

# Ordine dei modelli

## 1.1 Introduzione

Partiamo dal modello dinamico classico  $\dot{x} = Ax + Bu$ ; come si è detto si deve cercare di rendere l'ordine  $n$  del modello il più piccolo possibile, perchè più  $n$  diviene elevato più i compensatori divengono grandi e dunque complicati da realizzarsi nella pratica. Inoltre per sistemi di ordine elevato l'incertezza sui parametri di progetto potrebbe molto facilmente rendere poco affidabile il regolatore. Abbiamo inoltre notato che, partendo dal continuo, le tecniche di discretizzazione adottate, i.e. FE, sono precise, ma di contro richiedono molte equazioni, cioè non sono efficienti. Da qui l'obbligo di passare a basi modali, molto comode perchè molto efficienti dal punto di vista numerico e di cui si è mostrato il comportamento di convergenza. Il troncamento, in questo contesto, avviene sulla base del contenuto in frequenza delle forzanti e della banda passante che si vuole dare al controllo e al più si complementa con i modi di accelerazione per il recupero statico; ci si chiede se è possibile in un qualche modo ridurre ulteriormente l'ordine del sistema. La risposta è affermativa, infatti nel progetto del regolatore saranno effettivamente utili solo quei modi che sono raggiunti dal controllore, ovvero che passano dai sensori agli attuatori. Questo entra nei concetti di osservabilità e raggiungibilità di un sistema; l'ordine del modello, quindi, può essere ridotto eliminando, in un qualche modo, le parti poco raggiungibili o poco osservabili ritenendo la loro dinamica ininfluenza ai fini del controllo. Questa ulteriore tecnica di riduzione è però certamente secondaria alla tecnica del contenuto in frequenza e deve essere ritenuta ancillare, almeno per questo corso. In ogni modo, l'idea di raggiungibilità e del suo duale, l'osservabilità, entrano in modo imperioso nelle tecniche più moderne di riduzione dei modelli dove si cerca il minimo di un'opportuna norma in modo da eliminare i modi inutili ai fini del progetto. Queste tecniche richiedono una forte base matematica per essere affrontati, ma non è difficile pensare al loro modo di funzionamento. Si pensi ad esempio ad una generica funzione di trasferimento: questa, da sola, elimina le parti non raggiungibili e non osservabili attraverso la cancellazione poli zeri. Allora la tecnica matematica consiste nel minimizzare la differenza tra una norma della funzione di trasferimento del modello ridotto e quella del modello completo. Per fare questo bisogna che i concetti di raggiungibilità ed osservabilità non siano solo dei meri sì/no, ma che sia possibile dare loro un significato di poco rispetto a. Dunque definita una norma di una opportuna fdt,  $\|H(\omega)\|$  si cerca in funzione dell'ordine  $n$  il minimo di

$$J \equiv \| \|H_n(\omega)\| - \|H(\omega)\| \|$$

con  $H_n$  l'opportuna fdt del sistema ridotto e  $H$  quella del sistema completo.

Oltre alla riduzione del modello per un più facile progetto, c'è anche la possibilità sempre con le medesime tecniche di operare una riduzione a posteriori sulla dinamica del filtro. Ovvero posso pensare di ridurre l'ordine del filtro, progettato in prima battuta di un ordine grande, attraverso l'approccio modale, o anche, attraverso i criteri in norma.

## 1.2 Troncamento e residualizzazione

Partiamo dal solito sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

che cosa sia lo stato  $x$  non interessa ai fini di quello che noi vogliamo misurare, cioè ai fini della  $y$ , perchè la misura è una nostra scelta non una scelta delle coordinate attraverso cui descriviamo il modello. Pertanto si può passare da  $x$  a  $x'$  attraverso una trasformazione di similarità, purché non singolare, senza alterare l'uscita. Potendo prendere lo stato a mio piacimento, è comodo vederlo come ampiezza degli autovettori associati alla matrice  $A$  del sistema. Ovvero calcolo lo stato diagonalizzando la matrice  $A$ . Questo come si è visto non è sempre possibile, ma attraverso le forme di Jordan, o di Schur si riesce comunque sempre a separare la matrice in due blocchi distinti, che non sono accoppiati<sup>1</sup>. Posto quindi  $A$  partizionata in due blocchi e  $x$  associati alla dinamica in frequenza del modello, ovvero agli autovettori posso senz'altro scrivere

$$\begin{cases} \dot{x}_L = A_L x_L + B_L u \\ \dot{x}_V = A_V x_V + B_V u \end{cases}$$

dove  $L$  sta per lento e  $V$  sta per veloce. Questo si può vedere in forma matriciale come

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_L \\ \dot{x}_V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_L & 0 \\ 0 & A_V \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_L \\ x_V \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_L \\ B_V \end{bmatrix} \{u\}$$

**Osservazione:** per sistemi semplici l'impiego delle coordinate modali e della diagonalizzazione può essere evitato se, ad occhio, riconosco delle coordinate furbe in modo da selezionare, in partenza, le dinamiche veloci e quelle lente. Questo quando l'ordine del sistema è grande è molto difficile.

Quando parliamo di modi facciamo un troncamento, ovvero diciamo che la parte veloce non partecipa alla risposta. Non è eccitata perchè la  $u$  non riesce a toccare le alte frequenze e dunque non partecipa. Quindi l'idea di troncamento si può vedere nel sistema sopra come

$$\{\dot{x}_L\} = [A_L] \{x_L\} + [B_L] \{u\}$$

Ci si può chiedere se tale via sia l'unica, ma sappiamo già che non è così; sappiamo infatti che esista la tecnica dei modi di accelerazione che recupera la dinamica dei modi veloci residualizzandola e vedendola come una parte statica. Sappiamo anche che ciò significa ritenere la parte veloce istantanea rispetto alla parte lenta. Questo è il modo corretto di operare: recuperare la dinamica di tutto il sistema almeno per le basse frequenze; è chiaro che per la dinamica le alte frequenze possono essere influenti, ma non lo sono certamente per la statica, infatti come si è detto, per un recupero corretto, ad esempio, del momento flettente, è imperativo l'uso anche della statica del sistema. Questo approccio ha un significato fisico molto preciso se si ripensa all'idea di risposta istantanea e di equazione di moto  $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F$ ; significa trascurare le forze d'inerzia e di smorzamento delle alte frequenze. Tutto questo discorso si riflette nel sistema lineare come

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_L \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_L & 0 \\ 0 & A_V \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_L \\ x_V \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_L \\ B_V \end{bmatrix} \{u\}$$

e posso dire che

$$x_V = -A_V^{-1} B_V u$$

cioè  $x_V$  non ha transitorio, è solo statico.

Il comportamento dei due modi di trascurare la parte veloce, troncamento e residualizzazione, si riflettono sull'uscita del sistema. Infatti se l'uscita è

$$y = C_L x_L + C_V x_V + Du$$

per il caso di *troncamento* ho

$$y = C_L x_L + Du$$

---

<sup>1</sup>In realtà per la forma di Schur ci può essere accoppiamento nella parte del blocco superiore, ma per non appesantire la notazione si trascura questo caso

per il caso di *residualizzazione*

$$y = C_L x_L + C_V (-A_V^{-1} B_V u) + D u = C_L x_L + (D - C_V A_V^{-1} B_V) u$$

In effetti questo può essere riguardato in termini di progetto nel campo delle frequenze; il troncamento non è altro che l'approssimazione a poli dominanti, la residualizzazione il recupero dei poli troncati almeno staticamente.

**Osservazione:** qualora si operi per residualizzazione, anche se il sistema iniziale era strettamente proprio il sistema residualizzato è solo proprio. Questo è molto importante perchè fa capo a cosa succede nella modellazione dei sensori. Quando questi vengono inseriti nel modello e dunque vengono a far parte dello stato del sistema, e quando vengono ritenuti ideali, è come se si residualizzasse la loro dinamica e quindi si rende il sistema solo proprio.

**Ricorda:** i sistemi in natura sono sempre strettamente propri, divengono solo propri a causa delle nostre semplificazioni, cioè se trascuriamo le dinamiche veloci o le residualizziamo.

### 1.3 Residualizzazioni successive

Perchè non continuare a residualizzare come in uno sviluppo in serie? Questo è effettivamente fatto nella tecnica delle residualizzazioni successive; questo discorso è molto simile al modo di procedere nel caso di smorzamento visco-elastico.

Scrivo che

$$\ddot{x}_V = A_V \dot{x}_V + B_V \dot{u}$$

e suppongo di trascurare, non le derivate dello stato ma le sue derivate seconde; questo porta a

$$0 = A_V \dot{x}_V + B_V \dot{u}$$

e dunque

$$\dot{x}_V = -A_V^{-1} B_V \dot{u}$$

sostituendo

$$x_V = -A_V^{-2} B_V \dot{u} - A_V^{-1} B_V u$$

e così si può andare avanti sino a scrivere una relazione del tipo

$$x_V = - \sum_{k=1}^N A_V^{-k} B_V \frac{d^{k-1} u}{dt^{k-1}}$$

se si pone  $d^N x_V / dt^N = 0$ .

Questo modo di procedere si riguarda in frequenza come dare la dinamica veloce con un polinomio in  $s$ , infatti scrivo che

$$X_V(s) = \left[ - \sum_{k=1}^N A_V^{-k} B_V s^{k-1} \right] U(s)$$

Ora con questo modo di procedere riesco a descrivere bene le forzanti sino a che non ho la comparsa delle derivate seconde delle  $\delta$ ; chiaro è che il mio sistema diventa improprio perchè compaiono le derivate della forzante. Basta comunque rinominarle come altre forzanti e tutto va a posto. All'uscita avrò:

$$y = C_L x_L + (D - C_V A_V^{-1} B_V) u - C_V \sum_{k=2}^N A_V^{-k} B_V \frac{d^{k-1} u}{dt^{k-1}}$$

ed in frequenza

$$Y(s) = C_L X_L(s) + \left[ D - C_V \sum_{k=1}^N A_V^{-k} B_V s^{k-1} \right] U(s)$$

**Osservazione:** qualora tutto il sistema sia veloce rispetto alla dinamica che mi interessa, potrei pensare ad una residualizzazione totale, ovvero ad una approssimazione quasi-stazionaria dell'intero sistema.

**Ricorda:** un recupero fatto per bene avviene se la parte veloce è ben separata dalla parte lenta del sistema.

**Osservazione:** la residualizzazione consente non solo di mantenere gli zeri ma anche di recuperare gli zeri della funzione di trasferimento e quindi porta ad una maggiore fedeltà al comportamento effettivo del sistema.

**Nota:** come sottolineato, riguardando questo discorso in frequenza riaffiora il concetto di poli dominanti. In particolare, prendendo una funzione di trasferimento del tipo

$$H(s) = \frac{1}{s + a}$$

si ha *troncamento* qualora io consideri  $s \ll a$  e dica che

$$H(s) \sim 1$$

non recuperando l'effetto della statica. Questo a senso quando si parla di luogo della radici, dove il fattore di normalizzazione non interessa più di tanto, mentre è fondamentale quando si ha  $a$  che fare con il corretto recupero degli sforzi. Una *residualizzazione statica* comporta porre

$$H(s) \sim \frac{1}{a}$$

recuperando almeno la statica. Una *residualizzazione dinamica* invece pone

$$H(s) = \frac{1}{s + a} = \frac{1}{a} \frac{1}{\frac{s}{a} + 1} \sim \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{s}{a} + \dots \right)$$

ovvero sviluppa in serie i poli ad alta frequenza verso le basse frequenze.

