*First edition, March 2013*

# A. Richiami di analisi

# B. Introduzione all'algebra tensoriale

*- Tutto è relativo!*
*- No, tutto è assoluto!*

Le equazioni che descrivono i fenomeni fisici hanno carattere tensoriale, cioè sono indipendenti dal sistema di coordinate nelle quali vengono scritte. É importante capire la natura tensoriale delle leggi fisiche, capirne l'**invarianza** rispetto ai sistemi di coordinate ed essere in grado di scrivere correttamente le equazioni nei sistemi di coordinate più vantaggiosi per la descrizione del fenomeno fisico e per la soluzione dei problemi.

In questo capitolo verrà usata la notazione di Einstein: è sottointesa la sommatoria sugli indici ripetuti in una espressione. Per chiarezza,

$$a_k b_k = \sum_k a_k b_k. \tag{B.1}$$

Si considerano qui solo spazi vettoriali dotati di prodotto interno, per i quali è possibile evitare di introdurre concetti più generali, ma più astratti e del tutto inessenziali per una prima introduzione ai tensori e al calcolo tensoriale: ad esempio è possibile "schivare" le definizioni di spazio e base duale (parente di quella che qui verrà chiamata *base reciproca*), isomorfismi e altri concetti più "matematici". Vengono comunque dati alcuni riferimenti per una trattazione esaustiva dell'argomento.

**Argomenti della sezione.**

Le equazioni della fisica hanno un valore assoluto, indipendente dalla scelta dei sistemi del sistema di riferimento o dalle coordinate usate per descrivere il fenomeno fisico. Vettori e tensori sono gli oggetti matematici che rispecchiano questa invarianza del fenomeno fisico dalla base dello spazio fisico. L'introduzione ai tensori si svolgerà lungo il seguente percorso logico:

- si introduce il concetto di invarianza concentrandosi sui vettori:
  - un vettore fisico $\boldsymbol{v}$, inteso come oggetto invariante, può essere scritto come somma dei prodotti delle sue componenti per i vettori di una base dello spazio, $\boldsymbol{v} = v^k \boldsymbol{b}_k$;
  - per ricavare le componenti $v^k$ di un vettore espresso nella base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$, viene introdotto il concetto di base reciproca (o *duale*) $\{\boldsymbol{b}^k\}_{k=1:N}$ e viene ricavato il legame con la base "di partenza" $\{\boldsymbol{b}^k\}$;
  - vengono introdotti i concetti di *covarianza* e *contravarianza*, viene spiegato il significato della posizione degli indici (pedici o apici) di componenti o vettori di una base, e viene ricavato il legame tra oggetti covarianti e contravarianti;
  - viene introdotta **la legge di trasformazione delle componenti del vettore, in seguito a un cambio di base**, che rappresenta l'invarianza dei vettori ed è alla base della definizione classica di vettore fisico e tensore;
- si introduce il concetto di tensore. In questa introduzione si utilizzeranno i concetti presentati in precedenza sui vettori:
  - viene definita la base prodotto, utilizzata per scrivere un tensore in componenti;
  - vengono introdotte le operazioni sui tensori di somma e moltiplicazione per uno scalare;
  - viene ripresa la legge di trasformazione tra oggetti covarianti e contravarianti;
  - viene ripresa le regole per **la trasformazione delle componenti in seguito a un cambio di base**, che rappresenta l'invarianza dei tensori e coincide con la **definizione classica di tensore**;
  - vengono introdotte altre operazioni sui tensori, invarianti anch'esse, il cui risultato è un nuovo tensore.

## B.1 Richiami di algebra lineare

**Definizione B.1.1 — Componenti contravarianti.** Sia $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale, sia $\boldsymbol{v}$ un elemento di $\mathcal{V}$ e $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ una base[a] di $\mathcal{V}$; si può scrivere il vettore $\boldsymbol{v}$ in componenti rispetto alla base $\{\boldsymbol{b}_k\}$

$$\boldsymbol{v} = v^k \boldsymbol{b}_k, \tag{B.2}$$

dove gli scalari $v^k$ sono definiti componenti contravarianti (rispetto alla base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$) del vettore $\boldsymbol{v}$.

[a] Una base è un insieme minimale di vettori linearmente indipendenti. La dimensione dello spazio vettoriale coincide con il numero di elementi di una sua base.

Per ricavare le componenti $v^k$ del vettore $\boldsymbol{v}$ espresso nella base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$, è utile introdurre la definizione di base reciproca.

**Definizione B.1.2 — Base reciproca.** Data la base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ di $\mathcal{V}$, la sua base reciproca è definita come l'insieme di vettori $\{\boldsymbol{b}^k\}_{k=1:N}$ tali che

$$\boldsymbol{b}^i \cdot \boldsymbol{b}_k = \delta^i_k, \tag{B.3}$$

dove con $\delta^i_k$ è stata indicata la delta di Kronecker, uguale a 1 quando gli indici sono uguali, uguale a 0 altrimenti.

É immediato ricavare la regola per ottenere le componenti $v^k$ espresse nella base $\{\boldsymbol{b}_k\}$, una volta nota la sua base reciproca $\{\boldsymbol{b}^k\}$ (il paragrafo B.1.1 contiene le regole per ricavare la base reciproca),

$$v^k = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b}^k \quad , \quad \text{infatti} \quad \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b}^k = v^i \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}^k = v^i \delta^k_i = v^k \ . \tag{B.4}$$

Una volta definita la base reciproca $\{\boldsymbol{b}^k\}$, è possible definire le componenti covarianti $v_k$ del vettore $\boldsymbol{v}$.

**Definizione B.1.3 — Componenti covarianti.** Date la base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ di $\mathcal{V}$ e la sua base reciproca $\{\boldsymbol{b}^k\}_{k=1:N}$, le componenti covarianti $v_k$ sono le componenti del vettore $\boldsymbol{v}$ nella base reciproca

$$\boldsymbol{v} = v_k \boldsymbol{b}^k. \tag{B.5}$$

R In generale, la base reciproca $\{\boldsymbol{b}^k\}_{k=1:N}$ non coincide con la base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ e di conseguenza le componenti contravarianti e covarianti di un vettore sono diverse, $v^k \neq v_k$.

Risulta quindi fondamentale prestare attenzione alla posizione degli indici e dei pedici. Nel seguito, dopo aver ristretto la trattazione generale a casi più particolari, si ridurrà l'esigenza di prestare attenzione alla posizione degli indici. É possibile confondere apici e pedici **solo(!)** quando si usa una **base ortonormale** dello spazio, che coincide con la sua base reciproca: di conseguenza, anche le componenti covarianti $v_k$ coincidono con le componenti $v^k$ nella base di partenza.

La posizione degli indici contraddistingue la natura covariante o contravariante degli oggetti. Viene usata la seguente convenzione:

- gli oggetti **covarianti** sono indicati con i **pedici**;
- gli oggetti **contravarianti** sono indicati con gli **apici**.

I termini **covariante** e **contravariante** si riferiscono alla legge di trasformazione dell'oggetto (componenti o vettori della base) al quale sono riferiti, in seguito a un cambiamento della base. In particolare, gli oggetti covarianti sono quelli che seguono la stessa legge di trasformazione degli elementi della base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$, mentre gli oggetti contravarianti seguono la trasformazione inversa, come si vedrà meglio paragrafo B.1.2.

Un **vettore** e tutti gli **oggetti invarianti** al cambio di sistemi di riferimento (tensori), devono avere componenti contravarianti se riferite a un elemento di una base covariante, componenti covarianti se riferite a un elemento della base contravariante (che si scoprirà essere la base reciproca).

