assi:

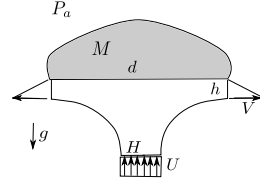
$$\begin{aligned}
 R_x &= \frac{Q^2 H}{\rho h} \sin \alpha \\
 R_y &= -\frac{Q^2 H}{\rho h} (1 - \cos \alpha)
 \end{aligned} \tag{4.25}$$



**Esercizio 4.6 — Giochi d'acqua.** Un getto d'acqua ( $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$ ) stazionario, piano e verticale viene indirizzato su un oggetto di massa  $M$ , tenuto da esso in equilibrio. Il getto ha distribuzione di velocità uniforme  $U$  lungo lo spessore  $H$ , mentre la distribuzione sul bordo dell'oggetto è triangolare di spessore  $h$  con velocità massima  $V$ . Si calcoli la velocità  $V$  e la massa  $M$  dell'oggetto supponendo che:

- il fluido che circonda il getto e il solido è aria in quiete a pressione atmosferica di  $P_a = 101325 \text{ Pa}$ ;
- si possa trascurare la gravità nel bilancio di quantità di moto, ma non nell'equilibrio del corpo.

$$(V = UH/h; M = \rho U^2 H/g) \quad \blacksquare$$



### Soluzione

**Concetti.** Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo.

**Svolgimento.** Ipotesi: problema stazionario; sulla superficie libera del corpo e del fluido agisce solo la pressione ambiente  $p_a$ ; nessun effetto della gravità nei bilanci del fluido. Si sceglie un asse  $y$  diretto verso l'alto.

- Scrittura delle equazioni di bilancio per il fluido.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial\Omega} p \hat{\mathbf{n}} - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{s} \mathbf{n} - \int_V \rho \mathbf{g} = 0 & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (4.26)$$

A queste, va aggiunta l'equazione di equilibrio del corpo sottoposto alla forza di gravità:  $\mathbf{F} + M\mathbf{g} = 0$ .

- Dopo aver semplificato il bilancio di massa, da esso si ricava la velocità  $V$ . La velocità sui due bordi 'di uscita' è  $v(s) = Vs/h$ , avendo chiamato  $s$  la coordinata che descrive tale superficie per valori compresi tra 0 e  $h$ .

$$0 = \int_{S_{in}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_{out1}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_{out2}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\rho UH + 2 \int_0^h \rho V \frac{s}{h} ds = \rho \left[ -UH + 2 \frac{1}{2} Vh \right] \quad (4.27)$$

E quindi  $V = U \frac{H}{h}$ .

- Le equazioni vengono opportunamente semplificate secondo le ipotesi fatte (vengono eliminati i termini non stazionari e il termine contenente le forze di volume - gravità). Il bordo del dominio fluido  $\partial\Omega$  viene indicato con  $S_f$ . I contributi di pressione e viscosi vengono raccolti nel vettore di sforzo complessivo.

$$\oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_f} \mathbf{s} \mathbf{n} - \oint_{S_f} p \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_f} \mathbf{t} \mathbf{n} \quad (4.28)$$

- Riscrittura del termine di contorno. Si indica con  $S_f$  il contorno fluido: questo è costituito dall'unione del contorno a contatto con il corpo  $S_c$  e quella libera  $S_l$ . Il contorno del corpo  $S_s$  è suddiviso nel contorno  $S_c$  a contatto con il fluido e nel contorno libero  $S_{cl}$ .

Nei passaggi successivi si ricava il legame tra sforzi sul contorno del dominio fluido e la forza agente sul corpo. Si usano le ipotesi che sulle superfici libere agisca solo la pressione ambiente. Si usa il fatto che l'integrale di una quantità costante per la normale su una superficie chiusa è nullo. Vengono definite le normali  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{n}_s$  come la normale uscente dal volume del fluido e quella uscente dal solido. Si definiscono  $\mathbf{t}_n$  e  $\mathbf{t}_{n_s}$  come lo sforzo agente sul fluido e quello agente sul solido. Si usa infine il fatto che  $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_s$  (normali uscenti dai due domini, uguali e contrarie) e  $\mathbf{t}_n = -\mathbf{t}_{n_s}$  sulla superficie in comune (sforzi agenti sulla superficie comune, uguali e contrari; principio di azione e reazione).

$$\begin{aligned}
 \oint_{S_f} \mathbf{t}_n &= \int_{S_l} \mathbf{t}_n + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = & (\mathbf{t}_n|_{S_l} = -p_a \mathbf{n}) \\
 &= - \int_{S_l} p_a \mathbf{n} + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = & (\text{somma e sottrazione di } \int_{S_c} p_a \mathbf{n}) \\
 &= - \underbrace{\int_{S_l} p_a \mathbf{n} - \int_{S_c} p_a \mathbf{n}}_{=0} + \int_{S_c} p_a \mathbf{n} + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = & (\mathbf{n} = -\mathbf{n}_s) \\
 &= - \int_{S_c} p_a \mathbf{n}_s + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = & (S_s = S_c \cup S_{cl} \text{ e } \int_{S_s} p_a \mathbf{n} = 0) \\
 &= \int_{S_{cl}} p_a \mathbf{n}_s + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = & (\mathbf{t}_{n_s}|_{S_{cl}} = -p_a \mathbf{n}_s, \mathbf{t}_{n_s}|_{S_c} = -\mathbf{t}_n) \\
 &= - \int_{S_{cl}} \mathbf{t}_{n_s} - \int_{S_c} \mathbf{t}_{n_s} = \\
 &= - \int_{S_s} \mathbf{t}_{n_s} \\
 &= -\mathbf{R}
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

- Sostituendo nell'equazione del bilancio della quantità di moto si ottiene:

$$\mathbf{R} = - \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{4.30}$$

- Data la simmetria del problema si riconosce che non ci può essere una componente orizzontale. I contributi nel bilancio della quantità di moto sulla superficie di contatto tra corpo e fluido e sulla superficie laterale del getto sono nulli poichè è nullo il flusso su tali superfici. I contributi sulle sezioni 'di uscita' sono uguali e contrari. Rimane quindi solo il contributo dalla sezione 'in ingresso'.

$$\mathbf{F} = - \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = - \oint_{S_{in}} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho U^2 H \hat{\mathbf{y}} \tag{4.31}$$

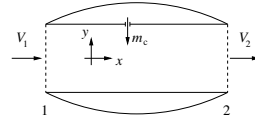
- Si scrive l'equilibrio del corpo  $\mathbf{F} + M\mathbf{g} = 0$ , con  $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{y}}$ . Da questo segue che  $M = F/g = \frac{\rho U^2 H}{g}$ .

*Osservazioni.* Nell'elaborazione dei termini della quantità di moto è contenuta la forma della risultante delle forze sull'oggetto vista in classe.

Come giustamente osservato da qualcuno in classe, la massa è per unità di lunghezza, poichè stiamo considerando un caso bidimensionale.

**Esercizio 4.7 — Motore a getto.** Il motore a getto in figura è alimentato con una portata  $m_c = 1.1 \text{ kg/s}$  di carburante liquido iniettato in direzione ortogonale all'asse del motore. Calcolare la spinta  $T$  del motore ipotizzando che:

- il carburante vaporizzi e diffonda completamente;
  - le sezioni di ingresso e uscita abbiano area uguale e pari ad  $A = 0.5 \text{ m}^2$ ;
  - sia l'aria in ingresso che i gas di scarico siano a pressione atmosferica  $P_{atm} = 26400 \text{ Pa}$ ;
  - la velocità di ingresso e di uscita siano uniformi sulle rispettive sezioni;
  - siano note la densità dell'aria in ingresso  $\rho_1 = 0.42 \text{ kg/m}^3$ , la velocità di ingresso  $V_1 = 240 \text{ m/s}$  e la velocità di efflusso  $V_2 = 980 \text{ m/s}$ .
- ( $T = -38374 \hat{x} \text{ N}$ )



#### Soluzione

**Concetti.** Bilanci integrali di massa e quantità di moto.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_V \mathbf{f} - \oint_{\partial V} p \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial V} \mathbf{s}_n & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (4.32)$$

**Svolgimento.** Ipotesi: Regime stazionario. Fluido non viscoso (?). Profilo costante di velocità. No gravità.

- Scrittura dei bilanci integrali con le semplificazioni opportune, derivanti dalle ipotesi.

$$\begin{cases} \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (4.33)$$

- Ulteriore semplificazione usando l'ipotesi di profili di velocità uniformi

$$\begin{cases} -\rho_1 V_1 A_1 - \dot{m}_c + \rho_2 V_2 A_2 = 0 \\ -\rho_1 \vec{V}_1 V_1 A_1 + \rho_2 \vec{V}_2 V_2 A_2 - \dot{m}_c \vec{v}_c = \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n \end{cases} \quad (4.34)$$

- Relazione tra l'integrale della pressione e la risultante delle forze agenti sul gomito, sfruttando il fatto che l'integrale della normale su tutta la superficie è identicamente nullo. Si identificano con  $S_1$  la superficie di ingresso,  $S_2$  la superficie di uscita,  $S_3$  la superficie laterale interna del motore,  $S_{3_o}$  la superficie laterale esterna del motore.

$$\begin{aligned} \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n &= \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n + \underbrace{\oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_{3_o}} p_a \hat{\mathbf{n}}}_{=0} = \\ &= - \int_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \int_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_{3_o}} p_a \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_3} \mathbf{t}_n = \quad (p|_{S_1} = p|_{S_2} = p_a) \\ &= \int_{S_{3_o}} p_a \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_3} \mathbf{t}_n = \\ &= \oint_{S_{eng}} \mathbf{t}_n = -\vec{F} \end{aligned} \quad (4.35)$$

- L'equazione della quantità di moto diventa quindi:

$$-\rho_1 \vec{V}_1 V_1 A_1 + \rho_2 \vec{V}_2 V_2 A_2 - \dot{m}_c \vec{v}_c = -\vec{F} \quad (4.36)$$

- Mettendo a sistema l'equazione del bilancio di massa e la proiezione in direzione orizzontale dell'equazione della quantità di moto (si assume che l'iniezione del combustibile, e quindi  $\vec{v}_c$ , sia perpendicolare all'asse x e quindi non compare nel bilancio della quantità di moto in direzione x):

$$\begin{cases} \rho_2 V_2 A = \rho_1 V_1 A + \dot{m}_c \\ -\rho_1 V_1^2 A + \rho_2 V_2^2 A = -F_x \end{cases} \quad (4.37)$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} F_x &= \rho_1 V_1^2 A - \rho_2 V_2^2 A = \\ &= \rho_1 V_1^2 A - (\rho_2 V_2 A) V_2 = \\ &= \rho_1 V_1^2 A - V_2 (\rho_1 V_1 A + \dot{m}_c) = \\ &= \rho_1 V_1 A (V_1 - V_2) - V_2 \dot{m}_c \end{aligned} \quad (4.38)$$

E la spinta coincide con la componente lungo x appena calcolata:

$$T = \rho_1 V_1 A (V_2 - V_1) + V_2 \dot{m}_c \quad (4.39)$$

La spinta risulta quindi:  $T = -F_x = 38374N$ .

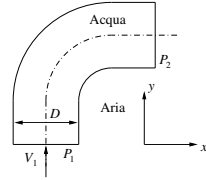
*Interpretazione dei risultati e osservazioni.*

In prima approssimazione, la spinta in un motore a getto è una funzione della portata d'aria e della differenza di velocità tra ingresso e uscita. Spesso in molte applicazioni il termine  $\dot{m}_c$  è trascurabile.

Ragionare in questo caso sulla validità dell'approssimazione  $\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}}$  nella definizione della risultante delle forze sul motore.

**Esercizio 4.8 — Gomito.** Un condotto di sezione circolare avente diametro  $D = 5 \text{ cm}$  forma un gomito con angolo di  $90^\circ$ . Nel condotto scorre acqua ( $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$ ) in regime stazionario con velocità  $V = 0.5 \text{ mm/s}$ . All'esterno del condotto vi è atmosfera con pressione uniforme  $P_{atm} = 101325 \text{ Pa}$ ; inoltre le pressioni all'ingresso e all'uscita del gomito sono uniformi sulla sezione ed entrambe pari a  $P = 10^6 \text{ Pa}$ . Calcolare la forza  $\mathbf{F}$  agente sul gomito.

$$(\mathbf{F} = -1765.03\hat{x} + 1765.03\hat{y} \text{ N})$$



### Soluzione

**Concetti.** Bilanci integrali di massa e quantità di moto. ...

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} & (\text{massa}) \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_V \mathbf{F} - \oint_{\partial V} p \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial V} \mathbf{s}_n & (\text{quantità di moto}) \end{cases} \quad (4.40)$$

**Svolgimento.** Vengono fatte alcune ipotesi: regime stazionario, fluido incomprimibile, fluido non viscoso, profili costanti di velocità, no gravità. Si scrivono i bilanci integrali semplificati, si riconoscono in essi e si calcolano le azioni scambiate con il corpo.

- Scrittura dei bilanci integrali opportunamente semplificati (ipotesi).

$$\begin{cases} \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & (\text{massa}) \\ \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n & (\text{quantità di moto}) \end{cases} \quad (4.41)$$

- Ulteriore semplificazione usando l'ipotesi di densità costante e profili di velocità uniformi

$$\begin{cases} -V_1 A_1 + V_2 A_2 = 0 \\ -\rho V_1^2 A_1 + \rho V_2^2 A_2 = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n \end{cases} \Rightarrow V_1 = V_2 = V \quad (4.42)$$

- Relazione tra l'integrale degli sforzi sulla superficie e la risultante delle forze agenti sul gomito, sfruttando il fatto che l'integrale della normale su tutta la superficie è identicamente nullo. Si identificano con  $S_1$  la superficie di ingresso,  $S_2$  la superficie di uscita,  $S_3$  la superficie laterale.

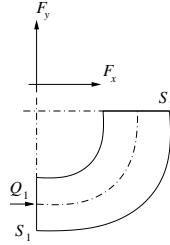
$$\begin{aligned} \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n &= \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n + \underbrace{\oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} p_a \hat{\mathbf{n}}}_{=0} = \\ &= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} + \underbrace{\oint_{S_3} (\mathbf{t}_n + p_a \hat{\mathbf{n}})}_{=-\mathbf{F}} = \\ &= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{F} \end{aligned} \quad (4.43)$$

- Proiezione lungo i due assi del sistema di riferimento della risultante delle forze agenti sul gomito (dopo averla inserita nell'equazione di bilancio della quantità di moto)

$$\begin{cases} F_x = -\rho V^2 A - (p_2 - p_a) A \\ F_y = \rho V^2 A + (p_1 - p_a) A \end{cases} \quad (4.44)$$

**Esercizio 4.9 — Gomito.** Si consideri la corrente stazionaria nel gomito a  $90^\circ$  di una galleria a vento a circuito chiuso di cui è mostrata in figura la sezione nel piano  $x$ - $y$ . Siano assegnate le aree della sezione di ingresso,  $S_1 = 16 \text{ m}^2$ , e di uscita,  $S_2 = 56 \text{ m}^2$ , la portata in volume  $Q_1 = 1600 \text{ m}^3/\text{s}$  e le pressioni nella sezione di ingresso,  $P_1 = 1.05 \text{ bar}$ , e nella sezione di uscita,  $P_2 = 1.106 \text{ bar}$ . Assumendo che il flusso d'aria sia incompressibile ( $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ ) e che la velocità sulle sezioni di ingresso e uscita possa ritenersi uniforme, si determinino le componenti  $F_x$  ed  $F_y$  della spinta che esso esercita sul gomito, usando la convenzione indicata in figura.

( $F_x = 1.876 \cdot 10^6 \text{ N}$ ,  $F_y = -6.251 \cdot 10^6 \text{ N}$ )



### Soluzione

**Concetti.** Bilanci integrali di massa e quantità di moto.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} & (\text{massa}) \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_V \mathbf{f} - \oint_{\partial V} p \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial V} \mathbf{t}_s & (\text{quantità di moto}) \end{cases} \quad (4.45)$$

**Svolgimento.** Vengono fatte alcune ipotesi: regime stazionario, fluido incompressibile, fluido non viscoso, profili costanti di velocità, no gravità. Si scrivono i bilanci integrali semplificati, si riconoscono in essi e si calcolano le azioni scambiate con il corpo.

- Scrittura dei bilanci integrali con le semplificazioni opportune, derivanti dalle ipotesi.

$$\begin{cases} \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & (\text{massa}) \\ \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n & (\text{quantità di moto}) \end{cases} \quad (4.46)$$

- Ulteriore semplificazione usando l'ipotesi di densità costante e profili di velocità uniformi

$$\begin{cases} -V_1 A_1 + V_2 A_2 = 0 \\ -\rho V_1^2 V_1 A_1 + \rho V_2^2 V_2 A_2 = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n \end{cases} \Rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2 = Q \quad (4.47)$$

- Relazione tra l'integrale della pressione e la risultante delle forze agenti sul gomito, sfruttando il fatto che l'integrale della normale su tutta la superficie è identicamente nullo. Si identificano con  $S_1$  la superficie di ingresso,  $S_2$  la superficie di uscita,  $S_3$  la superficie laterale.

$$\begin{aligned} \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} p \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n + \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} p_a \hat{\mathbf{n}} = \\ &= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} + \underbrace{\oint_{S_3} (\mathbf{t}_n + p_a \hat{\mathbf{n}})}_{=-\mathbf{f}} = \\ &= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{f} \end{aligned} \quad (4.48)$$

- L'equazione della quantità di moto diventa quindi:

$$-\rho V_1 V_1 A_1 + \rho V_2 V_2 A_2 = -(p_1 - p_a) A_1 \hat{\mathbf{n}}_1 - (p_2 - p_a) A_2 \hat{\mathbf{n}}_2 - \mathbf{F} \quad (4.49)$$

- 
- Proiezione lungo i due assi del sistema di riferimento della risultante delle forze agenti sul gomito. Se si considera  $p_a = 0$ , i risultati numerici sono i seguenti:

$$\begin{cases} F_x = \rho_{A_1}^{\frac{Q^2}{2}} + (p_1 - p_a)A_1 & \Rightarrow F_x = 1.876 \cdot 10^6 N \\ F_y = -\rho_{A_2}^{\frac{Q^2}{2}} - (p_2 - p_a)A_2 & \Rightarrow F_y = -6.250 \cdot 10^6 N \end{cases} \quad (4.50)$$



### 4.10 Equazioni di bilancio

In questa sezione vengono analizzate alcune equazioni di bilancio in forma differenziale (è quindi necessario che queste equazioni siano valide!): vengono usate sia la rappresentazione euleriana sia la rappresentazione lagrangiana, al fine di ottenere la migliore comprensione dei fenomeni fisici coinvolti.

Si indicano con  $\mathbf{x}_0$  le coordinate lagrangiane, solidali con il continuo; si indicano con  $\mathbf{x}$  le coordinate euleriane. I due sistemi di coordinate sono legati tra di loro dalle relazioni

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) \\ \frac{D\mathbf{x}}{Dt} &= \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{u}\end{aligned}\quad (4.51)$$

La derivata  $\partial/\partial t$  indica la derivata temporale fatta a coordinata euleriana  $\mathbf{x}$  costante. La derivata materiale  $D/Dt$  indica la derivata fatta a coordinata lagrangiana costante e rappresenta quindi la variazione temporale di una quantità legata alla particella materiale, che si muove come il continuo, per la definizione di coordinate materiali.

Il legame tra  $D/Dt$  e  $\partial/\partial t$  si trova utilizzando le regole di derivazione per funzioni composte. Scrivendo la funzione generica  $f$  come

$$f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) = f_0(\mathbf{x}_0, t) = f_0(\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t), t), \quad (4.52)$$

si ottiene

$$\frac{D}{Dt}f = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f. \quad (4.53)$$

#### 4.10.1 Continuità

L'equazione di continuità può essere riscritta mettendo in evidenza la derivata materiale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (4.54)$$

È possibile dimostrare<sup>1</sup> la relazione  $DJ/Dt = J\nabla \cdot \mathbf{u}$ , dove  $J$  indica il determinante del gradiente  $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{x}_0$ , si può scrivere l'equazione in coordinate lagrangiane, dopo averla moltiplicata per  $J$  ( $\neq 0$ )

$$J \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{DJ}{Dt} \Rightarrow \frac{D(J\rho)}{Dt} = 0 \Rightarrow J\rho = \rho_0 \quad (4.55)$$

La variazione della densità di una particella materiale è legata alla variazione del volume della stessa (ricordare che  $dv = JdV$ ). Questa conclusione è ragionevole se si pensa che la massa della particella materiale si conserva ( $dm = \rho dv = \rho_0 dV$ ).

**(R)** Il vincolo di incomprimibilità rappresenta la costanza del volume della particella materiale. Il volume  $dv$  coincide con il volume di riferimento  $dV$ , implicando  $J \equiv 1$  e quindi  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ .

<sup>1</sup>I più curiosi, cerchino “formula di Jacobi”.

### 4.10.2 Quantità di moto

L'equazione della quantità di moto è

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right\} = \nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f} \quad (4.56)$$

dove con  $\mathbb{T}$  è stato indicato il tensore degli sforzi, che per un fluido newtoniano è  $\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{S}$  con  $\mathbb{S} = 2\mu\mathbb{D} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbb{I}$  e  $\mathbb{D} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}]$  il tensore velocità di deformazione, parte simmetrica del gradiente della velocità. Introducendo la derivata materiale, si ritrova una forma “familiare” del secondo principio della dinamica

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \rho \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f} \quad (4.57)$$

#### Richiami di geometria delle curve nello spazio.

Una curva è un luogo di punti che può essere parametrizzato tramite un parametro solo. La parametrizzazione  $\mathbf{r}(t)$  della curva  $\mathbf{r}$  è definita regolare se  $d\mathbf{r}/dt \neq 0$ . Si definisce poi una parametrizzazione regolare particolare, l'ascissa curvilinea  $s$  tale per cui  $|d\mathbf{r}(s)/ds| = 1, \forall s \in (a, b)$ .

Nel seguito si introduce brevemente la **terna di Frenet**  $\{\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}}\}$ , formata dai versori tangente, normale e binormale, in funzione dell'ascissa curvilinea. Si dimostra che

$$\hat{\mathbf{t}}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (4.58)$$

La derivata seconda della posizione  $\mathbf{r}$ , cioè la derivata prima del versore tangente  $\hat{\mathbf{t}}$  è legata al versore normale  $\hat{\mathbf{n}}$ , tramite la curvatura  $k = \left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right|$ .

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}}{\left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right|} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = k\hat{\mathbf{n}} \quad (4.59)$$

Il versore binormale è definito a completare la terna ortonormale destrorsa

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (4.60)$$

Per completezza e senza troppo sforzo si calcolano anche le derivate di tali versori, ricordando che hanno modulo unitario e costante, e formano una terna ortogonale in ogni punto, introducendo la definizione della torsione  $\tau = \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} \cdot \hat{\mathbf{b}}$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} &= k\hat{\mathbf{n}} \\ \begin{cases} \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{t}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = \tau \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{t}} = -k \\ \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = \tau \end{cases} &\Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = -k\hat{\mathbf{t}} + \tau\hat{\mathbf{b}} \\ \begin{cases} \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0 \\ \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{t}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0 \\ \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0 \\ \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{t}} = -\hat{\mathbf{t}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0 \\ \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = -k \end{cases} &\Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\tau\hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Se la parametrizzazione regolare della curva non è l'ascissa curvilinea, si può ricavare

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = v\hat{\mathbf{t}} \quad (4.62)$$

dove si è introdotto il modulo  $v$  di quella che sarà la velocità  $\mathbf{v}$  quando  $\mathbf{r}$  e  $t$  saranno spazio e tempo. In maniera analoga

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = vk\hat{\mathbf{n}} \quad (4.63)$$

Se  $\mathbf{r}$  e  $t$  sono spazio e tempo, la velocità e l'accelerazione di un punto che ha come legge oraria  $\mathbf{r}(t)$  sono

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = v\hat{\mathbf{t}} \\ \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{t}} + v \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{t}} + v^2k\hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (4.64)$$

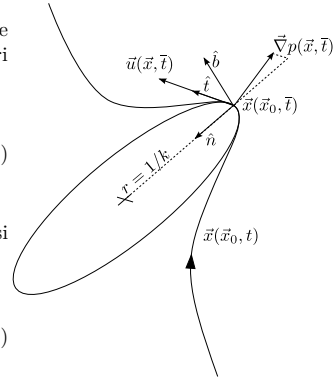
#### Ritorno al bilancio della quantità di moto.

Inserendo la forma dell'accelerazione nell'equazione della quantità di moto e proiettando lungo i versori della terna di Frenet

$$\begin{cases} \rho \frac{dv}{dt} = \hat{\mathbf{t}} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f}) \\ \rho v^2 k = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f}) \\ 0 = \hat{\mathbf{b}} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f}) \end{cases} \quad (4.65)$$

In assenza di forze di volume ( $\mathbf{f} = 0$ ) e sforzi viscosi ( $\mathbb{T} = \mathbb{S} - p\mathbb{I} = -p\mathbb{I}$ ):

$$\begin{cases} \rho \frac{dv}{dt} = -\hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla p \\ \rho v^2 k = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla p \\ 0 = -\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla p \end{cases} \quad (4.66)$$



Un'analisi della componente normale permette di ricavare, **sotto le ipotesi fatte**, il legame tra la curvatura delle traiettorie delle particelle fluide e il gradiente del campo di pressione. Il termine a sinistra dell'uguale è positivo poichè prodotto di quantità positive: la curvatura di una linea è non negativa per come è definita, la densità è positiva, il modulo di un vettore è anch'esso non negativo. Il prodotto scalare tra la normale e il gradiente della pressione (derivata direzionale della pressione in direzione  $\hat{\mathbf{n}}$ ) deve quindi essere negativo. La pressione quindi diminuisce, andando verso il centro del cerchio osculatore. Sempre dalla seconda equazione è immediato notare che il legame tra la curvatura della traiettoria è proporzionale alla componente del gradiente di pressione lungo il versore normale. La componente tangente fa aumentare il modulo della velocità, mentre la componente binormale deve essere nulla.

#### 4.10.3 Vorticità

L'equazione della vorticità in coordinate euleriane è

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (4.67)$$

Se viene fatta l'ipotesi di viscosità nulla, il termine contenente il laplaciano della vorticità non compare nell'equazione: questo termine è il responsabile della diffusione (isotropia per come è scritto) della vorticità.

L'equazione può essere quindi riscritta come:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (4.68)$$

Scritta in componenti

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = \omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (4.69)$$

Il termine di destra può essere riscritto come

$$\begin{aligned} \omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} &= \omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_{0l}} \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} = \left( u_i = \frac{Dx_i}{Dt} \right) \\ &= \omega_k \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \right) \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (4.70)$$

Vale la relazione

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} = \delta_{ik} \quad (4.71)$$

Il termine di sinistra può essere riscritto come

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = \frac{D}{Dt} (\delta_{ik} \omega_k) = \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \omega_k \right) \quad (4.72)$$

Inserendo nell'equazione della vorticità e sfruttando le proprietà della derivata del prodotto:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \omega_k \right) - \omega_k \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \right) \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} &= 0 \\ \frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \omega_k \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.73)$$

Se la trasformazione non è singolare, risulta quindi

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \omega_k \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \omega_k = \omega_{l0} \quad (4.74)$$

e in conclusione, invertendo il gradiente della trasformazione delle coordinate

$$\omega_k = \frac{\partial x_k}{\partial x_{0l}} \omega_{l0} \quad , \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \boldsymbol{\omega}_0 \quad (4.75)$$

Si può quindi notare che la vorticità segue la stessa evoluzione di un segmento infinitesimo materiale, per il quale vale:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} d\mathbf{x}_0 \quad (4.76)$$

### 4.11 Relazioni di salto

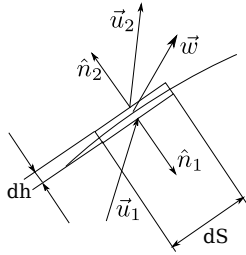
Si ricavano le condizioni di salto di velocità e sforzo in corrispondenza di superfici di interfaccia. Si sottolinea che queste superfici possono essere superfici introdotte dalla modellazione del problema, come ad esempio la superficie di separazione tra due fluidi all'interno della quale in generale agisce una tensione superficiale o una superficie di discontinuità tangenziale nel caso di fluido non viscoso, oppure superfici fittizie.

Si parte dai bilanci in forma integrale scritti per un volume in moto arbitrario. I bilanci di massa e quantità di moto del volume in moto arbitrario si ottengono dalle regole di derivazione su domini mobili delle funzioni  $f = \rho$  e  $\mathbf{f} = \rho\mathbf{u}$ ,

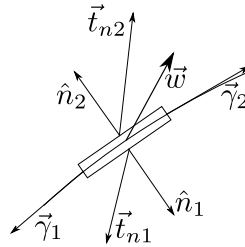
$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dV = \frac{d}{dt} \int_{v(t)=V(t)} f dv + \oint_{\partial v(t)=\partial V(t)} f(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad (4.77)$$

dove  $\mathbf{u}$  è la velocità del fluido,  $\mathbf{w}$  è la velocità della superficie di discontinuità.

Il bilancio integrale viene fatto su un elemento di volume infinitesimo, “allungato” nelle direzioni della superficie. Quando il volume dell'elemento infinitesimo tende a zero, tende a zero più velocemente dei contributi sulle superfici parallele alla superficie di salto.



(a) Definizione delle velocità ai due lati dell'elemento infinitesimo e delle dimensioni dello stesso. La velocità della superficie è indicata con  $\mathbf{w}$ .



(b) Definizione degli sforzi e della tensione superficiale agenti sull'elemento infinitesimo della superficie.

L'elemento di volume  $dv$  è il parallelepipedo di superfici laterali  $dS$ , paralleli alla superficie, e basi  $dh$  perpendicolari alla superficie. Se si ipotizza che le superfici  $dh \ll dS$  i contributi nei bilanci dei termini agenti sulle superfici  $dh$  (tranne che nel caso della tensione superficiale, che ha le dimensioni di uno sforzo per una lunghezza) sono trascurabili.

#### 4.11.1 Bilancio di massa

Il bilancio di massa per il volume  $dv$  in moto con velocità  $\mathbf{w}$  è

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho + \oint_{\partial v} \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (4.78)$$

Trascurando i contributi di volume e quelli delle superfici  $dh$

$$\rho_1(\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS + \rho_2(\mathbf{u}_2 - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS = 0 \quad (4.79)$$

dove le normali  $\hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{\mathbf{n}}$  e  $\hat{\mathbf{n}}_2 = -\hat{\mathbf{n}}$  sono opposte. La quantità tra parentesi è la velocità relativa del fluido rispetto alla superficie. Si definisce quindi il flusso di massa  $m$  attraverso

la superficie.

$$\begin{aligned} -m &= \rho_1(\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho_2(\mathbf{u}_2 - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ &= \rho_1 \mathbf{u}_{r1} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho_2 \mathbf{u}_{r2} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (4.80)$$

Nel caso di densità uniforme  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  si “conservano” le componenti normali della velocità relativa e della velocità.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{r1} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \mathbf{u}_{r2} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{u}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \mathbf{u}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (4.81)$$

#### 4.11.2 Bilancio di quantità di moto

Il bilancio della quantità di moto per l'elemento  $dv$  è

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial v} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{\partial v} \rho \mathbf{t}_n + \int_v \rho \mathbf{g} + \int_l \gamma \quad (4.82)$$

avendo incluso anche eventuali termini di tensione superficiale, svolto sulla curva che separa tre sostanze (come ad esempio il “perimetro” del menisco visto nell'esercizio sul capillare: in quel caso la curva  $l$  separa il liquido, dall'aria, dalle pareti solide del capillare). Trascurando i termini di volume, il bilancio per l'elemento infinitesimo (per semplicità pensato in 2 dimensioni) è

$$\rho_1 \mathbf{u}_1(\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 ds + \rho_2 \mathbf{u}_2(\mathbf{u}_2 - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 ds = \mathbf{t}_{n1} ds + \gamma_1 + \mathbf{t}_{n2} ds + \gamma_2 \quad (4.83)$$

con  $\gamma_1 = \gamma \hat{\mathbf{t}}_1$ ,  $\gamma_2 = (\gamma + \gamma/s ds) \hat{\mathbf{t}}_2$ . I versori tangenti  $\hat{\mathbf{t}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{t}}_2$  agli estremi dell'elementino di superficie non sono allineati a causa della curvatura della superficie (si rimanda alla “dimostrazione” della legge di Young-Laplace). Si tiene conto di una possibile variazione della tensione superficiale. Questa di solito può essere dovuta a differenze di temperatura o composizioni chimiche (perchè si usa il sapone per lavarsi le mani?): si rimanda al simpatico (?) video delle barchette sul fondo del documento della dimostrazione della legge di Young-Laplace, nel quale viene usata una “propulsione a effetto Marangoni” per barchette di carta. Il contributo della tensione superficiale si può scrivere come

$$\gamma_2 + \gamma_1 = (2\gamma H \hat{\mathbf{n}} + \nabla_2 \gamma) ds \quad (4.84)$$

dove

- $H$  è la curvatura media  $H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$  nel caso tridimensionale, che nel caso bidimensionale coincide con  $\frac{1}{2R}$  (uno dei due raggi di curvatura diventa infinito).
- $\hat{\mathbf{n}}$  è il vettore normale che punta verso i centri di curvatura.
- $\nabla_2$  è il gradiente ristretto alla superficie, tangente ad essa.

Ricordando la definizione di  $m$  e inserendola nel bilancio

$$m(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \mathbf{t}_{n1} + \mathbf{t}_{n2} + 2\gamma H \hat{\mathbf{n}} + \nabla_2 \gamma \quad (4.85)$$

Si analizzano ora alcuni casi particolari:

- Statica con tensione superficiale. La velocità è nulla ovunque, i vettori di sforzo hanno solo il contributo della pressione  $\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}}$ . Secondo queste ipotesi, non si possono avere contributi tangenziali nemmeno a causa della tensione superficiale e quindi  $\gamma$  deve essere uniforme sulla superficie. Nel caso bidimensionale si ricorda che la normale  $\hat{\mathbf{n}}$  punta verso il centro del cerchio osculatore e coincide quindi con

la normale  $\hat{\mathbf{n}}_1$  dell'immagine e il raggio di curvatura  $R$  è positivo. Il bilancio della quantità di moto si riduce all'equilibrio statico della superficie

$$p_1 - p_2 = \frac{\gamma}{R} \quad (4.86)$$

Si osserva quindi che la pressione “interna”  $p_1$  deve essere maggiore di  $p_2$ .

- Fluido inviscido, superficie senza tensione superficiale. Il bilancio si riduce a

$$m(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = -(p_1 - p_2)\hat{\mathbf{n}} \quad (4.87)$$

- Fluido inviscido, superficie senza tensione superficiale, densità uniforme. Si è visto come la velocità (e le velocità relative) normali alla superficie devono essere uguali da entrambe le parti della superficie. Se si ipotizza che la superficie non sia attraversata da flusso di massa (si impone che la componente normale della velocità relativa sia nulla, non la velocità relativa nel suo complesso). In questo caso non è possibile trovare una relazione di salto per la velocità tangenziale (o almeno questo non è possibile se non si aggiungono altre ipotesi o altre equazioni ... vedremo un caso semplificato applicando il teorema di Bernoulli a un problema aerodinamico bidimensionale stazionario ...): poichè  $m = 0$  la superficie è “scarica” (capiterà nei prossimi corsi di sentir parlare o aver direttamente a che fare con “l'ipotesi di scia scarica”: questa non dovrà quindi essere una novità o una sorpresa in futuro)

$$p_1 = p_2 \quad (4.88)$$

ma non si riesce a ricavare nessuna informazione dalla componente tangenziale dell'equazione poichè è un'identità  $0 = 0$  a prescindere dal valore di  $(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \hat{\mathbf{t}}$ . Attraverso tale superficie (di spessore nullo) ci può essere un salto finito di velocità tangenziale: in questo caso la superficie è una superficie di vorticità infinita

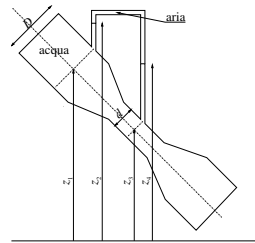
L'ultimo caso particolare verrà utilizzato in qualche esercizio in cui un dominio occupato da un fluido può essere suddiviso in un sottodominio nel quale è valido il teorema di Bernoulli (in qualche forma ...) e in un sottodominio dove sono valide le relazioni della statica: le condizioni di salto serviranno a far comunicare tra di loro i due sottodomini (e a risolvere correttamente l'esercizio).

#### 4.11.3 Bilancio di energia

Non verrà detto nulla sulle relazioni di salto delle altre quantità ...

## 5. Teorema di Bernoulli

**Esercizio 5.1 — Venturi.** Determinare la portata d'acqua che scorre all'interno del tubo di Venturi rappresentato in figura, quando sia trascurabile ogni effetto dissipativo all'interno della corrente e la velocità uniforme nelle sezioni considerate e a monte del Venturi. Dati: densità dell'acqua  $\bar{\rho} = 999 \text{ kg/m}^3$ , densità dell'aria  $\bar{\rho} = 1.225 \text{ kg/m}^3$ , diametro del tubo  $D = 2 \text{ cm}$ , diametro della sezione di gola  $d = 1 \text{ cm}$ , altezze:  $z_1 = 10 \text{ cm}$ ,  $z_2 = 1.2 \text{ m}$ ,  $z_3 = 5 \text{ cm}$ ,  $z_4 = 0.5 \text{ m}$ .  
( $Q = 3.01 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $\bar{Q} = 3.005 \cdot 10^{-1} \text{ kg/s}$ ) ■



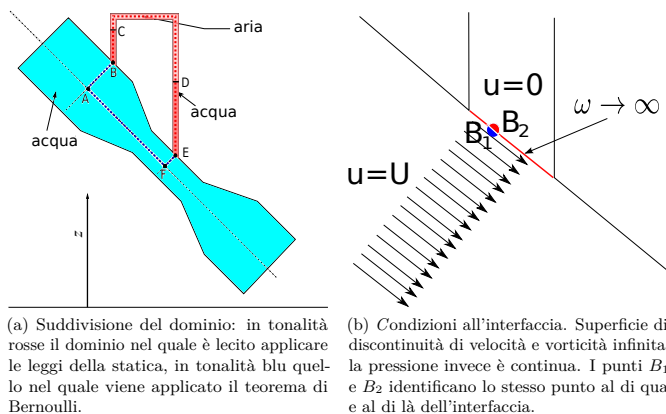
### Soluzione

**Concetti.** Teorema di Bernoulli. Equazione della vorticità. Conseguenze delle ipotesi di stazionarietà, fluido incompressibile, non viscoso, irrotazionale. Dominio di applicabilità del teorema di Bernoulli. Condizioni all'interfaccia. Legge di Stevino.

**Svolgimento.** Il problema viene risolto in diversi passi successivi: in principio vengono fatte alcune ipotesi semplificative ( $\rho = \bar{\rho}$ ,  $\mu = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ); poi si utilizza l'equazione della vorticità per semplificare ulteriormente il problema; si determina il dominio in cui è applicabile il teorema di Bernoulli con le ipotesi fatte; si osserva che la parte restante del problema è un problema di statica; si determinano le condizioni di interfaccia tra i due domini; solo a questo punto è possibile scrivere il sistema di equazioni dal quale ricavare le quantità richieste dal problema.

- Il testo del problema consente di fare le seguenti ipotesi: fluido incompressibile, non viscoso, stazionario.





- L'ipotesi di flusso non viscoso e quella di velocità uniforme a monte permettono di definire il dominio all'interno del quale è possibile applicare il teorema di Bernoulli, aggiungendo l'ipotesi di irrotazionalità alle tre ipotesi precedenti. Infatti, l'equazione della vorticità può essere scritta come:

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla)u \quad (5.1)$$

La derivata materiale rappresenta la variazione di una quantità associata a una particella materiale che segue il moto del fluido. Poiché la vorticità nella sezione a monte è nulla (il profilo di velocità è uniforme quindi le derivate spaziali sono nulle), la vorticità rimane nulla ( $\frac{df}{dt} = af$ , se  $f = 0$  all'istante iniziale la sua derivata in quell'istante è nulla, quindi  $f$  non varia, quindi rimane uguale a zero).

- Il dominio in cui è possibile applicare il teorema di Bernoulli con le ipotesi di incomprimibilità, assenza di viscosità ed effetti dissipativi, stazionarietà, **irrotazionalità** e connessione semplice del dominio, coincide con il tubo di Venturi stesso. Infatti in corrispondenza delle prese a parete cade l'ipotesi di irrotazionalità.

Secondo le ipotesi fatte il fluido è non viscoso. Questo assicura che la vorticità sia nulla lungo le linee di corrente. Nel tubo del manometro però il fluido è fermo. Per un fluido non viscoso in corrispondenza dell'interfaccia non ci deve essere discontinuità nella componente normale all'interfaccia stessa e nella pressione. La componente normale è nulla da entrambe le parti della discontinuità; la componente tangenziale è però discontinua: mentre nel tubo di Venturi è diversa da zero, nel tubo del manometro è nulla. Questo comporta che la vorticità non sia nulla (bensì infinita: differenza finita in uno spessore infinitesimo) e di conseguenza la non validità in questa regione delle ipotesi fatte in precedenza.

Si possono quindi distinguere due regioni (il tubo di Venturi e il manometro) che non possono parlare tra di loro con il teorema di Bernoulli, ma solo tramite la condizione di **interfaccia** (continuità degli sforzi: per fluidi non viscosi questa condizione coincide con la continuità della pressione).

- É possibile ora scrivere il sistema risolvante:

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_A + \frac{1}{2}U_A^2 + \rho g z_A = P_{B_1} + \frac{1}{2}U_{B_1}^2 + \rho g z_{B_1} & (\text{Bernoulli A-B}_1) \\ P_{B_1} = P_{B_2} & (\text{interfaccia B}_1\text{-B}_2) \\ P_{B_2} + \rho g z_{B_2} = P_C + \rho g z_C & (\text{Stevino B}_2\text{-C}) \\ P_C + \rho_a g z_C = P_D + \rho_a g z_D & (\text{Stevino C-D}) \\ P_D + \rho g z_D = P_{E_2} + \rho g z_{E_2} & (\text{Stevino D-E}_2) \\ P_{E_2} = P_{E_1} & (\text{interfaccia E}_2\text{-E}_1) \\ P_{E_1} + \frac{1}{2}\rho U_{E_1}^2 + \rho g z_{E_1} = P_F + \frac{1}{2}\rho U_F^2 + \rho g z_F & (\text{Bernoulli E}_1\text{-F}) \\ P_A + \frac{1}{2}\rho U_A^2 + \rho g z_A = P_F + \frac{1}{2}\rho U_F^2 + \rho g z_F & (\text{Bernoulli A-F}) \\ \rho \frac{\pi D^2}{4} U_A = \rho \frac{\pi d^2}{4} U_F & (\text{continuità A-F}) \end{array} \right. \quad (5.2)$$

che, osservando che  $z_{B_1} = z_{B_2} = z_B$ ,  $z_{E_1} = z_{E_2} = z_E$  e applicando le ipotesi fatte in precedenza ( $U_A = u_{B_1}$ ,  $U_F = u_{E_1}$ ,  $P_{B_1} = P_{B_2} = P_B$ ,  $P_{E_1} = P_{E_2} = P_E$ ), diventa:

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_A + \rho g z_A = P_B + \rho g z_B & (\text{Bernoulli A-B}) \\ P_{B_2} + \rho g z_{B_2} = P_C + \rho g z_C & (\text{Stevino B-C}) \\ P_C + \rho_a g z_C = P_D + \rho_a g z_D & (\text{Stevino C-D}) \\ P_D + \rho g z_D = P_E + \rho g z_E & (\text{Stevino D-E}) \\ P_{E_1} + \rho g z_{E_1} = P_F + \rho g z_F & (\text{Bernoulli E-F}) \\ P_A + \frac{1}{2}\rho U_A^2 + \rho g z_A = P_F + \frac{1}{2}\rho U_F^2 + \rho g z_F & (\text{Bernoulli A-F}) \\ D^2 U_A = d^2 U_F & (\text{continuità A-F}) \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Anche se il numero di equazioni è minore del numero di incognite, prova che il sistema è indeterminato, si dimostra che  $U_A$  e  $U_F$  sono determinate (nelle equazioni intervengono sempre differenze di pressioni, ed è questo il motivo dell'indeterminazione).

- Soluzione del sistema: il sistema può essere risolto come più si preferisce. Per esempio, partendo da quella che può essere una lettura dello strumento  $\Delta z = z_C - z_D$  e chiudendo il ciclo ABCDEF:

$$\rho_a g \Delta z = P_D - P_C \quad (5.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_D = P_E + \rho g (h_E - h_D) = P_F + \rho g (h_F - h_D) \\ P_C = P_B + \rho g (h_B - h_C) = P_A + \rho g (h_A - h_C) \end{array} \right. \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_D - P_C &= (P_F + \rho g h_F) - (P_A + \rho g h_A) + \rho g \Delta z = (\text{Bernoulli A-F}) \\ &= \frac{1}{2}\rho U_A^2 - \frac{1}{2}\rho U_F^2 + \rho g \Delta z = (\text{continuità}) \\ &= -\frac{1}{2}\rho U_A^2 \left( \frac{D^4}{d^4} - 1 \right) + \rho g \Delta z \end{aligned} \quad (5.6)$$

E quindi:

$$(\rho - \rho_a) g \Delta z = \frac{1}{2}\rho U_A^2 \left( \frac{D^4}{d^4} - 1 \right) \quad (5.7)$$

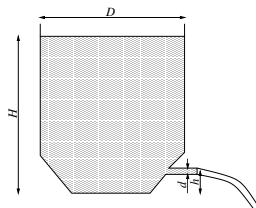
$$U_A = \sqrt{\frac{2(1 - \rho_a/\rho)g\Delta z}{\frac{D^4}{d^4} - 1}} \quad (5.8)$$

Inserendo i valori numerici, si trova:  $U = 0.956 m/s$ ,  $Q = 3.0 \cdot 10^{-4} m^3/s$ ,  $\bar{Q} = 3.0 \cdot 10^{-1} kg/s$ .