## 1.4 Modello ibrido

Nel momento in cui dobbiamo usare la tecnica dei modi di accelerazione per andare a recuperare la statica in punti prestabiliti della struttura, il costo computazionale può diventare oneroso perchè bisogna risolvere altri sistemi lineari, uno per ogni punto e per ogni istante di tempo in cui si vuole recuperare la statica e il corretto valore delle forze (in genere concentrate). Ci si può chiedere se non esiste una base opportuna che sia così gentile da porgerci l'intero set di forze già corretto e già residualizzato senza l'utilizzo del recupero statico. La risposta è che una base così fatta non esiste. Però posso pensare di affiancare alla base modale troncata da me scelta un sottospazio di un'altra base che mi permetta di raggiungere il mio scopo. Questa base aggiuntiva è la base delle deformate statiche delle forze. Per costruire questa base ragiono all'inverso: ovvero dico che se mi costruisco una base completa di forze e poi attraverso la legge costitutiva statica ( $u = K^{-1}F$ ) trovo una base di spostamenti, allora questa sarà una base di spostamenti statici. Questo non è altro che il metodo delle forze che cerca di trovare una rappresentazione completa delle forze. Ora questa base statica pur non avendo le buone caratteristiche della base modale, è tuttavia una buona base, nel senso che è completa (perchè ottenuta attraverso una trasformazione non singolare) e riesce a descrivere qualsiasi forza, anche le forze di inerzia. L'idea è allora: visto che la base modale è una base molto efficiente ma non è in grado di recuperare con pochi modi alcune classi di forzanti, e.g. le forze concentrate, posso pensare di selezionare un sottospazio della base statica ( $s$ ) e unirlo alla base modale ( $m$ ) per il corretto recupero di quelle forzanti. Cioè scrivo che

$$u = U q = [U_m | U_s] \begin{Bmatrix} q_m \\ q_s \end{Bmatrix}$$

e questa rappresentazione non mi dà una base ma comunque un'accelerazione di convergenza. Se poi scelgo bene la parte statica ho il vantaggio che il sistema che era proprio rimane ancora proprio.

Si badi bene che la base statica e la base modale non sono due scelte diverse per rappresentare il problema dinamico, perchè l'alternativa non è presente: la base modale è certamente più efficiente e la base statica per rappresentare bene tutti i carichi presenti può essere di ordine elevato. Però, essendo la base modale carente sui carichi concentrati o sulle grandi masse concentrate (che generano forze di

inerzia concentrate) posso pensare di usare la base statica per rappresentare bene queste e solo queste condizioni di carico, aiutando la base modale a convergere più rapidamente.

Per calcolare i modi statici è molto semplice, basta usare un carico di intensità arbitraria e calcolarne la deformata statica attraverso l'operatore  $K^{-1}$ . La scelta dell'entità del carico è libera perchè è poi una scelta di normalizzazione dei modi. Ora posto, come detto,

$$U = [U_m | U_s]$$

con le  $U_s$  che devo scegliere io studiando la fisica del problema. A questo punto le matrici che costituiranno il modello non saranno affatto molto diverse dalle solite matrici, infatti, posta  $M$  la matrice di massa degli FE basta calcolare

$$U^T M U = \left[ \begin{array}{c|c} U_m^T M U_m & U_m^T M U_s \\ \hline U_s^T M U_m & U_s^T M U_s \end{array} \right]$$

in questo caso solo il blocco in alto a sinistra è diagonale, il resto non è diagonale perchè la base statica non è  $M$ -ortogonale, e per di più l'intera matrice è in generale piena. Questo non è affatto un problema, perchè si ha a che fare con sistemi non di grandi dimensioni e a me interessa l'efficienza e non tanto la sparsità o diagonalità della matrice. Inoltre sappiamo che in genere i guadagni del nostro controllore saranno rappresentati da matrici piene, pertanto non è un gran vantaggio avere matrici diagonali, è molto auspicabile però averle di piccole dimensioni, appunto per un più facile progetto del regolatore.

La costruzione della base statica, che può essere semplice per strutture vincolate, può risultare più critico per strutture dotate di moti rigidi, come lo sono i nostri aeroplani. In questo caso è dunque necessario eliminare questi modi che rendono singolare la  $K$ . Per fare questo si deve vincolare solo isostaticamente la struttura. Solo isostaticamente perchè altrimenti introdurrei una energia di deformazione non reale; ora, vincolando la struttura cambierà la distribuzione di carico, che non sarà più solo data dai carichi originari  $p$  ma anche dalle reazioni di vincolo  $R$ . Il sistema  $p + R$  è un sistema chiaramente auto-equilibrato. Ora in primo luogo potrebbe sembrare che l'introduzione delle reazioni dia luogo ad un problema, ma ciò non è vero perchè

- La base  $U_m$  contiene chiaramente i modi rigidi,
- I modi rigidi, per definizione, non hanno reazione di vincolo,
- Le reazioni di vincolo non sono altro che condizioni naturali del problema e si ricavano naturalmente dalla convergenza della base scelta.

Questo significa che in modo naturale, a patto di usare qualche modo in più per assicurare la convergenza, per i modi rigidi le reazioni saranno nulle. Questo dunque non danneggia affatto il modello. Inoltre si potrebbe riguardare il tutto dicendo che lo sviluppo scelto  $U_m + U_s$  è auto-equilibrato e che se anche le  $R$  sono state essenziali al calcolo dei modi statici, alla fine non compaiono.

C'è però un'altra via, che permette di non aggiungere ulteriori modi di sviluppo per la convergenza. Cerco di fare in modo da rendere nulle le  $R$  per fare questo devo scegliere di applicare alla struttura un carico auto-equilibrato. Questo carico,  $p_a$  che ricordo essere del tutto arbitrario, può essere scelto in modo fisico tendo conto che ogni forza genera una forza d'inerzia, e così il momento genererà dei momenti d'inerzia. Dunque se applico alla struttura il carico  $p + p_i$ , dove  $p_i$  sono i carichi d'inerzia, so già che  $p_a$  è auto-equilibrato per costruzione, quindi le  $R$  sono nulle e non sono costretto ad ampliare il modello. Questo modo di procedere si chiama *scarico inerziale*.

I programmi ad FE fanno questa procedura in modo automatico. Prendiamo una struttura a trave in campo tri-dimensionale, essa per ogni nodo avrà sei coordinate libere, cioè sei gradi di libertà<sup>2</sup>. Siano dunque  $q_R$  i modi rigidi della struttura (tre spostamenti e tre rotazioni), i corrispettivi spostamenti ai nodi  $u_R$  saranno  $u_R = R q_R$  con  $R$  matrice di sei colonne per il numero di righe pari ai nodi non vincolati data da

$$R = \left[ \begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ [I] & [-(P - O) \times] \\ \mathbf{0} & [I] \\ \vdots & \vdots \end{array} \right]$$

<sup>2</sup>In due dimensioni i g.d.l. sono tre; il continuo ne ha invece tre in tre dimensioni. Le aste e le piastre ne hanno di più perchè devono tener conto della schematizzazione a linea o a piano che è stata necessaria a generarle.

Il significato della matrice  $R$  è abbastanza evidente<sup>3</sup>: ad ogni spostamento corrisponde ai nodi uno spostamento ed una rotazione attorno al punto fisso  $O$ , ad ogni rotazione corrisponde solo una rotazione ai nodi.

E' interessante vedere che attraverso questa rappresentazione il vettore dei carichi  $P_{Ris} + M_{Ris}$  si calcola a partire da una sollecitazione generica statica  $P_S$  come

$$\begin{Bmatrix} P_{Ris} \\ M_{Ris} \end{Bmatrix} = [R]^T \{P_S\}$$

Questo si vede bene pensando ad una sola forza con un momento applicato ad un nodo (si ricorda che la forza ha tre componenti, così come il momento):

$$\begin{Bmatrix} P_{Ris} \\ M_{Ris} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & [I] & \mathbf{0} & \cdots \\ \cdots & [(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \times] & [I] & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Da cui si ritrovano le solite  $P_{Ris} = \mathbf{F}$  e  $M_{Ris} = (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \times \mathbf{F} + \mathbf{M}$ .

A questo punto si può fare lo scarico inerziale nella maniera seguente. Noti i carichi si calcolano le risultanti con la formula sopra e poi le accelerazioni rigide come

$$\{a_R\} = [M_R]^{-1} \begin{Bmatrix} P_{Ris} \\ M_{Ris} \end{Bmatrix}$$

dove  $[M_R]$  è la matrice di massa associata ai modi rigidi; questa si calcola come sotto-matrice della matrice di massa totale associata ai modi rigidi, dunque

$$[M_R] = U_R^T M U_R \equiv R^T M R$$

questa matrice è in generale non diagonale perchè i modi rigidi non sono ortogonali, in quanto hanno radici multiple ( $= 0$ ). In ogni caso il concetto di diagonalità è sempre recuperabile tramite un procedimento alla Graham-Schmidt, pur non essendo molto indicato in questo contesto. Infatti, come detto, interessa l'efficienza non la diagonalità in sè.

Se adesso si osserva la struttura della matrice di massa, ci si accorge che è della forma

$$[M_R] = \begin{bmatrix} \mathcal{M} & -\mathcal{M}[(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \times] \\ \mathcal{M}[(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \times] & [\mathcal{I}_{xyz}] \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

infatti:

$$[M_R] = R^T M R = \begin{bmatrix} \cdots & [I] & \mathbf{0} & \cdots \\ \cdots & [(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \times] & [I] & \cdots \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ [I] & [-(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \times] \\ \mathbf{0} & [I] \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

a questo punto basta ricordarsi che la matrice di massa può sempre essere pensata come diagonale<sup>4</sup> (al limite con un procedimento di mass-lumping) e nella forma

$$M = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x^1 & & \\ & m_y^1 & \\ & & m_z^1 \end{bmatrix} & & 0 \\ & \begin{bmatrix} \mathcal{I}_x^1 & & \\ & \mathcal{I}_y^1 & \\ & & \mathcal{I}_z^1 \end{bmatrix} & & \\ & & & \ddots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^k & 0 \\ 0 & \mathcal{I}^k \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

<sup>3</sup>Si ricorda che

$$[\mathbf{v} \times] \equiv \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}$$

<sup>4</sup>In effetti questo non è essenziale in un contesto energetico e di PLV ma in questo modo i passaggi sono più intuitivi.

e svolgendo le moltiplicazioni si arriva alla:

$$[M_R] = \begin{bmatrix} \sum_k \mathbf{m}^k & -\sum_k \mathbf{m}^k [\mathbf{r}_{\times}^k] \\ \sum_k \mathbf{m}^k [\mathbf{r}_{\times}^k] & -\sum_k \mathbf{m}^k [\mathbf{r}_{\times}^k][\mathbf{r}_{\times}^k] + \sum_k \mathcal{I}^k \end{bmatrix}$$

dove per semplicità di lettura è stato indicato  $[\mathbf{r}_{\times}^k] = [(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \times]$ . Questa relazione non è altro che la (1.1); inoltre fa notare che la struttura della matrice di massa dei modi rigidi, i.e. la  $[M_R]$  dipende dal sistema di assi che si è scelto, ovvero da  $\mathbf{O}$ . Difatti si distinguono i diversi casi

- $\mathbf{O}$  qualsiasi, i termini  $[-(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \times]$  e il rispettivo sulla sotto diagonale sono i momenti statici,
- $\mathbf{O} \equiv \mathbf{CG}$  i momenti statici sono nulli, dunque la matrice è diagonale a blocchi,
- $\mathbf{O} \equiv \mathbf{CG}$  e assi principali d'inerzia la matrice è totalmente diagonale perchè sono nulli i momenti d'inerzia polari.

