

Note ed esercizi di fluidodinamica

Copyright © 2019 Davide Montagnani

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

First edition, March 2013

Indice

I	Esercizi	
1	Similitudine	7
1.1	Teorema di Buckingham	7
1.2	Equazioni di Navier–Stokes incompressibili in forma adimensionale	7
1.2.1	Adimensionalizzazione “ad alti numeri di Reynolds”	8
1.2.2	Adimensionalizzazione “a bassi numeri di Reynolds”	9
1.3	Equazione di continuità e numero di Mach	10
1.4	Equazioni di Navier–Stokes in sistemi di riferimento non inerziali	10
1.4.1	Equazioni in forma adimensionale	13
1.5	Equazioni di Boussinesq e numeri di Prandtl, Rayleigh e Grashof	13
1.5.1	Equazioni di Boussinesq	13
1.5.2	Equazioni di Boussinesq: problema bidimensionale tra due superfici piane	14
1.5.3	Equazioni di Boussinesq in forma adimensionale	16
1.5.4	Equazione della vorticità e funzione di corrente nell'approssimazione di Boussinesq	19
1.5.5	Approssimazione di Fourier–Galerkin del problema di Boussinesq	19
1.5.6	Dal problema di Boussinesq al modello di Lorenz	20
1.5.7	Alcuni concetti di stabilità	23
1.5.8	Sistema dinamico di Lorenz	23



Esercizi

1	Similitudine	7
1.1	Teorema di Buckingham	
1.2	Equazioni di Navier–Stokes incomprimibili in forma adimensionale	
1.3	Equazione di continuità e numero di Mach	
1.4	Equazioni di Navier–Stokes in sistemi di riferimento non inerziali	
1.5	Equazioni di Boussinesq e numeri di Prandtl, Rayleigh e Grashof	

1. Similitudine

1.1 Teorema di Buckingham

Il teorema di Buckingham afferma che un problema descritto da n variabili fisiche, le cui dimensioni fisiche coinvolgono k grandezze fondamentali, può essere espresso in funzione di $n - k$ gruppi adimensionali.

1.2 Equazioni di Navier–Stokes incompressibili in forma adimensionale

Nelle equazioni incompressibili di Navier–Stokes per un fluido a densità costante

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

compaiono 7 variabili fisiche $(\rho, \mathbf{u}, \mu, p, \mathbf{g}; \mathbf{r}, t)$, le 2 variabili indipendenti spaziale \mathbf{r} e temporale t , e le 5 variabili dipendenti rappresentate dalla densità ρ , dal campo di velocità \mathbf{u} , dal coefficiente di viscosità dinamica μ , dal campo di pressione p e dal campo di forze di volume \mathbf{g} . Le dimensioni fisiche delle 7 variabili possono essere costruite con 3 grandezze fondamentali, la massa M , la lunghezza L e il tempo T . Ad esempio, le dimensioni fisiche della velocità sono $[\mathbf{u}] = L T^{-1}$ e quelle della densità sono $[\rho] = M L^{-3}$. Le dimensioni delle 7 variabili fisiche che compaiono nelle equazioni di Navier–Stokes incompressibili sono raccolte nella tabella 1.1. Per poter formare i $7 - 3 = 4$ gruppi adimensionali che

	\mathbf{r}	t	ρ	\mathbf{u}	μ	p	\mathbf{g}
M	0	0	1	0	1	1	0
L	1	0	-3	1	-1	-1	1
T	0	1	0	-1	-1	-2	-2

Tabella 1.1: Variabili fisiche e grandezze fondamentali.

caratterizzano il problema, è necessario scegliere 3 variabili fisiche (o combinazione di queste) che “contengano in maniera linearmente indipendente” tutte le 3 grandezze fondamentali del problema. Facendo riferimento alla tabella 1.1, le colonne relative alle variabili scelte per l’adimensionalizzazione devono formare dei vettori linearmente indipendenti tra di loro. Ad esempio, due scelte valide delle variabili da usare per l’adimensionalizzazione del problema sono:

- (ρ, U, L) , una densità, una velocità e una lunghezza di riferimento,
- (μ, U, L) , una viscosità, una velocità e una lunghezza di riferimento,

mentre una scelta non accettabile è una terna (T, U, L) formata da un tempo, una velocità e una lunghezza di riferimento, poichè non è possibile costruire dei gruppi adimensionali con le variabili fisiche che contengono la massa come grandezza fisica, come la densità, la pressione e il coefficiente di viscosità.

Tutte le variabili fisiche vengono espresse come il prodotto di una loro grandezza di riferimento, che contiene le dimensioni fisiche e viene indicata con la tilde, e la loro versione adimensionale, indicata con l’asterisco,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \tilde{L} \mathbf{r}^* \quad , \quad t = \tilde{T} t^* \quad , \quad \mathbf{u} = \tilde{U} \mathbf{u}^* \\ \rho &= \tilde{\rho} \rho^* \quad , \quad \mu = \tilde{\mu} \mu^* \quad , \quad p = \tilde{p} p^* \quad , \quad \mathbf{g} = \tilde{g} \mathbf{g}^* . \end{aligned} \quad (1.2)$$

Per le equazioni di Navier–Stokes incomprimibili a proprietà costanti, è possibile scegliere il valore di riferimento della densità e della viscosità dinamica come il valore stesso delle variabili fisiche, $\tilde{\rho} = \rho$, $\tilde{\mu} = \mu$. In questo modo, il loro valore adimensionale è uguale a 1, $\rho^* = \mu^* = 1$. Nel caso del campo di forze di volume dovuto alla gravità, costante e diretto lungo la verticale, è possibile definire il valore di riferimento $\tilde{g} = |\mathbf{g}|$, cosicchè il vettore \mathbf{g}^* è uguale e contrario al versore $\hat{\mathbf{z}}$ orientato in direzione verticale. Anche l’operatore *nabla* viene adimensionalizzato, $\nabla = \frac{1}{\tilde{L}} \nabla^*$. Le equazioni di Navier–Stokes possono essere scritte come

$$\begin{cases} \frac{\rho \tilde{U}}{\tilde{t}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho \tilde{U}^2}{\tilde{L}} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \frac{\mu \tilde{U}}{\tilde{L}^2} \Delta^* \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{p}}{\tilde{L}} \nabla^* p^* = -\rho g \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\tilde{U}}{\tilde{L}} \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 . \end{cases} \quad (1.3)$$

1.2.1 Adimensionalizzazione “ad alti numeri di Reynolds”

Se si scelgono $(\tilde{\rho}, \tilde{U}, \tilde{L})$ come grandezze di riferimento, dividendo l’equazione della quantità di moto per $\tilde{\rho} \tilde{U}^2 / \tilde{L}$ e il vincolo di incomprimibilità per \tilde{U} / \tilde{L} ,

$$\begin{cases} \frac{\tilde{L}}{\tilde{U} \tilde{t}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \frac{\mu}{\rho \tilde{U} \tilde{L}} \Delta^* \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{p}}{\rho \tilde{U}^2} \nabla^* p^* = -\frac{g \tilde{L}}{\tilde{U}^2} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 , \end{cases} \quad (1.4)$$

si possono riconoscere 4 numeri adimensionali:

- il numero di Strouhal, $St = \frac{\tilde{L}}{\tilde{U} \tilde{t}}$, che rappresenta il rapporto tra una scala dei tempi e la scala dei tempi \tilde{L} / \tilde{U} costruita con la lunghezza e la velocità di riferimento;
- il numero di Reynolds, $Re = \frac{\rho \tilde{U} \tilde{L}}{\mu}$, che rappresenta il rapporto tra gli effetti di inerzia e quelli viscosi;
- il numero di Eulero, $Eu = \frac{\tilde{p}}{\rho \tilde{U}^2}$, che rappresenta il rapporto tra la grandezza di riferimento della pressione e quella di un’energia cinetica del fluido;
- il numero di Froude, $Fr = \frac{\tilde{U}^2}{g \tilde{L}}$, che rappresenta il rapporto tra gli effetti di inerzia e quelli dovuti al campo di forze di volume.

Quando non esiste una scala dei tempi “indipendente” dal fenomeno fluidodinamico, è possibile scegliere il valore di riferimento del tempo $\tilde{t} = \tilde{L}/\tilde{U}$, in modo tale da ottenere un numero di Strouhal unitario. Per la natura stessa della “pressione” di moltiplicatore di Lagrange introdotto nelle equazioni di Navier–Stokes per imporre il vincolo di incomprimibilità, è frequente che la pressione non abbia una scala indipendente nel regime incomprimibile. È possibile quindi scegliere una scala di pressione $\tilde{p} = \rho\tilde{U}^2$, in modo tale da ottenere un numero di Eulero unitario,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \frac{1}{Re} \Delta^* \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* = -\frac{1}{Fr} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Se le grandezze di riferimento sono rappresentative del problema, in modo tale da rendere gli ordini di grandezza delle variabili adimensionali paragonabili tra loro, il valore dei numeri adimensionali permette di valutare l’influenza dei termini. Ad esempio, per valori elevati del numero di Froude l’influenza delle forze di volume è ridotta. Per valori elevati del numero di Reynolds, l’influenza degli effetti viscosi diventa trascurabile nelle regioni del campo di moto nelle quali le derivate spaziali del campo di velocità sono piccole. Per applicazioni tipiche aeronautiche ad alti numeri di Reynolds, gli effetti viscosi saranno quindi trascurabili in gran parte del dominio, ad eccezione delle regioni di strato limite, all’interno delle quali la componente della velocità “parallela” alla parete ha una variazione elevata in direzione perpendicolare alla parete stessa. Se gli effetti delle forze di volume sono trascurabili ($Fr \rightarrow \infty$), le equazioni di Navier–Stokes incomprimibili per problemi ad alti numeri di Reynolds ($Re \rightarrow \infty$) si riducono alle equazioni di Eulero incomprimibili nelle regioni del dominio in cui gli effetti viscosi sono trascurabili,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* = \mathbf{0} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

1.2.2 Adimensionalizzazione “a bassi numeri di Reynolds”

Se si scelgono $(\tilde{\rho}, \tilde{U}, \tilde{L})$ come grandezze di riferimento, dividendo l’equazione della quantità di moto per $\tilde{\mu}\tilde{U}/\tilde{L}^2$ e il vincolo di incomprimibilità per \tilde{U}/\tilde{L} , le equazioni di Navier–Stokes diventano

$$\begin{cases} \frac{\rho\tilde{L}^2}{\mu\tilde{t}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho\tilde{U}\tilde{L}}{\mu} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \Delta^* \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{p}\tilde{L}}{\mu\tilde{U}} \nabla^* p^* = -\frac{\rho g \tilde{L}^2}{\mu\tilde{U}} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Se gli effetti delle forze di volume sono trascurabili rispetto agli effetti viscosi e non ci sono scale indipendenti di tempo e pressione, le equazioni di Navier–Stokes in forma adimensionale diventano

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + Re(\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \Delta^* \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* = \mathbf{0} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Per correnti nelle quali il numero di Reynolds caratteristico tende a zero, note come *creeping flow*, il termine non lineare diventa trascurabile e le equazioni di Navier–Stokes si riducono alle equazioni di Stokes,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} - \Delta^* \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* = \mathbf{0} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

1.3 Equazione di continuità e numero di Mach

La forma adimensionale dell'equazione di continuità permette di valutare i limiti dell'approssimazione di corrente incompressibile, che soddisfa il vincolo cinematico di incompressibilità $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. L'equazione della massa viene scritta in forma convettiva,

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} . \quad (1.10)$$

Ricordando che lo stato termodinamico di un sistema monocomponente monofase è definito da due variabili termodinamiche, il campo di pressione p viene espresso in funzione del campo di densità ρ e di entropia s , come $p(\rho, s)$. Il differenziale di questa relazione,

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho ds , \quad (1.11)$$

può essere utilizzato per esprimere la derivata materiale della densità in funzione delle derivate materiali di pressione ed entropia,

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{(\partial p / \partial \rho)_s} \frac{Dp}{Dt} - \frac{(\partial p / \partial s)_\rho}{(\partial p / \partial \rho)_s} \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{c^2} \frac{Dp}{Dt} - \frac{(\partial p / \partial s)_\rho}{c^2} \frac{Ds}{Dt} , \quad (1.12)$$

avendo riconosciuto il quadrato della velocità del suono $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$. L'equazione della massa diventa quindi

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{Dp}{Dt} - \frac{(\partial p / \partial s)_\rho}{\rho c^2} \frac{Ds}{Dt} . \quad (1.13)$$

Per processi isentropici (o per i quali il secondo termine a destra dell'uguale è trascurabile), l'equazione della massa si riduce a

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{Dp}{Dt} . \quad (1.14)$$

Utilizzando i valori di densità $\tilde{\rho}$, velocità \tilde{U} e lunghezza \tilde{L} caratteristici della corrente per costruire la scala dei tempi $\tilde{t} = \tilde{L}/\tilde{U}$ e per la pressione $\tilde{p} = \tilde{\rho}\tilde{U}^2$, si ottiene l'equazione della massa in forma adimensionale,

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = -\frac{M^2}{\rho^*} \frac{Dp^*}{Dt^*} , \quad (1.15)$$

nella quale si è iconosciuto il numero di Mach caratteristico della corrente, $M = \frac{\tilde{U}}{c}$, definito come il rapporto tra una velocità caratteristica e la velocità del suono in uno stato termodinamico di riferimento della corrente. É immediato osservare che l'equazione di continuità della massa si riduce al vincolo di incompressibilità quando il numero di Mach assume valori ridotti (e il campo di pressione non ha variazioni rapide).

1.4 Equazioni di Navier–Stokes in sistemi di riferimento non inerziali

Equazioni di Navier–Stokes

In un sistema di riferimento inerziale¹ le equazioni di Navier–Stokes governano la dinamica di una corrente incompressibile di un fluido a proprietà costanti

$$\begin{cases} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 , \end{cases} \quad (1.16)$$

¹ Per noi, un **sistema di riferimento inerziale** è un sistema di riferimento rispetto al quale le equazioni della fisica assumono la loro forma più semplice, senza che compaiano termini di trascinamento, come ad esempio i termini di Coriolis.

dove l'operatore di derivata materiale applicata al campo di velocità coincide con il campo di accelerazione delle particelle,

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} . \quad (1.17)$$

Cinematica relativa

Sia dato un sistema di riferimento ortonormale inerziale I e un sistema di riferimento non inerziale J , con origine O_I e O_J rispettivamente. La velocità e l'accelerazione di O_J definite nel sistema di riferimento inerziale sono \mathbf{u}_{O_J} , \mathbf{a}_{O_J} , mentre vengono indicate con $\boldsymbol{\Omega}_{J/I}$ e $\boldsymbol{\alpha}_{J/I}$ la velocità e l'accelerazione angolare del sistema di riferimento J rispetto al sistema I . Si può esprimere la posizione di un punto P nel sistema di riferimento I come

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O_J} + \mathbf{r}^J , \quad (1.18)$$

avendo indicato ... Dalla derivata temporale della posizione di P , si ottiene la velocità

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{O_J} + \mathbf{u}^J + \boldsymbol{\Omega}_{J/I} \times \mathbf{r}^J , \quad (1.19)$$

avendo indicato ... Dalla derivata temporale della velocità di P , si ottiene l'accelerazione

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{O_J} + \mathbf{a}^J + \boldsymbol{\alpha}_{J/I} \times \mathbf{r}^J + 2 \boldsymbol{\Omega}_{J/I} \times \mathbf{u}^J + \boldsymbol{\Omega}_{J/I} \times (\boldsymbol{\Omega}_{J/I} \times \mathbf{r}^J) , \quad (1.20)$$

avendo indicato ...