*Osservazioni.* È importante saper riconoscere i limiti di applicabilità di formule e teoremi nel rispetto delle ipotesi con le quali essi vengono formulati.

Considerazioni analoghe dovranno essere svolte anche in esercizi simili a questo, riguardanti le soluzioni esatte delle equazioni di Navier-Stokes.

**Esercizio 5.2 — Efflusso da serbatoio.** Si consideri il serbatoio rappresentato in figura,  $D = 2 \text{ m}$ ,  $H = 4.4 \text{ m}$  al cui interno è contenuta acqua,  $\bar{\rho} = 999 \text{ kg/m}^3$ . Supponendo il fluido non viscoso, determinare la velocità di efflusso del fluido dall'ugello del serbatoio,  $h = 0.4 \text{ m}$  e  $d = 1 \text{ cm}$ , e la sua portata, sia in massa sia in volume.  
 $(U = 8.86 \text{ m/s}, Q = 6.96 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}, \bar{Q} = 0.695 \text{ kg/s})$  ■



### Soluzione

**Concetti.** Teorema di Bernoulli, nel caso incompressibile, non viscoso, stazionario (da come è fatto il disegno, il livello del serbatoio sembra diminuire...assumiamo che così non sia), con forze che ammettono potenziale e dominio semplicemente connesso. Se si fa l'ipotesi che il flusso sia irrotazionale sulla sezione di ingresso, nel caso non viscoso, si mantiene irrotazionale ovunque (equazione della vorticità).

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} \quad (5.9)$$

Si può quindi scrivere il teorema di Bernoulli nella forma:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + gh = \text{cost} \quad (5.10)$$

**Svolgimento.** Il problema si risolve mettendo a sistema il teorema di Bernoulli (opportunamente semplificato; vedi sopra) con il bilancio integrale di massa. Si ipotizza che sulle due sezioni agisca la stessa pressione esterna.

$$\begin{cases} A_1 u_1 = A_2 u_2 & (\text{massa}) \\ \frac{u_1^2}{2} + gh_1 = \frac{u_2^2}{2} + gh_2 & (\text{Bernoulli}) \end{cases} \quad (5.11)$$

Svolgendo i passaggi, ricordando che le superfici sono circolari, risulta:

$$u_2 = \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}} \quad (5.12)$$

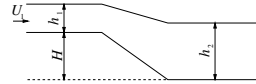
Si calcolano poi le portate volumetriche e di massa.

$$\begin{aligned} Q &= A_2 u_2 \\ \dot{m} &= \rho Q \end{aligned} \quad (5.13)$$

**Esercizio 5.3 — Corrente in canale aperto.** Si consideri il flusso d'acqua,  $\bar{\rho} = 999 \text{ kg/m}^3$ , nel canale rappresentato in figura. Nel primo tratto l'acqua scorre con una velocità uniforme  $U_1 = 1 \text{ m/s}$  e l'altezza del pelo libero rispetto al fondo del canale è  $h_1 = 1.5 \text{ m}$ . Determinare la velocità dell'acqua  $U_2$  e l'altezza del pelo libero  $h_2$  nel secondo tratto del canale, sapendo che l'altezza del fondo del primo tratto rispetto al fondo del secondo tratto è  $H = 0.5 \text{ m}$ . Si trascuri qualunque effetto dissipativo.

(Soluzione 1:  $U_2 = 0.741 \text{ m/s}$ ,  $h_2 = 2.022 \text{ m}$ .

Soluzione 2:  $U_2 = 5.940 \text{ m/s}$ ,  $h_2 = 0.252 \text{ m}$ ) ■



### Soluzione

**Concetti.** Teorema di Bernoulli nel caso incomprimibile, non viscoso, stazionario, irrotazionale. Soluzione di equazioni di terzo grado: metodo grafico e numerico. Correnti in canali aperti: soluzioni “fisiche”, numero di Froude  $Fr$ , correnti subcritiche e supercritiche.

### Svolgimento.

L'esercizio viene risolto in due passi, che richiedono diversi livelli di conoscenza della dinamica dei fluidi in canali aperti: in un primo tempo, vengono ricavate le soluzioni ammissibili ( $h_2 > 0$ ,  $U_2 > 0$ ) del problema; in un secondo tempo, viene scelta la soluzione fisica del problema, tra le due soluzioni ammissibili trovate in precedenza.

### Parte 1.

L'esercizio viene risolto mettendo a sistema il teorema di Bernoulli riferito a una linea di corrente sul pelo libero (sul quale agisce la pressione ambiente  $P_a$ , costante) e l'equazione di continuità. Grazie alle ipotesi elencate in precedenza, si può scrivere il sistema risolvente come:

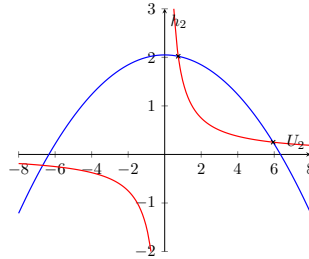
$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho U_1^2 + \rho g(h_1 + H) = \frac{1}{2}\rho U_2^2 + \rho g h_2 \\ h_1 U_1 = h_2 U_2 \end{cases} \quad (5.14)$$

Il sistema è di due equazioni (non lineari) nelle incognite  $U_2$  e  $h_2$ . Se si ricava una delle due incognite da un'equazione e la si inserisce nell'altra, si ottiene un'equazione di terzo grado. Per esempio, ricavando  $h_2$  dalla prima e inserendola nella seconda, per l'incognita  $U_2$  si ottiene l'equazione di terzo grado:

$$h_1 U_1 = U_2 \left( \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} + (h_1 + H) \right) \quad (5.15)$$

I metodi numerici convergono (quando convergono) a una soluzione, senza informazioni su quante soluzioni esistono effettivamente: prima di risolvere l'equazione di terzo grado con un metodo numerico è utile un primo approccio analitico al problema.

Per questo cerchiamo le soluzioni del sistema di due equazioni per via grafica. Le equazioni del sistema 5.14 definiscono curve nel piano  $(U_2, h_2)$ . Se scegliamo di usare come asse orizzontale quello delle  $U_2$ , la prima equazione definisce una parabola con la concavità diretta verso il basso ( $h_2 = -0.5U_2^2/g + \dots$ ), mentre la seconda un'iperbole.



Esistono due soluzioni con senso fisico ( $h_2 \geq 0, U_2 \geq 0$ ). Ora che sappiamo quante soluzioni cercare e dove cercarle, possiamo procedere con un metodo numerico, dando guess iniziali in un intorno della soluzione. Le due soluzioni sono:

$$A: \begin{cases} U_2 = 0.741 \text{ m/s} \\ h_2 = 2.022 \text{ m} \end{cases} \quad B: \begin{cases} U_2 = 5.940 \text{ m/s} \\ h_2 = 0.252 \text{ m} \end{cases} \quad (5.16)$$

## Parte 2.

É plausibile farsi una domanda: al netto delle ipotesi fatte sul regime di moto (fluido incompressibile, non viscoso), il modello è in grado di descrivere il fenomeno fisico e stabilire quale delle due soluzioni ammissibili trovate è la soluzione “fisica”? Seguendo la trattazione del problema svolta in [Chaudhry, Open-Channel Flow, paragrafo 2-7: Channel transition e paragrafi vicini](#), è possibile trovare l’unica soluzione fisica del problema. Viene introdotta la notazione usata da Chaudhry, che contrasta in parte con quella usata finora. Si tornerà alla notazione usata nella prima parte dell’esercizio, solo alla fine per scrivere i risultati.

La variabile  $z(x)$  descrive la quota del fondo del canale, la variabile  $y(x)$  descrive la profondità della corrente, riferita al fondo del canale. Si indica con  $Q = Vy$  la portata in volume, costante. Il trinomio di Bernoulli  $H$ , diviso per  $\rho$  e  $g$ , è costante lungo il canale. Si ricorda che sulla linea di corrente in corrispondenza del pelo libero agisce una pressione costante uguale alla pressione ambiente  $P_a$ . Se si introduce la coordinata orizzontale  $x$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dH}{dx} = \frac{d(y+z)}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{V^2}{2g} = \\ &= \frac{d(y+z)}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{Q^2}{2gy^2} = \\ &= \frac{d(y+z)}{dx} - \frac{Q^2}{gy^3} \frac{dy}{dx} = \\ &= \frac{d(y+z)}{dx} - \frac{V^2}{gy} \frac{dy}{dx} = \\ &= \frac{d(y+z)}{dx} - Fr^2 \frac{dy}{dx} = \\ &= \frac{dz}{dx} - (Fr^2 - 1) \frac{dy}{dx} \end{aligned} \quad (5.17)$$

dove è stato introdotto il numero di Froude  $Fr = V(y)^2/gy$ , e qui è stata esplicitata la dipendenza dalla profondità  $y$ , funzione a sua volta funzione della coordinata  $x$ . Si trova così il legame tra la profondità della corrente  $y(x)$ , la quota del fondo  $z(x)$  e lo stato della corrente, descritto dal numero di Froude.

$$\frac{dz}{dx} = (Fr^2(y(x)) - 1) \frac{dy}{dx} \quad (5.18)$$

Vengono definiti due regimi di moto: subcritico  $Fr < 1$ , supercritico  $Fr > 1$ . Il profilo del fondo  $z(x)$ , e quindi la sua derivata, è noto dal progetto del canale. La profondità della corrente  $y(x)$  può essere ottenuta integrando l'eq. 5.18 con le condizioni iniziali note sulla sezione di ingresso.

Per risolvere il nostro esercizio è sufficiente ragionare sui segni dei tre termini dell'eq. 5.18:  $dz/dx \leq 0$ , quindi i due fattori alla destra dell'uguale devono essere discordi. Il numero di Froude sulla sezione di ingresso del problema vale  $Fr_1 = U_1^2/(gh_1) = 0.068$ , quindi il contenuto della parentesi tonda è negativo (e negativo rimane, al variare di  $x$ ; di questo dovete fidarvi...). Deve quindi essere  $dy/dx \geq 0$ . Tornando alla notazione usata nella prima parte dell'esercizio, dove la profondità della corrente è indicata con  $h(x)$ ,  $dh(x)/dx \geq 0$ . Poichè la profondità della corrente aumenta sempre, la soluzione “fisica” tra le due ammissibili è la soluzione  $A$ , per la quale  $h_2 > h_1$ .

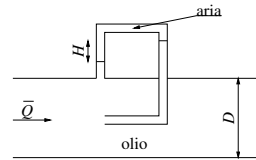
$$\begin{cases} U_2 = 0.741 \text{ m/s} \\ h_2 = 2.022 \text{ m} \end{cases} \quad (5.19)$$

#### Cosa non è stato detto.

È stato fatto solo un accenno al ragionamento che consente di determinare l'unica soluzione “fisica” del problema delle correnti in canali aperti che variano con continuità. Non si dirà nulla sui salti idraulici (che portano la corrente da uno stato supercritico a uno subcritico), dei quali si possono trovare esempi nei fiumi o sul fondo di un lavandino. Si accenna solo alla uguaglianza formale del problema del moto di un fluido incomprimibile in un canale aperto, con il moto monodimensionale di un fluido comprimibile, dove il ruolo del numero di Froude  $Fr$  sarà svolto dal numero di Mach  $M$ , la definizione di stato sub- e supercritico, sarà sostituita da quella di condizione sub- e supersonica, il salto idraulico troverà il suo fenomeno corrispondente nelle onde d'urto.

**Esercizio 5.4 — Tubo di Pitot statico.** Dato il condotto a sezione circolare rappresentato in figura, determinare la portata in massa d'olio,  $\bar{\rho} = 850 \text{ kg/m}^3$ , attraverso il condotto stesso sapendo che il diametro del condotto è  $d = 0.5 \text{ m}$ , che la differenza di altezza fra i peli liberi è  $H = 40 \text{ cm}$ , che il diametro del tubo "a U" è di 2 mm. Si trascuri qualunque effetto dissipativo, si assuma uniforme la velocità in una sezione sufficientemente lontana a monte e si consideri che nel tubo "a U" sia presente aria in condizioni normali.

( $\bar{Q} = 467.2 \text{ kg/s}$ )



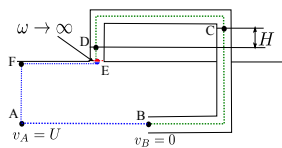
### Soluzione

**Concetti.** Teorema di Bernoulli nell'ipotesi di stazionarietà, fluido incomprimibile, non viscoso, irrotazionale. Equazione della vorticità nel caso non viscoso. Legge di Stevino.

**Svolgimento.** Vengono fatte alcune ipotesi semplificative ( $\rho = \bar{\rho}$ ,  $\mu = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ); si utilizza poi l'equazione della vorticità per semplificare ulteriormente il problema: se si assume che il profilo di velocità all'ingresso sia uniforme, e quindi a vorticità nulla, il fluido nel canale rimane irrotazionale (dall'equazione della vorticità per fluidi non viscosi).

Gli unici due punti che possono creare problemi sono i collegamenti del tubo con il canale. Sulla linea di corrente che incontra l'imbocco del tubicino, il fluido subisce un rallentamento dalla velocità di ingresso fino ad arrestarsi: su questa linea di corrente è possibile applicare il teorema di Bernoulli. In corrispondenza dell'altro collegamento, si incontra una superficie di discontinuità a vorticità infinita: non è quindi possibile attraversare questa superficie applicando direttamente il teorema di Bernoulli, ma bisogna ricorrere alle condizioni di interfaccia tra i due domini, quello interno al canale e quello interno al tubo, nel quale possono essere applicate le equazioni della statica.

Vengono definiti i punti  $A$  all'ingresso sulla linea di corrente che arriva alla presa del tubo all'interno del canale; il punto  $B$  coincidente con la presa del tubo all'interno del canale;  $C$  il pelo libero di destra all'interno del tubo "a U",  $D$  il pelo libero di sinistra. Si definiscono anche  $h_C$  e  $h_D$  come quote dei peli liberi (oss.  $H = h_C - h_D$ ).





Il sistema risolvente è:

$$\begin{cases} P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho gh_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho gh_B \\ P_B + \rho gh_B = P_C + \rho gh_C \\ P_C + \rho_a gh_C = P_D + \rho_a gh_D \\ P_D + \rho gh_D = P_{E_2} + \rho gh_{E_2} \\ P_{E_2} = P_{E_1} \\ P_{E_1} + \frac{1}{2}\rho u_{E_1}^2 + \rho gh_{E_1} = P_F + \frac{1}{2}\rho u_F^2 + \rho gh_F \\ P_F + \frac{1}{2}\rho v_F^2 + \rho gh_F = P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho gh_A \\ \bar{Q} = \rho \frac{\pi}{4} d^2 U \end{cases} \quad (5.20)$$

Osservando che  $h_A = h_B$ ,  $h_E = h_F$ ,  $v_A = v_F = U$ ,  $v_B = 0$ , supponendo  $u_E = U$  (ipotizzando dimensioni e intrusività trascurabile della sonda), il sistema semplificato diventa:

$$\begin{cases} P_A + \frac{1}{2}\rho U^2 = P_B \\ P_B + \rho gh_A = P_C + \rho gh_C \\ P_C + \rho_a gh_C = P_D + \rho_a gh_D \\ P_D + \rho gh_D = P_E + \rho gh_E \\ P_E + \frac{1}{2}\rho u_E^2 = P_F + \frac{1}{2}\rho U^2 \\ P_F + \rho gh_E = P_A + \rho gh_A \\ \bar{Q} = \rho \frac{\pi}{4} d^2 U \end{cases} \quad (5.21)$$

Risolvendo per  $U$ , avendo definito  $H = h_C - h_D$ :

$$\frac{1}{2}\rho U^2 = P_B - P_A = \dots = (\rho - \rho_a)gH \quad \Rightarrow \quad U = \sqrt{2\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)gH} \quad (5.22)$$

Inserendo i valori numerici:  $U = 2.799 \text{ m/s}$ ,  $\bar{Q} = 467.15 \text{ kg/s}$ .

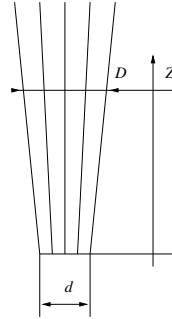
**Esercizio 5.5 — Getto libero.** Si consideri un getto stazionario, assialsimmetrico, d'acqua in condizioni standard, diretto verso l'alto, in atmosfera uniforme, secondo la verticale  $z$ , e uscente con velocità uniforme e costante  $V = 20 \text{ m/s}$  da un ugello circolare di diametro  $d = 5 \text{ cm}$ . Si assuma che:

- la curvatura delle linee di flusso sia trascurabile;
- sia trascurabile ogni perdita di energia.

Si determinino:

- il diametro  $D$  del getto alla quota  $Z = 15 \text{ m}$  (misurata dal piano d'uscita dall'ugello);
- la massima quota ideale  $H$  cui può giungere il getto.

( $D = 6.97 \text{ cm}$ ,  $H = 20.39 \text{ m}$ ) ■



### Soluzione

**Concetti.** Teorema di Bernoulli nell'ipotesi di stazionarietà, fluido incomprimibile, non viscoso, irrotazionale. Equazione della vorticità nel caso non viscoso.

### Svolgimento.

- Il primo quesito del problema viene risolto mettendo a sistema l'equazione di Bernoulli (ipotesi...) e l'equazione della continuità.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho V^2 = \frac{1}{2}\rho u^2(z) + \rho g z \\ V d^2 = u(z) D^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{d}{\left[1 - \frac{2gz}{V^2}\right]^{\frac{1}{4}}} \quad (5.23)$$

Inserendo i valori numerici  $D = 6.97 \text{ cm}$ .

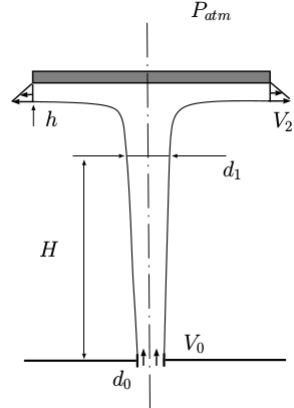
- Il secondo quesito si ottiene ricavando dal teorema di Bernoulli la quota alla quale la velocità è nulla.

$$\frac{1}{2}\rho V^2 = \rho g H \quad \Rightarrow \quad H = \frac{1}{2} \frac{V^2}{g} \quad (5.24)$$

Inserendo i valori numerici  $H = 20.39 \text{ m}$ .

**Esercizio 5.6 — Giochi d'acqua.** In un gioco d'acqua ( $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$ ), un disco di diametro  $D = 35 \text{ cm}$  viene sollevato da un getto che fuoriesce con velocità  $V_0 = 10 \text{ m/s}$  da un foro di diametro  $d_0 = 8 \text{ cm}$  concentrico all'asse del disco, così come illustrato schematicamente in figura. Noto che in condizioni stazionarie la quota raggiunta dal disco è di poco superiore alla quota  $H = 2 \text{ m}$ , si richiede di determinare:

- 1.1) la velocità  $V_1$  e il diametro  $d_1$  del getto alla quota  $H$  supponendo trascurabili tra le sezioni 0 e 1 sia la curvatura delle linee di flusso che ogni forma di dissipazione;
- 1.2) lo spessore  $h$  del film d'acqua all'estremità del disco assumendo che il profilo di velocità radiale sia lineare con velocità massima  $V_2 = V_1$ .
- 1.3) la massa  $m$  del disco considerando trascurabili sia gli sforzi viscosi all'interfaccia tra l'atmosfera circostante ( $P_{atm} = 101325 \text{ Pa}$ ) e il getto d'acqua che la forza gravitazionale agente sul fluido tra la quota  $H$  e la quota del disco.



Per la risoluzione del problema si assumano condizioni di assialsimmetria.

#### Soluzione

**Concetti.** Teorema di Bernoulli nell'ipotesi di stazionarietà, fluido incomprimibile, non viscoso, irrotazionale. Bilanci integrali.

#### Svolgimento.

- Il primo punto viene risolto mettendo a sistema il teorema di Bernoulli e la continuità.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho V_0^2 = \frac{1}{2}\rho V_1^2(z) + \rho g H \\ V_0 d_0^2 = V_1 d_1^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V_1 = V_0 \sqrt{1 - 2gH/V_0^2} \\ d_1 = \left[1 - \frac{2gH}{V_0^2}\right]^{-\frac{1}{4}} d_0 \end{cases} \quad (5.25)$$

- Il secondo punto viene risolto utilizzando solamente il bilancio di massa.

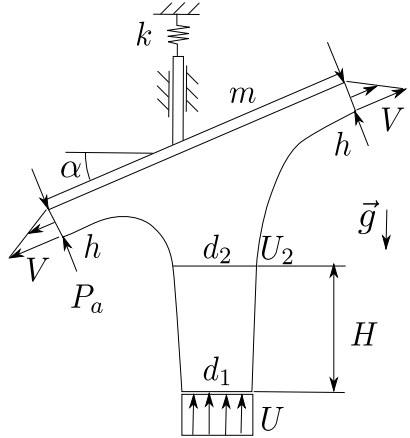
$$Q = \frac{\pi}{4}\rho V_0 d_0^2 = \frac{\pi}{4}\rho V_1 d_1^2 = \frac{\pi}{2}D h V_2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{d_1^2}{2D} \quad (5.26)$$

- Il terzo punto viene risolto applicando il bilancio della quantità di moto in direzione verticale per trovare la forza applicata dal disco al fluido. Infine si scrive l'equilibrio del disco soggetto alla stessa forza con verso opposto (principio di azione e reazione) e al proprio peso.

Dal bilancio si ottiene che la componente verticale della forza che si scambiano fluido e disco è uguale a  $\rho V_1^2 \frac{\pi}{4} d_1^2$ . La massa del disco è quindi  $m = \frac{\pi}{4} d_1^2 \frac{\rho V_1^2}{g}$

**Esercizio 5.7 — Lamina inclinata.** Un getto di acqua ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) colpisce una lamina di massa per unità di apertura  $m = 1 \text{ kg/m}$  inclinata di un angolo  $\alpha = 30^\circ$  rispetto all'orizzontale, connessa a terra con una molla di costante elastica  $k = 10^5 \text{ N/m}^2$ . Il getto esce con profilo uniforme  $U = 10 \text{ m/s}$  da una fessura larga  $d_1 = 5 \text{ cm}$ . Determinare:

- la velocità  $U_2$  (uniforme) e lo spessore  $d_2$  del getto alla quota  $H = 1 \text{ m}$  sopra la fessura di uscita, supponendo trascurabili ogni forma di dissipazione e la curvatura delle linee di corrente;
- la velocità massima  $V$  del profilo triangolare di spessore  $h = 2 \text{ cm}$ , identico su entrambe le estremità della lamina;
- la deformazione della molla, considerando trascurabili gli sforzi viscosi all'interfaccia tra il getto e l'atmosfera circostante ( $P_a = 101325 \text{ Pa}$ ) e la gravità agente sul fluido al di sopra della quota  $H$ .



### Soluzione

**Concetti.** Teorema di Bernoulli nell'ipotesi di stazionarietà, fluido incompressibile, non viscoso, irrotazionale. Bilanci integrali.

### Svolgimento.

- continuità + Bernoulli

$$\begin{cases} \rho dU = \rho d_2 U_2 \\ \frac{1}{2} \rho U^2 = \frac{1}{2} \rho U_2^2 + \rho g H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_2 = d_1 \left( 1 - \frac{2gH}{U^2} \right)^{-1/2} = 0.0558 \text{ m} \\ U_2 = U \left( 1 - \frac{2gH}{U^2} \right)^{1/2} = 8.96 \text{ m/s} \end{cases} \quad (5.27)$$

- continuità: in ingresso profilo uniforme, in uscita due profili triangolari.

$$U d_1 = 2 \frac{1}{2} V h \Rightarrow V = U \frac{d_1}{h} = 25 \text{ m/s} \quad (5.28)$$

- bilancio di massa + equilibrio corpo: pressione  $P_a$  ovunque; i due flussi di quantità di moto sulla lamina si bilanciano: rimane solo il termine in ingresso

$$\mathbf{R}_{fl} = - \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \dots = \rho U^2 \frac{d_1^2}{d_2} \hat{\mathbf{y}} = 4482.7 \text{ N} \hat{\mathbf{y}} \quad (5.29)$$

$$k \Delta x = mg - R \Rightarrow \Delta x = -0.0447 \text{ m (compressione)} \quad (5.30)$$



## 6. Soluzioni esatte

### 6.0.1 Linee guida per la soluzione dei problemi: soluzioni esatte

In questo paragrafo si riassume il procedimento per la soluzione dei problemi sulle soluzioni esatte delle equazioni di Navier-Stokes. In generale le soluzioni esatte sono significative quando il regime di moto è laminare, per numeri di Reynolds “sufficientemente” bassi: in questo caso si può spesso usare l’omogeneità della corrente rispetto ad alcune coordinate, per semplificare le equazioni. Nella maggioranza delle soluzioni esatte, i termini non lineari nelle equazioni sono identicamente nulli, permettendo di ricavare abbastanza facilmente la soluzione delle equazioni. Le equazioni di Navier-Stokes vengono scritte nel sistema di coordinate più adeguato alla descrizione del problema, come possono essere ad esempio le coordinate cartesiane o quelle cilindriche. Le equazioni di Navier-Stokes per un fluido incompressibile

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p = \rho \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

accompagnate dalle condizioni iniziali e dalle condizioni al contorno opportune (e, qualora servissero, dalle condizioni di compatibilità dei dati), possono essere scritte ad esempio in un sistema di coordinate cartesiane

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g_y \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

o in un sistema di coordinate cilindriche

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = \rho g_r \\ \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho g_\theta \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_z - \mu \nabla^2 u_z + \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \nabla b &= a_r \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial b}{\partial \theta} + a_z \frac{\partial b}{\partial z} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Nel caso di corrente bidimensionale di Poiseuille in un canale piano, si usano le equazioni scritte nel sistema di coordinate cartesiane. Si sceglie l'asse  $x$  orientato lungo il canale e l'asse  $y$  perpendicolare alle pareti. Si fanno alcune ipotesi:

- stazionarietà:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ;
- omogeneità della coordinata  $x$ : il campo di velocità è indipendente dalla coordinata  $x$ . La derivata di tutte le componenti della velocità rispetto ad  $x$  è nulla:  $\frac{\partial u_i}{\partial x} = 0$ .  
 È invece ammissibile che la pressione vari lungo  $x$ : da un punto di vista fisico, è necessario un gradiente di pressione che equilibri gli sforzi a parete dovuti alla viscosità e che “spinga” il fluido nel canale; dal punto di vista matematico, è già stato accennato al ruolo particolare che svolge quel campo indicato con  $p$ , diverso dalla pressione termodinamica nel caso di fluido incompressibile; si osservi poi che il campo  $p$  non compare mai nelle equazioni, se non sotto l'operatore di gradiente (o all'interno delle condizioni al contorno, che “fissano” un valore di  $p$ : è già stato sottolineato più volte che spesso il moto di un fluido incompressibile è indipendente dal valore assoluto del campo  $p$ , mentre dipende da differenze, o dalle derivate, di  $p$ !).
- sfruttando la bidimensionalità della corrente, l'omogeneità della coordinata  $x$  e il vincolo di incompressibilità si ottiene:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (6.5)$$

Questo implica che la componente  $v$  della velocità è costante in tutto il canale; sfruttando le condizioni al contorno di adesione a parete  $\mathbf{u} = (u, v) = \mathbf{0}$  è evidente che la costante deve essere nulla:  $v = 0$ .

- supponiamo qui che, se vengono considerate le forze di volume, esse sono costanti e dirette lungo  $-\hat{\mathbf{y}}$ .

Le equazioni diventano quindi

$$\begin{cases} -\mu \left( \frac{d^2 u}{dy^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \end{cases} \quad (6.6)$$

dove la derivata parziale in  $y$  della componente  $u$  è stata sostituita dalla derivata ordinaria, poichè la velocità  $\mathbf{u}(y)$  (e quindi tutte le sue componenti) dipende solo dalla coordinata  $y$ . La seconda equazione integrata dà come risultato ( $p$  dipende sia da  $x$  sia da  $y$ ):

$$p(x, y) = -\rho gy + f(x) \quad (6.7)$$

Inserita nella prima:

$$\mu \left( \frac{d^2 u}{dy^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (6.8)$$

Nell'ultima equazione, i termini a sinistra dell'uguale sono funzione solo della variabile indipendente  $y$ , quelli a destra dell'uguale solo di  $x$ : affinché l'uguaglianza possa essere sempre valida, i due termini devono essere costanti; si sceglie di definire questa costante  $-G_P$  (con questa  $G_P$  assumerà valore positivo). Si possono quindi risolvere le due equazioni

$$\begin{cases} \mu \left( \frac{d^2 u}{dy^2} \right) = -G_P \\ \frac{\partial p}{\partial x} = -G_P \end{cases} \quad (6.9)$$

accompagnate dalle opportune condizioni al contorno. Osservando il sistema (6.6), nelle equazioni compare la derivata seconda in  $y$  della componente  $u$  della velocità, la derivata prima sia in  $x$  sia in  $y$  di  $p$ : è ragionevole pensare che servano due condizioni al contorno in  $y$  per  $u$ , una condizione al contorno per  $p$  in  $x$  e una in  $y$ . In particolare, sulle pareti del canale (alto  $H$ ) la velocità del fluido deve essere nulla, per le condizioni al contorno di adesione. Per quanto riguarda la pressione, si può fissare il valore in un punto del dominio, ad esempio l'origine degli assi  $p(0, 0) = p_0$ .

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ u(x, H) = 0 \\ p(0, 0) = p_0 \end{cases} \quad (6.10)$$

Le equazioni (6.9) con le condizioni al contorno appena elencate danno come risultato:

$$\begin{cases} u(y) = -\frac{G_P}{2\mu} y(y - H) \\ p(x, y) = p_0 - \rho gy - G_P x \end{cases} \quad (6.11)$$

Se vengono chieste azioni (risultanti di forze o momenti) esercitate dal fluido sul solido, è necessario calcolare lo sforzo a parete  $\mathbf{t}_{n,s}$  esercitato sul solido, uguale e contrario allo sforzo esercitato dal solido sul fluido  $\mathbf{t}_n$ . Il vettore sforzo  $\mathbf{t}_n$  su una superficie con giacitura definita dal versore normale  $\hat{\mathbf{n}}$  si può esprimere come

$$\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T} = \hat{\mathbf{n}} \cdot [-p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{S}] = -p\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{s}_n \quad (6.12)$$

Per evitare errori nel calcolo del prodotto tra versore normale  $\hat{\mathbf{n}}$  e tensore degli sforzi  $\mathbb{T}$  in sistemi di coordinate non cartesiani, è possibile utilizzare la seconda formula, equivalente alla (6.18) ma che contiene solo vettori e operazioni tra vettori, più facili da trovare nelle tabelle che raccolgono le componenti delle operazioni vettoriali e tensoriali in diversi sistemi di coordinate

$$\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}} + \mu[2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{u})] = -p\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{s}_n. \quad (6.13)$$



Per **sistemi di coordinate cartesiani**, è possibile calcolare il prodotto tensoriale tramite il prodotto matrice-vettore tra la matrice delle componenti del tensore degli sforzi e il vettore delle componenti del versore normale. Ad esempio, per la corrente di Poiseuille bidimensionale nel canale piano le componenti del tensore degli sforzi  $\mathbb{T}$  possono essere calcolate e raccolte come

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{S} = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} & -p \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

dove il tensore velocità di deformazione è stato indicato con  $\mathbb{S}$ . Sulla parete inferiore, a  $y = 0$ , la normale uscente dal fluido è  $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{y}}$ , la derivata  $\partial u / \partial y(x, 0) = G_P / (2\mu)$ . Il vettore sforzo agente sul fluido è quindi

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & \mu \frac{\partial u}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & \mu \frac{G_P H}{2\mu} \\ \mu \frac{G_P H}{2\mu} & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{G_P H}{2} \\ p \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Lo sforzo sulla parete inferiore è l'opposto  $\mathbf{t}_{n,s} = \frac{G_P H}{2} \hat{\mathbf{x}} - p\hat{\mathbf{y}}$ . Sulla parete superiore, a  $y = H$ , la normale uscente dal fluido è  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{y}}$ , la derivata  $\partial u / \partial y(x, H) = -G_P / (2\mu)$ . Svolgendo i conti, come fatto per la parete inferiore, si ottiene che lo sforzo agente sulla parete superiore è  $\mathbf{t}_{n,s} = \frac{G_P H}{2} \hat{\mathbf{x}} + p\hat{\mathbf{y}}$ .

Per i più curiosi e i più “matematici”, si dimostra infine l'equivalenza tra (6.13) e (6.18). Questa dimostrazione viene fatta ricorrendo alla notazione indiciale, sfruttando le proprietà di permutazione degli indici del simbolo  $\epsilon_{ijk}$  la proprietà dei simboli  $\delta_{a,b}$ :

$$\epsilon_{kij}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \quad (6.16)$$

La componente  $i$ -esima di  $\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}$  è

$$\begin{aligned} \{\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}\}_i &= \epsilon_{ijk} n_j \{\nabla \times \mathbf{u}\}_k = \\ &= \epsilon_{ijk} n_j \epsilon_{klm} \partial_l u_m = \\ &= \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} n_j \partial_l u_m = \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) n_j \partial_l u_m = \\ &= n_j \partial_i u_j - n_j \partial_j u_i = \\ &= n_j \partial_i u_j + n_j \partial_j u_i - 2n_j \partial_j u_i = \\ &= \{2\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{S} - 2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u}\}_i \end{aligned} \quad (6.17)$$

Il contributo viscoso al vettore sforzo è uguale al primo termine a destra dell'uguale moltiplicato per la viscosità dinamica  $\mu$ ,  $\mathbf{s}_n = 2\mu\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{S}$ ; il vettore sforzo  $\mathbf{t}_n$  è la somma del vettore degli sforzi viscosi  $\mathbf{s}_n$  e del vettore degli sforzi (normali) dovuti alla “pressione”,  $\mathbf{t}_n = \mathbf{s}_n - p\hat{\mathbf{n}}$ . Si ottiene così l'identità desiderata

$$\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T} = \hat{\mathbf{n}} \cdot [-p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{S}] = -p\hat{\mathbf{n}} + \mu[2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{u})] = -p\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{s}_n. \quad (6.18)$$

Si ricorda che le identità vettoriali e tensoriali sono indipendenti dal sistema di riferimento in cui vengono scritte le componenti: per la loro dimostrazione si può utilizzare un sistema di coordinate qualsiasi (spesso le coordinate cartesiani, per le quali le espressioni delle operazioni e degli operatori differenziali è “semplice”).

**Osservazione.**

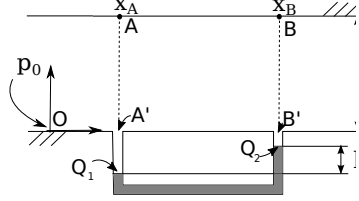
É possibile calcolare le componenti del prodotto  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T}$  svolgendo un prodotto matrice-vettore anche per sistemi di coordinate non cartesiani. In questo caso, però, le componenti del tensore sono “non banali”. Facendo l’esempio del gradiente  $\nabla \mathbf{v}$  di un campo vettoriale  $\mathbf{v}$ , in coordinate cartesiane la componente  $ij$  è  $\partial u_i / \partial x_j$ , mentre in coordinate cilindriche, le sue componenti possono essere raccolte nella seguente matrice  $3 \times 3$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Bisogna quindi prestare attenzione nella scrittura delle componenti di tensori e operatori quando si usano sistemi di coordinate non cartesiane. Per il calcolo del vettore sforzo si consiglia quindi di usare, la formula 6.13 che contiene solo operazioni vettoriali, per le quali è più facile trovare tavole che ne raccolgano le espressioni delle componenti in diversi sistemi di coordinate.

**Esercizio 6.1 — Manometro per misura portata: Poiseuille.** Una corrente di Poiseuille di acqua ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 10^{-3} \text{ kg/(ms)}$ ) scorre in un canale di altezza  $H = 1 \text{ cm}$ . Un manometro misura la differenza di pressione tra le sezioni in  $x_A = 1.0 \text{ m}$  e  $x_B = 2.0 \text{ m}$ . Determinare:

- il gradiente di pressione all'interno del condotto, conoscendo la densità del liquido barometrico  $\bar{\rho} = 1200 \text{ kg/m}^3$  e la differenza di quote  $h = 5 \text{ mm}$ ;
- la velocità massima all'interno del canale;
- la risultante  $\mathbf{R}$  delle forze esercitata dal fluido sul tratto di parete superiore compreso tra A e B, sapendo che sulla sezione  $x = 0 \text{ m}$  la pressione vale  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ . Qual è la relazione tra  $R_x$  e  $p_A - p_B$ ? Commento.



#### Soluzione

**Concetti.** Soluzione esatte delle equazioni di Navier-Stokes. Corrente di Poiseuille nel canale piano 2D. Manometro: leggi della statica (Stevino).

#### Svolgimento.

- Per trovare la derivata in direzione  $x$  della pressione all'interno del canale ( $\partial P / \partial x = -G_P = \text{cost.}$ ) risolve il problema di statica all'interno del manometro. Facendo riferimento al disegno, si utilizza Stevino tra i punti  $A' - Q_1$ ,  $Q_1 - Q_2$ ,  $Q_2 - B'$  e l'informazione di derivata della pressione costante in direzione  $x$  all'interno del canale, tra  $A'$  e  $B'$ .

$$\begin{cases} p_{A'} = p_{Q_1} - \rho g z_{Q_1} \\ p_{Q_1} - \bar{\rho} g z_{Q_1} = p_{Q_2} - \bar{\rho} g z_{Q_2} \\ p_{B'} = p_{Q_2} - \rho g z_{Q_2} \\ p_{A'} - p_{B'} = G_P \Delta x \end{cases} \Rightarrow G_P = \frac{1}{\Delta x} (\bar{\rho} - \rho) g \Delta h \quad (6.20)$$

avendo svolto correttamente i conti e riconosciuto  $z_{Q_2} - z_{Q_1} = \Delta h$ .

- Ricordando che il profilo di velocità di Poiseuille risulta  $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{x}}u(y)$ , con

$$u(y) = -\frac{G_P}{2\mu} y(y - H), \quad (6.21)$$

la velocità massima all'interno del canale è  $V = u(H/2) = \frac{G_P}{8\mu} H^2$

- Per calcolare la risultante degli sforzi sul tratto  $A - B$  della parete superiore, è necessario calcolare il vettore sforzo agente su di essa e svolgere un semplice integrale. Il vettore sforzo sulla parete superiore risulta

$$\mathbf{t} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=H} \hat{\mathbf{x}} + p(x, H) \hat{\mathbf{y}} \quad (6.22)$$

La pressione  $p(x, H)$  sulla parete superiore, per  $x \in [x_A, x_B]$  si calcola come segue: si parte dall'origine del sistema di riferimento  $O$ , in corrispondenza della quale è noto il valore della pressione  $p_0$  e ci si muove in orizzontale ricordando che  $\partial P/\partial x = -G_P$  e in verticale ricordando che  $\partial P/\partial y = -\rho g$ .

$$\begin{aligned} p_{A'} &= p_0 - G_P x_A \\ p_A &= p_{A'} - \rho g H \\ p_B &= p_A - G_P (x_B - x_A) \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$p(x, H) = p_A - G_P (x - x_A)$$

Lo sforzo tangenziale sulla parete è costante e vale

$$-\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=H} = \frac{G_P}{2} H \quad (6.24)$$

La risultante delle forze (per unità di lunghezza, poichè il problema è bidimensionale) si ottiene integrando lo sforzo tra  $A$  e  $B$ .

$$\mathbf{R} = \frac{G_P}{2} H \Delta x \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} (P_A + P_B) * \Delta x \hat{\mathbf{y}} \quad (6.25)$$

**Esercizio 6.2 — Corrente libera su parete verticale.** Si consideri una corrente d'acqua a pelo libero, laminare e stazionaria, che scorre su una parete verticale piana di lunghezza e apertura infinita. Si ipotizzi che la pressione atmosferica che agisce sul pelo libero sia uniforme. Si ipotizzi inoltre che lo sforzo tangenziale fra acqua e aria in corrispondenza del pelo libero sia nullo.

Assegnata la portata in massa per unità di apertura  $\bar{Q} = 0.5 \text{ kg/(ms)}$ , determinare

1. lo spessore  $h$  della corrente d'acqua;
2. lo sforzo tangenziale a parete;
3. la velocità in corrispondenza del pelo libero;
4. la velocità media e il numero di Reynolds basato su tale velocità media e sullo spessore della corrente.

Si sostituisca poi al pelo libero una parete solida. Si determini quale dovrebbe essere la velocità di tale parete per ottenere una portata nulla.

Dati:  $\bar{\rho} = 999 \text{ kg/m}^3$ ,  $\bar{\mu} = 1.15 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(ms)}$ .

( $h = 5.61 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ ,  $\tau = 5.494 \text{ Pa}$ ,  $u(h) = 1.339 \text{ m/s}$ ,  $\bar{U} = 0.893 \text{ m/s}$ ,  $Re = 434.8$ ,  $U = -0.4464 \text{ m/s}$ .)

### Soluzione

**Concetti.** Semplificazione delle equazioni di NS in casi particolari. Soluzioni esatte in coordinate cartesiane.

**Svolgimento.** Si scelga un sistema di riferimento cartesiano con l'asse  $x$  orientato lungo la parete verso il basso e l'asse  $y$  perpendicolare ed uscente ad essa.

Sulla corrente di questo problema agisce la forza di volume dovuta alla gravità.

L'ipotesi che la pressione sia uniforme sulla superficie di interfaccia tra acqua e aria implica che la pressione è costante in tutto il fluido: si vedrà che  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ ; se sulla superficie libera la pressione è costante e non varia nello spessore, allora la pressione è costante in tutto il fluido.

- Scrittura delle equazioni di NS in 2 dimensioni.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6.26)$$

- Semplificazione delle equazioni di NS per il problema da affrontare.

Ipotesi:

- problema stazionario:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ;
- direzione  $x$  omogenea (canale infinito in direzione  $x$ ):  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ; la pressione nelle equazioni di NS incomprimibili è un moltiplicatore di Lagrange per imporre il vincolo di incomprimibilità; inoltre non appare mai, se non nelle condizioni al contorno, come  $p$  ma solo con le sue derivate spaziali: quindi non è corretto imporre  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ , nonostante la direzione  $x$  sia omogenea;
- $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  inserito nel vincolo di incomprimibilità ( $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ) implica  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ; poichè  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  e  $v = 0$  a parete per la condizione al contorno di adesione, segue che  $v = \text{cost} = 0$ ;
- forze di volume solo in direzione verticale: per come sono stati orientati gli assi,  $\mathbf{f} = g\hat{\mathbf{x}}$ .

$$\begin{cases} -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6.27)$$

Dalla seconda segue che la pressione può essere funzione solo di  $x$ . Come già detto in precedenza, la pressione sulla superficie libera è costante e uguale alla pressione ambiente  $P_a$ : se la pressione non può variare nello spessore, allora è costante ovunque. La derivata parziale  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ , il suo gradiente è nullo e quindi la pressione è costante in tutta la corrente di acqua.

Nella prima, il termine a sinistra dell'uguale è funzione solo di  $y$ ; quello di destra è costante e uguale a  $\rho g$ . Le condizioni al contorno sono di adesione a parete e di sforzo di taglio nullo all'interfaccia tra aria ed acqua:  $0 = \tau(H) = \mu \frac{\partial u}{\partial y}(H) = \mu u'(H)$ , dove la derivata parziale in  $y$  è stata sostituita da quella ordinaria, poichè la velocità è solo funzione di  $y$ .

$$\begin{cases} -\mu u''(y) = \rho g, & y \in [0, H] \\ u(0) = 0 \\ u'(H) = 0 \end{cases} \quad (6.28)$$

- Soluzione dell'equazione differenziale (semplice) con dati al contorno.

Risulta:

$$\Rightarrow u(y) = -\frac{\rho g}{2\mu} y^2 + \frac{\rho g}{\mu} Hy \quad (6.29)$$

- Calcolo della portata come integrale della velocità; si trova così la relazione tra  $Q$  ed  $H$ .

$$Q = \int_0^H \rho u(y) dy = \frac{1}{3} \frac{\rho^2 g}{\mu} H^3 \quad (6.30)$$

E quindi

$$H = \left( \frac{3Q\mu}{\rho^2 g} \right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow H = 5.61 \cdot 10^{-4} m \quad (6.31)$$

- Calcolo dello sforzo a parete

$$\tau = \mu u'|_{y=0} = \rho g H \Rightarrow \tau = 5.494 Pa \quad (6.32)$$

*Osservazione.* Equilibrio con la forza di gravità (problema stazionario).

