

Note ed esercizi di fluidodinamica

Copyright © 2019 Davide Montagnani

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

First edition, March 2013

Indice

	Esercizi
1	
1. Bilanci	7
1.1 Bilanci in forma integrale	7
1.1.1 Bilancio di massa	8
1.1.2 Bilancio della quantità di moto	8
1.1.3 Bilancio del momento quantità di moto	8
1.1.4 Bilancio dell'energia totale	8
1.1.5 Bilanci integrali per volumi in moto arbitrario	9
1.1.6 Bilanci integrali per volumi di controllo fissi	9
1.2 Bilanci in forma differenziale	9
1.2.1 Bilancio di massa	10
1.2.2 Bilancio di quantità di moto	10
1.2.3 Bilancio del momento della quantità di moto	11
1.2.4 Bilancio dell'energia totale	11
1.2.5 Chiusura del problema	12
1.2.6 Altre equazioni di bilancio	13
1.3 Relazioni di salto	15
1.3.1 Bilancio di massa	15
1.3.2 Bilancio di quantità di moto	16
1.3.3 Bilancio di energia	17
1.4 Approfondimenti su alcuni bilanci	18
1.4.1 Continuità	18
1.4.2 Quantità di moto	19
1.4.3 Vorticità	20
1.5 Introduzione agli esercizi	22

2	Similitudine	63
2.1	Teorema di Buckingham	63
2.2	Equazioni di Navier–Stokes incomprimibili in forma adimensionale	63
2.2.1	Adimensionalizzazione “ad alti numeri di Reynolds”	64
2.2.2	Adimensionalizzazione “a bassi numeri di Reynolds”	65
2.3	Equazione di continuità e numero di Mach	66
2.4	Equazioni di Navier–Stokes in sistemi di riferimento non inerziali	66
2.4.1	Equazioni in forma adimensionale	69
2.5	Equazioni di Boussinesq e numeri di Prandtl, Rayleigh e Grashof	69
2.5.1	Equazioni di Boussinesq	69
2.5.2	Equazioni di Boussinesq: problema bidimensionale tra due superfici piane	70
2.5.3	Equazioni di Boussinesq in forma adimensionale	72
2.5.4	Equazione della vorticità e funzione di corrente nell'approssimazione di Boussinesq	75
2.5.5	Approssimazione di Fourier–Galerkin del problema di Boussinesq	75
2.5.6	Dal problema di Boussinesq al modello di Lorenz	76
2.5.7	Alcuni concetti di stabilità	79
2.5.8	Sistema dinamico di Lorenz	79

Esercizi

1	Bilanci	7
1.1	Bilanci in forma integrale	
1.2	Bilanci in forma differenziale	
1.3	Relazioni di salto	
1.4	Approfondimenti su alcuni bilanci	
1.5	Introduzione agli esercizi	
2	Similitudine	63
2.1	Teorema di Buckingham	
2.2	Equazioni di Navier–Stokes incomprimibili in forma adimensionale	
2.3	Equazione di continuità e numero di Mach	
2.4	Equazioni di Navier–Stokes in sistemi di riferimento non inerziali	
2.5	Equazioni di Boussinesq e numeri di Prandtl, Rayleigh e Grashof	

1. Bilanci

In questo capitolo vengono introdotti i bilanci di alcune quantità meccaniche per un mezzo continuo. I bilanci in forma integrale permettono di descrivere l'evoluzione complessiva (integrale) di un sistema e vengono ricavati partendo da alcuni principi fondamentali della meccanica classica: la conservazione della massa, l'equazioni cardinali della dinamica, il primo principio della termodinamica o bilancio dell'energia. Vengono scritti prima per un volume materiale e poi per volumi di controllo o volumi in moto generico, utilizzando il teorema del trasporto di Reynolds.

Dai bilanci in forma integrale, sotto ipotesi di sufficiente regolarità dei campi, vengono poi ricavati i bilanci in forma differenziale, che permettono di descrivere l'evoluzione locale (puntuale) di un sistema. La forma lagrangiana del bilanci di massa, di quantità di moto e della vorticità verrà utilizzata per meglio apprezzare il significato del vincolo di incomprimibilità, il ruolo della pressione (e degli sforzi in generale) nella dinamica di un fluido e intuire l'influenza del campo di velocità sul campo di vorticità.

Successivamente, dai bilanci integrali vengono ricavate le relazioni di salto delle quantità meccaniche. Queste relazioni possono essere utilizzate per trovare determinare lo stato di un sistema formato da due sotto-sistemi, all'interno dei quali i campi sono regolari, ma che sono separati da una frontiera, attraverso la quale i campi non sono regolari: alcuni esempi di queste sono le superfici "di scorrimento" in fluidi non viscosi, attraverso le quali è discontinua la componente tangenziale della velocità, o le onde d'urto che possono formarsi in correnti comprimibili di fluidi non viscosi.

Infine, viene fornita una breve introduzione agli esercizi sui bilanci integrali, che costituisce una prima linea guida al loro svolgimento.

1.1 Bilanci in forma integrale

Vengono ricavati i bilanci integrali per un volume materiale $V(t)$ partendo dai principi fondamentali della meccanica classica. Successivamente si ricavano i bilanci per un volumi in moto arbitrario $v(t)$ e, come caso particolare, volumi di controllo V_c .

1.1.1 Bilancio di massa

La massa di un volume materiale è uguale all'integrale sul volume della densità ρ . Per il **principio di conservazione della massa**, la massa di un sistema chiuso (che non ha scambi di materia con l'esterno), come ad esempio un volume materiale $V(t)$, rimane costante e quindi la sua derivata nel tempo deve essere uguale a zero,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho = 0 . \quad (1.1)$$

1.1.2 Bilancio della quantità di moto

La quantità di moto di un volume materiale è uguale all'integrale sul volume della quantità di moto per unità di volume $\rho\mathbf{u}$, dove \mathbf{u} è la velocità delle particelle materiali. Per la **prima equazione cardinale della dinamica**, la derivata nel tempo della quantità di moto di un sistema è uguale alla risultante delle forze esterne agenti sul sistema,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho\mathbf{u} = \int_{V(t)} \mathbf{f} + \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n , \quad (1.2)$$

dove $\int_{V(t)} \mathbf{f}$ rappresenta la risultante delle forze esterne di volume e $\oint_{S(t)} \mathbf{t}_n$ la risultante delle forze esterne di superficie, avendo indicato con \mathbf{f} il campo di forze per unità di volume e \mathbf{t}_n il vettore sforzo agente sulla supreficie esterna $S(t)$ del volume $V(t)$. Il teorema di Cauchy nella meccanica del continuo, permette di esprimere il vettore sforzo \mathbf{t}_n in funzione del tensore degli sforzi \mathbb{T} e la normale alla superficie $\hat{\mathbf{n}}$, come $\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T}$.

1.1.3 Bilancio del momento quantità di moto

Il momento della quantità di moto di un volume materiale è uguale all'integrale sul volume del momento della quantità di moto per unità di volume $\rho\mathbf{r} \times \mathbf{u}$, dove \mathbf{r} è il vettore che congiunge il polo con i punti del volume materiale. Per la **seconda equazione cardinale della dinamica**, la derivata nel tempo del momento della quantità di moto di un sistema, rispetto a un polo fisso, è uguale alla risultante momenti esterni sul sistema,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho\mathbf{r} \times \mathbf{u} = \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \oint_{S(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n , \quad (1.3)$$

nell'ipotesi che non ci siano momenti esterni per unità di volume e che il materiale non sia polare (due elementi di materiale adiacenti non si scambiano momenti ma solo forze).

1.1.4 Bilancio dell'energia totale

L'energia totale di un volume materiale è uguale all'integrale sul volume della sua energia interna per unità di volume ρe e della sua energia cinetica per unità di volume $\rho|\mathbf{u}|^2/2$. Combinando il **primo principio della termodinamica** (che riguarda solo sistemi in equilibrio) con il **teorema dell'energia cinetica** (che non include il contributo di energia interna), la derivata nel tempo dell'energia totale del sistema di un sistema è uguale alla differenza tra la potenza delle forze agenti sul sistema e i flussi di calore uscenti da esso,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e^t = \int_{V(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{S(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \rho r , \quad (1.4)$$

avendo indicato con \mathbf{q} il flusso di calore uscente dal volume materiale $V(t)$, e con r l'intensità di una sorgente di calore per unità di massa r , distribuita all'interno del volume $V(t)$, come ad esempio il calore rilasciato da una reazione chimica come la combustione.

