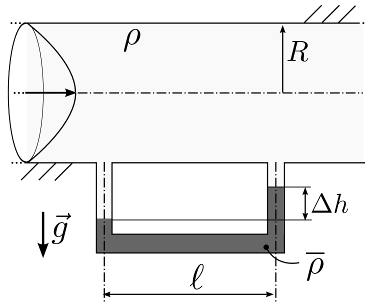
Esercizio 6 .5 — Corrente di Poiseuille in un tubo a sezione circolare e manometro. Un manometro a mercurio ($\rho_{hg} = 13610\ kg/m^3$) collega due prese di pressione posizionate a una distanza di $l = 2\ m$ l'una dall'altra lungo un tubo orizzontale di diametro $2R = 5\ cm$ in cui scorre un fluido con densità $\rho_f = 950\ kg/m^3$. Se la differenza fra le altezze dei peli liberi del liquido manometrico nelle due colonne vale $\Delta h = 4\ cm$ e la portata volumetrica che scorre nel tubo è $Q = 6\ m^3/s$, quanto valgono la viscosità μ del fluido e lo sforzo a parete τ_w?
($\mu = 6.36\, 10^{-5}\ kg/(m\, s)$, $\tau_w = 31.05\, \boldsymbol{z}\ N/m^2$) ■



Soluzione

Concetti. Semplificazione delle equazioni di NS in casi particolari. Soluzioni esatte in coordinate cilindriche. Legge di Stevino.

Scrittura del contributo viscoso del vettore sforzo come:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{s_n} &= \mathbb{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \\
&= \mu[\boldsymbol{\nabla u} + \boldsymbol{\nabla}^T \boldsymbol{u}] \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \\
&= \mu\,[2(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} + \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}]
\end{aligned}
\tag{6.55}
$$

Svolgimento. La geometria del problema suggerisce di utilizzare un sistema di coordiante cilindriche.

- Scrittura delle equazioni di NS in coordinate cilindriche

$$
\begin{cases}
\rho\dfrac{\partial u_r}{\partial t} + \rho\left(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}u_r - \dfrac{u_\theta^2}{r}\right) - \mu\left(\nabla^2 u_r - \dfrac{u_r}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) + \dfrac{\partial p}{\partial r} = f_r \\
\rho\dfrac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho\left(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}u_\theta + \dfrac{u_\theta u_r}{r}\right) - \mu\left(\nabla^2 u_\theta - \dfrac{u_\theta}{r^2} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} = f_\theta \\
\rho\dfrac{\partial u_z}{\partial t} + \rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}u_z - \mu\nabla^2 u_z + \dfrac{\partial p}{\partial z} = f_z \\
\\
\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = 0
\end{cases}
\tag{6.56}
$$

  con

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla}b = a_r\frac{\partial b}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r}\frac{\partial b}{\partial \theta} + a_z\frac{\partial b}{\partial z} \\
&\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}
\tag{6.57}
$$

- Semplificazione delle equazioni di NS per il problema considerato. Vengono fatte le seguenti ipotesi:
  - problema stazionario: $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$;
  - direzione z omogenea (canale infinito in direzione z): $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0$; come discusso negli esercizi in geometria cartesiana, il termine $\dfrac{\partial P}{\partial z} = -G_P$ è costante e in generale diverso da zero.
  - problema assialsimmetrico: $\dfrac{\partial}{\partial \theta} = 0$;

- no swirl: $u_\theta = 0$;
- dall'incomprimibilità e dalle condizioni al contorno a parete, segue che la componente radiale della velocità è identicamente nulla, $u_r = 0$;
- no forze di volume: $\boldsymbol{f} = 0$.

Grazie alle ipotesi fatte, il campo di velocità assume la forma $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = u(r)\hat{\boldsymbol{z}}$. La componente radiale e azimuthale dell'equazione della quantità di moto sono identicamente soddisfatte, mentre la componente lungo z diventa

$$\begin{cases} \mu\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{d}{dr}u(r)\right) = -G_P \quad r \in [0, R] \\ u(0) = \text{valore finito} \\ u(R) = 0 \end{cases} \tag{6.58}$$

dove la derivata ordinaria $\dfrac{d}{dr}$ è stata utilizzata al posto della derivta parziale, poichè la componente assiale della velocità dipende solamente dalla coordinata radiale, $u(r)$. Le condizioni al contorno garantiscono che il campo di velocità sia regolare nel dominio (in particolare che non esistano singolarità sull'asse) e che sia soddisfatta la condizione al contorno di adesione a parete.

