Alcuni chiarimenti

10 maggio 2019

1 Traslazione, rotazione e deformazione e deformazione di un elemento di fluido

Il moto di un elemento infinitesimo di fluido può essere descritto come composizione di una traslazione, di una rotazione rigida e una deformazione. Siano $\boldsymbol{x}_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t)$ le posizioni di due punti materiali e $\delta\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_2(t) - \boldsymbol{x}_1(t)$ il vettore che congiunge questi due punti. La derivata temporale del vettore $\delta\boldsymbol{x}(t)$ può essere scritta come

$$\frac{d\delta\boldsymbol{x}}{dt}(t) = \frac{d\boldsymbol{x}_2}{dt}(t) - \frac{d\boldsymbol{x}_1}{dt}(t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_2(t),t) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_1(t),t) \ , \tag{1}$$

avendo sfruttato la definizione di punto materiale per esprimere la sua velocità, $d\boldsymbol{x}_i/dt$, come la velocità del continuo in quel punto, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_i(t),t)$.
Utilizzando la definizione di $\delta\boldsymbol{x}(t)$, si può scrivere $\boldsymbol{x}_2(t) = \boldsymbol{x}_1(t) + \delta\boldsymbol{x}(t)$ ed esprimere la velocità calcolata in $\boldsymbol{x}_2(t)$ con un'espansione in serie centrata in $\boldsymbol{x}_1(t)$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_2(t),t) &= \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_1(t)+\delta\boldsymbol{x}(t),t) = \\ &= \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_1(t),t) + \delta\boldsymbol{x}(t)\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_1(t),t) + o(|\delta\boldsymbol{x}(t)|) \ .\end{aligned} \tag{2}$$

Si può quindi scrivere la derivata temporale di $\delta\boldsymbol{x}$ come

$$\frac{d\delta\boldsymbol{x}}{dt}(t) = \delta\boldsymbol{x}(t)\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_1(t),t) + o(|\delta\boldsymbol{x}(t)|) \ . \tag{3}$$

Sfruttando la scomposizione del gradiente della velocità come somma della sua parte simmetrica e della sua parte antisimmetrica, rispettivamente il *tensore velocità di deformazione* $\mathbb{D}$ e *tensore di spin* $\mathbb{R}$, si possono riconoscere i contributi di deformazione e rotazione nell'evoluzione di $\delta\boldsymbol{x}(t)$,

$$\frac{d\delta\boldsymbol{x}}{dt}(t) = \delta\boldsymbol{x}(t)\cdot\mathbb{D}(\boldsymbol{x}_1(t),t) + \delta\boldsymbol{x}(t)\cdot\mathbb{R}(\boldsymbol{x}_1(t),t) + o(|\delta\boldsymbol{x}(t)|) \ . \tag{4}$$

Sfruttando la natura antisimmetrica del tensore di spin $\mathbb{R}$, si può riscrivere il contributo di rotazione al movimento in una forma che dovrebbe essere più familiare (si pensi all'atto di moto rigido, come visto in meccanica razionale)

$$\frac{d\delta\boldsymbol{x}}{dt}(t) = \delta\boldsymbol{x}(t)\cdot\mathbb{D}(\boldsymbol{x}_1(t),t) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}_1(t),t)\times\delta\boldsymbol{x}(t) + o(|\delta\boldsymbol{x}(t)|)\ , \qquad (5)$$

che permette di riconoscere il legame tra vorticità $\boldsymbol{\omega}$ e velocità angolare delle particelle materiali: la vorticità $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x},t)$ risulta essere il doppio della velocità angolare della particella materiale che passa per il punto $\boldsymbol{x}$ all'istante temporale t.
L'evoluzione del punto materiale $\boldsymbol{x}_2(t)$ può quindi essere espressa in funzione del moto del punto $\boldsymbol{x}_1(t)$ e del vettore differenza $\delta\boldsymbol{x}_2(t)$,

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{x}_2}{dt}(t) = & \ \frac{d\boldsymbol{x}_1}{dt}(t)+ && \text{(traslazione)}\\ & + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}_1(t),t)\times\delta\boldsymbol{x}(t)+ && \text{(rotazione)}\\ & + \delta\boldsymbol{x}(t)\cdot\mathbb{D}(\boldsymbol{x}_1(t),t)+ && \text{(deformazione)}\\ & + o(|\delta\boldsymbol{x}(t)|) && \text{(termini di ord.sup.)}\end{aligned} \qquad (6)$$

riconoscendo i contributi di traslazione, rotazione, deformazione e contributi di ordine superiore che diventano trascurabili per $|\delta\boldsymbol{x}(t)|\to 0$.

1.1 Esempio: corrente di Newton

Si considera l'esempio della corrente di Newton in un canale piano infinito, descritta dal campo di velocità

$$\boldsymbol{u} = \frac{y}{H}U\hat{\boldsymbol{x}}\ . \qquad (7)$$

Si vuole determinare l'evoluzione in un istante di tempo dt di due vettori materiali $\delta\boldsymbol{x}_a(t) = \hat{\boldsymbol{x}}$, $\delta\boldsymbol{x}_b(t) = \hat{\boldsymbol{y}}$, per valutare gli effetti di rotazione e deformazione di un volumetto elementare inizialmente quadrato, con i lati orientati come i due vettori considerati. Si possono raccogliere le componenti cartesiane del gradiente di velocità $\boldsymbol{\nabla u}$ nella matrice

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & U/H & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ , \qquad (8)$$

e di conseguenza raccogliere le componenti dei tensori $\mathbb{D}$, $\mathbb{R}$ nelle matrici

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{U}{2H} & 0 \\ \frac{U}{2H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad , \quad \underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{U}{2H} & 0 \\ -\frac{U}{2H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ . \qquad (9)$$

All'istante $t + dt$, le componenti cartesiane $\underline{\delta x_i}(t + dt)$ vettore materiale $\delta \boldsymbol{x}_i(t + dt)$ possono essere ricavate come

$$\begin{aligned} \underline{\delta x_i}(t + dt) &= \underline{\delta x_i}(t) + \frac{d\underline{\delta x_i}}{dt}(t) = \\ &= \underline{\delta x_i}(t) + \underline{\underline{D}}\,\underline{\delta x_i} + \underline{\underline{R}}\,\underline{\delta x_i} \ . \end{aligned} \tag{10}$$

Svolgendo i conti per i vettori $\delta \boldsymbol{x}_a$, $\delta \boldsymbol{x}_b$, si ottiene,

$$\begin{aligned} \underline{\delta x_a}(t + dt) &= \underline{\delta x_a}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{U}{2H} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{U}{2H} \end{bmatrix} = \underline{\delta x_a}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \underline{\delta x_b}(t + dt) &= \underline{\delta x_b}(t) + \begin{bmatrix} \frac{U}{2H} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{U}{2H} \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\delta x_a}(t) + \begin{bmatrix} \frac{U}{H} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U}{H} \\ 1 \end{bmatrix} \ . \end{aligned} \tag{11}$$

Si può notare che i contributi di rotazione e deformazione sono entrambi non nulli, ma che il loro effetto complessivo si annulla sul vettore $\delta \boldsymbol{x}_a$ orientato come la direzione x, mentre il loro effetto si somma sul vettore $\delta \boldsymbol{x}_b$ inizialmente orientato lungo la direzione y, come mostrato in figura.