Questa relazione permette inoltre una prima verifica, in un programma ad elementi finiti, della corretta immissione dei dati (la massa deve risultare esatta) e un calcolo dei momenti d'inerzia.

Ritornando ora al nostro problema dello scarico inerziale, le accelerazioni nodali  $a_N$ , note le  $a_R$  saranno

$$\{a_N\} = [R] \{a_R\}$$

dunque i carichi d'inerzia sono

$$\{P_I\} = -[M][R][M_R]^{-1}[R]^T \{P_S\}$$

Si riguardi pagina 23 per un confronto nel caso in cui la matrice di massa è pensata diagonale.

## 1.5 Riduzione bilanciata dei modelli

Come detto, esiste un'altra strada per cercare di ridurre il modello del sistema dinamico che devo controllare; questa via passa per una trattazione matematica che fa capo ad una minimizzazione di una certa norma. Questa norma può essere vista come la distanza che una rappresentazione attraverso una fdt ridotta ha rispetto alla rappresentazione completa. Dunque con un ragionamento molto qualitativo si può pensare che il problema reale e le sue riduzioni stiano in un certo spazio  $\Omega$ ; in questo spazio si cerca la rappresentazione (e la si cerca attraverso una misura opportuna della sua fdt), che abbia la proprietà di avere il minor numero di g.d.l. e la minor distanza in norma dalla rappresentazione reale. Come sottolineato questo consiste nel fare un'operazione del tipo la minimizzazione del funzionale

$$J \equiv \| \|H_n(\omega)\| - \|H(\omega)\| \|_{\Omega}$$

e voler ricercare  $\min J$  con l'aggiunta  $\min n$ . In questo contesto a volte può essere utile avere una norma con pesatura in frequenza. Si noti che i modi non vengono troncati o residualizzati ma vengono tenuti tutti nel processo matematico; sarà l'ottimizzazione a porgermi la fdt più fedele con pochi g.d.l. .

Abbiamo anche fatto notare che questa tecnica può essere utile per la riduzione dell'osservatore o del controllore *a posteriori*, perchè è possibile che siamo stati costretti a progettare con tanti termini; questo è dovuto a tante ragioni, spill-over, instabilità, convergenza, eccetera. Dunque una volta progettato può essere utile ridurlo con tecniche in norma (o anche energetiche), oppure al solito con tecniche di residualizzazione.

La norma che si userà fa capo ai concetti di raggiungibilità ed osservabilità<sup>5</sup>. Per prima cosa bisogna estendere la definizione di questi due concetti che non devono essere più visti come dei meri sì-no, ovvero come un controllo non lineare, ma ci piacerebbe poterli intendere come poco o più rispetto a; questa seconda definizione è molto più utile per tecniche di ottimizzazione.

Ricordiamo innanzitutto la definizione classica: un sistema è raggiungibile se e solo se il rango della matrice

$$[B | AB | A^2B | \dots | A^{n-1}B]$$

<sup>5</sup>Raggiungibilità e controllabilità sono equivalenti nel caso di sistemi lineari.

è pari al numero di righe  $n$ . Allo stesso modo un sistema è osservabile se il rango di

$$[C^T | A^T C^T | (A^T)^2 C^T | \dots | (A^T)^{n-1} C^T]$$

è  $n$ .

Ora affidiamoci alla fisica del problema in esame. Partiamo come sempre dal sistema lineare dinamico  $\dot{x} = Ax + Bu$  e trasformiamo lo stato in modo che rappresenti le ampiezze degli autovettori della matrice  $A$ . Dunque applichiamo una trasformazione  $X$  in modo che sia  $x = Xq$ , ed in modo che  $X$  rappresenti gli autovettori di  $A$  ovvero che sia  $AX = \lambda X$ , e quindi sia  $A = X \text{Diag}\{\lambda\} X^{-1}$ . Stiamo perciò scrivendo la rappresentazione spettrale di  $A$ . Il sistema lineare si riscrive in termini di  $q$  come

$$\dot{q} = X^{-1} A X q + X^{-1} B u$$

dove chiaramente  $X^{-1} A X$  è diagonale. C'è ora da fare un piccolo inciso sul "*chiaramente è diagonale*". Come più volte sottolineato la diagonalizzazione è sempre possibile sotto certe condizioni, e qualora queste non valgano ci si può ridurre a forme canoniche del tipo di Jordan o di Schur. Queste ultime non sono diagonali ma almeno a blocchi. In generale inoltre gli autovalori possono essere complessi e coniugati, ovvero, nel novero di tutti i  $\lambda$  della matrice  $A$  può capitare che ci siano coppie di autovalori complessi. Questo può non darci affatto fastidio, ma se così non fosse, ovvero se volessi avere tutto reale, si può operare autovettori in modo da renderli reali. Infatti basta che invece di avere due colonne in  $X$  di autovettori complessi coniugati, si affianchino la parte reale e la parte immaginaria di tali autovettori. In questo modo la generica radice complessa coniugata dalla matrice finale passa da una forma diagonale ad una forma a blocchetti  $2 \times 2$  come segue

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \sigma + j\omega & & \\ & & \sigma - j\omega & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \sigma & \omega & \\ & -\omega & \sigma & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Questo può essere fatto vedere con un esempio semplice. Prendiamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

essa ha forma diagonale

$$\Lambda = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix}$$

cioè

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix}$$

Questo si può trasformare come detto in

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv [I]$$

dunque

$$\Lambda^* = [I]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} [I] \equiv A$$

come si voleva mostrare.

Allora ritornando al nostro sistemino

$$\dot{q} = X^{-1} A X q + X^{-1} B u$$

il test di raggiungibilità risulta immediato, in quanto se il sistema è non raggiungibile una riga della  $X^{-1} B u$  ovvero della  $B$  modale, deve essere nulla. Ciò significa che una forza di controllo è applicata



su un nodo di un modo. Analogamente nell'equazione delle misure  $y = CXq$  risulta chiaro che se una colonna è nulla allora il sistema è non osservabile perchè un sensore è stato posto su un nodo di un modo. Abbiamo quindi collegato i concetti di raggiungibilità ed osservabilità a situazioni fisiche reali; ora, sempre dall'analisi delle righe della  $B$  modale (cioè la  $X^{-1}Bu$ ), se opportunamente scalate in modo che siano dimensionalmente confrontabili, è possibile capire quali sono i modi meno raggiungibili di altri. Allo stesso modo per le colonne della  $C$  modale. Dunque, come più volte detto, è possibile ritenere trascurabili i modi poco osservabili/raggiungibili e toglierli dal modello. Si badi bene, questo non significa affatto che tali modi non rientrino nella banda di frequenza che interessa, ma solo che le forze di controllo non riescono ad eccitarli in modo significativo, proprio perchè poste in prossimità dei nodi. Dualmente i sensori non riescono a 'vedere' questi modi.

Nell'idea di misurare quanto una riga o colonna sia minore delle altre è contenuto il concetto di norma. Introduciamo a questo scopo le due quantità, dette rispettivamente Gramiano di controllabilità e Gramiano di osservabilità

$$G_c = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

$$G_o = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

definiti per sistemi asintoticamente stabili. Allora si può dimostrare il seguente teorema:

**Teorema:** per un sistema as. stabile, condizione necessaria e sufficiente affinché sia controllabile (osservabile) è che il Gramiano di controllabilità (osservabilità) sia definito positivo. Ovvero deve essere

$$G_c \succ 0 \quad (G_o \succ 0)$$

Gli integrali sopra scritti, essendo i Gramiani simmetrici per definizione, si calcolano attraverso le equazioni di Lyapunov seguenti

$$AG_c + G_c A^T + BB^T = 0$$

$$A^T G_o + G_o A + C^T C = 0$$

**Osservazione:** il Gramiano di controllabilità può essere visto come la varianza di un rumore bianco di ampiezza unitaria applicato a tutti gli ingressi. Questo è palese se si osserva che l'equazione di Lyapunov per la suddetta varianza è

$$A\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xx}^2 A^T + BWB^T = 0$$

Un altro modo di riguardare  $G_c$  è associarlo alle risposte impulsive dello stato del sistema che possono venir scritte tramite l'integrale di convoluzione

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \delta(\tau) d\tau = e^{At} B$$

dunque è molto semplice dire che, essendo le forzanti impulsive un cambiamento delle condizioni iniziali del sistema, se io applico a tutti gli ingressi uno stesso cambiamento di condizioni iniziali che poi però non ritrovo all'uscita per un certo stato, allora quello stato è non controllabile e quindi il Gramiano è singolare. Dualmente il Gramiano di osservabilità è associabile alla misura della risposta libera

$$y(t) = C e^{At} x_0$$

che dice che se una colonna della  $C$  è nulla, nelle misure quello stato non comparirà ed il Gramiano sarà singolare.

Avendo noi definito una quantità, il Gramiano, che è sicuramente simmetrica definita positiva, abbiamo la possibilità di fare delle misure di questa quantità in un modo classico; ovvero attraverso l'analisi spettrale. Dunque, riconoscendo che gli autovalori non potranno che essere positivi

$$G_c = V_c \Lambda_c^2 V_c^T$$

e dunque sull'idea di condizionamento di una matrice carichiamo sugli autovalori la misura di  $G_c$ ; questo si può fare normalizzando ad 1 gli autovettori. Quindi si è arrivati a dire che *in termini relativi*:

- $\Lambda_c^2$  grande implica più controllabilità,
- $\Lambda_c^2$  piccolo implica meno controllabilità.

In modo del tutto duale è possibile fare l'analisi spettrale di  $G_o$ .

