

## 4. Bilanci

In questo capitolo vengono introdotti i bilanci di alcune quantità meccaniche per un mezzo continuo. I bilanci in forma integrale permettono di descrivere l'evoluzione complessiva (integrale) di un sistema e vengono ricavati partendo da alcuni principi fondamentali della meccanica classica: la conservazione della massa, l'equazioni cardinali della dinamica, il primo principio della termodinamica o bilancio dell'energia. Vengono scritti prima per un volume materiale e poi per volumi di controllo o volumi in moto generico, utilizzando il teorema del trasporto di Reynolds.

Dai bilanci in forma integrale, sotto ipotesi di sufficiente regolarità dei campi, vengono poi ricavati i bilanci in forma differenziale, che permettono di descrivere l'evoluzione locale (puntuale) di un sistema. La forma lagrangiana dei bilanci di massa, di quantità di moto e della vorticità verrà utilizzata per meglio apprezzare il significato del vincolo di incomprimibilità, il ruolo della pressione (e degli sforzi in generale) nella dinamica di un fluido e intuire l'influenza del campo di velocità sul campo di vorticità.

Successivamente, dai bilanci integrali vengono ricavate le relazioni di salto delle quantità meccaniche. Queste relazioni possono essere utilizzate per trovare determinare lo stato di un sistema formato da due sotto-sistemi, all'interno dei quali i campi sono regolari, ma che sono separati da una frontiera, attraverso la quale i campi non sono regolari: alcuni esempi di queste sono le superfici "di scorrimento" in fluidi non viscosi, attraverso le quali è discontinua la componente tangenziale della velocità, o le onde d'urto che possono formarsi in correnti comprimibili di fluidi non viscosi.

Infine, viene fornita una breve introduzione agli esercizi sui bilanci integrali, che costituisce una prima linea guida al loro svolgimento.

### 4.1 Bilanci in forma integrale

Vengono ricavati i bilanci integrali per un volume materiale  $V(t)$  partendo dai principi fondamentali della meccanica classica. Successivamente si ricavano i bilanci per un volume in moto arbitrario  $v(t)$  e, come caso particolare, volumi di controllo  $V_c$ .

#### 4.1.1 Bilancio di massa

La massa di un volume materiale è uguale all'integrale sul volume della densità  $\rho$ . Per il **principio di conservazione della massa**, la massa di un sistema chiuso (che non ha scambi di materia con l'esterno), come ad esempio un volume materiale  $V(t)$ , rimane costante e quindi la sua derivata nel tempo deve essere uguale a zero,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho = 0 . \quad (4.1)$$

#### 4.1.2 Bilancio della quantità di moto

La quantità di moto di un volume materiale è uguale all'integrale sul volume della quantità di moto per unità di volume  $\rho \mathbf{u}$ , dove  $\mathbf{u}$  è la velocità delle particelle materiali. Per la **prima equazione cardinale della dinamica**, la derivata nel tempo della quantità di moto di un sistema è uguale alla risultante delle forze esterne agenti sul sistema,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} = \int_{V(t)} \mathbf{f} + \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n , \quad (4.2)$$

dove  $\int_{V(t)} \mathbf{f}$  rappresenta la risultante delle forze esterne di volume e  $\oint_{S(t)} \mathbf{t}_n$  la risultante delle forze esterne di superficie, avendo indicato con  $\mathbf{f}$  il campo di forze per unità di volume e  $\mathbf{t}_n$  il vettore sforzo agente sulla superficie esterna  $S(t)$  del volume  $V(t)$ . Il teorema di Cauchy nella meccanica del continuo, permette di esprimere il vettore sforzo  $\mathbf{t}_n$  in funzione del tensore degli sforzi  $\mathbb{T}$  e la normale alla superficie  $\hat{\mathbf{n}}$ , come  $\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T}$ .

#### 4.1.3 Bilancio del momento quantità di moto

Il momento della quantità di moto di un volume materiale è uguale all'integrale sul volume del momento della quantità di moto per unità di volume  $\rho \mathbf{r} \times \mathbf{u}$ , dove  $\mathbf{r}$  è il vettore che congiunge il polo con i punti del volume materiale. Per la **seconda equazione cardinale della dinamica**, la derivata nel tempo del momento della quantità di moto di un sistema, rispetto a un polo fisso, è uguale alla risultante momenti esterni sul sistema,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} = \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \oint_{S(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n , \quad (4.3)$$

nell'ipotesi che non ci siano momenti esterni per unità di volume e che il materiale non sia polare (due elementi di materiale adiacenti non si scambiano momenti ma solo forze).

#### 4.1.4 Bilancio dell'energia totale

L'energia totale di un volume materiale è uguale all'integrale sul volume della sua energia interna per unità di volume  $\rho e$  e della sua energia cinetica per unità di volume  $\rho |\mathbf{u}|^2/2$ . Combinando il **primo principio della termodinamica** (che riguarda solo sistemi in equilibrio) con il **teorema dell'energia cinetica** (che non include il contributo di energia interna), la derivata nel tempo dell'energia totale del sistema di un sistema è uguale alla differenza tra la potenza delle forze agenti sul sistema e i flussi di calore uscenti da esso,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e^t = \int_{V(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{S(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} , \quad (4.4)$$

avendo indicato con  $\mathbf{q}$  il flusso di calore uscente dal volume materiale  $V(t)$ . È stata fatta l'ipotesi che non ci siano fonti di calore per unità di massa  $r$ , che verrebbero rappresentate da un termine  $\int_{V(t)} \rho r$  a destra dell'uguale.

#### 4.1.5 Bilanci integrali per volumi in moto arbitrario

Utilizzando il teorema del trasporto di Reynolds, è possibile esprimere la derivata nel tempo dell'integrale di un campo  $f$  su un volume materiale  $V(t)$  come somma della derivata nel tempo dell'integrale dello stesso campo  $f$  su un volume arbitrario  $v(t)$  e al flusso della quantità  $f$  attraverso la frontiera  $s(t) = \partial v(t)$  di  $v(t)$ , dovuto alla velocità relativa  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  tra le particelle materiali e la superficie  $s(t)$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f = \frac{d}{dt} \int_{v(t) \equiv V(t)} f + \oint_{s(t) \equiv S(t)} f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} . \quad (4.5)$$

I bilanci integrali riferiti a un volume arbitrario  $v(t)$ , la cui superficie  $s(t)$  si muove con velocità  $\mathbf{v}$ , risultano

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho + \oint_{s(t)} \rho(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{u} + \oint_{s(t)} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{f} + \oint_{s(t)} \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} + \oint_{s(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \oint_{s(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t + \oint_{s(t)} \rho e^t(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{s(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} . \end{cases} \quad (4.6)$$

#### 4.1.6 Bilanci integrali per volumi di controllo fissi

Come caso particolare dei bilanci integrali riferiti a un volume arbitrario  $v(t)$ , i bilanci integrali riferiti a un volume di controllo fisso  $V_c$  risultano

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho + \oint_{S_c} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \mathbf{u} + \oint_{S_c} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V_c} \mathbf{f} + \oint_{S_c} \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} + \oint_{S_c} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V_c} \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \oint_{S_c} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho e^t + \oint_{S_c} \rho e^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V_c} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{S_c} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{S_c} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} . \end{cases} \quad (4.7)$$