1.1.5 Bilanci integrali per volumi in moto arbitrario

Utilizzando il teorema del trasporto di Reynolds, è possibile esprimere la derivata nel tempo dell'integrale di un campo f su un volume materiale $V(t)$ come somma della derivata nel tempo dell'integrale dello stesso campo f su un volume arbitrario $v(t)$ e al flusso della quantità f attraverso la frontiera $s(t) = \partial v(t)$ di $v(t)$, dovuto alla velocità relativa $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ tra le particelle materiali e la superficie $s(t)$,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f = \frac{d}{dt} \int_{v(t) \equiv V(t)} f + \oint_{s(t) \equiv S(t)} f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} . \quad (1.5)$$

I bilanci integrali riferiti a un volume arbitrario $v(t)$, la cui superficie $s(t)$ si muove con velocità \mathbf{v} , risultano

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho + \oint_{s(t)} \rho(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{u} + \oint_{s(t)} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{f} + \oint_{s(t)} \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} + \oint_{s(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \oint_{s(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t + \oint_{s(t)} \rho e^t (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{s(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \rho r . \end{cases} \quad (1.6)$$

1.1.6 Bilanci integrali per volumi di controllo fissi

Come caso particolare dei bilanci integrali riferiti a un volume arbitrario $v(t)$, i bilanci integrali riferiti a un volume di controllo fisso V_c risultano

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho + \oint_{S_c} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \mathbf{u} + \oint_{S_c} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V_c} \mathbf{f} + \oint_{S_c} \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} + \oint_{S_c} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V_c} \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \oint_{S_c} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n \\ \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho e^t + \oint_{S_c} \rho e^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V_c} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{S_c} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{S_c} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \rho r . \end{cases} \quad (1.7)$$

1.2 Bilanci in forma differenziale

Sotto le ipotesi di sufficiente regolarità dei campi che compaiono negli integrali di superficie, è possibile trasformare gli integrali di superficie in integrali di volume, applicando il teorema della divergenza o il lemma del teorema di Green

$$\oint_S f n_i = \int_V f_{/i} , \quad (1.8)$$

avendo indicato con $f_{/i}$ la derivata parziale rispetto alla coordinata cartesiana x_i e con n_i la proiezione lungo x_i della normale uscente dalla superficie $S = \partial V$. Una volta scritti tutti i termini come integrali di volume, sullo stesso volume V , è possibile sfruttare l'arbitrarietà del volume V per ricavare i bilanci in forma differenziale. In questa sezione, si partirà dai bilanci in forma integrale scritti per un volume di controllo fisso $V = V_c$, per il quale vale

$$\frac{d}{dt} \int_V f = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} , \quad (1.9)$$

secondo il teorema del trasporto di Reynolds.

1.2.1 Bilancio di massa

Usando il teorema del trasporto di Reynolds per volumi di controllo fissi e applicando il teorema della divergenza al termine di flusso, si può scrivere

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho + \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] = 0 . \quad (1.10)$$

Sfruttando l'arbitrarietà del bilancio integrale dal volume considerato e imponendo che l'integrandanda sia nulla, si ricava la *forma conservativa* del bilancio differenziale di massa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.11)$$

Sviluppando la divergenza $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho$, e riconoscendo l'espressione della derivata materiale, si ottiene la *forma convettiva* del bilancio differenziale di massa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} . \end{aligned} \quad (1.12)$$

Il vincolo cinematico di incomprimibilità $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ equivale al vincolo “fisico” che impone che la densità delle singole particelle materiali rimanga costante, $D\rho/Dt = 0$.

1.2.2 Bilancio di quantità di moto

È possibile trasformare in un integrale di volume la risultante degli sforzi di superficie, utilizzando il teorema di Cauchy per i mezzi continui,

$$\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{T} , \quad t_i = n_j T_{ji} , \quad (1.13)$$

dove \mathbf{t}_n è il vettore sforzo, $\hat{\mathbf{n}}$ la normale alla superficie e \mathbb{T} il tensore degli sforzi. La risultante degli sforzi di superficie diventa, usando un po' di libertà nel passare dalla notazione astratta a quella indiciale,

$$\oint_S \mathbf{t}_n = \oint_S t_i = \oint_S n_j T_{ji} = \int_V T_{ji/j} = \int_V \nabla \cdot \mathbb{T} . \quad (1.14)$$

Usando il teorema del trasporto di Reynolds per volumi di controllo fissi e applicando il teorema della divergenza al termine di flusso,

$$\oint_S \{\rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}\}_i = \oint_S \rho u_i u_j n_j = \int_V (\rho u_i u_j)_{/j} = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) , \quad (1.15)$$

si può scrivere il bilancio di quantità di moto

$$\int_V \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \int_V \nabla \cdot (\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \int_V [\mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbb{T}] . \quad (1.16)$$

Sfruttando l'arbitrarietà del bilancio integrale dal volume considerato e imponendo che l'integrandina sia nulla, si ricava la *forma conservativa* del bilancio differenziale di quantità di moto,

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbb{T}) = \mathbf{f} . \quad (1.17)$$

Sviluppando i termini

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} &= \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} , \quad \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \nabla \cdot (\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) , \quad (\rho u_i u_j)_{/j} = \rho u_j u_{i/j} + u_i (\rho u_j)_{/j} , \end{aligned} \quad (1.18)$$

riconoscendo che $\mathbf{u} \cdot (\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})) = 0$ come conseguenza della conservazione della massa, si ottiene la *forma convettiva* dell'equazione della quantità di moto

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbb{T} \\ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbb{T} . \end{aligned} \quad (1.19)$$

1.2.3 Bilancio del momento della quantità di moto

Il bilancio del momento della quantità di moto per un mezzo continuo non polare è equivalente alla condizione di simmetria del tensore degli sforzi

$$\mathbb{T}^T = \mathbb{T} , \quad T_{ij} = T_{ji} . \quad (1.20)$$

1.2.4 Bilancio dell'energia totale

Usando un po' di libertà nel passare dalla notazione astratta a quella indiciale, la potenza degli sforzi di superficie diventa

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} &= \oint_S t_i u_i = \oint_S n_j T_{ji} u_i = \int_V (T_{ji} u_i)_{/j} = \int_V \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) \\ &= \int_V (T_{ij/j} u_i + T_{ij} u_{j/i}) = \int_V ((\nabla \cdot \mathbb{T}) \cdot \mathbf{u} + \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u}) , \end{aligned} \quad (1.21)$$

avendo utilizzato la simmetria del tensore degli sforzi, $T_{ij/j} = \{\nabla \cdot \mathbb{T}^T\}_i = \{\nabla \cdot \mathbb{T}\}_i$. Applicando il teorema della divergenza, il termine di flusso di calore viene scritto come

$$\oint_S \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} . \quad (1.22)$$

La *forma conservativa* del bilancio differenziale di energia totale diventa quindi

$$\frac{\partial(\rho e^t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e^t \mathbf{u} - \mathbb{T} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{q}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \rho r . \quad (1.23)$$

Sviluppando la derivata temporale e il termine $\nabla \cdot (\rho e^t \mathbf{u}) = \rho \mathbf{u} \cdot \nabla e^t + e^t \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$, riconoscendo che $e^t(\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})) = 0$ come conseguenza della conservazione della massa, si ottiene la *forma convettiva* dell'equazione dell'energia totale,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial e^t}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla e^t &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \\ \rho \frac{De^t}{Dt} &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r . \end{aligned} \quad (1.24)$$

1.2.5 Chiusura del problema

Affinché il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali formato dai bilanci di massa, quantità di moto ed energia totale, con le condizioni iniziali e al contorno adeguate, sono necessarie l'equazione di stato del materiale che ne descriva le proprietà termodinamiche¹ e i legami costitutivi che esprimano il tensore degli sforzi e il flusso di calore come funzioni dello stato dinamico e termodinamico del sistema. Per un fluido, il tensore degli sforzi viscosi \mathbb{T} può essere scritto come la somma del contributo idrostatico dovuto alla pressione p e il tensore degli sforzi viscosi \mathbb{S} , funzione delle derivate spaziali del campo di velocità. Un fluido che ha un *legame costitutivo lineare* tra il tensore degli sforzi viscosi e il gradiente di velocità $\nabla \mathbf{u}$, viene definito **fluido newtoniano**. Per un fluido newtoniano isotropo, il legame costitutivo che definisce il tensore degli sforzi è

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbb{I} , \quad (1.25)$$

dove μ e λ sono rispettivamente il coefficiente di viscosità dinamica e il secondo coefficiente di viscosità, p è la pressione (“termodinamica”), \mathbb{D} il tensore velocità di deformazione. In generale, sia la pressione p sia i coefficienti di viscosità dipendono dallo stato termodinamico del sistema.

Il flusso di calore \mathbf{q} per conduzione può essere descritto dalla **legge di Fourier**, che lo mette in relazione con il gradiente della temperatura tramite il coefficiente di conduzione termica k , in generale funzione dello stato termodinamico del sistema,

$$\mathbf{q} = -k\nabla T . \quad (1.26)$$

L'introduzione di queste leggi costitutive nelle equazioni di bilancio, aggiunge nuove incognite al sistema, per le quali non abbiamo ricavato un'equazione dinamica. Sono quindi indispensabili la legge di stato che fornisca le relazioni necessarie,

$$\begin{aligned} p &= p(\rho, e) , \quad \mu = \mu(\rho, e) \\ T &= T(\rho, e) , \quad \lambda = \lambda(\rho, e) \\ k &= k(\rho, e) , \end{aligned} \quad (1.27)$$

avendo scelto le variabili termodinamiche delle quali è nota l'equazione dinamica come due variabili termodinamiche indipendenti: la densità ρ e l'energia interna e . Ve

¹Si ricorda che lo stato termodinamico di un sistema monofase è definito da due variabili termodinamiche indipendenti.