Equazioni di Navier–Stokes in un sistema di riferimento non inerziale

Si possono quindi riscrivere le equazioni di Navier–Stokes, utilizzando le grandezze cinematiche riferite al sistema di riferimento non inerziale, mettendo in evidenza i contributi non inerziali e lasciando cadere i pedici J/I della velocità e dell'accelerazione angolare

$$\begin{cases} \rho \mathbf{a}^J = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \\ \quad - \rho \left[\mathbf{a}_{O_J} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}^J + 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}^J + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^J) \right] , \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \end{cases} \quad (1.21)$$

In questa espressione delle equazioni compare ancora la velocità \mathbf{u} riferita al sistema di riferimento inerziale, nel contributo viscoso della quantità di moto e nel vincolo di incomprimibilità. Per riportarci a un'espressione delle equazioni di Navier–Stokes dove compaiano solo grandezze cinematiche riferite al sistema non inerziale, utilizziamo le formule (1.18, 1.19) nel laplaciano e nella divergenza di \mathbf{u} , ricordando che la velocità $\mathbf{u}_{O_J}(t)$ dell'origine e la velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}(t)$ del sistema non inerziale sono solo funzioni del tempo che non dipendono dallo spazio, e che quindi le loro derivate spaziali sono nulle. La divergenza della velocità diventa quindi

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \nabla \cdot (\mathbf{u}_{O_J} + \mathbf{u}^J + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^J) \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{u}^J + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O_J})) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Il termine $\nabla \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{O_J})$ è nullo poiché il contenuto della parentesi non dipende dallo spazio, ma solo dal tempo. Anche il termine $\nabla \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ risulta nullo, come si può dimostrare facilmente utilizzando un sistema di coordinate ortogonali e i simboli di Ricci per esprimere

il prodotto vettoriale,²

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \partial_i (\epsilon_{ijk} \Omega_j r_k) = \epsilon_{ijk} \Omega_j \partial_i r_k = \epsilon_{ijk} \Omega_j \delta_{ik} = \epsilon_{iji} \Omega_j = 0 , \quad (1.24)$$

poiché i simboli di Ricci con indici ripetuti sono identicamente nulli. Di conseguenza, la divergenza del campo di velocità \mathbf{u}^J riferito al sistema di riferimento non inerziale è uguale alla divergenza del campo di velocità \mathbf{u} riferito al sistema di riferimento inerziale,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}^J . \quad (1.25)$$

Non dovrebbe essere difficile trovare l'espressione del laplaciano, una volta osservato il grado della dipendenza dallo spazio nell'espressione (1.18): il termine \mathbf{u}_{O_J} non dipende dallo spazio, mentre il termine $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^J = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O_J})$ ha una dipendenza *affine* (e non *lineare*, poiché c'è un termine costante) dalla posizione nello spazio. Ricordandosi che il laplaciano è la somma delle derivate spaziali del secondo ordine (in un sistema di coordinate cartesiane), dovrebbe essere chiaro che il laplaciano di questi due termini è nullo e che quindi vale,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \Delta (\mathbf{u}_{O_J} + \mathbf{u}^J + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^J) = \\ &= \Delta (\mathbf{u}_{O_J} + \mathbf{u}^J + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O_J})) = \Delta \mathbf{u}^J \end{aligned} \quad (1.26)$$

Utilizzando le due relazioni ottenute per la divergenza e il laplaciano del campo di velocità, si può ora riscrivere le equazioni di Navier–Stokes riferite a un sistema di riferimento non inerziale, utilizzando unicamente le grandezze cinematiche relative a questo sistema di riferimento,

$$\begin{cases} \rho \mathbf{a}^J = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}^J + \\ \quad - \rho [\mathbf{a}_{O_J} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}^J + 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}^J + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^J)] , \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^J = 0 . \end{cases} \quad (1.27)$$

Alcune osservazioni sulla natura tensoriale delle equazioni

Tranne le grandezze cinematiche che descrivono il moto del sistema di riferimento non inerziale e le grandezze cinematiche che descrivono il moto del fluido relativo a questo sistema di riferimento, tutti gli oggetti che compaiono nelle equazioni vettoriali sono indipendenti dal sistema di riferimento utilizzato per descrivere il problema. In una notazione vettoriale ha quindi poco senso indicare in maniera diversa questi termini, a partire dagli operatori differenziali.

TODO: Relazione tra le coordinate e tra i vettori delle basi ortogonali

TODO: Variabili indipendenti delle funzioni

TODO: Calcolo in componenti del gradiente e del laplaciano “espressi nel sistema di riferimento non inerziale”

² Chi non ci crede, o non è familiare con i simboli di Ricci, può calcolare il prodotto vettoriale $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ utilizzando un sistema cartesiano

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = (\Omega_y z - \Omega_z y) \hat{\mathbf{x}} + (\Omega_z x - \Omega_x z) \hat{\mathbf{y}} + (\Omega_x y - \Omega_y x) \hat{\mathbf{z}} , \quad (1.23)$$

e verificare immediatamente che $\nabla \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = 0$, poichè nessuna componente del vettore dipende dalla coordinata spaziale corrispondente.

1.4.1 Equazioni in forma adimensionale

Si ricava ora la forma adimensionale delle equazioni, in un sistema di riferimento con origine fissa, $\mathbf{u}_{O_J} = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}_{O_J} = \mathbf{0}$, e in rotazione con velocità angolare costante, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$,

$$\begin{cases} \rho \mathbf{a}^J = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}^J - 2 \rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}^J - \rho \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^J) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^J = 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

Lasciamo cadere l'apice J su tutte le grandezze cinematiche relative al sistema di riferimento non inerziale. Aggiungendo il modulo Ω della velocità angolare del sistema di riferimento, $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\boldsymbol{\Omega}}$, alle grandezze di riferimento $(\tilde{\rho}, \tilde{U}, \tilde{L})$, usate per creare anche le scale *non indipendenti* di tempo $\tilde{T} = \tilde{L}/\tilde{U}$, di accelerazione $\tilde{A} = \tilde{U}^2/\tilde{L}$ e di pressione $\tilde{p} = \tilde{\rho} \tilde{U}^2$, si può scrivere

$$\frac{\rho \tilde{U}^2}{\tilde{L}} \mathbf{a}^* = \rho g \hat{\mathbf{g}} - \frac{\tilde{\rho} \tilde{U}^2}{\tilde{L}} \nabla^* p^* + \frac{\mu \tilde{U}}{\tilde{L}^2} \Delta^* \mathbf{u}^* - 2 \rho \Omega \tilde{U} \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{u}^* + \rho \Omega^2 \tilde{L} \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times (\hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}^*) \quad (1.29)$$

e, dividendo tutti i termini per $\rho \tilde{U}^2/\tilde{L}$,

$$\mathbf{a}^* = \frac{g \tilde{L}}{\tilde{U}^2} \hat{\mathbf{g}} - \nabla^* p^* + \frac{\mu}{\rho \tilde{U} \tilde{L}} \Delta^* \mathbf{u}^* - 2 \frac{\Omega \tilde{L}}{\tilde{U}} \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{u}^* + \frac{\Omega^2 \tilde{L}^2}{\tilde{U}^2} \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times (\hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}^*) \quad (1.30)$$

si possono riconoscere i numeri adimensionali caratteristici del problema,

- il numero di Reynolds $Re = \frac{\rho \tilde{U} \tilde{L}}{\mu}$, che rappresenta il rapporto tra gli effetti inerziali e gli effetti viscosi;
- il numero di Froude, $Fr = \frac{\tilde{U}^2}{g \tilde{L}}$, che rappresenta il rapporto tra gli effetti inerziali e quelli legati al campo di forze di volume (ad esempio, gli effetti gravitazionali se \mathbf{g} è il campo di forze gravitazionale);
- il numero di Rossby, $Ro = \frac{\tilde{U}}{\Omega \tilde{L}}$ rappresenta il rapporto tra gli effetti inerziali e gli effetti “di trascinamento” dovuti al moto del sistema di riferimento non inerziale;

e riscrivere le equazioni in forma adimensionale,

$$\begin{cases} \mathbf{a}^* = \frac{1}{Fr} \hat{\mathbf{g}} - \nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \Delta^* \mathbf{u}^* - \frac{2}{Ro} \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{u}^* + \frac{1}{Ro^2} \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times (\hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}^*) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

TODO. Utilizzando il valore della velocità angolare della Terra, $\Omega_T = 7.27 \cdot 10^{-5} s^{-1}$, è possibile valutare gli effetti di Coriolis sul moto di una corrente e riconoscere la scala di tempo $\tilde{L}/\tilde{U} \sim 1/\Omega$ dei fenomeni fisici per i quali gli effetti di Coriolis sono rilevanti.³

1.5 Equazioni di Boussinesq e numeri di Prandtl, Rayleigh e Grashof

1.5.1 Equazioni di Boussinesq

Le equazioni di Boussinesq sono un modello approssimato delle equazioni complete del moto dei fluidi, ricavato sotto le ipotesi che:

- il contributo di dissipazione nell'equazione dell'energia sia trascurabile;

³ La scala dei tempi deve essere circa uguale all'inverso della velocità angolare del sistema non inerziale, $\tilde{L}/\tilde{U} \sim 1/\Omega$, affinché il numero di *Rossby* sia circa uguale a 1 e che quindi i termini di “trascinamento” siano dello stesso ordine dei termini di pressione. Se il numero di Rossby è molto maggiore di 1 gli effetti non inerziali saranno irrilevanti, mentre se il numero di Rossby è molto minore di 1, il problema sarà dominato da tali effetti.

- la densità dipenda linearmente dalla temperatura nel termine di forze di volume nell'equazione della quantità di moto.

La variazione della densità in funzione della densità diventa quindi

$$d\rho(P, T) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P dT \approx \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P dT = -\rho_0 \alpha dT \quad (1.32)$$

$$\rightarrow \rho = \rho_0 (1 - \alpha (T - T_0)) , \quad (1.33)$$

dove le derivate sono calcolate nello stato termodinamico di riferimento, (ρ_0, T_0) , ed è stato introdotto il coefficiente di dilatazione termica

$$\alpha = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P . \quad (1.34)$$

Introducendo le approssimazioni elencate, l'espressione dell'energia interna $e = c_v T$ e la legge di Fourier per il flusso di calore per conduzione, $\mathbf{q} = -k \nabla T$, nelle equazioni complete per una corrente incomprimibile di un fluido newtoniano,

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla P = \rho \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla e = 2\mu \mathbb{D} : \mathbb{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} , \end{cases} \quad (1.35)$$

si ottengono le equazioni di Boussinesq

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P = (1 - \alpha(T - T_0)) \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = D \nabla^2 T , \end{cases} \quad (1.36)$$

avendo definito il coefficiente di diffusione termica $D = \frac{k}{\rho_0 c_v}$.

1.5.2 Equazioni di Boussinesq: problema bidimensionale tra due superfici piane

Condizioni al contorno

Si considera ora la corrente che si sviluppa tra due superfici piane orizzontali infinite, a distanza h l'una dall'altra, mantenute a temperatura costante: la temperatura vale T_w sulla superficie inferiore e T_c sulla superficie superiore. Viene definita la differenza di temperatura $\Delta T = T_w - T_c$.

Se le due superfici considerate sono superfici solide, la velocità su di esse è nulla. Se le due superfici sono superfici "libere" (di simmetria, a sforzo nullo) si annulla la derivata normale della velocità. Prendendo un sistema di assi ortogonali, con l'origine in corrispondenza della superficie inferiore, con l'asse x parallelo e l'asse z perpendicolare alla superficie, si possono riassumere così le condizioni al contorno,

$$\text{wall: } \begin{cases} T(x, z=0) = T_w \\ T(x, z=h) = T_c \\ \mathbf{u}(x, z=0) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}(x, z=h) = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{free: } \begin{cases} T(x, z=0) = T_w , \quad T(x, z=h) = T_c \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x, z=0) = 0 , \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, z=h) = 0 \\ w(x, z=0) = 0 , \quad w(x, z=h) = 0 . \end{cases} \quad (1.37)$$

Non ci sono condizioni al contorno in x , poichè la direzione è omogenea. Considereremo qui solo il problema con le condizioni al contorno "free".

Soluzione stazionaria non convettiva

Esiste una soluzione stazionaria ($\partial/\partial t = 0$) del problema con fluido in quiete ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$). Il vincolo di incomprimibilità è soddisfatto identicamente. Sfruttando l'omogeneità della direzione x , la soluzione stazionaria indipendente dalla coordinata x soddisfa le equazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_0} \frac{dP}{dz} = \alpha g(T - T_0) \\ \frac{d^2 T}{dz^2} = 0, \end{cases} \quad (1.38)$$

dotate delle opportune condizioni al contorno. La soluzione stazionaria del problema è

$$\begin{cases} \bar{T}(z) = T_w + (T_c - T_w) \frac{z}{h} = T_w - \Delta T \frac{z}{h} \\ \bar{P}(z) = P_w + \alpha \rho_0 g \left[(T_w - T_0)z - \frac{1}{2} \Delta T \frac{z^2}{h} \right], \end{cases} \quad (1.39)$$

avendo indicato con P_w il valore della pressione in corrispondenza della superficie inferiore a $z = 0$.

Equazione delle fluttuazioni

Viene definita la fluttuazione di temperatura $\tau(x, z)$,

$$\begin{aligned} \tau(x, z) &= T(x, z) - \bar{T}(z) = T(x, z) - T_w + \Delta T \frac{z}{h} \\ \rightarrow T(x, z) - T_w &= \tau(x, z) - \Delta T \frac{z}{h}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Scegliendo la superficie inferiore a $z = 0$ per definire la condizione termodinamica di riferimento, $T_0 = T_w$. le equazioni di Boussinesq diventano

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P = \left(1 - \alpha \tau + \Delta T \frac{z}{h} \right) \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau + w \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = D \nabla^2 \tau. \end{cases} \quad (1.41)$$

Inoltre è possibile raccogliere il primo e il terzo termine delle forze di galleggiamento sotto lo stesso operatore di gradiente che opera sul campo di pressione. Infatti, è possibile scrivere il termine di galleggiamento come

$$\left(1 - \alpha \tau + \Delta T \frac{z}{h} \right) \mathbf{g} = \alpha \tau g \hat{\mathbf{z}} - \nabla \left(gz + \Delta T \frac{z^2}{2h} \right). \quad (1.42)$$

Definendo una “pressione generalizzata” P' ,

$$P' = P + \rho_0 g z + \rho_0 \Delta T \frac{z^2}{2h}, \quad (1.43)$$

le equazioni di Boussinesq diventano

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P' = \alpha g \tau \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau - \frac{\Delta T}{h} w = D \nabla^2 \tau, \end{cases} \quad (1.44)$$

e le condizioni al contorno della temperatura vengono espresse anch'esse in funzione di τ ,

$$\tau(x, z = 0) = \tau(x, z = h) = 0. \quad (1.45)$$

	x	t	u	τ	P'	ρ_0	ν	D	α	g	h	ΔT
M					1	1						
L	1		1		-1	-3	2	2		1	1	
T		1	-1		-2		-1	-1		-2		
Θ				1					-1			1

Tabella 1.2: Teorema di Buckingham. Grandezze dimensionali e unità fisiche.