## 4.2 Bilanci in forma differenziale

Sotto le ipotesi di sufficiente regolarità dei campi che compaiono negli integrali di superficie, è possibile trasformare gli integrali di superficie in integrali di volume, applicando il teorema della divergenza o il lemma del teorema di Green

$$\oint_S f n_i = \int_V f_{/i} , \quad (4.8)$$

avendo indicato con  $f_{/i}$  la derivata parziale rispetto alla coordinata cartesiana  $x_i$  e con  $n_i$  la proiezione lungo  $x_i$  della normale uscente dalla superficie  $S = \partial V$ . Una volta scritti tutti

i termini come integrali di volume, sullo stesso volume  $V$ , è possibile sfruttare l'arbitrarietà del volume  $V$  per ricavare i bilanci in forma differenziale. In questa sezione, si partirà dai bilanci in forma integrale scritti per un volume di controllo fisso  $V = V_c$ , per il quale vale

$$\frac{d}{dt} \int_V f = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} , \quad (4.9)$$

secondo il teorema del trasporto di Reynolds.

#### 4.2.1 Bilancio di massa

Usando il teorema del trasporto di Reynolds per volumi di controllo fissi e applicando il teorema della divergenza al termine di flusso, si può scrivere

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho + \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] = 0 . \quad (4.10)$$

Sfruttando l'arbitrarietà del bilancio integrale dal volume considerato e imponendo che l'integranda sia nulla, si ricava la *forma conservativa* del bilancio differenziale di massa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (4.11)$$

Sviluppando la divergenza  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho$ , e riconoscendo l'espressione della derivata materiale, si ottiene la *forma convettiva* del bilancio differenziale di massa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Il vincolo cinematico di incomprimibilità  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  equivale al vincolo “fisico” che impone che la densità delle singole particelle materiali rimanga costante,  $D\rho/Dt = 0$ .

#### 4.2.2 Bilancio di quantità di moto

È possibile trasformare in un integrale di volume la risultante degli sforzi di superficie, utilizzando il teorema di Cauchy per i mezzi continui,

$$\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T} , \quad t_i = n_j T_{ji} , \quad (4.13)$$

dove  $\mathbf{t}_n$  è il vettore sforzo,  $\hat{\mathbf{n}}$  la normale alla superficie e  $\mathbb{T}$  il tensore degli sforzi. La risultante degli sforzi di superficie diventa, usando un po' di libertà nel passare dalla notazione astratta a quella indiciale,

$$\oint_S \mathbf{t}_n = \oint_S t_i = \oint_S n_j T_{ji} = \int_V T_{ji/j} = \int_V \nabla \cdot \mathbb{T} . \quad (4.14)$$

Usando il teorema del trasporto di Reynolds per volumi di controllo fissi e applicando il teorema della divergenza al termine di flusso,

$$\oint_S \{\rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}\}_i = \oint_S \rho u_i u_j n_j = \int_V (\rho u_i u_j)_{/j} = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) , \quad (4.15)$$

si può scrivere il bilancio di quantità di moto

$$\int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \int_V [\mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbb{T}] . \quad (4.16)$$

Sfruttando l'arbitrarietà del bilancio integrale dal volume considerato e imponendo che l'integranda sia nulla, si ricava la *forma conservativa* del bilancio differenziale di quantità di moto,

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbb{T}) = \mathbf{f} . \quad (4.17)$$

Sviluppando i termini

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} &= \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} , & \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} &= \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) , & (\rho u_i u_j)_{/j} &= \rho u_j u_{i/j} + u_i (\rho u_j)_{/j} , \end{aligned} \quad (4.18)$$

riconoscendo che  $\mathbf{u} \cdot (\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})) = 0$  come conseguenza della conservazione della massa, si ottiene la *forma convettiva* dell'equazione della quantità di moto

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbb{T} \\ \rho \frac{D \mathbf{u}}{Dt} &= \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbb{T} . \end{aligned} \quad (4.19)$$

#### 4.2.3 Bilancio del momento della quantità di moto

Il bilancio del momento della quantità di moto per un mezzo continuo non polare è equivalente alla condizione di simmetria del tensore degli sforzi

$$\mathbb{T}^T = \mathbb{T} , \quad T_{ij} = T_{ji} . \quad (4.20)$$

#### 4.2.4 Bilancio dell'energia totale

Usando un po' di libertà nel passare dalla notazione astratta a quella indiciale, la potenza degli sforzi di superficie diventa

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} &= \oint_S t_i u_i = \oint_S n_j T_{ji} u_i = \int_V (T_{ji} u_i)_{/j} = \int_V \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) \\ &= \int_V (T_{ij/j} u_i + T_{ij} u_{j/i}) = \int_V ((\nabla \cdot \mathbb{T}) \cdot \mathbf{u} + \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u}) , \end{aligned} \quad (4.21)$$

avendo utilizzato la simmetria del tensore degli sforzi,  $T_{ij/j} = \{\nabla \cdot \mathbb{T}^T\}_i = \{\nabla \cdot \mathbb{T}\}_i$ . Applicando il teorema della divergenza, il termine di flusso di calore viene scritto come

$$\oint_S \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} . \quad (4.22)$$

La *forma conservativa* del bilancio differenziale di energia totale diventa quindi

$$\frac{\partial(\rho e^t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e^t \mathbf{u} - \mathbb{T} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} . \quad (4.23)$$

Sviluppando la derivata temporale e il termine  $\nabla \cdot (\rho e^t \mathbf{u}) = \rho \mathbf{u} \cdot \nabla e^t + e^t \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$ , riconoscendo che  $e^t(\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})) = 0$  come conseguenza della conservazione della massa, si ottiene la *forma convettiva* dell'equazione dell'energia totale,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial e^t}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla e^t &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \\ \rho \frac{De^t}{Dt} &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} . \end{aligned} \quad (4.24)$$

#### 4.2.5 Chiusura del problema

Affinché il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali formato dai bilanci di massa, quantità di moto ed energia totale, con le condizioni iniziali e al contorno adeguate, sono necessarie l'equazione di stato del materiale che ne descriva le proprietà termodinamiche<sup>1</sup> e i legami costitutivi che esprimano il tensore degli sforzi e il flusso di calore come funzioni dello stato dinamico e termodinamico del sistema. Per un fluido, il tensore degli sforzi viscosi  $\mathbb{T}$  può essere scritto come la somma del contributo idrostatico dovuto alla pressione  $p$  e il tensore degli sforzi viscosi  $\mathbb{S}$ , funzione delle derivate spaziali del campo di velocità. Un fluido che ha un *legame costitutivo lineare* tra il tensore degli sforzi viscosi e il gradiente di velocità  $\nabla \mathbf{u}$ , viene definito **fluido newtoniano**. Per un fluido newtoniano isotropo, il legame costitutivo che definisce il tensore degli sforzi è

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbb{I} , \quad (4.25)$$

dove  $\mu$  e  $\lambda$  sono rispettivamente il coefficiente di viscosità dinamica e il secondo coefficiente di viscosità,  $p$  è la pressione (“termodinamica”),  $\mathbb{D}$  il tensore velocità di deformazione. In generale, sia la pressione  $p$  sia i coefficienti di viscosità dipendono dallo stato termodinamico del sistema.