1.2.6 Altre equazioni di bilancio

Combinando i bilanci delle quantità meccaniche ottenuti partendo dai principi fondamentali della fisica, si possono ottenere le equazioni di bilanci di altre quantità, come ad esempio l'energia cinetica $\rho|\mathbf{u}|^2/2$, l'energia interna e , e la vorticità $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$.

Equazione dell'energia cinetica

Moltiplicando scalarmente il bilancio della quantità di moto per il vettore velocità \mathbf{u} , si può scrivere l'equazione di bilancio dell'energia cinetica. In forma conservativa,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho|\mathbf{u}|^2}{2} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T}) , \quad (1.28)$$

in forma convettiva,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T}) \\ \rho \frac{D}{Dt} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T}) . \end{aligned} \quad (1.29)$$

Equazione dell'energia interna

Dalla differenza del bilancio dell'energia totale e dell'energia cinetica, si ottiene il bilancio dell'energia interna. In forma conservativa,

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u}) = \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r , \quad (1.30)$$

in forma convettiva,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla e &= \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \\ \rho \frac{De}{Dt} &= \mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r . \end{aligned} \quad (1.31)$$

Equazione della vorticità

Applicando l'operatore di rotore al bilancio della quantità di moto, si ottiene l'equazione dinamica della vorticità. Per un fluido newtoniano (con coefficienti di viscosità costanti e uniformi),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \\ \frac{D \boldsymbol{\omega}}{Dt} &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} , \end{aligned} \quad (1.32)$$

dove è stata introdotta la viscosità cinematica del fluido, $\nu = \mu/\rho$.

Equazione dell'entropia

Nell'ipotesi di equilibrio termodinamico delle singole particelle materiali² si può ricavare dal primo principio della termodinamica,

$$de = Tds - Pdv = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho , \quad (1.33)$$

l'equazione di bilancio dell'entropia in forma convettiva,

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \quad \rightarrow \quad \rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} \left(\rho \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right) . \quad (1.34)$$

Utilizzando il bilancio dell'energia interna e il bilancio di massa, si può scrivere

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} (\mathbb{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r + p \nabla \cdot \mathbf{u}) , \quad (1.35)$$

e separando i contributi viscosi da quelli di presione nel tensore degli sforzi, $\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{S}$,³

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} (\mathbb{S} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r) . \quad (1.36)$$

Nel caso di fluidi newtoniani, $\mathbb{S} = 2\mu\mathbb{D} + \lambda\nabla \cdot \mathbf{u}\mathbb{I}$, l'equazione dell'entropia in forma differenziale convettiva diventa

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} (2\mu\mathbb{D} : \mathbb{D} + \lambda|\nabla \cdot \mathbf{u}|^2 - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r) . \quad (1.37)$$

Utilizzando la legge di Fourier, $\mathbf{q} = -k\nabla T$, per il flusso di calore per conduzione, si può riscrivere il termine di divergenza del flusso di calore,

$$\frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T^2} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - k \nabla T \cdot \frac{\nabla T}{T^2} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - k \frac{|\nabla T|^2}{T^2} , \quad (1.38)$$

e quindi riscrivere l'equazione dell'entropia, in forma conservativa e convettiva,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{u}) &= \frac{1}{T} (2\mu\mathbb{D} : \mathbb{D} + \lambda|\nabla \cdot \mathbf{u}|^2) + k \frac{|\nabla T|^2}{T^2} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \frac{\rho r}{T} \\ \rho \frac{Ds}{Dt} &= \frac{1}{T} (2\mu\mathbb{D} : \mathbb{D} + \lambda|\nabla \cdot \mathbf{u}|^2) + k \frac{|\nabla T|^2}{T^2} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \frac{\rho r}{T} . \end{aligned} \quad (1.39)$$

In questa equazione si riconoscono tutti i fenomeni fisici che influenzano l'entropia di una particella materiale. Si possono distinguere i contributi dovuti alla *non idealità* del fluido considerato, legati ai fenomeni viscosi e di conduzione del calore, e i contributi dovuti ai flussi di calore forniti alla sistema. I fenomeni viscosi e i processi di conduzione del calore fanno aumentare l'entropia, poiché

$$T, \mu, \lambda, k \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{D} : \mathbb{D}, |\nabla \cdot \mathbf{u}|, |\nabla T| \geq 0 . \quad (1.40)$$

²Se i tempi caratteristici della termodinamica sono di gran lunga inferiori al tempo caratteristico del fenomeno fluidodinamico, si può immaginare che la singola particella fluida sia in continuo stato di equilibrio termodinamico locale. Si possono quindi estendere i risultati della Termodinamica, che in generale studia sistemi in equilibrio, alla singola particella fluida.

³Dovrebbe essere facile dimostrare che $\mathbb{I} : \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}$.

Gli ultimi due termini rappresentano i flussi di calore forniti al sistema e si presentano nella forma Q/T , flusso di calore diviso la temperatura della particella, coerentemente con la definizione dell'entropia in Termodinamica,

$$dS = \frac{\delta Q}{T} . \quad (1.41)$$

Questi due termini possono dare un contributo positivo o negativo, a seconda del segno della sorgente di calore r e del flusso di valore \mathbf{q} .

Il bilancio dell'entropia in forma integrale per un volume materiale,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho s = \int_{V(t)} \frac{1}{T} \left(2\mu \mathbb{D} : \mathbb{D} + \lambda |\nabla \cdot \mathbf{u}|^2 + k \frac{|\nabla T|^2}{T} \right) - \oint_{\partial V(t)} \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \frac{\rho r}{T} , \quad (1.42)$$

permette di interpretare il ruolo dei fenomeni non ideali (viscosità e conduzione del calore) come sorgente di volume sempre positiva dell'entropia, riconoscere il ruolo della sorgente (o pozzo) di entropia di intensità per unità di massa r/T svolto da una sorgente di calore per unità di massa r , e il ruolo di flusso di entropia \mathbf{q}/T attraverso il contorno del volume $V(t)$ svolto da un flusso di calore \mathbf{q} .

1.3 Relazioni di salto

Si ricavano le condizioni di salto di velocità e sforzo in corrispondenza di superfici di interfaccia. Si sottolinea che queste superfici possono essere superfici introdotte dalla modellazione del problema, come ad esempio la superficie di separazione tra due fluidi all'interno della quale in generale agisce una tensione superficiale o una superficie di discontinuità tangenziale nel caso di fluido non viscoso, oppure superfici fittizie.

Si parte dai bilanci in forma integrale scritti per un volume in moto arbitrario. I bilanci di massa e quantità di moto del volume in moto arbitrario si ottengono dalle regole di derivazione su domini mobili delle funzioni $f = \rho$ e $\mathbf{f} = \rho \mathbf{u}$,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dV = \frac{d}{dt} \int_{v(t)=V(t)} f dv + \oint_{\partial v(t)=\partial V(t)} f(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad (1.43)$$

dove \mathbf{u} è la velocità del fluido, \mathbf{w} è la velocità della superficie di discontinuità.

Il bilancio integrale viene fatto su un elemento di volume infinitesimo, “allungato” nelle direzioni della superficie. Quando il volume dell'elemento infinitesimo tende a zero, tende a zero più velocemente dei contributi sulle superfici parallele alla superficie di salto.

L'elemento di volume dv è il parallelepipedo di superfici laterali dS , paralleli alla superficie, e basi dh perpendicolari alla superficie. Se si ipotizza che le superfici $dh \ll dS$ i contributi nei bilanci dei termini agenti sulle superfici dh (tranne che nel caso della tensione superficiale, che ha le dimensioni di uno sforzo per una lunghezza) sono trascurabili.

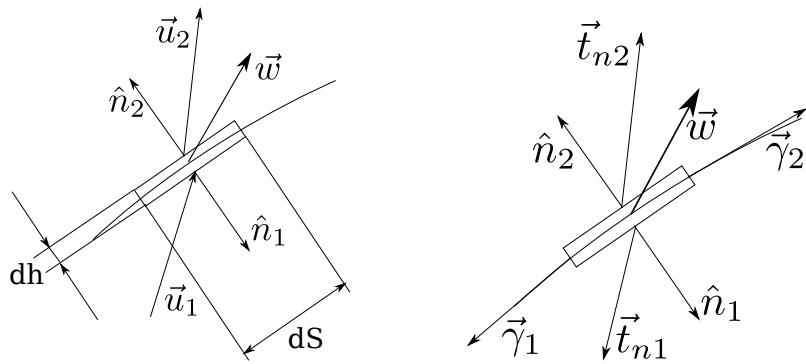
1.3.1 Bilancio di massa

Il bilancio di massa per il volume dv in moto con velocità \mathbf{w} è

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho + \oint_{\partial v} \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (1.44)$$

Trascurando i contributi di volume e quelli delle superfici dh

$$\rho_1(\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS + \rho_2(\mathbf{u}_2 - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS = 0 \quad (1.45)$$



(a) Definizione delle velocità ai due lati dell'elemento infinitesimo e delle dimensioni dello stesso. La velocità della superficie è indicata con \mathbf{w} .

