8.7.1 Condizione necessaria di incipiente separazione

Un punto di incipiente separazione viene identificato dall'annullarsi della derivata in direzione perpendicolare a parete della componente di velocità parallela ad essa, con derivata seconda positiva. Si consideri il problema bidimensionale su una superficie piana: viene scelto di usare un sistema di riferimento cartesiano con l'asse x parallelo alla parete e diretto nel verso della corrente asintotica $\boldsymbol{U} = U\boldsymbol{x}$, l'asse y uscente dalla parete. La componente x dell'equazione della quantità di moto è

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \tag{8.34}$$

A parete i termini non lineari sono nulli poichè la velocità è nulla per la condizione di adesione. La derivata seconda in direzione x è nulla poichè a parete la velocità è sempre zero per ogni valore della coordinata x. Rimane quindi

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0 \tag{8.35}$$

Esercizio 8.8 — Separazione su parete piana. Si assuma che il profilo di velocità $u(x,y)$ dello strato limite sulla superficie di un corpo sia approssimabile con la seguente legge

$$u = \frac{(1-x)y}{1+y} + \frac{xy^2}{1+y^2},$$

dove u è la velocità adimensionalizzata rispetto alla velocità esterna, x è la coordinata adimensionale di parete localmente rettilinea e y la coordinata adimensionale in direzione normale alla parete stessa. Determinare la coordinata x_s del punto di separazione dello strato limite in questione. ■

Soluzione

Concetti. Separazione.

Svolgimento.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(1-x)y}{1+y} + \frac{xy^2}{1+y^2}\right] = \\ &= (1-x)\frac{1}{(1+y)^2} + x\frac{2y}{(1+y^2)^2}\end{aligned} \tag{8.36}$$

Quando si impone la condizione di separazione $\frac{\partial u}{\partial y}\big|_{y=0} = 0$, si ottiene $x_s = 1$.

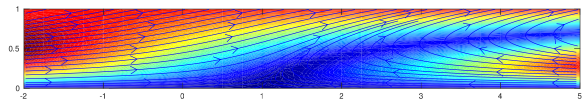

Figura 8.1: Linee di corrente e modulo della velocità.

Se si ipotizza che il moto del fluido sia governato dalle equazioni di Navier-Stokes per fluido incomprimibile (così facendo, si abbandonano le ipotesi di non viscosità del fluido e irrotazionalità della corrente, proprie dell'Aerodinamica; in realtà questo è già stato

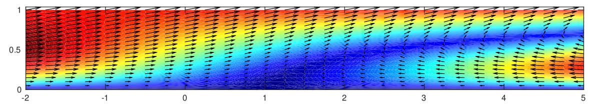

Figura 8.2: Campo di velocità e modulo della velocità.

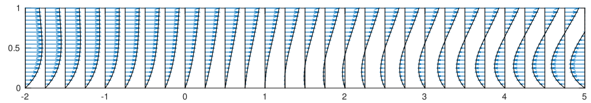

Figura 8.3: Andamento della componente orizzontale $u(y)$ in diverse stazioni x.

fatto nel testo del problema, imponendo un profilo di velocità che soddisfa la condizione di adesione a parete...) è possibile ricostruire il campo di velocità e di pressione. Utilizzando il vincolo di incomprimibilità e le condizioni al contorno a parete ($y = 0$), si può calcolare la componente di velocità $v(x,y)$ perpendicolare alla parete

$$v(x,y) = -ln|1+y| + atan\ y \tag{8.37}$$

Utilizzando le equazioni stazionarie di Navier-Stokes è possibile determinare il campo di pressione $P(x,y)$. La pressione (a meno di costanti di integrazione) e la derivata in direzione x valutate a parete valgono

$$\begin{cases} P(x,0) &= \dfrac{1}{Re}(2x^2-2x) \\ \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,0) &= \dfrac{1}{Re}(4x-2) \end{cases} \tag{8.38}$$

Si noti che nel punto di separazione $x_s = 1$, la derivata $\partial P/\partial x(x_s,0) = 2/Re$ è positiva (come era logico attendersi, per la condizione necessaria di incipiente separazione).

Esercizio 8.9 — Separazione su parete piana. Si assuma che il profilo di velocità $u(x,y)$ dello strato limite sulla superficie di un corpo sia approssimabile con la seguente legge

$$u = 1 - e^{-y/\sqrt{x}},$$

dove u è la velocità adimensionalizzata rispetto alla velocità esterna, x è la coordinata adimensionale di parete localmente rettilinea e y la coordinata adimensionale in direzione normale alla parete stessa. Determinare l'andamento dello spessore di spostamento δ in funzione della coordinata x lungo la parete. Lo strato limite in questione separa? Se si per quale valore di x?

($\delta(x) = \sqrt{x}$, lo strato limite non separa mai se non nel limite di $x \to \infty$) ■

Soluzione

Concetti. Separazione. Spessori di strato limite.

$$\delta(x) = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u(y)}{U_e}\right) dy \tag{8.39}$$

Svolgimento.

- Spessore di spostamento. Il profilo di velocità è già adimensionalizzato sulla "velocità esterna". Utilizzando la definizione di spessore di spostamento, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\delta(x) &= \int_0^{\infty} (1 - u(y))\, dy = \\
&= \int_0^{\infty} (1 - (1 - e^{-y/\sqrt{x}}))dy = \\
&= \int_0^{\infty} e^{-y/\sqrt{x}} dy = \\
&= -\sqrt{x}[e^{-y/\sqrt{x}}]|_{y=0}^{\infty}
\end{aligned} \tag{8.40}$$

  E quindi: $\delta(x) = \sqrt{x}$.
- Separazione. La condizione di separazione è $\frac{\partial u}{\partial y}\big|_{y=0} = 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[1 - e^{-yx^{-1/2}}\right] = x^{-1/2} e^{-yx^{-1/2}} \tag{8.41}$$

  Si osserva che $\frac{\partial u}{\partial y}\big|_{y=0}$ non si annulla mai:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{8.42}$$