Per avere però un'idea molto più precisa di cosa sia possibile trascurare è essenziale operare una scalatura, ovvero una sorta di adimensionalizzazione del sistema, che permetta di apprezzare le grandezze in termini relativi e non assoluti. E' infatti bene notare che un termine è trascurabile non nel momento che è piccolo o grande in sé, ma nel confronto con le altre grandezze. Questa è la cosiddetta approssimazione dinamica. Ora, scalare il sistema è un procedimento che va sotto il nome di *Bilanciamento*. Che sia essenziale, può essere visto anche nei termini strutturali; infatti, ad esempio per i modi rigidi, a seconda della distanza dal polo lo spostamento per rotazione assume valori anche molto diversi, ma certamente la controllabilità/osservabilità non dipende dal posto (per i modi rigidi). Per scalare/bilanciare il modello è necessario operare una trasformazione attraverso opportune matrici che rendano i Gramiani diagonali e con gli stessi autovalori. Per far ciò si prende la matrice di trasformazione

$$T_c \equiv V_c \Lambda_c$$

e si trasforma il Gramiano

$$G_c^\dagger(T_c) = T_c^{-1} G_c T_c^{-T}$$

Questo può essere visto usando l'equazione di Lyapunov

$$A G_c + G_c A^T + B B^T = 0$$

che trasformata (nello stato) diviene

$$T_c^{-1} A T_c G_c^\dagger + G_c^\dagger T_c^T A^T T_c^{-T} + T_c^{-1} B B^T T_c^{-T} = 0$$

da cui per il termine noto discende la forma di  $G_c^\dagger$ . Ora sostituendo il valore della matrice della trasformazione

$$G_c^\dagger(T_c) = T_c^{-1} G_c T_c^{-T} = \Lambda_c^{-1} V_c^T V_c \Lambda_c^2 V_c^T V_c \Lambda_c^{-1} = I$$

La stessa cosa la posso fare per il Gramiano di osservabilità applicando *la stessa trasformazione*.

$$G_o^\dagger(T_c) = T_c^T G_o T_c$$

vista l'equazione di Lyapunov

$$T_c^T A^T T_c^{-T} G_o^\dagger + G_o^\dagger T_c^{-1} A T_c + T_c^T C^T C T_c = 0$$

Queste trasformazioni non alterano affatto la natura non singolare del Gramiano, posto che la matrice di trasformazione sia non singolare. Dunque si può decomporre spettralmente come

$$G_o^\dagger(T_c) = T_c^T G_o T_c \equiv V_o \Lambda_o^2 V_o^T$$

Seguendo un procedimento dovuto a Moore (1979) si definisce una nuova matrice di trasformazione  $T_o$

$$T_o \equiv V_o \Lambda_o^{-1/2}$$

Scriviamo a questo punto i due Gramiani trasformati secondo la serie di trasformazioni  $T_c T_o$ :

$$G_c^\dagger(T_c T_o) = T_o^{-1} G_c^\dagger(T_c) T_o^{-T} = \Lambda_o^{1/2} V_o^T I V_o \Lambda_o^{1/2} = \Lambda_o$$

$$G_o^\dagger(T_c T_o) = T_o^T G_o^\dagger(T_c) T_o = \Lambda_o^{-1/2} V_o^T V_o \Lambda_o^2 V_o^T V_o \Lambda_o^{-1/2} = \Lambda_o$$

Così abbiamo ottenuto il bilanciamento dei Gramiani. A questo punto essendo  $\Lambda$  dei numeri positivi posso lavorare su di loro per stabilire che cosa sia importante sia in osservabilità che in controllabilità; abbiamo cioè costruito una scala relativa che ci permette di fare la nostra riduzione bilanciata. La chiave è usare la trasformazione  $T_c T_o$ .

Non è detto comunque che i modi che sono trascurabili verranno troncati, ma potranno essere residualizzati staticamente, o magari, dinamicamente.

Dal punto di vista operativo il modo di procedere è il seguente

[1] Calcolo i Gramiani;

[2] Calcolo  $G_c G_o$ , su cui si può applicare la trasformazione  $T = T_c T_o$  ottenendo

$$\underbrace{T^{-1} G_c T^{-T} T^T G_o T}_{T^{-1} G_c G_o T} = \Lambda_o^2$$

Ovvero

$$G_c G_o = T \Lambda_o^2 T^{-1}$$

Perciò posso calcolare direttamente gli autovalori di  $G_c G_o$ <sup>6</sup> per conoscere i pesi relativi.

Eventualmente invece che calcolare gli autovalori di una matrice non simmetrica, quale è la  $G_c G_o$ , si procede in modo alternativo con una fattorizzazione di Cholesky sulla  $G_o^\dagger(T_c)$ :

$$G_o^\dagger(T_c) = V_o \Lambda_o^2 V_o^T \equiv L L^T$$

Metodi più moderni affiancano il frequency shaping alle tecniche in norma, introducendo una opportuna  $\Lambda_o(\omega)$ .

**Nota:** anche se formalmente inesatto si può ricondursi ad una scomposizione a valori singolari (SVD), che per una matrice  $A$  qualsiasi, anche rettangolare, è

$$A = U \Sigma^2 V^T$$

dove  $A$  è una matrice  $n \times m$ ,  $U$  è  $n \times m$ ,  $V$  è  $m \times m$  e  $\Sigma^2$ ,  $\min[n, m] \times \min[m, n]$ <sup>7</sup> è la matrice diagonale dei valori singolari, i quali non sono altro che la radice quadrata degli autovalori della matrice quadrata  $A^T A$  sempre semidefinita positiva. Ora, le colonne di  $U$  sono gli autovettori della matrice  $A A^T$  mentre quelle della matrice  $V$  sono gli autovettori di  $A^T A$ . Le matrici  $U$  e  $V$  godono della proprietà seguente

$$U^T U = U U^T = I$$

$$V V^T = V^T V = I$$

Sono quindi ortonormate. Dunque invece che usare la

$$G_c G_o = T \Lambda_o^2 T^{-1}$$

potrei passare alla

$$G_c G_o = U \Sigma^2 V^T$$

Ma ciò non è in generale vero, e quindi il bilanciamento non è realizzato, dal momento che  $T$  non è ortonormata.

**Ricorda:** una matrice può essere scomposta usando le forma seguenti

- $LU$ ,  $H^T H$  o  $L^T D L$ ,
- $QR$ ,
- Schur,
- Decomposizione spettrale,
- SVD.

---

<sup>6</sup>Che è in generale non simmetrica.

<sup>7</sup>Non sono sicuro sia così. :)

# Sensori, Attuatori ed Implementazione Digitale

Appena l'ordine del regolatore diviene elevato, l'implementazione del controllo passa da un improbabile soluzione analogica, ad una effettiva e più pratica soluzione digitale. I sistemi di controllo fin qui presentati, infatti, sono stati proficuamente utilizzati nel momento in cui la potenza di calcolo dei processori è stata in grado di assumersi il compito di essere il regolatore vero e proprio. Si ricorda che il primo filtro di Kalman è stato usato con successo durante lo sbarco sulla luna e in tutto il programma Apollo.

E' bene sottolineare che accanto alla classica progettazione in analogico del controllore esiste anche una progettazione in digitale, cioè su un modello fisico discretizzato, ottimizzata in questo modo per il regolatore, senz'altro digitale. Questa tecnica ha il vantaggio notevole che la frequenza di campionamento può essere più bassa di quella che sarebbe stata richiesta seguendo una via analogica; questo perchè il nostro sistema di controllo non deve comportarsi in modo da essere molto vicino all'analogico, ma è già stato ottimizzato da digitale. Detto ciò comunque noi faremo l'implementazione digitale di quello che abbiamo progettato in analogico.

## 2.1 Sensori

Per le nostre strutture serviranno generalmente sensori per spostamenti, velocità, accelerazioni, sforzi e temperature, cioè per tutte quelle grandezze di stato, o loro combinazioni, che è necessario conoscere al fine di un corretto controllo del sistema. Bisogna notare fin da subito che nelle strutture aerospaziali non si potrà parlare di spostamenti e velocità assolute, ma solo in termini relativi, notando infatti che non esiste una terna fissa a cui riferire il movimento sulla struttura. Ci saranno allora dei sensori relativi, come possono essere, nel piccolo, gli strain-gauges. Un'altra realizzazione può essere fatta con un filo avvolto su di un potenziometro.

E' vero anche che, comunque, al giorno d'oggi, esistono dei misuratori assoluti, ad esempio il GPS o i sensori di stelle sui satelliti. Ma questi strumenti non hanno di solito la risoluzione che serve per un'implementazione del controllo effettivo della struttura. E dunque a questi vanno comunque associati sensori relativi; in ogni caso, inoltre, tali strumenti assoluti servono più che altro al controllo di assetto e stabilità e non al nostro tipo di regolazione, che è invece improntato sul controllo della deformabilità della struttura. Questa, supposta da noi completamente indipendente dalla stabilità e dall'assetto<sup>1</sup>, in effetti, in alcuni casi specifici, incide su questi parametri in maniera tale da portare anche ad instabilità. Facciamo un esempio eloquente. Prendiamo un satellite con i sue appendici, cioè con i pannelli solari. La banda passante del controllo di assetto è dell'ordine di qualche  $Hz$ ; ora, finchè i pannelli erano piccoli e rigidi allora la prima frequenza deformabile era ben separata dal controllo di assetto e le vibrazioni causate dal movimento erano del tutto irrilevanti. Ma quando i pannelli cominciarono ad essere grandi e

<sup>1</sup>Questo è vero con l'ipotesi di separazione in frequenza, cioè la prima frequenza deformabile è ben separata dai modi rigidi della struttura.

le frequenze di deformabilità molto vicine a quelle del controllo, allora i disturbi generati dalla vibrazione delle strutture poterono portare ad instabilità del satellite, visto che il sistema di controllo non era capace di discernere disturbi esogeni (attuatori, vento solare, perturbazioni orbitali) e disturbi endogeni (vibrazioni). In questa circostanza il primo tentativo di stabilizzare il sistema dinamico fu quello di ridurre la banda passante del sistema di controllo, il secondo l'utilizzo di filtri a spillo per la soppressione delle frequenze deformabili, il terzo l'implementazione di un controllo integrato assetto-strutturale. Dal nostro punto di vista potremmo progettare sia un sistema di controllo veloce che gestisce la deformabilità della struttura in modo da non farla interagire col controllo d'assetto, oppure direttamente il controllo integrato. Questa seconda opzione è possibile dal momento che la struttura modale è corretta anche per i moti rigidi se, come in questo caso, gli angoli di rotazione sono piccoli. Infatti per grandi angoli occorrerebbe la matrice dei coseni direttori e non varrebbe più l'approssimazione lineare per l'angolo di rotazione; ma questo non è il caso, perchè il controllo di assetto è limitato a frazioni di grado. Quindi tutto bene. E' da notare che serviranno, per un controllo integrato, sensori per la posizione assoluta, i.e. sensori di stelle, e sensori per la posizione relativa. Lo stesso discorso vale per l'aeroplano. ( $\Rightarrow$  aeroelasticità).

Per noi i sensori, in prima approssimazione, sono delle costanti tra quello che si vuole misurare e la misura stessa. In effetti, per la verifica si deve tener presente la dinamica del sensore, che è regolata da una certa funzione di trasferimento; anche se in generale questa può non essere critica, ovvero non porta ad instabilità, è però certo un degrado del comportamento del sistema di controllo in ambito di margine di fase. (Il margine di guadagno è assorbito dalla costante di trasferimento, che se il sensore è buono anch'essa è ben tarata, dunque tipicamente gli errori sono trascurabili).

$$\text{Sensore ideale: } \Rightarrow y_m = C_s x$$

$$\text{Sensore reale: } \Rightarrow y_m = C_s(\omega) x$$

## 2.2 Attuatori

Gli attuatori sono di due tipi:

- Discreti
- Continui

### 2.2.1 Attuatori Discreti

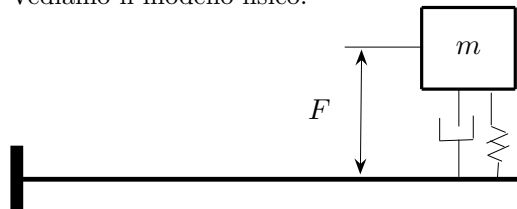
Tali attuatori, come generatori di forze, si devono differenziare in assoluti e relativi. Questo è lo stesso discorso dei sensori, non si può, in una struttura mobile come è l'aeroplano, dare delle forze assolute, ovvero relativamente alla terra. Dunque si deve tenere presente nel progetto del controllore che questo tipo di forze non è realizzabile, quindi non possiamo usarle come variabili di controllo. A volte si perde di vista questo concetto importante, magari presi dalla risoluzione del LQG.