1.5.3 Equazioni di Boussinesq in forma adimensionale

Si ricava la forma adimensionale delle equazioni (1.44) e delle condizioni al contorno (1.45) utilizzando il teorema π di Buckingham.

Nel problema di Boussinesq compaiono 12 grandezze dimensionali (13 se si volesse considerare la componente w della velocità \mathbf{u} in maniera indipendente),

$$\underbrace{\mathbf{x}, t}_{\text{tar. indep.}} , \underbrace{\mathbf{u}, \tau, P'}_{\text{campi } f(\mathbf{x}, t)} , \underbrace{\rho_0, \nu, D, \alpha, g}_{\text{ propr. del fluido e del problema}} , \underbrace{h, \Delta T}_{\text{ dominio e condizioni al contorno}} , \quad (1.46)$$

e 4 grandezze fisiche fondamentali: massa M , lunghezza L , tempo T e temperatura Θ . Secondo il teorema di Buckingham, il problema può quindi essere caratterizzato da 8 numeri adimensionali. Utilizzando la stessa scala di lunghezze per adimensionalizzare \mathbf{x} e h e la stessa scala di temperature per adimensionalizzare τ e ΔT , sono sufficienti 6 numeri adimensionali.

È necessario scegliere 4 grandezze fisiche di riferimento indipendenti e, possibilmente, rappresentative del problema con le quali adimensionalizzare le altre. Il problema della convezione non forzata descritto dalle equazioni di Boussinesq è caratterizzato dalla differenza di temperatura ΔT e dalla distanza h delle superfici, dal fluido considerato e dall'intensità delle forze di volume. I campi di velocità \mathbf{u} , di “temperatura” τ e di “pressione” P' sono un risultato, una conseguenza, delle condizioni al contorno e del fluido impiegato: non esistono scale di velocità e pressione indipendenti, mentre il campo di temperatura può essere scalato sulla differenza ΔT . Non esiste nemmeno una scala indipendente dei tempi, poiché l'evoluzione del sistema è determinata dalle condizioni al contorno e dal fluido utilizzato.

Come grandezze dimensionali di riferimento indipendenti e caratteristiche del problema vengono scelte la densità del fluido, il coefficiente di diffusione termica, la distanza tra le superfici e la loro differenza di temperatura:

$$\tilde{\rho} = \rho_0, \quad \tilde{D} = D, \quad \tilde{L} = h, \quad \tilde{\Theta} = \Delta T. \quad (1.47)$$

Ora è possibile scrivere ogni grandezza dimensionale come prodotto di una grandezza omogenea di riferimento (dimensionale) e del suo valore adimensionale. Si può quindi scrivere,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \tilde{L} \mathbf{x}^* , & t &= \tilde{T} t^* \\ \mathbf{u} &= \tilde{U} \mathbf{u}^* , & \tau &= \tilde{\Theta} \tau^* , & P' &= \tilde{P} P'^* \\ \rho_0 &= \tilde{\rho} \rho_0^* , & \nu &= \tilde{\nu} \nu^* , & D &= \tilde{D} D^* , & \alpha &= \tilde{\alpha} \alpha^* , & g &= \tilde{g} g^* \\ h &= \tilde{L} h^* , & \Delta T &= \tilde{\Theta} \Delta T^* , \end{aligned} \quad (1.48)$$

avendo utilizzato la stessa scala di lunghezza \tilde{L} come riferimento per la coordinata spaziale indipendente \mathbf{x} e la distanza h tra le due superfici, e la stessa scala di temperatura $\tilde{\Theta}$

come riferimento per il campo di temperatura τ e la differenza di temperatura tra le due superfici ΔT , come anticipato in precedenza. Le 12 grandezze dimensionali sono state adimensionalizzate usando 10 scale di riferimento: da queste è possibile ricavare 6 numeri adimensionali con cui descrivere il problema. Inserendo le espressioni (1.48) nel problema di Boussinesq (1.44), si ricava

$$\begin{cases} \frac{\tilde{U}}{\tilde{T}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\tilde{U}^2}{\tilde{L}} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \frac{\tilde{\nu} \tilde{U}}{\tilde{L}^2} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho} \tilde{L}} \frac{1}{\rho_0^*} \nabla P^{*'} = \tilde{\alpha} \tilde{g} \tilde{\theta} \alpha^* g^* \tau^* \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\tilde{U}}{\tilde{L}} \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \\ \frac{\tilde{\Theta}}{\tilde{T}} \frac{\partial \tau^*}{\partial t^*} + \frac{\tilde{U} \tilde{\Theta}}{\tilde{L}} \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \tau^* - \frac{\tilde{U} \tilde{\Theta}}{\tilde{L}} \frac{\Delta T^*}{h^*} w^* = \frac{\tilde{D} \tilde{\Theta}}{\tilde{L}^2} D^* \nabla^{*2} \tau^* , \end{cases} \quad (1.49)$$

con le conzioni al contorno “free”

$$\text{free: } \begin{cases} \tilde{\Theta} \tau^*(\tilde{L}x^*, \tilde{L}z^* = 0) = 0 & , & \tilde{\Theta} \tau^*(\tilde{L}x^*, \tilde{L}z^* = \tilde{L}h^*) = 0 \\ \frac{\tilde{U}}{\tilde{L}} \frac{\partial u^*}{\partial z^*}(\tilde{L}x^*, \tilde{L}z^* = 0) = 0 & , & \frac{\tilde{U}}{\tilde{L}} \frac{\partial u^*}{\partial z^*}(\tilde{L}x^*, \tilde{L}z^* = \tilde{L}h^*) = 0 \\ \tilde{U} w^*(\tilde{L}x^*, \tilde{L}z^* = 0) = 0 & , & \tilde{U} w^*(\tilde{L}x^*, \tilde{L}z^* = \tilde{L}h^*) = 0 \end{cases} \quad (1.50)$$

Con un abuso di notazione, d’ora in poi si indicano le grandezze adimensionali senza asterisco e i campi adimensionali vengono definiti come funzione delle variabili indipendenti adimensionali,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{U} \mathbf{u}^*(\tilde{L} \mathbf{x}^*, \tilde{T} t^*) \rightarrow \tilde{U} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) . \quad (1.51)$$

Le grandezze di riferimento delle grandezze costanti vengono scelte coincidenti con la grandezza stessa, cosicché le grandezze adimensionali relative sono uguali a 1,

$$\begin{aligned} \rho_0 = \tilde{\rho} \quad , \quad \nu = \tilde{\nu} \quad , \quad D = \tilde{D} \quad , \quad \alpha = \tilde{\alpha} \quad , \quad g = \tilde{g} \\ h = \tilde{L} \quad , \quad \Delta T = \tilde{\Theta} . \end{aligned} \quad (1.52)$$

Dividendo l’equazione della quantità di moto per $\tilde{\nu} \tilde{U} / \tilde{L}^2$, il vincolo di incomprimibilità per \tilde{U} / \tilde{L} e l’equazione dell’energia per $\tilde{D} \tilde{\Theta} / \tilde{L}^2$, il problema di Boussinesq diventa

$$\begin{cases} \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{\nu} \tilde{T}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\tilde{U} \tilde{L}}{\tilde{\nu}} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{P} \tilde{L}}{\tilde{\rho} \tilde{\nu} \tilde{U}} \nabla P^{*'} = \frac{\tilde{\alpha} \tilde{g} \tilde{\Theta} \tilde{L}^2}{\tilde{\nu} \tilde{U}} \tau^* \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \\ \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{D} \tilde{T}} \frac{\partial \tau^*}{\partial t^*} + \frac{\tilde{U} \tilde{L}}{\tilde{D}} \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \tau^* - \frac{\tilde{U} \tilde{L}}{\tilde{D}} w^* = \nabla^{*2} \tau^* , \end{cases} \quad (1.53)$$

con le conzioni al contorno “free”

$$\text{free: } \begin{cases} \tau^*(x^*, z^* = 0) = 0 & , & \tau^*(x^*, z^* = 1) = 0 \\ \frac{\partial u^*}{\partial z^*}(x^*, z^* = 0) = 0 & , & \frac{\partial u^*}{\partial z^*}(x^*, z^* = 1) = 0 \\ w^*(x^*, z^* = 0) = 0 & , & w^*(x^*, z^* = 1) = 0 . \end{cases} \quad (1.54)$$

Nel problema (1.53-1.54) compaiono 6 numeri adimensionali. Siamo arrivati al risultato previsto dal teorema di Buckingham. Prima di andare avanti, conviene comunque fare un’osservazione. Solo 5 dei 6 numeri adimensionali trovati sono tra di loro indipendenti: in particolare solo 3 dei 4 numeri adimensionali

$$\pi_1 = \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{D} \tilde{T}} , \quad \pi_2 = \frac{\tilde{U} \tilde{L}}{\tilde{D}} , \quad \pi_3 = \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{\nu} \tilde{T}} , \quad \hat{\pi}_4 = \frac{\tilde{U} \tilde{L}}{\tilde{\nu}} = \pi_2 \frac{\pi_3}{\pi_1} \quad (1.55)$$

sono linearmente indipendenti. Sembra di aver commesso un errore poiché abbiamo trovato una contraddizione del teorema di Buckingham. L'apparente errore si nasconde nel termine adimensionale $\frac{\tilde{\alpha}\tilde{g}\tilde{\theta}\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{U}}$. Questo termine infatti è il prodotto dei numeri adimensionali $\tilde{\alpha}\tilde{\theta}$ e $\frac{\tilde{g}\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{U}}$. I sei numeri adimensionali indipendenti che caratterizzano il problema sono quindi

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{D}\tilde{T}} \quad , \quad \pi_2 = \frac{\tilde{U}\tilde{L}}{\tilde{D}} \quad , \quad \pi_3 = \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{T}} \\ \pi_4 &= \frac{\tilde{P}\tilde{L}}{\tilde{\rho}\tilde{\nu}\tilde{U}} \quad , \quad \pi_5 = \tilde{\alpha}\tilde{\Theta} \quad , \quad \pi_6 = \frac{\tilde{g}\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{U}} .\end{aligned}\tag{1.56}$$

Poiché il coefficiente di dilatazione termica α e la forza per unità di volume g compaiono sempre attraverso il loro prodotto, questo si può considerare come un'unica variabile, αg . In questo caso, i 5 numeri adimensionali che descrivono il problema composto dalle 9 (10-1) scale di riferimento sono

$$\pi'_1 = \pi_1, \quad \pi'_2 = \pi_2, \quad \pi'_3 = \pi_3, \quad \pi'_4 = \pi_4, \quad \pi'_5 = \pi_5\pi_6 .\tag{1.57}$$

Non essendoci scale di velocità, tempo e pressione indipendenti, è possibile definire queste scale a partire dalle 4 grandezze fisiche di riferimento \tilde{L} , $\Delta\tilde{T}$, $\tilde{\rho}$, \tilde{D} , imponendo il valore unitario di alcuni parametri adimensionali,

$$\begin{aligned}\pi'_1 = 1 &\quad \rightarrow \quad \tilde{T} = \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{D}} \\ \pi'_2 = 1 &\quad \rightarrow \quad \tilde{U} = \frac{\tilde{D}}{\tilde{L}} \\ \pi'_4 = 1 &\quad \rightarrow \quad \tilde{P} = \frac{\tilde{\rho}\tilde{\nu}\tilde{U}}{\tilde{L}} .\end{aligned}\tag{1.58}$$

Gli unici due parametri adimensionali caratteristici del problema rimangono

$$\begin{aligned}\Pi_1 = \pi'_3 &= \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{L}^2/\tilde{D}} \quad \rightarrow \quad \Pi_1 = \frac{\tilde{D}}{\tilde{\nu}} = \frac{1}{Pr} \\ \Pi_5 = \pi'_5 &= \frac{\tilde{\alpha}\tilde{\Theta}\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{D}/\tilde{L}} \quad \rightarrow \quad \Pi_5 = \frac{\tilde{\alpha}\tilde{g}\tilde{\Theta}\tilde{L}^3}{\tilde{\nu}\tilde{D}} = Ra = \\ &= \frac{\tilde{\alpha}\tilde{g}\tilde{\Theta}\tilde{L}^3}{\tilde{\nu}^2} \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{D}} = Gr Pr ,\end{aligned}\tag{1.59}$$

nei quali si possono riconoscere i numeri di Prandtl, Pr , di Rayleigh, Ra , e di Grashof, Gr . La forma adimensionale del problema di Boussinesq tra due superfici piane è quindi

$$\begin{cases} \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] - \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla P' = Ra \tau \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau - w = \nabla^2 \tau , \end{cases}\tag{1.60}$$

con le conizioni al contorno “free”

$$\text{free: } \begin{cases} \tau(x, z=0) = 0 & , & \tau(x, z=1) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x, z=0) = 0 & , & \frac{\partial u}{\partial z}(x, z=1) = 0 \\ w(x, z=0) = 0 & , & w(x, z=1) = 0 . \end{cases}\tag{1.61}$$

1.5.4 Equazione della vorticità e funzione di corrente nell'approssimazione di Boussinesq

Dall'equazione della quantità di moto in (1.60) è possibile ricavare l'equazione della vorticità, applicandole l'operatore di rotore. Poichè il problema è piano e bidimensionale, il campo di vorticità ha componente non nulla solo fuori dal piano xz . Utilizzando un sistema di coordinate cartesiano, il campo di vorticità $\boldsymbol{\omega}(x, z, t) = \xi(x, z, t)\hat{\mathbf{y}}$ soddisfa l'equazione

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi \right] - \nabla^2 \xi = -Ra \frac{\partial \tau}{\partial x} . \quad (1.62)$$

Si può poi introdurre la funzione di corrente ψ ,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} , \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} , \quad (1.63)$$

in modo tale da soddisfare identicamente il vincolo di incomprimibilità. La componente y del campo di vorticità diventa

$$\xi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \nabla^2 \psi , \quad (1.64)$$

e il termine advettivo di una funzione f qualsiasi può essere scritta come un determinante,

$$\mathbf{u} \cdot \nabla f = u \frac{\partial f}{\partial x} + w \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} = \begin{vmatrix} f_x & f_z \\ \psi_x & \psi_z \end{vmatrix} =: \frac{\partial(f, \psi)}{\partial(x, z)} . \quad (1.65)$$