Il flusso di calore  $\mathbf{q}$  per conduzione può essere descritto dalla **legge di Fourier**, che lo mette in relazione con il gradiente della temperatura tramite il coefficiente di conduzione termica  $k$ , in generale funzione dello stato termodinamico del sistema,

$$\mathbf{q} = -k\nabla T . \quad (4.26)$$

L'introduzione di queste leggi costitutive nelle equazioni di bilancio, aggiunge nuove incognite al sistema, per le quali non abbiamo ricavato un'equazione dinamica. Sono quindi indispensabili la legge di stato che fornisca le relazioni necessarie,

$$\begin{aligned} p &= p(\rho, e) \quad , \quad \mu = \mu(\rho, e) \\ T &= T(\rho, e) \quad , \quad \lambda = \lambda(\rho, e) \\ k &= k(\rho, e) , \end{aligned} \quad (4.27)$$

avendo scelto le variabili termodinamiche delle quali è nota l'equazione dinamica come due variabili termodinamiche indipendenti: la densità  $\rho$  e l'energia interna  $e$ . Ve

<sup>1</sup>Si ricorda che lo stato termodinamico di un sistema monofase è definito da due variabili termodinamiche indipendenti.

### 4.2.6 Altre equazioni di bilancio

Combinando i bilanci delle quantità meccaniche ottenuti partendo dai principi fondamentali della fisica, si possono ottenere le equazioni di bilanci di altre quantità, come ad esempio l'energia cinetica  $\rho|\mathbf{u}|^2/2$ , l'energia interna  $e$ , e la vorticità  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ .

#### Equazione dell'energia cinetica

Moltiplicando scalarmente il bilancio della quantità di moto per il vettore velocità  $\mathbf{u}$ , si può scrivere l'equazione di bilancio dell'energia cinetica. In forma conservativa,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho|\mathbf{u}|^2}{2} + \nabla \cdot \left( \rho \mathbf{u} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T}) , \quad (4.28)$$

in forma convettiva,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T}) \\ \rho \frac{D}{Dt} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T}) . \end{aligned} \quad (4.29)$$

#### Equazione dell'energia interna

Dalla differenza del bilancio dell'energia totale e dell'energia cinetica, si ottiene il bilancio dell'energia interna. In forma conservativa,

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u}) = \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{q} . \quad (4.30)$$

in forma convettiva,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla e &= \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{q} \\ \rho \frac{De}{Dt} &= \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{q} . \end{aligned} \quad (4.31)$$

#### Equazione della vorticità

Applicando l'operatore di rotore al bilancio della quantità di moto, si ottiene l'equazione dinamica della vorticità. Per un fluido newtoniano (con coefficienti di viscosità costanti e uniformi),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \\ \frac{D \boldsymbol{\omega}}{Dt} &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} , \end{aligned} \quad (4.32)$$

dove è stata introdotta la viscosità cinematica del fluido,  $\nu = \mu/\rho$ .

### 4.3 Relazioni di salto

### 4.4 Introduzione agli esercizi

I bilanci integrali di massa e quantità di moto consentono di calcolare le azioni integrali (forze e momenti) scambiati tra un fluido e un corpo. Per studiare l'interazione *integrale* di un fluido con un corpo fermo (in un sistema di riferimento inerziale) è conveniente usare una descrizione euleriana del problema. Ogni bilancio integrale può essere utilizzato per calcolare delle grandezze fisiche integrali incognite:

- flussi di massa (portate massiche) dal bilancio di massa;
- risultanti di forze dal bilancio di quantità di moto;
- risultanti di momenti dal bilancio del momento della quantità di moto;
- potenze dal bilancio dell'energia.

Per esempio, nel caso stazionario in cui la pressione del fluido è uniforme sulla superficie esterna  $S_f$  del volume di controllo e le forze di volume sono trascurabili, la risultante delle forze e dei momenti agenti su un corpo solido valgono

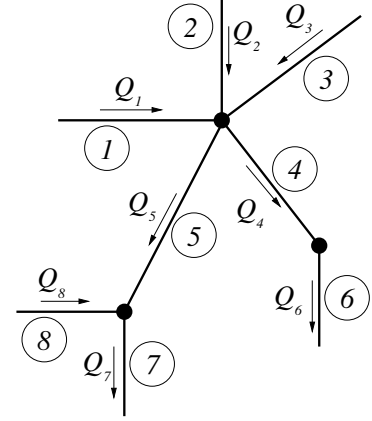
$$\begin{cases} \mathbf{R} = - \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{M} = - \oint_{S_f} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} , \end{cases} \quad (4.33)$$

avendo indicato con  $\mathbf{r}$  il raggio tra il punto nel fluido e il polo, rispetto al quale è calcolato il momento. Per casi più generali, in cui la pressione non è uniforme, si rimanda allo svolgimento degli esercizi.



**Esercizio 4.1 — Bilancio di massa: teoria delle reti.** Si consideri una rete idraulica come quella rappresentata in figura. All'interno dei tubi scorre acqua. Sia nota le velocità media dell'acqua all'interno di alcuni dei rami della rete:  $U_1 = 1 \text{ m/s}$ ,  $U_2 = 1.5 \text{ m/s}$ ,  $U_3 = 0.5 \text{ m/s}$ ,  $U_7 = 2 \text{ m/s}$  e  $U_8 = 0.3 \text{ m/s}$ . Il verso della velocità è indicato dalle frecce sul disegno. Determinare la portata volumetrica, la portata in massa e la velocità media all'interno di ciascun ramo della rete sapendo che l'acqua ha una densità pari a  $\bar{\rho} = 999 \text{ kg/m}^3$ , e che il diametro dei tubi è rispettivamente  $D_1 = 0.4 \text{ m}$ ,  $D_2 = 0.2 \text{ m}$ ,  $D_3 = 0.2 \text{ m}$ ,  $D_4 = 0.3 \text{ m}$ ,  $D_5 = 0.5 \text{ m}$ ,  $D_6 = 0.25 \text{ m}$ ,  $D_7 = 0.3 \text{ m}$ ,  $D_8 = 0.6 \text{ m}$ .