Parliamo di dispositivi a reazione.

**Razzetti:** controllano attraverso forze inerziali di natura azione-reazione l'assetto; non sono usati per il controllo delle vibrazioni perchè i consumi sarebbero troppo elevati e la vita operativa, nello spazio, scenderebbe in modo significativo. Possono essere controllati [1] in **continuo** o [2] in **accesso-spenso**. La prima opzione è quella che sapremmo già modellare e in cui si deve tenere presente quanto la forza sia modulabile e dunque la banda passante del controllo. La seconda opzione invece è un concetto nuovo, in cui potremo pensare che se il razzetto è abbastanza più veloce di quello che si vuole controllare allora la progettazione in continua non è poi troppo sbagliata. Questo concetto sarà formalizzato quando si parlerà di implementazione digitale. (o *appunti da Dozio*). In questo caso va tenuto presente il tempo di accensione e spegnimento del razzetto,  $\tau$ , e deve essere più piccolo del tempo caratteristico più piccolo della struttura, altrimenti si introdurrebbe uno sfasamento della forza che porterebbe facilmente ad instabilità.

**Reazioni inerziali:** *rotazione:* sono le ruote di reazione o reaction wheels, queste funzionano generando una reazione contraria al movimento. Non possono essere usate nel caso di perturbazioni persistenti o a frequenza nulla perchè facilmente si arriverebbe alla saturazione e al limite tecnologico

del motore che le attua, pertanto in questi casi sono accoppiate a dei razzetti che desaturano il sistema. I razzetti non essendo obbligati a lavorare in continua hanno consumi ridotti. *Traslazione*: sono le masse di reazione o proof masses, che hanno gli stessi problemi delle ruote ed in più sono dotate di un piccolo richiamo elastico perchè devono essere ri-centrate. Dunque questi sistemi vanno bene per il controllo di vibrazioni ma non vanno bene per controlli a frequenza molto bassa, o al limite nulla, se non è presente desaturazione. Vediamo il modello fisico.



La forza inerziale sulla proof mass è  $m(\ddot{x}_T + \ddot{x}_R)$  dove si è divisa l'accelerazione di trascinamento da quella di reazione. Quella di trascinamento è parte della struttura e non da luogo al movimento relativo. Dunque per il solo movimento relativo, in frequenza

$$f(s) = -m s^2 X_R(s)$$

e si capisce che per  $s = 0$  non da nessuna forza e dunque non funziona; tra l'altro per  $s = 0$  ho due poli nell'origine e dunque l'accelerazione è costante, cioè il moto è uniformemente accelerato, ovvero lo spazio è proporzionale al quadrato del tempo. Facciamo la dinamica del movimento relativo, si badi solo del relativo e non della proof mass.

$$m\ddot{x}_R + c\dot{x}_R + kx_R = F$$

$F$  è la forza interna, cioè è il mio controllo. Dunque si ha

$$f(s) = -\frac{m s^2 F(s)}{s^2 m + s c + k}$$

che si vede bene avere un comportamento *passa-alto*. Infatti solo se  $s$  è abbastanza elevata, nel limite  $s \rightarrow \infty$ , nella pratica  $s > \sqrt{k/m}$ , allora la funzione di trasferimento si riduce ad una costante di trasferimento tra forza interna ed esterna. In questo ordine di idee i parametri di rigidità e smorzamento devono essere ben dimensionati per far sì che l'attuatore si comporti da ideale nella banda di interesse per il controllo.

A questo punto ci si può chiedere come generare la forza interna, un modo è l'eccitatore elettrodinamico o **shaker**. (vedi Dozio). Cioè la forza è realizzata con un motore in continua lineare, tale per cui

$$F = k_M i$$

così

$$f(s) = -\frac{m s^2 k_M I(s)}{s^2 m + s c + k}$$

e dunque per  $s$  sufficientemente grande  $f$  è proporzionale a  $i$ . Allora, come detto, sarà mio compito cercare di dimensionare la banda dell'attuatore in modo da renderlo ideale nella banda di controllo. Certamente in fase di verifica del progetto è necessario tenere presente un certo sfasamento che porta ad analizzare più in dettaglio come si genera la corrente. Ci sono due tipici meccanismi di generazione di corrente:

- Semplice generatore di corrente.
- Generatore di tensione.

Molto spesso ci troviamo nel secondo caso, cioè nel caso in cui siamo noi a dover costruire la corrente operando sulla grandezza tensione. Per far ciò è da tener presente la fdt del processo, che ha equazione dinamica (motore in continua):

$$\mathcal{L} \frac{di}{dt} + Ri = V - k_M \dot{x}_R$$

e pertanto fdt:

$$I(s) = \frac{V}{s\mathcal{L} + R} - \frac{s k_M}{s\mathcal{L} + R} X_R(s)$$

dove si riconosce la presenza di un termine dinamico aggiuntivo, il termine  $\mathcal{L} \frac{di}{dt}$ . In queste equazioni è la  $V$  la nostra variabile manipolabile. Quando il termine aggiuntivo, che non è altro se non una contro-tensione generata per induzione è trascurabile rispetto alle altre tensioni in gioco, allora possiamo senz'altro adottare un'approssimazione quasi-stazionaria dove  $\mathcal{L} \frac{di}{dt} \sim 0$  e quindi

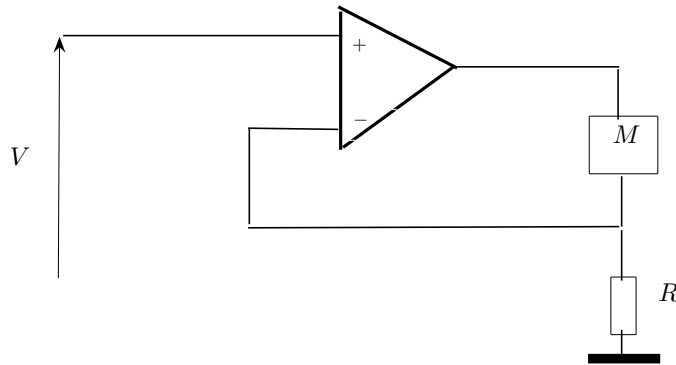
$$i = \frac{V - k_M \dot{x}_R}{R}$$

o anche

$$Ri + k_M \dot{x}_R = V$$

dove, data la corrente che si vuole generare e *misurata* la velocità relativa si può stabilire quale tensione deve essere applicata ai capi del motore elettrico. Anche in questo caso nel modello di verifica si dovrà tenere presente le non idealità.

Per il generatore di corrente si può implementare il seguente amplificatore operazionale (op-amp)



che è senza dubbio un amplificatore di potenza, in quanto deve fornire una certa potenza al sistema di controllo. Per le leggi ideali degli op-amp, non interessa la caratteristica del motore ma essendo supposta nulla la differenza di potenziale tra morsetto positivo e negativo, conta solo il bilancio al nodo prima della resistenza. Qui

$$i = \frac{V}{R}$$

Questo schema cancella il termine  $\mathcal{L} \frac{di}{dt}$  sempre. Ovvio che nella verifica bisogna tener presente che il motore da una certa impedenza di uscita e dunque potrebbe portare ad instabilità; generalmente questo conto non viene mai fatto perchè la banda del op-amp è nell'ordine del  $KHz$  e dunque basta prenderne uno buono per stare sicuri che il comportamento sarà ideale.

**Attuatori idraulici:**  $\Rightarrow$  Dinamica dei Sistemi.

**Ruote d'inerzia:** sono dispositivi costituiti da una ruota in movimento che ha un grande momento angolare. Tramite un comando in velocità si imprime una rotazione su un asse perpendicolare all'asse di rotazione e si genera una coppia di precessione. Tale coppia è perpendicolare all'asse di rotazione e al comando di velocità. Questo è l'effetto giroscopico. Anche in questo caso i servo-meccanismi andranno trattati come ideali o modellati a seconda della situazione. In genere le ruote d'inerzia per il controllo delle vibrazioni sono piccole e girano molto velocemente.

## 2.2.2 Attuatori Continui, i Materiali Piezoelettrici

I materiali piezoelettrici hanno una legge costitutiva che comporta una interazione elettro-strutturale; in particolare se si fa l'ipotesi di comportamento lineare del materiale si può scrivere che

$$\begin{cases} \underline{\varepsilon} = \underline{E}_{\varepsilon\sigma} \underline{\sigma} + \underline{E}_{\varepsilon e} \underline{e} & \text{Effetto Inverso, attuatori} \\ \underline{d} = \underline{E}_{d\sigma} \underline{\sigma} + \underline{E}_{de} \underline{e} & \text{Effetto Diretto, sensori} \end{cases}$$

dove  $d$  è il campo dielettrico ed  $e$  è il campo elettrico. Inoltre valgono le proprietà di simmetria, ovvero vale che

$$\underline{\underline{E}}_{d\sigma} = \underline{\underline{E}}_{\varepsilon e}^T$$

Inoltre la matrice  $\underline{\underline{E}}_{de}$  è la matrice delle costanti dielettriche del materiale, che hanno ordine di grandezza  $10^{-11}$  nel SI. In generale le matrici indicate non sono affatto piene, in quanto l'effetto piezoelettrico diretto o inverso non coinvolge tutte le direzioni, se sollecitato con un campo elettrico in una direzione, ma possiamo distinguere due effetti principali:

- L'effetto co-direzionale, effetto nella stessa direzione del campo elettrico.
- L'effetto trasversale, effetto nella direzione trasversale al campo elettrico.

Posso scrivere che

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = \underline{\underline{E}}_{\varepsilon\sigma}^{-1} \underline{\varepsilon} - \underline{\underline{E}}_{\varepsilon\sigma}^{-1} \underline{\underline{E}}_{\varepsilon e} \underline{e} \\ \underline{d} = \underline{\underline{E}}_{d\sigma} \left( \underline{\underline{E}}_{\varepsilon\sigma}^{-1} \underline{\varepsilon} - \underline{\underline{E}}_{\varepsilon\sigma}^{-1} \underline{\underline{E}}_{\varepsilon e} \underline{e} \right) + \underline{\underline{E}}_{de} \underline{e} \end{cases}$$

e dunque rinominando le matrici nel modo usuale

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = \underline{\underline{D}} \underline{\varepsilon} - \underline{\underline{E}} \underline{e} \\ \underline{d} = \underline{\underline{E}}^T \underline{\varepsilon} + \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{e} \end{cases}$$

La formulazione sopra scritta privilegia una visione agli sforzi, quella scritta all'inizio è invece una visione alle deformazioni. Le due chiaramente sono identiche. Prendiamo quella alla deformazioni per fare qualche considerazione. Sia la matrice  $\underline{d} = \underline{\underline{E}}_{\varepsilon e}$ ; questa è la matrice delle costanti piezoelettriche. Come fatto notare, essa non è piena, anzi in generale può venire espressa nella forma

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{32} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{24} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I materiali piezoelettrici si distinguono, nella pratica in due categorie: piezoelettrici ceramici e i polimerici; inoltre sempre più si fanno strada una classe di piezoelettrici artificiali che sono caratterizzati da una particolare direzione di polarizzazione.