- Soluzione dell'equazione differenziale. Si integra due volte e si ottiene:

$$u(r) = -\frac{G_P}{4\mu}r^2 + A\ln r + B \tag{6.59}$$

Imponendo le condizioni al contorno, A deve essere nullo per l'ipotesi di valore finito in $r = 0$ ($\ln r \to -\infty$ quando $r \to 0$). Imponendo poi la condizione di adesione a parete per $r = R$, si ottiene:

$$u(r) = -\frac{G_P}{4\mu}(r^2 - R^2) \ . \tag{6.60}$$

- Calcolo della portata: si integra la velocità sulla sezione circolare (!) del tubo. Questa relazione lega il gradiente di pressione G_P alla portata Q e al coefficiente di viscosità dimanica μ,

$$Q = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} u(r) r dr d\theta = 2\pi\int_{r=0}^{R} u(r) r dr = \frac{\pi}{8}\frac{G_P R^4}{\mu} \ . \tag{6.61}$$

La differenza di pressione tra i due punti A e B (separati da una distanza l) è quindi $P_B - P_A = -G_P l$.

- Applicazione della legge di Stevino per ottenere il sistema risolvente:

$$\begin{cases} P_1 = P_A + \rho_f g H_0 & \text{(Stevino tra 1 e A)} \\ P_2 = P_B + \rho_f g(H_0 - \Delta h) & \text{(Stevino tra 2 e B)} \\ P_B = P_A - G_P l & \text{(relazione trovata dalla sln di NS)} \\ P_2 = P_1 - \rho_{Hg} g\Delta h & \text{(Stevino tra 1 e 2)} \end{cases} \tag{6.62}$$

Risolvendo il sistema, si trova che:

$$G_P l = (\rho_{Hg} - \rho_f) g\Delta h \tag{6.63}$$

Esplicitando il legame tra G_P e μ, si ottiene il risultato:

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{\pi R^4}{8Ql}(\rho_{Hg} - \rho_f) g\Delta h \quad \Rightarrow \quad \mu = 6.36 \cdot 10^{-5}\frac{kg}{ms} \tag{6.64}$$

- Bisogna calcolare ora τ_w,la componente parallela alla parete dello sforzo a parete. Usando l'espressione vettoriale della parte viscosa del vettore sforzo agente sul fluido (aiutandosi con le tabelle per le espressioni in coordinate cilindriche degli operatori differenziali) con $\boldsymbol{u} = u_z(r)\boldsymbol{\hat{z}}$ e $\boldsymbol{\hat{n}} = \boldsymbol{\hat{r}}$, si può scrivere

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s_n} &= \mu \left[2(\boldsymbol{\hat{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\hat{n}} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} \right] = \\ &= \mu \left[2 \frac{\partial u_z}{\partial r} \boldsymbol{\hat{z}} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \boldsymbol{\hat{z}} \right] = \\ &= \mu \frac{\partial u_z}{\partial r} \boldsymbol{\hat{z}} \ . \end{aligned} \tag{6.65}$$

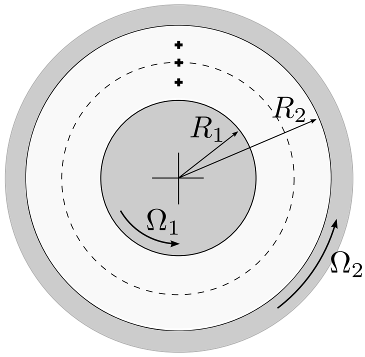
Ricordando che lo sforzo agente sulla parete è uguale e contrario a quello agente sul fluido e che lo sforzo dovuto alla pressione è normale alla parete,

$$\begin{aligned} \tau_w &= -\mu \frac{\partial u_z}{\partial r} \bigg|_{r=R} = \\ &= \frac{1}{2} G_P R \ . \end{aligned} \tag{6.66}$$

Si ottiene quindi il valore, $\tau_w = 31.05 N/m^2$.

R L'espressione dello sforzo tangenziale a parete $\tau_w = -\mu \frac{\partial u_z}{\partial r}$ per la corrente di Poiseuille in un tubo a sezione circolare è simile a quella ottenuta per la corrente in un canale piano, in coordinate cartesiane, $\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$. In questi due casi, la componente tangenziale dello sforzo è proporzionale alla derivata in direzione perpendicolare alla parete della componente di velocità parallela alla parete. Questa **NON** è una formula generale per lo sforzo tangenziale a parete, come sarà evidente nel caso della corrente di Taylor-Couette.