Il sistema di equazioni del problema di Boussinesq diventa quindi

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial(\xi, \psi)}{\partial(x, z)} = Pr \nabla^2 \xi - Pr Ra \frac{\partial \tau}{\partial x} \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial(\tau, \psi)}{\partial(x, z)} = \nabla^2 \tau + w . \end{cases} \quad (1.66)$$

1.5.5 Approssimazione di Fourier–Galerkin del problema di Boussinesq

Utilizzando la geometria del dominio, è possibile espandere le funzioni che compaiono nelle equazioni (1.66) come somma di prodotti di funzioni armoniche in x e z , la cui ampiezza dipende dal tempo

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= \sum_m \sum_k a_{m,k}(t) \sin(m\pi z + \phi_m^a) \sin(k\pi x + \phi_k^a) \\ \tau(x, z, t) &= \sum_m \sum_k b_{m,k}(t) \sin(m\pi z + \phi_m^b) \sin(k\pi x + \phi_k^b) . \end{aligned} \quad (1.67)$$

Le condizioni al contorno (1.61) del problema con due superfici infinite “free” impongono che la componente $w = -\partial\psi/\partial x$ e la derivata $\partial u/\partial z = \partial^2\psi/\partial z^2$ siano nulle per $z = 0, 1$ per ogni istante temporale e per ogni valore di x . Le condizioni al contorno su w impongono le seguenti condizioni sull'espansione armonica delle funzioni,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{z=0} = \sum_m \sum_k k\pi a_{m,k}(t) \sin \phi_m^a \cos(k\pi x + \phi_k^a) \\ &\rightarrow \phi_m^a = 0 , \\ 0 &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{z=1} = \sum_m \sum_k k\pi a_{m,k}(t) \sin m\pi \cos(k\pi x + \phi_k^a) \\ &\rightarrow m \in \mathbb{Z} . \end{aligned} \quad (1.68)$$

Le stesse condizioni derivano dalle condizioni al contorno su $\partial u / \partial z$. Le condizioni al contorno sulla temperatura in impongono le seguenti condizioni sull'espansione armonica della funzione τ

$$\begin{aligned} 0 = \tau \Big|_{z=0} &= \sum_m \sum_k b_{m,k}(t) \sin \phi_m^b \sin(k\pi x + \phi_k^b) \\ &\rightarrow \phi_m^b = 0, \\ 0 = \tau \Big|_{z=1} &= \sum_m \sum_k b_{m,k}(t) \sin m\pi \sin(k\pi x + \phi_k^b) \\ &\rightarrow m \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

A causa dell'omogeneità della direzione x , nella quale il dominio è infinito, non ci sono condizioni sul numero d'onda k , che può assumere tutti i valori $\in \mathbb{R}$, e sulla fase delle armoniche in x . Le espansioni (1.67) possono quindi essere scritte come

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_k a_{m,k}^1(t) \sin(m\pi z) \sin(k\pi x) + a_{m,k}^2(t) \sin(m\pi z) \cos(k\pi x) \\ \tau(x, z, t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_k b_{m,k}^1(t) \sin(m\pi z) \sin(k\pi x) + b_{m,k}^2(t) \sin(m\pi z) \cos(k\pi x). \end{aligned} \quad (1.70)$$

1.5.6 Dal problema di Boussinesq al modello di Lorenz

Le espansioni (1.70) possono essere *brutalmente* troncate per ottenere un modello dinamico di dimensione $N_d = 3$ partendo dal modello continuo, che ha dimensione infinita. Le espansioni (1.70) vengono troncate mantenendo solo 3 termini

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= a(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x) \\ \tau(x, z, t) &= b(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x) + c(t) \sin(2\pi z), \end{aligned} \quad (1.71)$$

avendo definito $a(t) = a_{1,k}^1(t)$, $b(t) = b_{1,k}^2(t)$, $c(t) = b_{2,0}^1(t)$. Usando le espansioni (1.71), la componente y del campo di vorticità $\xi = \nabla^2 \psi$ diventa

$$\xi = -\pi^2(1 + k^2)\psi = -\pi^2(1 + k^2)a(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x) \quad (1.72)$$

I due determinanti che compaiono nelle equazioni (1.66) valgono

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\xi, \psi)}{\partial(x, z)} &= \left[-\pi^3 k(1 + k^2)a(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x) \right] [a(t)\pi \cos(\pi z) \sin(k\pi x)] + \\ &\quad - \left[-\pi^3(1 + k^2)a(t) \cos(\pi z) \sin(k\pi x) \right] [a(t)\pi k \sin(\pi z) \cos(k\pi x)] = 0, \end{aligned} \quad (1.73)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\tau, \psi)}{\partial(x, z)} &= [-\pi k b(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x)] [a(t)\pi \cos(\pi z) \sin(k\pi x)] + \\ &\quad - [\pi b(t) \cos(\pi z) \cos(k\pi x) + 2\pi c(t) \cos(2\pi z)] [a(t)\pi k \sin(\pi z) \cos(k\pi x)] = \\ &= -k\pi^2 a(t)b(t) \frac{\sin(2\pi z)}{2} - 2k\pi^2 a(t)c(t) \sin(\pi z) \cos(2\pi z) \cos(k\pi x). \end{aligned} \quad (1.74)$$

I laplaciani che compaiono nelle equazioni (1.66) valgono

$$\nabla^2 \xi = -\pi^2(1 + k^2)\xi = \pi^4(1 + k^2)^2 a(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x), \quad (1.75)$$

e

$$\nabla^2 \tau = -\pi^2(1+k^2)b(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x) - 4\pi^2 c(t) \sin(2\pi x) . \quad (1.76)$$

Il numero di Prandtl viene indicato come $Pr = \sigma$, il numero di Rayleigh come $Ra = R$. Inserendo le espansioni (1.71) all'interno delle equazioni (1.66), il problema troncato di Boussinesq diventa,

$$\begin{cases} -\sigma\pi^2(1+k^2)\dot{a}(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x) = \sigma\pi^4(1+k^2)^2 a(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x) + \\ \quad + \sigma R \pi k b(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x) \\ \dot{b}(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x) + \dot{c}(t) \sin(2\pi x) + \\ \quad - k\pi^2 a(t) b(t) \frac{\sin(2\pi z)}{2} - 2k\pi^2 a(t) c(t) \sin(\pi z) \cos(2\pi z) \cos(k\pi x) = \\ = -\pi^2(1+k^2)b(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x) - 4\pi^2 c(t) \sin(2\pi x) + \\ \quad - \pi k a(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x) . \end{cases} \quad (1.77)$$

Raccogliendo il termine $\sin(\pi z) \sin(k\pi x)$ nell'equazione della vorticità si ottiene l'equazione

$$-\pi^2(1+k^2)\dot{a} = \sigma\pi^4(1+k^2)^2 a(t) + \sigma R \pi k b(t) . \quad (1.78)$$

L'equazione della temperatura viene "proiettata" sulle funzioni di base $\sin(\pi z) \cos(k\pi x)$ e $\sin(2\pi x)$ e sfruttando l'ortogonalità delle funzioni armoniche. La proiezione consiste nella moltiplicazione dell'equazione per le funzioni di base $\sin(\pi z) \cos(k\pi x)$ e nell'integrazione in $(x, z) \in [0, \frac{2}{k}] \times [0, 1]$. Usando il valore degli integrali,

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{2/k} \sin(k\pi x)^2 dx &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{2/k} [1 - \cos(2k\pi x)] dx = \frac{1}{k} \\ \int_{x=0}^{2/k} \sin(k\pi x) \cos(k\pi x) dx &= \frac{1}{k\pi} \int_{x=0}^{2/k} \sin(k\pi x) d(\sin(k\pi x)) = 0 \\ \int_{x=0}^{2/k} \cos(k\pi x)^2 dx &= \frac{1}{k} , \end{aligned} \quad (1.79)$$

e degli integrali

$$\begin{aligned} \int_{z=0}^1 \sin(\pi z)^2 dz &= \frac{1}{2} \int_{z=0}^1 [1 - \cos(2\pi z)] dz = \frac{1}{2} \\ \int_{z=0}^1 \sin(\pi z) \sin(\pi z) \cos(2\pi z) dz &= \frac{1}{2} \int_{z=0}^1 [1 - \cos(2\pi z)] \cos(2\pi z) dz = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{z=0}^1 \cos^2(2\pi z) dz = -\frac{1}{4} . \end{aligned} \quad (1.80)$$

La proiezione dell'equazione della vorticità sulla funzione $\sin(\pi z) \cos(k\pi x)$ è

$$\frac{1}{2}\dot{b}(t) - \frac{1}{4}2k\pi^2 a(t)c(t) = -\frac{1}{2}\pi^2(1+k^2)b(t) - \frac{1}{2}\pi k a(t) , \quad (1.81)$$

mentre la proiezione dell'equazione della vorticità sulla funzione $\sin(2\pi z)$ è

$$\frac{1}{k}\dot{c}(t) - \frac{1}{k} \frac{\pi^2 k}{2} a(t)b(t) = -\frac{1}{k} 4\pi^2 c(t) . \quad (1.82)$$

Le equazioni diventano quindi

$$\begin{cases} -\pi^2(1+k^2)\dot{a} = \sigma\pi^4(1+k^2)^2a(t) + \sigma R\pi k b(t) \\ \dot{b} = -\pi^2(1+k^2)b(t) + \pi^2ka(t)c(t) - \pi ka(t) \\ \dot{c} = \frac{\pi^2k}{2}a(t)b(t) - 4\pi^2c(t) . \end{cases} \quad (1.83)$$

Partendo da queste equazioni, si introduce qualche cambio di variabile per riportarsi all'espressione classica del sistema di Lorenz. Viene introdotto il tempo $t' = \pi^2(k^2 + 1)t$, cosicché

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{dt'}{dt} \frac{df}{dt'} = \pi^2(k^2 + 1) \frac{df}{dt'} . \quad (1.84)$$

Con un abuso di notazione, d'ora in poi si indica $(\dot{})$ la derivata rispetto a t' . La stessa variabile t' viene indicata con t . Le equazioni diventano

$$\begin{cases} \dot{a}(t) = \sigma a(t) + \sigma R \frac{k}{\pi^3(k^2 + 1)^2} b(t) \\ \dot{b}(t) = -b(t) + \frac{k}{k^2 + 1} a(t)c(t) - \frac{k}{\pi(k^2 + 1)} a(t) \\ \dot{c}(t) = \frac{k}{2(k^2 + 1)} a(t)b(t) - \frac{4}{k^2 + 1} c(t) . \end{cases} \quad (1.85)$$

Viene definito infine il cambio di variabili

$$\begin{cases} X(t) = \frac{k}{\sqrt{2}(k^2 + 1)} a(t) \\ Y(t) = \frac{k}{\sqrt{2}(k^2 + 1)} \left[-\frac{Rk}{\pi^3(k^2 + 1)^2} \right] b(t) \\ Z(t) = \left[-\frac{Rk^2}{\pi^3(k^2 + 1)} \right] c(t) \end{cases} \quad (1.86)$$

che porta alla forma classica del sistema dinamico di Lorenz

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} = -Y + \rho X - XZ \\ \dot{Z} = -\beta Z + XY , \end{cases} \quad (1.87)$$

avendo definito i parameteri

$$\rho = \frac{Rk^2}{\pi^4(k^2 + 1)^2} , \quad \beta = \frac{4}{k^2 + 1} . \quad (1.88)$$

1.5.7 Alcuni concetti di stabilità

Prima di indagare il sistema di Lorenz vengono introdotti alcuni concetti utili per studiare la stabilità di un generico sistema dinamico,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 . \quad (1.89)$$

Alcuni di questi concetti non sono nuovi; tutte queste definizioni verranno usate (e risulteranno più chiare) nella sezione successiva dedicata al sistema di Lorenz.

Spazio delle fasi e stati di un sistema. Lo spazio delle fasi è uno spazio nel quale i punti rappresentano i possibili stati del sistema. Lo stato di un sistema dinamico è identificato dal valore delle sue variabili di stato, ovvero le variabili che lo descrivono in maniera esaustiva da poterne prevederne l'evoluzione.⁴ L'evoluzione libera di un sistema dinamico viene descritta dalle traiettorie nel suo spazio delle fasi.

Equilibri e cicli limite. Un equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$ del sistema è una soluzione stazionaria delle equazioni del sistema dinamico, cioè

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) . \quad (1.90)$$

Un ciclo limite di periodo T è una traiettoria periodica del sistema, tale per cui

$$\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t) \quad , \quad \forall t , \quad (1.91)$$

rappresentata nello spazio delle fasi da un'orbita chiusa (e isolata).

Stabilità alla Lyapunov. Lo studio di stabilità alla Lyapunov riguarda l'evoluzione locale del sistema dinamico con **condizioni iniziali perturbate**. Qualitativamente, un punto di equilibrio è stabile se, partendo da uno stato “vicino” all'equilibrio, lo stato del sistema rimane per sempre “vicino” all'equilibrio. Inoltre, l'equilibrio è asintoticamente stabile se lo stato converge verso il punto di equilibrio, $\mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$ per $t \rightarrow \infty$.

La stabilità di Lyapunov di un equilibrio può essere indagata attraverso l'analisi degli autovalori del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio.

Stabilità strutturale. La stabilità strutturale considera l'evoluzione del sistema in seguito a perturbazioni del sistema stesso. Un sistema dinamico è strutturalmente stabile se le traiettorie nel suo spazio delle fasi non cambiano qualitativamente: ad esempio, in un sistema strutturalmente stabile alla perturbazione di un parametro, non cambiano il numero dei punti di equilibrio e cicli limite.

1.5.8 Sistema dinamico di Lorenz

In questa sezione si descrive, senza nessuna pretesa di completezza, lo studio di stabilità del sistema dinamico di Lorenz,

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} = -Y + \rho X - XZ \\ \dot{Z} = -\beta Z + XY , \end{cases} \quad (1.92)$$

come primo esempio di studio di stabilità di un sistema fluidodinamico. Si studia la stabilità del sistema di Lorenz al variare del parametro ρ , mantenendo costante il valore dei

⁴Conoscendo lo stato del sistema **con esattezza** è possibile descrivere l'evoluzione libera del sistema, in assenza di perturbazioni e forze esterne. In fondo a questa sezione, sarà più chiara la necessità di conoscere *con esattezza* lo stato iniziale del sistema, per prevederne l'evoluzione.

parametri σ e β . Lorenz usò come valori $\sigma = 10$ e $\beta = 8/3$. Il numero di Prandtl assume un valore paragonabile a quello dell'acqua alla temperatura di 20°C , che vale circa $Pr \approx 7$. Il numero di Prandtl per l'aria e altri gas vale circa 0.7. Il valore $\beta = 8/3$ corrisponde a un numero d'onda fondamentale in direzione x uguale a $\frac{k}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{\beta} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.3536$.