(b) Definizione degli sforzi e della tensione superficiale agenti sull'elemento infinitesimo della superficie.

dove le normali $\hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{\mathbf{n}}$ e $\hat{\mathbf{n}}_2 = -\hat{\mathbf{n}}$ sono opposte. La quantità tra parentesi è la velocità relativa del fluido rispetto alla superficie. Si definisce quindi il flusso di massa m attraverso la superficie.

$$\begin{aligned} -m &= \rho_1(\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho_2(\mathbf{u}_2 - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ &= \rho_1 \mathbf{u}_{r1} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho_2 \mathbf{u}_{r2} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (1.46)$$

Nel caso di densità uniforme $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ si “conservano” le componenti normali della velocità relativa e della velocità.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{r1} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \mathbf{u}_{r2} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{u}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \mathbf{u}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (1.47)$$

1.3.2 Bilancio di quantità di moto

Il bilancio della quantità di moto per l'elemento dv è

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial v} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{\partial v} \mathbf{t}_n + \int_v \rho \mathbf{g} + \int_l \gamma \quad (1.48)$$

avendo incluso anche eventuali termini di tensione superficiale, svolto sulla curva che separa tre sostanze (come ad esempio il “perimetro” del menisco visto nell'esercizio sul capillare: in quel caso la curva l separa il liquido, dall'aria, dalle pareti solide del capillare). Trascurando i termini di volume, il bilancio per l'elemento infinitesimo (per semplicità pensato in 2 dimensioni) è

$$\rho_1 \mathbf{u}_1 (\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 ds + \rho_2 \mathbf{u}_2 (\mathbf{u}_2 - \mathbf{w}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 ds = \mathbf{t}_{n1} ds + \gamma_1 + \mathbf{t}_{n2} ds + \gamma_2 \quad (1.49)$$

con $\gamma_1 = \gamma \hat{\mathbf{t}}_1$, $\gamma_2 = (\gamma + \gamma_s ds) \hat{\mathbf{t}}_2$. I versori tangenti $\hat{\mathbf{t}}_1$, $\hat{\mathbf{t}}_2$ agli estremi dell'elementino di superficie non sono allineati a causa della curvatura della superficie (si rimanda alla “dimostrazione” della legge di Young-Laplace). Si tiene conto di una possibile variazione della tensione superficiale. Questa di solito può essere dovuta a differenze di temperatura o composizioni chimiche (perchè si usa il sapone per lavarsi le mani?): si rimanda al simpatico (?) video delle barchette sul fondo del documento della dimostrazione della legge di Young-Laplace, nel quale viene usata una “propulsione a effetto Marangoni” per barchette di carta. Il contributo della tensione superficiale si può scrivere come

$$\gamma_2 + \gamma_1 = (2\gamma H \hat{\mathbf{n}} + \nabla \gamma) ds \quad (1.50)$$

dove

- H è la curvatura media $H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ nel caso tridimensionale, che nel caso bidimensionale coincide con $\frac{1}{2R}$ (uno dei due raggi di curvatura diventa infinito).
- $\hat{\mathbf{n}}$ è il vettore normale che punta verso i centri di curvatura.
- ∇_2 è il gradiente ristretto alla superficie, tangente ad essa.

Ricordando la definizione di m e inserendola nel bilancio

$$m(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \mathbf{t}_{n1} + \mathbf{t}_{n2} + 2\gamma H \hat{\mathbf{n}} + \nabla_2 \gamma \quad (1.51)$$

Si analizzano ora alcuni casi particolari:

- Statica con tensione superficiale. La velocità è nulla ovunque, i vettori di sforzo hanno solo il contributo della pressione $\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}}$. Secondo queste ipotesi, non si possono avere contributi tangenziali nemmeno a causa della tensione superficiale e quindi γ deve essere uniforme sulla superficie. Nel caso bidimensionale si ricorda che la normale $\hat{\mathbf{n}}$ punta verso il centro del cerchio osculatore e coincide quindi con la normale $\hat{\mathbf{n}}_1$ dell'immagine e il raggio di curvatura R è positivo. Il bilancio della quantità di moto si riduce all'equilibrio statico della superficie

$$p_1 - p_2 = \frac{\gamma}{R} \quad (1.52)$$

Si osserva quindi che la pressione “interna” p_1 deve essere maggiore di p_2 .

- Fluido inviscido, superficie senza tensione superficiale. Il bilancio si riduce a

$$m(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = -(p_1 - p_2)\hat{\mathbf{n}} \quad (1.53)$$

- Fluido inviscido, superficie senza tensione superficiale, densità uniforme. Si è visto come la velocità (e le velocità relative) normali alla superficie devono essere uguali da entrambe le parti della superficie. Se si ipotizza che la superficie non sia attraversata da flusso di massa (si impone che la componente normale della velocità relativa sia nulla, non la velocità relativa nel suo complesso). In questo caso non è possibile trovare una relazione di salto per la velocità tangenziale (o almeno questo non è possibile se non si aggiungono altre ipotesi o altre equazioni ... vedremo un caso semplificato applicando il teorema di Bernoulli a un problema aerodinamico bidimensionale stazionario ...): poiché $m = 0$ la superficie è “scarica” (capiterà nei prossimi corsi di sentir parlare o aver direttamente a che fare con “l'ipotesi di scia scarica”: questa non dovrà quindi essere una novità o una sorpresa in futuro)

$$p_1 = p_2 \quad (1.54)$$

ma non si riesce a ricavare nessuna informazione dalla componente tangenziale dell'equazione poiché è un'identità $0 = 0$ a prescindere dal valore di $(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \hat{\mathbf{t}}$. Attraverso tale superficie (di spessore nullo) ci può essere un salto finito di velocità tangenziale: in questo caso la superficie è una superficie di vorticità infinita

L'ultimo caso particolare verrà utilizzato in qualche esercizio in cui un dominio occupato da un fluido può essere suddiviso in un sottodomino nel quale è valido il teorema di Bernoulli (in qualche forma ...) e in un sottodomino dove sono valide le relazioni della statica: le condizioni di salto serviranno a far comunicare tra di loro i due sottodomini (e a risolvere correttamente l'esercizio).

1.3.3 Bilancio di energia

Non verrà detto nulla sulle relazioni di salto delle altre quantità ...

1.4 Approfondimenti su alcuni bilanci

In questa sezione vengono analizzate alcune equazioni di bilancio in forma differenziale (è quindi necessario che queste equazioni siano valide!): vengono usate sia la rappresentazione euleriana sia la rappresentazione lagrangiana, al fine di ottenere la migliore comprensione dei fenomeni fisici coinvolti.

Si indicano con \mathbf{x}_0 le coordinate lagrangiane, solidali con il continuo; si indicano con \mathbf{x} le coordinate euleriane. I due sistemi di coordinate sono legati tra di loro dalle relazioni

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) \\ \frac{D\mathbf{x}}{Dt} &= \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{u}\end{aligned}\tag{1.55}$$

La derivata $\partial/\partial t$ indica la derivata temporale fatta a coordinata euleriana \mathbf{x} costante. La derivata materiale D/Dt indica la derivata fatta "a coordinata lagrangiana" costante e rappresenta quindi la variazione temporale di una quantità legata alla particella materiale, che si muove come il continuo, per la definizione di coordinate materiali.

Il legame tra D/Dt e $\partial/\partial t$ si trova utilizzando le regole di derivazione per funzioni composte. Scrivendo la funzione generica f come

$$f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) = f_0(\mathbf{x}_0, t) = f_0(\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t), t),\tag{1.56}$$

si ottiene

$$\frac{D}{Dt} f = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t) = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_t = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f.\tag{1.57}$$

1.4.1 Continuità

L'equazione di continuità può essere riscritta mettendo in evidenza la derivata materiale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}\tag{1.58}$$

È possibile dimostrare⁴ la relazione $DJ/Dt = J \nabla \cdot \mathbf{u}$, dove J indica il determinante del gradiente $\partial \mathbf{x}/\partial \mathbf{x}_0$, si può scrivere l'equazione in coordinate lagrangiane, dopo averla moltiplicata per J ($\neq 0$)

$$J \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{DJ}{Dt} \Rightarrow \frac{D(J\rho)}{Dt} = 0 \Rightarrow J\rho = \rho_0\tag{1.59}$$

La variazione della densità di una particella materiale è legata alla variazione del volume della stessa (ricordare che $dv = JdV$). Questa conclusione è ragionevole se si pensa che la massa della particella materiale si conserva ($dm = \rho dv = \rho_0 dV$).

R Il vincolo di incomprimibilità rappresenta la costanza del volume della particella materiale. Il volume dv coincide con il volume di riferimento dV , implicando $J \equiv 1$ e quindi $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

⁴I più curiosi, cerchino "formula di Jacobi".