### B.1.1 Trasformazione tra oggetti controvarianti e covarianti: regola per "alzare e abbassare gli indici".

Gli elementi di una base di uno spazio vettoriale non sono necessariamente ortogonali (né tantomeno ortonormali) tra di loro.

**Definizione B.1.4 — Simboli $g_{ij}$ e $g^{ij}$.** Si definiscono i valori dei prodotti scalari degli elementi della base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ e della base reciproca $\{\boldsymbol{b}^k\}_{k=1:N}$ come

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j \qquad (\neq \delta_{ij} \text{ in generale}) \\ g^{ij} &= \boldsymbol{b}^i \cdot \boldsymbol{b}^j \qquad (\neq \delta_{ij} \text{ in generale}). \end{aligned} \tag{B.6}$$

I simboli $g_{ik}$ e $g^{ik}$ sono simmetrici rispetto alla permutazione degli indici. Se questi simboli $g_{ik}$ vengono raccolti nella matrice $G$, questa matrice è **simmetrica**: i due indici possono quindi rappresentare indifferentemente la riga o la colonna della matrice $G$. Si può dimostrare che la matrice $\tilde{G}$ che raccoglie i simboli $g^{ik}$ è anch'essa simmetrica ed è la matrice inversa di $G$.

**Vettori delle basi.** La regola per ricavare un vettore di una base rispetto a quelli dell'altra è

$$\boldsymbol{b}_i = g_{ik}\boldsymbol{b}^k, \quad \boldsymbol{b}^i = g^{ik}\boldsymbol{b}_k. \tag{B.7}$$

Infatti, inserendo la prima nella definizione di $g_{ij}$ si ottiene la seguente identità

$$g_{ij} = \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = g_{ik}\boldsymbol{b}^k \cdot \boldsymbol{b}_j = g_{ik}\delta^k_j = g_{ij}. \tag{B.8}$$

Le relazioni (B.7) possono essere scritte in forma matriciale,

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{b}_1|\dots|\boldsymbol{b}_N] &= [\boldsymbol{b}^1|\dots|\boldsymbol{b}^N]\,[g_{ik}] = [\boldsymbol{b}^1|\dots|\boldsymbol{b}^N]G, \\ [\boldsymbol{b}^1|\dots|\boldsymbol{b}^N] &= [\boldsymbol{b}_1|\dots|\boldsymbol{b}_N]\,[g^{ik}] = [\boldsymbol{b}_1|\dots|\boldsymbol{b}_N]\tilde{G} \end{aligned} \qquad \rightarrow \qquad G^{-1} = \tilde{G}\ . \tag{B.9}$$

**Componenti covarianti e contravarianti.** La regola per ricavare una componente di un vettore $\boldsymbol{v}$ in una base, in funzione delle componenti della base reciproca è

$$v_i = g_{ik}v^k, \quad v^i = g^{ik}v_k. \tag{B.10}$$

Questa regola viene dimostrata facilmente scrivendo il vettore $\boldsymbol{v}$ nelle due basi e utilizzando le regole (B.7) per la trasformazione degli elementi delle basi

$$\boldsymbol{v} = \begin{cases} v^i\boldsymbol{b}_i = v^i g_{ik}\boldsymbol{b}^k = v_k\boldsymbol{b}^k \\ v_i\boldsymbol{b}^i = v_i g^{ik}\boldsymbol{b}_k = v^k\boldsymbol{b}_k \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} v_k = g_{ik}v^i \\ v^k = g^{ik}v_i. \end{cases} \tag{B.11}$$

R Per ricordarsi le trasformazioni (B.7) e (B.10) è sufficiente ricordarsi che:
- gli indici non ripetuti a destra e a sinistra dell'uguale devono trovarsi nella stessa posizione;
- gli indici ripetuti dalla stessa parte dell'uguale si trovano uno in alto, l'altro in basso.

**Esercizio .B.1 — Base ortonormale.** Dimostrare che la base reciproca di una base ortonormale coincide con la base di partenza. ■

### B.1.2 Cambio di base e regole di trasformazione: covarianza e contravarianza.

I termini "covariante" o "contravariante" sono riferiti alla legge di trasformazione di un oggetto (componente o elemento di una base), se confrontata con la legge di trasformazione degli elementi della base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ di $\mathcal{V}$. Gli apici sono riservati agli oggetti contravarianti (le componenti $v^k$ del vettore $\boldsymbol{v}$ e gli elementi della base reciproca $\{\boldsymbol{b}^k\}_{k=1:N}$), mentre i pedici sono riservati agli oggetti covarianti (le componenti $v_k$ del vettore $\boldsymbol{v}$ e gli elementi della base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ di $\mathcal{V}$).

**Base covariante.** Due basi $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ e $\{\hat{\boldsymbol{b}}_k\}_{k=1:N}$ dello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ sono legate dalla trasformazione lineare $T$,

$$\boldsymbol{b}_k = \hat{T}_k^q \hat{\boldsymbol{b}}_q \ , \quad \hat{\boldsymbol{b}}_k = T_k^q \boldsymbol{b}_q \ , \tag{B.12}$$

dove con $\hat{T}$ viene indicata la trasformazione inversa di $T$, $\hat{T} = T^{-1}$. Usando il formalismo matriciale, si può scrivere

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{b}_1|\dots|\boldsymbol{b}_N] &= [\hat{\boldsymbol{b}}_1|\dots|\hat{\boldsymbol{b}}_N]\,[\hat{T}_k^q] = [\hat{\boldsymbol{b}}_1|\dots|\hat{\boldsymbol{b}}_N]\hat{T}, \\ [\hat{\boldsymbol{b}}_1|\dots|\hat{\boldsymbol{b}}_N] &= [\boldsymbol{b}_1|\dots|\boldsymbol{b}_N]\,[T_k^q] = [\boldsymbol{b}_1|\dots|\boldsymbol{b}_N]T \end{aligned} \quad \rightarrow \quad T = \hat{T}^{-1} \ . \tag{B.13}$$

avendo interpretato il pedice della trasformazione $T$ come l'indice di colonna e l'apice come indice di riga.

**Basi reciproche.** Le rispettive basi reciproche $\{\boldsymbol{b}^k\}_{k=1:N}$ e $\{\hat{\boldsymbol{b}}^k\}_{k=1:N}$ di $\mathcal{V}$ sono legate dalla trasformazione inversa, mostrando quindi una natura contravariante alla quale vengono riservati gli apici,

$$\boldsymbol{b}^k = T_q^k \hat{\boldsymbol{b}}^q \ , \quad \hat{\boldsymbol{b}}^k = \hat{T}_q^k \boldsymbol{b}^q \ . \tag{B.14}$$

Infatti, usando le trasformazioni (B.12) e (B.14) nella definizione della base duale $\{\hat{\boldsymbol{b}}^k\}_{k=1:N}$, si ottiene

$$\delta_k^i = \hat{\boldsymbol{b}}^i \cdot \hat{\boldsymbol{b}}_k = \hat{\boldsymbol{b}}^i \cdot (T_k^q \boldsymbol{b}_q) = T_k^q \hat{\boldsymbol{b}}^i \cdot \boldsymbol{b}_q = T_k^q (\hat{T}_l^i \boldsymbol{b}^l) \cdot \boldsymbol{b}_q = T_k^q \hat{T}_l^i \delta_q^l = \hat{T}_l^i T_k^l, \tag{B.15}$$

che può essere riscritta $I = \hat{T}T$, dimostrando che $\hat{T} = T^{-1}$.

