Esercizio 8.10 — Sorgente lineare nel piano. Utilizzando l'espressione dela velocità indotta da una sorgente puntiforme di intensità unitaria,

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{r}} \ , \tag{8.43}$$

dimostrare che la velocità indotta nel punto $\boldsymbol{P}$ da una sorgente di intensità unitaria uniforme distribuita sul segmento che congiunge i due punti $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$ vale

$$\boldsymbol{u} = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|\boldsymbol{r}_2|}{|\boldsymbol{r}_1|}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2\pi}\beta\hat{\boldsymbol{y}} \ , \tag{8.44}$$

essendo $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ i versori in direzione tangente e normale al segmento $\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2$, i vettori $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{N}_i$, $i = 1:2$ e β l'angolo compreso tra il vettore $\boldsymbol{r}_1$ e il vettore $\boldsymbol{r}_2$, positivo se si deve ruotare il vettore $\boldsymbol{r}_1$ in senso antiorario per farlo coincidere con $\boldsymbol{r}_2$. ■

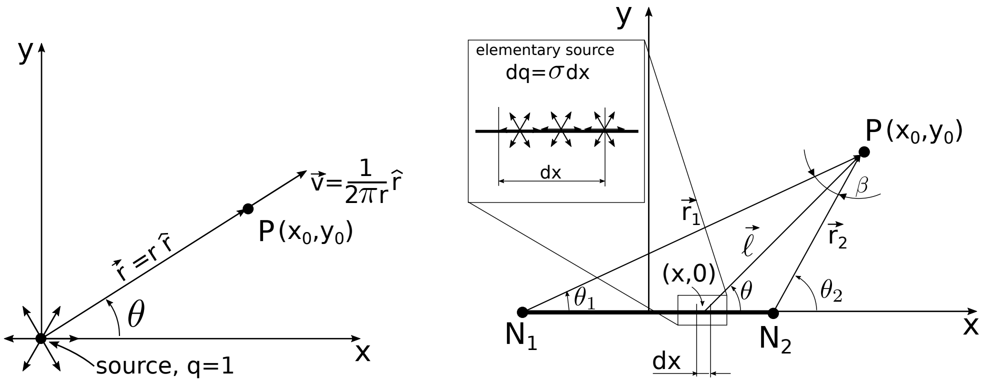

Figura 8.4: Rappresentazione di una sorgente puntiforme e della sorgente distribuita sul segmento $\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2$: definizione della "densità lineare di sorgente" σ e delle quantità geometriche.

Facendo riferimento alla figura 8.4, i punti appartenenti al segmento hanno coordinate $(x, 0)$, con $x \in (x_{N_1}, x_{N_2})$. Il contributo elementare di velocità indotta nel punto $\boldsymbol{P}$ dal segmento di lunghezza infinitesima dx vale

$$d\boldsymbol{u} = \frac{\sigma dx}{2\pi\ell}\hat{\boldsymbol{\ell}} = \frac{\sigma dx}{2\pi\ell^2}\boldsymbol{\ell} \ , \tag{8.45}$$

avendo indicato con $\boldsymbol{\ell} = (x_0 - x)\,\hat{\boldsymbol{x}} + y_0\,\hat{\boldsymbol{y}}$ il vettore di lunghezza ℓ che congiunge il generico punto sul segmento $\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2$ con il punto $\boldsymbol{P}$ e con $\hat{\boldsymbol{\ell}} = \boldsymbol{\ell}/\ell$ il versore che ne identifica la direzione. Per risolvere il problema risulta comodo esprimere la coordinata x in funzione dell'angolo θ formato dal vettore $\boldsymbol{\ell}$ con l'asse x e usare l'angolo θ come coordinata indipendente per parametrizzare i punti del segmento. Si può scrivere

$$\boldsymbol{\ell} = \ell\cos\theta\hat{\boldsymbol{x}} + \ell\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}} = (x_0 - x)\hat{\boldsymbol{x}} + y_0\hat{\boldsymbol{x}} \ , \tag{8.46}$$

per ricavare il legame tra x e θ,

$$\ell\cos\theta = x_0 - x \qquad , \qquad \ell\sin\theta = y_0 \qquad \rightarrow \qquad x - x_0 = y_0\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \ , \tag{8.47}$$

e l'espressione che lega i differenziali dx e $d\theta$,

$$dx = \frac{y_0}{\sin^2\theta} d\theta \ . \tag{8.48}$$

Se la sorgente ha densità uniforme unitaria, allora $\sigma = 1$ e si può scrivere