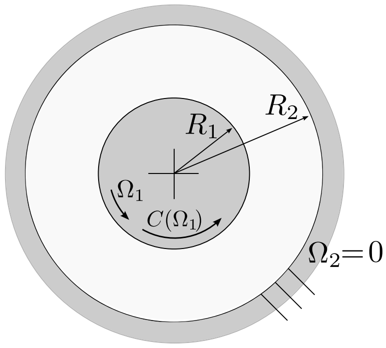
Esercizio 6 .6 — Corrente di Taylor-Couette. Si consideri la corrente piana fra due cilindri coassiali rotanti. Si misura la velocità in due punti posti rispettivamente a 1/4 e 3/4 del gap fra i due cilindri: $u_{\theta,1/4} = 0.5\ m/s$, $u_{\theta,3/4} = 0.8\ m/s$. Si determini la velocità di rotazione dei due cilindri nonché la pressione in corrispondenza del cilindro interno sapendo che la pressione in corrispondenza del cilindro esterno vale 5 Pa, che la densità del fluido è pari a 1.225 kg/m^3, che il diametro del cilindro interno è $d = 2R_1 = 0.1\ m$ e che il diametro del cilindro esterno è $D = 2R_2 = 0.16\ m$.
($\Omega_1 = 6.663\ s^{-1}$, $\Omega_2 = 11.743\ s^{-1}$
$P(r) = P_2 - \rho\left[\frac{1}{2}A^2(R_2^2 - r^2) + 2ABln\frac{R_2}{r} - \frac{1}{2}B^2\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}\right)\right]$,
con $u_\theta(r) = Ar + B/r$.)



Soluzione

Concetti. Soluzione esatte delle equazioni di Navier-Stokes in geometria cilindrica. Corrente di Taylor-Couette.

Esercizio 6 .7 — Corrente di Taylor-Couette: coppia sui cilindri. Si consideri la corrente piana di un fluido di densità ρ fra due cilindri coassiali di raggio R_1 e R_2. Il cilindro esterno è fermo, mentre quello interno è messo in rotazione da un motore con curva caratteristica $C_{disp}(\Omega) = \alpha - \beta\Omega$. Si determini il punto di equilibrio del sistema (Ω costante).
(...)



Soluzione

Concetti. Soluzione esatte delle equazioni di Navier-Stokes in geometria cilindrica. Corrente di Taylor-Couette.

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial u_r}{\partial t} + \rho\left(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}u_r - \dfrac{u_\theta^2}{r}\right) - \mu\left(\nabla^2 u_r - \dfrac{u_r}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right) + \dfrac{\partial p}{\partial r} = f_r \\ \rho\dfrac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho\left(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}u_\theta + \dfrac{u_\theta u_r}{r}\right) - \mu\left(\nabla^2 u_\theta - \dfrac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} = f_\theta \\ \rho\dfrac{\partial u_z}{\partial t} + \rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}u_z - \mu\nabla^2 u_z + \dfrac{\partial p}{\partial z} = f_z \\ \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{6.67}$$

con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla}b &= a_r\frac{\partial b}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r}\frac{\partial b}{\partial\theta} + a_z\frac{\partial b}{\partial z} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{6.68}$$

Espressione vettoriale del contributo viscoso del vettore sforzo,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s_n} &= \mathbb{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \\ &= \mu[\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla}^T\boldsymbol{u}]\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \\ &= \mu\left[2(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} + \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}\right] \end{aligned} \tag{6.69}$$

Svolgimento. Viene risolto il problema piano, nel quale i campi di velocità e di pressione hanno la forma

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = u_r(r,\theta)\hat{\boldsymbol{r}} + u_\theta(r,\theta)\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad , \quad P(\boldsymbol{r}) = P(r,\theta) \ , \tag{6.70}$$

e le azioni integrali (come la coppia fornita e quella incognita) sono intese per unità di lunghezza, essendo la "dimensione mancante" quella fuori dal piano del disegno.