**Componenti contravarianti.** Le componenti contravarianti $v^k$ di $\boldsymbol{v}$ variano secondo la trasformazione inversa degli elementi della base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ di $\mathcal{V}$,

$$\hat{v}^k = \hat{T}_q^k v^q \ , \quad v^k = T_q^k \hat{v}^q \ . \tag{B.16}$$

É possibile verificare immediatamente le (B.16), inserendo la trasformazione (B.12) nella rappresentazione del vettore $\boldsymbol{v}$ nella base covariante $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$,

$$\boldsymbol{v} = v^q \boldsymbol{b}_q = v^q \hat{T}_q^k \hat{\boldsymbol{b}}_k = \hat{v}^k \hat{\boldsymbol{b}}_k \ . \tag{B.17}$$

**Componenti covarianti.** Le componenti covarianti $v_k$ variano con la stessa trasformazione degli elementi della base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ di $\mathcal{V}$,

$$\hat{v}_k = T_k^q v_q \ , \quad v_k = \hat{T}_k^q \hat{v}_q \ . \tag{B.18}$$

É possibile verificare immediatamente le (B.18), inserendo la trasformazione (B.14) nella rappresentazione del vettore $\boldsymbol{v}$ nella base contravariante $\{\boldsymbol{b}^k\}_{k=1:N}$,

$$\boldsymbol{v} = v_q \boldsymbol{b}^q = v_q T_k^q \hat{\boldsymbol{b}}^k = \hat{v}_k \hat{\boldsymbol{b}}^k \ . \tag{B.19}$$

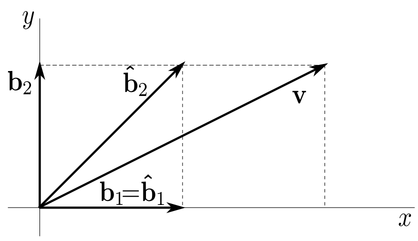
**Trasformazioni $T$, $\hat{T}$ tra due basi $\{\boldsymbol{b}_k\}$ e $\hat{\boldsymbol{b}}_k$.** Le componenti delle trasformazione lineare $\hat{T}$ e della sua inversa $T$ che legano i vettori delle due basi $\{\boldsymbol{b}_k\}$ e $\{\boldsymbol{b}^k\}$ tramite le espressioni (B.12) hanno l'espressione

$$\hat{T}_k^q = \hat{\boldsymbol{b}}^q \cdot \boldsymbol{b}_k \quad , \quad T_k^q = \boldsymbol{b}^q \cdot \hat{\boldsymbol{b}}_k \ . \tag{B.20}$$

Per verificare queste formule è sufficiente usare il prodotto scalare con i vettori della base reciproca. Infatti,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_k = \hat{T}_k^i \hat{\boldsymbol{b}}_i \quad &, \quad \hat{\boldsymbol{b}}^q \cdot \boldsymbol{b}_k = \hat{T}_k^i \underbrace{\hat{\boldsymbol{b}}^q \cdot \hat{\boldsymbol{b}}_i}_{=\delta_i^q} \quad \rightarrow \quad \hat{T}_k^q = \hat{\boldsymbol{b}}^q \cdot \boldsymbol{b}_k \\
\hat{\boldsymbol{b}}_k = T_k^i \boldsymbol{b}_i \quad &, \quad \boldsymbol{b}^q \cdot \hat{\boldsymbol{b}}_k = T_k^i \underbrace{\boldsymbol{b}^q \cdot \boldsymbol{b}_i}_{=\delta_i^q} \quad \rightarrow \quad T_k^q = \boldsymbol{b}^q \cdot \hat{\boldsymbol{b}}_k \ .
\end{aligned} \tag{B.21}$$

**Esercizio .B.2 — Cambio di base.** In figura sono rappresentate le basi $B_i = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$, $\hat{B}_i = \left\{\hat{\boldsymbol{b}}_1, \hat{\boldsymbol{b}}_2\right\}$ dello spazio bidimensionale $\mathbb{R}^2$ e il vettore $\boldsymbol{v} = v^1 \boldsymbol{b}_1 + v^2 \boldsymbol{b}_2 = 2\boldsymbol{b}_1 + 1\boldsymbol{b}_2$. Viene chiesto di:
- determinare le basi reciproche $B^i = \{\boldsymbol{b}^i\}$, $\hat{B}^i = \left\{\hat{\boldsymbol{b}}^i\right\}$;
- determinare le componenti $v^i$, $v_i$, $\hat{v}^i$ , $\hat{v}_i$ nelle basi $B_i$, $B^i$, $\hat{B}_i$ , $\hat{B}^i$.




Il vettore $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{b}_1 + 1\boldsymbol{b}_2$ espresso nella base $B_i$ è un dato del problema. Le componenti contravarianti $v^i$ sono $v^1 = 2$, $v^2 = 1$. Per calcolare la base reciproca $B^i = \{\boldsymbol{b}^1, \boldsymbol{b}^2\}$ e le rispettive componenti covarianti con le espressioni (B.7) e (B.10) è necessario calcolare i simboli $g_{ik}$ e $g^{ik}$. Si calcolano i simboli $g_{ik}$ usando la definizione $g_{ik} = \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_k$

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = 1 \quad \Rightarrow \quad G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{B.22}$$

dove è stata introdotta la matrice $G$ che raccoglie gli elementi $g_{ik}$. I simboli $g^{ik}$ sono gli elementi dell'inversa di $G$, rappresentando la trasformazione inversa $\boldsymbol{b}^i = g^{ik}\boldsymbol{b}_k$, dagli elementi della base contravariante a quelli della base covariante,

$$\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{B.23}$$

Dalla (B.7) segue che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}^1 &= g^{11}\boldsymbol{b}_1 + g^{12}\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{b}^2 &= g^{21}\boldsymbol{b}_1 + g^{22}\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b}_2. \end{aligned} \tag{B.24}$$

Si poteva ottenere questo risultato senza svolgere nessun conto, poiché la base reciproca di una *base ortonormale*, come $B_i$, coincide con la base stessa. Come conseguenza, anche le componenti covarianti coincidono con le componenti contravarianti,

$$v_1 = v^1 = 2, \quad v_2 = v^2 = 1. \tag{B.25}$$

Per calcolare le componenti del vettore $\boldsymbol{v}$ nella base $\hat{B}_i$ è necessario calcolare gli elementi della matrice $T$ che esprime il cambiamento di base (B.12). É possibile ottenere gli elementi di $T$ moltiplicando scalarmente la (B.12) per i vettori della base $\hat{\boldsymbol{b}}^j$ e sfruttando la definizione di base reciproca (B.5),

$$\hat{\boldsymbol{b}}^j \cdot \boldsymbol{b}_k = \hat{\boldsymbol{b}}^j \cdot \hat{T}^q_k \hat{\boldsymbol{b}}_q = \hat{T}^j_k. \tag{B.26}$$

Per utilizzare la formula precedente è necessario conoscere la base reciproca $\hat{B}^i$. Seguendo lo stesso procedimento svolto in precedenza, si calcolano i simboli $\hat{g}_{ik} = \hat{\boldsymbol{b}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{b}}_k$

$$\hat{g}_{11} = 1, \quad \hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = 1, \quad \hat{g}_{22} = 2 \quad \Rightarrow \quad \hat{G} = \begin{bmatrix} \hat{g}_{11} & \hat{g}_{12} \\ \hat{g}_{21} & \hat{g}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{B.27}$$

e la trasformazione inversa per ottenere i simboli $\hat{g}^{ik}$,

$$\begin{bmatrix} \hat{g}^{11} & \hat{g}^{12} \\ \hat{g}^{21} & \hat{g}^{22} \end{bmatrix} = \hat{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{B.28}$$