( $Q_1 = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_2 = 0.05 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_3 = 0.02 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_4 = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_5 = 0.06 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_6 = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_7 = 0.14 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_8 = 0.08 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $U_1 = 1 \text{ m/s}$ ,  $U_2 = 1.5 \text{ m/s}$ ,  $U_3 = 0.5 \text{ m/s}$ ,  $U_4 = 1.87 \text{ m/s}$ ,  $U_5 = 0.29 \text{ m/s}$ ,  $U_6 = 2.69 \text{ m/s}$ ,  $U_7 = 2 \text{ m/s}$ ,  $U_8 = 0.3 \text{ m/s}$ ,  $\bar{Q}_1 = 125.5 \text{ kg/s}$ ,  $\bar{Q}_2 = 47.08 \text{ kg/s}$ ,  $\bar{Q}_3 = 15.69 \text{ kg/s}$ ,  $\bar{Q}_4 = 131.8 \text{ kg/s}$ ,  $\bar{Q}_5 = 54.49 \text{ kg/s}$ ,  $\bar{Q}_6 = 131.8 \text{ kg/s}$ ,  $\bar{Q}_7 = 141.2 \text{ kg/s}$ ,  $\bar{Q}_8 = 84.74 \text{ kg/s}$ ) ■



### Soluzione

**Concetti.** Bilancio integrale della massa. Teoria delle reti: bilancio ai nodi.

**Svolgimento.** Se il regime di moto è stazionario, la portata massica è costante e indipendente dalla sezione considerata all'interno di ogni singolo tubo. Il bilancio di massa nell' $i$ -esimo tubo è,

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_i} \rho}_{=0} = \oint_{S_i} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_{i,\alpha}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{S_{i,\beta}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \tilde{Q}_{i,\alpha} + \tilde{Q}_{i,\beta} \rightarrow \tilde{Q}_{i,\alpha} = -\tilde{Q}_{i,\beta}, \quad (4.34)$$

avendo indicato  $S_{i,\alpha}$  e  $S_{i,\beta}$  le due sezioni in “ingresso” e “uscita” del tubo  $V_i$ , con  $\hat{\mathbf{n}}$ ,  $\tilde{Q}_\alpha$  e  $\tilde{Q}_\beta$  la normale uscente e i flussi di massa uscenti dal volume  $V_i$ . Se si calcola il flusso di massa  $\bar{Q}_i$  attraverso le sezioni del tubo con normale identificata dal “verso di percorrenza” del tubo, uno dei due termini cambia segno e si dimostra che la portata è costante sulle sezioni del singolo tubo,

$$\bar{Q}_{i,\alpha} = \bar{Q}_{i,\beta} =: \bar{Q}_i. \quad (4.35)$$

Utilizzando il verso delle frecce indicato in figura per stabilire il segno dei flussi di massa, il bilancio di massa ai nodi porta al sistema lineare,

$$\begin{cases} \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + \bar{Q}_3 - \bar{Q}_4 - \bar{Q}_5 = 0 & (\text{bil. al nodo in alto}) \\ \bar{Q}_5 + \bar{Q}_8 - \bar{Q}_7 = 0 & (\text{bil. al nodo a sinistra}) \\ \bar{Q}_4 - \bar{Q}_6 = 0 & (\text{bil. al nodo a destra}) \end{cases} \quad (4.36)$$

nel quale le incognite sono i flussi  $\bar{Q}_4$ ,  $\bar{Q}_5$ ,  $\bar{Q}_6$ , una volta calcolati gli altri flussi con i dati forniti dal testo del problema,  $\bar{Q}_k = \rho \frac{\pi}{4} D_k^2 U_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 7, 8$ . Successivamente si calcolano le portate volumetriche  $Q_k$  incognite, dividendo le portate massiche  $\bar{Q}_k$  per la densità  $\rho$ ,

$$Q_k = \frac{\bar{Q}_k}{\rho}, \quad k = 1 : 8. \quad (4.37)$$

**Esercizio 4.2 — Bilancio di massa: riempimento bombola.** Si sta riempiendo una bombola per immersioni subacquee. Sapendo che la pompa aspira aria a pressione ambiente di  $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$  e alla temperatura di  $293 \text{ K}$  in un condotto di sezione  $1 \text{ cm}^2$  in cui la velocità media è di  $0.5 \text{ m/s}$  e che non ci sono perdite nel sistema di pompaggio, determinare la rapidità di variazione della massa d'aria e della sua densità all'interno della bombola, sapendo che il volume della bombola è pari a  $0.02 \text{ m}^3$ .  
 $(\frac{dM}{dt} = 6.01 \times 10^{-5} \text{ kg/s}, \frac{d\rho}{dt} = 3.00 \times 10^{-3} \text{ kg/(m}^3\text{s)}).$  ■

### Soluzione

**Concetti.** Bilancio integrale della massa. Legge dei gas perfetti.

**Svolgimento.** Sono date la pressione  $p$  e la temperatura  $T$  all'uscita della pompa. É nota l'area  $S$  della sezione e la velocità media  $U$  su quella sezione. Si trova la variazione di massa all'interno della bombola grazie al bilancio integrale di massa nel volume della bombola  $V$  (volume di controllo, fisso),

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \rho_{in} S_{in} U, \quad (4.38)$$

dove si è indicato con  $M$  la massa totale,  $S_{in}$  l'area della sezione del tubo utilizzato per riempire la bombola e  $\rho_{in}$ , la densità sulla sezione di ingresso, dove sono note la pressione  $P_{in}$  e la temperatura  $T_{in}$ . Ipotizzando che valga la legge di stato dei gas perfetti, la densità sulla sezione di ingresso vale

$$\rho_{in} = \frac{P_{in}}{RT_{in}}, \quad (4.39)$$

dove  $R = 287 \text{ J/(kg K)}$  è la costante dei gas per l'aria. La derivata nel tempo della massa d'aria nella bombola vale quindi

$$\frac{dM}{dt} = 6.0 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{s}}. \quad (4.40)$$

Supponendo che la densità dell'aria si uniforme all'interno della bombola, si può calcolare la sua derivata nel tempo,

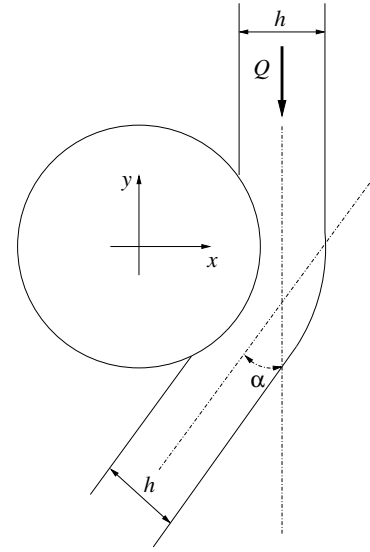
$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{V} \frac{d}{dt} \int_V \rho = 2.0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3\text{s}}. \quad (4.41)$$

**Esercizio 4.3 — Effetto Coanda sul cilindro.** Un getto d'acqua ( $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$ ) stazionario, piano e orizzontale viene indirizzato su un cilindro, lambendone la superficie e venendo deviato di un angolo  $\alpha = 15^\circ$ . Determinare la forza agente su una porzione del cilindro di lunghezza pari a  $H = 2 \text{ m}$ , dovuta sia al getto d'acqua, sia all'aria circostante, sapendo che:

- il fluido che circonda il getto e il cilindro è aria in quiete a pressione atmosferica di  $101325 \text{ Pa}$ ;
- la larghezza del getto è  $h = 2 \text{ cm}$ ;
- la portata d'acqua per unità di lunghezza nel getto è  $Q = 199 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .

Sufficientemente lontano dal cilindro, il profilo di velocità sulle sezioni del getto è uniforme. Illustrare tutte le ipotesi semplificative adottate nella risoluzione dell'esercizio.

( $\mathbf{F} = 1026 \hat{x} - 135 \hat{y} \text{ N}$ )



### Soluzione

**Concetti.** Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo. Effetto Coanda (esempio della bustina da té sotto il rubinetto).