Punti di equilibrio

I punti di equilibrio del sistema di Lorenz soddisfano le equazioni stazionarie

$$\begin{cases} 0 = -\sigma X + \sigma Y & \rightarrow Y = X \\ 0 = -Y + \rho X - XZ & \searrow \rightarrow X[X^2 - (\rho - 1)] = 0 \\ 0 = -\beta Z + XY & \rightarrow X^2 = \beta Z \quad \nearrow \end{cases} \quad (1.93)$$

L'equazione $X(X^2 - \rho) = 0$ ha una sola soluzione reale se $\rho < 1$, tre soluzioni per $\rho \geq 1$. Quindi per valori di $\rho < 1$ esiste un unico punto di equilibrio,

$$\mathbf{E1}: (\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{Z}_1) = (0, 0, 0) . \quad (1.94)$$

Per valori di $\rho \geq 1$ esistono tre punti di equilibrio,

$$\begin{aligned} \mathbf{E1}: (\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{Z}_1) &= (0, 0, 0) , \\ \mathbf{E2}: (\bar{X}_2, \bar{Y}_2, \bar{Z}_2) &= (-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1) , \\ \mathbf{E3}: (\bar{X}_3, \bar{Y}_3, \bar{Z}_3) &= (+\sqrt{\beta(\rho - 1)}, +\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1) . \end{aligned} \quad (1.95)$$

I campi di velocità e temperatura degli equilibri del sistema fisico corrispondenti ai punti di equilibrio del sistema di Lorenz sono raffigurati in figura (1.1). L'equilibrio **E1** rappresenta la soluzione statica, il cui il campo di velocità è nullo: non sono presenti moti convettivi e la trasmissione della temperatura avviene solo per conduzione (diffusione). Questo equilibrio è stabile per valori del parametro $\rho < 1$. Per valori $\rho > 1$ questo equilibrio diventa instabile e nascono i due equilibri “simmetrici” **E2,3** che rappresentano dei moti convettivi stabili, traslati tra di loro di metà della lunghezza d'onda $\frac{k}{2}$: i moti convettivi tendono a portare il fluido caldo dalla parete inferiore (a temperatura maggiore, per $\rho > 0$, corrispondente a $Ra > 0$, e quindi $\Delta T = T_w - T_c > 0$) verso la parete superiore. La nascita di due equilibri stabili in corrispondenza del un cambio di stabilità di un equilibrio esistente è caratteristico dei sistemi dotati di simmetria.⁵ Questo cambiamento qualitativo nel piano delle fasi, corrisponde alla *biforcazione pitchfork* che verrà descritta, almeno brevemente, nelle sezioni successive.

I moti convettivi rappresentati dagli equilibri **E2,3** contribuiscono al mescolamento del fluido e a una maggiore trasmissione del calore tra le due superfici. Calcolando il flusso di calore trasmesso attraverso le superfici che delimitano il dominio in $z = 0$ e $z = 1$, si può verificare che la convezione è un fenomeno fisico più efficiente per la trasmissione del calore nei fluidi rispetto alla conduzione. Per esempio, il problema della trasmissione del calore tra due superfici parallele separate da un fluido si trova nella costruzione di infissi con **doppi vetri**: lo scopo dei doppi vetri separati da una sottile intercapedine d'aria è quello di sfruttare l'aria (ferma!) come ottimo isolante termico. L'intercapedine tra i due vetri deve essere sufficiente piccola da impedire la nascita dei moti convettivi,

⁵ Un esempio strutturale è quello della trave caricata di punta a compressione. Per valori limitati del carico esiste un'unica soluzione, stabile, rappresentata dalla trave senza freccia. Quando il carico di compressione supera il valore critico, questa soluzione diventa instabile. Nel problema piano, nascono due configurazioni di equilibrio stabili del sistema strutturale: la trave può inflettersi (in maniera indifferente in assenza di imperfezioni) verso destra o verso sinistra.

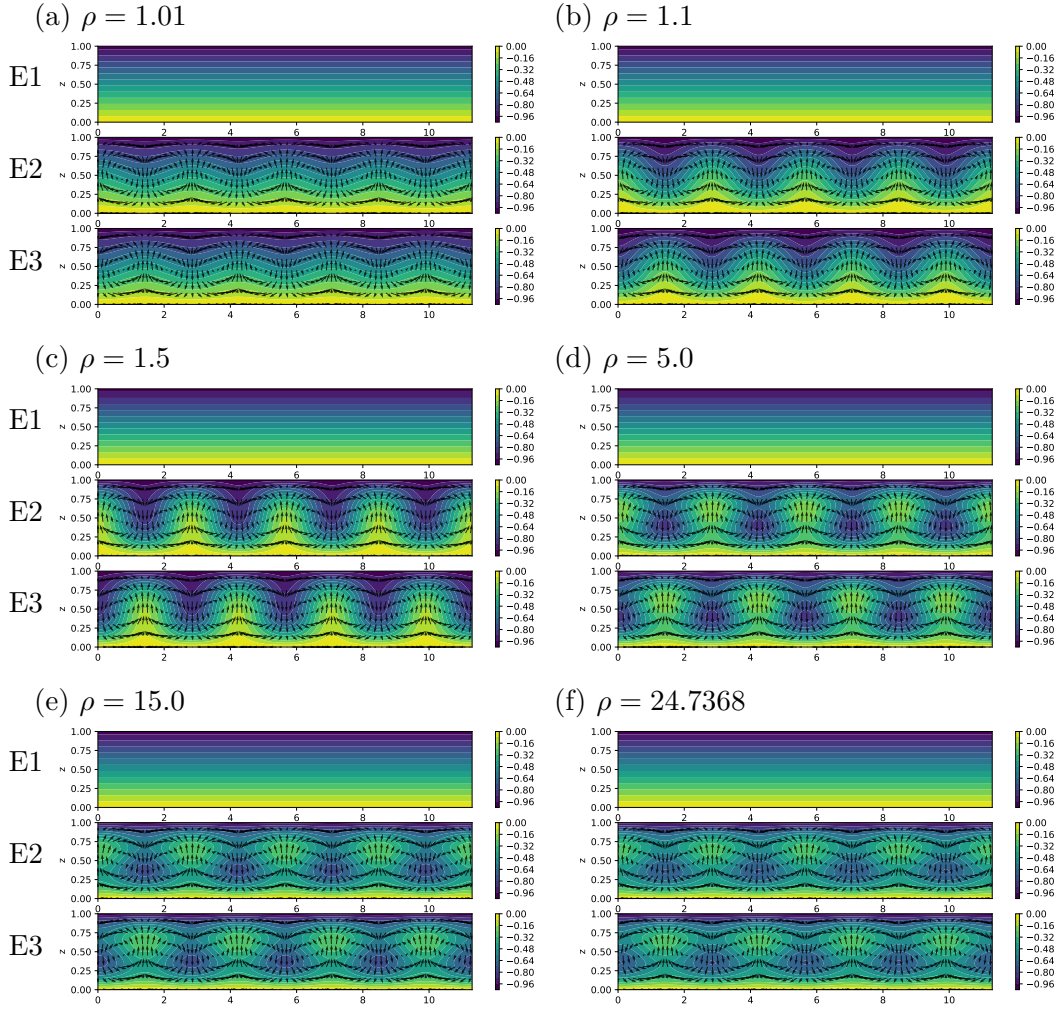


Figura 1.1: Equilibri del sistema di Lorenz per diversi valori del parametro $\rho > 1$. Il campo vettoriale della velocità è sovrapposto al campo di temperatura “scalato” $\tilde{T} = \frac{T(x,z) - \tilde{T}_w}{\delta T}$, i cui valori al contorno sono $\tilde{T}_w = 0$ sulla superficie inferiore a $z = 0$ e $\tilde{T}_c = -1$ sulla superficie superiore a $z = 1$.

che ridurrebbero l’efficienza dell’infisso (e l’efficienza energetica della casa). Le soluzioni convettive nel problema di Lorenz nascono quando il parametro ρ supera il valore critico $\rho_{cr} = 1$. Il parametro ρ è proporzionale al numero di Rayleigh,

$$\rho \sim Ra = \frac{\alpha g \Delta T h^3}{\nu D}, \quad (1.96)$$

e quindi proporzionale al cubo della distanza tra le due superfici, $\rho \sim h^3$. Si ricava la stessa conclusione utilizzata nella costruzione dei doppi vetri: per distanze h tra le due superfici limitate, il parametro ρ è inferiore del valore critico e l’unica soluzione stabile esistente è quella isolante di fluido in quiete.

Prima di studiare la stabilità locale “alla Lyapunov” dei punti di equilibrio, riprendendo la definizione di *stabilità strutturale* si scopre che il sistema di Lorenz non è strutturalmente stabile a perturbazioni del valore di ρ , quando $\rho = 1$: infatti per $\rho < 1$ esiste un solo punto di equilibrio, per $\rho > 1$ esistono tre punti di equilibrio e di conseguenza le traiettorie nel piano delle fasi subiscono un cambiamento qualitativo.

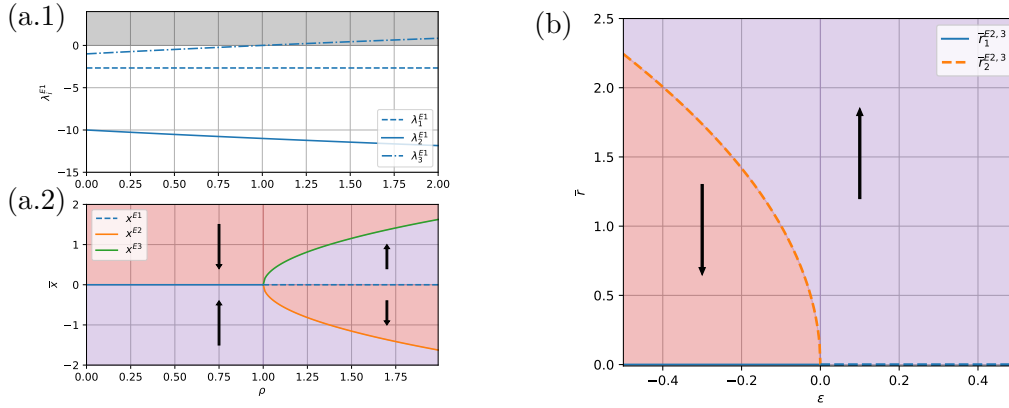


Figura 1.2: Diagrammi di biforcazione. (a) Biforcazione pitchfork per $\rho = 1$: (a.1) luogo delle radici dell'equilibrio **E1** e (a.2) diagramma di biforcazione. Per $\rho = 1$ l'equilibrio **E1** diventa instabile e nascono i due equilibri stabili **E2,3**. (b) Biforcazione di Hopf degli equilibri **E2,2**: diagramma di biforcazione, rappresentato utilizzando la forma normale. Per $\epsilon = 0$, $\rho = 24.7368$, il ciclo limite instabile collassa sull'equilibrio stabile, che diventa instabile.

Stabilità dell'equilibrio **E1**

Si studia la stabilità “alla Lyapunov” dell'equilibrio **E1**: $(0, 0, 0)$. Linearizzando il sistema non lineare di Lorenz attorno all'equilibrio **E1**, si ottiene il sistema linearizzato

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}, \quad \delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}|_{\mathbf{E1}} \delta\mathbf{x} \quad (1.97)$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}) &= -(\beta + \lambda)[(\sigma + \lambda)(1 + \lambda) - \sigma\rho] = \\ &= -(\beta + \lambda)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - \rho)]. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Gli autovalori del sistema linearizzato attorno al primo equilibrio sono quindi

$$\lambda_1^{E1} = -\beta, \quad \lambda_{2,3}^{E1} = -\frac{\sigma + 1}{2} \mp \frac{\sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - \rho)}}{2}. \quad (1.99)$$

Per valori positivi dei parametri, tutti gli autovalori sono reali. Gli autovalori λ_1^{E1} e λ_2^{E1} sono negativi per ogni valore di ρ , mentre l'autovalore λ_3^{E1} cambia segno per $\rho = 1$, come mostrato in figura (1.2)(a.1). L'analisi lineare di stabilità permette di concludere che l'equilibrio **E1** è linearmente stabile per $\rho < 1$ e instabile per $\rho > 1$, mentre non permette di affermare nulla sul caso $\rho = 1$.

Stabilità degli equilibri **E2, E3**

Per valori di $\rho \geq 1$ esistono i due equilibri **E2, E3**. Si studia la loro stabilità “alla Lyapunov” tramite lo studio degli autovalori del sistema linearizzato attorno ai punti di equilibrio,

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)} & \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)} & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}, \quad \delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}|_{\mathbf{E2,3}} \delta\mathbf{x}. \quad (1.100)$$

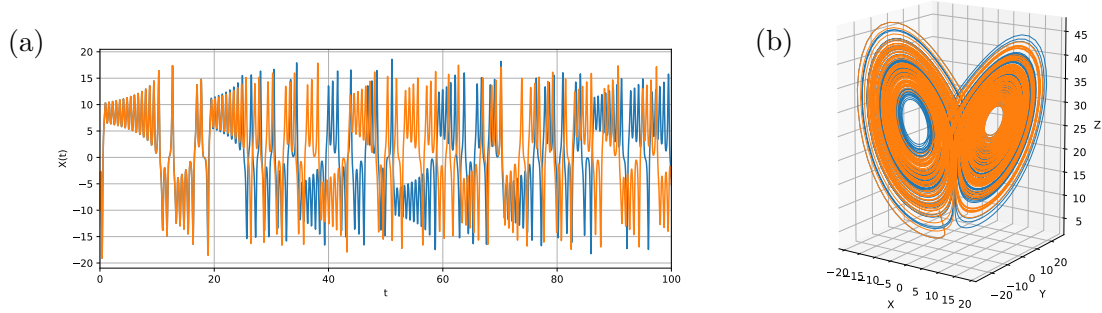


Figura 1.3: Dinamica caotica del sistema di Lorenz per $\rho = 24.74$: evoluzione del sistema con condizioni iniziali $\mathbf{x}_0^{(1)} = (-10, 10, 1)$, in blu, e $\mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(1)} + 1.0 \cdot 10^{-9}$, in arancione. (a) Evoluzione temporale della variabile $X(t)$: partendo da due condizioni iniziali “vicine”, le due traiettorie del sistema si discostano in maniera “non banale”. Il sistema dimostra un’evoluzione non periodica, estremamente sensibile alle condizioni iniziali e quindi caotica. (b) Attrattore di Lorenz nello spazio delle fasi: le traiettorie nello spazio delle fasi rivelano la presenza di un attrattore, “nelle vicinanze” del quale si svolge la dinamica asintotica del sistema.

Si può dimostrare (con il criterio di Routh-Hurwitz analiticamente, o calcolandone numericamente il valore) che i due punti di equilibrio sono stabili se $\rho < \frac{\sigma(\sigma+\beta+3)}{\sigma-1-\beta} \approx 24.7368$, utilizzando i valori $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$.

Biforcazioni, cicli limite e attrattori strani

L’analisi degli autovalori del sistema linearizzato attorno ai punti di equilibrio permette di determinarne le caratteristiche locali quando gli autovalori hanno parte reale diversa da zero. In corrispondenza del cambio di stabilità di un punto di equilibrio e/o della comparsa/scomparsa di punti di equilibrio (ma non solo!), le traiettorie nello spazio delle fasi del sistema subiscono un cambiamento qualitativo: il sistema non è strutturalmente stabile e si verifica una **biforcazione**.