I vettori dell base controvariante si ottengono dalla (B.7),

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{b}}^1 &= \hat{g}^{11}\hat{\boldsymbol{b}}_1 + \hat{g}^{12}\hat{\boldsymbol{b}}_2 = 2\hat{\boldsymbol{b}}_1 - \hat{\boldsymbol{b}}_2, \\ \hat{\boldsymbol{b}}^2 &= \hat{g}^{21}\hat{\boldsymbol{b}}_1 + \hat{g}^{22}\hat{\boldsymbol{b}}_2 = -\hat{\boldsymbol{b}}_1 + \hat{\boldsymbol{b}}_2. \end{aligned} \tag{B.29}$$

É ora possibile utilizzare la (B.26) per calcolare gli elementi della matrice $\hat{T}$

$$\begin{aligned} \hat{T}^1_1 &= \hat{\boldsymbol{b}}^1 \cdot \boldsymbol{b}_1 = (2\hat{\boldsymbol{b}}_1 - \hat{\boldsymbol{b}}_2) \cdot \boldsymbol{b}_1 = 2 - 1 = 1, \\ \hat{T}^1_2 &= \hat{\boldsymbol{b}}^1 \cdot \boldsymbol{b}_2 = (2\hat{\boldsymbol{b}}_1 - \hat{\boldsymbol{b}}_2) \cdot \boldsymbol{b}_2 = 0 - 1 = -1, \\ \hat{T}^2_1 &= \hat{\boldsymbol{b}}^2 \cdot \boldsymbol{b}_1 = (-\hat{\boldsymbol{b}}_1 + \hat{\boldsymbol{b}}_2) \cdot \boldsymbol{b}_1 = -1 + 1 = 0, \\ \hat{T}^2_2 &= \hat{\boldsymbol{b}}^2 \cdot \boldsymbol{b}_2 = (-\hat{\boldsymbol{b}}_1 + \hat{\boldsymbol{b}}_2) \cdot \boldsymbol{b}_2 = 0 + 1 = 1, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \hat{T} = \begin{bmatrix} \hat{T}^1_1 & \hat{T}^1_2 \\ \hat{T}^2_1 & \hat{T}^2_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.30}$$

e la matrice inversa

$$T = \hat{T} = \begin{bmatrix} T^1_1 & T^1_2 \\ T^2_1 & T^2_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{B.31}$$

Utilizzando la (B.16) è ora possibile ricavare le componenti del vettore $\boldsymbol{v}$ nella base $\hat{B}_i$,

$$\begin{aligned}\hat{v}^1 &= \hat{T}^1_k v^k = \hat{T}^1_1 v^1 + \hat{T}^1_2 v^2 = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 \\ \hat{v}^2 &= \hat{T}^2_k v^k = \hat{T}^2_1 v^1 + \hat{T}^2_2 v^2 = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{b}}_1 + \hat{\boldsymbol{b}}_2. \tag{B.32}$$

Si ricavano infine le componenti covarianti nella base $\hat{B}^i$,

$$\begin{aligned}\hat{v}_1 &= \hat{g}_{1k}\hat{v}^k = \hat{g}_{11}\hat{v}^1 + \hat{g}_{12}\hat{v}^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \\ \hat{v}_2 &= \hat{g}_{2k}\hat{v}^k = \hat{g}_{21}\hat{v}^1 + \hat{g}_{22}\hat{v}^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} = 2\hat{\boldsymbol{b}}^1 + 3\hat{\boldsymbol{b}}^2. \tag{B.33}$$

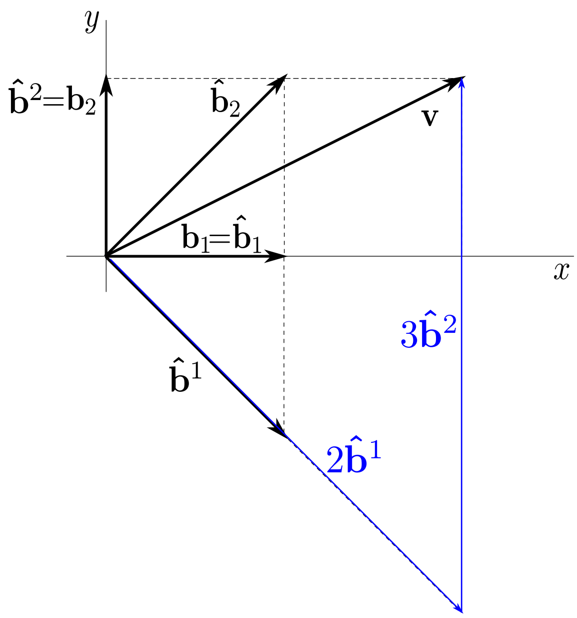



Figura B.1: Rappresentazione grafica dell'esempio B.2.

## B.2 Algebra multilineare

Le leggi di trasformazione degli elementi di basi differenti e delle relative componenti sono state introdotte per i vettori nella sezione precedente. In questa sezione verranno utilizzate per ottenere le leggi di trasformazione degli elementi della base e delle componenti dei tensori. In particolare, la definizione classica di tensore come oggetto invariante al cambio di sistema di riferimento, coinvolge direttamente la legge di trasformazione delle componenti, in seguito a un cambio di base. L'esempio B.2 è stato pensato come un'occasione per riprendere dimestichezza con l'analisi lineare e prendere familiarità con le definizioni introdotte nel paragrafo.

Se l'algebra lineare è la branca della matematica che si occupa dello studio dei vettori, degli spazi vettoriali (o spazi lineari) e delle trasformazioni lineari, l'algebra multilineare si occupa dello studio dei tensori, degli spazi tensoriali e delle trasformazioni multilineari.

Un tensore può essere definito in maniera intrinseca come una funzione multi-lineare o in maniera classica come un oggetto matemtaico formato da un insieme di numeri, le sue componenti, che seguono delle precise leggi di trasformazione in seguito a un cambio di base, utilizzato per descrivere in maniera astratta e invariante le leggi della fisica. Viene solo riportata per completezza la definizione intrinseca, dopodiché si "ricaverà" la definizione classica di tensore, partendo dalla sua invarianza al cambio di base.

**Definizione B.2.1 — Tensore (definizione intrinseca).** Un tensore di ordine $r$ su $\mathcal{V}$ è una funzione $r$-lineare

$$T : \underbrace{\mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V}}_{\text{r volte}} \to K \tag{B.34}$$

R La definizione di tensore data è riferita agli spazi dotati di prodotto interno. Per una prima introduzione all'algebra e al calcolo tensoriale, può essere considerata un buon compromesso tra comprensibilità e completezza della trattazione, per un corso di ingegneria. Senza voler entrare nei particolari, questa definizione evita di introdurre le definizioni di spazio duale e di isomorfismi necessarie a una trattazione generale dei tensori su spazi vettoriali qualsiasi.

Si indica con $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ l'insieme dei tensori di ordine $r$. Questo insieme è chiuso[a] rispetto alle operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare definite in seguito, e quindi è definito lo spazio vettoriale dei tensori di ordine $r$. Un tensore di ordine 0 è uno scalare, un tensore di ordine 1 un vettore.

[a] Un insieme $\mathcal{V}$ è chiuso rispetto a un'operazione se l'operazione su ogni elemento di $\mathcal{V}$ restituisce un elemento di $\mathcal{V}$.