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{u} &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\ell^2} \, \boldsymbol{\ell} \, dx = \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{y_0^2}\left[y_0 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\hat{\boldsymbol{x}} + y_0\hat{\boldsymbol{y}}\right] \, \frac{y_0}{\sin^2\theta} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}\right] d\theta \end{aligned} \tag{8.49}$$

Per ottenere il contributo integrale di tutta la sorgente lineare, è necessario svolgere l'integrale del contributo elementare su tutto il segmento

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \int_{\boldsymbol{N}_1}^{\boldsymbol{N}_2} d\boldsymbol{u} = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}\right] d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\hat{\boldsymbol{x}} + (\theta_2 - \theta_1)\hat{\boldsymbol{y}}\right] = \\ &= -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|\boldsymbol{r}_2|}{|\boldsymbol{r}_1|}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2\pi}\beta\hat{\boldsymbol{y}} \ . \end{aligned} \tag{8.50}$$

L'ultima espressione è stata ricavata utilizzando il legame $\theta_2 = \theta_1 + \beta$ tra angoli interni ed esterni di un triangolo ed elaborando il termine del logaritmo come

$$\ln\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \ln\frac{\sin\theta_2/y_0}{\sin\theta_1/y_0} = \ln\frac{1/|\boldsymbol{r}_2|}{1/|\boldsymbol{r}_1|} = \ln\frac{|\boldsymbol{r}_1|}{|\boldsymbol{r}_2|} = -\ln\frac{|\boldsymbol{r}_2|}{|\boldsymbol{r}_1|} \ . \tag{8.51}$$

Esercizio 8.11 — Vortice lineare nel piano. Utilizzando l'espressione dela velocità indotta da un vortice irrotazionale puntiforme di intensità unitaria,

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\theta}} \ , \tag{8.52}$$

dimostrare che la velocità indotta nel punto $\boldsymbol{P}$ da un vortice di intensità unitaria uniforme distribuito sul segmento che congiunge i due punti $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$ vale

$$\boldsymbol{u} = -\frac{1}{2\pi}\beta\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|\boldsymbol{r}_2|}{|\boldsymbol{r}_1|}\hat{\boldsymbol{y}} \ , \tag{8.53}$$

essendo $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ i versori in direzione tangente e normale al segmento $\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2$, i vettori $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{N}_i$, $i = 1 : 2$ e β l'angolo compreso tra il vettore $\boldsymbol{r}_1$ e il vettore $\boldsymbol{r}_2$, positivo se si deve ruotare il vettore $\boldsymbol{r}_1$ in senso antiorario per farlo coincidere con $\boldsymbol{r}_2$. ■

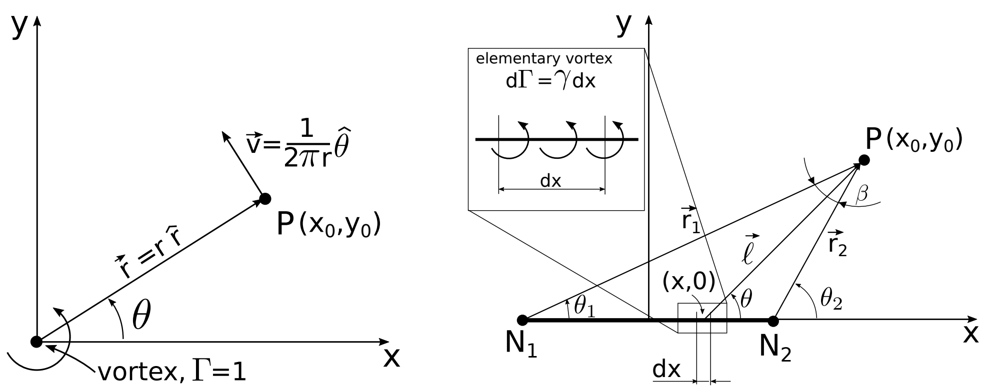

Figura 8.5: Rappresentazione di un vortice irrotazionale puntiforme e del vortice distribuita sul segmento $\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}_2$: definizione della "densità lineare di vortice" γ e delle quantità geometriche.