Per studiare la stabilità locale di un equilibrio in presenza di autovalori a parte reale nulla è necessario costruire un’approssimazione non lineare del sistema. Si considera un punto di equilibrio per il quale il sistema linearizzato non ha autovalori instabili, ha N_s autovalori stabili e N_c autovalori a parte reale nulla e si vuole determinare l’evoluzione del sistema nelle vicinanze del punto di equilibrio. Si può dimostrare che la dinamica del sistema $N = N_s + N_c$ -dimensionale si riduce velocemente alla dinamica di un sistema N_c dimensionale: le N_s dinamiche asintoticamente stabili associate agli autovalori con parte reale negativa tendono ad annullarsi nell’intorno dell’equilibrio, mentre rimangono solo le dinamiche associate alle N_c dinamiche marginalmente stabili.

Si può usare un’espansione polinomiale per approssimare il sistema non lineare originale e costruire la **varietà centrale**, cioè la regione dello spazio delle fasi nella quale si svolgono le dinamiche marginalmente stabili.

Ad esempio, quando $\rho = 1$ il sistema di Lorenz nell’intorno dell’equilibrio **E1** (e dei nascenti equilibri **E2,3**) può essere ricondotto alla dinamica del sistema monodimensionale

$$\dot{a}(t) = f(a(t)) = a(t)[\alpha\varepsilon - \beta a(t)^2] \quad , \quad \text{con } \varepsilon := \rho - 1 \quad , \quad (1.101)$$

con $\alpha \approx 0.909$ e $\beta \approx 0.170$. Questo sistema coincide alla **forma normale** della biforcazione, cioè il sistema più semplice in grado di descrivere il cambiamento qualitativo del sistema. Lo studio della forma normale della biforcazione rivela l'esistenza di un unico equilibrio stabile $\bar{a}_1 = 0.0$ per $\epsilon \leq 0$, cioè $\rho \leq 1$. Per $\rho > 1$ l'equilibrio \bar{a}_1 diventa instabile e nascono due equilibri stabili $\bar{a}_{2,3} = \mp \sqrt{\alpha\epsilon/\beta}$. L'equazione (1.101) rappresenta la forma normale di una *biforcazione pitchfork*. Poiché $\beta > 0$, la biforcazione si definisce *supercritica*.

Analogamente, quando $\rho \approx 24.7368$ i due equilibri **E2,3** cambiano stabilità: u coppia di autovalori complessi coniugati attraversano l'asse immaginario e la loro parte reale diventa positiva. Questo tipo di instabilità strutturale viene definita *biforcazione di Hopf*: cambia la stabilità del punto di equilibrio considerato e nasce/sparisce un ciclo limite nel suo intorno (il ciclo limite nasce da o riduce al punto di equilibrio). L'approssimazione alla varietà centrale del sistema attorno a uno dei due equilibri conduce al sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = \alpha_r r \epsilon - \beta_r r^3 \\ \dot{\theta}(t) = \omega + \alpha_i \epsilon + \beta_i r^2 \end{cases} \quad , \quad \text{con } \epsilon := \rho - 24.7368 \quad , \quad (1.102)$$

dove è stata utilizzata la rappresentazione polare complessa $a(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ della variabile $a(t)$ che descrive la dinamica del sistema ridotta alla varietà centrale. Il parametro $\omega = 9.6245$ coincide con la parte immaginaria degli autovalori marginalmente stabili e gli altri parametri valgono:

$$\begin{aligned} \alpha_r &= 0.0302 & , & & \beta_r &= -0.003 \\ \alpha_i &= 0.1815 & , & & \beta_i &= -0.028 \end{aligned} \quad (1.103)$$

La prima equazione delle (1.102) è identica all'equazione che descrive la biforcazione pitchfork. In questo caso, però, il coefficiente β_r è minore di zero. Questo tipo di biforcazione si definisce *subcritica*. Si può facilmente dimostrare che per $\epsilon < 0$ esistono due (il raggio r di una rappresentazione polare deve essere ≥ 0) equilibri

$$\bar{\rho}_1 = 0 \quad , \quad \bar{\rho}_2 = \sqrt{-\alpha_r \epsilon / \beta_r} \quad . \quad (1.104)$$

Il primo equilibrio dell'equazione in r corrisponde a un punto fisso, poichè il raggio è nullo. Il secondo equilibrio corrisponde al raggio $\bar{\rho}_2$ del ciclo limite esistente per $\epsilon < 0$. Si dimostra quindi che un ciclo limite instabile coesiste con ognuno dei due punti di equilibri stabili **E2,3** per $\epsilon < 0$ (cioè $\rho < 24.7368$), almeno in un intervallo finito di valori di ρ . Quando $\epsilon = 0$ (cioè $\rho = 24.7368$), il ciclo limite instabile si riduce al punto di equilibrio. Per $\epsilon > 0$ il punto di equilibrio diventa instabile, mentre scompare il ciclo limite.

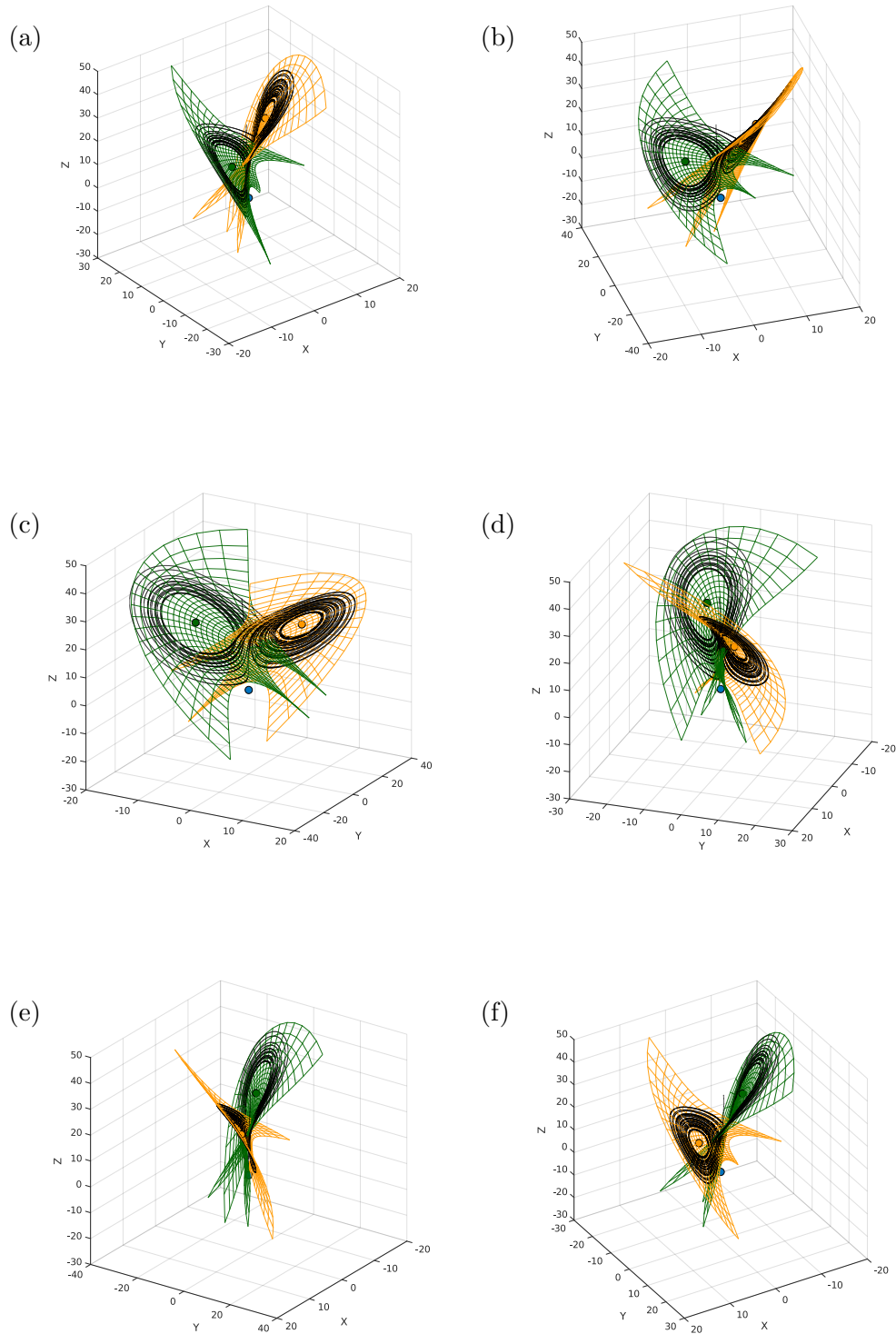


Figura 1.4: Evoluzione del sistema di Lorenz per $\rho = 24.7368$ nel piano delle fasi. Dinamica caotica, equilibri (**E1** in azzurro, **E2** in arancione e **E3** in verde) e varietà centrali dei due equilibri marginalmente stabili **E2,3**. La dinamica asintotica del sistema caotica del sistema alterna in maniera irregolare delle oscillazioni attorno ai due equilibri instabili sulle “nelle vicinanze” delle rispettive varietà centrali.

Rimangono aperte alcune questioni: è possibile descrivere i cicli limite esistenti per (alcuni) valori del parametro $\rho < 24.7368$? Qual è l'evoluzione del sistema per valori di $\rho > 24.7368$? Ha senso utilizzare il modello di Lorenz, un brutale troncamento di un sistema continuo che dà origine a un sistema tridimensionale, per descrivere l'evoluzione del sistema fisico per valori crescenti del numero di Rayleigh Ra , e quindi del parametro ρ ?

Partendo dall'espressione approssimata del ciclo limite ottenuta dalla forma normale della biforcazione di Hopf per $\rho \lesssim 24.7368$ è possibile calcolare la forma del ciclo limite per valori inferiori del parametro, tramite tecniche di **continuazione**: negli algoritmi di continuazione la soluzione di un problema, nota per un valore del parametro, viene utilizzata per stimare la guess iniziale dello stesso problema per un valore diverso del parametro. In particolare, per identificare la traiettoria periodica corrispondente a un ciclo limite si può utilizzare una tecnica di **bilanciamento armonico**: la traiettoria periodica viene scritta come serie di Fourier, della quale è necessario determinare i coefficienti.

Per valori di $\rho > 24.7368$ non esistono punti di equilibrio stabili e non esistono cicli limite stabili. La dinamica del sistema rimane confinata in una regione limitata dello spazio delle fasi, senza divergere. L'evoluzione del sistema rappresentata in figura (1.3) dimostra l'elevata sensibilità della soluzione alle condizioni iniziali e l'assenza di equilibri o dinamiche periodiche stabili, caratteristici di un **regime caotico**. L'evoluzione di lungo tempo del sistema avviene “nelle vicinanze” dell'attrattore di Lorenz, del quale si può intuire la forma grazie alle traiettorie rappresentate in figura (1.3)(b). La figura (1.4) rappresenta la traiettoria del sistema di Lorenz e le *varietà centrali* dei due equilibri **E2,3** marginalmente stabili per $\rho = 24.7368$. Qualitativamente, lo stato del sistema viene attratto su queste superfici, lungo le direzioni stabili. Su queste superfici poi, si può osservare la dinamica marginalmente stabile (di dimensione ridotta: per il sistema di Lorenz, di dimensione 2, invece della dimensione 3 del sistema completo) del sistema: lo stato del sistema inizialmente oscilla attorno all'equilibrio **E2** (ad esempio), prima di essere attratta in maniera “difficilmente prevedibile” dalla varietà centrale dell'equilibrio **E3** e iniziare ad oscillare attorno a quest'ultimo equilibrio.

L'approssimazione di Lorenz di dimensioni ridotte del sistema fisico continuo (e quindi di dimensione infinita) perde significato all'aumentare del numero di Rayleigh: all'aumentare del numero di Rayleigh infatti si attivano delle dinamiche più complesse, di dimensione maggiore, non descrivibili a un sistema tridimensionale.

Esercizio 1.1 — Similitudine ad alta velocità: missile. Un missile vola alla quota di 7000 m, dove la densità dell'aria è $\rho = 0.59 \text{ kg/m}^3$ e la sua temperatura è $T = -30.45^\circ\text{C}$, alla velocità costante $V_v = 505 \text{ km/h}$.

Determinare:

- il fattore di scala geometrico $\lambda = L_m/L_v$,
- la velocità dell'aria V_m ,

necessari per riprodurre correttamente i coefficienti aerodinamici del missile in una galleria del vento che operi a condizioni atmosferiche standard ($\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$, $p = 101325 \text{ Pa}$, $T = 15^\circ\text{C}$).

($V_m = 152.8 \text{ m/s}$, $\lambda = 0.507$)

Soluzione

Concetti. Similitudine fluidodinamica: numeri di Reynolds e di Mach.

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} \quad , \quad M = \frac{U}{c} . \quad (1.105)$$

Formula di Sutherland per la viscosità dinamica **dei gas**,

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \frac{C + T_0}{C + T} . \quad (1.106)$$

Svolgimento. Assumendo che l'aria si comporti come gas ideale, per il quale vale l'equazione di stato $p = \rho R T$, la velocità del suono vale $c = \sqrt{\gamma R T}$, dove $\gamma = c_p/c_v$ è il rapporto dei calori specifici a pressione e volume costante, che vale $\gamma = 1.4$ per un gas biatomico. La costante del gas R è definita come il rapporto tra la costante universale dei gas \mathcal{R} e la massa molare M_m , $R = \mathcal{R}/M_m$. La massa molare dell'aria secca vale $M_m = 28.96 \text{ kg/kmol}$ e la sua costante R vale

$$R = \frac{\mathcal{R}}{M_m} = \frac{8314.4 \text{ J/(kmol K)}}{28.97 \text{ kg/kmol}} = 287.0 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} . \quad (1.107)$$

La velocità del suono nell'aria alle condizioni termodinamiche del problema vale $c = 312.3 \text{ m/s}$. Il numero di Mach caratteristico della corrente è quindi $M = 0.45$ e gli effetti di comprimibilità non possono essere trascurati, poichè il numero di Mach è maggiore della valore convenzionale 0.3 che identifica il limite della validità dell'approssimazione di fluido incomprimibile. Per ottenere la similitudine tra problema reale e quello modellato (di dimensioni ridotte) è necessaria la similitudine geometrica e l'uguaglianza dei numeri adimensionali che caratterizzano il problema, il numero di Reynolds Re e il numero di Mach M .

$$\begin{cases} M_1 = M_2 \\ Re_1 = Re_2 \end{cases} . \quad (1.108)$$

Utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti,

$$\begin{cases} \frac{V_v}{\sqrt{\gamma R T_v}} = \frac{V_m}{\sqrt{\gamma R T_m}} \\ \frac{\rho_v V_v L_v}{\mu(T_v)} = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu(T_m)} \end{cases} \quad (1.109)$$

Risolvendo il sistema, si ottiene l'espressione delle incognite

$$\begin{cases} V_m = V_v \sqrt{\frac{T_m}{T_v}} \\ \lambda = \frac{L_m}{L_v} = \frac{\rho_v}{\rho_m} \sqrt{\frac{T_v}{T_m} \frac{\mu(T_m)}{\mu(T_v)}} \end{cases} \quad (1.110)$$

Per trovare i valori ancora incogniti della viscosità dinamica si usa la formula di Sutherland: per l'aria i coefficienti sono $T_0 = 288K$, $C = 110.4K$. Si ottengono i valori numerici $V_m = 152.8m/s$, $\lambda = 0.507$.