- Calcolo di  $u(H)$ .

$$u(H) = \frac{1}{2} \frac{\rho g}{\mu} H^2 \Rightarrow u(H) = 1.342 m/s \quad (6.33)$$

- Calcolo velocità media e numero di Reynolds.

$$\bar{U} = \frac{1}{H} \int_0^H u(y) dy = \frac{Q}{\rho H} \Rightarrow \bar{U} = \frac{Q}{\rho H} = \frac{2}{3} u(H) = 0.895 m/s \quad (6.34)$$

$$Re = \frac{\rho \bar{U} H}{\mu} \Rightarrow Re = 434.8 \quad (6.35)$$

L'ultima parte del problema chiede di sostituire alla superficie libera, una parete infinita. L'equazione trovata in precedenza è ancora valida; è necessario però sostituire la condizione di sforzo tangenziale nullo con adesione su una parete mobile con velocità costante  $U$ .

$$\begin{cases} -\mu u''(y) = \rho g, & y \in [0, H] \\ u(0) = 0 \\ u(H) = U \end{cases} \quad (6.36)$$

Il profilo di velocità è:

$$u(y) = \frac{\rho g}{2\mu}(-y^2 + yH) + \frac{U}{H}y \quad (6.37)$$

dove la velocità  $U$  è ancora incognita. Per trovarne il valore, si calcola la portata e la si pone uguale a zero. La portata è uguale a

$$Q = \int_0^H u(y)dy = \dots = \frac{1}{12} \frac{\rho g H^3}{\mu} + \frac{1}{2} UH \quad (6.38)$$

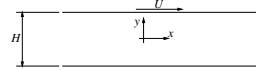
Imponendo  $Q = 0$ ,

$$U = -\frac{\rho g H^2}{6\mu} \Rightarrow U = -0.4474 \text{ m/s} \quad (6.39)$$

**Esercizio 6.3 — Corrente di Newton-Poiseuille.** È dato un canale piano, di lunghezza e apertura infinita, orizzontale, di altezza  $H = 1.51 \text{ mm}$ , delimitato da una parete inferiore fissa e da una parete superiore mobile con velocità orizzontale, costante e positiva  $U = 0.31 \text{ m/s}$ . Il canale contiene acqua in condizioni standard.

Per quale condizione la portata nel canale risulta nulla?

( $Re = 441$ ,  $G_p = 930 \text{ Pa/m}$ )



### Soluzione

**Concetti.** Semplificazione delle equazioni di NS in casi particolari (canale piano infinito). Soluzione esatta nel canale piano infinito (a bassi numeri di Reynolds). Corrente di Newton. Corrente di Poiseuille.

**Svolgimento.** La corrente nel canale di questo problema ha due fonti di forzamento: il moto a (velocità costante) della parete superiore e il gradiente di pressione  $G_p$  lungo il canale. I due effetti, quando combinati, provocano un campo di moto con portata nulla.

Dopo aver semplificato le equazioni di NS, si ricava il profilo di velocità e il valore del gradiente di pressione per avere portata nulla.

- Scrittura delle equazioni di NS in 2 dimensioni.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6.40)$$

- Semplificazione delle equazioni di NS per il problema da affrontare.

Ipotesi:

- problema stazionario:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ;
- direzione x omogenea (canale infinito in direzione x):  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ;  
la pressione nelle equazioni di NS incomprimibili è un moltiplicatore di Lagrange per imporre il vincolo di incomprimibilità; inoltre non appare mai, se non nelle condizioni al contorno, come  $p$  ma solo con le sue derivate spaziali;
- da  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  inserito nel vincolo di incomprimibilità, implica  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ; poichè  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  segue che  $v = \text{cost} = 0$ ;
- no forze di volume:  $\mathbf{f} = 0$ .

Detto questo, le equazioni possono essere scritte come:

$$\begin{cases} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6.41)$$

Dalla seconda segue che la pressione può essere funzione solo di  $x$ . Nella prima, il termine a sinistra dell'uguale è funzione solo di  $y$ ; quello di destra può essere funzione solo di  $x$ : l'uguaglianza implica che entrambi i membri sono costanti. Definiamo



questa costante come  $G_P = \frac{\partial p}{\partial x}$ : si noti che questo è il gradiente di pressione lungo il canale.

$$\begin{cases} -\mu u''(y) = -G_P & y \in [0, H] \\ u(0) = 0 \\ u(H) = U \end{cases} \quad (6.42)$$

- Soluzione dell'equazione differenziale con dati al contorno: si integra semplicemente due volte e si impongono le condizioni al contorno.

Risulta:

$$\Rightarrow u(y) = \frac{G_P}{2\mu} y^2 + \left( -\frac{G_P}{2\mu} H + \frac{U}{H} \right) y \quad (6.43)$$

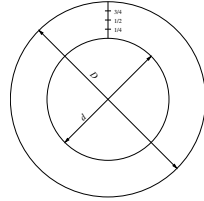
- Calcolo della portata come integrale della velocità; imponendo  $Q = 0$  si ottiene la soluzione del problema.

$$Q = \int_0^H u(y) dy = -\frac{G_P}{12\mu} H^3 + \frac{1}{2} UH \quad (6.44)$$

Infine, imponendo  $Q = 0$ , si ottiene il valore di  $G_P$ :

$$G_P = 6 \frac{\mu U}{H^2} \quad \Rightarrow \quad G_P = 930 \text{ Pa/m} \quad (6.45)$$

**Esercizio 6.4 — Corrente di Taylor-Couette.** Si consideri la corrente piana fra due cilindri coassiali rotanti. Si misura la velocità in due punti posti rispettivamente a  $1/4$  e  $3/4$  del gap fra i due cilindri:  $u_{\theta,1/4} = 0.5 \text{ m/s}$ ,  $u_{\theta,3/4} = 0.8 \text{ m/s}$ . Si determini la velocità di rotazione dei due cilindri nonché la pressione in corrispondenza del cilindro interno sapendo che la pressione in corrispondenza del cilindro esterno vale  $5 \text{ Pa}$ , che la densità del fluido è pari a  $1.225 \text{ kg/m}^3$ , che il diametro del cilindro interno è  $d = 0.1 \text{ m}$  e che il diametro del cilindro esterno è  $D = 0.16 \text{ m}$ .  
 $(\Omega_{in} = 6.663 \text{ s}^{-1}, \Omega_{ext} = 11.743 \text{ s}^{-1})$  ■



### Soluzione

**Concetti.** Soluzione esatte delle equazioni di Navier-Stokes. Corrente di Taylor-Couette.

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = f_r \\ \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = f_\theta \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_z - \mu \nabla^2 u_z + \frac{\partial p}{\partial z} = f_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (6.46)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \nabla b &= a_r \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial b}{\partial \theta} + a_z \frac{\partial b}{\partial z} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (6.47)$$

**Svolgimento.** Il problema viene risolto calcolando prima le velocità angolari dei cilindri e successivamente la pressione.

- Calcolo delle velocità angolari dei cilindri. Nota la forma del campo di moto e le velocità in due punti a diversi raggi, è possibile calcolare  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  risolvendo un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite.

Il campo di moto tra due cilindri coassiali rotanti è:

$$u_\theta(r) = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} \quad (6.48)$$

*Osservazione.* La soluzione esatta di Taylor-Couette è facile da ricavare, se si ricorda che è la somma di una rotazione rigida e un vortice irrotazionale: imponendo la forma  $u_\theta = Ar + B/r$  e le condizioni al contorno, si ottiene la formula voluta.

Note le misure  $u_{\theta,1/4}$ ,  $u_{\theta,3/4}$ , il sistema risolvente diventa:

$$\begin{bmatrix} -\frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} r_{1/4} + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r_{1/4}} & \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} r_{1/4} - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r_{1/4}} \\ -\frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} r_{3/4} + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r_{3/4}} & \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} r_{3/4} - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r_{3/4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{\theta,1/4} \\ u_{\theta,3/4} \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

La soluzione di Taylor-Couette può essere ricavata abbastanza facilmente semplificando le equazioni di Navier-Stokes scritte in coordinate cilindriche, dopo aver fatto le opportune ipotesi (quali?). Le componenti in direzione radiale e tangenziale dell'equazione della quantità di moto diventano:

$$\begin{cases} -\rho \frac{u_\theta^2}{r} + \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{u_\theta}{r^2} = 0 \end{cases} \quad (6.50)$$

dove  $P = P(r)$ ,  $u_\theta = u_\theta(r)$ . Le derivate parziali possono essere quindi trasformate in derivate ordinarie. La seconda equazione è disaccoppiata dalla prima e quindi può essere risolta, una volta imposte le condizioni al contorno. Trovato il campo di moto da questa equazione, la prima viene usata per calcolare il campo di pressione. La seconda equazione può essere riscritta come (svolgere le derivate per credere!)

$$\begin{cases} -\left(\frac{1}{r} (ru_\theta)'\right)' = 0 \\ u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1 \\ u_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r} \\ u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1 \\ u_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2 \end{cases} \quad \text{A,B from b.c.} \quad (6.51)$$

- Calcolo della pressione. Una volta noto il campo di moto è possibile calcolare il campo di pressione:

$$P'(r) = \rho \frac{u_\theta^2}{r} \quad \text{con } P(R_2) = P_2. \quad (6.52)$$

$$\int_{P_2}^{P_1} \frac{dP}{dr} dr = \int_{R_2}^{R_1} \rho \frac{1}{r} \left( Ar + \frac{B}{r} \right)^2 dr \quad (6.53)$$

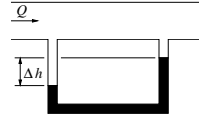
Da questa si ricava

$$P(r) = P_2 - \rho \left[ \frac{1}{2} A^2 (R_2^2 - r^2) + 2AB \ln \frac{R_2}{r} - \frac{1}{2} B^2 \left( \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right] \quad (6.54)$$

**Esercizio 6.5 — Corrente di Poiseuille: manometro.**

Un manometro a mercurio ( $\rho_{hg} = 13610 \text{ kg/m}^3$ ) collega due prese di pressione posizionate a una distanza di  $l = 2 \text{ m}$  l'una dall'altra lungo un tubo orizzontale di diametro  $2R = 5 \text{ cm}$  in cui scorre un fluido con densità  $\rho_f = 950 \text{ kg/m}^3$ . Se la differenza fra le altezze dei peli liberi del liquido manometrico nelle due colonne vale  $\Delta h = 4 \text{ cm}$  e la portata volumetrica che scorre nel tubo è  $Q = 6 \text{ m}^3/\text{s}$ , quanto valgono la viscosità  $\mu$  del fluido e lo sforzo a parete  $\tau_w$ ?

( $\mu = 6.36 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m s)}$ ,  $\tau_w = 31.05 \text{ z N/m}^2$ ) ■

**Soluzione**

**Concetti.** Semplificazione delle equazioni di NS in casi particolari. Soluzioni esatte in coordinate cilindriche. Legge di Stevino.

Scrittura del contributo viscoso del vettore sforzo come:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_n &= \mathbb{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu[\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu[2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}] \end{aligned} \quad (6.55)$$

**Svolgimento.** bla bla ...

- Scrittura delle equazioni di NS in **coordinate cilindriche (!!!!)** .

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = f_r \\ \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = f_\theta \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_z - \mu \nabla^2 u_z + \frac{\partial p}{\partial z} = f_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (6.56)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \nabla b &= a_r \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial b}{\partial \theta} + a_z \frac{\partial b}{\partial z} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (6.57)$$

- Semplificazione delle equazioni, per il problema in considerazione.

Ipotesi:

- problema stazionario:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ;
- direzione z omogenea (canale infinito in direzione z):  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ ;  
è invece ammesso il termine  $\frac{\partial P}{\partial z}$  (perchè?); inoltre esso è costante (perchè?);
- problema assialsimmetrico:  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ ;
- dall'incomprimibilità ... ;
- no forze di volume:  $\mathbf{f} = 0$ .

Grazie alle ipotesi fatte, le equazioni possono essere semplificate per ottenere:

$$\begin{cases} \mu \frac{1}{r} (ru'(r))' = G_P & r \in [0, R] \\ u(0) = \text{valore finito} \\ u(R) = 0 \end{cases} \quad (6.58)$$

dove il simbolo di derivata indica  $\frac{d}{dr}$  (non è nemmeno una derivata parziale poichè,  $u$  dipende solo da  $r$ ).

- Soluzione dell'equazione differenziale. Si integra due volte e si ottiene:

$$u(r) = \frac{G_P}{4\mu} r^2 + A \ln r + B \quad (6.59)$$

Imponendo le condizioni al contorno,  $A$  deve essere nullo per l'ipotesi di valore finito in  $r = 0$  ( $\ln$  tende a meno infinito quando  $r$  tende a zero). Imponendo la condizione di adesione a parete per  $r = R$ , si ottiene:

$$u(r) = \frac{G_P}{4\mu} (r^2 - R^2) \quad (6.60)$$

- Calcolo della portata: si integra la velocità sulla sezione (circolare !!!!!). Da questa relazione si ricava quindi il gradiente di pressione  $G_P$  (l'unica incognita).

$$Q = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R u(r) r dr d\theta = 2\pi \int_{r=0}^R u(r) r dr = -\frac{\pi}{8} \frac{G_P R^4}{\mu} \quad (6.61)$$

La differenza di pressione tra i due punti A e B (separati da una distanza  $l$ ) è quindi  $P_B - P_A = G_P l$ .

- Applicazione della legge di Stevino per ottenere il sistema risolvante:

$$\begin{cases} P_1 = P_A + \rho_f g H_0 & (\text{Stevino tra 1 e A}) \\ P_2 = P_B + \rho_f g (H_0 - \Delta h) & (\text{Stevino tra 2 e B}) \\ P_B = P_A + G_P l & (\text{relazione trovata dalla sln di NS}) \\ P_2 = P_1 - \rho_{Hg} g \Delta h & (\text{Stevino tra 1 e 2}) \end{cases} \quad (6.62)$$

Risolviendo il sistema, si trova che:

$$-G_P l = (\rho_{Hg} - \rho_f) g \Delta h \quad (6.63)$$

Esplicitando il legame tra  $G_P$  e  $\mu$ , si ottiene il risultato:

$$\Rightarrow \mu = \frac{\pi R^4}{8Ql} (\rho_{Hg} - \rho_f) g \Delta h \Rightarrow \mu = 6.36 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{ms} \quad (6.64)$$

- Bisogna calcolare ora  $\tau_w$ , la componente parallela alla parete dello sforzo a parete. Usando l'ultima forma dell'espressione della parte viscosa del vettore sforzo agente sul fluido (aiutandosi con le tabelle per le espressioni in coordinate cilindriche degli operatori differenziali):

$$\begin{aligned} s_n &= \mu [2(\hat{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{n} \times \nabla \times \mathbf{u}] = \\ &= \mu \left[ 2 \frac{\partial u_z}{\partial r} \hat{z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \hat{z} \right] = \\ &= \mu \frac{\partial u_z}{\partial r} \hat{z} \end{aligned} \quad (6.65)$$

---

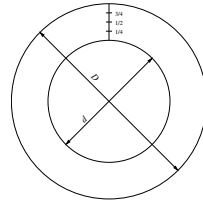
Ricordando che lo sforzo dovuto alla pressione è normale alla parete, il contributo che agisce sulla parete parallelo ad essa è:

$$\begin{aligned}\tau_w &= -\mu \frac{\partial u_z}{\partial r} \Big|_{r=R} = \\ &= \frac{1}{2} G_P R\end{aligned}\tag{6.66}$$

Si ottiene quindi il valore:

$$\tau_w = 31.05 N/m^2\tag{6.67}$$

**Esercizio 6.6 — Taylor-Couette: coppia sui cilindri.** Si consideri la corrente piana fra due cilindri coassiali di raggio  $R_1$  e  $R_2$ . Il cilindro esterno è fermo, mentre quello interno è messo in rotazione da un motore con curva caratteristica  $C(\Omega) = \alpha - \beta\Omega$ . Si determini il punto di equilibrio del sistema ( $\Omega$  costante). Si determini inoltre la pressione in corrispondenza del cilindro interno sapendo che la pressione in corrispondenza del cilindro esterno vale  $5 Pa$ . La densità del fluido è pari a  $1.225 \text{ kg/m}^3$ , che il diametro del cilindro interno è  $d = 0.1 \text{ m}$  e che il diametro del cilindro esterno è  $D = 0.16 \text{ m}$ . (...)



### Soluzione

**Concetti.** Soluzione esatte delle equazioni di Navier-Stokes. Corrente di Taylor-Couette.

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = f_r \\ \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho \left( \mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) - \mu \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = f_\theta \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_z - \mu \nabla^2 u_z + \frac{\partial p}{\partial z} = f_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (6.68)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \nabla b &= a_r \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial b}{\partial \theta} + a_z \frac{\partial b}{\partial z} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (6.69)$$

Scrittura del contributo viscoso del vettore sforzo come:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_n &= \mathbb{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu [\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu [2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}] \end{aligned} \quad (6.70)$$

**Svolgimento.** Il problema viene risolto calcolando prima le velocità angolari dei cilindri e successivamente la pressione.

- Calcolo delle velocità angolari dei cilindri. Nota la forma del campo di moto e le velocità in due punti a diversi raggi, è possibile calcolare  $\Omega_1, \Omega_2$  risolvendo un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite.

Il campo di moto tra due cilindri coassiali rotanti è:

$$u_\theta(r) = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} \quad (6.71)$$

*Osservazione.* La soluzione esatta di Taylor-Couette è facile da ricavare, se si ricorda che è la somma di una rotazione rigida e un vortice irrotazionale: imponendo la forma  $u_\theta = Ar + B/r$  e le condizioni al contorno, si ottiene la formula voluta.

Note le misure  $u_{\theta,1/4}$ ,  $u_{\theta,3/4}$ , il sistema risolvibile diventa:

$$\begin{bmatrix} -\frac{R_1^2}{R_2^2-R_1^2}r_{1/4} + \frac{R_2^2 R_2^2}{R_2^2-R_1^2} \frac{1}{r_{1/4}} & \frac{R_2^2}{R_2^2-R_1^2}r_{1/4} - \frac{R_2^2 R_2^2}{R_2^2-R_1^2} \frac{1}{r_{1/4}} \\ -\frac{R_1^2}{R_2^2-R_1^2}r_{3/4} + \frac{R_2^2 R_2^2}{R_2^2-R_1^2} \frac{1}{r_{3/4}} & \frac{R_2^2}{R_2^2-R_1^2}r_{3/4} - \frac{R_2^2 R_2^2}{R_2^2-R_1^2} \frac{1}{r_{3/4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{\theta,1/4} \\ u_{\theta,3/4} \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

La soluzione di Taylor-Couette può essere ricavata abbastanza facilmente semplificando le equazioni di Navier-Stokes scritte in coordinate cilindriche, dopo aver fatto le opportune ipotesi (quali?). Le componenti in direzione radiale e tangenziale dell'equazione della quantità di moto diventano:

$$\begin{cases} -\rho \frac{u_\theta^2}{r} + \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{u_\theta}{r^2} = 0 \end{cases} \quad (6.73)$$

dove  $P = P(r)$ ,  $u_\theta = u_\theta(r)$ . Le derivate parziali possono essere quindi trasformate in derivate ordinarie. La seconda equazione è disaccoppiata dalla prima e quindi può essere risolta, una volta imposte le condizioni al contorno. Trovato il campo di moto da questa equazione, la prima viene usata per calcolare il campo di pressione. La seconda equazione può essere riscritta come (svolgere le derivate per credere!)

$$\begin{cases} -\left(\frac{1}{r} (ru_\theta)'\right)' = 0 \\ u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1 \\ u_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r} \\ u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1 \\ u_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2 \end{cases} \quad \text{A,B from b.c.} \quad (6.74)$$

- Calcolo dello sforzo tangenziale a parete per determinare il puto di equilibrio del sistema. Si determina la componente tangenziale (quella che contribuisce alla coppia resistente) dello sforzo sul cilindro interno. Il contributo viscoso del vettore sforzo può essere scritto come:

$$\begin{aligned} s_n &= \mathbb{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu [\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \mu [2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{u}] = \\ &= \mu \left[ 2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} = \quad \text{VERIFICARE CON TABELLE PUBBLICATE} \\ &= \mu \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} = \quad (u_\theta = Ar + B/r) \\ &= -2\mu \frac{B}{r^2} \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \quad (6.75)$$

La parte tangenziale dello sforzo a parete sul cilindro interno è quindi  $\tau_w = 2\mu B/R_1^2$ . Integrando il prodotto tra vettore sforzo e raggio  $R_1$  sulla superficie laterale del cilindro si ottiene la coppia resistente. All'equilibrio, la coppia disponibile uguaglia quella resistente.

$$A R_1 \tau_w = (2\pi R_1 l) R_1 2\mu \frac{B}{R_1^2} \Omega = \alpha - \beta \Omega \quad (6.76)$$

o in simboli  $\gamma \Omega = \alpha - \beta \Omega$ , da cui  $\Omega = \alpha/(\beta + \gamma)$ .



- Calcolo della pressione. Una volta noto il campo di moto è possibile calcolare il campo di pressione:

$$P'(r) = \rho \frac{u_\theta^2}{r} \quad \text{con } P(R_2) = P_2. \quad (6.77)$$

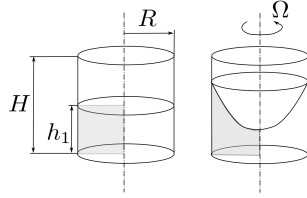
$$\int_P^{P_2} \frac{dP}{dr} dr = \int_r^{R_2} \rho \frac{1}{r} \left( Ar + \frac{B}{r} \right)^2 dr \quad (6.78)$$

Da questa si ricava

$$P(r) = P_2 - \rho \left[ \frac{1}{2} A^2 (R_2^2 - r^2) + 2AB \ln \frac{R_2}{r} - \frac{1}{2} B^2 \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right] \quad (6.79)$$

**Esercizio 6.7 — Recipiente rotante.** Un contenitore cilindrico (raggio  $R$ , altezza  $H$ ) è riempito fino ad una quota  $h_1 = H/2$  di un liquido di densità  $\rho$ . Il contenitore è messo poi in rotazione con velocità angolare costante  $\Omega$ . Una volta esaurito il transitorio, viene chiesto di trovare:

- la forma che assume il liquido all'interno del contenitore;
- la velocità  $\Omega_{max}$  alla quale il liquido inizia a uscire dal contenitore;
- il campo di pressione quando il corpo ruota con velocità angolare  $\Omega_{max}$ .



### Soluzione

**Concetti.** Soluzione esatte delle equazioni di Navier-Stokes. Fluido in rotazione rigida, con superficie superiore libera.

### Svolgimento.

- Si usano le equazioni di NS in coordinate cilindriche. Seguendo un procedimento analogo a quello svolto per ottenere la soluzione esatta di Taylor-Couette, ma senza trascurare l'effetto della gravità, si ottiene la seguente coppia di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \\ \frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{u_\theta^2}{r} \end{cases} \quad (6.80)$$

Il campo di moto descrive una rotazione rigida, poichè il termine  $1/r$  della soluzione di Taylor-Couette non è ammissibile (l'asse appartiene al dominio, non ha senso una velocità che tende all'infinito). La costante di proporzionalità tra  $u_\theta$  ed  $r$  è la velocità angolare  $\Omega$  per soddisfare le condizioni al contorno a parete,  $u_\theta(R) = \Omega R$ .

$$u_\theta(r) = \Omega r \quad (6.81)$$

Dall'integrazione delle due equazioni (6.80) si ottiene il campo di pressione  $P(r, z)$ , a meno di una costante di integrazione  $C$

$$P(r, z) = -\rho g z + \rho \frac{\Omega^2 r^2}{2} + C \quad (6.82)$$

La condizione al contorno necessaria è  $P(r, z_{free}(r)) = P_a$ ; sulla superficie libera, la cui quota è descritta dalla funzione  $z_{free}(r)$  (ancora incognita), agisce la pressione ambiente  $P_a$

$$P(r, z_{free}(r)) = -\rho g z_{free} + \rho \frac{\Omega^2 r^2}{2} + C = P_a \quad (6.83)$$

$\Downarrow$

$$z_{free}(r) = \frac{\Omega^2 r^2}{2g} - \frac{P_a - C}{\rho g} \quad (6.84)$$

Per determinare la costante  $C$  bisogna ricorrere alla conservazione della massa. La massa contenuta all'interno del recipiente non varia (fino a quando il liquido non esce). Se si considera densità costante  $\rho$ , bisogna scrivere la conservazione del volume tra istante iniziale  $V_0 = \pi R^2 H/2$  e condizione a regime  $V$ . Il volume  $V$  viene calcolato tramite un'integrale di volume, comodo da descrivere in coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \int_{z=0}^{z=z_{free}(r)} r dr dz d\theta = \\
 &= 2\pi \int_{r=0}^R z_{free}(r) r dr = \\
 &= 2\pi \int_{r=0}^R \left( \frac{\Omega^2 r^3}{2g} - \frac{P_a - C}{\rho g} r \right) dr = \\
 &= 2\pi \left[ \frac{\Omega^2 R^4}{8g} - \frac{(P_a - C)}{2\rho g} R^2 \right] = \\
 &= \pi \left[ \frac{\Omega^2 R^4}{4g} - \frac{(P_a - C)}{\rho g} R^2 \right] =
 \end{aligned} \tag{6.85}$$

Uguagliando  $V_0$  e  $V$  si ottiene

$$-\frac{(P_a - C)R}{\rho g} = -\frac{\Omega^2 R^4}{4g} + R^2 \frac{H}{2} \tag{6.86}$$

termine che può essere sostituito in (6.84)

$$z_{free}(r) = \frac{\Omega^2 r^2}{2g} - \frac{\Omega^2 R^2}{4g} + \frac{H}{2} \tag{6.87}$$

La superficie libera ha la forma di un paraboloide. La concavità del paraboloide è diretta verso l'alto e aumenta all'aumentare di  $|\Omega|$  (il risultato è indipendente dal verso di rotazione, e quindi dal segno di  $\Omega$ , poichè compare con potenze pari). La quota del vertice  $z_v = -\frac{\Omega^2 R^2}{4g} + \frac{H}{2}$  invece diminuisce.

- Per determinare la  $\Omega_{max}$ , bisogna imporre la condizione  $z_{free}(r = R) = H$ .

$$z_{free}(R) = \frac{\Omega_{max}^2 R^2}{4g} + R^2 \frac{H}{2} = H \Rightarrow \Omega_{max} = \sqrt{\frac{2gH}{R^2}} \tag{6.88}$$

- Per ottenere il campo di pressione, basta inserire il valore di  $C$  e  $\Omega_{max}$  nella formula (6.82).

## 7. Similitudine

**Esercizio 7.1 — Similitudine ad alta velocità: missile.** Un missile vola alla quota di 7000 m, dove la densità dell'aria è  $\rho = 0.59 \text{ kg/m}^3$  e la sua temperatura è  $T = -30.45^\circ\text{C}$ , alla velocità costante  $V_v = 505 \text{ km/h}$ .

Determinare:

- il fattore di scala geometrico  $\lambda = L_m/L_v$ ,
- la velocità dell'aria  $V_m$ ,

necessari per riprodurre correttamente i coefficienti aerodinamici del missile in una galleria del vento che operi a condizioni atmosferiche standard ( $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ ,  $p = 101325 \text{ Pa}$ ,  $T = 15^\circ\text{C}$ ).

( $V_m = 152.8 \text{ m/s}$ ,  $\lambda = 0.507$ )

### Soluzione

**Concetti.** Similitudine fluidodinamica. Numero di Reynolds. Numero di Mach. Formula di Sutherland.

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} \quad M = \frac{U}{c} \quad (7.1)$$

$$\mu(T) = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \frac{C + T_0}{C + T} \quad (7.2)$$

**Svolgimento.** Il problema dell'esercizio è caratterizzato da due numeri adimensionali, il numero di Reynolds  $Re$  e il numero di Mach  $M$ . Per ottenere la similitudine tra problema reale e quello modellato (di dimensioni ridotte) è necessaria la similitudine geometrica e l'uguaglianza dei due numeri adimensionali. Se si fa l'ipotesi di gas ideale perfetto, la velocità del suono può essere scritta in funzione della sola variabile termodinamica

temperatura  $c = \sqrt{\gamma RT}$ , con  $\gamma$  rapporto dei calori specifici a pressione e volume costanti,  $R$  costante universale del gas ( $R = \mathcal{R}/M_m$ ).

$$\begin{cases} M_1 = M_2 \\ Re_1 = Re_2 \end{cases} \quad (7.3)$$

cioè

$$\begin{cases} \frac{V_v}{\sqrt{\gamma RT_v}} = \frac{V_m}{\sqrt{\gamma RT_m}} \\ \frac{\rho_v V_v L_v}{\mu(T_v)} = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu(T_m)} \end{cases} \quad (7.4)$$

Risolvendo il sistema per le incognite:

$$\Rightarrow \begin{cases} V_m = V_v \sqrt{\frac{T_m}{T_v}} \\ \lambda = \frac{L_m}{L_v} = \frac{\rho_v}{\rho_m} \sqrt{\frac{T_v}{T_m}} \frac{\mu(T_m)}{\mu(T_v)} \end{cases} \quad (7.5)$$

Per trovare i valori di viscosità dinamica si usa la formula di Sutherland: per l'aria i coefficienti sono  $T_0 = 288K$ ,  $C = 110.4K$ . Si ottengono i valori numerici  $V_m = 152.8m/s$ ,  $\lambda = 0.507$ .

*Osservazioni.* Non è sempre possibile imporre l'uguaglianza di  $Re$  e  $M$ . Si pensi ad esempio a un'applicazione in aria in condizioni standard e prove sul modello in galleria ad aria in condizioni standard. Per ottenere l'uguaglianza dei numeri di Mach, bisogna avere la stessa velocità caratteristica (poichè la celerità del suono è la stessa tra condizione reale e modello). Avendo uguagliato le velocità caratteristiche ed essendo uguali le variabili termodinamiche  $\rho$  e  $\mu$ , si ottiene l'uguaglianza della dimensione caratteristica del modello. Questo significa avere un modello a dimensioni originali. Per limiti tecnologici, dovuti alle dimensioni degli apparati sperimentali, spesso è necessario utilizzare un modello in scala dell'originale.

Per quale numero adimensionale conviene ottenere la similitudine? Arte, esperienza e cucina sperimentale.

**Esercizio 7.2 — Similitudine ad alta velocità: velivolo.** Un aeromobile vola nell'alta atmosfera a velocità costante  $V_v = 252 \text{ m/s}$ , in condizioni di densità  $\rho_v$  e temperatura  $T_v$  assegnate:  $\rho_v = 0.424 \text{ kg/m}^3$ ,  $T_v = -50.3^\circ\text{C}$ .

Determinare la velocità, la densità e la pressione dell'aria da utilizzarsi in una galleria del vento pressurizzata che operi alla temperatura di  $15^\circ\text{C}$  per ottenere la similitudine dinamica corretta con un modello in scala ridotta  $\lambda = 0.2$ .

$$(V_m = 286.6 \text{ m/s}, \rho_m = 2.292 \text{ kg/m}^3, p_m = 189560 \text{ Pa}) \quad \blacksquare$$

#### Soluzione

**Concetti.** Similitudine fluidodinamica. Numero di Reynolds. Numero di Mach. Formula di Sutherland.

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} \quad M = \frac{U}{c} \quad (7.6)$$

$$\mu(T) = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \frac{C + T_0}{C + T} \quad (7.7)$$

**Svolgimento.** Il problema dell'esercizio è caratterizzato da due numeri adimensionali, il numero di Reynolds  $Re$  e il numero di Mach  $M$ . Per ottenere la similitudine tra problema reale e quello modellato (di dimensioni ridotte) è necessaria la similitudine geometrica e l'uguaglianza dei due numeri adimensionali. Se si fa l'ipotesi di gas ideale perfetto, la velocità del suono può essere scritta in funzione della sola variabile termodinamica temperatura  $c = \sqrt{\gamma R T}$ , con  $\gamma$  rapporto dei calori specifici a pressione e volume costanti,  $R$  costante universale del gas ( $R = \mathcal{R}/M_m$ ).

$$\begin{cases} M_1 = M_2 \\ Re_1 = Re_2 \end{cases} \quad (7.8)$$

cioè

$$\begin{cases} \frac{V_v}{\sqrt{\gamma R T_v}} = \frac{V_m}{\sqrt{\gamma R T_m}} \\ \frac{\rho_v V_v L_v}{\mu(T_v)} = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu(T_m)} \end{cases} \quad (7.9)$$

Risolviendo il sistema per le incognite:

$$\Rightarrow \begin{cases} V_m = V_v \sqrt{\frac{T_m}{T_v}} \\ \rho_m = \frac{1}{\lambda} \rho_v \sqrt{\frac{T_v}{T_m}} \frac{\mu(T_m)}{\mu(T_v)} \\ P_m = \rho_m R T_m = \frac{1}{\lambda} \frac{\mu(T_m)}{\mu(T_v)} \rho_v R \sqrt{T_v T_m} \end{cases} \quad (7.10)$$

Per trovare i valori di viscosità dinamica si usa la formula di Sutherland: per l'aria i coefficienti sono  $T_0 = 288\text{K}$ ,  $C = 110.4\text{K}$ .

**Esercizio 7.3 — Similitudine a bassa velocità: sottomarino.** La velocità di pattugliamento di un sottomarino vale  $V_v = 2.5 \text{ m/s}$ . Considerando che il sottomarino si muova in acqua in condizioni standard, a quale velocità deve essere provato un modello in scala  $\lambda = 1/10$ , avendo a disposizione rispettivamente:

- una galleria ad acqua in condizioni standard,
- una galleria ad aria a pressione di 10 bar e temperatura di  $30^\circ \text{C}$ ?

Se la resistenza al vero vale  $D_v = 6000 \text{ N}$ , quanto vale la resistenza sui modelli in scala nei due casi?

(Galleria ad aria:  $V_m = 35.17 \text{ m/s}$ ,  $D_m = 136.1 \text{ N}$ . Galleria ad acqua:  $V_m = 25 \text{ m/s}$ ,  $D_m = 6000 \text{ N}$ .)

#### Soluzione

**Concetti.** Similitudine fluidodinamica. Numero di Reynolds. Formula di Sutherland.

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} \quad (7.11)$$

$$\mu(T) = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \frac{C + T_0}{C + T} \quad (7.12)$$

**Svolgimento.** La velocità sul modello si trova tramite l'uguaglianza dei numeri di Reynolds. Per trovare la viscosità dell'aria viene utilizzata la formula di Sutherland (per l'aria i coefficienti sono  $T_0 = 288 \text{ K}$ ,  $C = 110.4 \text{ K}$ ,  $\mu_0 = 18.27 \mu \text{Pas}$ ).

$$\frac{\rho_v V_v L_v}{\mu_v} = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} \Rightarrow V_m = V_v \frac{\rho_v L_v}{\rho_m L_m} \frac{\mu_m}{\mu_v} \quad (7.13)$$

La forza agente sul corpo è:

$$\begin{aligned} \oint_S -p \hat{n} + \mu [\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}] \cdot \hat{n} &= \oint_S -P p^* \hat{n} + \frac{\mu U}{L} [\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*] \hat{n} = \quad (P = \rho U^2, dS = L^2 dS^*) \\ &= \rho U^2 L^2 \oint_{S^*} -p^* \hat{n} + \frac{1}{Re} [\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*] \hat{n} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Nel caso della galleria ad acqua, le densità e le viscosità sono uguali; avendo imposto l'uguaglianza del numero di Reynolds,  $U_m L_m = U_v L_v$ , quindi la forza agente sul modello è uguale a quella agente sul corpo vero.

Nel caso della galleria ad aria, la forza agente sul modello si ricava come:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_a = \rho_a U_m^2 L_m^2 f_{S^*} \dots \\ \mathbf{F}_v = \rho U^2 L^2 f_{S^*} \dots \end{cases} \Rightarrow \mathbf{F}_a = \mathbf{F}_v \frac{\rho_a U_m^2}{\rho U^2} \lambda^2 \quad (7.15)$$

**Esercizio 7.4 — Getto: codice numerico adimensionale.** Si vuole studiare con la corrente di aria che esce da un ugello verticale di diametro  $\bar{D} = 0.01\text{ m}$ , nell'intervallo di velocità di riferimento  $\bar{U} \in [1, 10]\text{ m/s}$ . Si ha a disposizione un codice numerico che risolve le equazioni in forma adimensionale, in cui non è possibile variare le condizioni al contorno, e una sola griglia di calcolo. Si chiede di:

- determinare l'intervallo di numeri di Reynolds  $Re$  da inserire nel codice, sapendo che la velocità di riferimento nel codice è  $U = 1$  e il diametro nella griglia vale  $D = 1$ .
- la frequenza  $\bar{f}$  di rilascio di vortici quando  $\bar{U} = 1\text{ m/s}$ , sapendo che la frequenza estratta dai risultati numerici è  $f = 0.2$ ;
- stimare l'errore compiuto dal codice nel trascurare l'effetto della gravità.

### Soluzione

**Concetti.** Similitudine fluidodinamica. Numeri di Reynolds e Froude. Ordini di grandezza dei termini.

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} \quad , \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}} \quad (7.16)$$

### Svolgimento.

- Affinchè le simulazioni numeriche siano rappresentative della corrente incomprimibile che si vuole studiare, è necessario che ci sia similitudine fluidodinamica tra i due casi: bisogna imporre l'uguaglianza dei numeri di Reynolds

$$Re = \frac{\bar{U} \bar{D}}{\bar{\nu}} \approx \frac{(1 \div 10)\text{m/s} \times 10^{-2}\text{m}}{10^{-5}\text{m}^2/\text{s}} = 10^3 \div 10^4 \quad (7.17)$$

- Se la frequenza adimensionale ottenuta dalla simulazione numerica è  $f = 0.2$ , la frequenza dimensionale viene ottenuta dall'uguaglianza dei numeri di Strouhal, cioè "dimensionalizzando"  $f$  con le grandezze di riferimento usate per l'adimensionalizzazione  $(U, L, \rho)$ .

$$\frac{fD}{U} = \frac{\bar{f}\bar{D}}{\bar{U}} \quad \Rightarrow \quad \bar{f} = f \frac{\bar{U}}{\bar{D}} = 0.2 \times \frac{1\text{m/s}}{10^{-2}\text{m}} = 20\text{s}^{-1} \quad (7.18)$$

- Per quantificare l'effetto della gravità, si calcola il valore del numero di Froude. Nelle equazioni di Navier-Stokes adimensionali, compare il numero adimensionale  $gD/U^2 = 1/Fr^2$  davanti ai termini di forze di volume. Più questo numero è "piccolo", più gli effetti delle forze di volume sono ridotti.

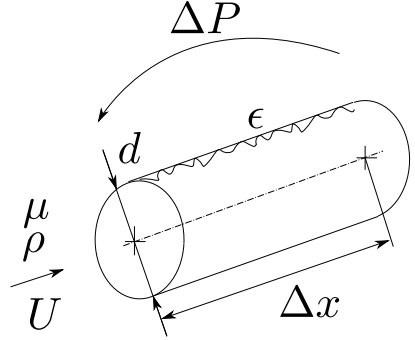
$$\begin{cases} U = 1\text{m/s} & : & 1/Fr^2 \approx 10^{-1} \\ U = 10\text{m/s} & : & 1/Fr^2 \approx 10^{-3} \end{cases} \quad (7.19)$$



**Esercizio 7.5 — Gradiente di pressione in tubi cilindrici.** Si deve progettare un condotto che trasporti un fluido con densità  $\rho_1$  e viscosità  $\mu_1$ , di diametro  $d_1$  e lunghezza  $L_1$ . Si suppone che la rugosità della superficie interna del condotto possa essere descritta interamente dall'altezza media  $\epsilon_1$  delle asperità. Il condotto deve garantire una portata massica  $Q_1$ . Viene realizzato un modello in scala  $\lambda = d_2/d_1$  del condotto di lunghezza  $L_2$ , nel quale viene fatto scorrere lo stesso fluido alle stesse condizioni termodinamiche. Si chiede di determinare:

- la finitura superficiale della superficie interna del modello, in termini di dimensione caratteristica della rugosità  $\epsilon_2$ ;
- la velocità media di prova  $U_2$ ;
- la differenza di pressione da imporre alle estremità del condotto al vero, conoscendo che la differenza di pressione  $\Delta P_2$  misurata in laboratorio.

Si supponga il fluido incomprimibile. ■



#### Soluzione

**Concetti.** Teorema di Buckingham. Similitudine fluidodinamica.

**Svolgimento.** Il problema è caratterizzato dal fluido utilizzato, dalla geometria del condotto e dal gradiente di pressione necessario a garantire la portata desiderata. Si può scrivere in maniera implicita

$$f\left(\frac{\Delta P}{\Delta x}, U, \rho, \mu, d, \epsilon\right) = 0 \quad (7.20)$$

avendo scelto come grandezza fisica caratteristica del problema il gradiente di pressione  $\frac{\Delta P}{\Delta x}$  e non il salto di pressione e la lunghezza del tubo prese indipendentemente. Il teorema di Buckingham garantisce che il problema può essere caratterizzato da 3 numeri adimensionali (6 grandezze fisiche - 3 grandezze fondamentali (M,L,T)). Se si scelgono  $\rho$ ,  $U$ ,  $d$  come grandezze di riferimento, si possono costruire i tre numeri adimensionali come

$$\pi_1 = \frac{\Delta P}{\Delta x} \frac{d}{\rho U^2} = f_D \quad \pi_2 = \frac{\mu}{\rho U d} = 1/Re \quad \pi_3 = \frac{\epsilon}{d} = \epsilon' \quad (7.21)$$

Il problema può essere quindi scritto in forma implicita come:

$$g(f_D, Re, \epsilon') = 0. \quad (7.22)$$

Esplicitando  $f_D$ :

$$f_D = h(Re, \epsilon') \quad \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{\rho U^2}{d} f_D(Re, \epsilon'). \quad (7.23)$$

Affinchè sia verificata la similitudine fluidodinamica, ci deve essere l'uguaglianza dei numeri di Reynolds  $Re$  e delle rugosità adimensionalizzate  $\epsilon'$ .

- Dall'uguaglianza delle rugosità adimensionalizzate

$$\epsilon'_1 = \epsilon'_2 =: \epsilon' \Rightarrow \epsilon_2 = \epsilon_1 \frac{d_2}{d_1} = \lambda \epsilon_1. \quad (7.24)$$

Per il modello è quindi necessaria una lavorazione che garantisca una finitura superficiale migliore rispetto al condotto al vero ( $\lambda \leq 1$ ).

- La velocità media al vero  $U_1$  viene ricavata grazie alla richiesta dell'aportata desiderata.

$$U_1 = \frac{Q}{\rho_4 \pi d_1^2} \quad (7.25)$$

Per ottenere la similitudine fluidodinamica si impone l'uguaglianza dei numeri di Reynolds

$$Re_1 = Re_2 =: Re \Rightarrow U_2 = U_1 \frac{\rho_1 d_1 \nu_2}{\rho_2 d_2 \nu_1} = U_1 \frac{d_1}{d_2} \quad (7.26)$$

poichè la densità e la viscosità del fluido “di prova” sono le stesse di quelle del fluido “al vero”.

- Il rapporto tra la differenza di pressione  $\Delta P_2$  misurata sul condotto modello e la lunghezza del condotto modello  $L_2$  permette di stimare il gradiente di pressione  $\left. \frac{\Delta P}{\Delta x} \right|_2 = \frac{\Delta P_2}{L_2}$ . Sfruttando ancora una volta la similitudine fluidodinamica

$$\begin{cases} \frac{\Delta P_2}{L_2} = \frac{\rho_2 U_2^2}{d_2} f_D(Re, \epsilon') \\ \frac{\Delta P_1}{L_1} = \frac{\rho_1 U_1^2}{d_1} f_D(Re, \epsilon') \end{cases} \Rightarrow \Delta P_1 = \Delta P_2 \frac{\rho_1 U_1^2}{\rho_2 U_2^2} \frac{d_2}{d_1} \frac{L_1}{L_2} \quad (7.27)$$

Dall'uguaglianza delle densità  $\rho_1/\rho_2 = 1$ ; dall'uguaglianza dei numeri di Reynolds (e delle densità e viscosità)  $U_1^2/U_2^2 = d_2^2/d_1^2$ . La formula può quindi essere semplificata

$$\Delta P_1 = \Delta P_2 \frac{d_2^3}{d_1^3} \frac{L_1}{L_2} = \Delta P_2 \lambda^3 \frac{L_1}{L_2} \quad (7.28)$$

#### Diagramma di Moody.

Il diagramma di Moody riporta il coefficiente  $f_D$  in funzione del numero di  $Re$  e della rugosità del tubo. Si possono individuare due regimi estremi del problema. Per “basse velocità” (o meglio, bassi numeri di Reynolds), si può intuire che gli effetti della viscosità prevalgano sugli effetti inerziali; inoltre, gli effetti della rugosità sono minimi. Si può quindi pensare che il problema sia indipendente dalla densità del fluido e dalla rugosità del tubo e descrivibile in forma implicita come

$$f_L(\Delta P/\Delta x, \mu, U, d) = 0 \quad (7.29)$$

Si può descrivere il problema solo con un numero adimensionale. Scegliendo  $\mu$ ,  $U$ ,  $d$  come grandezze di riferimento, si può scrivere

$$\pi_{1,L} = \frac{\Delta P}{\Delta x} \frac{d^2}{\mu U} \quad (7.30)$$

Il problema può essere scritto in forma implicita  $g_L(\pi_{1,L}) = 0$ . Poichè la funzione  $g_L$  dipende solo dal coefficiente  $\pi_{1,L}$ , il coefficiente  $\pi_{1,L}$  deve essere costante. Il gradiente di pressione può essere scritto

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = \pi_{1,L} \frac{\mu U}{d^2} = \frac{\rho U^2}{d} f_D \quad (7.31)$$

avendo usato la definizione di  $f_D$  introdotta nell'equazione (7.21). È quindi possibile stimare l'andamento del coefficiente  $f_D$ , per bassi numeri di Reynolds, invertendo l'equazione precedente. Si scopre che il coefficiente  $f_D$  è inversamente proporzionale al numero di Reynolds.

$$f_D = \pi_{1,L} \frac{\mu}{\rho U d} = \pi_{1,L} \frac{1}{Re} \quad (7.32)$$

Per bassi numeri di Reynolds, il parametro  $f_D$  in funzione di  $Re$  mostra un andamento lineare in un diagramma con assi logaritmici, a conferma della correttezza della stima appena svolta.