1.4.2 Quantità di moto

L'equazione della quantità di moto è

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right\} = \nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f} \quad (1.60)$$

dove con \mathbb{T} è stato indicato il tensore degli sforzi, che per un fluido newtoniano è $\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{S}$ con $\mathbb{S} = 2\mu\mathbb{D} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbb{I}$ e $\mathbb{D} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}]$ il tensore velocità di deformazione, parte simmetrica del gradiente della velocità. Introducendo la derivata materiale, si ritrova una forma "familiare" del secondo principio della dinamica

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \rho \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f} \quad (1.61)$$

Richiami di geometria delle curve nello spazio.

Una curva è un luogo di punti che può essere parametrizzato tramite un parametro solo. La parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ della curva \mathbf{r} è definita regolare se $d\mathbf{r}/dt \neq 0$. Si definisce poi una parametrizzazione regolare particolare, l'ascissa curvilinea s tale per cui $|d\mathbf{r}(s)/ds| = 1, \forall s \in (a, b)$.

Nel seguito si introduce brevemente la **terna di Frenet** $\{\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}}\}$, formata dai versori tangente, normale e binormale, in funzione dell'ascissa curvilinea. Si dimostra che

$$\hat{\mathbf{t}}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (1.62)$$

La derivata seconda della posizione \mathbf{r} , cioè la derivata prima del versore tangente $\hat{\mathbf{t}}$ è legata al versore normale $\hat{\mathbf{n}}$, tramite la curvatura $k = \left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right|$.

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}}{\left| \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} \right|} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = k\hat{\mathbf{n}} \quad (1.63)$$

Il versore binormale è definito a completare la terna ortonormale destrorsa

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (1.64)$$

Per completezza e senza troppo sforzo si calcolano anche le derivate di tali versori, ricordando che hanno modulo unitario e costante, e formano una terna ortogonale in ogni punto, introducendo la definizione della torsione $\tau = \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} \cdot \hat{\mathbf{b}}$.

$$\begin{aligned} & \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = k\hat{\mathbf{n}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{t}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = \tau \end{array} \right. & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{t}} = -k \\ \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = \tau \end{array} \right. & \Rightarrow & \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = -k\hat{\mathbf{t}} + \tau\hat{\mathbf{b}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0 \\ \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{t}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0 \\ \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0 \end{array} \right. & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0 \\ \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{t}} = -\hat{\mathbf{t}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0 \\ \hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = -k \end{array} \right. & \Rightarrow & \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\tau\hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (1.65)$$

Se la parametrizzazione regolare della curva non è l'ascissa curvilinea, si può ricavare

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = v\hat{\mathbf{t}} \quad (1.66)$$

dove si è introdotto il modulo v di quella che sarà la velocità \mathbf{v} quando \mathbf{r} e t saranno spazio e tempo. In maniera analoga

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = v k \hat{\mathbf{n}} \quad (1.67)$$

Se \mathbf{r} e t sono spazio e tempo, la velocità e l'accelerazione di un punto che ha come legge oraria $\mathbf{r}(t)$ sono

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = v \hat{\mathbf{t}} \\ \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{t}} + v \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{t}} + v^2 k \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (1.68)$$

Ritorno al bilancio della quantità di moto.

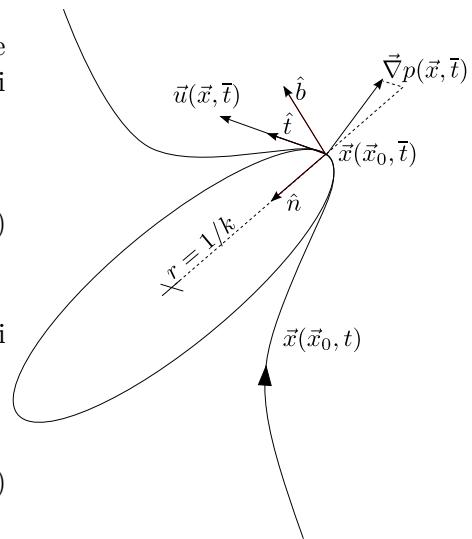
Inserendo la forma dell'accelerazione nell'equazione della quantità di moto e proiettando lungo i versori della terna di Frenet

$$\begin{cases} \rho \frac{dv}{dt} = \hat{\mathbf{t}} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f}) \\ \rho v^2 k = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f}) \\ 0 = \hat{\mathbf{b}} \cdot (\nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f}) \end{cases} \quad (1.69)$$

In assenza di forze di volume ($\mathbf{f} = 0$) e sforzi viscosi ($\mathbb{T} = \mathbb{S} - p\mathbb{I} = -p\mathbb{I}$):

$$\begin{cases} \rho \frac{dv}{dt} = -\hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla p \\ \rho v^2 k = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla p \\ 0 = -\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla p \end{cases} \quad (1.70)$$

Un'analisi della componente normale permette di ricavare, **sotto le ipotesi fatte**, il legame tra la curvatura delle traiettorie delle particelle fluide e il gradiente del campo di pressione. Il termine a sinistra dell'uguale è positivo poiché prodotto di quantità positive: la curvatura di una linea è non negativa per come è definita, la densità è positiva, il modulo di un vettore è anch'esso non negativo. Il prodotto scalare tra la normale e il gradiente della pressione (derivata direzionale della pressione in direzione $\hat{\mathbf{n}}$) deve quindi essere negativo. La pressione quindi diminuisce, andando verso il centro del cerchio osculatore. Sempre dalla seconda equazione è immediato notare che il legame tra la curvatura della traiettoria è proporzionale alla componente del gradiente di pressione lungo il versore normale. La componente tangente fa aumentare il modulo della velocità, mentre la componente binormale deve essere nulla.



1.4.3 Vorticità

L'equazione della vorticità in coordinate euleriane è

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (1.71)$$

Se viene fatta l'ipotesi di viscosità nulla, il termine contenente il laplaciano della vorticità non compare nell'equazione: questo termine è il responsabile della diffusione (isotropa per come è scritto) della vorticità.

L'equazione può essere quindi riscritta come:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (1.72)$$

Scritta in componenti

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = \omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (1.73)$$

Il termine di destra può essere riscritto come

$$\begin{aligned} \omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} &= \omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_{0l}} \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} = \left(u_i = \frac{Dx_i}{Dt} \right) \\ &= \omega_k \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \right) \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (1.74)$$

Vale la relazione

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} = \delta_{ik} \quad (1.75)$$

Il termine di sinistra può essere riscritto come

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = \frac{D}{Dt} (\delta_{ik} \omega_k) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \omega_k \right) \quad (1.76)$$

Inserendo nell'equazione della vorticità e sfruttando le proprietà della derivata del prodotto:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \omega_k \right) - \omega_k \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \right) \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} &= 0 \\ \frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \omega_k \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.77)$$

Se la trasformazione non è singolare, risulta quindi

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \omega_k \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \omega_k = \omega_{l0} \quad (1.78)$$

e in conclusione, invertendo il gradiente della trasformazione delle coordinate

$$\omega_k = \frac{\partial x_k}{\partial x_{0l}} \omega_{l0} \quad , \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \boldsymbol{\omega}_0 \quad (1.79)$$

Si può quindi notare che la vorticità segue la stessa evoluzione di un segmento infinitesimo materiale, per il quale vale:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} d\mathbf{x}_0 \quad (1.80)$$

1.5 Introduzione agli esercizi

I bilanci integrali consentono di valutare le azioni integrali (forze, momenti, potenza) scambiati tra un fluido e un corpo a contatto con esso, senza conoscere nel dettaglio il campo di moto del fluido di interesse, ma valutando il flusso netto delle quantità meccaniche di interesse (massa, quantità di moto, momento della quantità di moto, energia, entalpia e calore) attraverso la superficie di contorno del volume fluido di interesse. Il contorno del dominio fluido $v(t)$ viene suddiviso nella parte a contatto con il corpo di interesse $s_{f,s}(t)$ e nella parte rimanente $s_{f,free}(t) = \partial v(t) \setminus s_{f,s}(t)$.

Bilancio della quantità di moto e risultante delle forze.