Osservazioni. Non è sempre possibile imporre l'uguaglianza di Re e M . Si pensi ad esempio a un'applicazione in aria in condizioni standard e prove sul modello in galleria ad aria in condizioni standard. Per ottenere l'uguaglianza dei numeri di Mach, bisogna avere la stessa velocità caratteristica (poichè la celerità del suono è la stessa tra condizione reale e modello). Avendo uguagliato le velocità caratteristiche ed essendo uguali le variabili termodinamiche ρ e μ , si ottiene l'uguaglianza della dimensione caratteristica del modello. Questo significa che sarebbe necessario avere un modello in scala 1:1 per soddisfare la similitudine utilizzando nella prova sperimentale lo stesso fluido nelle stesse condizioni termodinamiche delle condizioni "al vero". Per limiti tecnologici e di costi, dovuti alle dimensioni degli apparati sperimentali, spesso è necessario utilizzare un modello in scala dell'originale. Esistono gallerie controllate in pressione per variare lo stato termodinamico dell'aria di prova e gallerie che utilizzando acqua come fluido di prova: entrambe queste scelte comportano complicazioni nel progetto e nell'utilizzo dell'impianto, traducibile spesso in costi elevati.

Allora per quale numero adimensionale o secondo quale combinazione dei numeri adimensionali conviene ottenere la similitudine? "Arte", esperienza e alcuni "espedienti" sperimentali, che non sono oggetto di questo corso hanno lo scopo di ottenere risultati rappresentativi del problema al vero, anche se la perfetta similitudine non è soddisfatta.

Esercizio 1.2 — Similitudine ad alta velocità: velivolo. Un aeromobile vola nell'alta atmosfera a velocità costante $V_v = 252 \text{ m/s}$, in condizioni di densità ρ_v e temperatura T_v assegnate: $\rho_v = 0.424 \text{ kg/m}^3$, $T_v = -50.3^\circ\text{C}$.

Determinare la velocità, la densità e la pressione dell'aria da utilizzarsi in una galleria del vento pressurizzata che operi alla temperatura di 15°C per ottenere la similitudine dinamica corretta con un modello in scala ridotta $\lambda = 0.2$.

$$(V_m = 286.6 \text{ m/s}, \rho_m = 2.292 \text{ kg/m}^3, p_m = 189560 \text{ Pa})$$

Soluzione

Concetti. Similitudine fluidodinamica: numeri di Reynolds e di Mach.

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} \quad , \quad M = \frac{U}{c} \quad . \quad (1.111)$$

Formula di Sutherland per la viscosità dinamica **dei gas**,

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \frac{C + T_0}{C + T} \quad . \quad (1.112)$$

Svolgimento. Assumendo che l'aria si comporti come gas ideale, per il quale vale l'equazione di stato $p = \rho R T$, la velocità del suono vale $c = \sqrt{\gamma R T}$, dove $\gamma = c_p/c_v$ è il rapporto dei calori specifici a pressione e volume costante, che vale $\gamma = 1.4$ per un gas biatomico. La costante del gas R è definita come il rapporto tra la costante universale dei gas \mathcal{R} e la massa molare M_m , $R = \mathcal{R}/M_m$. La massa molare dell'aria secca vale $M_m = 28.96 \text{ kg/kmol}$ e la sua costante R vale

$$R = \frac{\mathcal{R}}{M_m} = \frac{8314.4 \text{ J/(kmol K)}}{28.97 \text{ kg/kmol}} = 287.0 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \quad . \quad (1.113)$$

La velocità del suono nell'aria alle condizioni termodinamiche del problema vale $c = 299.2 \text{ m/s}$. Il numero di Mach caratteristico della corrente è quindi $M = 0.84$ e gli effetti di comprimibilità non possono essere trascurati, poichè il numero di Mach è maggiore del valore convenzionale 0.3 che identifica il limite della validità dell'approssimazione di fluido incomprimibile. Per ottenere la similitudine tra problema reale e quello modellato (di dimensioni ridotte) è necessaria la similitudine geometrica e l'uguaglianza dei numeri adimensionali che caratterizzano il problema, il numero di Reynolds Re e il numero di Mach M .

$$\begin{cases} M_1 = M_2 \\ Re_1 = Re_2 \end{cases} \quad . \quad (1.114)$$

Utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti,

$$\begin{cases} \frac{V_v}{\sqrt{\gamma R T_v}} = \frac{V_m}{\sqrt{\gamma R T_m}} \\ \frac{\rho_v V_v L_v}{\mu(T_v)} = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu(T_m)} \end{cases} \quad (1.115)$$

Risolvendo il sistema, si ottiene l'espressione delle incognite:

$$\Rightarrow \begin{cases} V_m = V_v \sqrt{\frac{T_m}{T_v}} \\ \rho_m = \frac{1}{\lambda} \rho_v \sqrt{\frac{T_v}{T_m}} \frac{\mu(T_m)}{\mu(T_v)} \\ P_m = \rho_m R T_m = \frac{1}{\lambda} \frac{\mu(T_m)}{\mu(T_v)} \rho_v R \sqrt{T_v T_m} \end{cases} \quad (1.116)$$

Per trovare i valori ancora incogniti della viscosità dinamica si usa la formula di Sutherland: per l'aria i coefficienti sono $T_0 = 288K$, $C = 110.4K$. Si ottengono i valori numerici $V_m = 286.6 \text{ m/s}$, $\rho_m = 2.292 \text{ kg/m}^3$, $p_m = 189560 \text{ Pa}$.

Esercizio 1.3 — Similitudine a bassa velocità: sottomarino. La velocità di pattugliamento di un sottomarino vale $V_v = 2.5 \text{ m/s}$. Considerando che il sottomarino si muova in acqua in condizioni standard, a quale velocità deve essere provato un modello in scala $\lambda = 1/10$, avendo a disposizione rispettivamente:

- una galleria ad acqua in condizioni standard,
- una galleria ad aria a pressione di 10 bar e temperatura di 30°C ?

Se la resistenza al vero vale $D_v = 6000 \text{ N}$, quanto vale la resistenza sui modelli in scala nei due casi?

(Galleria ad aria: $V_m = 35.17 \text{ m/s}$, $D_m = 136.1 \text{ N}$. Galleria ad acqua: $V_m = 25 \text{ m/s}$, $D_m = 6000 \text{ N}$.)

Soluzione

Concetti. Similitudine fluidodinamica per correnti incompressibili, numero di Reynolds,

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} . \quad (1.117)$$

Formula di Sutherland per la viscosità dinamica **dei gas**,

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \frac{C + T_0}{C + T} . \quad (1.118)$$

Azioni agenti sul modello e coefficienti di forza.

Svolgimento. La velocità sul modello si trova tramite l'uguaglianza dei numeri di Reynolds,

$$\frac{\rho_v U_v L_v}{\mu_v} = \frac{\rho_m U_m L_m}{\mu_m} \rightarrow U_m = U_v \frac{\rho_v L_v}{\rho_m L_m} \cdot \frac{\mu_m}{\mu_v} \quad (1.119)$$

Per trovare la viscosità dell'aria viene utilizzata la formula di Sutherland (per l'aria i coefficienti sono $T_0 = 288\text{K}$, $C = 110.4\text{K}$, $\mu_0 = 18.27 \mu\text{Pas}$). Il coefficienti di viscosità dinamica dell'acqua in condizioni standard è dell'ordine di 10^{-3} kg/(m s) .

La forza agente aerodinamica agente sul corpo, la cui superficie esterna è indicata con S , è la risultante degli sforzi di superficie esterna del corpo S_b ,

$$\mathbf{F} = \oint_S \mathbf{t}_n = \oint_{S_b} -p \hat{\mathbf{n}} + \mu [\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (1.120)$$

Vengono scelte la densità caratteristica del fluido ρ , una velocità caratteristica della corrente U e una lunghezza caratteristica del problema L , per definire la scala della pressione $P = \rho U^2$. Raccogliendo le dimensioni fisiche fuori dal segno di integrale è quindi possibile scrivere,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \oint_{S_b} -P p^* \hat{\mathbf{n}} + \frac{\mu U}{L} [\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*] \hat{\mathbf{n}} = & (P = \rho U^2, dS = L^2 dS^*) \\ &= \rho U^2 L^2 \oint_{S_b^*} -p^* \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{Re} [\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*] \hat{\mathbf{n}} = \\ &= \frac{1}{2} \rho U^2 S c_{\mathbf{F}}(Re) , \end{aligned} \quad (1.121)$$

avendo introdotto il coefficiente di forza $c_{\mathbf{F}}$,

$$c_{\mathbf{F}} = 2 \frac{L^2}{S} \oint_{S_b^*} -p^* \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{Re} [\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*] \hat{\mathbf{n}} \quad (1.122)$$

che può dipendere dalle variabili fisiche solo attraverso i numeri adimensionali del problema (in questo caso solo da Re , per problemi comprimibili anche da M) e che rappresenta la forza agente sul corpo adimensionalizzata con la pressione dinamica $\frac{1}{2}\rho U^2$ e con una superficie di riferimento del corpo S . La superficie di riferimento S scala con L^2 ($S = aL^2$, a costante).

Si può scrivere la risultante delle forze sul modello e al vero come

$$\begin{cases} \mathbf{F}_m = \frac{1}{2}\rho_m U_m^2 S_m^2 \mathbf{c}_F(Re_m) \\ \mathbf{F}_v = \frac{1}{2}\rho_v U_v^2 S_v^2 \mathbf{c}_F(Re_v) . \end{cases} \quad (1.123)$$

Poichè è soddisfatta la similitudine fluidodinamica, i valori dei coefficienti di forza del modello e “al vero” sono uguali. Si può quindi scrivere

$$\mathbf{F}_m = \frac{\rho_m}{\rho_v} \left(\frac{U_m}{U_v} \right)^2 \left(\frac{S_m}{S_v} \right) \mathbf{F}_v = \frac{\rho_m}{\rho_v} \left(\frac{U_m}{U_v} \right)^2 \left(\frac{L_m}{L_v} \right)^2 \mathbf{F}_v = \frac{\rho_m}{\rho_v} \left(\frac{U_m}{U_v} \right)^2 \lambda^2 \mathbf{F}_v , \quad (1.124)$$

Nel caso della galleria ad acqua, nella quale il fluido è lo stesso e nello stesso stato termodinamico della situazione reale ($\rho_m = \rho_v$, $\mu_m = \mu_v$), l'uguaglianza dei numeri di Reynolds si semplifica in

$$\frac{\rho_m U_m L_m}{\mu_m} = \frac{\rho_v U_v L_v}{\mu_v} \quad \rightarrow \quad U_m L_m = U_v L_v . \quad (1.125)$$

Quindi, in questo caso la forza agente sul modello di galleria coincide con la forza agente sul corpo nella situazione reale,

$$\mathbf{F}_m^{H_2O,s} = \mathbf{F}_v^{H_2O,s} . \quad (1.126)$$

Esercizio 1.4 — Getto: codice numerico adimensionale. Si vuole studiare con la corrente di aria che esce da un ugello verticale di diametro $\tilde{D} = 0.01 \text{ m}$, nell'intervallo di velocità di riferimento $\tilde{U} \in [1, 10] \text{ m/s}$. Si ha a disposizione un codice numerico che risolve le equazioni in forma adimensionale, in cui non è possibile variare le condizioni al contorno, e una sola griglia di calcolo. Si chiede di:

- determinare l'intervallo di numeri di Reynolds Re da inserire nel codice, sapendo che la velocità di riferimento nel codice è $U = 1$ e il diametro nella griglia vale $D = 1$.
- la frequenza \tilde{f} di rilascio di vortici quando $\tilde{U} = 1 \text{ m/s}$, sapendo che la frequenza estratta dai risultati numerici è $f = 0.2$;
- stimare l'errore compiuto dal codice nel trascurare l'effetto della gravità.

Soluzione

Concetti. Similitudine fluidodinamica. Numeri di Reynolds e Froude. Ordini di grandezza dei termini.

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} \quad , \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}} \quad (1.127)$$

Svolgimento.

- Affinchè le simulazioni numeriche siano rappresentative della corrente incomprimibile che si vuole studiare, è necessario che ci sia similitudine fluidodinamica tra i due casi: bisogna imporre l'uguaglianza dei numeri di Reynolds

$$Re = \frac{\tilde{U} \tilde{D}}{\tilde{\nu}} \approx \frac{(1 \div 10) \text{ m/s} \times 10^{-2} \text{ m}}{10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 10^3 \div 10^4 . \quad (1.128)$$

- Se la frequenza adimensionale ottenuta dalla simulazione numerica è $f = 0.2$, la frequenza dimensionale viene ottenuta dall'uguaglianza dei numeri di Strouhal, cioè “ri-dimensionalizzando” f con le grandezze di riferimento usate per l'adimensionalizzazione (U, L, ρ) .

$$\frac{f D}{U} = \frac{\tilde{f} \tilde{D}}{\tilde{U}} \Rightarrow \tilde{f} = f \frac{\tilde{U}}{\tilde{D}} = 0.2 \times \frac{1 \text{ m/s}}{10^{-2} \text{ m}} = 20 \text{ s}^{-1} . \quad (1.129)$$

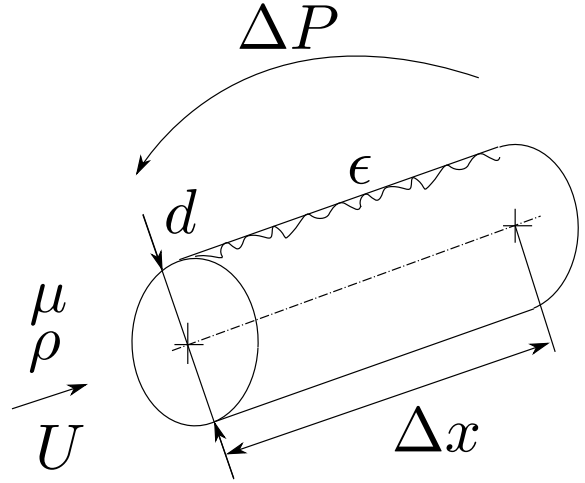
- Per quantificare l'effetto della gravità, si calcola il valore del numero di Froude. Nelle equazioni di Navier-Stokes adimensionali, compare il numero adimensionale $gD/U^2 = 1/Fr^2$ davanti ai termini di forze di volume. Più questo numero è “piccolo”, più gli effetti delle forze di volume sono ridotti.

$$\begin{cases} U = 1 \text{ m/s} & : & 1/Fr^2 \approx 10^{-1} \\ U = 10 \text{ m/s} & : & 1/Fr^2 \approx 10^{-3} \end{cases} \quad (1.130)$$

Esercizio 1.5 — Gradiente di pressione in tubi cilindrici. Si deve progettare un condotto che trasporti un fluido con densità ρ_1 e viscosità μ_1 , di diametro d_1 e lunghezza L_1 . Si suppone che la rugosità della superficie interna del condotto possa essere descritta interamente dall'altezza media ϵ_1 delle asperità. Il condotto deve garantire una portata massica Q_1 . Viene realizzato un modello in scala $\lambda = d_2/d_1$ del condotto di lunghezza L_2 , nel quale viene fatto scorrere lo stesso fluido alle stesse condizioni termodinamiche. Si chiede di determinare:

- la finitura superficiale della superficie interna del modello, in termini di dimensione caratteristica della rugosità ϵ_2 ;
- la velocità media di prova U_2 ;
- la differenza di pressione da imporre alle estremità del condotto al vero, conoscendo che la differenza di pressione ΔP_2 misurata in laboratorio.