Tipo	Coefficienti	Uso
P2T (Ceramici)	$d_{31} = d_{33}$ , $d_{15} = d_{24}$	Attuatori
PVDF (Polimerici)	$d_{15} = d_{24} = 0$	Sensori

**Esempio.** Si prenda un piezoelettrico libero nello spazio; ad esso si applichi un campo elettrico  $E_3$  diretto solo nella direzione 3; a questa direzione è associata quindi una polarità,  $p$ , diretta come 3.

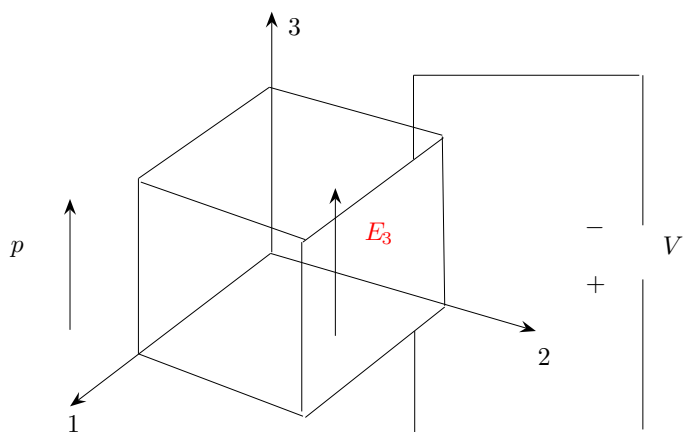
Per questo caso varrà che

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= d_{31} E_3, & d_{31} &< 0 \\ \varepsilon_{22} &= d_{32} E_3, & d_{32} &< 0 \\ \varepsilon_{33} &= d_{33} E_3, & d_{33} &> 0 \end{aligned}$$

Ovvero il piezoelettrico si allunga nella direzione 3 e si accorcia lungo le altre. Come si vede dal disegno seguente per generare il campo elettrico è stata applicata una tensione. Infatti è noto che

$$\underline{e} = \text{grad}(V)$$





Distinguiamo ora i piezoelettrici in base al loro modo di deformarsi, esistono i piezoelettrici

- Lineari, o Stack, nei quali è più importante l'effetto del termine  $d_{33}$ ; questi vengono usati di solito per la aste attive.
- Laminari/Piastre, o Laminar/Patch, in cui è preponderante  $d_{31}$ .

### STACK

Nel caso di piezoelettrico Stack, la conformazione è quella di figura a fianco, in cui si nota la differenza orientazione del campo elettrico di polarizzazione. Un tale tipo di piezoelettrico lavora solo a trazione. Se il numero dei dischi è  $n$  allora vale che l'allungamento è

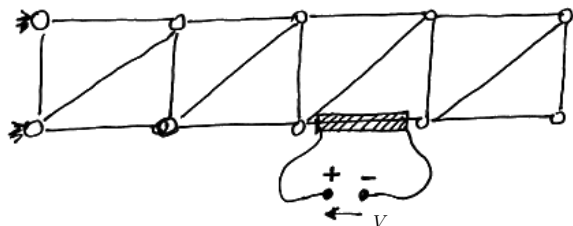
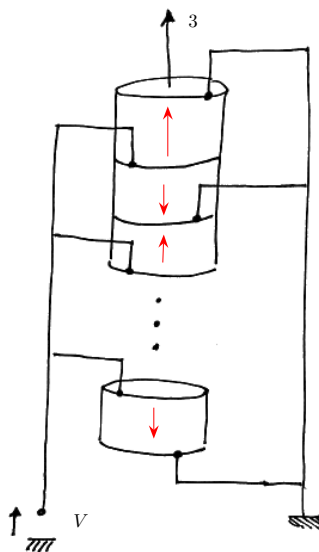
$$\Delta L = n d_{33} V$$

come si può dimostrare facilmente.

Un problema è che per sollecitazioni a frequenza elevata entra in gioco un comportamento isteretico che compromette l'ipotesi di linearità. Per togliere questo effetto si usano dei compensatori locali o si modella anche questo comportamento.

Un altro problema è che si lavora solo a trazione e dunque se si vogliono esercitare sforzi a compressione bisogna usare un precarico.

Una applicazione dei piezoelettrici Stack sono le aste attive sulle quali comandando in tensione si riesce ad ottenere un controllo della deformata dell'asta.

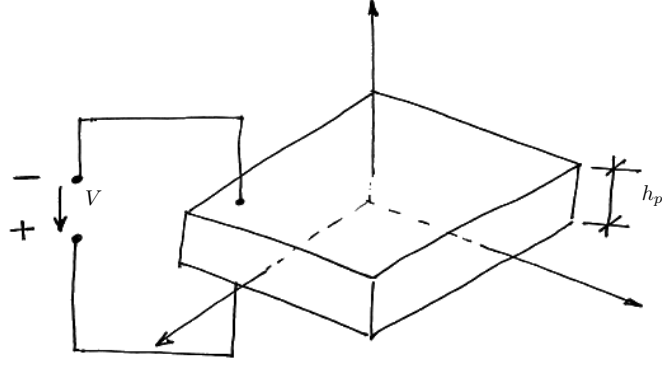


### PATCH

Per questo caso varrà che

$$\varepsilon_{11} = d_{31} \frac{V}{h_p}$$

$$\varepsilon_{22} = d_{32} \frac{V}{h_p}$$



Ritorniamo ora al nostro sistema

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} - \underline{E} e \\ \underline{d} = \underline{E}^T \underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon} e \end{cases}$$

e poniamo che, come detto

$$\begin{cases} \underline{e} = \text{grad}(V) \\ \underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{s} \end{cases}$$

perciò

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} - \underline{E} \text{grad}(V) \\ \underline{d} = \underline{E}^T \underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon} \text{grad}(V) \end{cases}$$

Passiamo ora al **PLV** del problema termo-elettro-elastico; la prima equazione porta ad un cambiamento della matrice di rigidezza della formulazione tradizionale; in questo contesto analizzeremo solo tale variazione. In formulazione debole si scrive

$$\int_{\mathcal{V}} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{D} \underline{\varepsilon} d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{E} \text{grad}(V) d\mathcal{V}$$

mentre la seconda, ricordando che il lavoro è la carica per la differenza di potenziale e ricordando la prima equazione di Maxwell che pone

$$\text{div}(\underline{d}) = \varrho_L$$

con  $\varrho_L$  carica libera, allora

$$\int_{\mathcal{V}} \delta V^T \text{div}(\underline{d}) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \delta V^T \varrho_L d\mathcal{V}$$

ed integrando per parti si ottiene

$$- \int_{\mathcal{V}} \delta \text{grad } V^T \underline{d} d\mathcal{V} + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{V}} \delta V^T \underline{d} \cdot \underline{n} d\mathcal{S}}_{\text{Condizione Naturale}} = \int_{\mathcal{V}} \delta V^T \varrho_L d\mathcal{V}$$

La condizione naturale altro non è che la carica superficiale ( $\varrho_S$ ), dunque può essere portata a destra dell'uguale

$$- \int_{\mathcal{V}} \delta \text{grad } V^T \underline{d} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \delta V^T \varrho^* d\mathcal{V}$$

a questo punto si può sostituire a  $\underline{d}$  la sua espressione, ottenendo:

$$- \int_{\mathcal{V}} \delta \text{grad } V^T (\underline{E}^T \underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon} \text{grad}(V)) \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \delta V^T \varrho^* \, d\mathcal{V}$$

che scrivo come

$$- \int_{\mathcal{V}} \delta \text{grad } V^T \underline{E}^T \underline{B} \, d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \delta \text{grad } V^T \underline{\varepsilon} \text{grad}(V) \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \delta V^T \varrho^* \, d\mathcal{V}$$

ponendo  $\varrho_L = 0$  allora

$$\int_{\mathcal{V}} \delta \text{grad } V^T \underline{E}^T \underline{B} \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \delta \text{grad } V^T \underline{\varepsilon} \text{grad}(V) \, d\mathcal{V} = \int_{\partial\mathcal{V}} \delta V^T \varrho_S \, d\mathcal{S}$$

a questo punto sviluppo  $V$  come

$$V(x, t) = \underline{N}_V(x) \underline{q}_V(t)$$

e dunque scrivo che

$$\text{grad } V = \text{grad} \{ \underline{N}_V \} \underline{q}_V$$

con questa posizione le due equazioni scritte in forma debole divengono

$$\begin{aligned} \delta \underline{s}^T \left[ \int_{\mathcal{V}} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, d\mathcal{V} \right] \underline{s} - \delta \underline{s}^T \left[ \int_{\mathcal{V}} \underline{B}^T \underline{E} \text{grad} \{ \underline{N}_V \} \, d\mathcal{V} \right] \underline{q}_V \\ \delta \underline{q}_V^T \left[ \int_{\mathcal{V}} \text{grad} \{ \underline{N}_V \}^T \underline{E}^T \underline{B} \, d\mathcal{V} \right] \underline{s} + \delta \underline{q}_V^T \left[ \int_{\mathcal{V}} \text{grad} \{ \underline{N}_V \}^T \underline{\varepsilon} \text{grad} \{ \underline{N}_V \} \, d\mathcal{V} \right] \underline{q}_V = \delta \underline{q}_V^T \left[ \int_{\partial\mathcal{V}} \{ \underline{N}_V \}^T \varrho_S \, d\mathcal{S} \right] \end{aligned}$$

dove la prima è il termine di variazione della matrice di rigidità. Posso allora riscrivere il sistema di equazioni per l'arbitrarietà degli spostamenti virtuali come

$$\begin{cases} \underline{M} \ddot{\underline{s}} + \underline{K} \underline{s} + \underline{K}_{sV} \underline{q}_V = \underline{F} & \text{Controllo} \\ \underline{S}_{ds} \underline{s} + \underline{C}_e \underline{q}_V = \underline{\varrho}_{ext} & \text{Uscita} \end{cases}$$

dove  $\underline{S}_{ds}$  è la matrice di carica strutturale e  $\underline{C}_e$  è la matrice di capacità.

**Osservazione.** Le equazioni di Maxwell si scrivono come:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{d} = \varrho_L \\ \nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \end{cases}$$

dove si è usata una notazione più vicina a quella usata dai fisici; dunque se il potenziale dipende dal tempo e varia con esso ci sarà un campo magnetico ad esso associato e dunque un accoppiamento elettro-magnetico. Di questi effetti noi non ci occupiamo perchè facciamo della quasi-statica cioè residualizziamo i termini di onde elettromagnetiche che dovrebbero irradiare.

Ora analizziamo meglio il termine di accoppiamento

$$\int_{\mathcal{V}} \text{grad} \{ \underline{N}_V \}^T \underline{E}^T \underline{B} \, d\mathcal{V}$$

e passiamolo in termini modali  $\underline{s} = \underline{U} \underline{q}$ ; si noti che il potenziale consta di pochi termini di sviluppo e dunque può benissimo non essere condensato in maniera modale.

$$\int_{\mathcal{V}} \text{grad} \{ \underline{N}_V \}^T \underline{E}^T \underline{B} d\mathcal{V} \underline{U}$$

e dunque risulta chiaro come l'integrale rappresenta come il piezoelettrico influisce sui modi; dunque posso progettare in modo da attivare un modo piuttosto che un altro modo e in questo modo posso evitare lo spill-over. Cioè sto di fatto progettando la matrice di uscita  $C$  come un filtro spaziale.