La risultante delle forze agenti sul corpo⁵ sarà uguale all'integrale del vettore sforzo agente sulla superficie $s_{s,f}(t)$,

$$\mathbf{R}^s = \oint_{s_{s,f}(t)} \mathbf{t}_{n,s} , \quad (1.81)$$

avendo indicato con $s_{s,f}(t)$ la superficie del solido con normale uscente dalla superficie solida ed entrante nel solido e con $\mathbf{t}_{n,s}$ il vettore sforzo agente sul solido, uguale e contrario allo sforzo agente sul fluido nello stesso punto, $\mathbf{t}_{n,s} = -\mathbf{t}_n$, per il principio di azione e reazione (terzo principio della dinamica). Non è stato aggiunto il pedice f al vettore sforzo agente sul fluido, poiché siamo in un corso di fluidodinamica e il soggetto è il fluido, quando è sottointeso. Si può riconoscere la risultante \mathbf{R}^s all'interno del bilancio integrale della quantità di moto per il volume fluido $v(t)$,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial v(t)} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{f} + \oint_{\partial v(t)} \mathbf{t}_n . \quad (1.82)$$

Si analizzano i termini di superficie, considerando separatamente i contributi delle superfici $s_{f,s}$ e $s_{f,free}$. Se il solido ha una superficie impermeabile al fluido e non c'è flusso di massa, la velocità del fluido e del solido sono uguali, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, sulla superficie $s_{f,s}$. Di conseguenza rimane solo il contributo del flusso della quantità di moto attraverso la superficie $s_{f,free}$, mentre il termine di flusso attraverso $s_{f,s}$ è nullo. L'integrale sul contorno $\partial v(t)$ del vettore sforzo può essere suddiviso nella somma dell'integrale svolto sulla superficie a contatto con il solido e sulla superficie libera,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial v(t)} \mathbf{t}_n &= \oint_{s_{f,s}(t)} \mathbf{t}_n + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{t}_n = \\ &= - \oint_{s_{s,f}(t)} \mathbf{t}_{n,s} + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{t}_n = -\mathbf{R}^s + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{t}_n . \end{aligned} \quad (1.83)$$

Spesso sulla superficie libera $s_{f,free}(t)$ possono essere trascurati gli sforzi viscosi: in questo caso, il vettore sforzo si riduce al solo effetto della pressione $\mathbf{t}_n = -p \hat{\mathbf{n}}$.

Ritornando al bilancio della quantità di moto, si può scrivere

$$\mathbf{R}^s = - \int_{s_{f,free}} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{s_{f,free}(t)} \mathbf{t}_n - \int_{v(t)} \mathbf{f} - \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \mathbf{u} \quad (1.84)$$

Nel caso in cui il problema sia stazionario e che le forze di volume nel fluido siano trascurabili, gli ultimi due termini si annullano. Se poi si possono trascurare gli sforzi viscosi su $s_{f,free}$, la superficie $s_{s,f}$ è una superficie chiusa (si pensi alla superficie "all'infinito" attorno a

⁵La risultante delle forze delle azioni scambiate con il fluido. A questa andranno sommate le forze di volume, come ad esempio il peso del corpo stesso.

un corpo, come esempio) e la pressione è costante su questa superficie chiusa, l'integrale degli sforzi su $s_{f,free}$ è anch'esso nullo, poiché

$$\oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{t}_n = - \oint_{s_{f,free}(t)} p \hat{\mathbf{n}} = -p \oint_{s_{f,free}(t)} \hat{\mathbf{n}} \equiv 0 , \quad (1.85)$$

e la risultante delle forze agenti sul solido si riduce a

$$\mathbf{R}^s = - \int_{s_{f,free}} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} . \quad (1.86)$$

Bilancio del momento della quantità di moto e risultante dei momenti.

Riproponendo un ragionamento analogo, dal bilancio del momento della quantità di moto si può ricavare la risultante dei momenti agenti su un corpo,

$$\mathbf{M} = \oint_{s_{s,f}} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_{n,s} . \quad (1.87)$$

Nel caso semplificato in cui il problema sia stazionario, le forze di volume sono trascurabili, gli sforzi viscosi sono trascurabili sulla superficie $s_{f,free}(t)$ chiusa, sulla quale agisce una pressione costante, la risultante dei momenti agenti sul solido si riduce a

$$\mathbf{M}^s = - \int_{s_{f,free}} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} , \quad (1.88)$$

dove \mathbf{r} è il raggio vettore tra i punti sulla superficie $s_{f,free}(t)$ e il polo rispetto al quale si calcolano i momenti.

Bilancio dell'energia totale.

Tramite il bilancio dell'energia totale si può ricavare la potenza fornita (o assorbita) da un corpo al fluido, e/o il calore scambiato con esso. Gli esercizi che utilizzeranno il bilancio di energia totale ricorderanno alcuni esercizi di Fisica Tecnica. Lo scopo di questi esercizi è quello di proporre un punto di vista più maturo a tali problemi, partendo ai bilanci integrali nella loro forma più generale e opportunamente semplificati considerando grandezze uniformi sulle sezioni (o equivalenti grandezze medie) e ipotesi sullo scambio di calore tra il fluido e l'esterno. Verranno analizzati sistemi aperti e chiusi, nella speranza di fornire un approccio di validità generale a problemi già trattati durante il corso di Fisica Tecnica, senza alcuna pretesa di coprire tutti gli argomenti e i dettagli trattati in quel corso, ma piuttosto consentire una visione del problema generale che coinvolga scambi di massa, lavoro e calore del sistema con l'esterno, facilmente specializzabile a casi particolari, che riduca al minimo lo sforzo mnemonico richiesto da molti casi particolari, apparentemente scorrelati l'uno dall'altro, a vantaggio di una maggiore "sensibilità" sul fenomeno fisico.

Sfruttando la suddivisione della superficie del volume fluido $\partial v = s_{f,free} \cup s_{f,s}$, si può riscrivere il bilancio dell'energia totale,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t + \oint_{\partial v(t)} \rho e^t (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{\partial v(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{v(t)} \rho r . \quad (1.89)$$

riconoscendo la potenza

$$W = \oint_{s_{f,s}} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} , \quad (1.90)$$

fornita da un corpo solido al fluido,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t + \oint_{\partial v(t)} \rho e^t (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \\ = \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} + W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{v(t)} \rho r . \end{aligned} \quad (1.91)$$

Se non c'è flusso di massa attraverso la superficie solida, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ su $s_{f,s}$. Se la superficie libera $s_{f,free}$ del volume di controllo è fissa, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ su $s_{f,free}$. Separando il contributo degli sforzi di pressione da quelli viscosi, $\mathbf{t}_n = -p\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{s}_n$ sulla superficie $s_{s,free}$, il bilancio dell'energia totale diventa,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t + \oint_{s_{f,free}(t)} \rho h^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \\ = \int_{v(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{s_{f,free}(t)} \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{u} + W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{v(t)} \rho r , \end{aligned} \quad (1.92)$$

avendo introdotto l'entalpia totale $h^t = e^t + \frac{p}{\rho} = e + \frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}$. Se si trascurano la potenza degli sforzi viscosi su $s_{s,free}$ e la potenza delle forze di volume \mathbf{f} , il bilancio dell'energia totale del fluido contenuto nel volume $v(t)$ diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t + \oint_{s_{f,free}(t)} \rho h^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{v(t)} \rho r . \quad (1.93)$$

Sistemi aperti

Per un sistema aperto in cui sono soddisfatte le ipotesi già elencate, si può scrivere

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho e^t = - \oint_{s_{f,free}(t)} \rho h^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + W - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{v(t)} \rho r , \quad (1.94)$$

e sinteticamente

$$\frac{dE^t}{dt} = \Phi_{h^t} + W + \dot{Q} , \quad (1.95)$$

avendo definito l'energia totale interna E^t al volume $v(t)$ studiato, il flusso netto di entalpia totale Φ_{h^t} attraverso la superficie $s_{s,free}$, e il flusso di calore \dot{Q} fornito al fluido contenuto all'interno di $v(t)$,

$$\begin{aligned} E &= \int_{v(t)} \rho e \\ \Phi_{h^t} &= \int_{s_{f,free}} \rho h^t \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{s_{f,free}} \rho \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ \dot{Q} &= - \oint_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{v(t)} \rho r . \end{aligned} \quad (1.96)$$

Sistemi chiusi

Per un sistema chiuso (nessuno scambio di massa con l'esterno) in cui i termini cinetici sono trascurabili, $e^t = e$, il bilancio di energia diventa sinteticamente,

$$\frac{dE}{dt} = W + \dot{Q} , \quad (1.97)$$

avendo definito $E = \int_{v(t)} \rho e$, come l'energia interna del fluido contenuto nel volume $v(t)$. Questa formula corrisponde al primo principio della Termodinamica, formulato in termini di potenza e non di energia, in cui è stata utilizzata la convenzione di potenza delle forze positiva e flusso di calore positivo se fornito al fluido.⁶

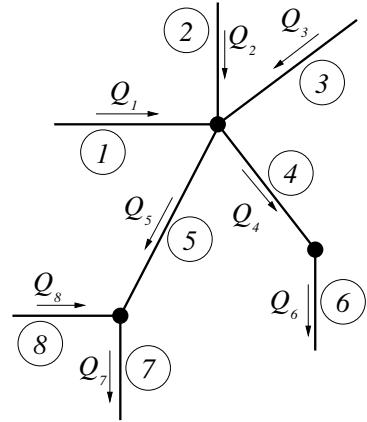
⁶In Termodinamica, che studia sistemi in equilibrio, il primo principio è formulato in termini di energia come,

$$\Delta E = Q - L , \quad (1.98)$$

in cui la variazione di energia ΔE tra due stati termodinamici del sistema corrisponde alla differenza del calore Q fornito al sistema e al lavoro L svolto **dal** sistema.