Si può ragionare in maniera analoga per il regime di moto estremo opposto, dove gli effetti della viscosità sono trascurabili. Si scopre che il coefficiente  $f_D$  è funzione solo della rugosità adimensionale  $\epsilon$ , mentre non dipende dal numero di Reynolds. Per alti numeri di Reynolds, il parametro  $f_D$  è descritto da curve che tendono a un valore costante, che dipende dal valore della rugosità adimensionale  $\epsilon'$ .

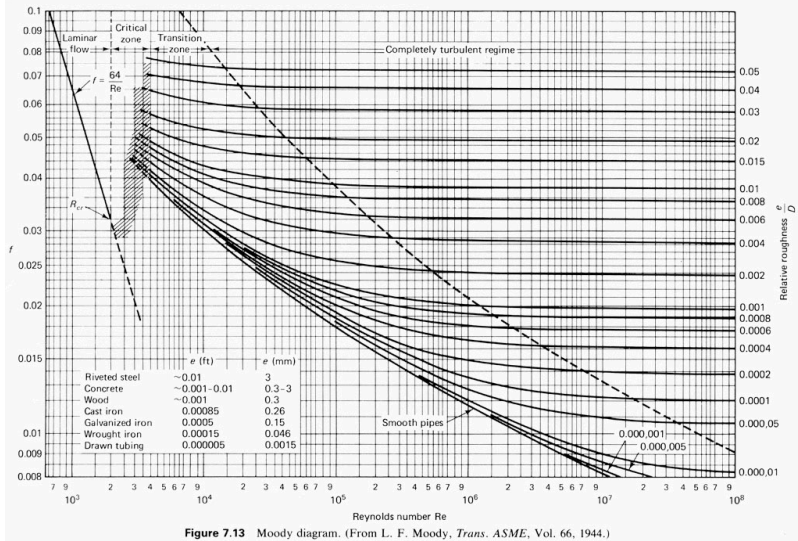
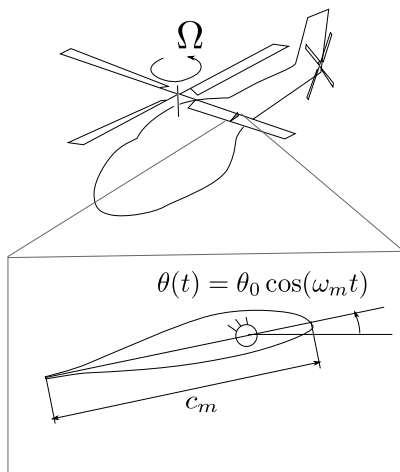


Figure 7.13 Moody diagram. (From L. F. Moody, *Trans. ASME*, Vol. 66, 1944.)

**Esercizio 7.6 — Profilo oscillante.** L'obiettivo di una prova in galleria è lo studio del campo di moto attorno a una pala di elicottero, in particolare attorno alla sezione che si trova a metà della lunghezza della pala,  $R_v = 6.85 \text{ m}$ . Il rotore dell'elicottero ruota con una velocità angolare  $\Omega_v$ , tale da avere una velocità  $U_{tip} = 200 \text{ m/s}$  (per evitare il regime supersonico). La corda della pala nella sezione analizzata è  $c_v = 0.30 \text{ m}$ . Il modello di galleria a circuito aperto è costituito da una superficie alare, incernierata su un asse perpendicolare alla direzione del vento di galleria, in corrispondenza dell'asse "di comando del passo". Sapendo che la massima velocità raggiungibile nell'impianto utilizzato è  $U_m = 50 \text{ m/s}$ , si chiede di determinare:

- la corda del modello  $c_m$ , per ottenere la similitudine in  $Re$  e di commentare gli effetti di comprimibilità;
- la frequenza di oscillazione  $\omega_m$  da imporre al profilo per simulare il cambio di incidenza dovuti ai comandi di passo collettivo e ciclico;
- una stima della potenza dell'impianto necessaria a svolgere la prova, conoscendo le dimensioni della camera di prova rettangolare,  $b = 1.5 \text{ m}$ ,  $h = 1.0 \text{ m}$ .



### Soluzione

**Concetti.** Similitudine fluidodinamica. Comando elicottero. Stima potenza galleria del vento.

### Svolgimento.

- Per ottenere la similitudine in  $Re$ , è necessario uguagliare i numeri di Reynolds ottenuti con le grandezze dimensionali caratteristiche del problema. La lunghezza di riferimento è la corda. La velocità di riferimento è la velocità che investe il profilo della pala considerato; nella prova di galleria è la velocità di galleria  $U_m$ , nella realtà è la velocità relativa dovuta alla rotazione della pala (alla quale deve essere sovrapposto il moto dell'elicottero, in caso di avanzamento, qui ipotizzato nullo):  $U_v = \Omega R_v/2 = U_{tip}/2$ . Il fluido è sempre aria.

$$\frac{U_v c_v}{\nu} = \frac{U_m c_m}{\nu} \Rightarrow c_m = \frac{U_{tip}}{2 U_m} c_v = 0.60 \text{ m} \quad (7.33)$$

In questo esempio, per avere similitudine in  $Re$  serve un modello con una corda maggiore della corda reale.

Gli effetti di comprimibilità possono essere valutati calcolando il numero di Mach. Il numero di Mach per la sezione di pala considerata nella realtà è  $M_v \approx 100/340 \approx 0.3$ , limite convenzionale per potere trascurare gli effetti di comprimibilità. Per la prova in galleria  $M_m \approx 0.15$ .

- Il comando di passo ciclico è periodico e armonico con frequenza  $\Omega_v = U_{tip}/R_v = 29.19 \text{ s}^{-1}$ . Per essere in similitudine con la realtà è necessario avere uguaglianza dei numeri di Strouhal (o *frequenze ridotte*, indicate da strutturisti e aeroelastici con  $k$ ).

$$\frac{\Omega c_v}{U_v} = \frac{\omega_m c_m}{U_m} \Rightarrow \omega_m = \Omega \frac{c_v}{c_m} \frac{U_m}{U_v} = \Omega \left( \frac{U_m}{U_v} \right)^2 \quad (7.34)$$

- In un impianto a galleria aperta si può ricavare la formula per la stima della potenza necessaria da un bilancio integrale di energia cinetica

$$P \approx \frac{1}{2} \rho U^3 A \quad (7.35)$$

## 8. Aerodinamica

**Esercizio 8.1 — Potenziale cinetico e funzione di corrente.** Si consideri la corrente a potenziale piana e stazionaria descritta in un sistema di riferimento Cartesiano  $(x, y)$  dalla funzione potenziale cinetico  $\phi(x, y)$ :

$$\phi(x, y) = 5(x^2 - y^2) + 2x - 4y.$$

Si richiede di:

- derivare l'espressione analitica delle componenti in  $x$  e in  $y$  del campo di velocità;
- verificare che la corrente sia incomprimibile e irrotazionale;
- derivare l'espressione analitica della funzione di corrente  $\psi(x, y)$ ;
- calcolare la portata volumetrica per unità di apertura  $q$  che scorre attraverso il segmento congiungente l'origine del piano con il punto di coordinate  $(1, 1)$ ;

$$(u_x = 10x + 2, u_y = -10y - 4, \psi(x, y) = 10xy + 2y + 4x + \text{const.}, q = 16) \quad \blacksquare$$

### Soluzione

**Concetti.** Legame tra potenziale e velocità. Funzione di corrente per problemi 2D incomprimibili.

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad \begin{cases} u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (8.1)$$

### Svolgimento.

- Calcolo delle componenti della velocità.

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 10x + 2 \\ u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -10y - 4 \end{cases} \quad (8.2)$$

- Verificare che la corrente sia incomprimibile e irrotazionale.
  - Irrotazionalità ( $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ ). Verifica tramite l'identità vettoriale  $\nabla \times \nabla \phi = 0$ , oppure con il calcolo diretto.

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times ((10x+2)\hat{\mathbf{x}} + (-10y-4)\hat{\mathbf{y}}) = \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} = 0 \quad (8.3)$$

- Incomprimibilità ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ). Dal calcolo diretto  $\partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial y^2 = 10 - 10 = 0$ .
- La corrente è incomprimibile, quindi si può definire la funzione di corrente. Usando la definizione della funzione di corrente, integrando, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_x & \Rightarrow \psi = 10xy + 2y + f(x) \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = -u_y & \Rightarrow \psi = 10xy + 4x + g(y) \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$\psi = 10xy + 2y + 4x + c \quad (8.5)$$

- Calcolo della portata.

$$Q = \int_{\gamma} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{\gamma} (u_x n_x + u_y n_y) = \int_{\gamma} (u_x t_y - u_y t_x) = \int_{\gamma} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} t_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} t_y \right) = \psi(1,1) - \psi(0,0) = 16 \quad (8.6)$$

**Esercizio 8.2 — Doppietta.** Trovare il campo di moto generato da una doppietta. Sovrapporre ad esso una corrente uniforme con velocità asintotica lungo  $x$ , per trovare la corrente attorno al cilindro: stabilire il legame tra l'intensità della doppietta, la velocità asintotica e il raggio del cilindro. ■

### Soluzione

**Concetti.** Soluzioni elementari dell'equazione di Laplace. Sovrapposizione di soluzioni elementari. Doppietta. Corrente attorno al cilindro.

**Svolgimento.** Dopo aver ricordato la definizione di doppietta, si calcolano il campo di moto e il potenziale cinetico da essa generato. Fatto questo, si sommano gli effetti della corrente indisturbata e si trovano le condizioni in cui esiste un raggio  $a$  (il raggio del cilindro) per il quale si annulla la velocità normale per ogni  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

- Definizione di doppietta ed equazioni. Per  $d$  finito:

$$\begin{aligned}\phi &= \phi^+ + \phi^- = \\ &= \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2} - \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2} = \\ &= \frac{q}{4\pi} \ln \frac{(x - d/2)^2 + y^2}{(x + d/2)^2 + y^2}\end{aligned}\quad (8.7)$$

Facendo tendere  $d \rightarrow 0$  in modo tale che  $qd = \mu$  sia finito e diverso da zero, sfruttando  $\ln(1+x) \sim x$  per  $x \rightarrow 0$ :

$$\frac{q}{4\pi} \ln \frac{(x - d/2)^2 + y^2}{(x + d/2)^2 + y^2} = \frac{q}{4\pi} \ln \left[ 1 - \frac{2xd}{(x + d/2)^2 + y^2} \right] \sim -\frac{qd}{2\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2)} \quad (8.8)$$

Quindi, il potenziale cinetico della doppietta espresso in coordinate cartesiane e cilindriche è:

$$\phi = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2)} = -\frac{\mu}{2\pi r} \cos \theta \quad (8.9)$$

Le componenti cartesiane della velocità sono:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{r^2} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{r^2} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\sin(2\theta)}{r^2} \end{cases} \quad (8.10)$$

Quelle cilindriche:

$$\begin{cases} u_r = u \cos \theta + v \sin \theta = \frac{\mu}{2\pi r^2} [\cos(2\theta) \cos \theta + \sin(2\theta) \sin \theta] = \frac{\mu}{2\pi r^2} \cos \theta \\ u_\theta = -u \sin \theta + v \cos \theta = \frac{\mu}{2\pi r^2} [-\cos(2\theta) \sin \theta + \sin(2\theta) \cos \theta] = \frac{\mu}{2\pi r^2} \sin \theta \end{cases} \quad (8.11)$$

- Si sovrappone alla soluzione appena trovata, quella della corrente uniforme

$$\begin{cases} u_r = \left( U_\infty + \frac{\mu}{2\pi r^2} \right) \cos \theta \\ u_\theta = \left( -U_\infty + \frac{\mu}{2\pi r^2} \right) \sin \theta \end{cases} \quad (8.12)$$

- Si impongono le condizioni al contorno  $u_r(a, \theta) = 0, \theta \in [0, 2\pi]$ , per trovare il legame tra il raggio del cilindro  $a$ , la velocità asintotica  $U_\infty$  e l'intensità della doppietta  $\mu$ .

$$0 = u_r(a, \theta) = \left( U_\infty + \frac{\mu}{2\pi a^2} \right) \cos \theta \Rightarrow \frac{\mu}{2\pi} = -a^2 U_\infty \quad (8.13)$$



- Si ricostruisce infine la soluzione (alla quale è immediato sommare un eventuale vortice nel centro del cilindro) del flusso potenziale all'esterno del cilindro:

$$\begin{cases} u_r = U_\infty \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ u_\theta = -U_\infty \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \end{cases} \quad (8.14)$$

**Esercizio 8.3 — Corrente attorno al cilindro.** Una corrente piana con velocità asintotica  $U_\infty = 10 \text{ m/s}$  investe un profilo circolare di raggio  $a = 0.1 \text{ m}$ . Determinare il valore di circolazione  $\Gamma$  affinché nel punto sulla superficie del cilindro posto a  $\theta = \pi/3$  la velocità aumenti fino al valore  $2U_\infty$  in modulo.  
( $\Gamma = -1.68 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $23.45 \text{ m}^2/\text{s}$ ) ■

### Soluzione

**Concetti.** Flusso non viscoso 2D, incomprimibile e irrotazionale attorno al cilindro. Circolazione

**Svolgimento.** Una volta scritte (come si ricavano?) le componenti della velocità nel campo di moto, si impongono le condizioni richieste dal problema per determinare il valore di circolazione necessario.

$$\begin{cases} u_r(r, \theta) = U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta \\ u_\theta(r, \theta) = -U_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases} \quad (8.15)$$

Si impongono ora le condizioni del problema. Sulla superficie del cilindro la componente radiale è nulla (condizioni al contorno). Quindi:

$$|u(a, \theta)| = |u_\theta(a, \theta)| = \left| -2U_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right| \quad (8.16)$$

E quindi

$$\begin{aligned} 2U_\infty &= \left| -2U_\infty \sin \frac{\pi}{3} + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right| \\ \pm 2U_\infty &= -2U_\infty \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\Gamma}{2\pi a} \end{aligned} \quad (8.17)$$

$$\Rightarrow \Gamma = 2\pi a U_\infty (\sqrt{3} \pm 2)$$

$$\Rightarrow \Gamma = \begin{cases} -1.684 \text{ m}^2/\text{s} \\ 23,449 \text{ m}^2/\text{s} \end{cases} \quad (8.18)$$

**Esercizio 8.4 — Corrente attorno al cilindro.** Una corrente piana con velocità asintotica orizzontale (parallela all'asse  $x$ )  $U_\infty = 1$  viene perturbata introducendo nell'origine del piano un vortice in modo tale da accelerare la corrente nel semipiano superiore e rallentarla in quello inferiore per valori positivi di  $\Gamma$ . Determinare la circolazione necessaria ad ottenere una differenza di componente  $x$  della velocità pari a 1 tra i due punti di coordinate (polari)  $R = 1$  e  $\theta = \pm\pi/2$ . ( $\Gamma = -\pi$ ) ■

#### Soluzione

**Concetti.** Flusso non viscoso 2D, incomprimibile e irrotazionale. Circolazione. Corrente indisturbata. Vortice. Sovrapposizione delle cause e degli effetti.

**Svolgimento.** Una volta scritte (come si ricavano?) le componenti della velocità nel campo di moto, si impongono le condizioni richieste dal problema per determinare il valore di circolazione necessario.

$$\begin{cases} u_r(r, \theta) = U_\infty \cos \theta \\ u_\theta(r, \theta) = -U_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases} \quad (8.19)$$

Si impongono ora le condizioni del problema. Per  $\theta_1 = \pi/2$  e  $\theta_2 = -\pi/2$ , la componente radiale è nulla.

$$\begin{cases} u_\theta(R, \theta_1) = -U_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi R} \\ u_\theta(R, \theta_2) = U_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi R} \end{cases} \quad (8.20)$$

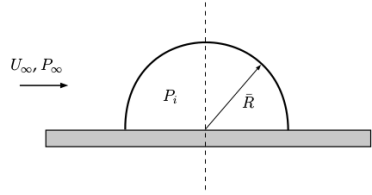
Si vuole determinare la differenza delle componenti in direzione  $x$   $u_x(R, \theta_1) - u_x(R, \theta_2)$ ; questa è uguale a  $-(u_\theta(R, \theta_1) + u_\theta(R, \theta_2))$ . Quindi, per  $R = 1$ :

$$-\frac{\Gamma}{\pi} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Gamma = -\pi \quad (8.21)$$

**Esercizio 8.5 — Semicilindro. Risultante delle forze.** Si consideri la copertura rigida di un campo da calcio avente sezione semicircolare di raggio  $\bar{R} = 50 \text{ m}$  rappresentata schematicamente in figura. Sulla struttura soffia un vento uniforme ( $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ ,  $P_\infty = 101325 \text{ Pa}$ ) in direzione orizzontale con velocità  $U_\infty = 15 \text{ km/h}$ . Assumendo di poter approssimare la corrente esterna come stazionaria, bidimensionale e a potenziale, si richiede di determinare:

- 1.1) la distribuzione della pressione esterna sulla sezione della struttura;
- 1.2) la risultante per unità di apertura delle forze agenti sulla struttura, ipotizzando che la pressione interna  $P_i$  sia pari a  $P_\infty$ .

$$(P(\theta) = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2(1 - 4\sin^2\theta), \mathbf{F} = 425.35\hat{\mathbf{y}} \text{ N/m}) \quad \blacksquare$$



#### Soluzione

**Concetti.** Flusso non viscoso 2D, incomprimibile e irrotazionale attorno al cilindro. Circolazione.

**Svolgimento.** Una volta scritte (come si ricavano?) le componenti della velocità nel campo di moto, tramite il teorema di Bernoulli (nel caso incomprimibile, stazionario, inviscido, irrotazionale,...) si calcola la pressione agente sulla superficie del cilindro. Integrando gli sforzi di pressione (interna ed esterna al cilindro) sul contorno, si ottiene la risultante.

- Campo di moto nel dominio esterno alla metà cilindro ( $(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, \pi]$ ).

$$\begin{cases} u_r(r, \theta) = U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta \\ u_\theta(r, \theta) = -U_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta \end{cases} \quad (8.22)$$

- Grazie al teorema di Bernoulli (ipotesi...) si ottiene la pressione esterna sulla superficie della metà di cilindro. Sulla superficie del cilindro la componente radiale è nulla, quindi il modulo della velocità coincide con il valore assoluto della componente radiale.

$$\begin{aligned} P(\theta) &= P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho u_\theta(a, \theta)^2 = \\ &= P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho (2U_\infty \sin \theta)^2 = \\ &= P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 (1 - 4\sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (8.23)$$

- Integrale sulla superficie (interna ed esterna) degli sforzi di pressione per ottenere la risultante. Con  $\hat{\mathbf{b}}$  si indica la normale diretta verso il centro del cilindro.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \int_0^\pi (P(\theta) - P_\infty) \hat{\mathbf{b}} a d\theta = \\
 &= \int_0^\pi \left( \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \right) (-\cos \theta \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta \hat{\mathbf{y}}) a d\theta =
 \end{aligned} \tag{8.24}$$

Usando i risultati (integrare!!)

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \sin \theta d\theta &= 2 \\
 \int_0^\pi \cos \theta d\theta &= 0 \\
 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta &= \frac{4}{3} \\
 \int_0^\pi \cos \theta \sin^2 \theta d\theta &= 0
 \end{aligned} \tag{8.25}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \int_0^\pi (P(\theta) - P_\infty) \hat{\mathbf{b}} a d\theta = \\
 &= -\frac{1}{2} \rho a U_\infty^2 \int_0^\pi (1 - 4 \sin^2 \theta) \sin \theta \hat{\mathbf{y}} d\theta = \\
 &= -\frac{1}{2} \rho a U_\infty^2 \left( 2 - \frac{16}{3} \right) \hat{\mathbf{y}}
 \end{aligned} \tag{8.26}$$

$$\mathbf{F} = \frac{5}{3} \rho a U_\infty^2 \hat{\mathbf{y}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = 425.35 \hat{\mathbf{y}} N/m$$

**Esercizio 8.6 — Metodo di Pistolesi.** Il metodo di Pistolesi è un primo metodo rudimentale per la modellazione di profili bidimensionali nell'ambito della teoria a potenziale. Il profilo viene approssimato con una lamina piana. L'effetto del profilo viene modellato tramite la sovrapposizione a una corrente asintotica di un vortice posto a un quarto di corda (corrispondente all'incirca con la posizione del centro aerodinamico - def...). Il valore della circolazione (e quindi della portanza) viene ricavato imponendo le condizioni al contorno in un punto di controllo sul profilo.

Assumendo sia valida l'approssimazione per piccoli angoli  $\sin \alpha \sim \alpha$ , confrontando la formula della portanza  $l = \frac{1}{2} \rho U^2 c c_L$  con quella ottenuta dal teorema di Kutta-Joukowski, ipotizzando un valore di  $c_{L\alpha} = 2\pi$ , si trovi il punto di controllo nel quale deve essere imposta la condizione al contorno.

Quale condizione al contorno va imposta e perchè? ■

### Soluzione

**Concetti.** Metodi a pannelli. Metodo di Pistolesi. Aerodinamica potenziale.

**Svolgimento.** La condizione da imporre è quella di tangenza: la velocità nel punto di controllo deve essere tangente alla lamina piana.

Definita  $b$  la distanza del punto di controllo dal centro aerodinamico, si impone la condizione al contorno in tale punto: deve essere nulla la componente normale alla lamina della velocità ottenuta come sovrapposizione della corrente asintotica e della corrente indotta dal vortice.

$$0 = \frac{\Gamma}{2\pi b} + U_\infty \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \Gamma = -2\pi b U_\infty \alpha \quad (8.27)$$

Inserita nel teorema di Kutta-Joukowski  $l = -\rho \Gamma U_\infty = \rho U_\infty^2 b 2\pi \alpha$  e confrontata alla formula della portanza  $l = \frac{1}{2} \rho U^2 c c_L$ , si ottiene

$$b = \frac{c}{2} \quad (8.28)$$

Quindi nel metodo di Pistolesi, il centro aerodinamico è posizionato a  $\frac{1}{4}$  di corda, mentre il punto di controllo è posizionato a  $\frac{3}{4}$  di corda.

### Osservazioni.

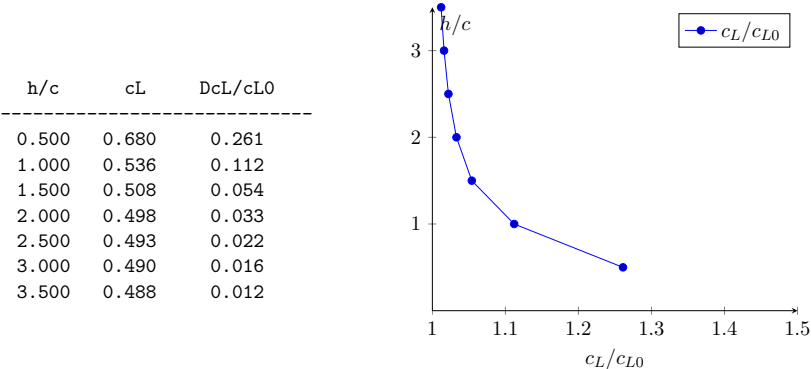
- È possibile simulare l'interazione tra più profili. Con metodi a pannelli un po' più raffinati (Hess Smith, Morino,...) è possibile simulare l'interazione tra corpi aerodinamici di forma qualsiasi, ricordandosi che le informazioni ottenute sono valide sotto le ipotesi dell'aerodinamica a potenziale: non devono verificarsi grandi separazioni, la vorticità deve essere confinata in una regione sottile (numero di Reynolds elevato).
- Quale può essere un metodo per simulare l'effetto di una superficie piana infinita (effetto suolo)?

Esercizio 8.7 — Effetto suolo e interazione profili. Usare il metodo di Pistolesi per ottenere delle informazioni qualitative sul coefficiente di portanza

- di un profilo in effetto suolo
- di due profili, in funzione della posizione reciproca

Confronto con i risultati ottenuti con il metodo di Hess Smith: effetto suolo.

Con il metodo delle immagini è possibile calcolare l'effetto che ha la presenza di una parete orizzontale (parallela alla velocità asintotica) sul coefficiente di portanza di un profilo NACA2412 con incidenza  $\theta = 2^\circ$ . Il coefficiente di portanza in “aria libera” è  $c_{L0} = 0.481$ . La distanza del profilo dalla parete è adimensionalizzata sulla corda.



Confronto con i risultati ottenuti con il metodo di Hess Smith: due profili.

Quando due profili sono investiti da una corrente, ognuno di essi influenza l'altro. Come primo esempio vengono usati due profili NACA0012, con la stessa corda. Il secondo profilo viene messo in scia al primo a distanza di 3 corde. La prima prova consiste nel mantenere il secondo profilo a incidenza nulla rispetto alla velocità asintotica, aumentando l'incidenza del primo. Il primo profilo genera una portanza inferiore a un profilo in aria libera, mentre il secondo è deportante: il primo profilo induce una velocità verso il basso sul profilo in coda, che quindi vede un'incidenza non nulla, ma negativa.

theta2 = 0.0\degree

theta1	cL1	cL2	cL10
2.5°	0.286	-0.045	0.297
5.0°	0.571	-0.089	0.594

La seconda prova consiste nel mantenere il primo profilo a incidenza nulla rispetto alla velocità asintotica e aumentare l'incidenza del profilo in scia. Il secondo profilo ha un coefficiente di portanza minore rispetto a quello di un profilo in aria libera; il primo profilo è anch'esso portante: il profilo in scia induce una velocità verso l'alto sul primo profilo che quindi vede un'indidenza positiva.

theta1 = 0.0°

theta2	cL1	cL2	cL20
--------	-----	-----	------

---

2.5°	0.064	0.287	0.297
5.0°	0.128	0.573	0.594

---

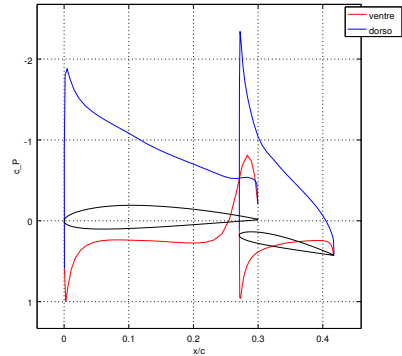
La portanza risultante è maggiore a quella che si otterrebbe considerando la somma della portanza generata singolarmente dai due profili. Per esempio, per  $\theta = 2.5^\circ$ :

$$\begin{aligned}
 c_{L1} + c_{L2} &> c_{L01} + c_{L02} \\
 0.064 + 0.287 &> 0.000 + 0.297 \\
 0.351 &> 0.297
 \end{aligned} \tag{8.29}$$

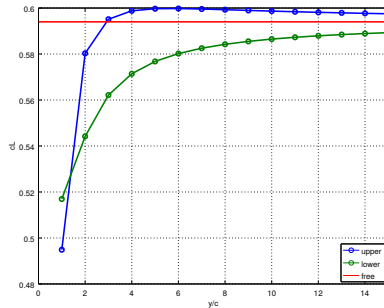
Lo stesso effetto viene osservato con due profili più vicini tra loro. La corda del profilo secondario è la metà di quella del profilo principale. Il profilo principale ha incidenza  $\theta_1 = -0.5^\circ$  rispetto alla velocità asintotica, quello secondario  $\theta_2 = 12^\circ$ . La presenza del secondo profilo fa aumentare significativamente la portanza del profilo principale.

	theta	cL	cL0
airfoil 1	-0.5°	1.099	0.184
airfoil 2	12.0°	0.975	1.656

La colonna cL contiene i coefficienti di portanza dei profili disposti come in figura. La colonna cL0 contiene i coefficienti di portanza dei profili presi singolarmente, senza influenza reciproca, alla stessa incidenza.



Come ultimo esempio si considerano due profili NACA0012 uguali sovrapposti, con angolo di incidenza  $\theta = 5.0^\circ$ , separati da una distanza adimensionale  $y/c$  compresa tra 1 e 15. Il coefficiente di portanza del singolo profilo è  $c_L = 0.594$ .





Esistono alcuni esempi esotici: ekranoplano sovietico...; esempi meno esotici:...

### 8.7.1 Condizione necessaria di incipiente separazione

Un punto di incipiente separazione viene identificato dall'anullarsi della derivata in direzione perpendicolare a parete della componente di velocità parallela ad essa, con derivata seconda positiva. Si consideri il problema bidimensionale su una superficie piana: viene scelto di usare un sistema di riferimento cartesiano con l'asse  $x$  parallelo alla parete e diretto nel verso della corrente asintotica  $\mathbf{U} = U\mathbf{x}$ , l'asse  $y$  uscente dalla parete. La componente  $x$  dell'equazione della quantità di moto è

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (8.30)$$

A parete i termini non lineari sono nulli poichè la velocità è nulla per la condizione di adesione. La derivata seconda in direzione  $x$  è nulla poichè a parete la velocità è sempre zero per ogni valore della coordinata  $x$ . Rimane quindi

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0 \quad (8.31)$$

**Esercizio 8.8 — Separazione su parete piana.** Si assuma che il profilo di velocità  $u(x, y)$  dello strato limite sulla superficie di un corpo sia approssimabile con la seguente legge

$$u = \frac{(1-x)y}{1+y} + \frac{xy^2}{1+y^2},$$

dove  $u$  è la velocità adimensionalizzata rispetto alla velocità esterna,  $x$  è la coordinata adimensionale di parete localmente rettilinea e  $y$  la coordinata adimensionale in direzione normale alla parete stessa. Determinare la coordinata  $x_s$  del punto di separazione dello strato limite in questione. ■

#### Soluzione

**Concetti.** Separazione.

**Svolgimento.**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{(1-x)y}{1+y} + \frac{xy^2}{1+y^2} \right] = \\ &= (1-x) \frac{1}{(1+y)^2} + x \frac{2y}{(1+y^2)^2} \end{aligned} \quad (8.32)$$

Quando si impone la condizione di separazione  $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0$ , si ottiene  $x_s = 1$ .

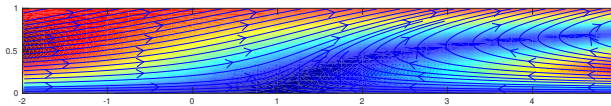


Figura 8.1: Linee di corrente e modulo della velocità.

Se si ipotizza che il moto del fluido sia governato dalle equazioni di Navier-Stokes per fluido incomprimibile (così facendo, si abbandonano le ipotesi di non viscosità del fluido e irrotazionalità della corrente, proprie dell'Aerodinamica; in realtà questo è già stato

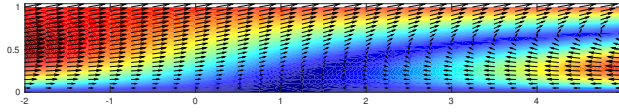


Figura 8.2: Campo di velocità e modulo della velocità.

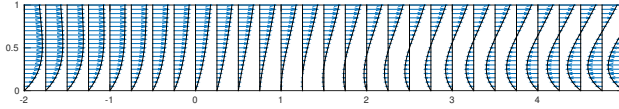


Figura 8.3: Andamento della componente orizzontale  $u(y)$  in diverse stazioni  $x$ .

fatto nel testo del problema, imponendo un profilo di velocità che soddisfa la condizione di adesione a parete...) è possibile ricostruire il campo di velocità e di pressione. Utilizzando il vincolo di incomprimibilità e le condizioni al contorno a parete ( $y = 0$ ), si può calcolare la componente di velocità  $v(x, y)$  perpendicolare alla parete

$$v(x, y) = -\ln|1 + y| + \operatorname{atan} y \quad (8.33)$$

Utilizzando le equazioni stazionarie di Navier-Stokes è possibile determinare il campo di pressione  $P(x, y)$ . La pressione (a meno di costanti di integrazione) e la derivata in direzione  $x$  valutate a parete valgono

$$\begin{cases} P(x, 0) &= \frac{1}{Re}(2x^2 - 2x) \\ \frac{\partial P}{\partial x}(x, 0) &= \frac{1}{Re}(4x - 2) \end{cases} \quad (8.34)$$

Si noti che nel punto di separazione  $x_s = 1$ , la derivata  $\partial P / \partial x(x_s, 0) = 2/Re$  è positiva (come era logico attendersi, per la condizione necessaria di incipiente separazione).

**Esercizio 8.9 — Separazione su parete piana.** Si assuma che il profilo di velocità  $u(x, y)$  dello strato limite sulla superficie di un corpo sia approssimabile con la seguente legge

$$u = 1 - e^{-y/\sqrt{x}},$$

dove  $u$  è la velocità adimensionalizzata rispetto alla velocità esterna,  $x$  è la coordinata adimensionale di parete localmente rettilinea e  $y$  la coordinata adimensionale in direzione normale alla parete stessa. Determinare l'andamento dello spessore di spostamento  $\delta$  in funzione della coordinata  $x$  lungo la parete. Lo strato limite in questione separa? Se sì per quale valore di  $x$ ?

( $\delta(x) = \sqrt{x}$ , lo strato limite non separa mai se non nel limite di  $x \rightarrow \infty$ ) ■

#### Soluzione

**Concetti.** Separazione. Spessori di strato limite.

$$\delta(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(y)}{U_e}\right) dy \quad (8.35)$$

#### Svolgimento.

- Spessore di spostamento. Il profilo di velocità è già adimensionalizzato sulla velocità esterna. Utilizzando la definizione di spessore di spostamento, si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \int_0^\infty (1 - u(y)) dy = \\ &= \int_0^\infty (1 - (1 - e^{-y/\sqrt{x}})) dy = \\ &= \int_0^\infty e^{-y/\sqrt{x}} dy = \\ &= -\sqrt{x} [e^{-y/\sqrt{x}}]_{y=0}^\infty \end{aligned} \quad (8.36)$$

E quindi:  $\delta(x) = \sqrt{x}$ .

- Separazione. La condizione di separazione è  $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0$ .

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [1 - e^{-yx^{-1/2}}] = x^{-1/2} e^{-yx^{-1/2}} \quad (8.37)$$

Si osserva che  $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}$  non si annulla mai:

$$\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (8.38)$$



## 9. Strato limite

**Esercizio 9.1** — **Spessori di strato limite: strato limite laminare.** Dato il profilo di velocità, determinare il rapporto di forma  $H$ .

$$u(x, y) = \begin{cases} U(x) \left( 2 \frac{y}{\delta(x)} - \frac{y^2}{\delta^2(x)} \right) & y \leq \delta(x) \\ U(x) & y > \delta(x) \end{cases} \quad (9.1)$$

$$(H = 5/2)$$

### Soluzione

**Concetti.** Spessori di strato limite. Rapporto di forma  $H = \delta_1/\delta_2$ .

$$\begin{aligned} \delta_1(x) &= \int_0^\infty \left( 1 - \frac{u(x, y)}{U(x)} \right) dy \\ \delta_2(x) &= \int_0^\infty \frac{u(x, y)}{U(x)} \left( 1 - \frac{u(x, y)}{U(x)} \right) dy \end{aligned} \quad (9.2)$$

**Svolgimento.** L'esercizio viene risolto calcolando prima gli integrali nelle definizioni degli spessori di strato limite e poi il loro rapporto.

Lo spessore di spostamento:

$$\begin{aligned}
 \delta_1 &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy = \\
 &= \int_0^{\delta(x)} \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy + \underbrace{\int_{\delta(x)}^\infty \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy}_{=0} = \\
 &= \int_0^{\delta(x)} \left(1 - 2\frac{y}{\delta(x)} + \frac{y^2}{\delta^2(x)}\right) dy = \\
 &= \frac{1}{3}\delta(x)
 \end{aligned} \tag{9.3}$$

Lo spessore di quantità di moto:

$$\begin{aligned}
 \delta_2 &= \int_0^\infty \frac{u(x, y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy \\
 &= \int_0^{\delta(x)} \frac{u(x, y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy + \underbrace{\int_{\delta(x)}^\infty \frac{u(x, y)}{U(x)} \left(1 - \frac{u(x, y)}{U(x)}\right) dy}_{=0} = \\
 &= \frac{2}{15}\delta(x)
 \end{aligned} \tag{9.4}$$

Il rapporto di forma vale quindi  $H = 5/2$ .

**Esercizio 9.2 — Spessori di strato limite: strato limite turbolento.** Dato il profilo di velocità, determinare il rapporto di forma  $H$ .

$$\frac{u(x, y)}{U(x)} = \begin{cases} \left( \frac{y}{\delta(x)} \right)^{\frac{1}{7}} & y \leq \delta(x) \\ 1 & y > \delta(x) \end{cases} \quad (9.5)$$

$$(H = 9/7) \quad \blacksquare$$

**Soluzione**

**Concetti.** Spessori di strato limite. Rapporto di forma  $H = \delta_1/\delta_2$ .

$$\begin{aligned} \delta_1(x) &= \int_0^\infty \left( 1 - \frac{u(x, y)}{U(x)} \right) dy \\ \delta_2(x) &= \int_0^\infty \frac{u(x, y)}{U(x)} \left( 1 - \frac{u(x, y)}{U(x)} \right) dy \end{aligned} \quad (9.6)$$

**Svolgimento.** L'esercizio viene risolto calcolando prima gli integrali nelle definizioni degli spessori di strato limite e poi il loro rapporto.

Lo spessore di spostamento:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \int_0^\infty \left( 1 - \frac{u(x, y)}{U(x)} \right) dy = \\ &= \int_0^{\delta(x)} \left( 1 - \frac{u(x, y)}{U(x)} \right) dy + \underbrace{\int_{\delta(x)}^\infty \left( 1 - \frac{u(x, y)}{U(x)} \right) dy}_{=0} = \\ &= \frac{1}{8} \delta(x) \end{aligned} \quad (9.7)$$

Lo spessore di quantità di moto:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \int_0^\infty \frac{u(x, y)}{U(x)} \left( 1 - \frac{u(x, y)}{U(x)} \right) dy \\ &= \int_0^{\delta(x)} \frac{u(x, y)}{U(x)} \left( 1 - \frac{u(x, y)}{U(x)} \right) dy + \underbrace{\int_{\delta(x)}^\infty \frac{u(x, y)}{U(x)} \left( 1 - \frac{u(x, y)}{U(x)} \right) dy}_{=0} = \\ &= \frac{7}{72} \delta(x) \end{aligned} \quad (9.8)$$

Il rapporto di forma vale quindi  $H = 9/7$ .

*Osservazione.* Questo profilo di velocità viene usato come approssimazione del profilo di strato limite turbolento. Questo profilo ha  $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}$  infinita, che implica sforzo a parete infinito. Una formula per lo sforzo di parete, associata a questo profilo di velocità è:

$$\tau_w = 0.0225 \rho U^2 \left( \frac{\nu}{U \delta} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (9.9)$$



**Esercizio 9.3 — Equazione integrale di Von Karman.** Dati  $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  e velocità esterna  $U(x) = 1.45 \text{ m/s}$ , utilizzando le formule per il profilo di velocità e sforzo a parete per lo strato limite turbolento, calcolare lo spessore  $\delta(x)$  dello strato limite.

$$\frac{u(x, y)}{U(x)} = \begin{cases} \left( \frac{y}{\delta(x)} \right)^{\frac{1}{7}} & y \leq \delta(x) \\ 1 & y > \delta(x) \end{cases} \quad (9.10)$$

$$\tau_w = 0.0225 \rho U^2 \left( \frac{\nu}{U \delta} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (9.11)$$

#### Soluzione

**Concetti.** Spessori di strato limite. Rapporto di forma. Coefficiente di attrito. Equazione integrale di Von Karman.

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} \quad (9.12)$$

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\delta_2}{U(x)} \frac{dU(x)}{dx} (2 + H) = \frac{c_f}{2} \quad (9.13)$$

**Svolgimento.** Si calcolano gli spessori di strato limite  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , il rapporto di forma  $H$  e il coefficiente di attrito  $c_f$ ; poi si inseriscono nell'equazione integrale di Von Karman. Poiché la velocità esterna non varia in  $x$ , il secondo termine si annulla.

Gli spessori di strato limite e il rapporto di forma hanno valore  $\delta_1 = \frac{1}{8} \delta$ ,  $\delta_2 = \frac{7}{72} \delta$ ,  $H = \frac{9}{7}$ .

Il coefficiente di attrito vale:

$$\begin{aligned} c_f &= \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \\ &= \frac{2}{\rho U^2} 0.0225 \rho U^2 \left( \frac{\nu}{U \delta} \right)^{\frac{1}{4}} = \\ &= 0.045 \left( \frac{\nu}{U \delta} \right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (9.14)$$

Inserendo nell'equazione di Von Karman:

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{c_f}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{72} \frac{d\delta(x)}{dx} = 0.0225 \left( \frac{\nu}{U \delta} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (9.15)$$

Integrando tra 0 e  $x$ , avendo imposto  $\delta(0) = 0$ , si ottiene:

$$\delta(x) = 0.0225 \frac{90}{7} \left( \frac{\nu}{U} \right)^{\frac{1}{4}} x^{\frac{4}{5}} \quad (9.16)$$

**Dalle equazioni di Prandtl per lo strato limite all'equazione integrale di VK.**

L'equazione integrale di VK (9.13) viene ricavata integrando in  $y$  tra 0 e  $\infty$  la componente  $x$  della quantità di moto delle equazioni di Prandtl per lo strato limite

$$\underbrace{\int_{y=0}^{\infty} u \frac{\partial u}{\partial x} dy}_{(a)} + \underbrace{\int_{y=0}^{\infty} v \frac{\partial u}{\partial y} dy}_{(b)} - \underbrace{\int_{y=0}^{\infty} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy}_{(c)} - \underbrace{\int_{y=0}^{\infty} U U'(x) dy}_{(d)} = 0 \quad (9.17)$$

dove è stata indicata con  $U(x)$  la velocità della corrente esterna allo strato limite. Si calcolano ora i termini (c), (b). Da (c) si ricava un termine nel quale compare lo sforzo tangenziale a parete  $\tau_w$

$$-\int_{y=0}^{\infty} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) dy = -\nu \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0}^{\infty} = \nu \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\tau_w(x)}{\rho} \quad (9.18)$$

Il termine (b) richiede un po' di lavoro e attenzione in più (IxP indica l'integrazione per parti).

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{\infty} v(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy &= \left( \text{IxP} : \int_0^{\infty} v \frac{\partial u}{\partial y} = [vu]_{y=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{\partial v}{\partial y} u \right) \\ &= v(x, \infty)u(x, \infty) - \underbrace{v(x, 0)u(x, 0)}_{=0} - \int_0^{\infty} \frac{\partial v}{\partial y} u = \left( u(x, \infty) = U(x); \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= v(x, \infty)U(x) + \int_{y=0}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} u = \left( v(x, \infty) = \int_{y=0}^{\infty} \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) dy = - \int_{y=0}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dy \right) \\ &= - \int_{y=0}^{\infty} U(x) \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_{y=0}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) u(x, y) dy \end{aligned} \quad (9.19)$$

Inserendo le espressioni (??), (9.19) nell'equazione (9.17), si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\infty} \left[ 2u \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{dU}{dx} \right] dy + \frac{\tau_w}{\rho} = \\ &= \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial(Uu)}{\partial x} + u \frac{dU}{dx} - U \frac{dU}{dx} \right] dy + \frac{\tau_w}{\rho} = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [u^2 - Uu] dy - \frac{dU}{dx} \int_0^{\infty} [U - u] dy + \frac{\tau_w}{\rho} = \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} [u^2 - Uu] dy - \frac{dU}{dx} \int_0^{\infty} [U - u] dy + \frac{\tau_w}{\rho} = \\ &= -\frac{d}{dx} \left( U^2(x) \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left[ 1 - \frac{u}{U} \right] dy \right) - \frac{dU}{dx} U \int_0^{\infty} \left[ 1 - \frac{u}{U} \right] dy + \frac{\tau_w}{\rho} = \\ &= -\frac{d}{dx} [U^2(x) \delta_2(x)] - U(x) U'(x) \delta_1(x) + \frac{\tau_w(x)}{\rho} \end{aligned} \quad (9.20)$$

Riassumendo,

$$\frac{d}{dx} [U^2(x) \delta_2(x)] + U(x) U'(x) \delta_1(x) = \frac{\tau_w(x)}{\rho} \quad (9.21)$$

Infine espandendo i termini, ricordando la definizione di rapporto di forma  $H = \delta_1/\delta_2$ , coefficiente di attrito  $c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2}$

$$\begin{aligned}
 2UU'\delta_2 + U^2\delta'_2 + UU'\delta_1(x) &= \frac{\tau_w(x)}{\rho} \\
 [2\delta_2 + \delta_1]UU' + U^2\delta'_2 &= \frac{\tau_w(x)}{\rho} \\
 [2 + H]\delta_2 \frac{U'}{U} + \delta'_2 &= \frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{c_f}{2}
 \end{aligned}
 \tag{9.22}$$

**Esercizio 9.4 — Strato limite di Blasius e sforzo a parete.** Ricavare le equazioni di Prandtl dello strato limite laminare (hp...). Ricavare poi l'equazione di Blasius per lo strato limite laminare (hp...). Ricavare la soluzione con un metodo numerico: in particolare, ricavare il valore di  $\frac{d^2g}{d\eta^2}|_{\eta=0}$  da inserire nella formula dello sforzo viscoso a parete (Shooting method ed iterazioni di Newton).

$$(g''(0) = 0.332)$$

#### Soluzione

**Concetti.** Equazioni di Prandtl. Equazione di Blasius. Soluzione in similitudine. Shooting method.

**Svolgimento.** Le equazioni di Prandtl dello strato limite possono essere ricavate tramite ragionamenti sugli ordini di grandezza delle grandezze fisiche.