**Svolgimento.** Vengono fatte alcune ipotesi: il problema stazionario; attorno al getto e al solido, l'aria è in quiete con pressione uniforme  $p_a$ ; il profilo di velocità è uniforme sulle sezioni del getto considerate nelle equazioni di bilancio.

Partendo dalle equazioni di bilancio per il volume di controllo  $V_f$  occupato dal fluido, rielaborando il termine degli sforzi di superficie, si ricava la risultante  $\mathbf{R}$  agente sul solido in funzione del flusso di quantità di moto del fluido attraverso la superficie  $S_f = \partial V_f$ .

Innanzitutto viene ricavata l'espressione della risultante  $\mathbf{R}$  agente sul solido.

- Vengono scritte le equazioni di bilancio per il fluido, considerando il volume  $V_f$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho + \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho \mathbf{u} + \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_f} \mathbf{t}_n = 0 & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (4.42)$$

- Viene introdotta l'ipotesi di stazionarietà del fenomeno,  $\frac{d}{dt} \equiv 0$ . La risultante degli sforzi viene scritta come somma degli sforzi di pressione e degli sforzi viscosi,

$$\oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_f} \mathbf{t}_n = \oint_{S_f} \mathbf{s}_n - \oint_{S_f} p \hat{\mathbf{n}}_f. \quad (4.43)$$

- Viene manipolato il termine degli sforzi di superficie. Il contorno  $S_f$  del volume fluido viene scomposto come unione della superficie a contatto con il solido  $S_{fs}$ , delle superfici “laterali”  $S_{f\ell}$  (attraverso le quali non c'è flusso di quantità meccaniche, poichè  $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ ) a contatto con l'aria in quiete e le sezioni “di ingresso”  $S_{f,1}$  e “di

uscita"  $S_{f,2}$  sulle quali la velocità è uniforme, utilizzate per i bilanci integrali per il volume fluido. Viene indicata con  $\hat{\mathbf{n}}_f$  la normale uscente dal volume  $V_f$ . Il contorno  $S_s$  del solido viene scomposto come unione della superficie a contatto con il fluido  $S_{sf}$  e della superficie  $S_{sl}$  a contatto con l'aria in quiete. Viene indicata con  $\hat{\mathbf{n}}_s$  la normale uscente dal volume  $V_s$ . In questo modo, la superficie  $S_{fs}$  coincide con la superficie  $S_{sf}$ , a meno della normale invertita,  $\hat{\mathbf{n}}_f = \hat{\mathbf{n}}_s$ . Su queste superfici, per il terzo principio della dinamica, lo sforzo  $\mathbf{t}_{n_{sf}}$  agente sul solido dovuto al fluido è uguale e contrario allo sforzo  $\mathbf{t}_{n_{fs}}$  agente sul fluido dovuto al fluido,  $\mathbf{t}_{n_{sf}} = -\mathbf{t}_{n_{fs}}$ . La superficie formata dall'unione  $S_{f\ell} \cup S_{f,1} \cup S_{f,2} \cup S_{sl} =: S_{ext}$  è una superficie chiusa con normale uscente  $\hat{\mathbf{n}}$  uguale a  $\hat{\mathbf{n}}_f$  sulle prime tre superfici e uguale a  $\hat{\mathbf{n}}$  su  $S_{sl}$ . Lo sforzo agente su  $S_{ext}$  è uguale a  $-p_a \hat{\mathbf{n}}$ , poiché le superfici libere sono a contatto con aria in quiete con pressione  $p_a$  e le traiettorie delle particelle rettilinee (senza curvatura<sup>2</sup>) sulle sezioni  $S_{f,1}$  e  $S_{f,2}$ .

$$\begin{aligned}
\oint_{S_f} \mathbf{t}_n &= \int_{S_{f\ell}} \mathbf{t}_n + \int_{S_{f,1+2}} \mathbf{t}_n + \int_{S_{fs}} \mathbf{t}_n = & (\mathbf{t}_n|_{S_{f\ell}, S_{f,1+2}} = -p_a \hat{\mathbf{n}}_f) \\
&= - \int_{S_{f\ell} \cup S_{f,1+2}} p_a \hat{\mathbf{n}}_f + \int_{S_{fs}} \mathbf{t}_n = & (\text{somma e sottrazione di } \int_{S_{fs}} p_a \hat{\mathbf{n}}_f) \\
&= - \underbrace{\int_{S_{f\ell} \cup S_{f,1+2}} p_a \hat{\mathbf{n}}_f - \int_{S_{fs}} p_a \hat{\mathbf{n}}_f}_{-\oint_{S_f} p_a \hat{\mathbf{n}}_f = 0} + \int_{S_{fs}} p_a \hat{\mathbf{n}}_f + \int_{S_{fs}} \mathbf{t}_n = & (\hat{\mathbf{n}}_f = -\hat{\mathbf{n}}_s, \mathbf{t}_{n_{fs}} = -\mathbf{t}_{n_{sf}} \text{ su } S_{fs}) \\
&= - \int_{S_{sf}} p_a \hat{\mathbf{n}}_s - \int_{S_{sf}} \mathbf{t}_{n_{sf}} = & (\oint_{S_s = S_{sf} \cup S_{sl}} p_a \hat{\mathbf{n}}_s = 0) \\
&= + \int_{S_{sl}} p_a \hat{\mathbf{n}}_s - \int_{S_{sf}} \mathbf{t}_{n_{sf}} = & (\mathbf{t}_{n_s} = -p_a \hat{\mathbf{n}}_s \text{ su } S_{sl}) \\
&= - \int_{S_{sl}} \mathbf{t}_{n_s} - \int_{S_{sf}} \mathbf{t}_{n_{sf}} = - \oint_{S_s} \mathbf{t}_{n_s} = \\
&= -\mathbf{R},
\end{aligned} \tag{4.44}$$

dove  $\mathbf{R}$  è la risultante degli sforzi di superficie agente sul solido. In questo esercizio è il contributo delle forze di volume (ad esempio il peso) agenti sul solido.

- Sostituendo nell'equazione del bilancio della quantità di moto si ottiene:

$$\mathbf{R} = - \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{4.45}$$

- Considerando solo le superfici di  $V_f$  attraverso le quali c'è un flusso non nullo di quantità di moto, la risultante delle forze diventa

$$\mathbf{R} = - \int_{S_{f,1}} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{S_{f,2}} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{4.46}$$

dove le quantità all'interno degli integrali sono riferite alle superfici di integrazione. Sulle sezioni  $S_{f,1}$ ,  $S_{f,2}$  la velocità è uniforme con modulo  $U$  (dalla continuità, la velocità sulle due sezioni è uguale poichè l'area delle due sezioni è uguale) diretta

<sup>2</sup>Vedi commento sull'equazione della quantità di moto e sulle traiettorie delle particelle

lungo la linea media del getto. Le componenti cartesiane della risultante  $\mathbf{R}$  sono

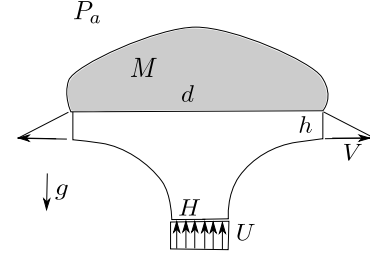
$$\begin{aligned} R_x &= \frac{Q^2 H}{\rho h} \sin \alpha \\ R_y &= -\frac{Q^2 H}{\rho h} (1 - \cos \alpha) , \end{aligned} \tag{4.47}$$

riferite agli assi rappresentati in figura.