### B.2.1 Prodotto tensoriale tra vettori

Per arrivare alla definizione classica di un tensore senza introdurre complicazioni superflue per una prima introduzione all'algebra tensoriale, occorre introdurre l'operazione di prodotto tensoriale tra vettori. Questa operazione è la prima operazione incontrata che dà origine a tensori di ordine maggiore di uno (i vettori possono essere considerati tensori di ordine 1).

**Definizione B.2.2 — Prodotto tensoriale tra vettori.** Dati r vettori $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r \in \mathcal{V}$ si definisce il loro prodotto tensoriale come il tensore di ordine $r$, indicato con

$$\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_r \qquad \text{o come} \qquad \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2 \ldots \boldsymbol{v}_r \ . \tag{B.35}$$

Se $\mathcal{V}$ è uno spazio vettoriale di dimensione $N$, il prodotto tensoriale di $r$ vettori appartenenti a $\mathcal{V}$ ha dimensioni $N^r$.

R Il prodotto tensoriale **non è commutativo**, $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a}$.

In seguito verrà definito anche il prodotto tensoriale tra tensori di ordine qualsiasi. Ora, si usa la definizione di prodotto tensoriale per definire una base dello spazio dei tensori di ordine $r$ e ottenere una rappresentazione per componenti di un tensore.

## B.2.2 Base prodotto e componenti di un tensore

Per rappresentare in componenti un tensore di ordine $r$ è necessario definire una base dello spazio dei tensori $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$. Ad esempio, data una base $\{\boldsymbol{b}_k\}$ dello spazio $\mathcal{V}$, è possibile definire la base prodotto tramite il prodotto tensoriale degli elementi della base.

**Definizione B.2.3 — Base prodotto di $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$.** La base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ di $\mathcal{V}$ induce una base prodotto (covariante) di $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$, i cui elementi sono formati da tutti i possibili $N^r$ prodotti tensoriali di ordine $r$ dei vettori $\boldsymbol{b}_k$

$$\{\boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r}\}_{i_1,\dots,i_r=1:N} \ , \tag{B.36}$$

dove tutti gli indici $i_k$ possono variare in maniera indipendente da 1 a $N$.

■ **Esempio B.1** La base prodotto dei tensori di ordine $r = 2$ nello spazio tridimensionale, $N = 3$ indotta dalla base $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$, è la base formata dai $N^r = 9$ prodotti tensoriali

$$\begin{aligned}\{&\boldsymbol{b}_1 \otimes \boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_1 \otimes \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_1 \otimes \boldsymbol{b}_3,\\ &\boldsymbol{b}_2 \otimes \boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2 \otimes \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_2 \otimes \boldsymbol{b}_3,\\ &\boldsymbol{b}_3 \otimes \boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_3 \otimes \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3 \otimes \boldsymbol{b}_3\} \ .\end{aligned} \tag{B.37}$$

■

Rispetto alla base prodotto, un tensore $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ viene scritto come

$$\boldsymbol{A} = A^{i_1 \dots i_r} \boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r}, \tag{B.38}$$

dove $A^{i_1 \dots i_r}$ sono le componenti contravarianti del tensore $\boldsymbol{A}$ rispetto alla base prodotto covariante.

## B.2.3 Alcune operazioni tensoriali (I): somma e moltiplicazione per uno scalare.

Le due operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare e la chiusura dell'insieme $\mathcal{T}^r$ rispetto ad esse sono condizioni necessarie alla struttura di spazio vettoriale. La somma di due tensori $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ e la moltiplicazione di $\boldsymbol{A}$ per uno scalare $\alpha \in K$ sono definite come

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A^{i_1 \dots i_r} + B^{i_1 \dots i_r}) \boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r} \tag{B.39}$$

e

$$\alpha \boldsymbol{A} = \alpha A^{i_1 \dots i_r} \boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r} \ . \tag{B.40}$$

**Definizione B.2.4 — Spazio vettoriale $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ dei tensori di ordine $r$.** Lo spazio vettoriale $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ dei tensori di ordine $r$ sullo spazio $\mathcal{V}$ è formato dall'insieme $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$, con le operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare definite in (B.39) e (B.40).

### B.2.4 Prodotto tensoriale tra tensori

É possibile definire il prodotto tensoriale tra due (o più tensori) di qualsiasi ordine.

**Definizione B.2.5 — Prodotto tensoriale.** Il prodotto tensoriale di due tensori $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}^p(\mathcal{V})$, $\boldsymbol{B} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ è il tensore di ordine $p+r$ definito come

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = A^{i_1 \dots i_p} B^{j_1 \dots j_r} \boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_p} \otimes \boldsymbol{b}_{j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{j_r} \ . \tag{B.41}$$

R Il prodotto tensoriale **non è commutativo**: $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{A}$.

### B.2.5 Trasformazione tra oggetti controvarianti e covarianti: regola per "alzare e abbassare gli indici".

Nei paragrafi precedenti è stata ricavata la regola per ricavare le componenti contravarianti di un vettore dalle compontenti covarianti e viceversa. In questo paragrafo verranno ricavate le regole per alzare e abbassare gli indici in un tensore di ordine $r$ generico, seguendo un procedimento simile a quello seguito in precedenza. Come primo esempio, si parte da un tensore scritto nella base prodotto covariante, con indici bassi (quindi le coomponenti hanno tutti indici contravarianti, alti): l'obiettivo è quello di scrivere le componenti in una base con il primo vettore appartenente alla base reciproca (indice alto) e tutti gli altri uguali (indici bassi). Le componenti avranno quindi il primo indice basso e gli altri alti.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} & = A^{i_1 \dots i_r} \boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \boldsymbol{b}_{i_2} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r} = \\
& = A^{i_1 \dots i_r} g_{i_1 k_1} \boldsymbol{b}^{k_1} \otimes \boldsymbol{b}_{i_2} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r} = \\
& = g_{i_1 k_1} A^{k_1 \dots i_r} \boldsymbol{b}^{i_1} \otimes \boldsymbol{b}_{i_2} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r} = \\
& = A_{i_1}{}^{i_2 \dots i_r} \boldsymbol{b}^{i_1} \otimes \boldsymbol{b}_{i_2} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r}
\end{aligned} \tag{B.42}$$

dove e sono stati scambiati i simboli degli indici ripetuti (sono indici "dummy", saturati dalla sommatoria) ed è stata definita la componente del tensore con il primo indice covariante

$$A_{i_1}{}^{i_2 \dots i_r} = g_{i_1 k_1} A^{k_1 i_2 \dots i_r} \ , \tag{B.43}$$

dove come sempre è sottointesa la sommatoria sugli indici ripetuti (qui solo $k_1$). Una volta capito il ruolo di $g_{ij}$ nell'abbassamento e nell'innalzamento degli indici, la stessa regola può essere applicata a qualsiasi indice di un tensore di ordine qualsiasi.

