4 Bilanci

4.1 Equazioni di bilancio

In questa sezione vengono analizzate alcune equazioni di bilancio in forma differenziale (è quindi necessario che queste equazioni siano valide!): vengono usate sia la rappresentazione euleriana sia la rappresentazione lagrangiana, al fine di ottenere la migliore comprensione dei fenomeni fisici coinvolti.

Si indicano con $\boldsymbol{x}_0$ le coordinate lagrangiane, solidali con il continuo; si indicano con $\boldsymbol{x}$ le coordinate euleriane. I due sistemi di coordinate sono legati tra di loro dalle relazioni

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t) \\ \frac{D\boldsymbol{x}}{Dt} &= \left.\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}_0} = \boldsymbol{u} \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

La derivata $\partial/\partial t$ indica la derivata temporale fatta a coordinata euleriana $\boldsymbol{x}$ costante. La derivata materiale D/Dt indica la derivata fatta "a coordinata lagrangiana" costante e rappresenta quindi la variazione temporale di una quantità legata alla particella materiale, che si muove come il continuo per definizione di coordinate materiali.
Il legame tra D/Dt e $\partial/\partial t$ si trova utilizzando le regole di derivazione per funzioni composte:

$$\frac{D}{Dt} f = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}, t) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x_0}, t), t) = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} + \left.\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}_0} \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_t = \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} f \tag{4.1.2}$$

Questo operatore può quindi essere interpretato come trasporto della quantità f dovuto a un campo $\boldsymbol{u}$.
Può essere utile scrivere la funzione generica f come

$$f(\boldsymbol{x}, t) = f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t), t) = f_0(\boldsymbol{x}_0, t) = f_0(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{x}, t), t) \tag{4.1.3}$$

4.1.1 Continuità

L'equazione di continuità in coordinate euleriane è

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0 \tag{4.1.4}$$

Si può scrivere mettendo in evidenza la derivata materiale

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} \tag{4.1.5}$$

Ricordando la relazione $DJ/Dt = J\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}$, dove J indica il determinante del gradiente $\partial \boldsymbol{x}/\partial \boldsymbol{x}_0$, si può scrivere l'equazione in coordinate lagrangiane, dopo averla moltiplicata per J ($\neq 0$)

$$J\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\frac{DJ}{Dt} \Rightarrow \frac{D(J\rho)}{Dt} = 0 \Rightarrow J\rho = \rho_0 \tag{4.1.6}$$

Si osserva quindi come la variazione della densità di una particella materiale è legato alla variazione del volume della stessa (ricordare che $dv = JdV$). Questa conclusione è ragionevole se si pensa che la massa della particella materiale si conserva ($dm = \rho dv = \rho_0 dV$).

Il vincolo di incomprimibilità, legato alla costanza del volume della particella materiale implica quindi solo che $J \equiv 1$ e quindi $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0$.

4.1.2 Quantità di moto

L'equazione della quantità di moto è

$$\rho \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{u} \right\} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbb{T} + \boldsymbol{f} \tag{4.1.7}$$

dove con $\mathbb{T}$ è stato indicato il tensore degli sforzi, che per un fluido newtoniano è $\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{S}$ con $\mathbb{S} = 2\mu\mathbb{D} + \lambda\left(\nabla \cdot \boldsymbol{u}\right)\mathbb{I}$ e $\mathbb{D} = \frac{1}{2}\left[\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u}\right]$ il tensore velocità di deformazione, parte simmetrica del gradiente della velocità.

Introducendo la derivata materiale, si ritrova una forma "familiare" del secondo principio della dinamica

$$\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbb{T} + \boldsymbol{f} \qquad \Rightarrow \qquad \rho \boldsymbol{a} = \nabla \cdot \mathbb{T} + \boldsymbol{f} \tag{4.1.8}$$

Richiami di geometria delle curve nello spazio. Una curva è un luogo di punti che può essere parametrizzato tramite un parametro solo. La parametrizzazione $\boldsymbol{r}(t)$ della curva $\boldsymbol{r}$ è definita regolare se $d\boldsymbol{r}/dt \neq 0$. Si definisce poi una parametrizzazione regolare particolare, l'ascissa curvilinea s tale per cui $|d\boldsymbol{r}(s)/ds| = 1, \forall s \in (a,b)$.