Si supponga il fluido incomprimibile. ■



Soluzione

Concetti. Teorema di Buckingham. Similitudine fluidodinamica.

Svolgimento. Il problema è caratterizzato dal fluido utilizzato, dalla geometria del condotto e dal gradiente di pressione necessario a garantire la portata desiderata. Si può scrivere in maniera implicita

$$f\left(\frac{\Delta P}{\Delta x}, U, \rho, \mu, d, \epsilon\right) = 0 \quad (1.131)$$

avendo scelto come grandezza fisica caratteristica del problema il gradiente di pressione $\frac{\Delta P}{\Delta x}$ e non il salto di pressione e la lunghezza del tubo prese indipendentemente. Il teorema di Buckingham garantisce che il problema può essere caratterizzato da 3 numeri adimensionali (6 grandezze fisiche - 3 grandezze fondamentali (M,L,T)). Se si scelgono ρ , U , d come grandezze di riferimento, si possono costruire i tre numeri adimensionali come

$$\pi_1 = \frac{\Delta P}{\Delta x} \frac{d}{\rho U^2} = f_D \quad \pi_2 = \frac{\mu}{\rho U d} = 1/Re \quad \pi_3 = \frac{\epsilon}{d} = \epsilon' \quad (1.132)$$

Il problema può essere quindi scritto in forma implicita come:

$$g(f_D, Re, \epsilon') = 0. \quad (1.133)$$

Esplicitando f_D :

$$f_D = h(Re, \epsilon') \quad \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{\rho U^2}{d} f_D(Re, \epsilon'). \quad (1.134)$$

Affinchè sia verificata la similitudine fluidodinamica, ci deve essere l'uguaglianza dei numeri di Reynolds Re e delle rugosità adimensionalizzate ϵ' .

- Dall'uguaglianza delle rugosità adimensionalizzate

$$\epsilon'_1 = \epsilon'_2 =: \epsilon' \quad \Rightarrow \quad \epsilon_2 = \epsilon_1 \frac{d_2}{d_1} = \lambda \epsilon_1. \quad (1.135)$$

Per il modello è quindi necessaria una lavorazione che garantisca una finitura superficiale migliore rispetto al condotto al vero ($\lambda \leq 1$).

- La velocità media al vero U_1 viene ricavata grazie alla richiesta dell'apportata desiderata.

$$U_1 = \frac{Q}{\rho \frac{\pi}{4} d_1^2} \quad (1.136)$$

Per ottenere la similitudine fluidodinamica si impone l'uguaglianza dei numeri di Reynolds

$$Re_1 = Re_2 =: Re \quad \Rightarrow \quad U_2 = U_1 \frac{\rho_1 d_1 \nu_2}{\rho_2 d_2 \nu_1} = U_1 \frac{d_1}{d_2} \quad (1.137)$$

poichè la densità e la viscosità del fluido “di prova” sono le stesse di quelle del fluido “al vero”.

- Il rapporto tra la differenza di pressione ΔP_2 misurata sul condotto modello e la lunghezza del condotto modello L_2 permette di stimare il gradiente di pressione $\frac{\Delta P}{\Delta x}|_2 = \frac{\Delta P_2}{L_2}$. Sfruttando ancora una volta la similitudine fluidodinamica

$$\begin{cases} \frac{\Delta P_2}{L_2} = \frac{\rho_2 U_2^2}{d_2} f_D(Re, \epsilon') \\ \frac{\Delta P_1}{L_1} = \frac{\rho_1 U_1^2}{d_1} f_D(Re, \epsilon') \end{cases} \Rightarrow \Delta P_1 = \Delta P_2 \frac{\rho_1 U_1^2}{\rho_2 U_2^2} \frac{d_2}{d_1} \frac{L_1}{L_2} \quad (1.138)$$

Dall'uguaglianza delle densità $\rho_1/\rho_2 = 1$; dall'uguaglianza dei numeri di Reynolds (e delle densità e viscosità) $U_1^2/U_2^2 = d_2^2/d_1^2$. La formula può quindi essere semplificata

$$\Delta P_1 = \Delta P_2 \frac{d_2^3}{d_1^3} \frac{L_1}{L_2} = \Delta P_2 \lambda^3 \frac{L_1}{L_2} \quad (1.139)$$

Diagramma di Moody.

Il diagramma di Moody riporta il coefficiente f_D in funzione del numero di Re e della rugosità del tubo. Si possono individuare due regimi estremi del problema. Per “basse velocità” (o meglio, bassi numeri di Reynolds), si può intuire che gli effetti della viscosità prevalgano sugli effetti inerziali; inoltre, gli effetti della rugosità sono minimi. Si può quindi pensare che il problema sia indipendente dalla densità del fluido e dalla rugosità del tubo e descrivibile in forma implicita come

$$f_L(\Delta P/\Delta x, \mu, U, d) = 0 \quad (1.140)$$

Si può descrivere il problema solo con un numero adimensionale. Scegliendo μ , U , d come grandezze di riferimento, si può scrivere

$$\pi_{1,L} = \frac{\Delta P}{\Delta x} \frac{d^2}{\mu U} \quad (1.141)$$

Il problema può essere scritto in forma implicita $g_L(\pi_{1,L}) = 0$. Poichè la funzione g_L dipende solo dal coefficiente $\pi_{1,L}$, il coefficiente $\pi_{1,L}$ deve essere costante. Il gradiente di pressione può essere scritto

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = \pi_{1,L} \frac{\mu U}{d^2} = \frac{\rho U^2}{d} f_D \quad (1.142)$$

avendo usato la definizione di f_D introdotta nell'equazione (1.132). È quindi possibile stimare l'andamento del coefficiente f_D , per bassi numeri di Reynolds, invertendo l'equazione precedente. Si scopre che il coefficiente f_D è inversamente proporzionale al numero di Reynolds.

$$f_D = \pi_{1,L} \frac{\mu}{\rho U d} = \pi_{1,L} \frac{1}{Re} \quad (1.143)$$

. Per bassi numeri di Reynolds, il parametro f_D in funzione di Re mostra un andamento lineare in un diagramma con assi logaritmici, a conferma della correttezza della stima appena svolta.

Si può ragionare in maniera analoga per il regime di moto estremo opposto, dove gli effetti della viscosità sono trascurabili. Si scopre che il coefficiente f_D è funzione solo della rugosità adimensionale ϵ , mentre non dipende dal numero di Reynolds. Per alti numeri di Reynolds, il parametro f_D è descritto da curve che tendono a un valore costante, che dipende dal valore della rugosità adimensionale ϵ' .

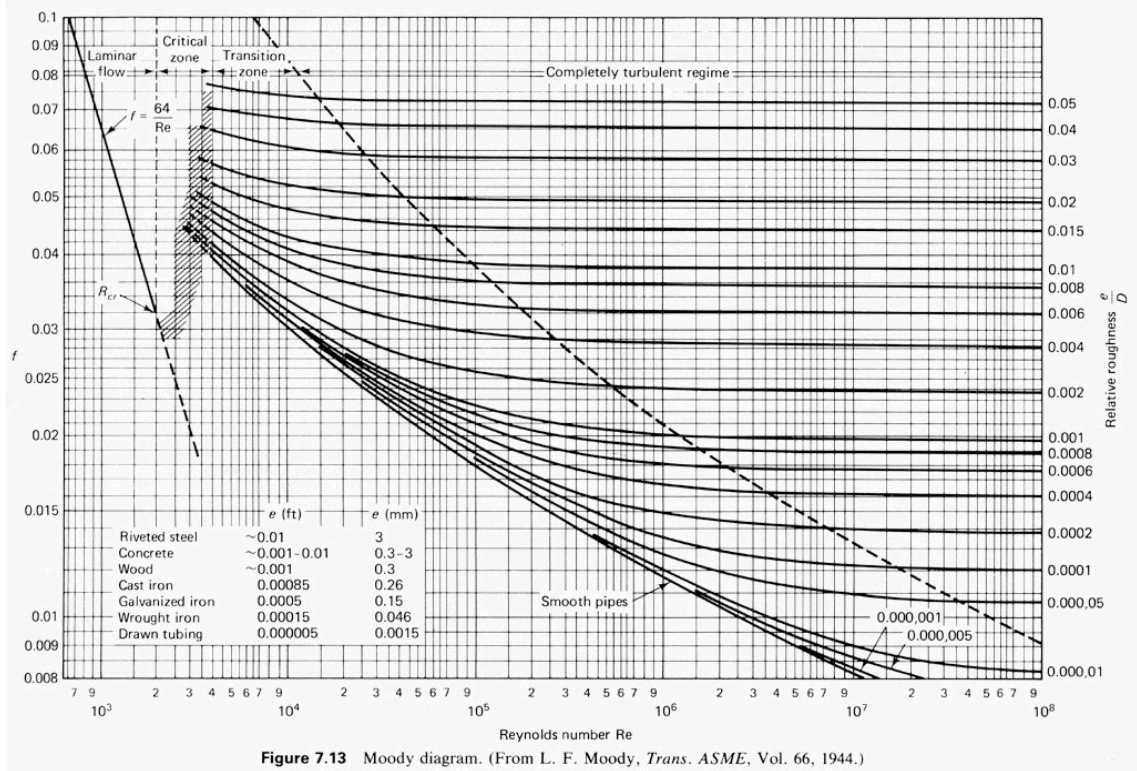
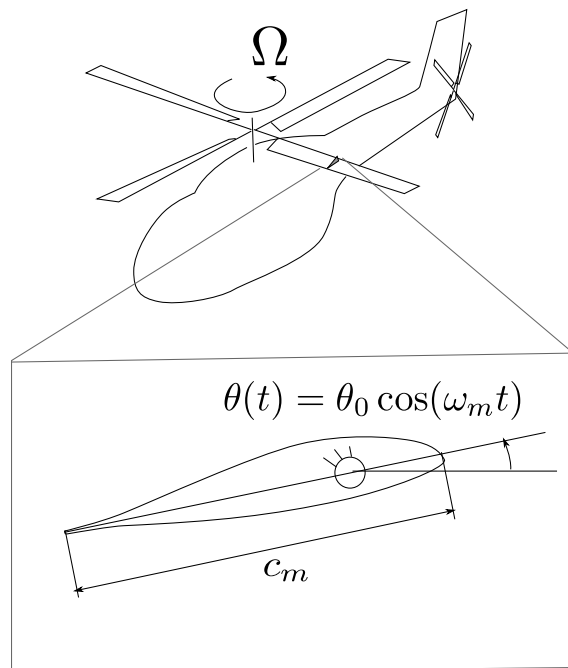


Figure 7.13 Moody diagram. (From L. F. Moody, *Trans. ASME*, Vol. 66, 1944.)

Esercizio 1.6 — Profilo oscillante. L'obiettivo di una prova in galleria è lo studio del campo di moto attorno a una pala di elicottero, in particolare attorno alla sezione che si trova a metà della lunghezza della pala, $R_v = 6.85 \text{ m}$. Il rotore dell'elicottero ruota con una velocità angolare Ω_v , tale da avere una velocità $U_{tip} = 200 \text{ m/s}$ (per evitare il regime supersonico). La corda della pala nella sezione analizzata è $c_v = 0.30 \text{ m}$. Il modello di galleria a circuito aperto è costituito da una superficie alare, incernierata su un asse perpendicolare alla direzione del vento di galleria, in corrispondenza dell'asse "di comando del passo". Sapendo che la massima velocità raggiungibile nell'impianto utilizzato è $U_m = 50 \text{ m/s}$, si chiede di determinare:

- la corda del modello c_m , per ottenere la similitudine in Re e di commentare gli effetti di comprimibilità;
- la frequenza di oscillazione ω_m da imporre al profilo per simulare il cambio di incidenza dovuti ai comandi di passo collettivo e ciclico;
- una stima della potenza dell'impianto necessaria a svolgere la prova, conoscendo le dimensioni della camera di prova rettangolare, $b = 1.5 \text{ m}$, $h = 1.0 \text{ m}$.



Soluzione

Concetti. Similitudine fluidodinamica. Comando elicottero. Stima potenza galleria del vento.

Svolgimento.

- Per ottenere la similitudine in Re , è necessario uguagliare i numeri di Reynolds ottenuti con le grandezze dimensionali caratteristiche del problema. La lunghezza di riferimento è la corda. La velocità di riferimento è la velocità che investe il profilo della pala considerato; nella prova di galleria è la velocità di galleria U_m , nella realtà è la velocità relativa dovuta alla rotazione della pala (alla quale deve essere sovrapposto il moto dell'elicottero, in caso di avanzamento, qui ipotizzato nullo): $U_v = \Omega R_v/2 = U_{tip}/2$. Il fluido è sempre aria.

$$\frac{U_v c_v}{\nu} = \frac{U_m c_m}{\nu} \Rightarrow c_m = c_v \frac{U_{tip}}{2 U_m} = 0.60 \text{ m} \quad (1.144)$$

In questo esempio, per avere similitudine in Re serve un modello con una corda maggiore della corda reale.

Gli effetti di comprimibilità possono essere valutati calcolando il numero di Mach. Il numero di Mach per la sezione di pala considerata nella realtà è $M_v \approx 100/340 \approx 0.3$, limite convenzionale per potere trascurare gli effetti di comprimibilità. Per la prova in galleria $M_m \approx 0.15$.

- Il comando di passo ciclico è periodico e armonico con frequenza $\Omega_v = U_{tip}/R_v = 29.19 \text{ s}^{-1}$. Per essere in similitudine con la realtà è necessario avere uguaglianza dei numeri di Strouhal (o *frequenze ridotte*, indicate da strutturisti e aeroelastici con k).

$$\frac{\Omega c_v}{U_v} = \frac{\omega_m c_m}{U_m} \quad \Rightarrow \quad \omega_m = \Omega \frac{c_v}{c_m} \frac{U_m}{U_v} = \Omega \left(\frac{U_m}{U_v} \right)^2 \quad (1.145)$$

- In un impianto a galleria aperta si può ricavare la formula per la stima della potenza necessaria da un bilancio integrale di energia cinetica

$$P \approx \frac{1}{2} \rho U^3 A . \quad (1.146)$$