**Esercizio 4.4 — Giochi d'acqua.** Un getto d'acqua ( $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$ ) stazionario, piano e verticale viene indirizzato su un oggetto di massa  $M$ , tenuto da esso in equilibrio. Il getto ha distribuzione di velocità uniforme  $U$  lungo lo spessore  $H$ , mentre la distribuzione sul bordo dell'oggetto è triangolare di spessore  $h$  con velocità massima  $V$ . Si calcoli la velocità  $V$  e la massa  $M$  dell'oggetto supponendo che:

- il fluido che circonda il getto e il solido è aria in quiete a pressione atmosferica di  $P_a = 101325 \text{ Pa}$ ;
- si possa trascurare la gravità nel bilancio di quantità di moto, ma non nell'equilibrio del corpo.

$$(V = UH/h; M = \rho U^2 H/g) \quad \blacksquare$$



### Soluzione

**Concetti.** Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo.

**Svolgimento.** Ipotesi: problema stazionario; sulla superficie libera del corpo e del fluido agisce solo la pressione ambiente  $p_a$ ; nessun effetto della gravità nei bilanci del fluido.

Si sceglie un asse  $y$  diretto verso l'alto.

- Scrittura delle equazioni di bilancio per il fluido.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial\Omega} p \hat{\mathbf{n}} - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{s} \mathbf{n} - \int_V \rho \mathbf{g} = 0 & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (4.48)$$

A queste, va aggiunta l'equazione di equilibrio del corpo sottoposto alla forza di gravità:  $\mathbf{F} + M\mathbf{g} = 0$ .

- Dopo aver semplificato il bilancio di massa, da esso si ricava la velocità  $V$ . La velocità sui due bordi 'di uscita' è  $v(s) = Vs/h$ , avendo chiamato  $s$  la coordinata che descrive tale superficie per valori compresi tra 0 e  $h$ .

$$0 = \int_{S_{in}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_{out1}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_{out2}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\rho UH + 2 \int_0^h \rho V \frac{s}{h} ds = \rho \left[ -UH + 2 \frac{1}{2} Vh \right] \quad (4.49)$$

E quindi  $V = U \frac{H}{h}$ .

- Le equazioni vengono opportunamente semplificate secondo le ipotesi fatte (vengono eliminati i termini non stazionari e il termine contenente le forze di volume - gravità). Il bordo del dominio fluido  $\partial\Omega$  viene indicato con  $S_f$ . I contributi di pressione e viscosi vengono raccolti nel vettore di sforzo complessivo.

$$\oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_f} \mathbf{s} \mathbf{n} - \oint_{S_f} p \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_f} \mathbf{t} \mathbf{n} \quad (4.50)$$

- Riscrittura del termine di contorno. Si indica con  $S_f$  il contorno fluido: questo è costituito dall'unione del contorno a contatto con il corpo  $S_c$  e quella libera  $S_l$ . Il contorno del corpo  $S_s$  è suddiviso nel contorno  $S_c$  a contatto con il fluido e nel contorno libero  $S_{cl}$ .

Nei passaggi successivi si ricava il legame tra sforzi sul contorno del dominio fluido e la forza agente sul corpo. Si usano le ipotesi che sulle superfici libere agisca solo la pressione ambiente. Si usa il fatto che l'integrale di una quantità costante per la normale su una superficie chiusa è nullo. Vengono definite le normali  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{n}_s$  come la normale uscente dal volume del fluido e quella uscente dal solido. Si definiscono  $\mathbf{t}_n$  e  $\mathbf{t}_{n_s}$  come lo sforzo agente sul fluido e quello agente sul solido. Si usa infine il fatto che  $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_s$  (normali uscenti dai due domini, uguali e contrarie) e  $\mathbf{t}_n = -\mathbf{t}_{n_s}$  sulla superficie in comune (sforzi agenti sulla superficie comune, uguali e contrari; principio di azione e reazione).

$$\begin{aligned}
 \oint_{S_f} \mathbf{t}_n &= \int_{S_l} \mathbf{t}_n + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = & (\mathbf{t}_n|_{S_l} = -p_a \mathbf{n}) \\
 &= - \int_{S_l} p_a \mathbf{n} + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = & (\text{somma e sottrazione di } \int_{S_c} p_a \mathbf{n}) \\
 &= - \underbrace{\int_{S_l} p_a \mathbf{n} - \int_{S_c} p_a \mathbf{n}}_{=0} + \int_{S_c} p_a \mathbf{n} + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = & (\mathbf{n} = -\mathbf{n}_s) \\
 &= - \int_{S_c} p_a \mathbf{n}_s + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = & (S_s = S_c \cup S_{cl} \text{ e } \int_{S_s} p_a \mathbf{n} = 0) \\
 &= \int_{S_{cl}} p_a \mathbf{n}_s + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = & (\mathbf{t}_{n_s}|_{S_{cl}} = -p_a \mathbf{n}_s, \mathbf{t}_{n_s}|_{S_c} = -\mathbf{t}_n) \\
 &= - \int_{S_{cl}} \mathbf{t}_{n_s} - \int_{S_c} \mathbf{t}_{n_s} = \\
 &= - \int_{S_s} \mathbf{t}_{n_s} \\
 &= -\mathbf{R}
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

- Sostituendo nell'equazione del bilancio della quantità di moto si ottiene:

$$\mathbf{R} = - \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{4.52}$$

- Data la simmetria del problema si riconosce che non ci può essere una componente orizzontale. I contributi nel bilancio della quantità di moto sulla superficie di contatto tra corpo e fluido e sulla superficie laterale del getto sono nulli poichè è nullo il flusso su tali superfici. I contributi sulle sezioni 'di uscita' sono uguali e contrari. Rimane quindi solo il contributo dalla sezione 'in ingresso'.

$$\mathbf{F} = - \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = - \oint_{S_{in}} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho U^2 H \hat{\mathbf{y}} \tag{4.53}$$

- Si scrive l'equilibrio del corpo  $\mathbf{F} + M\mathbf{g} = 0$ , con  $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{y}}$ . Da questo segue che  $M = F/g = \frac{\rho U^2 H}{g}$ .

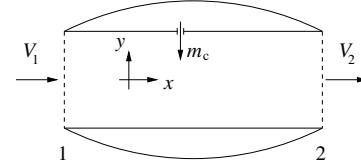
*Osservazioni.* Nell'elaborazione dei termini della quantità di moto è contenuta la forma della risultante delle forze sull'oggetto vista in classe.

Come giustamente osservato da qualcuno in classe, la massa è per unità di lunghezza, poichè stiamo considerando un caso bidimensionale.