Nel seguito si introduce brevemente la **terna di Frenet** $\left\{\hat{\boldsymbol{t}}, \hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{b}}\right\}$, formata dai versori tangente, normale e binormale, in funzione dell'ascissa curvilinea.

Si dimostra che

$$\hat{\boldsymbol{t}}(s) = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \tag{4.1.9}$$

La derivata seconda della posizione $\boldsymbol{r}$, cioè la derivata prima del versore tangente $\hat{\boldsymbol{t}}$ è legata al versore normale $\hat{\boldsymbol{t}}$, tramite la curvatura $k = \left|\frac{d\hat{\boldsymbol{t}}}{ds}\right|$.

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\frac{d\hat{\boldsymbol{t}}}{ds}}{\left|\frac{d\hat{\boldsymbol{t}}}{ds}\right|} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\hat{\boldsymbol{t}}}{ds} = k\hat{\boldsymbol{n}} \tag{4.1.10}$$

Il versore binormale è definito a completare la terna ortonormale destrorsa

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \hat{\boldsymbol{t}} \times \hat{\boldsymbol{n}} \tag{4.1.11}$$

Per completezza e senza troppo sforzo si calcolano anche le derivate di tali versori, ricordando che hanno modulo unitario e costante, formano una terna ortogonale in ogni punto, introducendo la definizione della torsione $\tau = \frac{d\hat{\boldsymbol{n}}}{ds} \cdot \boldsymbol{b}$.

$$\begin{aligned}
& & & & & \frac{d\hat{\boldsymbol{t}}}{ds} = k\hat{\boldsymbol{n}} \\
&\begin{cases} \hat{\boldsymbol{n}}' \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 0 \\ \hat{\boldsymbol{n}}' \cdot \hat{\boldsymbol{t}} + \hat{\boldsymbol{t}}' \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 0 \\ \hat{\boldsymbol{n}}' \cdot \hat{\boldsymbol{b}} = \tau \end{cases} &\Rightarrow& \begin{cases} \hat{\boldsymbol{n}}' \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = 0 \\ \hat{\boldsymbol{n}}' \cdot \hat{\boldsymbol{t}} = -k \\ \hat{\boldsymbol{n}}' \cdot \hat{\boldsymbol{b}} = \tau \end{cases} &\Rightarrow& \frac{d\hat{\boldsymbol{n}}}{ds} = -k\hat{\boldsymbol{t}} + \tau\hat{\boldsymbol{b}} \\
&\begin{cases} \hat{\boldsymbol{b}}' \cdot \hat{\boldsymbol{b}} = 0 \\ \hat{\boldsymbol{b}}' \cdot \hat{\boldsymbol{t}} + \hat{\boldsymbol{t}}' \cdot \hat{\boldsymbol{b}} = 0 \\ \hat{\boldsymbol{b}}' \cdot \hat{\boldsymbol{n}} + \hat{\boldsymbol{n}}' \cdot \hat{\boldsymbol{b}} = 0 \end{cases} &\Rightarrow& \begin{cases} \hat{\boldsymbol{b}}' \cdot \hat{\boldsymbol{b}} = 0 \\ \hat{\boldsymbol{b}}' \cdot \hat{\boldsymbol{t}} = -\hat{\boldsymbol{t}}' \cdot \hat{\boldsymbol{b}} = 0 \\ \hat{\boldsymbol{b}}' \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = -\hat{\boldsymbol{n}}' \cdot \hat{\boldsymbol{b}} = -k \end{cases} &\Rightarrow& \frac{d\hat{\boldsymbol{b}}}{ds} = -\tau\hat{\boldsymbol{n}}
\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

Se la parametrizzazione regolare della curva non è l'ascissa curvilinea, si può ricavare

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = v\hat{\boldsymbol{t}} \tag{4.1.13}$$