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} P(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (9.23)$$

Sfruttando la definizione di funzione di corrente, l'ipotesi che  $U(x)$  sia costante, si cerca una soluzione in similitudine delle equazioni di Prandtl. Siano  $\eta = y/\delta(x)$  e  $\psi = U(x)\delta(x)g(\eta)$ , si ricava l'andamento dello spessore dello strato limite  $\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$  e l'equazione di Blasius

$$g''' + \frac{1}{2}gg'' = 0 \quad (9.24)$$

con le condizioni al contorno

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = 0 \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} g'(\eta) = 1 \end{cases} \quad (9.25)$$

La formula per lo sforzo viscoso a parete è:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{\eta=0} = \mu \frac{U}{\delta(x)} g''(0) \quad (9.26)$$

Per risolvere l'equazione di Blasius con metodi numerici, si può incontrare qualche difficoltà nell'imporre la condizione al contorno per  $\eta \rightarrow \infty$ . Tramite uno *shooting method* si può risolvere il problema ai valori al contorno, tramite la soluzione di problemi ai valori iniziali insieme a un metodo per trovare gli zeri di una funzione (es. Newton). Il dominio semi-infinito viene troncato. Il dominio numerico è quindi  $[0, \bar{\eta}]$ . L'equazione scalare di terzo ordine, viene scritta come sistema del primo ordine. Invece di imporre la condizione all'infinito, viene imposto il valore di  $g''(0) = \alpha$ . Si risolve l'equazione. Si trova il valore di  $g'_n$  in  $\bar{\eta}$ . Si itera fino a quando il valore assoluto di  $F(\alpha) = g'_n(\bar{\eta}; \alpha) - \lim_{\eta \rightarrow \infty} g'(\eta)$  non è inferiore a una tolleranza stabilita.

Per esempio, partendo da  $\alpha = 0.1$ , con una tolleranza  $tol = 1E - 09$ :

nIter	g''(0)	res
1	0.1000	5.508e-01
2	0.2836	9.975e-02
3	0.3308	2.575e-03
4	0.3320	1.660e-06
5	0.3320	1.804e-12

**Esercizio 9.5 — Strato limite di Blasius: resistenza di una lamina.** Nell'ipotesi che il problema possa essere approssimato con le equazioni bidimensionali dello strato limite con velocità asintotica costante (Blasius), determinare la resistenza (di attrito) di una lamina piana di lunghezza  $l$  e larghezza  $h$ . ■

#### Soluzione

**Concetti.** Strato limite laminare. Equazione di Blasius.

**Svolgimento.** Nell'ipotesi in cui si possa utilizzare la soluzione di Blasius, considerata omogenea in apertura, la resistenza di attrito è

$$\begin{aligned}
 D &= 2h \int_0^l \tau_w(x) dx = & \left( \tau_w = \mu \frac{U}{\delta(x)} g''(0) \right) \\
 &= 2g''(0) \mu h U \int_0^l \frac{1}{\delta(x)} dx = & \left( \delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \right) \\
 &= 2g''(0) \frac{\mu h U^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\nu}} \int_0^l \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \\
 &= 4g''(0) \frac{\mu h \sqrt{l} U^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\nu}}
 \end{aligned} \tag{9.27}$$

*Alcune osservazioni.*

- A parità di superficie, conviene una lamina lunga o larga? Sempre?
- Avviene transizione?
- Commentare risultati, in caso avvenga transizione a turbolenza.

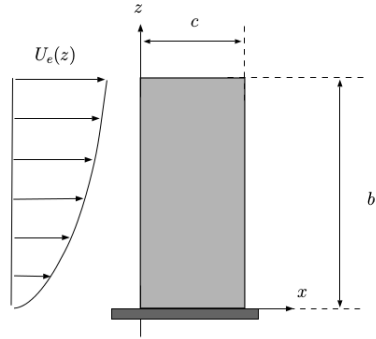
**Esercizio 9.6 — Strato limite di Blasius**

**3D.** Nella figura accanto una lastra piana di corda  $c = 30 \text{ cm}$ , apertura  $b = 75 \text{ cm}$  e spessore trascurabile è investita da una corrente esterna d'aria ( $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 1.76 \times 10^{-5} \text{ kg/(ms)}$ ) uniforme in corda e variabile in apertura secondo la legge

$$U_e(z) = U_e(z) \hat{\mathbf{x}} = \bar{U} \left( \frac{z}{b} \right)^{2/3} \hat{\mathbf{x}}$$

con  $\bar{U} = 5 \text{ m/s}$ . Assumendo la corrente laminare, stazionaria e bidimensionale su ciascuna sezione  $z$  in apertura, e potendone approssimare lo strato limite attraverso la soluzione di Blasius, si richiede di:

- 2.1) calcolare la resistenza  $D$  della lastra ed il corrispondente momento all'incastro  $M_y$ ;
- 2.2) calcolare il rapporto di forma  $H = \delta^*/\theta$ . calcolare lo spessore di spostamento  $\delta^*$  e di quantità di moto  $\theta$  dello strato limite al bordo d'uscita della lamina con riferimento alla sezione di mezzzeria.

**Soluzione**

**Concetti.** Soluzione di Blasius dello strato limite. Spessori di strato limite.

**Svolgimento.** Il problema viene risolto usando la soluzione in similitudine di Blasius dello strato limite.

$$\dots \quad (9.28)$$

- Per il calcolo della resistenza e del momento alla radice è necessario calcolare lo sforzo a parete sulla lamina piana  $\tau_w(x, z)$ . La resistenza è l'integrale di  $\tau_w$  sulla superficie; il momento  $M_y$  è l'integrale di  $z\tau_w(x, z)$  esteso alla superficie (viene fatta l'ipotesi che l'unica componente dello sforzo a parete sia diretta lungo  $x$ ).
- Gli spessori di strato limite sono funzione di  $(x, z)$ .

$$\delta^*(x, z) = \int_0^\infty \left[ 1 - \frac{u(x, y, z)}{U_e(x, z)} \right] dy, \quad \theta(x, z) = \int_0^\infty \frac{u(x, y, z)}{U_e(x, z)} \left[ 1 - \frac{u(x, y, z)}{U_e(x, z)} \right] dy \quad (9.29)$$

Usando le relazioni dello strato limite di Blasius, si trova

$$\begin{aligned}\delta^* &= \int_0^\infty (1 - g'(\eta(y))) dy = \delta(x) \int_0^\infty (1 - g'(\eta)) d\eta \\ \theta &= \int_0^\infty g'(\eta)(1 - g'(\eta(y))) dy = \delta(x) \int_0^\infty g'(\eta)(1 - g'(\eta)) d\eta\end{aligned}\quad (9.30)$$

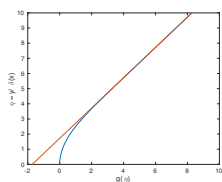
Per lo spessore di spostamento si ha:

$$\begin{aligned}\delta^* &= \delta(x) \int_0^\infty (1 - g'(\eta)) d\eta = \\ &= \delta(x) [\eta - g(\eta)]|_0^\infty = \quad (g(0) = 0) \\ &= \delta(x) \lim_{\eta \rightarrow \infty} [\eta - g(\eta)] = \quad (\lim_{\eta \rightarrow \infty} [\eta - g(\eta)] = 1.721) \\ &= 1.721 \cdot \delta = \quad (\delta = \sqrt{\nu x / U}) \\ &= 1.721 \sqrt{\frac{\nu x}{U(z)}}\end{aligned}\quad (9.31)$$

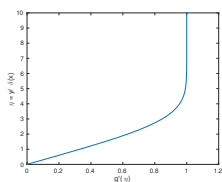
Per lo spessore di quantità di moto:

$$\begin{aligned}\theta &= \delta(x, z) \int_0^\infty g'(\eta)(1 - g'(\eta)) d\eta = \\ &= \delta \int_0^\infty g'(\eta) d\eta - \delta \int_0^\infty g'^2(\eta) d\eta = \\ &= \delta [g(\eta)]|_0^\infty - \delta \int_0^\infty g'^2(\eta) d\eta = \quad (g(0) = 0 \text{ e IxP}) \\ &= \delta \lim_{\eta \rightarrow \infty} g(\eta) - \delta \int_0^\infty [(gg')' - gg''] d\eta = \quad (\text{eq. di Blasius: } \frac{1}{2} gg'' + g''' = 0) \\ &= \delta \lim_{\eta \rightarrow \infty} g(\eta) - \delta [gg']|_0^\infty - \delta \int_0^\infty 2g''' d\eta = \quad (g(0) = 0) \\ &= \delta \lim_{\eta \rightarrow \infty} g(\eta) - \delta \lim_{\eta \rightarrow \infty} g(\eta)g'(\eta) - 2\delta [g''(\eta)]|_0^\infty = \quad (\lim_{\eta \rightarrow \infty} g'(\eta) = 1, \lim_{\eta \rightarrow \infty} g''(\eta) = 0) \\ &= 2\delta(x, z)g''(0) = \\ &= 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{U(z)}}\end{aligned}\quad (9.32)$$

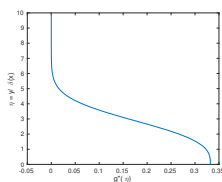
Il rapporto di forma vale quindi  $H = \delta^* / \theta = 1.721 / 0.664$ , cioè  $H = 2.59$ .



(a) Grafico di  $g(\eta)$ : per  $\eta \rightarrow \infty$   $g$  ha derivata uguale a 1; l'intersezione dell'asintoto con l'asse orizzontale avviene per  $g(0) = 1.721$ .



(b) Grafico di  $g'(\eta)$ : rappresenta il profilo adimensionale della velocità. Per  $\eta \rightarrow \infty$   $g'(\eta) \rightarrow 1$ .



(c) Grafico di  $g''(\eta)$ : è legato alla derivata parziale  $\partial u / \partial y$ . Per determinare lo sforzo a parete è necessario trovare il valore di  $g''(0)$ :  $g''(0) = 0.332$

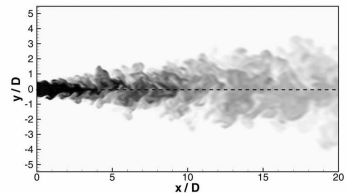




## 10. Turbolenza

**Esercizio 10.1 — Getto piano turbolento.** Calcolare la soluzione in similitudine per un getto turbolento piano.

**Concetti.** Equazioni mediate di Reynolds. Equazioni di Prandtl per lo strato limite turbolento. Correnti debolmente non parallele. Soluzioni in similitudine. Entrainment.



### Soluzione

Si descrive schematicamente il procedimento:

- Il problema turbolento viene descritto dalle equazioni mediate di Reynolds.
- I problemi di strato limite possono essere ben descritti dalle equazioni di Prandtl, ricavabili grazie a ragionamenti sugli ordini di grandezza, analoghe alle equazioni di Prandtl laminari.
- Viene introdotta una variabile di similitudine  $\eta$ ; si ipotizza la forma della soluzione:  
$$u = U_0 f, \quad \langle u'v' \rangle = U_0^2 g$$
- Vengono calcolati i flussi integrali di massa, quantità di moto ed energia cinetica.
- Si inserisce l'ansatz sulla soluzione nelle equazioni di Prandtl per ottenere un'equazione per i profili similari di velocità  $f$  e degli sforzi turbolenti  $g$ . Si ricava l'andamento dello spessore dello  $\delta(x)$  "strato limite", necessario affinché esista una soluzione similare.
- Per ottenere una equazione chiusa, si introduce l'ipotesi di Boussinesq, che lega  $f$  e  $g$ . Infine si risolve, con le opportune condizioni al contorno, l'equazione in  $f$ .

**Svolgimento.**

- Il punto di partenza del problema sono le equazioni mediate di Reynolds (RANS)

$$\begin{cases} (U \cdot \nabla)U + \nabla \cdot \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle - \frac{1}{Re} \nabla^2 U + \nabla P = 0 \\ \nabla \cdot U = 0 \end{cases} \quad (10.1)$$

ottenibili inserendo la decomposizione di Reynolds delle variabili in moto medio e fluttuazione  $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$  all'interno delle equazioni di Navier-Stokes.

Se si considera un problema bidimensionale (per le grandezze medie), le RANS in coordinate cartesiane sono

$$\begin{cases} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'u' \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v'v' \rangle}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (10.2)$$

- Per problemi “di strato limite” le equazioni RANS possono essere semplificate, considerando gli ordini di grandezza delle coordinate e dei campi che compaiono all'interno delle equazioni. Per la regione “interna” (la lunghezza caratteristica in  $y$  è “molto minore” di quella in  $x$ ), assumendo che la pressione “esterna” sia costante e trascurando i termini di fluttuazione con contributo minore

$$\begin{cases} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (10.3)$$

Da queste prime semplificazioni, a differenza delle equazioni di strato limite per il caso laminare, la pressione non è funzione solo della coordinata  $x$ , ma  $P + \langle v'^2 \rangle$  è funzione solo di  $x$ . Con ulteriori considerazioni sui termini di fluttuazione nel caso di getti, è possibile scrivere in prima approssimazione

$$\begin{cases} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \\ P(x) + \langle v'^2 \rangle = P_0(x) \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (10.4)$$

con  $P_0(x)$  la pressione del problema esterno. Le fluttuazioni nel problema esterno sono considerate nulle.

Prima di procedere con la ricerca di soluzioni in similitudine, viene fatta l'ultima ipotesi: consideriamo numeri di Reynolds sufficientemente alti da rendere trascurabile l'effetto degli sforzi viscosi del moto medio rispetto agli effetti delle fluttuazioni.

$$\begin{cases} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} = 0 \\ P(x) + \langle v'^2 \rangle = P_0(x) \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (10.5)$$

- Partendo dalle equazioni di Prandtl turbolente semplificate, si introduce la variabile di similitudine

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)} \quad (10.6)$$

con  $\delta(x)$  una grandezza caratteristica (convenzionale) della sezione del getto; si ipotizzano poi il profilo di velocità della componente  $x$  della velocità e del termine di fluttuazione  $\langle u'v' \rangle$ :

$$\begin{aligned} U(x, y) &= U_0 f(\eta(x, y)) \\ \langle u'v' \rangle(x, y) &= U_0^2 g(\eta(x, y)) \end{aligned} \quad (10.7)$$

Si calcola la derivata parziale di  $U$  in  $x$ , che verrà usata in seguito:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= U'_0(x) f(\eta) - U_0(x) \frac{y \delta'(x)}{\delta^2(x)} f'(\eta) = \\ &= U'_0(x) f(\eta) - U_0(x) \frac{\delta'(x) \eta}{\delta(x)} f'(\eta) \end{aligned} \quad (10.8)$$

Tramite il vincolo di incomprimibilità si ricava la forma della componente  $V$  della velocità. Nel trasformare l'integrale su  $y$  in un integrale su  $\eta$ , si usa  $y = \delta(x)\eta$ ,  $d\xi = \delta(x)d\chi$ .

$$\begin{aligned} V(x, y) - \underbrace{V(x, 0)}_{=0} &= \int_{\xi=0}^y \frac{\partial V(x, \xi)}{\partial y} d\xi = - \int_{\xi=0}^y \frac{\partial U(x, \xi)}{\partial x} = \\ &= - \int_{\chi=0}^{\eta} \left[ U'_0(x) f(\chi) - U_0(x) \frac{\delta'(x) \chi}{\delta(x)} f'(\chi) \right] \delta(x) d\chi = \\ &= - \int_{\chi=0}^{\eta} [\delta(x) U'_0(x) f(\chi) - U_0(x) \delta'(x) \chi f'(\chi)] d\chi \end{aligned} \quad (10.9)$$

- Prima di scrivere le equazioni di Prandtl per le variabili adimensionali, conviene calcolare il flusso di quantità di moto in direzione  $x$  attraverso dei piani verticali. Questo consente di trovare una relazione tra  $U_0$  e  $\delta$  da usare in seguito.

$$Q = \rho \int_{y=-\infty}^{\infty} U^2(x, y) dy \quad (10.10)$$

Si calcola la derivata in direzione  $x$  di  $Q$ , usando le equazione di Prandtl della componente  $x$  della quantità di moto:

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d}{dx} \rho \int_{y=-\infty}^{\infty} U^2(x, y) dy = \rho \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{\partial U^2}{\partial x} dy = -\rho \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} dy = 0 \quad (10.11)$$

se si considera un fluido in quiete all'infinito. Utilizzando i profili in similitudine

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dQ}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{y=-\infty}^{\infty} U^2 dy = \\ &= \frac{d}{dx} \left( U_0^2(x) \delta(x) \right) \int_{\eta=-\infty}^{\infty} f^2(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (10.12)$$

Deve quindi essere  $\frac{d}{dx}(U_0^2 \delta) = 0$ , cioè

$$2U_0 U'_0 \delta + U_0^2 \delta' = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \frac{U'_0}{U_0} = -\frac{1}{2} \delta' \quad (10.13)$$

- Inseriamo ora la forma di  $U$ ,  $V$ ,  $\langle u'v' \rangle$  espresse in termini della variabile  $\eta$  e delle funzioni di similitudine nella componente  $x$  dell'equazione della quantità di moto.

$$U_0 f \left[ U'_0 f - U_0 \frac{\delta'}{\delta} \eta f' \right] - \left[ \int_{\chi=0}^{\eta} [\delta(x) U'_0(x) f(\chi) - U_0(x) \delta'(x) \chi f'(\chi)] d\chi \right] \frac{U_0}{\delta} f' + \frac{U_0^2}{\delta} g' = 0 \quad (10.14)$$

Moltiplicando per  $\frac{\delta}{U_0^2}$  e integrando per parti l'integrale che contiene  $\eta f'(\eta)$

$$\delta \frac{U'_0}{U_0} f^2 - \delta' \eta f f' - \delta \frac{U'_0}{U_0} f' \int_0^{\eta} f d\chi + \delta' f'(\eta) [\chi f(\chi)] \Big|_0^{\eta} - \delta' f(\eta) \int_0^{\eta} f(\chi) d\chi + g'(\eta) = 0 \quad (10.15)$$

Usando la relazione tra  $U_0$  e  $\delta$  trovata al punto precedente è possibile scrivere l'equazione come

$$\frac{1}{2} \delta'(x) \left[ f^2(\eta) + f'(\eta) \int_{\chi=0}^{\eta} f(\chi) d\chi \right] = g'(\eta) \quad (10.16)$$

Affinchè sia possibile trovare una soluzione in similitudine, non ci possono essere coefficienti dipendenti da  $x$  o  $y$  se non tramite  $\eta$ . Deve quindi essere:

$$\delta'(x) = S \quad \Rightarrow \quad \delta(x) = S(x - x_0) \quad (10.17)$$

Seguendo questo procedimento è stato possibile ottenere una stima dell'evoluzione in  $x$  della grandezza trasversale caratteristica  $\delta(x)$ : la grandezza trasversale caratteristica di un getto turbolento è lineare in  $x$ . Dalla costanza del flusso di quantità di moto  $U_0^2(x) \delta(x) = \text{cost}$  e quindi la velocità caratteristica del getto evolve come

$$U_0(x) \sim x^{-1/2} \quad (10.18)$$

- Come fatto in precedenza per il flusso di quantità di moto (costante in  $x$ ), vengono calcolate le derivate in  $x$  dei flussi di massa e di energia cinetica del moto medio per la soluzione in similitudine attraverso piani perpendicolari all'asse  $x$ . Il flusso di massa  $M$  è:

$$M = \rho \int_{y=-\infty}^{\infty} U dy = \rho U_0(x) \delta(x) \int_{\eta=-\infty}^{\infty} f(\eta) d\eta \sim x^{1/2} \quad (10.19)$$

$$\frac{dM}{dx} \sim x^{-1/2} > 0, \quad \text{per } x > 0$$

Il flusso di massa aumenta allontanandosi dall'ugello. Il getto riesce a “trascinare” anche del fluido che non esce dall'ugello (entrainment). Il flusso di energia cinetica del moto medio è:

$$E = \frac{1}{2} \rho \int_{y=-\infty}^{\infty} U^3 dy = \frac{1}{2} \rho U_0^3(x) \delta(x) \int_{\eta=-\infty}^{\infty} f^3(\eta) d\eta \sim x^{-1/2} \quad (10.20)$$

$$\frac{dE}{dx} \sim -x^{-3/2} < 0, \quad \text{per } x > 0$$

Il flusso di energia cinetica del moto medio diminuisce allontanandosi dall'ugello, nonostante l'equazioni utilizzate nella soluzione in similitudine non contengano il termine dissipativo degli sforzi viscosi, che quindi non può avere nessuna influenza sulla diminuzione di energia cinetica del moto medio: l'energia del moto medio viene trasferita alle fluttuazioni di velocità. Scrivendo le equazioni di bilancio dell'energia cinetica del moto medio e dell'energia cinetica delle fluttuazioni (energia turbolenta) si trovano due termini opposti: il termine che in generale fa diminuire l'energia cinetica del moto medio, si trova nell'equazione dell'energia turbolenta con segno opposto.

- Nell'eq. 10.15, anche dopo aver sostituito  $\delta' = S$ , rimangono due equazioni incognite  $f(\eta)$ ,  $g(\eta)$ . Così come le RANS non sono un problema chiuso, anche il problema semplificato non è chiuso. Per ottenere una soluzione si può introdurre l'ipotesi di Boussinesq (validità di questa ipotesi? Nessuna giustificazione rigorosa ...) per esprimere il termine di fluttuazioni in funzione del moto medio. Per il getto piano, l'ipotesi di Boussinesq si riduce a

$$-\langle u'v' \rangle = \nu_T \frac{\partial U}{\partial y} \quad (10.21)$$

avendo indicato con  $\nu_T$  la viscosità turbolenta.

$$-U_0^2 g(\eta) = \nu_T \frac{U_0}{\delta(x)} f(\eta) \quad (10.22)$$

$$g(\eta) = -\frac{\nu_T}{U_0(x)\delta(x)} f(\eta) \quad (10.23)$$

$$(10.24)$$

Fatte già molte ipotesi (non tutte con fondamento fisico), facciamo l'ultima ipotesi che consente di ottenere una soluzione in forma chiusa del problema. Si ipotizza che

$$\hat{\nu}_T = \frac{\nu_T}{U_0(x)\delta(x)} = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad g(\eta) = -\hat{\nu}_T f'(\eta) \quad (10.25)$$

**La validità di queste ipotesi andrà controllata a posteriori.**

L'equazione in  $f(\eta)$  diventa:

$$\frac{1}{2} S \left[ f^2(\eta) + f'(\eta) \int_{\chi=0}^{\eta} f(\chi) d\chi \right] = -\hat{\nu}_T f'''(\eta) \quad (10.26)$$

Si introduce la funzione  $F(\eta) = \int_{\chi=0}^{\eta} f(\chi) d\chi$  per eliminare il termine integrale e ottenere un'equazione differenziale in  $F(\eta)$  (osservare che  $F'(\eta) = f(\eta)$  e  $F(0) = 0$  poiché l'intervallo di integrazione ha dimensione nulla):

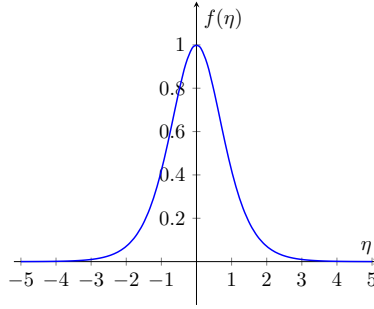
$$\frac{1}{2} S (F'^2 + F''F) = -\hat{\nu}_T F''' \quad (10.27)$$

$$\frac{1}{2} S (F'F)' = -\hat{\nu}_T F''' \quad (10.28)$$

$$(10.29)$$

Le condizioni di simmetria sull'asse del getto sono

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(\eta=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad F''(\eta=0) = 0 \quad (10.30)$$



Profilo di velocità similare  $f(\eta)$  in variabile di similitudine  $\eta$ .

Si integra ora due volte. Dopo aver integrato la prima volta, la prima costante di integrazione è nulla dalle condizioni  $F(0) = 0$ ,  $F''(0) = 0$ . Si integra la seconda volta e si definisce la velocità di riferimento  $U_0(x)$  (fino ad ora generica) con la condizione  $F'(0) = f(0) = 1$ : ricordando  $U(x, y) = U_0(x)f(\eta(x, y))$ , si ottiene che  $U_0(x)$  è la velocità sull'asse ( $y = 0$ ,  $\eta = 0$ ).

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} S F'(\eta) F(\eta) + \hat{\nu}_T F''(\eta) &= C \stackrel{\text{b.c}}{=} 0 & ((F^2)' = 2FF') \\
 \frac{1}{4} S (F^2)' + \hat{\nu}_T F'' &= 0 & (\text{integrare...}) \\
 F' &= -\frac{S}{4\hat{\nu}_T} F^2 + B \stackrel{F'(0)=1}{=} 1 - \frac{S}{4\hat{\nu}_T} F^2
 \end{aligned} \tag{10.31}$$

Integrando un'ultima volta si ottiene la soluzione  $F(\eta)$ , la cui derivata  $f(\eta)$  è il profilo in similitudine della velocità  $U$

$$F(\eta) = \frac{1}{\alpha} \tanh(\alpha\eta) \quad \Rightarrow \quad f(\eta) = \frac{1}{\cosh^2(\alpha\eta)} = \frac{U(x, y)}{U_0(x)} \tag{10.32}$$

$$\text{con } \alpha = \sqrt{\frac{S}{4\hat{\nu}_T}}.$$

Mancano da determinare i valori delle costanti che compaiono nella soluzione, ottenibili usando dei confronti con le misure sperimentali e introducendo una definizione per la dimensione di riferimento  $\delta(x)$  della dimensione trasversale del getto: di solito si definisce  $\delta(x) = r_{1/2}(x)$  l'ordinata in cui la velocità  $U(x, \delta(x))$  è la metà della velocità sull'asse (o sul piano di simmetria), cioè

$$U(x, r_{1/2}(x)) = \frac{1}{2} U(x, 0) = \frac{1}{2} U_0(x) \tag{10.33}$$

Per questa scelta di  $\delta(x)$  il coefficiente  $S$  risulta  $S \sim 0.1$ .

# Appendici

<b>A</b>	<b>Richiami di analisi</b> .....	<b>139</b>
A.1	Teoremi della divergenza e del rotore	
A.2	Due utili lemmi	
A.3	Teorema della divergenza, del rotore e del gradiente	
A.4	Campi vettoriali conservativi	
A.5	Descrizione lagrangiana e descrizione euleriana	
A.6	Derivata temporale di integrali su domini dipendenti dal tempo: formule di Leibniz	
A.7	Rappresentazione del termine di derivata temporale nelle equazioni di bilancio	
A.8	Bilanci integrali	
<b>B</b>	<b>Introduzione al calcolo tensoriale</b> .....	<b>159</b>
B.1	Richiami di algebra lineare	
B.2	Algebra multilineare	
B.3	Calcolo vettoriale e tensoriale in coordinate curvilinee	

<b>Bibliography</b> .....	<b>187</b>
---------------------------	------------

<b>Index</b> .....	<b>189</b>
--------------------	------------





## A. Richiami di analisi

### A.1 Teoremi della divergenza e del rotore

In questa sezione vengono richiamati i teoremi della divergenza e del rotore, già incontrati nei corsi di Analisi. Viene introdotto il teorema del gradiente. Questi teoremi vengono dimostrati a partire da due lemmi, che risultano utili nella scrittura delle equazioni di bilancio di un continuo (solido o fluido che sia). Il punto di partenza è il lemma di Green, necessario per la dimostrazione dei due lemmi. La sua dimostrazione viene riportata per motivi di completezza e per richiamare alcuni concetti già incontrati nei corsi di Analisi e per ricominciare ad utilizzarli.

**Teorema A.1.1 — Lemma di Green.** Sia  $\gamma_R$  una curva chiusa semplice nel piano positivamente orientata regolare a tratti, e sia  $R$  la superficie di cui è frontiera. Se  $P$  e  $Q$  sono due funzioni reali di due variabili reali che hanno le derivate parziali continue su una regione aperta che contiene  $R$ .

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_{\gamma_R} P dx, \quad \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{\gamma_R} Q dy \quad (\text{A.1})$$

La dimostrazione viene svolta prima per domini semplici, come il dominio  $R$  in figura A.1, e poi generalizzata per domini non semplici e non semplicemente connessi.

**R** Il verso positivo di percorrenza di una linea chiusa nel piano è quello antiorario, come indicato in figura A.1: seguendo questa convenzione, la regione limitata del piano viene lasciata a sinistra della curva, se percorsa nel verso positivo.

*Dimostrazione.* Se  $R$  è un dominio semplice, è possibile dimostrare la prima delle due equazioni (A.1) scomponendo il contorno  $\gamma_R = \partial R$  nelle due curve  $\ell_1 : y = Y_1(x)$  e  $\ell_2 : y = Y_2(x)$ , come in figura A.1. È possibile scrivere il contorno  $\gamma_R = \ell_1 \cup \ell_2^-$  come unione delle due curve  $\ell_1$  ed  $\ell_2$ , dove l'apice  $-$  su  $\ell_2$  indica che deve essere percorsa per  $x$

decrescenti affinché il contorno  $\gamma_R$  sia percorso in senso positivo.

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left( \int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b [P(x, Y_2(x)) - P(x, Y_1(x))] dx = - \oint_{\gamma_R} P dx \quad (\text{A.2})$$

In maniera analoga, è possibile dimostrare la seconda delle (A.1), scomponendo il contorno in due curve  $\ell_1 : x = X_1(y)$  e  $\ell_2 : x = X_2(y)$ , con  $X_2(x) > X_1(x)$ .

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_e^f \left( \int_{X_1(y)}^{X_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy = \int_e^f [P(X_2(y), y) - P(X_1(y), y)] dy = \oint_{\gamma_R} Q dy \quad (\text{A.3})$$

■

Sottraendo le due equazioni del teorema A.1.1, si ottiene la forma classica nella quale il teorema di Green viene presentato

$$\oint_{\gamma_R} [P dx + Q dy] = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (\text{A.4})$$

#### Domini non semplici e non semplicemente connessi.

Il caso di domini non semplici e non semplicemente connessi si riconduce al caso di domini semplici, in seguito all'introduzione di un 'taglio'  $\gamma_c$  nel dominio, sfruttando la regolarità (per ipotesi) della funzione all'interno del dominio. Nel caso di dominio non semplice, ci si riconduce a due o più domini semplici a due a due disgiunti, la cui unione è l'insieme non semplice di partenza. Nel caso di dominio non semplicemente connesso, ci si riconduce al caso di dominio semplicemente connesso.

Nel caso di dominio non semplice, si ha:

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \quad (R = R_1 \cup R_2) \\ &= \iint_{R_1} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy + \iint_{R_2} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \quad (l_1 = \partial R_1, l_2 = \partial R_2) \\ &= - \oint_{l_1} P dx - \oint_{l_2} P dx = \quad (l_1 = \gamma_1 \cup \gamma_c, l_2 = \gamma_2 \cup \gamma_c^-) \\ &= - \int_{\gamma_1} P dx - \int_{\gamma_c} P dx - \int_{\gamma_c^-} P dx - \int_{\gamma_2} P dx = \quad \left( \int_{\gamma_c^-} P dx = - \int_{\gamma_c} P dx, \right. \\ &\quad \left. \gamma_1 \cup \gamma_2 = \partial R = \gamma \right) \\ &= - \oint_{\gamma} P dx \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

■ **Esempio A.1** È possibile calcolare l'area di una superficie  $R$  tramite un integrale di linea, scegliendo le funzioni  $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$  e  $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$ . Infatti,

$$A_R = \iint_R dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\gamma_R} [x dy - y dx]. \quad (\text{A.6})$$

■

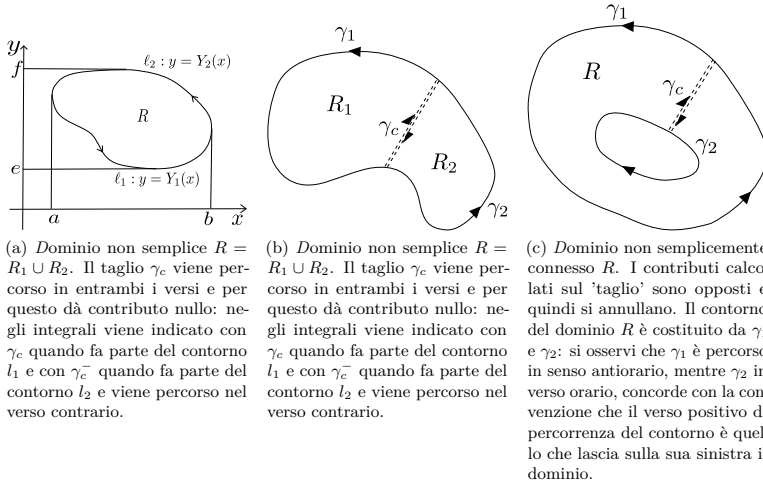


Figura A.1: Dominio semplice, semplicemente connesso e non semplicemente connesso.

## A.2 Due utili lemmi

Il prossimo lemma è alla base dei più rinomati teoremi della divergenza e del gradiente: la dimostrazione di questi due teoremi si basa su un facile uso ripetuto di questo lemma. Data la facilità di questo lemma e la sua frequente applicazione nella scrittura di bilanci e in generale di integrazione per parti, è molto conveniente ricordarsi questo semplice risultato.

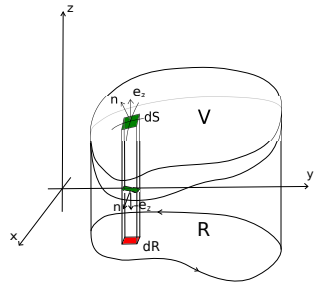
**Lemma A.2.1** Sotto le ipotesi del teorema di Green nel piano.

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial x_i} = \oint_S A n_i \quad (\text{A.7})$$

*Dimostrazione.* Si segue un ragionamento molto simile a quello utilizzato per la dimostrazione del lemma di Green nel piano. Per  $\partial A / \partial z$ :

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial A}{\partial z} &= \int_R \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} \frac{\partial A}{\partial z} dz dx dy = \\ &= \int_R [A(x, y, f_2(x, y)) - A(x, y, f_1(x, y))] dx dy \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Il passaggio più complicato è nel passare dall'integrale in  $(x, y) \in R$  all'integrale sulla superficie  $S$ , bordo del volume  $V$ : l'elemento infinitesimo  $dR$  di area nel piano- $xy$  è uguale a  $dR = dx dy$ ; il disegno e la dimostrazione fanno riferimento a un volume *semplice* (come nel caso di lemma di Green nel piano, è possibile generalizzare i risultati ottenuti per domini di forma generica): è possibile suddividere la superficie  $S$  nelle due "semisuperfici"



$S^+ : z = f_2(x, y)$  e  $S^- : z = f_1(x, y)$  tali che  $S^+ \cup S^- = S$  e che la normale, uscente dal volume, abbia componente in  $z$  positiva e negativa rispettivamente ( $S^+ : \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} > 0$ ,  $S^- : \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} < 0$ ). La superficie elementare  $dR$  è inoltre la proiezione dell'elemento di superficie  $dS$  sul piano- $xy$ : in generale  $dS$  non sarà parallela al piano- $xy$  e quindi sarà maggiore di  $dR$ . Non è difficile dimostrare che

$$dxdy = dR = \begin{cases} dS \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{n}} & \text{su } S^+ \\ -dS \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{n}} & \text{su } S^- \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Si può quindi ora continuare nella dimostrazione

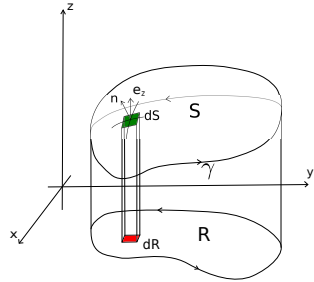
$$\begin{aligned} \int_R [A(x, y, f_2(x, y)) - A(x, y, f_1(x, y))] dxdy &= \\ &= \int_{S^+} A \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} dS + \int_{S^-} A \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = \\ &= \oint_S A \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \\ &= \oint_S A n_z dS \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

■

Come il lemma precedente è alla base della dimostrazione dei teoremi di gradiente e divergenza, il lemma successivo è alla base della dimostrazione del teorema del rotore.

**Lemma A.2.2** Sotto le ipotesi del teorema di Green nel piano.

$$\int_S [\nabla \times (A \hat{\mathbf{e}}_i)] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_\gamma A dx_i \quad (\text{A.11})$$



*Dimostrazione.* Per  $A \hat{\mathbf{e}}_x$ ,  $\nabla \times (A \hat{\mathbf{e}}_x) = \partial A / \partial z \hat{\mathbf{e}}_y - \partial A / \partial y \hat{\mathbf{e}}_z$ . Si scrive la superficie  $S$  in forma parametrica come:  $\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{e}}_x + y \hat{\mathbf{e}}_y + z(x, y) \hat{\mathbf{e}}_z$ . Il vettore  $\partial \mathbf{r} / \partial y \hat{\mathbf{e}}_y + \partial z / \partial y \hat{\mathbf{e}}_z$  è parallelo alla superficie  $S$  e quindi perpendicolare alla normale  $\hat{\mathbf{n}}$ :

$$0 = \hat{\mathbf{n}} \cdot \left( \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial z}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_z \right) \quad (\text{A.12})$$

Scrivendo  $[\nabla \times (A \hat{\mathbf{e}}_x)] \cdot \hat{\mathbf{n}}$ :

$$[\nabla \times (A \hat{\mathbf{e}}_x)] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\partial A}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_y \cdot \hat{\mathbf{n}} - \frac{\partial A}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \hat{\mathbf{n}} = - \left[ \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial y} \right] \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{A.13})$$

Se si riconosce  $\partial A(x, y, z(x, y)) / \partial y = \partial A / \partial z \partial z / \partial y + \partial A / \partial y$ , si può scrivere:

$$\int_S [\nabla \times (A \hat{\mathbf{e}}_x)] \cdot \hat{\mathbf{n}} = - \int_S \frac{\partial A}{\partial y} \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \hat{\mathbf{n}}}_{dR = dxdy} dS = - \int_R \frac{\partial A}{\partial y} dxdy = \int_\gamma A dx \quad (\text{A.14})$$

■

### A.3 Teorema della divergenza, del rotore e del gradiente

Vengono ora enunciati i teoremi della divergenza, del rotore e del gradiente. Senza entrare nei dettagli delle ipotesi dei teoremi, affinché i loro enunciati siano validi, gli oggetti matematici coinvolti devono almeno esistere. L'ipotesi di "sufficiente regolarità" dei campi vettoriali viene tradotta volgarmente nel comportamento regolare della funzione all'interno del dominio, che esclude l'esistenza di poli (punti del dominio in cui funzione tende all'infinito) e comprende l'esistenza (e la continuità) delle derivate spaziali del campo.

Per far intuire l'utilità dei due lemmi presentati in precedenza, si riportano anche le dimostrazioni dei teoremi: una volta noti i due utili(ssimi) lemmi, queste dimostrazioni sono così immediate da occupare soltanto una riga.

**Teorema A.3.1** [Teorema della divergenza] Si consideri un insieme  $V \subset R^n$  compatto delimitato da una superficie liscia  $S = \partial V$ . Se  $\mathbf{v}$  è un campo vettoriale differenziabile con continuità (di classe  $C^1$ ) definito in un intorno di  $V$ , allora

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} = \oint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (\text{A.15})$$

essendo  $\hat{\mathbf{n}}$  la normale alla superficie  $S$  uscente dal volume  $V$ .

*Dimostrazione.* Il teorema viene dimostrato scrivendo la divergenza in un sistema di coordinate cartesiane,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ , e applicando il lemma A.2.1 a ogni derivata parziale nella sommatoria,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} = \int_V \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \oint_S \sum_i v_i n_i = \oint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (\text{A.16})$$

■

**Teorema A.3.2 — Teorema del rotore.** In maniera abbastanza generale, sotto le ipotesi dei teoremi precedenti, vale

$$\int_S [\nabla \times \mathbf{v}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}}, \quad (\text{A.17})$$

avendo ommesso l'elemento di lunghezza  $d\ell$  nell'integrale di linea e avendo indicato con  $\hat{\mathbf{t}}$  il versore tangente alla curva  $\gamma$ .

*Dimostrazione.* Il teorema viene dimostrato utilizzando un sistema di coordinate cartesiane e applicando il lemma A.2.2 a ogni componente del vettore  $\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{e}}_x + v_y \hat{\mathbf{e}}_y + v_z \hat{\mathbf{e}}_z = \sum_i v_i \hat{\mathbf{e}}_i$ ,

$$\int_S [\nabla \times \mathbf{v}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_S \left[ \nabla \times \left( \sum_i v_i \hat{\mathbf{e}}_i \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_\gamma \sum_i v_i dx_i = \int_\gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_\gamma \sum_i v_i dx_i = \int_\gamma \hat{\mathbf{t}}, \quad (\text{A.18})$$

avendo utilizzato le coordinate cartesiane e la definizione di versore tangente per esprimere l'elemento di lunghezza,  $d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{t}} ds$ . ■

**Teorema A.3.3 — Teorema del gradiente.** In maniera abbastanza generale, sotto le ipotesi

dei teoremi precedenti, per un campo scalare  $f$  sufficientemente regolare vale

$$\int_V \nabla f = \oint_S f \hat{\mathbf{n}}. \quad (\text{A.19})$$

*Dimostrazione.* Il teorema viene dimostrato scrivendo il gradiente del campo scalare  $f$  in coordinate cartesiane,  $\nabla f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i$ , e applicando il lemma A.2.1 a ogni derivata parziale nella sommatoria,

$$\int_V \nabla f = \int_V \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i = \oint_S \sum_i f n_i \hat{\mathbf{e}}_i = \oint_S f \hat{\mathbf{n}}. \quad (\text{A.20})$$

■

Prima di continuare i richiami di analisi, viene fatta un'osservazione sulla notazione usata.

- R** Per indicare gli integrali di linea, superficie e volume verrà omissso l'elemento infinitesimo di linea, superficie e volume, indicando il dominio di integrazione di fianco al segno di integrale. In maniera esplicita l'integrale sulla linea  $\ell$ , sulla superficie  $S$  e sul volume  $V$  di una quantità scalare  $f$  verranno indicati semplicemente con

$$\int_{\ell} f, \quad \int_S f, \quad \int_V f. \quad (\text{A.21})$$

Il valore di un integrale è indipendente dalle coordinate utilizzate per svolgerlo. Per calcolare il valore dell'integrale è necessario introdurre un sistema di coordinate per parametrizzare in una maniera conveniente la funzione, il dominio e gli elementi infinitesimi di lunghezza, superficie o volume. Spesso questa scelta può essere dettata dalla geometria del dominio. Per completezza vengono riportate esplicitamente le espressioni degli elementi infinitesimi di:

- lunghezza (con vettore tangente) della curva  $\ell$ , descritta dalla parametrizzazione  $\ell : \mathbf{r} = \mathbf{r}(l) = \mathbf{r}(l(s)) = \tilde{\mathbf{r}}(s)$ ,

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dl} dl = \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{ds}}_{\hat{\mathbf{t}}} ds = \hat{\mathbf{t}} ds, \quad (\text{A.22})$$

avendo riconosciuto il vettore  $\hat{\mathbf{t}}$  tangente alla curva, introdotto l'ascissa curvilinea  $s$ , e indicato con  $\mathbf{r}(l)$  la parametrizzazione in funzione di  $l$  e con  $\tilde{\mathbf{r}}(s)$  la parametrizzazione in funzione di  $s$ .

- di superficie (con vettore normale) della superficie bidimensionale  $S$ , descritta dalla parametrizzazione  $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ,

$$\hat{\mathbf{n}} dS = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} du dv \quad (\text{A.23})$$

- di volume del volume tridimensionale  $V$ , descritto dalla parametrizzazione dello spazio  $V : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, w)$ ,

$$dV = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} du dv dw. \quad (\text{A.24})$$

Si fanno quindi alcuni esempi.

■ **Esempio A.2** Si vuole calcolare l'elemento infinitesimo di curva di una circonferenza  $C$  di raggio  $R$ . Si utilizza un sistema di riferimento cartesiano con origine nel centro della circonferenza e l'angolo  $\theta$  che il vettore posizione  $\mathbf{r}$  forma con l'asse  $x$  per parametrizzare la curva

$$C : \mathbf{r}(\theta) = x(\theta)\hat{\mathbf{x}} + y(\theta)\hat{\mathbf{y}} = R \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + R \sin \theta \hat{\mathbf{y}}. \quad (\text{A.25})$$

L'elemento di curva  $d\mathbf{r}$  risulta

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = (-\sin\theta\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\hat{\mathbf{y}}) R d\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}} R d\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}} ds, \quad (\text{A.26})$$

avendo introdotto l'ascissa curvilinea  $s = R\theta$  e il versore  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  tangente alla circonferenza.