Esercizio 1.1 — Bilancio di massa: teoria delle reti. Si consideri una rete idraulica come quella rappresentata in figura. All'interno dei tubi scorre acqua. Sia nota le velocità media dell'acqua all'interno di alcuni dei rami della rete: $U_1 = 1 \text{ m/s}$, $U_2 = 1.5 \text{ m/s}$, $U_3 = 0.5 \text{ m/s}$, $U_7 = 2 \text{ m/s}$ e $U_8 = 0.3 \text{ m/s}$. Il verso della velocità è indicato dalle frecce sul disegno. Determinare la portata volumetrica, la portata in massa e la velocità media all'interno di ciascun ramo della rete sapendo che l'acqua ha una densità pari a $\bar{\rho} = 999 \text{ kg/m}^3$, e che il diametro dei tubi è rispettivamente $D_1 = 0.4 \text{ m}$, $D_2 = 0.2 \text{ m}$, $D_3 = 0.2 \text{ m}$, $D_4 = 0.3 \text{ m}$, $D_5 = 0.5 \text{ m}$, $D_6 = 0.25 \text{ m}$, $D_7 = 0.3 \text{ m}$, $D_8 = 0.6 \text{ m}$.

($Q_1 = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_2 = 0.05 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_3 = 0.02 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_4 = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_5 = 0.06 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_6 = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_7 = 0.14 \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_8 = 0.08 \text{ m}^3/\text{s}$, $U_1 = 1 \text{ m}^3/\text{s}$, $U_2 = 1.5 \text{ m}^3/\text{s}$, $U_3 = 0.5 \text{ m}^3/\text{s}$, $U_4 = 1.87 \text{ m}^3/\text{s}$, $U_5 = 0.29 \text{ m}^3/\text{s}$, $U_6 = 2.69 \text{ m}^3/\text{s}$, $U_7 = 2 \text{ m}^3/\text{s}$, $U_8 = 0.3 \text{ m}^3/\text{s}$, $\bar{Q}_1 = 125.5 \text{ kg/s}$, $\bar{Q}_2 = 47.08 \text{ kg/s}$, $\bar{Q}_3 = 15.69 \text{ kg/s}$, $\bar{Q}_4 = 131.8 \text{ kg/s}$, $\bar{Q}_5 = 54.49 \text{ kg/s}$, $\bar{Q}_6 = 131.8 \text{ kg/s}$, $\bar{Q}_7 = 141.2 \text{ kg/s}$, $\bar{Q}_8 = 84.74 \text{ kg/s}$) ■



Soluzione

Concetti. Bilancio integrale della massa. Teoria delle reti: bilancio ai nodi.

Svolgimento. Se il regime di moto è stazionario, la portata massica è costante e indipendente dalla sezione considerata all'interno di ogni singolo tubo. Il bilancio di massa nell' i -esimo tubo è,

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_i} \rho}_{=0} = \oint_{S_i} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_{i,\alpha}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{S_{i,\beta}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \tilde{Q}_{i,\alpha} + \tilde{Q}_{i,\beta} \rightarrow \tilde{Q}_{i,\alpha} = -\tilde{Q}_{i,\beta}, \quad (1.99)$$

avendo indicato $S_{i,\alpha}$ e $S_{i,\beta}$ le due sezioni in “ingresso” e “uscita” del tubo V_i , con $\hat{\mathbf{n}}$, \tilde{Q}_α e \tilde{Q}_β la normale uscente e i flussi di massa uscenti dal volume V_i . Se si calcola il flusso di massa \bar{Q}_i attraverso le sezioni del tubo con normale identificata dal “verso di percorrenza” del tubo, uno dei due termini cambia segno e si dimostra che la portata è costante sulle sezioni del singolo tubo,

$$\bar{Q}_{i,\alpha} = \bar{Q}_{i,\beta} =: \bar{Q}_i. \quad (1.100)$$

Utilizzando il verso delle frecce indicato in figura per stabilire il segno dei flussi di massa, il bilancio di massa ai nodi porta al sistema lineare,

$$\begin{cases} \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + \bar{Q}_3 - \bar{Q}_4 - \bar{Q}_5 = 0 & (\text{bil. al nodo in alto}) \\ \bar{Q}_5 + \bar{Q}_8 - \bar{Q}_7 = 0 & (\text{bil. al nodo a sinistra}) \\ \bar{Q}_4 - \bar{Q}_6 = 0 & (\text{bil. al nodo a destra}), \end{cases} \quad (1.101)$$

nel quale le incognite sono i flussi \bar{Q}_4 , \bar{Q}_5 , \bar{Q}_6 , una volta calcolati gli altri flussi con i dati forniti dal testo del problema, $\bar{Q}_k = \rho \frac{\pi}{4} D_k^2 U_k$, $k = 1, 2, 3, 7, 8$. Successivamente si calcolano le portate volumetriche Q_k incognite, dividendo le portate massiche \bar{Q}_k per la densità ρ ,

$$Q_k = \frac{\bar{Q}_k}{\rho}, \quad k = 1 : 8. \quad (1.102)$$

Esercizio 1.2 — Bilancio di massa: riempimento bombola. Si sta riempiendo una bombola per immersioni subacquee. Sapendo che la pompa aspira aria a pressione ambiente di $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ e alla temperatura di 293 K in un condotto di sezione 1 cm^2 in cui la velocità media è di 0.5 m/s e che non ci sono perdite nel sistema di pompaggio, determinare la rapidità di variazione della massa d'aria e della sua densità all'interno della bombola, sapendo che il volume della bombola è pari a 0.02 m^3 .

$$\left(\frac{dM}{dt} = 6.01 \times 10^{-5} \text{ kg/s}, \frac{d\rho}{dt} = 3.00 \times 10^{-3} \text{ kg/(m}^3\text{s}) \right). \quad \blacksquare$$

Soluzione

Concetti. Bilancio integrale della massa. Legge dei gas perfetti.

Svolgimento. Sono date la pressione p e la temperatura T all'uscita della pompa. È nota l'area S della sezione e la velocità media U su quella sezione. Si trova la variazione di massa all'interno della bombola grazie al bilancio integrale di massa nel volume della bombola V (volume di controllo, fisso),

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \rho_{in} S_{in} U , \quad (1.103)$$

dove si è indicato con M la massa totale, S_{in} l'area della sezione del tubo utilizzato per riempire la bombola e ρ_{in} , la densità sulla sezione di ingresso, dove sono note la pressione P_{in} e la temperatura T_{in} . Ipotizzando che valga la legge di stato dei gas perfetti, la densità sulla sezione di ingresso vale

$$\rho_{in} = \frac{P_{in}}{RT_{in}} , \quad (1.104)$$

dove $R = 287 \text{ J/(kg K)}$ è la costante dei gas per l'aria. La derivata nel tempo della massa d'aria nella bombola vale quindi

$$\frac{dM}{dt} = 6.0 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{s}} . \quad (1.105)$$

Supponendo che la densità dell'aria si uniforme all'interno della bombola, si può calcolare la sua derivata nel tempo,

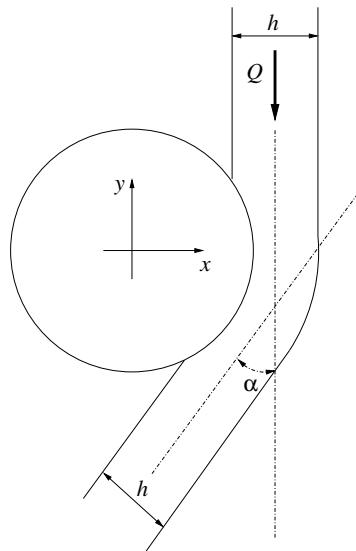
$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{V} \frac{d}{dt} \int_V \rho = 2.0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{s}} . \quad (1.106)$$

Esercizio 1.3 — Effetto Coanda sul cilindro. Un getto d'acqua ($\rho = 999 \text{ kg/m}^3$) stazionario, piano e orizzontale viene indirizzato su un cilindro, lambendone la superficie e venendo deviato di un angolo $\alpha = 15^\circ$. Determinare la forza agente su una porzione del cilindro di lunghezza pari a $H = 2 \text{ m}$, dovuta sia al getto d'acqua, sia all'aria circostante, sapendo che:

- il fluido che circonda il getto e il cilindro è aria in quiete a pressione atmosferica di 101325 Pa ;
- la larghezza del getto è $h = 2 \text{ cm}$;
- la portata d'acqua per unità di lunghezza nel getto è $Q = 199 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

Sufficientemente lontano dal cilindro, il profilo di velocità sulle sezioni del getto è uniforme. Illustrare tutte le ipotesi semplificative adottate nella risoluzione dell'esercizio.

$$(\mathbf{F} = 1026 \hat{\mathbf{x}} - 135 \hat{\mathbf{y}} \text{ N}) \quad \blacksquare$$



Soluzione

Concetti. Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo. Effetto Coanda (esempio della bustina da té sotto il rubinetto).

Svolgimento. Vengono fatte alcune ipotesi: il problema stazionario; attorno al getto e al solido, l'aria è in quiete con pressione uniforme p_a ; il profilo di velocità è uniforme sulle sezioni del getto considerate nelle equazioni di bilancio.

Partendo dalle equazioni di bilancio per il volume di controllo V_f occupato dal fluido, rielaborando il termine degli sforzi di superficie sforzi di superficie, si ricava la risultante \mathbf{R} agente sul solido in funzione del flusso di quantità di moto del fluido attraverso la superficie $S_f = \partial V_f$.