**Esercizio 4.5 — Motore a getto.** Il motore a getto in figura è alimentato con una portata  $\dot{m}_c = 1.1 \text{ kg/s}$  di carburante liquido iniettato in direzione ortogonale all'asse del motore. Calcolare la spinta  $T$  del motore ipotizzando che:

- il carburante vaporizzi e diffonda completamente;
- le sezioni di ingresso e uscita abbiano area uguale e pari ad  $A = 0.5 \text{ m}^2$ ;
- sia l'aria in ingresso che i gas di scarico siano a pressione atmosferica  $P_a \text{ tm} = 26400 \text{ Pa}$ ;
- la velocità di ingresso e di uscita siano uniformi sulle rispettive sezioni;
- siano note la densità dell'aria in ingresso  $\rho_1 = 0.42 \text{ kg/m}^3$ , la velocità di ingresso  $V_1 = 240 \text{ m/s}$  e la velocità di efflusso  $V_2 = 980 \text{ m/s}$ .  
( $T = -38374 \hat{x} \text{ N}$ )



### Soluzione

**Concetti.** Bilanci integrali di massa e quantità di moto.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} & (\text{massa}) \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_V \mathbf{f} - \oint_{\partial V} p \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial V} \mathbf{s}_n & (\text{quantità di moto}) \end{cases} \quad (4.54)$$

**Svolgimento.** Ipotesi: Regime stazionario. Fluido non viscoso (?). Profilo costante di velocità. No gravità.

- Scrittura dei bilanci integrali con le semplificazioni opportune, derivanti dalle ipotesi.

$$\begin{cases} \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & (\text{massa}) \\ \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n & (\text{quantità di moto}) \end{cases} \quad (4.55)$$

- Ulteriore semplificazione usando l'ipotesi di profili di velocità uniformi

$$\begin{cases} -\rho_1 V_1 A_1 - \dot{m}_c + \rho_2 V_2 A_2 = 0 \\ -\rho_1 \vec{V}_1 V_1 A_1 + \rho_2 \vec{V}_2 V_2 A_2 - \dot{m}_c \vec{v}_c = \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n \end{cases} \quad (4.56)$$

- Relazione tra l'integrale della pressione e la risultante delle forze agenti sul gomito, sfruttando il fatto che l'integrale della normale su tutta la superficie è identicamente nullo. Si identificano con  $S_1$  la superficie di ingresso,  $S_2$  la superficie di uscita,  $S_3$  la superficie laterale interna del motore,  $S_{3_o}$  la superficie laterale esterna del motore.

$$\begin{aligned} \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n &= \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n + \underbrace{\oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_{3_o}} p_a \hat{\mathbf{n}}}_{=0} = \\ &= - \int_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \int_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_{3_o}} p_a \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_3} \mathbf{t}_n = \quad (p|_{S_1} = p|_{S_2} = p_a) \\ &= \int_{S_{3_o}} p_a \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_3} \mathbf{t}_n = \\ &= \oint_{S_{eng}} \mathbf{t}_n = -\vec{F} \end{aligned} \quad (4.57)$$

- L'equazione della quantità di moto diventa quindi:

$$-\rho_1 \vec{V}_1 V_1 A_1 + \rho_2 \vec{V}_2 V_2 A_2 - \dot{m}_c \vec{v}_c = -\vec{F} \quad (4.58)$$

- Mettendo a sistema l'equazione del bilancio di massa e la proiezione in direzione orizzontale dell'equazione della quantità di moto (si assume che l'iniezione del combustibile, e quindi  $\vec{v}_c$ , sia perpendicolare all'asse x e quindi non compare nel bilancio della quantità di moto in direzione x):

$$\begin{cases} \rho_2 V_2 A = \rho_1 V_1 A + \dot{m}_c \\ -\rho_1 V_1^2 A + \rho_2 V_2^2 A = -F_x \end{cases} \quad (4.59)$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} F_x &= \rho_1 V_1^2 A - \rho_2 V_2^2 A = \\ &= \rho_1 V_1^2 A - (\rho_2 V_2 A) V_2 = \\ &= \rho_1 V_1^2 A - V_2 (\rho_1 V_1 A + \dot{m}_c) = \\ &= \rho_1 V_1 A (V_1 - V_2) - V_2 \dot{m}_c \end{aligned} \quad (4.60)$$

E la spinta coincide con la componente lungo x appena calcolata:

$$T = \rho_1 V_1 A (V_2 - V_1) + V_2 \dot{m}_c \quad (4.61)$$

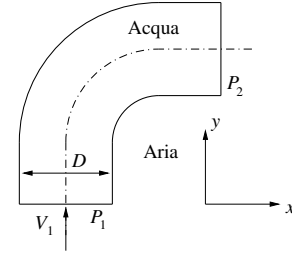
La spinta risulta quindi:  $T = -F_x = 38374N$ .

*Interpretazione dei risultati e osservazioni.*

In prima approssimazione, la spinta in un motore a getto è una funzione della portata d'aria e della differenza di velocità tra ingresso e uscita. Spesso in molte applicazioni il termine  $\dot{m}_c$  è trascurabile.

Ragionare in questo caso sulla validità dell'approssimazione  $\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}}$  nella definizione della risultante delle forze sul motore.

**Esercizio 4.6 — Gomito.** Un condotto di sezione circolare avente diametro  $D = 5 \text{ cm}$  forma un gomito con angolo di  $90^\circ$ . Nel condotto scorre acqua ( $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$ ) in regime stazionario con velocità  $V = 0.5 \text{ mm/s}$ . All'esterno del condotto vi è atmosfera con pressione uniforme  $P_{atm} = 101325 \text{ Pa}$ ; inoltre le pressioni all'ingresso e all'uscita del gomito sono uniformi sulla sezione ed entrambe pari a  $P = 10^6 \text{ Pa}$ . Calcolare la forza  $\mathbf{F}$  agente sul gomito.  
 $(\mathbf{F} = -1765.03\hat{x} + 1765.03\hat{y} \text{ N})$  ■



### Soluzione

**Concetti.** Bilanci integrali di massa e quantità di moto. ...

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_V \mathbf{F} - \oint_{\partial V} p \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial V} \mathbf{s}_n & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (4.62)$$

**Svolgimento.** Vengono fatte alcune ipotesi: regime stazionario, fluido incompressibile, fluido non viscoso, profili costanti di velocità, no gravità. Si scrivono i bilanci integrali semplificati, si riconoscono in essi e si calcolano le azioni scambiate con il corpo.