### B.2.6 Cambio di base e regola di trasformazione delle componenti: definizione "classica" di tensore.

Aiutandosi con la legge di trasformazione degli elementi della base $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1:N}$ di $\mathcal{V}$ e della base reciproca $\{\boldsymbol{b}^k\}_{k=1:N}$ di $\mathcal{V}^*$, si può verificare che la base prodotto (covariante) dello spazio $\mathcal{T}^r(\mathcal{V})$ si trasforma secondo

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{b}}_{i_1} \otimes \dots \otimes \hat{\boldsymbol{b}}_{i_r} &= T^{k_1}_{i_1} \dots T^{k_p}_{i_r} \boldsymbol{b}_{k_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{k_r} \\
\boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r} &= \hat{T}^{k_1}_{i_1} \dots \hat{T}^{k_r}_{i_r} \hat{\boldsymbol{b}}_{k_1} \otimes \dots \otimes \hat{\boldsymbol{b}}_{k_r}.
\end{aligned} \tag{B.44}$$

Per ricavare la regola di trasformazione della base prodotto (B.44) è sufficiente applicare la (B.12) a tutti i vettori $\boldsymbol{b}_{i_\alpha}$ della base prodotto. Usando la multilinearità del prodotto tensoriale

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{b}}_{i_1} \otimes \dots \otimes \hat{\boldsymbol{b}}_{i_r} =& (T^{k_1}_{i_1} \boldsymbol{b}_{k_1}) \otimes \dots \otimes (T^{k_p}_{i_r} \boldsymbol{b}_{k_r}) = \\
=& T^{k_1}_{i_1} \dots T^{k_r}_{i_r} \boldsymbol{b}_{k_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{k_r}.
\end{aligned} \tag{B.45}$$

La regola di trasformazione delle componenti di un tensore $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$, $\boldsymbol{A} = A^{i_1 \dots i_r} \boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r} = \hat{A}^{i_1 \dots i_r} \hat{\boldsymbol{b}}_{i_1} \otimes \dots \otimes \hat{\boldsymbol{b}}_{i_r}$ al variare dei sistemi di riferimento è

$$\begin{aligned}
\hat{A}^{k_1 \dots k_r} &= \hat{T}^{k_1}_{i_1} \dots \hat{T}^{k_r}_{i_r} A^{i_1 \dots i_r} \\
A^{i_1 \dots i_r} &= T^{i_1}_{k_1} \dots T^{i_r}_{k_r} \hat{A}^{k_1 \dots k_r}.
\end{aligned} \tag{B.46}$$

La legge di trasformazione delle componenti (B.46) si ricava grazie alla legge di trasformazione della base prodotto

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= A^{i_1 \dots i_r} \boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r} = \\
&= A^{i_1 \dots i_r} \hat{T}^{k_1}_{i_1} \dots \hat{T}^{k_r}_{i_r} \hat{\boldsymbol{b}}_{k_1} \otimes \dots \otimes \hat{\boldsymbol{b}}_{k_r} = \\
&= \hat{A}^{k_1 \dots k_r} \hat{\boldsymbol{b}}_{k_1} \otimes \dots \otimes \hat{\boldsymbol{b}}_{k_r}
\end{aligned} \tag{B.47}$$

Partendo dalla definizione intrinseca di un tensore come applicazione multilineare B.2.1, grazie all'introduzione di una base dello spazio vettoriale e alla rappresentazione in coordinate, è stato possibile arrivare alla definizione classica di tensore.

**Definizione B.2.6 — Tensore (definizione classica).** Un tensore $\boldsymbol{A}$ di ordine $r$ su uno spazio $\mathcal{V}$ di dimensione $N$ è un oggetto matematico formato da $N^r$ componenti $A^{i_1 \dots i_r}$ che si trasformano secondo la (B.46), in seguito al cambio di sistema di coordinate $\boldsymbol{b}_j = \hat{T}^i_j \hat{\boldsymbol{b}}_i$.

### B.2.7 Alcune operazioni tensoriali (II)

Come le operazioni introdotte nel paragrafo B.2.3, anche le operazioni in questo paragrafo operano su tensori e restituiscono tensori.

**Contrazione.**

L'operazione di contrazione $\boldsymbol{C}^k_l$ agente su un tensore $\boldsymbol{A}$ di ordine $r$ ha come risultato un tensore di ordine $r-2$. Le componenti del tensore ottenuto tramite la contrazione di due indici si ottengono saturando con la somma gli indici di tutte le componenti indicati da $\boldsymbol{C}^k_l$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C}^k_l \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{C}^k_l (A^{i_1 \dots i_r} \boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r}) \\
&= \boldsymbol{C}^k_l (A^{i_1 \dots i_k \dots i_{l-1}}{}_{i_l}{}^{i_{l+1} \dots i_r} \boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_k} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_{l-1}} \otimes \boldsymbol{b}^{i_l} \otimes \boldsymbol{b}_{i_{l+1}} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r}) \\
&= A^{i_1 \dots i_{k-1} n i_{k+1} \dots i_{l-1}}{}_{n}{}^{i_{l+1} \dots i_r} \boldsymbol{b}_{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_{k-1}} \otimes \boldsymbol{b}_{i_{k+1}} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_{l-1}} \otimes \boldsymbol{b}_{i_{l+1}} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{b}_{i_r}.
\end{aligned} \tag{B.48}$$

R Affinchè la contrazione sia svolta correttamente (e quindi dia come risultato un tensore) senza la scrittura esplicita dei simboli $g_{ik}$, la coppia di indici che viene "contratta" deve avere carattere opposto (uno covariante, l'altro contravariante).

Per rendere (più) comprensibile la definizione dell'operazione di contrazione data in (B.48), si fornisce un esempio su un tensore di ordine 3, $\boldsymbol{A} = A^{ijk}\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j \otimes \boldsymbol{b}_k$. Si vuole svolgere la contrazione del primo e del terzo indice di $\boldsymbol{A}$. In componenti si ottiene

$$\boldsymbol{C}_3^1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}_3^1(A^{ijk}\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j \otimes \boldsymbol{b}_k) = \boldsymbol{C}_3^1(A_i{}^{jk}\boldsymbol{b}^i \otimes \boldsymbol{b}_j \otimes \boldsymbol{b}_k) = A_i{}^{ji}\boldsymbol{b}_j = g_{il}A^{lji}\boldsymbol{b}_j, \quad \text{(B.49)}$$

dove è stata utilizzata la regola (B.43) per esprimere il risultato in funzione del tensore $\boldsymbol{A}$ con tutti gli indici contravarianti.

**"Dot" product.**
Siano $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$, $\boldsymbol{B} \in \mathcal{T}^s(\mathcal{V})$, il prodotto "dot" $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ è un tensore di ordine $r + s - 2$, definito tramite il prodotto tensoriale e la contrazione di una coppia di indici di natura opposta. In particolare si definisce

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}_{r+1}^r(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}). \quad \text{(B.50)}$$

Si ricorda che la contrazione avviene in maniera naturale (senza la comparsa di simboli $g_{ij}$) tra indici di natura opposta. Supponendo che la regola per passare da indici covarianti a indici contravarianti sia stata compresa e non comporti nessuna difficoltà aggiuntiva, per comodità il tensore $\boldsymbol{A}$ viene scritto in componenti contravarianti, il tensore $\boldsymbol{B}$ in componenti covarianti. Facendo un esempio con $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}^3$, $\boldsymbol{B} \in \mathcal{T}^2$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} &= (A^{ijk}\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j \otimes \boldsymbol{b}_k) \cdot (B_{mn}\boldsymbol{b}^m \otimes \boldsymbol{b}^n) = \\ &= A^{ijk}B_{mn}\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j \otimes \underbrace{\boldsymbol{b}_k \cdot \boldsymbol{b}^m}_{=\delta_k^m} \otimes \boldsymbol{b}^n = \\ &= A^{ijl}B_{ln}\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j \otimes \boldsymbol{b}^n.\end{aligned} \quad \text{(B.51)}$$

R Il prodotto "dot" **non** è commutativo ($\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$). Il prodotto "dot" **non** è un prodotto interno (in generale non ha nemmeno come risultato uno scalare).