■

■ **Esempio A.3** Si vuole calcolare la superficie elementare (con versore normale) di una superficie sferica  $S$  parametrizzata con gli angoli  $\varphi$  e  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\varphi, \theta) &= x(\varphi, \theta)\hat{\mathbf{x}} + y(\varphi, \theta)\hat{\mathbf{y}} + z(\varphi, \theta)\hat{\mathbf{z}} = \\ &= R \sin \varphi \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + R \sin \varphi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + R \cos \varphi \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Da un calcolo diretto, senza riportare tutti i passaggi, si ottiene

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} dS &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} d\varphi d\theta = \\ &= (\sin \varphi \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{z}}) R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = \\ &= \hat{\mathbf{R}} R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

■

■ **Esempio A.4** Si vuole calcolare il volume elementare di una volume  $V$  parametrizzato in coordinate sferiche, cioè con il raggio  $R$  e gli angoli  $\varphi$  e  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\varphi, \theta) &= x(R, \varphi, \theta)\hat{\mathbf{x}} + y(R, \varphi, \theta)\hat{\mathbf{y}} + z(R, \varphi, \theta)\hat{\mathbf{z}} = \\ &= R \sin \varphi \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + R \sin \varphi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + R \cos \varphi \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Da un calcolo diretto, senza riportare tutti i passaggi, si ottiene

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial R} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} dR d\varphi d\theta = \\ &= \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}} R^2 \sin \varphi dR d\varphi d\theta = \\ &= R^2 \sin \varphi dR d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

■

## A.4 Campi vettoriali conservativi

In alcuni casi l'integrale  $I = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}}$  è indipendente dal percorso di integrazione  $\gamma$ . L'indipendenza del valore dell'integrale  $I$  da  $\gamma$  è strettamente collegata all'idea di differenziale esatto: quando  $I$  è indipendente da  $\gamma$ , ma dipende solo dai suoi estremi  $a$ ,  $b$ , si può scrivere  $I = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \int_a^b d\phi = \phi(b) - \phi(a)$ . Se l'integrale di linea  $I$  su ogni curva nel dominio  $V$  dipende solo dagli estremi di integrazione, il campo vettoriale  $\mathbf{F}$  viene definito **conservativo**.

L'indipendenza del valore dell'integrale dal percorso di integrazione ha alcune conseguenze:

- l'integrale su ogni percorso chiuso è nullo:  $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ ;
- il campo  $\mathbf{F}$  può essere scritto come gradiente di una funzione scalare  $\phi$ , che assume il significato di potenziale:  $\mathbf{F} = \nabla \phi$ ;
- il rotore del campo vettoriale è nullo:  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$  (infatti  $\nabla \times \nabla \phi = 0$ , per ogni funzione scalare  $\phi$ ).

Le condizioni elencate sono quindi **condizioni necessarie** per l'indipendenza dell'integrale dal percorso di integrazione. Se prese a se stanti, esse non sono anche condizioni sufficienti. Affinchè la seconda e la terza condizione siano anche sufficienti, è necessario che il dominio sia semplicemente connesso.



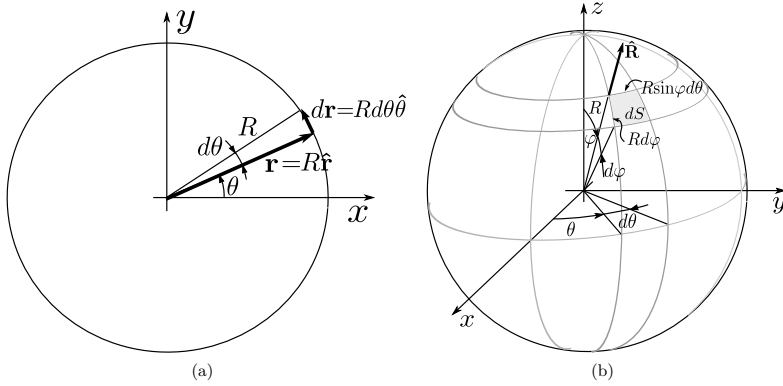


Figura A.2: Sistemi di coordinate usati negli esempi A.2-A.4. (a) Coordinate polari. (b) Coordinate sferiche.

Si fa ora un esempio su due campi vettoriali definiti su un dominio non semplicemente connesso, cioè dove tutti i percorsi chiusi sono riducibili a un punto. Entrambi hanno rotore nullo all'interno del dominio, ma solo uno dei due è conservativo.

■ **Esempio A.5** Dati i seguenti campi vettoriali

$$\mathbf{F}_1 = \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{y}} \quad , \quad \mathbf{F}_2 = -\frac{y}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{y}} \quad (\text{A.31})$$

si chiede di

1. definire il dominio e 'disegnare' i campi vettoriali;
2. calcolare il rotore, la divergenza e (se esiste) la funzione  $\phi$  t.c.  $\mathbf{F} = \nabla \phi$ ;
3. calcolare la circuitazione ( $\Gamma = \oint \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}}$ ) sulle circonferenze di raggio unitario  $C$  centrata in  $(0,0)$  e  $C'$  centrata in  $(2,1)$ ;
4. calcolare il flusso ( $\Phi = \oint \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ ) uscente dalle curve  $C$  e  $C'$ ;
5. calcolare l'integrale  $\int_\gamma \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}$  su una curva  $\gamma$  che avvolge due volte l'origine in senso antiorario.

1. Il dominio  $\Omega$  dei due campi vettoriali è  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ : non è semplicemente connesso.

*Osservazione.* A differenza di  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  è semplicemente connesso (perché?).

*Grafici...*

2. • **Rotore:** all'interno del dominio  $\Omega$  il rotore dei due campi vettoriali è nullo. Infatti, la componente lungo  $z$  è l'unica che può essere non nulla, poichè il campo è definito nel piano  $xy$  e dipende solo da  $x$  e  $y$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial F_{1x}}{\partial y} &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \\ \frac{\partial F_{2y}}{\partial x} - \frac{\partial F_{2x}}{\partial y} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

- **Divergenza:** all'interno del dominio  $\Omega$  la divergenza dei due campi vettoriali è nullo.  
(...)

- $\phi$ : all'interno del dominio  $\Omega$ , le funzioni  $\phi$ , a meno di una costante (ininfluente) valgono:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \quad , \quad \phi_2 = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{A.33})$$

Ad esempio per il campo  $\mathbf{F}_1$ , si può scrivere la relazione  $\mathbf{F} = \nabla\phi$  in coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{y}{x^2 + y^2} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Integrando la prima in  $x$  e la seconda in  $y$ :

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \int \frac{x}{x^2 + y^2} dx = \int \frac{1}{x^2 + y^2} d(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + f(y) \\ \phi(x, y) &= \int \frac{y}{x^2 + y^2} dy = \int \frac{1}{x^2 + y^2} d(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + g(x) \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

dove compaiono le funzioni  $f(y)$  e  $g(x)$ , che tengono conto dell'arbitrarietà dell'integrale di una derivata parziale: si pensi di fare la derivata parziale delle relazioni appena trovate. Derivando la prima rispetto a  $x$  si ha:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right) + \frac{\partial f(y)}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} + 0 \quad (\text{A.36})$$

La derivata  $\frac{\partial f(y)}{\partial x}$  è identicamente nulla, poichè la funzione  $f(y)$  non dipende da  $x$ .

Da un confronto tra le due forme di  $\phi$ , segue che  $f(y)$  e  $g(x)$  devono essere uguali e costanti: il valore di questa costante additiva è comunque ininfluente ai termini della definizione di un potenziale

3. • Circuitazione su  $C'$ : entrambi gli integrali calcolati su  $C'$  sono nulli, poichè il percorso di integrazione è una linea chiusa che non circonda l'origine ma una regione semplicemente connessa nella quale il campo ammette potenziale. In altre parole,  $C'$  circonda una regione del dominio che è semplicemente connessa ed è possibile applicare direttamente il teorema del rotore, avendo definito  $R'$  come la parte del dominio interna a  $C'$ .

$$\Phi = \oint_{C'} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \int_{R'} [\nabla \times \mathbf{F}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (\text{A.37})$$

poichè il rotore è nullo in tutto  $\Omega$  e quindi anche in  $R' \subset \Omega$ .

- Circuitazione su  $C'$ :  $C$  invece circonda l'origine, causa della non semplice connessione del dominio; una diretta applicazione del teorema del rotore non è quindi possibile; gli integrali su  $C$  devono essere calcolati e valgono:

$$I_1 = \oint_C \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad , \quad I_2 = \oint_C \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} = 2\pi \quad (\text{A.38})$$

I due integrali possono essere calcolati facilmente in coordinate polari. L'elemento  $d\mathbf{r}$  sulla circonferenza di raggio  $r$  è:

$$d\mathbf{r} = r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.39})$$

I due campi possono essere scritti in coordinate polari come:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{r} \hat{\mathbf{r}} \quad , \quad \mathbf{F}_2 = \frac{1}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.40})$$

Si può notare che il campo  $\mathbf{F}_1$ , calcolato sul contorno, è sempre perpendicolare ad esso. Il primo integrale è quindi nullo.

$$\begin{aligned} I_{1C} &= \int_C \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} 0 d\theta = 0 \\ I_{2C} &= \int_C \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

4. • Flussi su  $C'$ : Poichè  $R'$  (vedi sopra) è semplicemente connesso, si può applicare il teorema della divergenza. I flussi di entrambi i campi su  $C'$  sono nulli, poichè la divergenza dei due campi è nulla in tutto il dominio  $\Omega$ .
- Flussi su  $C$ :  $C$  invece circonda l'origine, causa della non semplice connessione del dominio; una diretta applicazione del teorema della divergenza non è quindi possibile; gli integrali su  $C$  devono essere calcolati e valgono:

$$\Phi_{C1} = \oint_C \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{n} = 2\pi \quad , \quad \Phi_{C2} = \oint_C \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{n} = 0 \quad (\text{A.42})$$

5. L'integrale di  $\int_C \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}$  vale  $4\pi$ .

- Se la circuitazione calcolata sul contorno  $C$  vale  $\Gamma$  ( $2\pi$  nel caso dell'esercizio), la circuitazione calcolata su qualsiasi altra curva  $l$  che avvolge l'origine una sola volta avrà lo stesso valore. Infatti, se viene introdotto il 'taglio'  $\gamma_c$  (invalicabile), si ottiene che il dominio 'tagliato' è semplicemente connesso e la circuitazione sul suo contorno ( $l \cup \gamma_c \cup C^- \cup \gamma_c^-$ ) è nulla, dove con  $C^-$  si è indicata la circonferenza percorsa in senso orario. Ricordando che i contributi su  $\gamma_c$  si annullano a vicenda e che se si inverte il verso di percorrenza di una curva la circuitazione cambia segno:

$$0 = \int_{l \cup \gamma_c \cup C^- \cup \gamma_c^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_c} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_c^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{A.43})$$

E quindi:  $\int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma$ .

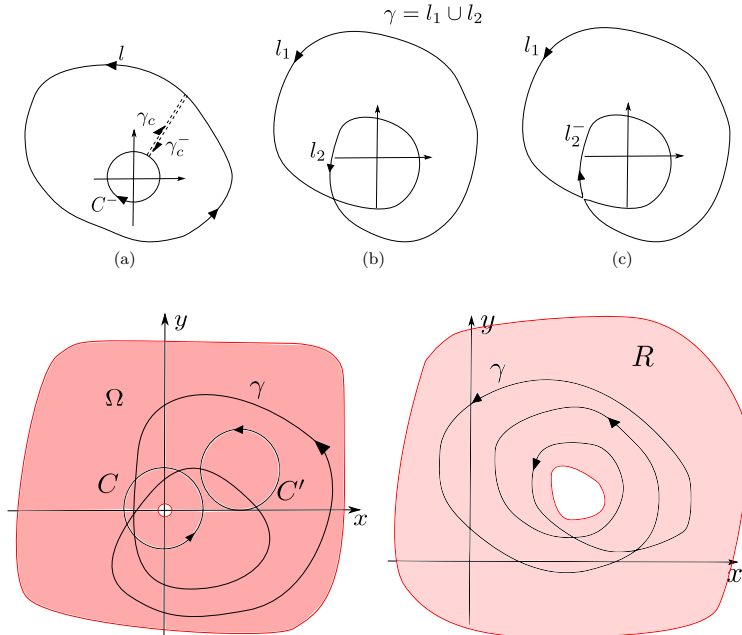
- Ora il percorso  $\gamma$  può essere 'suddiviso' nelle curve  $l_1, l_2$ . Si può definire ora la curva composta da  $l_1$  e  $l_2^-$  (il verso è importante!!). Con ragionamenti analoghi a quelli fatti in precedenza:

$$0 = \int_{l_1 \cup l_2^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{A.44})$$

Da questo si ricava che  $\int_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma$ . Poichè l'integrale su  $\gamma$  è la somma dei due integrali, si ottiene:

$$\int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{l_1 \cup l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\Gamma = 4\pi \quad (\text{A.45})$$

■



(a) Percorsi di integrazione dell'esercizio.  $C$  avvolge una volta sola in 'buco' nel dominio,  $C'$  mai,  $\gamma$  due volte.

(b) Integrale su un percorso non riducibile. Il dominio  $R$  (in rosa) non è semplicemente connesso. Si può dimostrare che se l'integrale  $I_1$  definito su un percorso 'che circonda' una sola volta 'il buco' all'interno del dominio  $I_1 = \oint_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma$ , allora l'integrale  $I$  definito su  $\gamma$  che circonda  $N$  (indice di avvolgimento) volte 'il buco' nello stesso verso di  $l_1$ , vale  $I_1 = \oint_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = N\Gamma$ .

## A.5 Descrizione lagrangiana e descrizione euleriana

La dinamica dei mezzi continui, ad esempio i solidi o i fluidi, può essere descritta con un approccio lagrangiano o euleriano. La **descrizione lagrangiana**, utilizzata spesso in meccanica dei solidi, consiste nel seguire il moto nello spazio delle singole particelle del mezzo continuo. La **descrizione euleriana**, utilizzata spesso in meccanica dei fluidi, consiste nel fissare un volume di controllo e descrivere la variazione delle quantità meccaniche al suo interno, tenendo in considerazione i flussi della quantità meccanica attraverso le pareti fisse del volume di controllo. È possibile descrivere l'evoluzione delle quantità meccaniche di particelle e volumi in moto arbitrario, come si vedrà in §.

Si introducono due sistemi di coordinate: uno è solidale con il mezzo continuo che occupa il volume  $V(t)$  dipendente dal tempo, mentre l'altro è fisso. Si può pensare al sistema di riferimento solidale con il continuo come un' "etichetta" che viene applicata a ogni **punto materiale** del mezzo continuo che occupa il volume  $V(t)$ . Un sistema di riferimento fisso è indipendente dal moto del mezzo continuo, come ad esempio il sistema di coordinate cartesiane, la cui origine e i cui assi sono fissi nel tempo. Mentre il volume  $V(t)$

cambia nel tempo (trasla, ruota, si deforma ...), un punto del volume  $V(t)$  ha coordinate costanti  $\mathbf{x}_0$  rispetto al sistema di riferimento solidale al volume, cioè che si muove e si deforma insieme al volume: questa coordinata, detta lagrangiana, può essere pensata come l'“etichetta” assegnata al punto materiale del continuo. La coordinata euleriana  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ , relativa al sistema di riferimento fisso, descrive il moto del punto.

**R** Il sistema di riferimento solidale al corpo, dipende dal tempo mentre le coordinate  $\mathbf{x}_0$  di un punto del volume sono costanti. Il sistema di riferimento è indipendente dal tempo, mentre le coordinate  $\mathbf{x}$  di un punto materiale del volume (quindi con  $\mathbf{x}_0$  costante) sono dipendenti dal tempo.

Assumendo che all'istante  $t = 0$  i due sistemi coincidano (e quindi  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0$ ), si può pensare alle coordinate  $\mathbf{x}_0$  come una configurazione di riferimento della configurazione attuale  $\mathbf{x}$ . La trasformazione  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  descrive l'evoluzione dei punti  $\mathbf{x}_0$  del volume  $V_0 = V(0)$  nel tempo  $t$ . La velocità del punto etichettato con  $\mathbf{x}_0$  (cioè quello passante in  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  in  $t = 0$ ) nel sistema di riferimento fisso è

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} =: \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (\text{A.46})$$

Sia  $f(\mathbf{x}, t)$  una funzione (scalare, vettoriale, tensoriale) dipendente sia dallo spazio, sia dal tempo, si indica con  $\frac{\partial f}{\partial t}$  la derivata parziale rispetto al tempo, che tiene conto delle variazioni del valore di  $f$  in punto  $\mathbf{x}$  costante.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} \quad (\text{A.47})$$

Si riporta poi per completezza e per dare un'interpretazione anche la definizione di  $\frac{df}{dt}$ , già usata sopra nella definizione della velocità di un punto del volume

$$\frac{df}{dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} \quad (\text{A.48})$$

che viene svolta a  $\mathbf{x}_0$  costante: questa derivata temporale è quella che consente di considerare la variazione della funzione  $f$ , percepita dal punto etichettato  $\mathbf{x}_0$  che evolve con il volume. Non è difficile trovare il legame tra le due derivate utilizzando semplicemente la legge di derivazione di funzioni composte. Data una funzione  $f(\mathbf{x}, t)$ , si definisce  $f_0(\mathbf{x}_0, t)$  come la funzione composta  $f_0 = f \circ \mathbf{x}$ .

$$f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) = f_0(\mathbf{x}_0, t) = f_0(\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t), t) \quad (\text{A.49})$$

Si può quindi scrivere

$$\frac{df}{dt} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_t \cdot \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} + \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f \quad (\text{A.50})$$

dove si è riconosciuto l'operatore  $\nabla$  nell'ultimo passaggio. Si può infine “rimuovere” la funzione  $f$  per ottenere la relazione tra la forma delle due derivate, valida per funzioni scalari, vettoriali, tensoriali

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (\text{A.51})$$

## A.6 Derivata temporale di integrali su domini dipendenti dal tempo: formule di Leibniz

In questa sezione si enunciano e dimostrano i teoremi per la derivazione in tempo su domini mobili di integrali di volume, flussi e circuitazioni.

**Teorema A.6.1 — Integrale di volume (Teorema di Reynolds).**

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} + \oint_{S(t)} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{A.52})$$

*Dimostrazione.* Il volume al tempo  $t + \Delta t$  può essere pensato come la somma del volume al tempo  $t$  e della variazione di volume  $v(t, \Delta t)$ , che si riscontra nell'unione, con segno, dei volumi di integrazione: formalmente “ $V(t + \Delta t) = V(t) + v(t, \Delta t)$ ”. Il volume elementare  $dv$  può essere ricavato dal prodotto scalare tra la superficie elementare (con normale uscente)  $\hat{\mathbf{n}} dS$  e lo spazio infinitesimo percorso dal punto della superficie  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{v} \Delta t$ , trascurando gli infinitesimi di ordine superiore:  $dv = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \Delta t dS$ , cfr. figura A.3. Infine è possibile usare l'espansione di serie  $f(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f(\mathbf{x}, t) + \partial f / \partial t (\mathbf{x}, t) \Delta t$ . Si scrive l'incremento dell'integrale di volume:

$$\begin{aligned} \int_{V(t+\Delta t)} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) &= \\ &= \int_{V(t)} [f(\mathbf{x}, t + \Delta t) - f(\mathbf{x}, t)] + \int_{v(t)} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \\ &= \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \Delta t + \oint_{S(t)} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta t \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Dividendo per  $\Delta t$ , nel limite  $\Delta t \rightarrow 0$  è possibile riconoscere a sinistra dell'uguale la derivata desiderata e scrivere:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \oint_{S(t)} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{A.54})$$

■

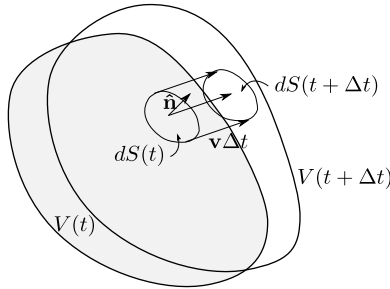


Figura A.3: Schema che illustra il moto della volume  $V$ , tra gli istanti temporali  $t$  e  $t + \Delta t$ . Il volume  $V$  ha come frontiera la superficie esterna  $S$ . Viene messo in evidenza un elemento infinitesimo  $dS$  della superficie  $S$  e viene descritta la sua evoluzione. Si osservi la convenzione del versore normale  $\hat{\mathbf{n}}$ , uscente dalla superficie  $S$ . Il volume si muove all'interno di un dominio nel quale è definito il campo  $f(\mathbf{x}, t)$ , non rappresentato in figura.

**Teorema A.6.2 — Derivata temporale del flusso.**

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{S(t)} \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{v} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\gamma(t)} \mathbf{f} \times \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad (\text{A.55})$$

*Dimostrazione.* Si procede in maniera analoga a quanto fatto in precedenza per l'integrale di volume. Per ricavare l'identità è richiesta la “sufficiente regolarità” del campo, poichè viene utilizzato il teorema della divergenza. Si scrive l'incremento del flusso

$$\begin{aligned} \int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t + \Delta t) \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{S(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \\ &= \int_{S(t+\Delta t)} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{S(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

Facendo riferimento alla figura A.4, si applica il teorema della divergenza al volume (volume elementare  $dv = dS(t) \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \Delta t$ ) delimitato dalle superfici  $S(t + \Delta t)$ ,  $S(t)$  e dalla superficie laterale  $S_{lat}$ , che ha per elemento di superficie  $\hat{\mathbf{n}} dS_{lat} = d\hat{\mathbf{t}} \times \mathbf{v} \Delta t$ , da considerarsi con segno, e si ottiene

$$\int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{S(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\gamma(t)} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{t}} \times \mathbf{v} \Delta t = \int_{S(t)} (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta t \quad (\text{A.57})$$

Si rielaborano i termini in (A.57) usando la proprietà ciclica del prodotto misto  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$  e le proprietà del prodotto vettoriale. Si sostituisce poi in (A.56), si divide per  $\Delta t$  e si riconosce la derivata cercata facendo tendere al limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , concludendo così la dimostrazione:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{S(t)} \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{v} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\gamma(t)} \mathbf{f} \times \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad (\text{A.58})$$

■

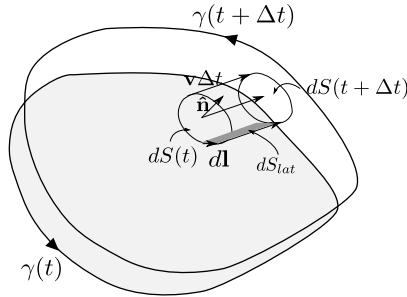


Figura A.4: Schema che illustra il moto della superficie  $S$ , tra gli istanti temporali  $t$  e  $t + \Delta t$ . La superficie  $S$  ha come frontiera la curva  $\gamma$ . Vengono messi in evidenza l'elemento di superficie  $\hat{\mathbf{n}} dS$ , l'elemento di superficie laterale  $\hat{\mathbf{n}}_{lat} dS_{lat} = d\hat{\mathbf{t}} \times \mathbf{v} \Delta t$  del volumetto infinitesimo  $dv$ . Si osservi la convenzione che lega il verso di percorrenza della frontiera  $\gamma$  con la normale  $\hat{\mathbf{n}}$  alla superficie tramite la regola della mano destra. La superficie si muove all'interno di un dominio nel quale è definito il campo  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ , non rappresentato in figura.

**Teorema A.6.3 — Derivata temporale della circuizione.**

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma(t)} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \int_{\gamma(t)} \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{f}) \times \mathbf{v} \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \Big|_A^B \quad (\text{A.59})$$

*Dimostrazione.* Seguendo un procedimento analogo a quello svolto finora si scrive l'incremento dell'integrale desiderato. Per ricavare l'identità è richiesta la “sufficiente regolarità” del campo, poichè viene utilizzato il teorema del rotore.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(t+\Delta t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t + \Delta t) \cdot \hat{\mathbf{t}} - \int_{\gamma(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{t}} &= \\ = \int_{\gamma(t+\Delta t)} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{t}} + \int_{\gamma(t+\Delta t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{t}} - \int_{\gamma(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{t}} \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Facendo riferimento alla figura A.5, si applica il teorema della rotore alla superficie (superficie elementare  $\hat{\mathbf{n}} dS = d\hat{\mathbf{t}} \times \mathbf{v} \Delta t$ ) delimitata dalle curve  $\gamma(t + \Delta t)$ ,  $\gamma(t)$  e dalle curve “laterali”  $\Delta \mathbf{x}_A = \mathbf{v}_A \Delta t$ ,  $\Delta \mathbf{x}_B = \mathbf{v}_B \Delta t$ , da considerarsi con segno, e si ottiene

$$- \int_{\gamma(t+\Delta t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{t}} + \int_{\gamma(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{t}} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_B, t) \cdot \mathbf{v}_B \Delta t - \mathbf{f}(\mathbf{x}_A, t) \cdot \mathbf{v}_A \Delta t = \int_{\gamma(t)} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \hat{\mathbf{t}} \times \mathbf{v} \Delta t \quad (\text{A.61})$$

Si rielaborano i termini in (A.61) usando la proprietà ciclica del prodotto misto  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}$  e le proprietà del prodotto vettoriale. Si sostituisce poi in (A.60), si divide per  $\Delta t$  e si riconosce la derivata cercata facendo tendere al limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , concludendo così la dimostrazione:

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma(t)} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \int_{\gamma(t)} \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{f}) \times \mathbf{v} \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \Big|_A^B \quad (\text{A.62})$$

Se il campo  $\mathbf{f}$  e la curva  $\gamma(t)$  sono continui e la curva  $\gamma(t)$  è chiusa, i termini di contorno si annullano. Si ottiene così la derivata della circuizione

$$\frac{d}{dt} \oint_{\gamma(t)} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \oint_{\gamma(t)} \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{f}) \times \mathbf{v} \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad (\text{A.63})$$

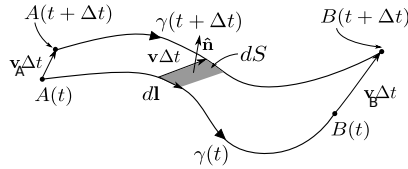


Figura A.5: Schema che illustra il moto della curva  $\gamma$ , tra gli istanti temporali  $t$  e  $t + \Delta t$ . La curva  $\gamma$  ha come frontiera i punti  $A(t)$  e  $B(t)$ . Vengono messi in evidenza l'elemento di lunghezza  $d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{t}} dl$  e l'elemento di superficie tra le due curve  $\hat{\mathbf{n}} dS = d\mathbf{l} \times \mathbf{v} \Delta t$ . Si osservi che per applicare il teorema del rotore con la normale scelta in figura, è necessario invertire il verso di percorrenza (e di conseguenza i segni degli integrali, cfr. eq. A.61) della curva  $\gamma(t + \Delta t)$  e del segmento elementare  $\mathbf{v}_A \Delta t$ , al fine di rispettare la convenzione dettata dalla regola della mano destra che lega la normale a una superficie e il verso di percorrenza della sua frontiera (cfr. figura A.4). La curva si muove all'interno di un dominio nel quale è definito il campo  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ , non rappresentato in figura.



### A.7 Rappresentazione del termine di derivata temporale nelle equazioni di bilancio

Nella forma integrale delle equazioni di bilancio per un volume materiale  $V(t)$  che descrivono la dinamica di un mezzo continuo compare la derivata temporale dell'integrale di volume della quantità fisica di interesse,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f. \quad (\text{A.64})$$

Il volume materiale  $V(t)$  si muove con la velocità del mezzo continuo e il teorema di Reynolds A.6.1 permette di rielaborare questo termine ed esprimere questa derivata temporale in termini di integrali svolti su un volume di controllo  $V_c$  fisso nello spazio. Tramite il teorema di Reynolds A.6.1 lo stesso termine può essere scritto in termini di integrali svolti su un volume generico  $v(t)$  in moto arbitrario, che risulta solido nel sistema di coordinate  $\chi$ . Il cambio di coordinate preso in considerazione ora è  $\mathbf{x}(\chi, t)$ , dove  $\chi$  può essere pensato come il sistema di “etichettatura” applicato ai punti del volume  $v(t)$ . Rispetto al sistema di riferimento fisso  $\mathbf{x}$ , le particelle di tale volume sono in moto con velocità

$$\mathbf{w} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\chi} \mathbf{x}(\chi, t). \quad (\text{A.65})$$

Il volume  $v(t)$  risulta quindi definito dalla sua condizione iniziale e dalla velocità  $\mathbf{w}$  dei punti della sua superficie. La derivata sul volume mobile  $v(t)$  è

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} f dv &= \quad (\text{thm Reynolds per } v(t)) \\ &= \int_{v(t)} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} f dv + \oint_{\partial v(t)} f \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad \left( + \oint_{\partial v(t)} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \oint_{\partial v(t)} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right) \\ &= \int_{v(t)} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} f dv + \oint_{\partial v(t)} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds - \oint_{\partial v(t)} f (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad (\text{thm di Reynolds per } V(t)) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{V(t) \equiv v(t)} f dV - \oint_{\partial v(t)} f (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds, \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

dove è stata usata la formula ricavata in precedenza per  $\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dV$ .

Quanto scritto vale per qualsiasi volume  $v(t)$  in moto generico con velocità  $\mathbf{w}$  della superficie  $\partial v(t)$  a qualsiasi istante di tempo. Se si considerano il volume di controllo  $V_c$  (fisso,  $\mathbf{w} = 0$ ) e il volume generico  $v(t)$  coincidenti al tempo  $t$  con il volume materiale  $V(t)$  (in moto con la stessa velocità  $\mathbf{w} = \mathbf{v}$  del continuo), si ricava la regole per trasformare la derivata temporale su un dominio materiale  $V(t)$  usata nell'approccio lagrangiano, in termini di integrali svolti sul volume di controllo  $V_c$  e sul suo contorno  $S_c$ , impiegati nella descrizione euleriana del problema, come caso particolare della descrizione euleriana di un volume  $v(t)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} f &= \quad (\text{Lagrange}) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{V_c \equiv V(t)} f + \oint_{\partial V_c \equiv \partial V(t)} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{Eulero}) \quad (\text{A.67}) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{v(t) \equiv V(t)} f + \oint_{\partial v(t) \equiv \partial V(t)} f (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{“ALE”}) \end{aligned}$$

Si sono ottenute le tre forme di rappresentazione più comuni per la derivata di integrali su volumi mobili per problemi di meccanica del continuo. Quando vengono scritte le equazioni

di bilancio (ad esempio massa, quantità di moto, energia ...) in forma integrale, queste possono essere scritte per

- un volume materiale, le cui particelle sono in moto con la stessa velocità del continuo (sia esso un fluido, un solido elastico o no, ...): se la velocità  $\mathbf{v}$  dei punti volume  $V(t)$  coincide con quella di punti del continuo, il volume  $V(t)$  è un volume materiale.
- un volume di controllo, fisso:  $V_c$
- un volume in moto generico: usiamo il volume  $v(t)$  i cui punti si muovono con velocità  $\mathbf{w}$  generica.

Quando le equazioni di bilancio vengono scritte riferite ai tre volumi elencati sopra, si definiscono i tre tipi di rappresentazione usati in meccanica del continuo (di nuovo, sia esso un fluido, un solido, ...)

- rappresentazione **lagrangiana**: si segue l'evoluzione del continuo seguendo la traiettoria di ogni particella. Il volume mobile nel sistema di riferimento "fisso", si muove con la stessa velocità delle particelle; questa descrizione viene usata frequentemente in meccanica dei solidi, quando gli spostamenti delle particelle sono sufficientemente piccoli e il determinante  $J$  della trasformazione è non singolare (e spesso  $\approx 1$ , es. piccole deformazioni).
- rappresentazione **euleriana**: si segue l'evoluzione del continuo sfruttando il volume di controllo  $V_c$  solidale al sistema di riferimento "fisso" e scrivendo le equazioni di bilancio considerando le variazioni dovute alla sola variazione in tempo e ai flussi attraverso la superficie del volume di controllo. Questa descrizione viene frequentemente usata in meccanica dei fluidi, dove spesso gli spostamenti delle particelle sono "molto grandi".
- rappresentazione **arbitraria** (ALE: arbitrary Lagrangian Eulerian): il volume  $v(t)$  ha un moto "generale", indipendente da quello delle particelle del continuo: la variazione della quantità è composta dalla sola variazione temporale e dal contributo dei flussi "relativi" attraverso la superficie del volume di controllo (se  $\mathbf{v}$  è la velocità delle particelle e  $\mathbf{w}$  quella della superficie del volume  $v(t)$  rispetto allo stesso sistema di riferimento,  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$  è la velocità relativa del fluido rispetto al volume  $v(t)$ ). Può essere spesso usata quando il dominio del problema varia nel tempo: si pensi a una simulazione numerica di una corrente attorno a un corpo rigido che subisce degli spostamenti o rotazioni (moderate) nel tempo o una corrente attorno a un'ala deformabile.

Si noti come la rappresentazione "ALE" generalizza le altre due. Se il volume  $v(t)$  coincide con il volume materiale  $V(t)$  si ritorna alla descrizione lagrangiana: allora  $\mathbf{w} = \mathbf{v}$  e non c'è flusso attraverso la superficie. Se il volume  $v(t)$  coincide con il volume materiale  $V_c$ , allora  $\mathbf{w} = 0$  e si ottiene la rappresentazione euleriana.

### A.8 Bilanci integrali

I bilanci integrali vengono scritti partendo da un volume materiale  $V(t)$  qualsiasi, partendo dai principi della fisica classica

- conservazione della massa;
- prima e seconda equazione cardinale della dinamica;
- bilancio di energia totale, somma di meccanica ed interna, che include i termini di flusso di calore, e che può essere ricondotto al primo principio della termodinamica.

#### A.8.1 Bilancio di massa

La massa di un volume materiale  $V(t)$  è costante nel tempo, poichè il volume materiale è costituito sempre dalle stesse particelle del continuo.

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho = 0 \quad (\text{A.68})$$

#### A.8.2 Prima equazione cardinale e bilancio della quantità di moto

La prima equazione cardinale della dinamica lega la quantità di moto  $\mathbf{Q}$  di un sistema alla risultante delle forze esterne  $\mathbf{R}^{ext}$  agenti su di esso.

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}^{ext} \quad (\text{A.69})$$

Separando i contributi di forze di volume e di superficie, il bilancio di quantità di moto per un volume materiale  $V(t)$  arbitrario

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} = \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n + \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} \quad (\text{A.70})$$

avendo indicato con  $\mathbf{t}_n$  il vettore sforzo agente sulla superficie esterna  $S(t)$  del volume materiale e  $\mathbf{g}$  le forze per unità di massa (come ad esempio l'accelerazione di gravità).

#### A.8.3 Seconda equazione cardinale e bilancio del momento della quantità di moto

La seconda equazione cardinale della dinamica lega il momento della quantità di moto  $\Gamma_H$  rispetto a un polo H con il momento risultante delle azioni esterne  $\mathbf{M}^{ext}$  (e con il moto del polo H)

$$\frac{d\Gamma_H}{dt} = -\dot{\mathbf{x}}_H \times \mathbf{Q} + \mathbf{M}^{ext} \quad (\text{A.71})$$

Se si considera un polo H fisso e si indica con  $\mathbf{r}$  il raggio vettore dal polo H ai “punti fisici” del volume materiale, il bilancio integrale di momento angolare per un volume materiale (in assenza di coppie esterne) è

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{u} = \oint_{S(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n + \int_{V(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{g} \quad (\text{A.72})$$

#### A.8.4 Bilancio di energia totale

L'energia totale di un sistema è la somma della sua energia interna e cinetica. La variazione di energia totale è dovuta al lavoro delle forze agenti sul sistema e ai flussi di calore attraverso la superficie del volume (in assenza di fonti di calore interne al volume).

$$\frac{dE^{tot}}{dt} = L - Q \quad (\text{A.73})$$

dove con  $L$  si è indicato il lavoro svolto sul sistema e con  $Q$  i flussi di calore uscenti da esso. Per un volume materiale

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e^{tot} = \oint_{S(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_n + \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \oint_{S(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{A.74})$$

dove  $\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  positivo indica un flusso di calore uscente. L'energia totale per unità di massa può essere scritta come somma del contributo interno e del contributo cinetico

$$e^t = e + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \quad (\text{A.75})$$

Introducendo la definizione di entalpia  $h = e + Pv = e + P/\rho$  ci si può ricondurre a molti casi analizzati durante il corso di Fisica Tecnica, partendo ora da unquadro generale sui bilanci integrali: partendo dai bilanci generali, si possono introdurre le ipotesi di sistema chiuso, adiabatico o isolato, annullando i termini di flusso di massa, di flusso di calore o i termini di energia e calore. Il bilancio di energia per un volume di controllo  $V_c$  fisso (vedi sezione successiva), dopo aver scritto il termine di sforzo separando il contributo di pressione da quello di sforzi viscosi  $\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{s}_n$ , diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho e^t &= - \oint_{S_c} \rho e^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_c} P \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{S_c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}_n + \int_{V_c} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \oint_{S_c} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = (\rho h^t = \rho(e^t + P/\rho)) \\ &= - \oint_{S_c} \rho h^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{S_c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}_n + \int_{V_c} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \oint_{S_c} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

avendo messo in evidenza il flusso di entalpia totale  $h^t$ .

### A.8.5 Bilanci integrali per volumi in moto arbitrario

I bilanci integrali per un volume  $v(t)$  in moto generico con velocità  $\mathbf{w}$  possono essere ricavati partendo da quelli per un volume  $V(t)$  materiale, ricavati nella sezione precedente, con l'utilizzo del teorema del trasporto di Reynolds per modificare il termine di derivata temporale. Per un volume  $v(t)$ , la cui superficie  $\partial s(t)$  ha velocità  $\mathbf{w}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho + \oint_{s(t)} \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{u} + \oint_{s(t)} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{s(t)} \mathbf{t}_n + \int_{v(t)} \rho \mathbf{g} \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{u} + \oint_{s(t)} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{u})(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{s(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n + \int_{v(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{g} \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^{tot} + \oint_{s(t)} \rho e^t(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{s(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_n + \int_{v(t)} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \oint_{s(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

Per un volume di controllo  $V_c$  fisso,  $\mathbf{w} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho + \oint_{S_c} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \mathbf{u} + \oint_{S_c} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{S_c} \mathbf{t}_n + \int_{V_c} \rho \mathbf{g} \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{u} + \oint_{S_c} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{S_c} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n + \int_{V_c} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{g} \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho e^t + \oint_{S_c} \rho e^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{S_c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_n + \int_{V_c} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} - \oint_{S_c} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$



## B. Introduzione al calcolo tensoriale

Le equazioni che descrivono i fenomeni fisici hanno carattere tensoriale, cioè sono indipendenti dal sistema di coordinate nelle quali vengono scritte. È importante capire la natura tensoriale delle leggi fisiche, capirne l'*invarianza* rispetto ai sistemi di coordinate ed essere in grado di scrivere correttamente le equazioni nei sistemi di coordinate più vantaggiosi per la descrizione del fenomeno fisico e per la soluzione dei problemi.

In questo capitolo verrà usata la notazione di Einstein: è sottintesa la sommatoria sugli indici ripetuti in una espressione. Per chiarezza,

$$a_k b_k = \sum_k a_k b_k. \quad (\text{B.1})$$

Si considerano qui **solo spazi vettoriali dotati di prodotto interno**, per i quali è possibile evitare di introdurre concetti più generali, ma più astratti e del tutto inessenziali per una prima introduzione ai tensori e al calcolo tensoriale: ad esempio è possibile “schivare” le definizioni di spazio e base duale (parente di quella che qui verrà chiamata *base reciproca*), isomorfismi e altri concetti più “matematici”. Vengono comunque dati alcuni riferimenti per una trattazione esaustiva dell’argomento.

### B.1 Richiami di algebra lineare

**Definizione B.1.1 — Componenti contravarianti.** Sia  $\mathcal{V}$  uno spazio vettoriale, sia  $\mathbf{v}$  un elemento di  $\mathcal{V}$  e  $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$  una base<sup>a</sup> di  $\mathcal{V}$ ; si può scrivere il vettore  $\mathbf{v}$  in componenti rispetto alla base  $\{\mathbf{b}_k\}$

$$\mathbf{v} = v^k \mathbf{b}_k, \quad (\text{B.2})$$

dove gli scalari  $v^k$  sono definiti componenti contravarianti (rispetto alla base  $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$  del vettore  $\mathbf{v}$ ).

<sup>a</sup>Una base è un insieme minimale di vettori linearmente indipendenti. La dimensione dello spazio

vettoriale coincide con il numero di elementi di una sua base.

**Definizione B.1.2 — Base reciproca.** Data la base  $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$  di  $\mathcal{V}$ , la sua base reciproca è definita come l'insieme di vettori  $\{\mathbf{b}^k\}_{k=1:N}$  tali che

$$\mathbf{b}^i \cdot \mathbf{b}_k = \delta_k^i, \quad (\text{B.3})$$

dove con  $\delta_k^i$  è stata indicata la delta di Kronecker, uguale a 1 quando gli indici sono uguali, uguale a 0 altrimenti.

**(R)** La base reciproca è anch'essa una base dello spazio  $\mathcal{V}$ . Nella trattazione più generale (e astratta) all'algebra tensoriale, si introduce lo spazio duale  $\mathcal{V}^*$  dello spazio  $\mathcal{V}$ , la cui base viene definita base duale. In generale lo spazio duale  $\mathcal{V}^*$  differisce dallo spazio  $\mathcal{V}$  e di conseguenza, una base dello spazio  $\mathcal{V}$  e la sua base duale sono diverse.

**Definizione B.1.3 — Componenti covarianti.** Date la base  $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$  di  $\mathcal{V}$  e la sua base reciproca  $\{\mathbf{b}^k\}_{k=1:N}$ , le componenti covarianti  $v_k$  sono le componenti del vettore  $\mathbf{v}$  nella base reciproca

$$\mathbf{v} = v_k \mathbf{b}^k. \quad (\text{B.4})$$

**(R)** In generale, la base reciproca  $\{\mathbf{b}^k\}_{k=1:N}$  non coincide con la base  $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$  e di conseguenza le componenti contravarianti e covarianti di un vettore sono diverse,  $v^k \neq v_k$ .

Risulta quindi fondamentale prestare attenzione alla posizione degli indici e dei pedici. Nel seguito, dopo aver ristretto la trattazione generale a casi più particolari, si ridurrà l'esigenza di prestare attenzione alla posizione degli indici: un esempio in cui è possibile confondere pedici e apici è costituito dalle *componenti fisiche* di tensori espressi in sistemi di *coordinate curvilinee ortogonali*, come verrà dimostrato nel paragrafo B.3.4.

**Notazione B.1.** Per distinguere gli oggetti covarianti da quelli contravarianti nelle formule, viene usata la seguente convenzione:

- gli oggetti **covarianti** sono indicati con i **pedici**;
- gli oggetti **contravarianti** sono indicati con gli **apici**.

**(R)** I termini “covariante” e “contravariante” si riferiscono alla legge di trasformazione dell'oggetto (componenti o vettori della base) al quale sono riferiti, in seguito a un cambiamento della base. In particolare, gli oggetti covarianti sono quelli che seguono la stessa legge di trasformazione degli elementi della base  $\{\mathbf{b}^k\}_{k=1:N}$ , mentre gli oggetti contravarianti seguono la trasformazione inversa, come si vedrà meglio paragrafo B.1.2.

Un vettore e tutti gli oggetti **invarianti** al cambio di sistemi di riferimento (tensori), devono avere componenti contravarianti se riferite a un elemento di una base covariante, componenti covarianti se riferite a un elemento della base contravariante (che si scoprirà essere la base reciproca).

### B.1.1 Trasformazione tra oggetti controvarianti e covarianti: regola per “alzare e abbassare gli indici”.

Gli elementi di una base di uno spazio vettoriale non sono necessariamente ortogonali (né tantomeno ortonormali) tra di loro. Si definiscono i valori dei prodotti scalari degli

elementi della base  $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$  e della base reciproca  $\{\mathbf{b}^k\}_{k=1:N}$  come

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j && \neq \delta_{ij} \text{ in generale} \\ g^{ij} &= \mathbf{b}^i \cdot \mathbf{b}^j && \neq \delta_{ij} \text{ in generale.} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

I simboli  $g_{ik}$  e  $g^{ik}$  sono simmetrici rispetto alla permutazione degli indici. Se questi i simboli  $g_{ik}$  vengono raccolti nella matrice  $G$ , questa matrice è simmetrica: i due indici possono quindi rappresentare indifferentemente la riga o la colonna della matrice  $G$ . Si può dimostrare che la matrice che raccoglie i simboli  $g^{ik}$  è la matrice inversa di  $G$ .