Facciamo ora qualche esempio su applicazioni dei piezoelettrici.

### 2.2.3 Asta con piezoelettrico

Prendiamo una trave con due attuatori piezoelettrici posti uno sopra ed uno sotto che non coprono l'intera trave. Proponiamoci di scrivere *l'equazione di moto*. Facciamoci forza allora sul PLV, cioè scriviamo che  $\delta \mathcal{L}_D = \delta \mathcal{L}_e$ <sup>2</sup>:

$$\int_{\mathcal{V}} \delta \varepsilon^T \sigma d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}} \delta v^T \rho \ddot{v} d\mathcal{V}$$

Ora caratterizzo il volume tra trave,  $T$ , e piezoelettrico,  $P$

$$\int_{\mathcal{V}_T} \delta \varepsilon_T^T \sigma_T d\mathcal{V}_T + 2 \int_{\mathcal{V}_P} \delta \varepsilon_P^T \sigma_P d\mathcal{V}_P = - \int_{\mathcal{V}_T} \delta v^T \rho_T \ddot{v} d\mathcal{V}_T - 2 \int_{\mathcal{V}_P} \delta v^T \rho_P \ddot{v} d\mathcal{V}_P$$

Riconosco facilmente che il primo termine posso scriverlo come

$$\int_{\mathcal{V}_T} \delta \varepsilon_T^T \sigma_T d\mathcal{V}_T = \int_{\mathcal{V}_T} \delta v''^T \mathbf{E} J v'' d\mathcal{V}_T$$

Mi concentro allora sul secondo termine

$$\int_{\mathcal{V}_P} \delta \varepsilon_P^T \sigma_P d\mathcal{V}_P = \int_{x_1}^{x_2} \int_{\mathcal{A}_P} \delta \varepsilon_{xP}^T \sigma_{xP} d\mathcal{A}_P dx$$

Per andare avanti bisogna ora introdurre la legge costitutiva del materiale piezoelettrico, che come detto è

$$\sigma_{xP} = \mathbf{E}_P \varepsilon_{xP} - d_{31} \frac{V}{h_P} \mathbf{E}_P$$

Con  $\mathbf{E}_P$  rigidità del piezoelettrico. Sostituendo

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{\mathcal{A}_P} \delta \varepsilon_{xP}^T \sigma_{xP} d\mathcal{A}_P dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{\mathcal{A}_P} \delta \varepsilon_{xP}^T \mathbf{E}_P \varepsilon_{xP} d\mathcal{A}_P dx - \int_{x_1}^{x_2} \int_{\mathcal{A}_P} \delta \varepsilon_{xP}^T d_{31} \frac{V}{h_P} \mathbf{E}_P d\mathcal{A}_P dx$$

Ricordando che è  $\varepsilon_x = -y v''$

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{\mathcal{A}_P} \delta v''^T \mathbf{E}_P y^2 v'' d\mathcal{A}_P dx - \int_{x_1}^{x_2} \int_{\mathcal{A}_P} \delta v''^T d_{31} \frac{V}{h_P} \mathbf{E}_P d\mathcal{A}_P dx$$

Facendo le dovute ipotesi posso scrivere allora che

$$\underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \delta v''^T \mathbf{E}_P J_P v'' dx}_{\text{Rigidità}} - \underbrace{\mathcal{A}_P d_{31} \frac{V}{h_P} \mathbf{E}_P \int_{x_1}^{x_2} \delta v''^T dx}_{\text{Attuazione}}$$

Si può mostrare allora che, integrando l'ultimo termine, l'attuazione è schematizzabile come due momenti applicati agli estremi della piastra, infatti

$$\mathcal{A}_P d_{31} \frac{V}{h_P} \mathbf{E}_P \int_{x_1}^{x_2} \delta v''^T dx = C [\delta v'(x_2) - \delta v'(x_1)]$$

<sup>2</sup>Per semplicità si sottintende la notazione di vettore

### 2.2.4 Piastra con piezoelettrico

Allo stesso modo si può dimostrare che un attuatore piezoelettrico applicato ad una piastra da una linea di momento lungo il contorno della stessa piastra. Per farlo basta scrivere il PLV del solo termine di attuazione

$$\int_{V_P} \delta \varepsilon_P^T \underline{C} dV_P$$

dove si è supposto costante e pari a  $\underline{C}$  il termine

$$\underline{E} grad V$$

allora per le leggi costitutive delle piastre si può scrivere che

$$\int_{V_P} \delta \varepsilon_P^T \underline{C} dV_P = \int_{A_P} \delta \tilde{\varepsilon}_P^T \int_t z^2 \underline{C} dz dA_P$$

integrato sullo spessore della piastra di piezoelettrico. E dunque ricordando che

$$\tilde{\varepsilon}^T = -\{w_{xx} \ w_{yy} \ 2w_{xy}\}$$

$$\begin{aligned} \int_{A_P} \delta \tilde{\varepsilon}_P^T \int_t z^2 \underline{C} dz dA_P &= \int_x \int_y \delta \{w_{xx} \ w_{yy} \ 2w_{xy}\} \tilde{C} dy dx = \\ &C_1 \int_y \delta w_x(x_1, y) dy + C_2 \int_y \delta w_x(x_2, y) dy + C_3 \int_x \delta w_y(x, y_1) dx + C_4 \int_x \delta w_y(x, y_2) dx + C_5 \delta w(P) \end{aligned}$$

ovvero le quattro linee di momento e lo spostamento virtuale dei punti  $P$  che descrivono i vertici della piastra; questi ultimi sono condizioni essenziali per il piezoelettrico.

### 2.2.5 Sensore triangolare piezoelettrico

Usando la stessa tecnica si può mostrare come progettare la forma di un sensore piezoelettrico al fine di valutare proprio gli spostamenti in alcuni punti scelti, o anche gli stessi modi. Per fare ciò si farà solo un esempio; per prima cosa si riscrive il termine della trave con piezoelettrico

$$- \int_{x_1}^{x_2} \int_{A_P} \delta v''^T d_{31} \frac{V}{h_P} E_P dA_P dx = C \int_{x_1}^{x_2} \delta v'' b(x) dx$$

dove  $b(x)$  rappresenta la larghezza, lo spessore è già entrato nella costante  $C$  e il trasposto non serve perchè  $v$  è scalare. Allora integrando per parti

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta v'' b(x) dx = \delta v' b]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta v' b' dx$$

che per  $b' = 0$  porge ancora lo stesso risultato a cui eravamo arrivati, ovvero il piezoelettrico da due coppie applicate agli estremi della barretta. Per  $b'' = 0$  invece il piezoelettrico da anche delle forze, infatti integrando per parti

$$\delta v' b]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta v' b' dx = \delta v' b]_{x_1}^{x_2} - \delta v b']_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \delta v b'' dx$$

ed eliminando il termine nullo, si ottengono i termini di coppie e forze concentrate.

Nel caso di un sensore piezoelettrico triangolare, si ha che

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta v'' b(x) dx = \delta v' b]_{x_1}^{x_2} - \delta v b']_{x_1}^{x_2}$$

e se lo si pensa attaccato ad una trave incastrata allora essendo  $\delta v(x_1) = \delta v'(x_1) = 0$  perchè all'incastro e  $b(x_2) = 0$  perchè triangolare, si ha

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta v'' b(x) dx = -\delta v(x_2) b'(x_2)$$

ovvero il piezoelettrico misura lo spostamento dell'estremo della trave.

## 2.3 Controllo massivo

I modi, come fatto notare, hanno un contenuto in frequenza sia spaziale che temporale; questo si vede bene nel caso di una trave con carico concentrato, dove non è tanto importante la frequenza temporale, ma quella spaziale per un corretto recupero degli sforzi. Quello che si è detto ha portato a costruire delle tecniche per ridurre effetti di spill-over per attuatori distribuiti, ad esempio il frequency shaping. Tali tipi di attuatori però possono essere anche costruiti utilizzando un elevato numero di sensori/attuatori discreti; operando in tal guisa si può cercare di compensare lo spill-over progettando la forma del controllo. Per comprendere meglio il procedimento si parta da un certo contenuto in frequenza della risposta del modello fisico; siano  $q$  i modi ordinati per frequenza, e sia  $q = \{q_L, q_M, q_V\}^T$ , una partizione dell'insieme dei modi organizzata in Lenti, Medi, Veloci. Una generica risposta spaziale, anch'essa partizionata in tal maniera, può venir scritta come  $y = \{y_L, y_M, y_V\}^T$  e posso dire che

$$\begin{aligned} y_L &= C_{LL}q_L + C_{LM}q_M + C_{LV}q_V \\ y_M &= C_{ML}q_L + C_{MM}q_M + C_{MV}q_V \\ y_V &= C_{VL}q_L + C_{VM}q_M + C_{VV}q_V \end{aligned}$$

cioè ho di fatto posto tanti sensori sulla struttura e li ho partizionati in modo da dividerli a seconda della risposta in frequenza. Allora potrò utilizzare la prima equazione di misura per implementare il controllo, mentre la seconda equazione diventerà un'equazione di *filtraggio*. Inoltre non userò affatto  $y_V$ , ovvero non metterò dei sensori atti a misurare tale dinamica. A questo punto, la misura di controllo, cioè l'effettiva misura della risposta del sistema dinamico,  $y_C$ , viene costruita utilizzando una opportuna combinazione lineare delle due equazioni di misura in modo che sia

$$y_C = y_L + T y_M$$

con  $T$  che deve soddisfare alla

$$T = -C_{LM} C_{MM}^{-1}$$

ed in questo modo sto di fatto eliminando nell'uscita  $y_C$  i modi  $q_M$  in modo da avere una corretta separazione in frequenza tra modi lenti e modi veloci, così da non avere più disturbi significativi. Quindi sono riuscito a costruire un filtro spaziale che elimina i modi intermedi. L'uscita sarà dunque

$$\begin{aligned} y_C = y_L + T y_M &= C_{LL}q_L + C_{LM}q_M + C_{LV}q_V + T(C_{ML}q_L + C_{MM}q_M + C_{MV}q_V) = \\ &= (C_{LL} - C_{LM} C_{MM}^{-1} C_{ML})q_L + (C_{LM} - C_{LM} C_{MM}^{-1} C_{MM})q_M + (C_{LV} - C_{LM} C_{MM}^{-1} C_{MV})q_V = \\ &= (C_{LL} - C_{LM} C_{MM}^{-1} C_{ML})q_L + (C_{LV} - C_{LM} C_{MM}^{-1} C_{MV})q_V \end{aligned}$$

ovvero come detto

$$y_C = C_1 q_L + C_2 q_V$$

Quando farò il modello i  $q_V$  non entreranno nel progetto perchè ben separati. Questo è una specie di pre-compensatore spaziale, cioè è come se si progettasse la forma del sensore continuo attraverso l'utilizzo di una abbondanza di sensori discreti. Si ricordi che la prova è comunque necessaria per verificare la bontà del controllo, inoltre devo stare attento a far sì che la matrice  $C_1$  non perda di osservabilità.

Lo stesso discorso è possibile farlo per gli attuatori, cioè è possibile mettere attuatori di controllo ed attuatori che limitano lo spill-over; o meglio è possibile mettere tanti attuatori che abbiano funzioni differenti. Questo di fatto non viene mai fatto per il costo elevato degli attuatori rispetto ai sensori.