- Calcolo delle velocità angolari dei cilindri. Nota la forma del campo di moto e le velocità in due punti a diversi raggi, è possibile calcolare Ω_1, Ω_2 risolvendo un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite. Il campo di moto tra due cilindri coassiali rotanti è:

$$u_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r} = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{1}{r} \ . \tag{6.71}$$

Se il cilindro esterno è fermo e la velocità angolare del cilindro interno vale $\Omega_1 = \Omega$, i coefficienti A e B valgono

$$A = -\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\Omega < 0 \qquad , \qquad B = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\Omega > 0 \; . \tag{6.72}$$

R La soluzione esatta di Taylor-Couette è facile da ricavare, se si ricorda che è la somma di una rotazione rigida e un vortice irrotazionale: imponendo la forma $u_\theta(r) = Ar + B/r$ e le condizioni al contorno,

$$u_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1 \qquad , \qquad u_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2 \tag{6.73}$$

si ottiene la formula voluta.

- Calcolo dello sforzo tangenziale a parete per determinare il puto di equilibrio del sistema. Si determina la componente tangenziale (quella che contribuisce alla coppia resistente) dello sforzo sul cilindro interno. Il contributo viscoso del vettore sforzo può essere scritto come:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s_n} &= \mathbb{S} \cdot \boldsymbol{\hat{n}} = \\
&= \mu[\boldsymbol{\nabla u} + \boldsymbol{\nabla}^T \boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{\hat{n}} = \\
&= \mu\left[2(\boldsymbol{\hat{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\hat{n}} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}\right] = \quad \text{(verificare con le tabelle)} \\
&= \mu\left[2\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta)\right]\boldsymbol{\hat{\theta}} = \\
&= \mu\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right]\boldsymbol{\hat{\theta}} = \qquad\qquad (u_\theta = Ar + B/r) \\
&= -2\mu\frac{B}{r^2}\boldsymbol{\hat{\theta}}
\end{aligned} \tag{6.74}$$

R La formula dello sforzo tangenziale a parete per la corrente di Taylor-Couette è $\tau_w = \mu\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right]$,

La parte tangenziale dello sforzo a parete sul cilindro interno è quindi $\tau_w = 2\mu B/R_1^2$. Integrando il prodotto tra vettore sforzo e raggio R_1 sulla superficie laterale del cilindro si ottiene la coppia resistente,

$$\begin{aligned}
C_{res}(\Omega) &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \tau_w(R_1) R_1 R_1 d\theta = \\
&= 2\pi\tau_w(R_1)R_1^2 = -4\pi\mu\frac{B(\Omega)}{R_1^2}R_1^2 = -4\pi\mu\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\Omega = -\gamma\Omega \; .
\end{aligned} \tag{6.75}$$

All'equilibrio, la somma della coppia disponibile e di quella resistente deve essere uguale a zero,

$$0 = C_{disp}(\Omega) + C_{res}(\Omega) = \alpha - \beta\Omega - \gamma\Omega \; , \tag{6.76}$$

e quindi $\Omega = \dfrac{\alpha}{\beta + \gamma}$.

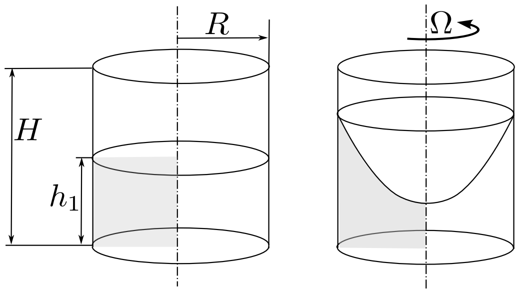
Esercizio 6.8 — Recipiente rotante. Un contenitore cilindrico (raggio R, altezza H) è riempito fino ad una quota $h_1 = H/2$ di un liquido di densità ρ. Il contenitore è messo poi in rotazione con velocità angolare costante Ω. Una volta esaurito il transitorio, viene chiesto di trovare:

- la forma che assume il liquido all'interno del contenitore;
- la velocità Ω_{max} alla quale il liquido inizia a uscire dal contenitore;
- il campo di pressione quando il corpo ruota con velocità angolare Ω_{max}.

(R: $z_{free}(r) = \dfrac{\Omega^2 r^2}{2g} - \dfrac{\Omega^2 R^2}{4g} + \dfrac{H}{2}$

$\Omega_{max} = \sqrt{\dfrac{2gH}{R^2}}$

$P(r) = \dots$)



Soluzione

Concetti. Soluzione esatte delle equazioni di Navier-Stokes. Fluido in rotazione rigida, con superficie superiore libera.

Svolgimento.