**Doppio "Dot" product.**
Siano $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}^r(\mathcal{V})$, $\boldsymbol{B} \in \mathcal{T}^s(\mathcal{V})$, il doppio prodotto "dot" $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}$ è un tensore di ordine $r + s - 4$ definito tramite il prodotto tensoriale e una doppia contrazione. In particolare si definisce

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}_{r+1,r+2}^{r-1,r}(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) \quad \text{(B.52)}$$

Per esempio con $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}^4$, $\boldsymbol{B} \in \mathcal{T}^3$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} &= (A^{ijkl}\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j \otimes \boldsymbol{b}_k \otimes \boldsymbol{b}_l) : (B_{mnp}\boldsymbol{b}^m \otimes \boldsymbol{b}^n \otimes \boldsymbol{b}^p) = \\ &= A^{ijuv}B_{uvp}\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{b}_j \otimes \boldsymbol{b}^p\end{aligned} \quad \text{(B.53)}$$

Si presti attenzione all'ordine con il quale avviene la doppia contrazione: il penultimo indice di $\boldsymbol{A}$ si contrae con il primo di $\boldsymbol{B}$, l'ultimo di $\boldsymbol{A}$ con il secondo di $\boldsymbol{B}$. É possibile definire "dot product" multipli estendendo la contrazione a un numero maggiore di indici.

### B.2.8 Tensori in sistemi di coordinate ortonormali

...

### B.2.9 Alcuni esempi

I primi tensori che vengono incontrati durante un corso di studi in ingegneria sono il tensore di inerzia per i corpi rigidi in Meccanica Razionale e il tensore degli sforzi, il tensore delle deformazioni e il tensore di elasticità nei corsi di Meccanica Strutturale. I tensori di inerzia, il tensore delle deformazioni e degli sforzi sono tensori del secondo ordine. Un tensore del secondo ordine può essere utilizzato insieme al prodotto "punto" per definire la relazione lineare più generale tra due vettori fisici: il tensore degli sforzi lega il vettore sforzo $\boldsymbol{t_n}$ agente su una faccia del materiale alla normale $\hat{\boldsymbol{n}}$ della faccia,

$$\boldsymbol{t_n} = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathbb{T} \ , \tag{B.54}$$

mentre il tensore di inerzia $\mathbb{I}_G$[1] lega la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di un corpo alla suo momento angolare $\Gamma_G$,

$$\Gamma_G = \mathbb{I}_G \cdot \boldsymbol{\omega} \ . \tag{B.55}$$

Il tensore di elasticità $\mathbb{C}$ è il tensore del quarto ordine utilizzato per esprimere il legame lineare più generale tra il tensore degli sforzi $\mathbb{T}$ e il tensore delle deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}$ tramite il "doppio prodotto punto",

$$\mathbb{T} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \ . \tag{B.56}$$

Altri tensori incontrati nei corsi di Fisica Tecnica ed Elettrotecnica si sono "mimetizzati da scalare" grazie all'ipotesi di isotropia dello spazio, cioè di invarianza delle proprietà fisiche alla direzione nello spazio. Durante il corso di Fisica Tecnica, la legge di Fourier della conduzione lega il flusso di calore $\boldsymbol{q}$ al gradiente di temperatura $\boldsymbol{\nabla} T$, tramite il coefficiente di conduzione $k$,

$$\boldsymbol{q} = -k \boldsymbol{\nabla} T \ , \tag{B.57}$$

legame valido per materiali isotropi. Per materiali non isotropi, la legge costitutiva lineare più generale viene espressa tramite un tensore di conduzione $\mathbb{K}$[2],

$$\boldsymbol{q} = -\mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\nabla} T \ . \tag{B.58}$$

Nel caso di materiale isotropo, il tensore di conduzione assume la forma $\mathbb{K}^{iso} = -k\,\mathbb{I}$.[3] In maniera analoga, in Elettrotecnica sono stati introdotti solo i legami isotropi tra il campo magnetico $\boldsymbol{h}$ e il campo di induzione magnetica $\boldsymbol{b}$, e tra il campo elettrico $\boldsymbol{e}$ e il campo di induzione elettrica $\boldsymbol{d}$, rispettivamente tramite la permeabilità magnetica $\mu$ e la permeabilità elettrica $\varepsilon$,

$$\boldsymbol{b} = \mu \boldsymbol{h} \qquad , \qquad \boldsymbol{d} = \varepsilon \boldsymbol{e} \ , \tag{B.59}$$

e non i casi generali in cui il legame tra le coppie di campi viene espresso tramite i rispettivi tensori

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{h} \qquad , \qquad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{e} \ . \tag{B.60}$$

[1] Per semplicità si è scelto il baricentro $G$ del corpo come punto di riferimento.
[2] Per ragioni fisiche, questo tensore deve essere simmetrico definito positivo.
[3] Si dimostra che gli unici tensori isotropi del secondo ordine sono il tensore unità e i suoi multipli, vedi esercizio B.3.

**Esercizio .B.3 — Isotropia del tensore identità.** Le componenti del tensore identità possono essere espresse in un sistema di riferimento ortonormale utilizzando la delta di Kronecker. Si dimostri che le sue componenti in un altro sistema di riferimento ortogonale (ottenuto tramite rotazione dal sistema di riferimento originario) non cambiano. ■

■ **Esempio B.2 — Tensore degli sforzi.** Viene qui ricavato velocemente il legame tra vettore sforzo $\boldsymbol{t_n}$ e la normale $\hat{\boldsymbol{n}}$ della giacitura considerata in un mezzo continuo non polare, tramite l'equilibrio del tetraedro di Cauchy. Siano $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ e $\hat{\boldsymbol{z}}$ i versori di un sistema di riferimento cartesiano centrato nel punto del continuo considerato e $\boldsymbol{t_x}$, $\boldsymbol{t_y}$ e $\boldsymbol{t_z}$ i vettori sforzo agenti sulle facce del tetraedro di area $dS_x$, $dS_y$ e $dS_z$ con le normali orientate come i rispettivi versori della base, come rappresentato in figura B.2. Sia $\boldsymbol{t_n}$ il vettore sforzo agente sulla faccia "inclinata" di area $dS$ del tetraedro di Cauchy, con normale $\hat{\boldsymbol{n}}$. Il legame tra le aree delle facce del tetraedro è

$$dS = -\frac{dS_x}{n_x} = -\frac{dS_y}{n_y} = -\frac{dS_z}{n_z}, \tag{B.61}$$

avendo indicato con $n_i$ le componenti cartesiane del versore normale $\hat{\boldsymbol{n}}$, tutte negative per come è stato definito il tetraedro. Si scrive l'equilibrio del tetraedro, ricordando che i contributi di volume sono di un ordine inferiore rispetto a quelli di superficie, quando le dimensioni del tetraedro tendono a zero,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \boldsymbol{t_n} dS + \boldsymbol{t_x} dS_x + \boldsymbol{t_y} dS_y + \boldsymbol{t_z} dS_z = \\ &= (\boldsymbol{t_n} - \boldsymbol{t_x} n_x - \boldsymbol{t_y} n_y - \boldsymbol{t_z} n_z) dS \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{t_n} = \boldsymbol{t_x} n_x + \boldsymbol{t_y} n_y + \boldsymbol{t_z} n_z \end{aligned} \tag{B.62}$$