**Osservazione:** si può proseguire su questa strada ricercando combinazioni lineari che ciano opportune sotto altri punti di vista, ad esempio pesate su determinate funzioni di forma. L'idea è quella di arrivare a misurare direttamente le ampiezze modali, in modo da controllare i modi. ( $\Rightarrow$  Meirovitch)

## 2.4 Implementazione digitale

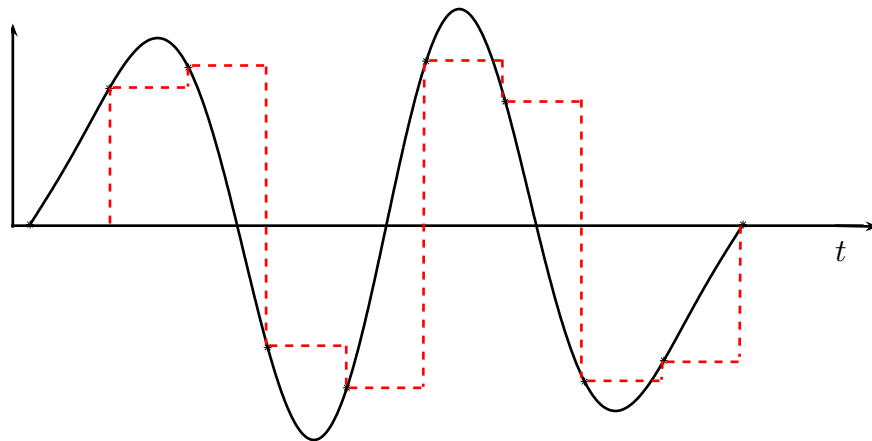
L'ambiente di implementazione analogica consentiva, previo l'utilizzo di op-amp, la vasta possibilità di implementazione di svariati circuiti. Questi però dovevano essere semplici e dunque di ordine basso. Di fatto questo tipo di implementazione è ancora la strada seguita nel caso di circuiti semplici e quindi di facile realizzazione. Una scelta di questo tipo è una scelta a priori, nel senso che il progetto del sistema è fatto prima dell'effettivo utilizzo e non può essere cambiato durante. Ricordiamo brevemente che un controllo analogico è basato su op-amp, i quali possono essere divisi in

- op-amp di elaborazione, se la potenza in gioco è qualche  $W$ ;
- op-amp di potenza, se la potenza in gioco è qualche  $100W$ .

Abbandonata l'implementazione analogica ci si butta in quella digitale, in cui si può ritrovare ogni cosa che è stata detta in precedenza su quella analogica. Inoltre si può fare un parallelo tra la tecnica di integrazione delle equazioni differenziali e questo tipo di implementazione. Difatti, l'implementazione digitale integra nel tempo le equazioni differenziali che regolano la dinamica del sistema; cambiano un poco i nomi. Quello che si chiamava metodo di Cranck-Nicholson ora si chiamerà metodo di Tustin. Ma l'idea è esattamente la medesima. In genere per una implementazione digitale si preferisce utilizzare un metodo A-stabile, pur non essendo necessario perchè generalmente i  $\Delta t$  richiesti ad una corretta implementazione del controllo sono talmente ridotti da consentire la stabilità anche per metodi non A-stabili. Abbiamo tipicamente due possibilità: differenze finite all'indietro o Tustin. In effetti si può usare anche differenze finite in avanti, ma non è A-stabile, o il metodo a due passi già proposto nella parte di integrazione delle equazioni differenziali, anche se normalmente non viene utilizzato.

La prima cosa da tenere in conto nel momento in cui si passa da analogico a digitale è il *tempo di campionamento*  $\Delta t$ . Questo è senza dubbio determinato, in primo luogo, dal soddisfacimento del teorema di Shannon, ma questa condizione è necessaria ma non sufficiente per una scelta corretta. Infatti tipicamente i tempi che sono accettabili per l'integrazione delle equazioni differenziali della dinamica del sistema sono minori di quelli imposti di Shannon. Per tale ragione si preferisce scendere ad un  $\Delta t$  anche 20 volte meno di quello di Shannon, cioè si prende  $\Delta t \sim \Delta t_{Sh}/5$ . Una volta stabilito il tempo di campionamento bisogna inserire nella catena di trasduzione dei filtri anti-aliasing per eliminare le frequenze più elevate ed evitare di conseguenza problemi di aliasing. Alcune volte si sceglie di non inserire tali filtri perchè consapevoli che la catena di misura stessa, i sensori, hanno buone proprietà filtranti; questo è un caso molto particolare. Qualora, nella maggior parte delle situazioni, si scelga per un filtro, bisognerà senz'altro tener presente l'introduzione di uno sfasamento,  $\Delta\Phi$ , che andrà modellato o solo nella verifica o direttamente nel modello di controllo se  $\Delta\Phi$  è maggiore di una certa soglia.

Bisogna ora fare delle considerazioni su quanto si vuole che il controllo sia preciso. Nel momento in cui non basta più che l'integrazione delle equazioni differenziali sia accettabile ma si richiede che il sistema abbia una buona risposta ai comandi o che riesca a eliminare i disturbi, allora si sta di fatto chiedendo che il  $\Delta t$  sia ancora più piccolo. Questo è legato al fenomeno che va sotto il nome di *inter sample rippling*, di cui si vede un esempio in figura.



Pertanto l'implementazione digitale è un compromesso tra il costo del processore e del tempo di campionamento che deve essere scelto sulla base di

- Banda del sistema di controllo;
- Buon inseguimento comandi;

- Buona reiezione dei disturbi.

Da questi parametri si arriva a porre  $\Delta t \sim \Delta t_{Sh}/20$ ; quindi in generale è  $\Delta t \sim \Delta t_{Sh}/n$  con  $n$  tra 5 e  $20^3$ .

Il passo successivo è la simulazione del controllo che si vuole implementare. Questa simulazione deve essere fatta in modo ibrido per tener conto della diversità della parte analogica dalla parte digitale. Se non riesco a realizzare il modello ibrido devo modellare i ritardi tramite una opportuna funzione di trasferimento del tipo  $e^{-s\Delta\tau}$ . In questo modo tengo presente che per passare dall'analogico al digitale pedo del tempo. Se questo è fatto facilmente in digitale, simulando in analogico ho bisogno di un filtro che almeno nella banda di interesse abbia una tale funzione di trasferimento. Non è possibile infatti costruire un filtro che è solo un puro sfasatore. Per determinare la forma del filtro si ricorre alle formule di Padé. Queste permettono la determinazione della fdt di un filtro analogico che in una banda scelta si comporti come un puro sfasatore.

### 2.4.1 Tipologie delle schede di acquisizione

Esistono varie tipologie di schede di acquisizione dati che consentono di ottenere una vasta scelta di implementazione. Tre sono le più importanti:

- A S&H e A/D multipli.
- A S&H e A/D singoli.
- A S&H multipli e A/D singolo.

#### S&H e A/D multipli

Questa è la soluzione più costosa. E' costituita da un S&H e un A/D per ogni canale di acquisizione. Consente quindi un tempo di acquisizione minimo e quindi una frequenza di campionamento più elevata. Per essa vale:

$$t_{acq} = t_{S\&H} + t_{AD}$$

In questo caso, come in tutti i casi, deve essere presente un filtro anti-aliasing *per ogni canale* perchè la

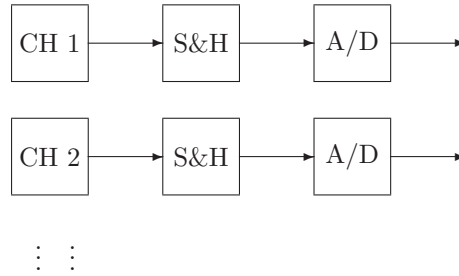


Figura 2.1: S&H e A/D multipli

banda è a priori differente. Inoltre in questo caso specifico si può fare a meno del S&H se il convertitore A/D è sufficientemente veloce. Tipicamente però questa scelta è troppo costosa per via del convertitore e si opta per usare un A/D più lento con i S&H.

#### S&H e A/D singoli

Questa è la soluzione meno costosa. E' costituita da un multiplexer che collega ogni canale ad un unico S&H e sequenzialmente ad un unico A/D. Ha un tempo di acquisizione elevato, e quindi una frequenza di campionamento più bassa. Per essa vale:

$$t_{acq} = n(t_{MUX} + t_{S\&H} + t_{AD})$$

---

<sup>3</sup>Questi numeri sono del tutto indicativi, alcuni dicono tra 4 e 40.



Dove  $n$  è il numero dei canali.

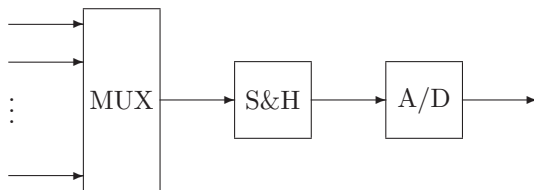


Figura 2.2: S&H e A/D singoli

In questo tipo di schede è importante tenere presente che l'intervallo tra il primo canale e quello di mezzo può essere elevato e quindi si cerca di mettere vicini i canali che non devono avere una grande differenza di fase, quello che si introduce è di fatto un rumore di misura. Se i canali da usare sono pochi, questa è la soluzione migliore.

### S&H multipli e A/D singolo

Questa è la soluzione intermedia fra le due. E' costituita da un S&H per ogni canale collegato ad un multiplexer che porta ad un unico A/D. Per essa vale:

$$t_{acq} = t_{S\&H} + n(t_{MUX} + t_{AD})$$

Dove  $n$  è il numero dei canali.

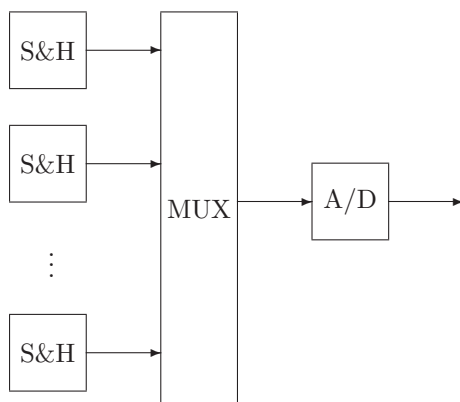


Figura 2.3: S&H multipli e A/D singolo

Si osserva che per ogni tipo di scheda di acquisizione sono possibili due modalità differenti:

- Modalità differenziale: servono due canali per ogni ingresso perché viene rilevata la differenza tra i due segnali.
- Modalità single ended: ogni canale dà informazione.

Si capisce quindi che se una scheda è, per esempio a 32 canali, in modalità differenziale gli ingressi saranno solo 16.

### 2.4.2 Digitalizzazione del compensatore

Ad esso siamo quindi arrivati nel computer, che ora deve digitalizzare il compensatore. Ho tipicamente due modi

1. Digitalizzo  $u = -G(sI - A + LC + BG)^{-1}Cy$  con la trasformata di Tustin (*appunti di Casella*)
2. Integro numericamente il sistema lineare  $\dot{x}_o = (A - LC - BG)x_o + Ly$  con  $u = Gx_o$ .

Volendo si può integrare numericamente anche la formulazione esatta

$$x(t) = \exp(At)x_o + \int_0^t \exp(A(t-\tau))Bu(\tau)d\tau$$

Manca: Intelligenza di programmazione, wind-up.