- Scrittura dei bilanci integrali opportunamente semplificati (ipotesi).

$$\begin{cases} \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (4.63)$$

- Ulteriore semplificazione usando l'ipotesi di densità costante e profili di velocità uniformi

$$\begin{cases} -V_1 A_1 + V_2 A_2 = 0 \\ -\rho V_1 V_1 A_1 + \rho V_2 V_2 A_2 = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n \end{cases} \Rightarrow V_1 = V_2 = V \quad (4.64)$$

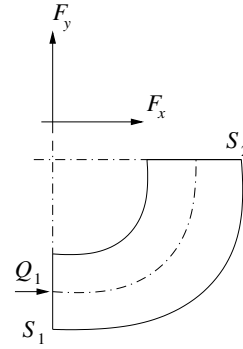
- Relazione tra l'integrale degli sforzi sulla superficie e la risultante delle forze agenti sul gomito, sfruttando il fatto che l'integrale della normale su tutta la superficie è identicamente nullo. Si identificano con  $S_1$  la superficie di ingresso,  $S_2$  la superficie di uscita,  $S_3$  la superficie laterale.

$$\begin{aligned} \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n &= \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n + \underbrace{\oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} p_a \hat{\mathbf{n}}}_{=0} = \\ &= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} + \underbrace{\oint_{S_3} (\mathbf{t}_n + p_a \hat{\mathbf{n}})}_{=-\mathbf{F}} = \\ &= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{F} \end{aligned} \quad (4.65)$$

- Proiezione lungo i due assi del sistema di riferimento della risultante delle forze agenti sul gomito (dopo averla inserita nell'equazione di bilancio della quantità di moto)

$$\begin{cases} F_x = -\rho V^2 A - (p_2 - p_a) A \\ F_y = \rho V^2 A + (p_1 - p_a) A \end{cases} \quad (4.66)$$

**Esercizio 4.7 — Gomito.** Si consideri la corrente stazionaria nel gomito a  $90^\circ$  di una galleria a vento a circuito chiuso di cui è mostrata in figura la sezione nel piano  $x-y$ . Siano assegnate le aree della sezione di ingresso,  $S_1 = 16 \text{ m}^2$ , e di uscita,  $S_2 = 56 \text{ m}^2$ , la portata in volume  $Q_1 = 1600 \text{ m}^3/\text{s}$  e le pressioni nella sezione di ingresso,  $P_1 = 1.05 \text{ bar}$ , e nella sezione di uscita,  $P_2 = 1.106 \text{ bar}$ . Assumendo che il flusso d'aria sia incomprimibile ( $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ ) e che la velocità sulle sezioni di ingresso e uscita possa ritenersi uniforme, si determinino le componenti  $F_x$  ed  $F_y$  della spinta che esso esercita sul gomito, usando la convenzione indicata in figura. ( $F_x = 1.876 \cdot 10^6 \text{ N}$ ,  $F_y = -6.251 \cdot 10^6 \text{ N}$ ) ■



### Soluzione

**Concetti.** Bilanci integrali di massa e quantità di moto.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} & (\text{massa}) \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_V \mathbf{f} - \oint_{\partial V} p \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial V} \mathbf{t}_s & (\text{quantità di moto}) \end{cases} \quad (4.67)$$

**Svolgimento.** Vengono fatte alcune ipotesi: regime stazionario, fluido incomprimibile, fluido non viscoso, profili costanti di velocità, no gravità. Si scrivono i bilanci integrali semplificati, si riconoscono in essi e si calcolano le azioni scambiate con il corpo.

- Scrittura dei bilanci integrali con le semplificazioni opportune, derivanti dalle ipotesi.

$$\begin{cases} \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & (\text{massa}) \\ \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n & (\text{quantità di moto}) \end{cases} \quad (4.68)$$

- Ulteriore semplificazione usando l'ipotesi di densità costante e profili di velocità uniformi

$$\begin{cases} -V_1 A_1 + V_2 A_2 = 0 \\ -\rho \vec{V}_1 V_1 A_1 + \rho \vec{V}_2 V_2 A_2 = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n \end{cases} \Rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2 = Q \quad (4.69)$$

- Relazione tra l'integrale della pressione e la risultante delle forze agenti sul gomito, sfruttando il fatto che l'integrale della normale su tutta la superficie è identicamente nullo. Si identificano con  $S_1$  la superficie di ingresso,  $S_2$  la superficie di uscita,  $S_3$  la superficie laterale.

$$\begin{aligned} \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} p \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n + \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} p_a \hat{\mathbf{n}} = \\ &= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} + \underbrace{\oint_{S_3} (\mathbf{t}_n + p_a \hat{\mathbf{n}})}_{=-\mathbf{f}} = \\ &= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{f} \end{aligned} \quad (4.70)$$

- L'equazione della quantità di moto diventa quindi:

$$-\rho \mathbf{V}_1 V_1 A_1 + \rho \mathbf{V}_2 V_2 A_2 = -(p_1 - p_a) A_1 \hat{\mathbf{n}}_1 - (p_2 - p_a) A_2 \hat{\mathbf{n}}_2 - \mathbf{F} \quad (4.71)$$

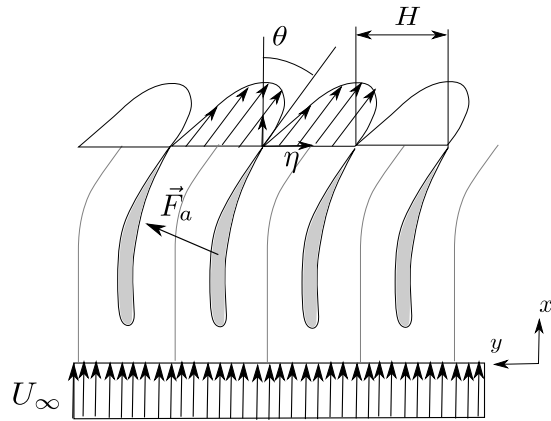
- Proiezione lungo i due assi del sistema di riferimento della risultante delle forze agenti sul gomito. Se si considera  $p_a = 0$ , i risultati numerici sono i seguenti:

$$\begin{cases} F_x = \rho \frac{Q^2}{A_1} + (p_1 - p_a)A_1 \\ F_y = -\rho \frac{Q^2}{A_2} - (p_2 - p_a)A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = 1.876 \cdot 10^6 N \\ F_y = -6.250 \cdot 10^6 N \end{cases} \quad (4.72)$$

**Esercizio 4.8 — Profili in schiera.** Un numero elevato di profili è disposto come in figura. Il profilo di ingresso è uniforme  $\mathbf{u} = U_\infty \hat{\mathbf{x}}$ , mentre il profilo di uscita ha andamento  $\mathbf{u} = \beta U_\infty (\cos \theta \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta \hat{\mathbf{y}}) \sin \frac{\pi \eta}{H}$  in ogni canale (sia  $\eta$  la coordinata che descrive la sezione di uscita). Sulla sezione di ingresso la pressione media vale  $P_1$ , sulla sezione di uscita  $P_2$ .

Calcolare il fattore  $\beta$  del profilo di velocità in uscita e la risultante delle forze (per unità di apertura) agente sul singolo profilo.

(Risultati:  $\beta = \frac{\pi}{2 \cos \theta}$ ,  $\mathbf{F} = [(P_1 - P_2)H + \rho U^2 H((1 - \pi^2/8)]\hat{\mathbf{x}} + \pi^2/8 \tan \theta \hat{\mathbf{y}})$  ■



### Soluzione

**Concetti.** Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo. Simmetria.

- Ricavare il coefficiente  $\beta$  dal bilancio di massa
- Usare le ipotesi di simmetria nel bilancio di quantità di moto per annullare alcuni termini

### Svolgimento.

Si ricava il coefficiente  $\beta$  dal bilancio di massa in forma integrale. Si utilizza la simmetria del problema nel bilancio di quantità moto per ricavare le azioni sui profili.