Esprimendo questa ultima espressione nella base cartesiana ortonormale, si può scrivere il legame tensoriale tra normale della superficie e vettore sforzo, tramite il tensore degli sforzi,

$$\begin{aligned} t_x \hat{\boldsymbol{x}} + t_y \hat{\boldsymbol{y}} + t_z \hat{\boldsymbol{z}} &= n_x (t_{xx} \hat{\boldsymbol{x}} + t_{xy} \hat{\boldsymbol{y}} + t_{xz} \hat{\boldsymbol{z}}) + \\ &+ n_y (t_{yx} \hat{\boldsymbol{x}} + t_{yy} \hat{\boldsymbol{y}} + t_{yz} \hat{\boldsymbol{z}}) + \\ &+ n_z (t_{zx} \hat{\boldsymbol{x}} + t_{zy} \hat{\boldsymbol{y}} + t_{zz} \hat{\boldsymbol{z}}) = \\ &= (\boldsymbol{n} \cdot \hat{\boldsymbol{x}}) \boldsymbol{t_x} + (\boldsymbol{n} \cdot \hat{\boldsymbol{y}}) \boldsymbol{t_y} + (\boldsymbol{n} \cdot \hat{\boldsymbol{z}}) \boldsymbol{t_z} = \\ &= \boldsymbol{n} \cdot (t_{xx} \hat{\boldsymbol{x}} \otimes \hat{\boldsymbol{x}} + t_{xy} \hat{\boldsymbol{x}} \otimes \hat{\boldsymbol{y}} + t_{xz} \hat{\boldsymbol{x}} \otimes \hat{\boldsymbol{z}} + \\ &\qquad + t_{yx} \hat{\boldsymbol{y}} \otimes \hat{\boldsymbol{x}} + t_{yy} \hat{\boldsymbol{y}} \otimes \hat{\boldsymbol{y}} + t_{yz} \hat{\boldsymbol{y}} \otimes \hat{\boldsymbol{z}} + \\ &\qquad + t_{zx} \hat{\boldsymbol{z}} \otimes \hat{\boldsymbol{x}} + t_{zy} \hat{\boldsymbol{z}} \otimes \hat{\boldsymbol{y}} + t_{zz} \hat{\boldsymbol{z}} \otimes \hat{\boldsymbol{z}}) = \\ &= \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{T} \ . \end{aligned} \tag{B.63}$$

■

■ **Esempio B.3 — Tensore di inerzia.** Durante il corso di Meccanica Razionale si è visto che le componenti del tensore di inerzia espresse in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale possono essere raccolte nella matrice simmetrica,

$$\int_V \rho \begin{bmatrix} (y^2+z^2) & -xy & -xz \\ -xy & (x^2+z^2) & -yz \\ -xz & -yz & (x^2+y^2) \end{bmatrix} \tag{B.64}$$

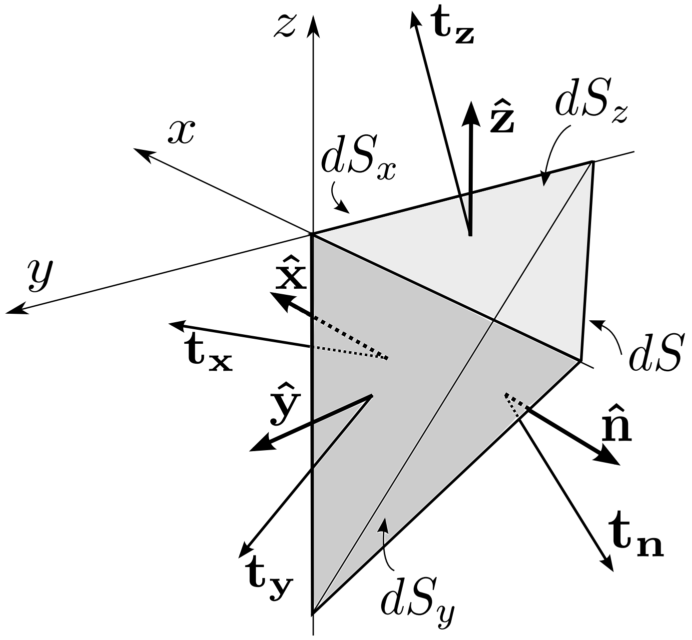



Figura B.2: tetraedro di Cauchy

**Esercizio .B.4 — Espressione tensoriale del tesnore di inerzia.** Aiutandosi con un sistema di riferimento cartesiano, si dimostri che l'espressione tensoriale del tensore di inerzia è

$$\mathbb{I}_G = \int_V \rho \left[ |\boldsymbol{r}|^2 \mathbb{I} - \boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{r} \right] \ , \tag{B.65}$$

essendo $\mathbb{I}$ il tensore identità del secondo ordine, $\boldsymbol{r}$ il raggio vettore tra un punto del corpo considerato e il punto $G$ rispetto al quale si sta calcolando il tensore di inerzia e l'integrale viene svolto su tutto il volume $V$ del corpo. ■

■

## B.2.10 Cosa non è stato detto

Molte cose non sono state dette. In particolare, è stato scelto di trattare i tensori su spazi forniti di prodotto interno e di non introdurre concetti di *algebra esterna*, che permetterebbero di generalizzare l'operazione di prodotto vettoriale e l'operatore rotore incontrato nel calcolo vettoriale e ricavare il teorema di Stokes,

$$\oint_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega, \tag{B.66}$$

di cui viene solo riportata l'espressione matematica senza fornire alcun dettaglio. Il teorema del rotore e della divergenza sono casi particolari del teorema di Stokes, nel cui enunciato compaiono i concetti di forma differenziale $\omega$ e di derivata esterna $d\omega$.
Il materiale fornito rappresenta un compromesso tra il vuoto totale sul calcolo tensoriale (del quale l'affermazione "un tensore è una matrice" è la regina indiscussa) e un corso intero dedicato all'algebra e al calcolo tensoriale. Lo scopo dei cenni veloci ad argomenti non trattati qui è quello di "mettere una pulce nell'orecchio" di chi legge, di mettere a conoscenza il lettore dell'esistenza di alcuni argomenti che permettono di generalizzare le operazioni vettoriali presentate nei primi corsi di Algebra e di spiegare in maniera rigorosa alcuni comportamenti strani o inaspettati (come quelli che si possono osservare con il

prodotto vettoriale e il rotore), senza scoperchiare dei vasi di Pandora che porterebbero questa introduzione lontana dal suo scopo.

Per i più curiosi, viene messo a disposizione del materiale un più completo, che introduce concetti che non sono stati presentati qui e che generalizzano la trattazione, ma che la renderebbero inadatta ad essere svolta in poche ore per un pubblico formato da studenti del terzo anno di ingegneria, senza aggiungere particolari fondamentali per un utilizzo "cosciente" dei tensori durante questo corso e in quelli successivi.

**Riferimenti.**

Il testo di Bowen e Wang, *Introduction to vectors and tensors. Linear and multilinear algebra* può essere considerato un valido e completo riferimento, anche per il futuro. La lettura di questo testo non è sempre agevole e contiene sicuramente molto più di quanto sia indispensabile presentare in una prima e breve introduzione ai tensori, come è questa. Oltre alla sua qualità, è da apprezzare la disponibilità in rete dei due volumi, seguendo i seguenti collegamenti (sperando che siano ancora validi):

Vol. 1: Linear and Multilinear Algebra
Vol. 2: Vector and Tensor Analysis

**Cosa è utile ripassare.**

Questa può essere una buona occasione per ripassare alcuni concetti di algebra lineare, tra i quali quello di spazio vettoriale (definizione e proprietà, dimensione e base, ...), prodotto interno, linearità (e la differenza con l'essere "affine"), alla luce di quanto visto in questi paragrafi introduttivi sui tensori e del fatto che le equazioni della fisica hanno carattere tensoriale.