La regola per ricavare un vettore di una base rispetto a quelli dell'altra è

$$\mathbf{b}_i = g_{ik} \mathbf{b}^k, \quad \mathbf{b}^i = g^{ik} \mathbf{b}_k. \quad (\text{B.6})$$

Infatti, inserendo la prima nella definizione di  $g_{ij}$  si ottiene la seguente identità

$$g_{ij} = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = g_{ik} \mathbf{b}^k \cdot \mathbf{b}_j = g_{ik} \delta_j^k = g_{ij}. \quad (\text{B.7})$$

Le relazioni (B.6) possono essere scritte in forma matriciale,

$$\begin{aligned} [\mathbf{b}_1 | \dots | \mathbf{b}_N] &= [\mathbf{b}^1 | \dots | \mathbf{b}^N] [g_{ik}] = [\mathbf{b}^1 | \dots | \mathbf{b}^N] G, \\ [\mathbf{b}^1 | \dots | \mathbf{b}^N] &= [\mathbf{b}_1 | \dots | \mathbf{b}_N] [g^{ik}] = [\mathbf{b}_1 | \dots | \mathbf{b}_N] G^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

La regola per ricavare una componente di un vettore  $\mathbf{v}$  in una base, in funzione delle componenti della base reciproca è

$$v_i = g_{ik} v^k, \quad v^i = g^{ik} v_k. \quad (\text{B.9})$$

Questa regola viene dimostrata facilmente scrivendo il vettore  $\mathbf{v}$  nelle due basi e utilizzando le regole (B.6) per la trasformazione degli elementi delle basi

$$\mathbf{v} = \begin{cases} v^i \mathbf{b}_i = v^i g_{ik} \mathbf{b}^k = v_k \mathbf{b}^k \\ v_i \mathbf{b}^i = v_i g^{ik} \mathbf{b}_k = v^k \mathbf{b}_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_k = g_{ik} v^i \\ v^k = g^{ik} v_i. \end{cases} \quad (\text{B.10})$$



Per ricordarsi le trasformazioni (B.6) e (B.9) è sufficiente ricordarsi che:

- gli indici non ripetuti a destra e a sinistra dell'uguale devono trovarsi nella stessa posizione;
- gli indici ripetuti dalla stessa parte dell'uguale si trovano uno in alto, l'altro in basso.

### B.1.2 Cambio di base e regole di trasformazione: covarianza e contravarianza.

I termini “covariante” o “contravariante” sono riferiti alla legge di trasformazione di un oggetto (componente o elemento di una base), se confrontata con la legge di trasformazione degli elementi della base  $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$  di  $\mathcal{V}$ . Gli apici sono riservati agli oggetti contravarianti (le componenti  $v^k$  del vettore  $\mathbf{v}$  e gli elementi della base reciproca  $\{\mathbf{b}^k\}_{k=1:N}$ ), mentre i pedici sono riservati agli oggetti covarianti (le componenti  $v_k$  del vettore  $\mathbf{v}$  e gli elementi della base  $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$  di  $\mathcal{V}$ ).

Due basi  $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$  e  $\{\hat{\mathbf{b}}_k\}_{k=1:N}$  dello spazio vettoriale  $\mathcal{V}$  sono legate dalla trasformazione lineare  $T$ ,



$$\mathbf{b}_k = \hat{T}_k^q \hat{\mathbf{b}}_q, \quad \hat{\mathbf{b}}_k = T_k^q \mathbf{b}_q, \quad (\text{B.11})$$

dove con  $\hat{T}$  viene indicata la trasformazione inversa di  $T$ ,  $\hat{T} = T^{-1}$ . Le rispettive basi reciproche  $\{\mathbf{b}^k\}_{k=1:N}$  e  $\{\hat{\mathbf{b}}^k\}_{k=1:N}$  di  $\mathcal{V}$  sono legate dalla trasformazione inversa, mostrando quindi una natura contravariante alla quale vengono riservati gli apici,

$$\mathbf{b}^k = T_k^q \hat{\mathbf{b}}^q, \quad \hat{\mathbf{b}}^k = \hat{T}_k^q \mathbf{b}^q. \quad (\text{B.12})$$

Infatti, usando le trasformazioni (B.11) e (B.12) nella definizione della base duale  $\{\hat{\mathbf{b}}^k\}_{k=1:N}$ , si ottiene

$$\delta_k^i = \hat{\mathbf{b}}^i \cdot \hat{\mathbf{b}}_k = \hat{\mathbf{b}}^i \cdot (T_k^q \mathbf{b}_q) = T_k^q \hat{\mathbf{b}}^i \cdot \mathbf{b}_q = T_k^q (\hat{T}_l^i \mathbf{b}^l) \cdot \mathbf{b}_q = T_k^q \hat{T}_l^i \delta_q^l = \hat{T}_l^i T_k^l, \quad (\text{B.13})$$

che può essere riscritta  $I = \hat{T}T$ , dimostrando che  $\hat{T} = T^{-1}$ .

Le componenti contravarianti  $v^k$  di  $\mathbf{v}$  variano secondo la trasformazione inversa degli elementi della base  $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$  di  $\mathcal{V}$ ,

$$\hat{v}^k = \hat{T}_q^k v^q, \quad v^k = T_q^k \hat{v}^q. \quad (\text{B.14})$$

É possibile verificare immediatamente le (B.14), inserendo la trasformazione (B.11) nella rappresentazione del vettore  $\mathbf{v}$  nella base covariante  $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$ ,

$$\mathbf{v} = v^q \mathbf{b}_q = v^q \hat{T}_k^q \hat{\mathbf{b}}_k = \hat{v}^k \hat{\mathbf{b}}_k. \quad (\text{B.15})$$

Le componenti covarianti  $v_k$  variano con la stessa trasformazione degli elementi della base  $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$  di  $\mathcal{V}$ ,

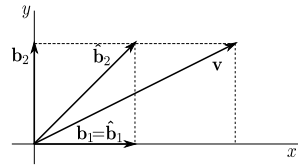
$$\hat{v}_k = T_k^q v_q, \quad v_k = \hat{T}_k^q \hat{v}_q. \quad (\text{B.16})$$

É possibile verificare immediatamente le (B.16), inserendo la trasformazione (B.12) nella rappresentazione del vettore  $\mathbf{v}$  nella base contravariante  $\{\mathbf{b}^k\}_{k=1:N}$ ,

$$\mathbf{v} = v_q \mathbf{b}^q = v_q T_k^q \hat{\mathbf{b}}^k = \hat{v}_k \hat{\mathbf{b}}^k. \quad (\text{B.17})$$

■ **Esempio B.1** In figura sono rappresentate le basi  $B_i = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ ,  $\hat{B}_i = \{\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2\}$  dello spazio bidimensionale  $\mathbb{R}^2$  e il vettore  $\mathbf{v} = v^1 \mathbf{b}_1 + v^2 \mathbf{b}_2 = 2\mathbf{b}_1 + 1\mathbf{b}_2$ . Viene chiesto di:

- determinare le basi reciproche  $B^i = \{\mathbf{b}^i\}$ ,  $\hat{B}^i = \{\hat{\mathbf{b}}^i\}$ ;
- determinare le componenti  $v^i$ ,  $v_i$ ,  $\hat{v}^i$ ,  $\hat{v}_i$  nelle basi  $B_i$ ,  $B^i$ ,  $\hat{B}_i$ ,  $\hat{B}^i$ .



■

Il vettore  $\mathbf{v} = 2\mathbf{b}_1 + 1\mathbf{b}_2$  espresso nella base  $B_i$  è un dato del problema. Le componenti

contravarianti  $v^i$  sono  $v^1 = 2$ ,  $v^2 = 1$ . Per calcolare la base reciproca  $B^i = \{\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2\}$  e le rispettive componenti covarianti con le espressioni (B.6) e (B.9) è necessario calcolare i simboli  $g_{ik}$  e  $g^{ik}$ . Si calcolano i simboli  $g_{ik}$  usando la definizione  $g_{ik} = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_k$

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = 1 \quad \Rightarrow \quad G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.18})$$

dove è stata introdotta la matrice  $G$  che raccoglie gli elementi  $g_{ik}$ . I simboli  $g^{ik}$  sono gli elementi dell'inversa di  $G$ , rappresentando la trasformazione inversa  $\mathbf{b}^i = g^{ik} \mathbf{b}_k$ , dagli elementi della base contravariante a quelli della base covariante,

$$\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.19})$$

Dalla (B.6) segue che

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^1 &= g^{11} \mathbf{b}_1 + g^{12} \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{b}^2 &= g^{21} \mathbf{b}_1 + g^{22} \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Si poteva ottenere questo risultato senza svolgere nessun conto, poiché la base reciproca di una *base ortonormale*, come  $B_i$ , coincide con la base stessa. Come conseguenza, anche le componenti covarianti coincidono con le componenti contravarianti,

$$v_1 = v^1 = 2, \quad v_2 = v^2 = 1. \quad (\text{B.21})$$

Per calcolare le componenti del vettore  $\mathbf{v}$  nella base  $\hat{B}_i$  è necessario calcolare gli elementi della matrice  $T$  che esprime il cambiamento di base (B.11). È possibile ottenere gli elementi di  $T$  moltiplicando scalarmente la (B.11) per i vettori della base  $\hat{\mathbf{b}}^j$  e sfruttando la definizione di base reciproca (B.4),

$$\hat{\mathbf{b}}^j \cdot \mathbf{b}_k = \hat{\mathbf{b}}^j \cdot \hat{T}_k^q \hat{\mathbf{b}}_q = \hat{T}_k^j. \quad (\text{B.22})$$

Per utilizzare la formula precedente è necessario conoscere la base reciproca  $\hat{B}^i$ . Data la base Seguendo lo stesso procedimento svolto in precedenza, si calcolano i simboli  $\hat{g}_{ik} = \hat{\mathbf{b}}_i \cdot \hat{\mathbf{b}}_k$

$$\hat{g}_{11} = 1, \quad \hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = 1, \quad \hat{g}_{22} = 2 \quad \Rightarrow \quad \hat{G} = \begin{bmatrix} \hat{g}_{11} & \hat{g}_{12} \\ \hat{g}_{21} & \hat{g}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

e la trasformazione inversa per ottenere i simboli  $\hat{g}^{ik}$ ,

$$\begin{bmatrix} \hat{g}^{11} & \hat{g}^{12} \\ \hat{g}^{21} & \hat{g}^{22} \end{bmatrix} = \hat{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.24})$$

I vettori della base controvariante si ottengono dalla (B.6),

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}^1 &= \hat{g}^{11} \hat{\mathbf{b}}_1 + \hat{g}^{12} \hat{\mathbf{b}}_2 = 2\hat{\mathbf{b}}_1 - \hat{\mathbf{b}}_2, \\ \hat{\mathbf{b}}^2 &= \hat{g}^{21} \hat{\mathbf{b}}_1 + \hat{g}^{22} \hat{\mathbf{b}}_2 = -\hat{\mathbf{b}}_1 + \hat{\mathbf{b}}_2. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

È ora possibile utilizzare la (B.22) per calcolare gli elementi della matrice  $\hat{T}$

$$\begin{aligned} \hat{T}_1^1 &= \hat{\mathbf{b}}^1 \cdot \mathbf{b}_1 = (2\hat{\mathbf{b}}_1 - \hat{\mathbf{b}}_2) \cdot \mathbf{b}_1 = 2 - 1 = 1, \\ \hat{T}_2^1 &= \hat{\mathbf{b}}^1 \cdot \mathbf{b}_2 = (2\hat{\mathbf{b}}_1 - \hat{\mathbf{b}}_2) \cdot \mathbf{b}_2 = 0 - 1 = -1, \\ \hat{T}_1^2 &= \hat{\mathbf{b}}^2 \cdot \mathbf{b}_1 = (-\hat{\mathbf{b}}_1 + \hat{\mathbf{b}}_2) \cdot \mathbf{b}_1 = -1 + 1 = 0, \\ \hat{T}_2^2 &= \hat{\mathbf{b}}^2 \cdot \mathbf{b}_2 = (-\hat{\mathbf{b}}_1 + \hat{\mathbf{b}}_2) \cdot \mathbf{b}_2 = 0 + 1 = 1, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \hat{T} = \begin{bmatrix} \hat{T}_1^1 & \hat{T}_2^1 \\ \hat{T}_1^2 & \hat{T}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.26})$$

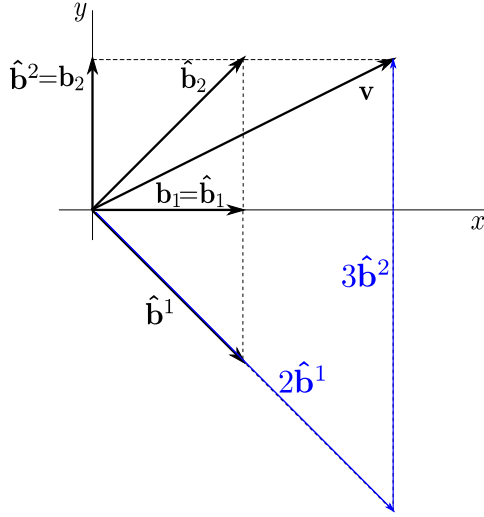


Figura B.1: Rappresentazione grafica dell'esempio B.1.

e la matrice inversa

$$T = \hat{T} = \begin{bmatrix} T_1^1 & T_2^1 \\ T_1^2 & T_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.27})$$

Utilizzando la (B.14) è ora possibile ricavare le componenti del vettore  $\mathbf{v}$  nella base  $\hat{B}_i$ ,

$$\begin{aligned} \hat{v}^1 &= \hat{T}_k^1 v^k = \hat{T}_1^1 v^1 + \hat{T}_2^1 v^2 = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 \\ \hat{v}^2 &= \hat{T}_k^2 v^k = \hat{T}_1^2 v^1 + \hat{T}_2^2 v^2 = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{v} = \hat{\mathbf{b}}_1 + \hat{\mathbf{b}}_2. \quad (\text{B.28})$$

Si ricavano infine le componenti covarianti nella base  $\hat{B}^i$ ,

$$\begin{aligned} \hat{v}_1 &= \hat{g}_{1k} \hat{v}^k = \hat{g}_{11} \hat{v}^1 + \hat{g}_{12} \hat{v}^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \\ \hat{v}_2 &= \hat{g}_{2k} \hat{v}^k = \hat{g}_{21} \hat{v}^1 + \hat{g}_{22} \hat{v}^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3 \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{v} = 2\hat{\mathbf{b}}^1 + 3\hat{\mathbf{b}}^2. \quad (\text{B.29})$$

Le leggi di trasformazione degli elementi di basi differenti e delle relative componenti sono state introdotte in questo paragrafo per i vettori. Nel prossimo paragrafo verranno utilizzate per ottenere le leggi di trasformazione degli elementi della base e delle componenti dei tensori. In particolare, la definizione classica di tensore come oggetto invariante al cambio di sistema di riferimento, coinvolge direttamente la legge di trasformazione delle componenti, in seguito a un cambio di base. L'esempio B.1 è stato pensato come un'occasione per riprendere dimestichezza con l'analisi lineare e prendere familiarità con le definizioni introdotte nel paragrafo.

## B.2 Algebra multilineare

Se l'algebra lineare è la branca della matematica che si occupa dello studio dei vettori, degli spazi vettoriali (o spazi lineari) e delle trasformazioni lineari, l'algebra multilineare si occupa dello studio dei tensori, degli spazi tensoriali e delle trasformazioni multilineari.

**Definizione B.2.1 — Tensore (definizione intrinseca).** Un tensore di ordine  $r$  su  $\mathcal{V}$  è una funzione  $r$ -lineare

$$T : \underbrace{\mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V}}_{r \text{ volte}} \rightarrow K \quad (\text{B.30})$$

**R** La definizione di tensore data è riferita agli spazi dotati di prodotto interno. Per una prima introduzione all'algebra e al calcolo tensoriale, può essere considerata un buon compromesso tra comprensibilità e completezza della trattazione, per un corso di ingegneria. Senza voler entrare nei particolari, questa definizione evita di introdurre le definizioni di spazio duale e di isomorfismi necessarie a una trattazione generale dei tensori su spazi vettoriali qualsiasi.

Si indica con  $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$  l'insieme dei tensori di ordine  $r$ . Questo insieme è chiuso<sup>1</sup> rispetto alle operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare definite in seguito, e quindi è definito lo spazio vettoriale dei tensori di ordine  $r$ . Un tensore di ordine 0 è uno scalare, un tensore di ordine 1 un vettore.

### B.2.1 Alcune operazioni tensoriali (I): somma e moltiplicazione per uno scalare.

Le due operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare e la chiusura dell'insieme  $\mathcal{T}^r$  rispetto ad esse sono condizioni necessarie alla struttura di spazio vettoriale. La somma di due tensori  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$  e la moltiplicazione di  $\mathbf{A}$  per uno scalare  $\alpha \in K$  sono definite come

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^r) = \mathbf{A}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^r) + \mathbf{B}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^r) \quad (\text{B.31})$$

e

$$(\alpha \mathbf{A})(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^r) = \alpha \mathbf{A}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^r) \quad (\text{B.32})$$

per ogni  $r$ -upla di vettori  $(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^r) \in \mathcal{V}^r$ .

**Definizione B.2.2 — Spazio vettoriale  $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$  dei tensori di ordine  $r$ .** Lo spazio vettoriale  $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$  dei tensori di ordine  $r$  sullo spazio  $\mathcal{V}$  è formato dall'insieme  $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ , con le operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare definite in (B.31) e (B.32).

### B.2.2 Prodotto tensoriale

Dati  $r$  vettori  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in \mathcal{V}$  si definisce il prodotto tensoriale tra vettori  $\mathbf{v}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_r$  come

$$\mathbf{v}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_r(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^r) = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}^1) \cdots (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{u}^r), \quad (\text{B.33})$$

per ogni  $r$ -upla di vettori  $(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^r) \in \mathcal{V}^r$ .

<sup>1</sup>Un insieme  $\mathcal{V}$  è chiuso rispetto a un'operazione se l'operazione su ogni elemento di  $\mathcal{V}$  restituisce un elemento di  $\mathcal{V}$ .

Per due tensori  $\mathbf{A} \in \mathcal{T}^p(\mathcal{V})$ ,  $\mathbf{B} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$  il prodotto  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in \mathcal{T}^{p+r}(\mathcal{V})$  è definito come

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{p+r}) = \mathbf{A}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^p) \mathbf{B}(\mathbf{u}^{p+1}, \dots, \mathbf{u}^{p+r}), \quad (\text{B.34})$$

per ogni  $(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{p+r}) \in \mathcal{V}^{p+r}$ .

**R** Il prodotto tensoriale **non** è commutativo:  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$ .

**Definizione B.2.3 — Base prodotto di  $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ .** Se lo spazio  $\mathcal{V}$  ha dimensione  $N$ , la dimensione dello spazio  $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$  è  $N^r$ . La base  $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$  di  $\mathcal{V}$  induce una base prodotto (covariante) di  $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ , definita come

$$\{\mathbf{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_{i_r}\}_{i_1, \dots, i_r=1:N}. \quad (\text{B.35})$$

Rispetto alla base prodotto, un tensore  $\mathbf{A} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$  viene scritto come

$$\mathbf{A} = A^{i_1 \dots i_r} \mathbf{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_{i_r}, \quad (\text{B.36})$$

dove  $A^{i_1 \dots i_r}$  sono le componenti contravarianti del tensore  $\mathbf{A}$  rispetto alla base prodotto covariante. Si dimostra che le componenti  $A^{i_1 \dots i_r}$  sono

$$A^{i_1 \dots i_r} = \mathbf{A}(\mathbf{b}^{i_1}, \dots, \mathbf{b}^{i_r}). \quad (\text{B.37})$$

Infatti,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{b}^{k_1}, \dots, \mathbf{b}^{k_r}) &= A^{i_1 \dots i_r} \mathbf{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_{i_r}(\mathbf{b}^{k_1}, \dots, \mathbf{b}^{k_r}) = \\ &= A^{i_1 \dots i_r} (\mathbf{b}_{i_1} \cdot \mathbf{b}^{k_1}) \dots (\mathbf{b}_{i_r} \cdot \mathbf{b}^{k_r}) = \\ &= A^{i_1 \dots i_r} \delta_{i_1}^{k_1} \dots \delta_{i_r}^{k_r} = A^{k_1 \dots k_r} \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

### B.2.3 Trasformazione tra oggetti controvarianti e covarianti: regola per “alzare e abbassare gli indici”.

Nei paragrafi precedenti è stata ricavata la regola per ricavare le componenti contravarianti di un vettore dalle componenti covarianti e viceversa. In questo paragrafo verranno ricavate le regole per alzare e abbassare gli indici in un tensore di ordine  $r$  generico, seguendo un procedimento simile a quello seguito in precedenza. Come primo esempio, si parte da un tensore scritto nella base prodotto covariante, con indici bassi (quindi le componenti hanno tutti indici contravarianti, alti): l'obiettivo è quello di scrivere le componenti in una base con il primo vettore appartenente alla base reciproca (indice alto) e tutti gli altri uguali (indici bassi). Le componenti avranno quindi il primo indice basso e gli altri alti.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A^{i_1 \dots i_r} \mathbf{b}_{i_1} \otimes \mathbf{b}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_{i_r} = \\ &= A^{i_1 \dots i_r} g_{i_1 k_1} \mathbf{b}^{k_1} \otimes \mathbf{b}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_{i_r} = \\ &= g_{i_1 k_1} A^{k_1 \dots i_r} \mathbf{b}^{i_1} \otimes \mathbf{b}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_{i_r} = \\ &= A_{i_1}^{i_2 \dots i_r} \mathbf{b}^{i_1} \otimes \mathbf{b}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_{i_r} \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

dove è stata usata la simmetria dei simboli  $g_{ij} = g_{ji}$  e sono stati invertiti gli indici ripetuti (sono indici “dummy”, saturati dalla sommatoria). Risulta quindi

$$A_{i_1}^{i_2 \dots i_r} = g_{i_1 k_1} A^{k_1 i_2 \dots i_r} \quad (\text{B.40})$$

dove come sempre è sottintesa la sommatoria sugli indici ripetuti (qui solo  $k_1$ ). Una volta capito il ruolo di  $g_{ij}$  nell'abbassamento e nell'innalzamento degli indici, la stessa regola può essere applicata a qualsiasi indice di un tensore di ordine qualsiasi.

### B.2.4 Cambio di base e regola di trasformazione delle componenti: definizione “classica” di tensore.

Aiutandosi con la legge di trasformazione degli elementi della base  $\{\mathbf{b}_k\}_{k=1:N}$  di  $\mathcal{V}$  e della base reciproca  $\{\mathbf{b}^k\}_{k=1:N}$  di  $\mathcal{V}^*$ , si può verificare che la base prodotto (covariante) dello spazio  $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$  si trasforma secondo

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{b}}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{b}}_{i_r} &= T_{i_1}^{k_1} \cdots T_{i_r}^{k_r} \mathbf{b}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}_{k_r} \\ \mathbf{b}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}_{i_r} &= \hat{T}_{i_1}^{k_1} \cdots \hat{T}_{i_r}^{k_r} \hat{\mathbf{b}}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{b}}_{k_r}.\end{aligned}\tag{B.41}$$

Per ricavare la regola di trasformazione della base prodotto (B.41) è sufficiente applicare la (B.11) a tutti i vettori  $\mathbf{b}_{i_\alpha}$  della base prodotto. Usando la multilinearità del prodotto tensoriale

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{b}}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{b}}_{i_r} &= (T_{i_1}^{k_1} \mathbf{b}_{k_1}) \otimes \cdots \otimes (T_{i_r}^{k_r} \mathbf{b}_{k_r}) = \\ &= T_{i_1}^{k_1} \cdots T_{i_r}^{k_r} \mathbf{b}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}_{k_r}.\end{aligned}\tag{B.42}$$

La regola di trasformazione delle componenti di un tensore  $\mathbf{A} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ ,  $\mathbf{A} = A^{i_1 \dots i_r} \mathbf{b}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}_{i_r} = \hat{A}^{i_1 \dots i_r} \hat{\mathbf{b}}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{b}}_{i_r}$  al variare dei sistemi di riferimento è

$$\begin{aligned}\hat{A}^{k_1 \dots k_r} &= \hat{T}_{i_1}^{k_1} \cdots \hat{T}_{i_r}^{k_r} A^{i_1 \dots i_r} \\ A^{i_1 \dots i_r} &= T_{k_1}^{i_1} \cdots T_{k_r}^{i_r} \hat{A}^{k_1 \dots k_r}.\end{aligned}\tag{B.43}$$

La legge di trasformazione delle componenti (B.43) si ricava grazie alla legge di trasformazione della base prodotto

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A^{i_1 \dots i_r} \mathbf{b}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{b}_{i_r} = \\ &= A^{i_1 \dots i_r} \hat{T}_{i_1}^{k_1} \cdots \hat{T}_{i_r}^{k_r} \hat{\mathbf{b}}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{b}}_{k_r} = \\ &= \hat{A}^{k_1 \dots k_r} \hat{\mathbf{b}}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{b}}_{k_r}.\end{aligned}\tag{B.44}$$

Partendo dalla definizione intrinseca di un tensore come applicazione multilineare B.2.1, grazie all'introduzione di una base dello spazio vettoriale e alla rappresentazione in coordinate, è stato possibile arrivare alla definizione classica di tensore.

**Definizione B.2.4 — Tensore (definizione classica).** Un tensore  $\mathbf{A}$  di ordine  $r$  su uno spazio  $\mathcal{V}$  di dimensione  $N$  è un oggetto matematico formato da  $N^r$  componenti  $A^{i_1 \dots i_r}$  che si trasformano secondo la (B.43), in seguito al cambio di sistema di coordinate  $\mathbf{b}_j = \hat{T}_j^i \hat{\mathbf{b}}_i$ .

### B.2.5 Alcune operazioni tensoriali (II)

Come le operazioni introdotte nel paragrafo B.2.1, anche le operazioni in questo paragrafo operano su tensori e restituiscono tensori.

#### Contrazione.

L'operazione di contrazione  $\mathcal{C}_l^k$  agente su un tensore  $\mathbf{A}$  di ordine  $r$  ha come risultato un tensore di ordine  $r - 2$ . Le componenti del tensore ottenuto tramite la contrazione di due indici si ottengono saturando con la somma gli indici di tutte le componenti indicati da

$C_l^k$ 

$$\begin{aligned}
 C_l^k \mathbf{A} &= C_l^k (A^{i_1 \dots i_r} b_{i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_r}) \\
 &= C_l^k (A^{i_1 \dots i_k \dots i_{l-1} \dots i_{l+1} \dots i_r} b_{i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_k} \otimes \dots \otimes b_{i_{l-1}} \otimes b^{i_l} \otimes b_{i_{l+1}} \otimes \dots \otimes b_{i_r}) \\
 &= A^{i_1 \dots i_{k-1} n i_{k+1} \dots i_{l-1} \dots i_{l+1} \dots i_r} b_{i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_{k-1}} \otimes b_{i_{k+1}} \otimes \dots \otimes b_{i_{l-1}} \otimes b_{i_{l+1}} \otimes \dots \otimes b_{i_r}.
 \end{aligned} \tag{B.45}$$

Per rendere (più) comprensibile la definizione dell'operazione di contrazione data in (B.45), si fornisce un esempio su un tensore di ordine 3,  $\mathbf{A} = A^{ijk} b_i \otimes b_j \otimes b_k$ .

**R** Affinchè la contrazione sia svolta correttamente (e quindi dia come risultato un tensore) senza la scrittura esplicita dei simboli  $g_{ik}$ , la coppia di indici che viene “contratta” deve avere carattere opposto (uno covariante, l'altro contravariante).

Si vuole svolgere la contrazione del primo e del terzo indice di  $\mathbf{A}$ . In componenti si ottiene

$$C_3^1 \mathbf{A} = C_3^1 (A^{ijk} b_i \otimes b_j \otimes b_k) = C_3^1 (A_i^{jk} b^i \otimes b_j \otimes b_k) = A_i^{jk} b_j = g_{il} A^{ljk} b_j, \tag{B.46}$$

dove è stata utilizzata la regola (B.40) per esprimere il risultato in funzione del tensore  $\mathbf{A}$  con tutti gli indici contravarianti.

#### “Dot” product.

Siano  $\mathbf{A} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ ,  $\mathbf{B} \in \mathcal{T}^s(\mathcal{V})$ , il prodotto “dot”  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  è un tensore di ordine  $r + s - 2$ , definito tramite il prodotto tensoriale e la contrazione di una coppia di indici di natura opposta. In particolare si definisce

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = C_{r+1}^r (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}). \tag{B.47}$$

Si ricorda che la contrazione deve avvenire tra indici di natura opposta. Supponendo che la regola per passare da indici covarianti a indici contravarianti sia stata compresa e non comporti nessuna difficoltà aggiuntiva, per comodità il tensore  $\mathbf{A}$  viene scritto in componenti contravarianti, il tensore  $\mathbf{B}$  in componenti covarianti. Facendo un esempio con  $\mathbf{A} \in \mathcal{T}^3$ ,  $\mathbf{B} \in \mathcal{T}^2$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A^{ijk} b_i \otimes b_j \otimes b_k) \cdot (B_{mn} b^m \otimes b^n) = \\
 &= A^{ijk} B_{mn} b_i \otimes b_j \otimes b_k \cdot b^m \otimes b^n = \\
 &= A^{ijl} B_{ln} b_i \otimes b_j \otimes b^n.
 \end{aligned} \tag{B.48}$$

**R** Il prodotto “dot” **non** è commutativo ( $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ ). Il prodotto “dot” **non** è un prodotto interno (in generale non ha nemmeno come risultato uno scalare).

#### Doppio “Dot” product.

Siano  $\mathbf{A} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ ,  $\mathbf{B} \in \mathcal{T}^s(\mathcal{V})$ , il doppio prodotto “dot”  $\mathbf{A} : \mathbf{B}$  è un tensore di ordine  $r + s - 4$  definito tramite il prodotto tensoriale e una doppia contrazione. In particolare si definisce

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = C_{r+1, r+2}^{r-1, r} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \tag{B.49}$$

Per esempio con  $\mathbf{A} \in \mathcal{T}^4$ ,  $\mathbf{B} \in \mathcal{T}^3$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} : \mathbf{B} &= (A^{ijkl} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}_k \otimes \mathbf{b}_l) : (B_{mnp} \mathbf{b}^m \otimes \mathbf{b}^n \otimes \mathbf{b}^p) = \\ &= A^{ijuv} B_{uvp} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}^p \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

Si presti attenzione all'ordine con il quale avviene la doppia contrazione: il penultimo indice di  $\mathbf{A}$  si contrae con il primo di  $\mathbf{B}$ , l'ultimo di  $\mathbf{A}$  con il secondo di  $\mathbf{B}$ . È possibile definire “dot product” multipli estendendo la contrazione a un numero maggiore di indici.

■ **Esempio B.2 — Tensore degli sforzi.** I primi tensori che vengono incontrati durante un corso di studi in ingegneria sono il tensore di inerzia per i corpi rigidi in Meccanica Razionale e il tensore degli sforzi nei corsi di Meccanica Strutturale. Viene qui ricavato velocemente il legame tra vettore sforzo  $\mathbf{t}_n$  e la normale  $\hat{\mathbf{n}}$  della giacitura considerata in un mezzo continuo non polare, tramite l'equilibrio del tetraedro di Cauchy. Siano  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$  e  $\hat{\mathbf{z}}$  i versori di un sistema di riferimento cartesiano centrato nel punto del continuo considerato e  $\hat{\mathbf{e}}_x = \mathbf{t}_x$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_y = \mathbf{t}_y$  e  $\hat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{t}_z$  i vettori sforzo agenti sulle facce del tetraedro di area  $dS_x$ ,  $dS_y$  e  $dS_z$  con le normali orientate come i rispettivi versori della base. Sia  $\mathbf{t}_n$  il vettore sforzo agente sulla faccia “inclinata” di area  $dS$  del tetraedro di Cauchy, con normale  $\hat{\mathbf{n}}$ . Il legame tra le aree delle facce del tetraedro è

$$dS = -\frac{dS_x}{n_x} = -\frac{dS_y}{n_y} = -\frac{dS_z}{n_z}, \quad (\text{B.51})$$

avendo indicato con  $n_i$  le componenti cartesiane del versore normale  $\hat{\mathbf{n}}$ , tutte negative per come è stato definito il tetraedro rappresentato in figura B.2. Si scrive l'equilibrio del tetraedro, ricordando che i contributi di volume sono di un ordine inferiore rispetto a quelli di superficie, quando le dimensioni del tetraedro tendono a zero,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{t}_n dS + \mathbf{t}_x dS_x + \mathbf{t}_y dS_y + \mathbf{t}_z dS_z = \\ &= (\mathbf{t}_n - \mathbf{t}_x n_x - \mathbf{t}_y n_y - \mathbf{t}_z n_z) dS \quad \rightarrow \quad \mathbf{t}_n = \mathbf{t}_x n_x + \mathbf{t}_y n_y + \mathbf{t}_z n_z \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

Secondo la definizione intrinseca, il vettore  $\mathbf{t}_n$  è un'applicazione lineare  $\mathbf{t}_n : \mathcal{V} \rightarrow K = \mathbb{R}$ , la cui azione su un vettore qualsiasi  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  può essere espressa in termini del prodotto scalare su  $\mathcal{V}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_n(\mathbf{v}) &= \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v} = \mathbf{t}_x \cdot \mathbf{v} n_x + \mathbf{t}_y \cdot \mathbf{v} n_y + \mathbf{t}_z \cdot \mathbf{v} n_z = \\ &= (\mathbf{t}_x \cdot \mathbf{v})(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) + (\mathbf{t}_y \cdot \mathbf{v})(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) + (\mathbf{t}_z \cdot \mathbf{v})(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = (\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}})(\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{v}) = \\ &= [\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \mathbf{t}_i](\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{v}) = [t_{i,j} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j](\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{v}) = \mathbf{T}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

avendo definito  $t_{i,j}$  la  $j$ -esima coordinata del vettore agente sulla  $i$ -esima faccia e introdotto la definizione del tensore degli sforzi  $\mathbf{T}$ . È sottintesa la sommatoria sugli indici ripetuti. Sfruttando l'uguaglianza appena ricavata, valida per ogni vettore  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v} &= (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i)(\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{v}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{v} = \\ &= \hat{\mathbf{n}} \cdot [t_{i,j} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j] \cdot \mathbf{v} = \hat{\mathbf{n}} \cdot [T_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j] \cdot \mathbf{v} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

dove sono state definite le componenti  $T_{ij} = t_{i,j}$  del tensore degli sforzi in una base cartesiana, si ricava la relazione tra il vettore sforzo  $\mathbf{t}_n$  e la normale  $\hat{\mathbf{n}}$ ,

$$\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}. \quad (\text{B.55})$$

■



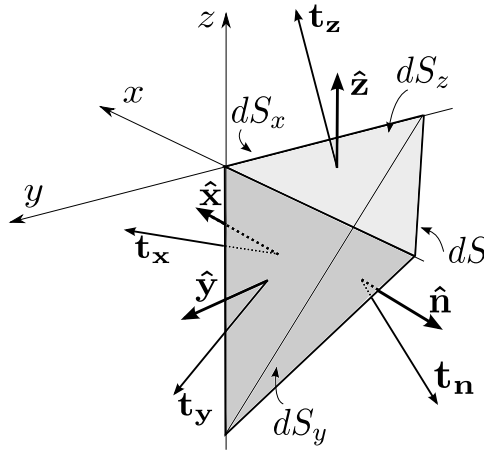


Figura B.2: tetraedro di Cauchy

### B.2.6 Cosa non è stato detto

Molte cose non sono state dette. In particolare, è stato scelto di trattare i tensori su spazi forniti di prodotto interno e di non introdurre concetti di *algebra esterna*, che permetterebbero di generalizzare l'operazione di rotore e ricavare il teorema di Stokes,

$$\oint_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega, \quad (\text{B.56})$$

di cui viene solo riportata l'espressione matematica senza fornire alcun dettaglio. Il teorema del rotore e della divergenza sono casi particolari del teorema di Stokes, nel cui enunciato compaiono i concetti di forma differenziale  $\omega$  e di derivata esterna  $d\omega$ .

Il materiale fornito rappresenta un compromesso tra il vuoto totale sul calcolo tensoriale (del quale l'affermazione “un tensore è una matrice” è la regina indiscussa) e un corso intero dedicato al calcolo tensoriale. Lo scopo dei cenni veloci ad argomenti non trattati qui è quello di “mettere una pulce nell'orecchio” di chi legge, di mettere a conoscenza il lettore dell'esistenza di alcuni argomenti che permettono di generalizzare le operazioni vettoriali presentate nei primi corsi di Algebra e di spiegare in maniera rigorosa alcuni comportamenti strani o inaspettati (come quelli che si possono osservare con il prodotto vettoriale e il rotore), senza scoperciare dei vasi di Pandora che porterebbero questa introduzione lontana dal suo scopo.

Per i più curiosi, viene messo a disposizione del materiale un più completo, che introduce concetti che non sono stati presentati qui e che generalizzano la trattazione, ma che la renderebbero inadatta ad essere svolta in poche ore per un pubblico formato da studenti del terzo anno di ingegneria, senza aggiungere particolari fondamentali per un utilizzo “cosciente” dei tensori durante questo corso e in quelli successivi.

#### Riferimenti.

Il testo di Bowen e Wang, *Introduction to vectors and tensors. Linear and multilinear algebra* può essere considerato un valido e completo riferimento, anche per il futuro. La

lettura di questo testo non è sempre agevole e contiene sicuramente molto più di quanto sia indispensabile presentare in una prima e breve introduzione ai tensori, come è questa. Oltre alla sua qualità, è da apprezzare la disponibilità in rete dei due volumi, seguendo i seguenti collegamenti (sperando che siano ancora validi):

Vol. 1: [Linear and Multilinear Algebra](#)

Vol. 2: [Vector and Tensor Analysis](#)

**Cosa è utile ripassare.**

Questa può essere una buona occasione per ripassare alcuni concetti di algebra lineare, tra i quali quello di spazio vettoriale (definizione e proprietà, dimensione e base, ...), prodotto interno, linearità (e la differenza con l'essere "affine"), alla luce di quanto visto in questi paragrafi introduttivi sui tensori e del fatto che le equazioni della fisica hanno carattere tensoriale.

### B.3 Calcolo vettoriale e tensoriale in coordinate curvilinee

Dopo aver introdotto alcuni concetti di algebra tensoriale nella sezione precedente, viene una breve introduzione al calcolo tensoriale. In questa sezione vengono introdotte alcune definizioni e operatori differenziali necessari per descrivere campi (funzioni dipendenti dallo spazio) tensoriali. Si ricavano le espressioni in coordinate degli operatori rispetto a sistemi di coordinate curvilinee generali. Si introducono poi i sistemi di coordinate curvilinee ortogonali. Infine, come esempio, si scrivono le espressioni di alcuni operatori differenziali e, come utile esempio per un corso di fluidodinamica, le equazioni di Navier-Stokes in un sistema di coordinate cilindriche. Per aiutare la comprensione dell'argomento, i concetti generali verranno specializzati ad alcuni sistemi coordinate particolari, come le coordinate cartesiane o cilindriche.

Lavoriamo per semplicità in uno spazio tridimensionale, descritto completamente dalle tre coordinate  $\{q^1, q^2, q^3\}$ : il vettore posizione  $\mathbf{x}$  sarà quindi una funzione delle tre coordinate  $q^i$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(q^1, q^2, q^3) \quad (\text{B.57})$$

Si suppone che la trasformazione di coordinate da  $\mathbf{x}$  a  $\{q^1, q^2, q^3\}$  sia biunivoca. Vengono fornite ora le definizioni di curve coordinate, superfici coordinate e base naturale indotta dalla parametrizzazione dello spazio.

**Definizione B.3.1 — Curve coordinate.** Le curve coordinate passanti per il punto  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(q_0^1, q_0^2, q_0^3)$  sono le curve ottenute al variare di una coordinata, tenendo fisse le altre due

$$\begin{cases} \ell_1 : & \mathbf{x} = \mathbf{x}(q^1, q_0^2, q_0^3) \\ \ell_2 : & \mathbf{x} = \mathbf{x}(q_0^1, q^2, q_0^3) \\ \ell_3 : & \mathbf{x} = \mathbf{x}(q_0^1, q_0^2, q^3). \end{cases} \quad (\text{B.58})$$

**Definizione B.3.2 — Superfici coordinate.** Le superfici coordinate passanti per il punto  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(q_0^1, q_0^2, q_0^3)$  sono le superficie descritte da due coordinate, tenendo fissa l'altra

$$\begin{cases} S_1 : & \mathbf{x} = \mathbf{x}(q_0^1, q^2, q^3) \\ S_2 : & \mathbf{x} = \mathbf{x}(q^1, q_0^2, q^3) \\ S_3 : & \mathbf{x} = \mathbf{x}(q^1, q^2, q_0^3). \end{cases} \quad (\text{B.59})$$

**Definizione B.3.3 — Base naturale.** Per ogni punto dello spazio tridimensionale  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q^1, q^2, q^3)$ , viene definita la base naturale  $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1:3}$ , i cui elementi sono le derivate parziali del vettore posizione rispetto alle coordinate  $q^i$ ,

$$\mathbf{b}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i}. \quad (\text{B.60})$$

La base reciproca  $\{\mathbf{b}^i\}_{i=1:3}$  della base naturale viene definita tramite la definizione (B.3), cioè  $\mathbf{b}^i \cdot \mathbf{b}_j = \delta_j^i$ .

■ **Esempio B.3 — Coordinate cartesiane.** La posizione di un punto nello spazio tridimensionale viene definito dalle tre componenti  $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$  nel sistema di coordinate cartesiane. Le curve coordinate sono rette parallele agli assi, mentre le superfici coordinate sono dei piani perpendicolari agli assi. I vettori della base naturale sono i tre versori  $\hat{\mathbf{b}}_x = \hat{x}$ ,  $\mathbf{b}_y = \hat{y}$ ,  $\mathbf{b}_z = \hat{z}$  allineati con le linee coordinate, costanti in tutto lo spazio. ■

■ **Esempio B.4 — Coordinate cilindriche.** La posizione di un punto nello spazio tridimensionale viene definito dalle tre componenti  $(q^1, q^2, q^3) = (r, \theta, z)$  nel sistema di coordinate cilindriche, come raffigurato in figura B.3. Le curve coordinate  $\mathbf{x}(r_0, \theta_0, z)$  sono delle linee parallele all'asse  $z$ , le curve coordinate  $\mathbf{x}(r_0, \theta, z_0)$  sono delle circonferenze con centro sull'asse  $z$ , mentre le curve coordinate  $\mathbf{x}(r, \theta_0, z_0)$  sono dei raggi (semirette) perpendicolari all'asse  $z$ . Le superfici coordinate  $S_3 = S_z$  sono dei piani perpendicolari all'asse  $z$ , le superfici coordinate  $S_2 = S_\theta$  sono dei cilindri con asse coincidente con l'asse  $z$ , le superfici coordinate  $S_1 = S_r$  sono dei semipiani delimitati dall'asse  $z$ , come raffigurato in figura B.3(a). I vettori della base naturale non sono costanti in spazio. È possibile calcolarli, esprimendo il vettore posizione in coordinate cartesiane e in coordinate cilindriche. In particolare  $\mathbf{x} = x\mathbf{b}_x + y\mathbf{b}_y + z\mathbf{b}_z$ , con

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z. \end{cases} \quad (\text{B.61})$$

I vettori della base naturale possono essere calcolati inserendo queste espressioni nella formula che descrive la posizione nella base cartesiana, costante in spazio e quindi con derivate spaziali nulle. In figura B.3(b) sono rappresentati i vettori della base naturale

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_r = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = \cos \theta \mathbf{b}_x + \sin \theta \mathbf{b}_y = \hat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_\theta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = -r \sin \theta \mathbf{b}_x + r \cos \theta \mathbf{b}_y = r \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_z = \hat{\mathbf{z}}, \end{cases} \quad (\text{B.62})$$

avendo introdotto i versori  $\hat{\mathbf{r}} = \cos \theta \mathbf{b}_x + \sin \theta \mathbf{b}_y$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin \theta \mathbf{b}_x + \cos \theta \mathbf{b}_y$ , comunemente utilizzati per descrivere i problemi in geometria cilindrica.

**(R)** I vettori della base naturale indotta dalle coordinate cilindriche **non** è costante nello spazio, è ortogonale (come vedremo nella prossima sezione) ma **non** è ortonormale, non ha dimensioni fisiche omogenee: mentre i vettori  $\mathbf{b}_r$  e  $\mathbf{b}_z$  hanno modulo 1, il vettore  $\mathbf{b}_\theta$  ha modulo  $r$ , che ha le dimensioni fisiche di una lunghezza. ■

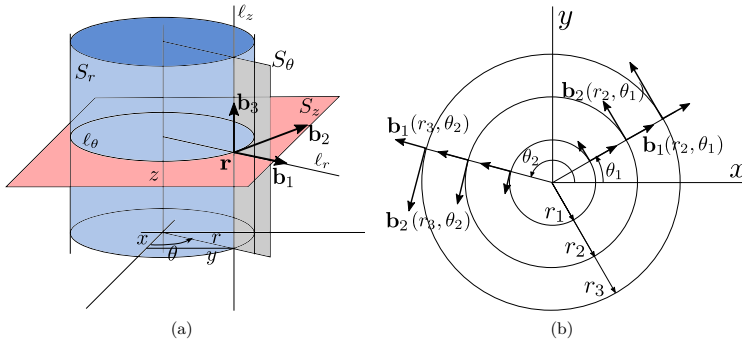


Figura B.3: Sistema di coordinate cilindriche. (a) Curve e superfici coordinate per un sistema di coordinate cilindriche. (b) Rappresentazione bidimensionale della base naturale - coordinate polari.