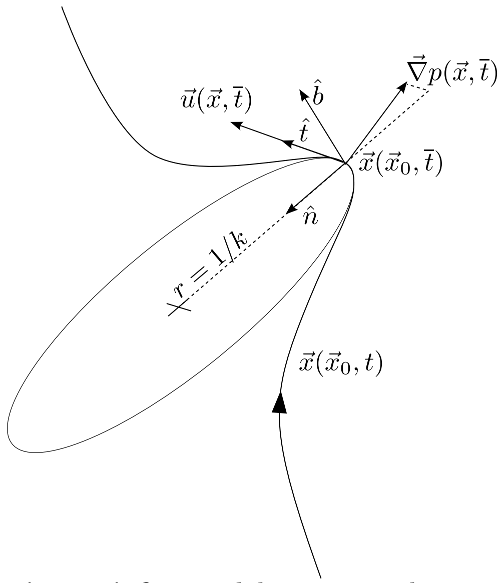
dove si è introdotto il modulo v di quella che sarà la velocità $\boldsymbol{v}$ quando $\boldsymbol{r}$ e t saranno spazio e tempo. In maniera analoga

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{t}}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\hat{\boldsymbol{t}}}{ds} = vk\hat{\boldsymbol{n}} \tag{4.1.14}$$

Se $\boldsymbol{r}$ e t sono spazio e tempo, la velocità e l'accelerazione di un punto che ha come legge oraria $\boldsymbol{r}(t)$ sono

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = v\hat{\boldsymbol{t}} \\
\boldsymbol{a} &= \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{t}} + v\frac{d\hat{\boldsymbol{t}}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{t}} + v^2k\hat{\boldsymbol{n}}
\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

Ritorno al bilancio della quantità di moto. Inserendo la forma dell'accelerazione nell'equazione della quantità di moto e proiettando lungo i versori della terna di Frenet



$$\begin{cases} \rho \frac{dv}{dt} = \hat{\boldsymbol{t}} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbb{T} + \boldsymbol{f}) \\ \rho v^2 k = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbb{T} + \boldsymbol{f}) \\ 0 = \hat{\boldsymbol{b}} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbb{T} + \boldsymbol{f}) \end{cases} \tag{4.1.16}$$

In assenza di forze di volume ($\boldsymbol{f} = 0$) e sforzi viscosi ($\mathbb{T} = \mathbb{S} - p\mathbb{I} = -p\mathbb{I}$):

$$\begin{cases} \rho \frac{dv}{dt} = -\hat{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{\nabla} p \\ \rho v^2 k = -\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla} p \\ 0 = -\hat{\boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{\nabla} p \end{cases} \tag{4.1.17}$$

Un'analisi della componente normale permette di ricavare, **sotto le ipotesi fatte**, il legame tra la curvatura delle traiettorie delle particelle fluide e il gradiente del campo di pressione. Il termine a sinistra dell'uguale è positivo poichè prodotto di quantità positive: la curvatura di una linea è non negativa per come è definita, la densità è positiva, il modulo di un vettore è anch'esso non negativo. Il prodotto scalare tra la normale e il gradiente della pressione (derivata direzionale della pressione in direzione $\hat{\boldsymbol{n}}$) deve quindi essere negativo. La pressione quindi diminuisce, andando verso il centro del cerchio osculatore. Sempre dalla seconda equazione è immediato notare che il legame tra la curvatura della traiettoria è proporzionale alla componente del gradiente di pressione lungo il versore normale. La componente tangente fa aumentare il modulo della velocità, mentre la componente binormale deve essere nulla.

4.1.3 Vorticità

L'equazione della vorticità in coordinate euleriane è

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} + \nu \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\omega} \tag{4.1.18}$$

Se viene fatta l'ipotesi di viscosità nulla, il termine contenente il laplaciano della vorticità non compare nell'equazione: questo termine è il responsabile della diffusione (isotropa per come è scritto) della vorticità.

L'equazione può essere quindi riscritta come:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} \tag{4.1.19}$$

Scritta in componenti

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = \omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \tag{4.1.20}$$

Il termine di destra può essere riscritto come

$$\begin{aligned} \omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} &= \omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_{0l}} \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} = \qquad \left(u_i = \frac{Dx_i}{Dt} \right) \\ &= \omega_k \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \right) \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

Vale la relazione

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} = \delta_{ik} \tag{4.1.22}$$

Il termine di sinistra può essere riscritto come

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = \frac{D}{Dt}(\delta_{ik}\omega_k) = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \omega_k \right) \tag{4.1.23}$$