### B.3.1 Tensore metrico.

**Definizione B.3.4 — Tensore metrico.** Il tensore metrico è un tensore del secondo ordine (o meglio un campo tensoriale, poiché in generale è funzione della coordinata spaziale) definito come il tensore le cui componenti covarianti  $g_{ik}$  e contravarianti  $g^{ik}$  sono rispettivamente i prodotti scalari dei vettori  $\mathbf{b}_i$  della base naturale e dei vettori della base reciproca  $\mathbf{b}^i$ . Il tensore metrico  $\mathbf{g}$  viene scritto nella base prodotto naturale e nella sua reciproca come

$$\mathbf{g} = g_{ij} \mathbf{b}^i \otimes \mathbf{b}^j = g^{ij} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j, \quad (\text{B.63})$$

con le componenti definite come

$$g_{ij} = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j, \quad g^{ij} = \mathbf{b}^i \cdot \mathbf{b}^j. \quad (\text{B.64})$$

**R** Il tensore metrico è simmetrico.

Il tensore metrico caratterizza la geometria dello spazio (o meglio della varietà  $\mathbf{x}(q^i)$  descritta dai parametri  $q^i$ ). I concetti quali distanza, angolo, lunghezza di una curva possono essere espressi in funzione del tensore metrico  $\mathbf{g}$ . Ad esempio, è possibile scrivere la lunghezza  $ds$  dell'elemento elementare  $d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i} dq^i = \mathbf{b}_i dq^i$  come

$$ds^2 = |d\mathbf{x}|^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{b}_i dq^i) \cdot (\mathbf{b}_j dq^j) = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j dq^i dq^j = g_{ij} dq^i dq^j, \quad (\text{B.65})$$

dove, come sempre, sono sottintese le sommatorie sugli indici ripetuti. Come già visto in precedenza, il tensore metrico risulta utile nel passaggio dalla componenti contravarianti a quelle covarianti e viceversa, consentendo di esprimere un vettore della base  $\{\mathbf{b}_k\}$  nella base  $\{\mathbf{b}^k\}$  e viceversa tramite le (B.6)

$$\mathbf{b}_i = g_{ik} \mathbf{b}^k, \quad \mathbf{b}^i = g^{ik} \mathbf{b}_k, \quad (\text{B.66})$$

con  $g_{ij} = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j$  e  $g^{ij} = \mathbf{b}^i \cdot \mathbf{b}^j$ . In maniera analoga è possibile passare dalle coordinate contravarianti a quelle covarianti e viceversa tramite le (B.9). Ad esempio, per un vettore  $\mathbf{v} = v^i \mathbf{b}_i = v_i \mathbf{b}^i$ ,

$$v^i = g^{ik} v_k, \quad v_i = g_{ik} v^k. \quad (\text{B.67})$$

Secondo le (B.40), per un tensore del secondo ordine  $\mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j = S^i_j \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}^j = S_i^j \mathbf{b}^i \otimes \mathbf{b}_j = S_{ij} \mathbf{b}^i \otimes \mathbf{b}^j$  si ottiene

$$S^{ij} = g^{jk} S^i_k = g^{ik} S_k^j = g^{ik} g^{jl} S_{kl}. \quad (\text{B.68})$$

■ **Esempio B.5 — Coordinate cartesiane.** Poichè i vettori della base naturale sono costanti e ortonormali in tutto lo spazio, dalla definizione (B.64) segue che il tensore metrico  $g_{ik}$  è uguale all'identità. ■

■ **Esempio B.6 — Coordinate cilindriche.** Svolgendo i prodotti scalari tra i vettori della base del sistema di coordinate cilindriche, le componenti  $g_{ik}$  del tensore metrico possono essere raccolte nella matrice.

$$\begin{bmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} & g_{rz} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta z} \\ g_{zr} & g_{z\theta} & g_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.69})$$

Il tensore metrico è diagonale, poichè la base è ortogonale. Le componenti covarianti  $g^{ik}$  del tensore metrico si ottengono dall'inversione dei simboli  $g_{ik}$

$$\begin{bmatrix} g^{rr} & g^{r\theta} & g^{rz} \\ g^{\theta r} & g^{\theta\theta} & g^{\theta z} \\ g^{zr} & g^{z\theta} & g^{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.70})$$

La base reciproca è  $\mathbf{b}^r = \mathbf{b}_r$ ,  $\mathbf{b}^\theta = r^{-2} \mathbf{b}_\theta = r^{-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}$ ,  $\mathbf{b}^z = \mathbf{b}_z$ . ■

### B.3.2 Simboli di Christoffel.

I vettori della base naturale  $\mathbf{b}_i$  sono definiti come le derivate parziali del vettore posizione  $\mathbf{x}$  rispetto alle coordinate  $q^i$  utilizzate per descrivere lo spazio. In generale, quindi anche i vettori della base naturale non sono costanti nello spazio, ma sono funzioni delle coordinate  $q^i$ . Se i vettori della base variano dello spazio, le loro derivate rispetto ai parametri  $q^i$  non sono nulle e possono essere espresse nella base naturale e nella base reciproca come

$$\frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial q^j} = \Gamma_{ijk} \mathbf{b}^k = \Gamma_{ij}^k \mathbf{b}_k, \quad (\text{B.71})$$

dove sono stati introdotti i simboli di Christoffel di primo e di secondo tipo,  $\Gamma_{ijk}$  e  $\Gamma_{ij}^k$  rispettivamente. In particolare, dalla (B.71), i simboli di Christoffel  $\Gamma_{ijk}$  e  $\Gamma_{ij}^k$  di primo e secondo tipo possono essere definiti come la  $k$ -esima componente covariante e contravariante della derivata  $\partial \mathbf{b}_i / \partial q^j$  rispettivamente. Sfruttando la definizione di base reciproca, è possibile calcolare i simboli di Christoffel dalle (B.71) come

$$\Gamma_{ijk} = \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial q^j} \cdot \mathbf{b}_k, \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial q^j} \cdot \mathbf{b}^k. \quad (\text{B.72})$$

Essendo le componenti delle derivate prime dei vettori della base naturale, a sua volta derivate prime del vettore posizione, i simboli di Christoffel rappresentano le componenti delle derivate seconde del vettore posizione  $\mathbf{x}$  rispetto alle coordinate  $q^i$ ,

$$\Gamma_{ji}^k \mathbf{b}_k = \Gamma_{jik} \mathbf{b}^k = \frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial q^i} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q^j \partial q^i} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q^i \partial q^j} = \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial q^j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{b}^k = \Gamma_{ij}^k \mathbf{b}_k, \quad (\text{B.73})$$

dove l'uguaglianza delle derivate seconde miste è verificata sotto le ipotesi del *teorema di Schwarz*. Uguagliando le componenti alle estremità dell'uguaglianza precedente, si ottengono le condizioni di simmetria per i simboli di Christoffel,

$$\Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k, \quad \Gamma_{jik} = \Gamma_{ijk}. \quad (\text{B.74})$$

**R** I simboli di Christoffel non costituiscono le componenti di un tensore, poichè non seguono la (B.43) nel cambio di sistemi di coordinate.

■ **Esempio B.7 — Coordinate cartesiane.** Poichè i vettori della base naturale sono costanti in tutto lo spazio, i simboli di Christoffel per il sistema di coordinate cartesiane sono identicamente nulli. ■

■ **Esempio B.8 — Coordinate cilindriche.** Vengono calcolati qui solo i simboli di Christoffel di secondo tipo (che verranno poi utilizzati in seguito). Da un calcolo diretto dei simboli di Christoffel di secondo tipo, si ottiene che gli unici simboli di Christoffel diversi da zero sono

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = r^{-1}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r, \quad (\text{B.75})$$

dove l'indice 1 è associato alla coordinata  $r$ , l'indice 2 alla coordinata  $\theta$ . Infatti

$$\begin{aligned} \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 &= \frac{\partial b_1}{\partial q^2} \cdot b^2 = \hat{\theta} \cdot (r^{-1} \hat{\theta}) = r^{-1} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{\partial b_2}{\partial q^2} \cdot b^1 = -r \hat{r} \cdot \hat{r} = -r. \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

■

### B.3.3 Operatori differenziali

In questo paragrafo vengono definiti alcuni operatori differenziali sui campi tensoriali, cioè tensori che sono funzioni dello spazio. Un operatore è una funzione che prende come argomento l'oggetto al quale viene applicato, per restituirne un altro. In termini generali, un operatore  $P : U \leftarrow V$ , prende un elemento di  $U$  e ne restituisce uno di  $V$ ,

$$v = P(u), \quad (\text{B.77})$$

con  $u \in U$ ,  $v \in V$ . Per ottenere un vettore di  $v \in V$ , l'operatore  $P$  deve avere come argomento (deve essere applicato) a un elemento  $u \in U$ . Se  $P$  è un operatore lineare spesso si possono omettere le parentesi e indicare semplicemente  $v = Pu$ . L'ordine di un operatore coincide con il massimo ordine delle derivate (in questo caso spaziali) contenute nella definizione dell'operatore. Inizialmente vengono introdotti gli operatori di primo ordine che non richiedono l'introduzione di prodotti esterni (parenti dei prodotti vettoriali). Viene poi introdotto il concetto di rotore di un campo vettoriale. Infine viene introdotto il laplaciano, un operatore del secondo ordine definito come la divergenza di un gradiente.

**R** Diversi autori usano convenzioni diverse per la definizione degli operatori differenziali, come ad esempio la divergenza di un tensore di secondo ordine. Nel caso di tensori simmetrici (come sono i tensori degli sforzi per materiali non polari), le due diverse definizioni di divergenza di un tensore portano allo stesso risultato, grazie alla simmetria del tensore. Si rimanda al paragrafo sulla divergenza per una discussione più approfondita.

**Operatore B.3.1 — Gradiente.** L'operatore di gradiente è connesso alla derivata direzionale di un campo tensoriale. In particolare, la derivata direzionale di un tensore  $\mathbf{T}$  in una qualsiasi direzione  $\mathbf{c}$  di un campo tensoriale è il prodotto scalare tra il gradiente del tensore e il vettore  $\mathbf{c}$ ,

$$\text{grad}\mathbf{T} \cdot \mathbf{c} = \left. \frac{d}{d\alpha} \mathbf{T}(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{c}) \right|_{\alpha=0}. \quad (\text{B.78})$$

L'operatore di gradiente alza di 1 l'ordine del tensore al quale viene applicato: il gradiente del tensore  $\mathbf{T}$  può essere scritto sfruttando la definizione della base naturale e della sua reciproca come

$$\text{grad}\mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial q^i} \otimes \mathbf{b}^i, \quad (\text{B.79})$$

dove i vettori  $\mathbf{b}^i$  sono quelli della base reciproca della base naturale e, come al solito, è sottintesa la sommatoria sugli indici ripetuti. È possibile indicare l'operatore gradiente con  $G$ , senza applicarlo ad alcun tensore, rimuovendo l'argomento dalla (B.79),

$$G_{\_} = \text{grad}_{\_} = \frac{\partial}{\partial q^i} \otimes \mathbf{b}^i, \quad (\text{B.80})$$

avendo lasciato lo spazio  $\_$  per inserire l'argomento dell'operatore gradiente e avendo ommesso le parentesi poichè il gradiente è un operatore lineare. Il gradiente di un campo tensoriale  $\mathbf{T}$  viene ottenuto semplicemente inserendo  $\mathbf{T}$  negli spazi indicati nella (B.80).

Il gradiente di un tensore di ordine  $r$  ha ordine  $r + 1$ . Per esempio, il gradiente di un campo scalare  $f$  è il vettore  $\text{grad}f$

$$\text{grad}f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial q^i} \mathbf{b}^i = \frac{\partial f}{\partial q^k} g^{ik} \mathbf{b}_i. \quad (\text{B.81})$$

Il gradiente di un campo vettoriale è il campo tensoriale del secondo ordine che viene scritto nella base naturale come

$$\text{grad}\mathbf{v} = \left[ \frac{\partial v^i}{\partial q^k} + \Gamma_{lk}^i v^l \right] \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}^k, \quad (\text{B.82})$$

dove sono sottintese le sommatorie sugli indici ripetuti. Il gradiente di un campo tensoriale del secondo ordine  $\mathbf{S}$  è il campo tensoriale del terzo ordine

$$\text{grad}\mathbf{S} = \left[ \frac{\partial S^{ij}}{\partial q^k} + \Gamma_{kl}^i S^{lj} + \Gamma_{kl}^j S^{il} \right] \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}^k =: \nabla_k S^{ij} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}^k, \quad (\text{B.83})$$

dove è stata introdotta la definizione di **derivata covariante**  $\nabla_k S^{ij}$  della componente  $S^{ij}$  rispetto alla coordinata  $q^k$ , come generalizzazione delle derivate parziali. Un campo tensoriale è costante nello spazio se sono nulle tutte le sue derivate covarianti.

■ **Esempio B.9 — Coordinate cartesiane.** Poichè la base naturale e la sua reciproca coincidono con la base ortonormale  $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$  e tutti i simboli di Christoffel per le coordinate cartesiane sono nulli, dalla (B.81) si ottiene la forma già nota del gradiente di un campo scalare  $f$

$$\text{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}. \quad (\text{B.84})$$

Il gradiente di un vettore  $\mathbf{v} = v^1 \mathbf{b}_1 + v^2 \mathbf{b}_2 + v^3 \mathbf{b}_3 = v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}}$  è

$$\begin{aligned} \text{grad} \mathbf{v} = & \frac{\partial v_x}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{z}} + \\ & + \frac{\partial v_y}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} \otimes \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \otimes \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \hat{\mathbf{y}} \otimes \hat{\mathbf{z}} + \\ & + \frac{\partial v_z}{\partial x} \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned} \quad (\text{B.85})$$

le cui componenti possono essere raccolte nella matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.86})$$

■  
**Esempio B.10 — Coordinate cilindriche.** Il gradiente in coordinate cilindriche di un campo scalare  $f$  può essere scritto nella base ortonormale  $\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{z}}\}$  come

$$\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}, \quad (\text{B.87})$$

avendo utilizzato la (B.81) ed essendosi ricordati che  $\hat{\mathbf{b}}_2 = \hat{\boldsymbol{\theta}}/r$ . Da quest'ultima relazione tra i vettori delle basi naturale e ortonormale si ottiene il legame  $v^2 = rv_\theta$  tra le componenti del vettore  $\mathbf{v} = v^1 \mathbf{b}_1 + v^2 \mathbf{b}_2 + v^3 \mathbf{b}_3 = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + v_z \hat{\mathbf{z}}$  espresse in queste basi. Utilizzando queste relazioni nella formula (B.82) del gradiente di un campo vettoriale, è possibile scrivere

$$\begin{aligned} \text{grad} \mathbf{v} = & \left[ \frac{\partial v^i}{\partial q^k} + \Gamma_{lk}^i v^l \right] \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}^k = \\ = & \frac{\partial v^1}{\partial q^1} \mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}^1 + \left( \frac{\partial v^1}{\partial q^2} + \Gamma_{22}^1 v^2 \right) \mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}^2 + \frac{\partial v^1}{\partial q^3} \mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}^3 + \\ & + \left( \frac{\partial v^2}{\partial q^1} + \Gamma_{21}^2 v^1 \right) \mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{b}^1 + \left( \frac{\partial v^2}{\partial q^2} + \Gamma_{12}^2 v^1 \right) \mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{b}^2 + \frac{\partial v^2}{\partial q^3} \mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{b}^3 + \\ & + \frac{\partial v^3}{\partial q^1} \mathbf{b}_3 \otimes \mathbf{b}^1 + \frac{\partial v^3}{\partial q^2} \mathbf{b}_3 \otimes \mathbf{b}^2 + \frac{\partial v^3}{\partial q^3} \mathbf{b}_3 \otimes \mathbf{b}^3 = \\ = & \frac{\partial v_r}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{z}} + \\ & + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\mathbf{z}} + \\ & + \frac{\partial v_z}{\partial r} \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned} \quad (\text{B.88})$$

avendo utilizzato i valori dei simboli di Christoffel ricavati in precedenza. Si noti come l'annullarsi delle derivate parziali delle componenti del vettore non implichi l'uniformità (costanza in spazio e quindi gradiente nullo) del campo vettoriale: devono annullarsi le derivate covarianti poiché un campo vettoriale uniforme espresso in coordinate cilindriche (come in ogni altro sistema di coordinate diverso da quello cartesiano) non ha componenti costanti in spazio. ■



**Operatore B.3.2 — Divergenza.** La divergenza di un campo tensoriale è definito dalla contrazione degli ultimi due indici del gradiente del campo tensoriale stesso.

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \mathbf{C}_{\text{end}}^{\text{end}-1}(\operatorname{grad} \mathbf{T}). \quad (\text{B.89})$$

L'operatore di divergenza abbassa di 1 l'ordine del tensore al quale viene applicato: la divergenza di un tensore di ordine  $r$  ha ordine  $r - 1$ . Non può quindi essere applicato a un campo scalare (tensore di ordine 0). La divergenza di un campo vettoriale espresso nella base naturale è

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v^i}{\partial q^i} + \Gamma_{il}^i v^l = \nabla_i v^i. \quad (\text{B.90})$$

La divergenza di un tensore  $\mathbf{S}$  del secondo ordine è il campo vettoriale che viene scritto nella base naturale come

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \left[ \frac{\partial S^{ij}}{\partial q^j} + \Gamma_{jl}^i S^{lj} + \Gamma_{jl}^j S^{il} \right] \mathbf{b}_i = \nabla_j S^{ij} \mathbf{b}_i. \quad (\text{B.91})$$

■ **Esempio B.11 — Coordinate cartesiane.** Poichè i simboli di Christoffel sono identicamente nulli e i vettori della base naturale coincidono con la terna ortonormale  $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$  nei sistemi di coordinate cartesiane, dalla (B.90) si ottiene la forma già nota della divergenza di un campo vettoriale  $\mathbf{v}$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (\text{B.92})$$

■

■ **Esempio B.12 — Coordinate cilindriche.** In coordinate cilindriche gli unici simboli di Christoffel non nulli sono  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^1 = r^{-1}$ ,  $\Gamma_{22}^1 = -r$ . Utilizzando la (B.90), la divergenza di un campo vettoriale  $\mathbf{v} = v^1 \hat{\mathbf{b}}_1 + v^2 \hat{\mathbf{b}}_2 + v^3 \hat{\mathbf{b}}_3 = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + v_z \hat{\mathbf{z}}$  viene scritta in coordinate cilindriche come

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{\partial v^1}{\partial q^1} + \frac{\partial v^2}{\partial q^2} + \Gamma_{12}^2 v^1 + \frac{\partial v^3}{\partial q^3} = \\ &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial (v_\theta / r)}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (\text{B.93})$$

■

Nello studio della meccanica dei continui viene spesso utilizzata una definizione alternativa di divergenza, che non è equivalente a quella data in precedenza. La divergenza di un tensore del secondo ordine  $\mathbf{S}$  (come, ad esempio, il tensore degli sforzi) viene definita come

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \nabla_i S_{ij} \mathbf{b}^j, \quad (\text{B.94})$$

come se la contrazione avvenisse tra il primo e l'ultimo indice del gradiente del tensore  $\mathbf{S}$ . É quindi possibile definire l'operatore  $\nabla \cdot$ , diverso dalla divergenza definita dalla (B.89), come

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{C}_{\text{end}}^1(\operatorname{grad} \mathbf{T}), \quad (\text{B.95})$$

quando viene applicato a un tensore  $\mathbf{T}$  di ordine qualsiasi maggiore o uguale a 1. Questo operatore può essere pensato come il prodotto “dot” tra il “vettore formale”  $\nabla = \nabla_k \mathbf{b}^k$  e il tensore  $S^{ij} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j$

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = (\nabla_k \mathbf{b}^k) \cdot (S_{ij} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j) = \nabla_k S_{ij} \underbrace{\mathbf{b}^k \cdot \mathbf{b}_i}_{\delta_i^k} \otimes \mathbf{b}_j = \nabla_i S_{ij} \mathbf{b}_j \quad (\text{B.96})$$

Il risultato di questo operatore applicato a un tensore del secondo ordine  $\mathbf{S}$  può quindi essere scritto nella base naturale come

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \left[ \frac{\partial S^{ij}}{\partial q^i} + \Gamma_{il}^i S^{lj} + \Gamma_{il}^j S^{il} \right] \mathbf{b}_j. \quad (\text{B.97})$$

**R** Gli operatori div e  $\nabla \cdot$  danno lo stesso risultato se applicati a campi vettoriali o a tensori del secondo ordine simmetrici, come il tensore degli sforzi per continui non polari.

**R** Utilizzando il lemma A.2.2 e l'espressione del vettore sforzo (B.55) in componenti cartesiane (per le quali la base reciproca coincide con la base ortonormale naturale e le componenti contravarianti e covarianti coincidono con le variabili fisiche, vedere §B.3.4), è possibile trasformare il contributo degli sforzi di superficie  $\mathbf{t}_n$  in un integrale di volume,

$$\oint_S \mathbf{t}_n = \oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} = \oint_S n_i T_{ij} = \int_V \partial_i T_{ij} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (\text{B.98})$$

avendo indicato la superficie chiusa del volume  $V$  con  $S = \partial V$  e riconosciuto l'espressione in componenti cartesiane (per le quali le derivate covarianti coincidono con le derivate parziali) dell'operatore  $\nabla \cdot$  applicato al tensore degli sforzi  $\mathbf{T}$ . Poiché il tensore degli sforzi per continui non polari è simmetrico, la confusione generata dalle due definizioni diverse di divergenza usate da alcuni autori è solo apparente quando applicata al tensore degli sforzi.

Analogamente con quanto fatto per l'operatore  $\nabla \cdot$ , è possibile definire l'operatore  $\nabla$  (controparte dell'operatore gradiente), tramite la sua azione su un campo tensoriale. In particolare può essere pensato come il prodotto tensoriale tra il “vettore formale”  $\nabla = \nabla_k \mathbf{b}^k$  e il tensore  $\mathbf{T}$  al quale è applicato

$$\nabla \mathbf{T} = (\nabla_k \mathbf{b}^k) \otimes \mathbf{T}. \quad (\text{B.99})$$

Per esempio, per un tensore del secondo ordine  $\mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j$

$$\nabla \mathbf{S} = \nabla \otimes \mathbf{S} = (\nabla_k \mathbf{b}^k) \otimes (S^{ij} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j) = \nabla_k S^{ij} \mathbf{b}^k \otimes \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j. \quad (\text{B.100})$$

Nel caso di gradiente di un campo scalare, l'operatore  $\nabla$  così definito e l'operatore gradiente danno come risultato lo stesso campo vettoriale.

**R** Le equazioni vettoriali (o tensoriali) e le identità vettoriali (o tensoriali) possono essere scritte nel sistema di riferimento più conveniente. Durante il corso di Fluidodinamica si incontreranno alcune identità vettoriali utili all'elaborazione delle equazioni. Per chi volesse provare a dimostrarle, o dimostrarne almeno qualcuna, può usare le coordinate cartesiane, per le quali i simboli di Christoffel sono nulli e le derivate covarianti si riducono alle derivate parziali. La validità di un'identità vettoriale non dipende dal

sistema di riferimento in cui viene scritta. Per fornire un primo esempio, si dimostra che

$$\nabla \cdot (av) = \nabla a \cdot v + a \nabla \cdot v, \quad (\text{B.101})$$

dove  $a$  e  $v$  sono rispettivamente un campo scalare e vettoriale definiti nello spazio  $\mathbb{R}^2$ . Il campo vettoriale viene scritto in coordinate cartesiane come  $v = v_x \hat{x} + v_y \hat{y}$ . Da un calcolo diretto, si ottiene

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (av) &= \frac{\partial(av_x)}{\partial x} + \frac{\partial(av_y)}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial a}{\partial x} v_x + a \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} v_y + a \frac{\partial v_y}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial a}{\partial x} v_x + \frac{\partial a}{\partial y} v_y + a \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \nabla a \cdot v + a \nabla \cdot v. \end{aligned} \quad (\text{B.102})$$

Mentre è stato possibile introdurre gli operatori gradiente e divergenza utilizzando gli strumenti del calcolo tensoriale, sarebbe necessario introdurre dei concetti di *Algebra Esterna* per introdurre l'operazione di *prodotto esterno* della quale il rotore di un campo vettoriale è un caso particolare. Essendo questa una prima introduzione al calcolo tensoriale, la trattazione generale di questa operazione (e di molto altro, come ad esempio delle forme differenziali) va ben oltre lo scopo di questo documento. Per quanto ci serve, è sufficiente saper operare con il rotore su campi vettoriali e sapere esprimere le componenti fisiche del rotore in sistemi di coordinate cartesiane (per le quali la base naturale e la sua base reciproca coincidono con la base ortonormale  $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$  e le componenti contravarianti e covarianti coincidono con quelle fisiche).

**Operatore B.3.3 — Rotore.** Il rotore di un campo vettoriale  $v$  può essere scritto in coordinate cartesiane tramite l'utilizzo dei simboli  $\epsilon_{ijk}$  come

$$\text{rot } v = a = \nabla \times v, \quad a_i = \epsilon_{ijk} \partial_j v_k, \quad (\text{B.103})$$

dove la derivata parziale  $\partial/\partial x_j$  rispetto alla coordinata  $x_j$  è stata indicata con  $\partial_j$  per brevità. I simboli  $\epsilon_{ijk}$  assumono valore 1 se gli indici  $\{ijk\}$  formano una permutazione pari di  $\{1, 2, 3\}$ ,  $-1$  se gli indici  $\{ijk\}$  formano una permutazione dispari di  $\{1, 2, 3\}$ , 0 se ci sono degli indici ripetuti.

Identificando con 1 la coordinata  $x$ , con 2 la coordinata  $y$ , con 3 la coordinata  $z$ , i simboli  $\epsilon_{ijk}$  diversi da zero sono

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} &= 1, & \epsilon_{132} &= -1 \\ \epsilon_{231} &= 1, & \epsilon_{213} &= -1 \\ \epsilon_{321} &= 1, & \epsilon_{312} &= -1. \end{aligned} \quad (\text{B.104})$$

Le componenti cartesiane del rotore  $a = \nabla \times v$  sono

$$\begin{cases} a_x = \epsilon_{xyz} \partial_y v_z + \epsilon_{xzy} \partial_z v_y = \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ a_y = \epsilon_{yxz} \partial_z v_x + \epsilon_{yxz} \partial_x v_z = \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ a_z = \epsilon_{zxy} \partial_x v_y + \epsilon_{zyx} \partial_y v_x = \partial_x v_y - \partial_y v_x. \end{cases} \quad (\text{B.105})$$

Si osservi che si è ottenuto lo stesso risultato che si ottiene usando il determinante simbolico

$$a = \nabla \times v = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}. \quad (\text{B.106})$$

**R** I simboli  $\epsilon_{ijk}$  possono essere usati anche per esprimere il prodotto vettoriale tra due vettori, caso particolare del prodotto esterno tra tensori. Le componenti cartesiane del prodotto vettoriale  $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$  sono  $a_i = \epsilon_{ijk} b_j c_k$ .

**R** I simboli  $\epsilon_{ijk}$  rappresentano le componenti dello pseudo-tensore di Levi-Civita, o di Ricci. Solo per curiosità, uno pseudo-tensore si trasforma come un tensore per cambi di coordinate che preservano l'orientazione dello spazio, mentre deve essere aggiunto un segno meno alle componenti se la trasformazione di coordinate cambia l'orientazione dello spazio. Un esempio di trasformazione di coordinate che non conserva l'orientamento dello spazio è una riflessione rispetto a un piano. Ad esempio, date le coordinate cartesiane  $(x, y, z)$ , la riflessione rispetto al piano  $x = 0$  è definita le nuove coordinate come  $(q^1, q^2, q^3) = (-x, y, z)$ . Se la base  $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$  è destrorsa (regola della mano destra), la base naturale nelle coordinate  $(q^1, q^2, q^3)$  è sinistrorsa: poichè l'orientazione dello spazio è invertita, bisogna prestare attenzione a svolgere un prodotto vettoriale in questo sistema di coordinate.

**Operatore B.3.4 — Laplaciano.** L'operatore laplaciano è un'operatore del secondo ordine definito come la divergenza del gradiente,

$$\Delta \mathbf{T} = \text{div}(\text{grad} \mathbf{T}). \quad (\text{B.107})$$

Il laplaciano lascia inalterato l'ordine del tensore al quale è applicato.

■ **Esempio B.13 — Coordinate cartesiane.** Il laplaciano di un campo scalare  $f$  può essere espresso in un sistema di coordinate cartesiane come

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (\text{B.108})$$

■ **Esempio B.14 — Coordinate cilindriche.** L'espressione in coordinate cilindriche del laplaciano applicato a campi scalari e vettoriali viene fornita in §B.3.5. ■

**Operatore B.3.5 — Operatore di advezione.** L'operatore di advezione  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)_-$ , dovuta al campo vettoriale  $\mathbf{u}$ , applicato a una quantità tensoriale  $\mathbf{T}$  può essere definito come il prodotto scalare del campo vettoriale  $\mathbf{u}$  con il tensore  $\nabla \mathbf{T}$ ,

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{T} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{T}. \quad (\text{B.109})$$

Questo operatore rappresenta il trasporto della quantità alla quale viene applicato (il tensore  $\mathbf{T}$ ), dovuta al “campo di velocità”  $\mathbf{u}$ . L'operatore advezione lascia inalterato l'ordine del tensore al quale è applicato.

**R** L'operatore di advezione è diverso dall'operatore  $\nabla \cdot$  applicato al vettore  $\mathbf{u}$ . Il prodotto scalare formale tra un vettore,  $\mathbf{u}$ , e un vettore formale,  $\nabla$ , non è commutativo. Quando applicati a un campo vettoriale, l'operatore  $\nabla \cdot$  coincide con l'operatore di divergenza  $\text{div}$  e restituiscono un campo scalare. L'operatore  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)_-$  deve essere applicato a un campo vettoriale  $\mathbf{v}$  per restituire un vettore e non rimanere soltanto un operatore. Si rimanda all'esempio in coordinate cartesiane

L'operatore di advezione applicato a un campo scalare  $f$  viene espresso nella base naturale come

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) f = \left( u^i \underbrace{\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}^k}_{\delta_i^k} \frac{\partial}{\partial q^k} \right) f = \left( u^i \frac{\partial}{\partial q^i} \right) f = u^i \frac{\partial f}{\partial q^i}. \quad (\text{B.110})$$

L'operatore di advezione applicato a un campo vettoriale  $\mathbf{v}$  viene espresso nella base naturale come

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (u^i \mathbf{b}_i) \cdot \left( \nabla_j v^k \mathbf{b}^j \otimes \mathbf{b}_k \right) = u^i \nabla_j v^k \underbrace{\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}^j}_{\delta_i^j} \otimes \mathbf{b}_k = u^i \left[ \frac{\partial v^k}{\partial q^j} + \Gamma_{jl}^k v^l \right] \mathbf{b}_k. \quad (\text{B.111})$$

L'operatore di advezione applicato a un campo tensoriale del secondo ordine  $\mathbf{S}$  viene espresso nella base naturale come

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{S} = u^k \nabla_k S^{ij} \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j = u^k \left[ \frac{\partial S^{ij}}{\partial q^k} + \Gamma_{kl}^i S^{lj} + \Gamma_{kl}^j S^{il} \right] \cdot \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j \quad (\text{B.112})$$

■ **Esempio B.15 — Coordinate cartesiane.** L'espressione in coordinate cartesiane dell'operatore di advezione applicato al campo scalare  $f$  è

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) f = u_x \frac{\partial f}{\partial x} + u_y \frac{\partial f}{\partial y} + u_z \frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{u} \cdot \nabla f. \quad (\text{B.113})$$

L'espressione in coordinate cartesiane dell'operatore di advezione applicato al campo vettoriale  $\mathbf{v}$  è

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\mathbf{u} \cdot \nabla u_x) \hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla u_y) \hat{\mathbf{y}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla u_z) \hat{\mathbf{z}}, \quad (\text{B.114})$$

avendo utilizzato il risultato dell'operatore di advezione applicato a un campo scalare, appena ricavata. ■

■ **Esempio B.16 — Coordinate cilindriche.** L'espressione in coordinate cilindriche dell'operatore di advezione applicato a un campo vettoriale viene fornita in §B.3.5. ■

### B.3.4 Coordinate curvilinee ortogonali

Le coordinate curvilinee ortogonali sono n caso particolare di coordinate curvilinee, caratterizzate dalla condizione di ortogonalità tra gli elementi della base  $\{\mathbf{b}_k\}$ . Gli elementi del tensore metrico fuori dalla diagonale (quelli con indici diversi) sono quindi nulli,

$$\begin{cases} \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_i = g_{ii} \\ \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = 0, \quad i \neq j. \end{cases} \quad (\text{B.115})$$

Anche la trasformazione dagli elementi di  $\{\mathbf{b}_i\}$  a quelli di  $\{\mathbf{b}^k\}$  si semplifica, diventando

$$\mathbf{b}_i = g_{ii} \mathbf{b}^i, \quad \mathbf{b}^i = g^{ii} \mathbf{b}_i, \quad (\text{B.116})$$

dove, in questo caso, non è sottintesa nessuna sommatoria sugli indici ripetuti. Essendo il tensore metrico diagonale, le componenti covarianti sono uguali all'inverso delle componenti contravarianti,

$$g^{ii} = g_{ii}^{-1}, \quad (\text{B.117})$$

dove non è sottintesa nessuna sommatoria sugli indici ripetuti.

**Componenti contravarianti, covarianti e fisiche.**

In generale, le componenti espresse nella base naturale non hanno le dimensioni fisiche della quantità tensoriale, poichè è possibile che gli elementi della base abbiano una dimensione fisica, come già osservato in precedenza per le coordinate cilindriche. Si pensi al caso di un sistema di coordinate polare  $(q^1, q^2) = (r, \theta)$

$$\begin{aligned} [\mathbf{b}_1] &= \left[ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \right] = \frac{L}{L} = 1 \\ [\mathbf{b}_2] &= \left[ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \right] = \frac{L}{1} = L. \end{aligned} \quad (\text{B.118})$$

Mentre il primo elemento della base naturale non ha dimensione fisica, poichè è il risultato di un rapporto (derivata) tra lunghezze, il secondo elemento della base ha la dimensione di una lunghezza, poichè è la derivata di una lunghezza rispetto a un angolo (e l'angolo non ha dimensioni fisiche!).

Questa situazione è “scomoda”: è sensato desiderare una base formata da vettori privi di “unità fisiche”. Inoltre è lecito desiderare una base ortonormale. I due problemi vengono risolti definendo i versori della **base fisica** come

$$\hat{\mathbf{b}}_i = \frac{\mathbf{b}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (\text{no sum}). \quad (\text{B.119})$$

È immediato verificare che questi vettori hanno lunghezza unitaria ricordando che  $g_{ii} = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_i = |\mathbf{b}_i|^2$ . Facendo lo stesso procedimento sulla base contravariante  $\{\mathbf{b}^i\}$ , si scopre che la base fisica contravariante coincide con quella covariante (e quindi non ha senso fare questa distinzione). Infatti

$$\hat{\mathbf{b}}^i = \frac{\mathbf{b}^i}{\sqrt{g^{ii}}} = \sqrt{g_{ii}} \mathbf{b}^i = \frac{\mathbf{b}_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \hat{\mathbf{b}}_i. \quad (\text{B.120})$$

Poichè per coordinate curvilinee ortogonali le basi fisiche coincidono, anche le componenti fisiche ottenute partendo dalle componenti contravarianti coincidono con le componenti fisiche ottenute partendo dalle componenti contravarianti: ha quindi senso parlare di componenti fisiche, senza fare riferimento a covarianza e contravarianza. Le **componenti fisiche**  $\hat{v}_k$  di un vettore  $\mathbf{v}$  vengono ricavate dalle componenti controvarianti e dalle componenti covarianti tramite la radice quadrata degli elementi non nulli della tensore metrico,

$$\mathbf{v} = \hat{v}_k \hat{\mathbf{b}}_k = \begin{cases} v^k \mathbf{b}_k = v^k \sqrt{g_{kk}} \hat{\mathbf{b}}_k \\ v_k \mathbf{b}^k = v_k \sqrt{g^{kk}} \hat{\mathbf{b}}^k \end{cases} \Rightarrow \hat{v}_k = \begin{cases} v^k \sqrt{g_{kk}} = v^k / \sqrt{g^{kk}} \\ v_k \sqrt{g^{kk}} = v_k / \sqrt{g_{kk}}. \end{cases} \quad (\text{B.121})$$

**R** Ora che sono state introdotte le componenti fisiche in sistemi di coordinate curvilinee ortogonali, **e solo ora**, è possibile confondere i pedici con gli apici nelle componenti dei tensori.

**B.3.5 Esempio: coordinate cilindriche**

Questo paragrafo viene dedicato alle coordinate cilindriche, un sistema di coordinate ortogonali. Vengono calcolate le espressioni delle coordinate degli operatori applicati a campi tensoriali che verranno incontrati nella scrittura delle equazioni di bilancio, come ad esempio le equazioni di Navier-Stokes per fluidi incompressibili introdotte alla fine del paragrafo.

Lo spazio tridimensionale viene descritto in coordinate cilindriche dalle tre coordinate  $(q^1, q^2, q^3) = (r, \theta, z)$ . L'elemento di lunghezza  $ds$  ha la forma

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \quad (\text{B.122})$$

**Tensore metrico.**

Il sistema di coordinate cilindriche è ortogonale. Il tensore metrico è diagonale  $g_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$ . In particolare, dall'elemento di lunghezza si ricavano le componenti del tensore metrico

$$\begin{aligned} g_{11} = 1, \quad g_{22} = q^{(1)^2}, \quad g_{33} = 1 & \quad (\text{componenti covarianti}) \\ g^{11} = 1, \quad g^{22} = 1/q^{(1)^2}, \quad g^{33} = 1 & \quad (\text{componenti contravarianti}) \end{aligned} \quad (\text{B.123})$$

**Vettore posizione e base naturale.**

Rispetto alla base cartesiana  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ , il vettore posizione  $\mathbf{x}$  è

$$\mathbf{x} = q^1 \cos(q^2) \hat{x} + q^1 \sin(q^2) \hat{y} + q^3 \hat{z} \quad (\text{B.124})$$

I vettori della base naturale sono definiti  $\mathbf{b}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i}$ . La base reciproca si ottiene da  $\mathbf{b}^i = g^{ik} \mathbf{b}_k$

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = \cos q^2 \hat{x} + \sin q^2 \hat{y} \\ \mathbf{b}_2 = -q^1 \sin q^2 \hat{x} + q^1 \cos q^2 \hat{y} \\ \mathbf{b}_3 = \hat{z} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{b}^1 = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}^2 = g^{22} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}^3 = \mathbf{b}_3 \end{cases} \quad (\text{B.125})$$

**Componenti contravarianti, covarianti e fisiche.**

I vettori  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}^1, \mathbf{b}^3$  delle basi naturale e reciproca sono privi di dimensioni fisiche, mentre il vettore  $\mathbf{b}_2$  ha la dimensione di una lunghezza (la coordinata  $q^1$  coincide con il raggio  $r$ ) e il vettore  $\mathbf{b}^2$  ha la dimensione dell'inverso di una lunghezza. È quindi necessario definire la base fisica e le componenti fisiche di un vettore (in maniera analoga si definiranno le componenti fisiche di un tensore di ordine qualsiasi). Utilizzando il valore delle componenti del tensore metrico trovate e la (B.120), la base fisica nel sistema di coordinate cilindriche è

$$\begin{cases} \hat{r} = \hat{b}^1 = \mathbf{b}^1 & = \cos q^2 \hat{x} + \sin q^2 \hat{y} \\ \hat{\theta} = \hat{b}^2 = \mathbf{b}^2 / \sqrt{g^{22}} & = -\sin q^2 \hat{x} + \cos q^2 \hat{y} \\ \hat{z} = \hat{b}^3 = \mathbf{b}^3 & = \hat{z}. \end{cases} \quad (\text{B.126})$$

**Simboli di Christoffel.**

Si può verificare tramite calcolo diretto che gli unici simboli di Christoffel del secondo tipo diversi da zero sono

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = 1/q^1, \quad \Gamma_{22}^1 = -q^1. \quad (\text{B.127})$$

**Gradiente di uno scalare.**

Utilizzando la forma in componenti del gradiente, il legame tra componenti contravarianti, covarianti e fisiche, si può scrivere il gradiente di un campo scalare in componenti contravarianti, covarianti e fisiche.

$$\begin{aligned} \text{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{b}^1 + \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{b}^2 + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{b}^3 = \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{b}_1 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{b}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{b}_3 = \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \end{aligned} \quad (\text{B.128})$$

**Divergenza di un vettore.**

Si riporta qui l'espressione della divergenza di un campo vettoriale, già calcolata in §B.3.3

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{v} &= \frac{\partial v^i}{\partial q^i} + \Gamma_{il}^i v^l = \\
 &= \frac{\partial v^1}{\partial q^1} + \frac{\partial v^2}{\partial q^2} + \frac{\partial v^3}{\partial q^3} + \Gamma_{12}^2 v^1 = \\
 &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} v_r \\
 &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{B.129}$$

**Gradiente di un vettore.**

Si riporta qui l'espressione della gradiente di un campo vettoriale, già calcolata in §B.3.3

$$\begin{aligned}
 \operatorname{grad} \mathbf{v} &= \left[ \frac{\partial v^i}{\partial q^k} + \Gamma_{lk}^i v^l \right] \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}^k = \\
 &= \frac{\partial v^1}{\partial q^1} \mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}^1 + \left( \frac{\partial v^1}{\partial q^2} + \Gamma_{22}^1 v^2 \right) \mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}^2 + \frac{\partial v^1}{\partial q^3} \mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}^3 + \\
 &+ \left( \frac{\partial v^2}{\partial q^1} + \Gamma_{21}^2 v^1 \right) \mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{b}^1 + \left( \frac{\partial v^2}{\partial q^2} + \Gamma_{12}^2 v^1 \right) \mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{b}^2 + \frac{\partial v^2}{\partial q^3} \mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{b}^3 + \\
 &+ \frac{\partial v^3}{\partial q^1} \mathbf{b}_3 \otimes \mathbf{b}^1 + \frac{\partial v^3}{\partial q^2} \mathbf{b}_3 \otimes \mathbf{b}^2 + \frac{\partial v^3}{\partial q^3} \mathbf{b}_3 \otimes \mathbf{b}^3 = \\
 &= \frac{\partial v_r}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{z}} + \\
 &+ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\mathbf{z}} + \\
 &+ \frac{\partial v_z}{\partial r} \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\mathbf{z}},
 \end{aligned} \tag{B.130}$$

**Laplaciano.**

La forma in componenti dell'operatore laplaciano di un vettore si ottiene partendo dalla definizione  $\Delta \mathbf{v} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{v})$ . Il gradiente è stato appena scritto in componenti miste; per poter utilizzare la formula in componenti contravarianti di un tensore, è quindi necessario prima trasformare (tramite il tensore metrico) le componenti miste in contravarianti: viene scritto esplicitamente solo il termine  $g^{22}$  poiché è l'unico elemento diagonale diverso da uno e viene eseguito il calcolo solo per la prima componente, per motivi di sintesi

$$\begin{aligned}
 \Delta v &= \mathbf{b}_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial q^1} \frac{\partial v^1}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^2} \left[ g^{22} \left( \frac{\partial v^1}{\partial q^2} + \Gamma_{22}^1 v^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial q^3} \frac{\partial v^1}{\partial q^3} + g^{22} \Gamma_{22}^1 \left( \frac{\partial v^2}{\partial q^2} + \Gamma_{12}^2 v^1 \right) + \Gamma_{21}^2 \frac{\partial v^1}{\partial q^2} \right\} \\
 &+ \mathbf{b}_2 \{ \dots \} + \mathbf{b}_3 \{ \dots \} = \\
 &= \dots = \\
 &= \left[ \Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] \hat{\mathbf{r}} + \\
 &+ \left[ \Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \\
 &+ [\Delta u_z] \hat{\mathbf{z}}
 \end{aligned} \tag{B.131}$$



dove con  $\Delta f$  è stato indicato il laplaciano di uno scalare

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{B.132})$$

**Termine advettivo.**

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \left[ \frac{\partial v^i}{\partial q^j} + \Gamma_{lj}^i v^l \right] a^j \mathbf{b}_i = \\ &= \left[ a^k \frac{\partial v^1}{\partial q^k} + a^2 \Gamma_{22}^1 v^2 \right] \mathbf{b}_1 + \left[ a^k \frac{\partial v^2}{\partial q^k} + a^1 \Gamma_{12}^2 v^2 + a^2 \Gamma_{21}^2 v^1 \right] \mathbf{b}_2 + \left[ a^k \frac{\partial v^3}{\partial q^k} \right] \mathbf{b}_3 = \\ &= \dots = \\ &= \left[ a_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + a_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{a_\theta v_\theta}{r} \right] \hat{\mathbf{r}} + \\ &\quad + \left[ a_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + a_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{a_\theta v_r}{r} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \\ &\quad + \left[ a_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + a_r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (\text{B.133})$$

### Equazioni di Navier-Stokes

Utilizzando l'espressione in coordinate cilindriche degli operatori ricavate nel paragrafo precedente, è ora possibile scrivere le equazioni di Navier-Stokes in coordinate cilindriche.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.134})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) - \frac{1}{Re} \left[ \Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial p}{\partial r} = f_r \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \left( u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) - \frac{1}{Re} \left[ \Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = f_\theta \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + \left( u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - \frac{1}{Re} \Delta u_z + \frac{\partial p}{\partial z} = f_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.135})$$

dove si è usato il laplaciano di un campo scalare, definito in precedenza. Per inciso, si ricorda che le equazioni hanno bisogno di condizioni iniziali (poichè sono evolutive nel tempo), di condizioni al contorno (poichè compaiono derivate spaziali) e, quando necessario, di condizioni di compatibilità, tra condizioni iniziali e al contorno.

## Bibliography



## Indice analitico

### A

Aerodinamica ..... 103

### B

Bilanci ..... 31

### C

Cinematica ..... 23

### L

Lemma di Green..... 139

### S

Similitudine ..... 93

Soluzioni esatte ..... 71

Statica..... 5

Strato limite..... 119

### T

Tensione superficiale ..... 17

Teorema di Bernoulli ..... 57

Turbolenza ..... 131