Innanzitutto viene ricavata l'espressione della risultante \mathbf{R} agente sul solido.

- Vengono scritte le equazioni di bilancio per il fluido, considerando il volume V_f

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho + \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho \mathbf{u} + \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_f} \mathbf{t}_n = 0 & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (1.107)$$

- Viene introdotta l'ipotesi di stazionarietà del fenomeno, $\frac{d}{dt} \equiv 0$. La risultante degli sforzi viene scritta come somma degli sforzi di pressione e degli sforzi viscosi,

$$\oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_f} \mathbf{t}_n = \oint_{S_f} \mathbf{s}_n - \oint_{S_f} p \hat{\mathbf{n}}_f . \quad (1.108)$$

- Viene manipolato il termine degli sforzi di superficie. Il contorno S_f del volume fluido viene scomposto come unione della superficie a contatto con il solido S_{fs} , delle superfici "lateralì" S_{fl} (attraverso le quali non c'è flusso di quantità meccaniche, poiché $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$) a contatto con l'aria in quiete e le sezioni "di ingresso" $S_{f,1}$ e "di

uscita” $S_{f,2}$ sulle quali la velocità è uniforme, utilizzate per i bilanci integrali per il volume fluido. Viene indicata con $\hat{\mathbf{n}}_f$ la normale uscente dal volume V_f . Il contorno S_s del solido viene scomposto come unione della superficie a contatto con il fluido S_{sf} e della superficie S_{sl} a contatto con l'aria in quiete. Viene indicata con $\hat{\mathbf{n}}_s$ la normale uscente dal volume V_s . In questo modo, la superficie S_{fs} coincide con la superficie S_{sf} , a meno della normale invertita, $\hat{\mathbf{n}}_f = -\hat{\mathbf{n}}_s$. Su queste superfici, per il terzo principio della dinamica, lo sforzo $\mathbf{t}_{n_{sf}}$ agente sul solido dovuto al fluido è uguale e contrario allo sforzo $\mathbf{t}_{n_{fs}}$ agente sul fluido dovuto al fluido, $\mathbf{t}_{n_{sf}} = -\mathbf{t}_{n_{fs}}$. La superficie formata dall'unione $S_{f\ell} \cup S_{f,1} \cup S_{f,2} \cup S_{sl} =: S_{ext}$ è una superficie chiusa con normale uscente $\hat{\mathbf{n}}$ uguale a $\hat{\mathbf{n}}_f$ sulle prime tre superfici e uguale a $\hat{\mathbf{n}}$ su S_{sl} . Lo sforzo agente su S_{ext} è uguale a $-p_a \hat{\mathbf{n}}$, poiché le superfici libere sono a contatto con aria in quiete con pressione p_a e le traiettorie delle particelle rettilinee (senza curvatura⁷) sulle sezioni $S_{f,1}$ e $S_{f,2}$.

$$\begin{aligned}
 \oint_{S_f} \mathbf{t}_n &= \int_{S_{f\ell}} \mathbf{t}_n + \int_{S_{f,1+2}} \mathbf{t}_n + \int_{S_{fs}} \mathbf{t}_n = && (\mathbf{t}_n|_{S_{f\ell}, S_{f,1+2}} = -p_a \hat{\mathbf{n}}_f) \\
 &= - \int_{S_{f\ell} \cup S_{f,1+2}} p_a \hat{\mathbf{n}}_f + \int_{S_{fs}} \mathbf{t}_n = && (\text{somma e sottrazione di } \int_{S_{fs}} p_a \hat{\mathbf{n}}_f) \\
 &= - \underbrace{\int_{S_{f\ell} \cup S_{f,1+2}} p_a \hat{\mathbf{n}}_f}_{-\oint_{S_f} p_a \hat{\mathbf{n}}_f = 0} - \int_{S_{fs}} p_a \hat{\mathbf{n}}_f + \int_{S_{fs}} p_a \hat{\mathbf{n}}_f + \int_{S_{fs}} \mathbf{t}_n = && (\hat{\mathbf{n}}_f = -\hat{\mathbf{n}}_s, \mathbf{t}_{n_{sf}} = -\mathbf{t}_{n_{fs}} \text{ su } S_{fs}) \\
 &= - \int_{S_{sf}} p_a \hat{\mathbf{n}}_s - \int_{S_{sf}} \mathbf{t}_{n_{sf}} = && (\oint_{S_s = S_{sf} \cup S_{sl}} p_a \hat{\mathbf{n}}_s = 0) \\
 &= + \int_{S_{sl}} p_a \hat{\mathbf{n}}_s - \int_{S_{sl}} \mathbf{t}_{n_{sf}} = && (\mathbf{t}_{n_s} = -p_a \hat{\mathbf{n}}_s \text{ su } S_{sl}) \\
 &= - \int_{S_{sl}} \mathbf{t}_{n_s} - \int_{S_{sf}} \mathbf{t}_{n_{sf}} = - \oint_{S_s} \mathbf{t}_{n_s} = \\
 &= -\mathbf{R}, && (1.109)
 \end{aligned}$$

dove \mathbf{R} è la risultante degli sforzi di superficie agente sul solido. In questo esercizio è il contributo delle forze di volume (ad esempio il peso) agenti sul solido.

- Sostituendo nell'equazione del bilancio della quantità di moto si ottiene:

$$\mathbf{R} = - \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (1.110)$$

- Considerando solo le superfici di V_f attraverso le quali c'è un flusso non nullo di quantità di moto, la risultante delle forze diventa

$$\mathbf{R} = - \int_{S_{f,1}} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{S_{f,2}} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (1.111)$$

dove le quantità all'interno degli integrali sono riferite alle superfici di integrazione. Sulle sezioni $S_{f,1}$, $S_{f,2}$ la velocità è uniforme con modulo U (dalla continuità, la velocità sulle due sezioni è uguale poiché l'area delle due sezioni è uguale) diretta

⁷Vedi commento sull'equazione della quantità di moto e sulle traiettorie delle particelle

lungo la linea media del getto. Le componenti cartesiane della risultante \mathbf{R} sono

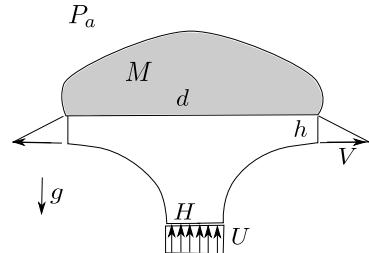
$$\begin{aligned} R_x &= \frac{Q^2 H}{\rho h} \sin \alpha \\ R_y &= -\frac{Q^2 H}{\rho h} (1 - \cos \alpha) , \end{aligned} \tag{1.112}$$

riferite agli assi rappresentati in figura.

Esercizio 1.4 — Giochi d'acqua. Un getto d'acqua ($\rho = 999 \text{ kg/m}^3$) stazionario, piano e verticale viene indirizzato su un oggetto di massa M , tenuto da esso in equilibrio. Il getto ha distribuzione di velocità uniforme U lungo lo spessore H , mentre la distribuzione sul bordo dell'oggetto è triangolare di spessore h con velocità massima V . Si calcoli la velocità V e la massa M dell'oggetto supponendo che:

- il fluido che circonda il getto e il solido è aria in quiete a pressione atmosferica di $P_a = 101325 \text{ Pa}$;
- si possa trascurare la gravità nel bilancio di quantità di moto, ma non nell'equilibrio del corpo.

$$(V = UH/h; M = \rho U^2 H/g)$$



Soluzione

Concetti. Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo.

Svolgimento. Ipotesi: problema stazionario; sulla superficie libera del corpo e del fluido agisce solo la pressione ambiente p_a ; nessun effetto della gravità nei bilanci del fluido.

Si sceglie un asse y diretto verso l'alto.

- Scrittura delle equazioni di bilancio per il fluido.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial\Omega} p \hat{\mathbf{n}} - \oint_{\partial\Omega} s_n - \int_V \rho \mathbf{g} = 0 & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (1.113)$$

A queste, va aggiunta l'equazione di equilibrio del corpo sottoposto alla forza di gravità: $\mathbf{F} + M\mathbf{g} = 0$.

- Dopo aver semplificato il bilancio di massa, da esso si ricava la velocità V . La velocità sui due bordi 'di uscita' è $v(s) = Vs/h$, avendo chiamato s la coordinata che descrive tale superficie per valori compresi tra 0 e h .

$$0 = \int_{S_{in}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_{out1}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_{out2}} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\rho U H + 2 \int_0^h \rho V \frac{s}{h} ds = \rho \left[-UH + 2 \frac{1}{2} Vh \right] \quad (1.114)$$

E quindi $V = U \frac{H}{h}$.

- Le equazioni vengono opportunamente semplificate secondo le ipotesi fatte (vengono eliminati i termini non stazionari e il termine contenente le forze di volume - gravità). Il bordo del dominio fluido $\partial\Omega$ viene indicato con S_f . I contributi di pressione e viscosi vengono raccolti nel "vettore di sforzo" complessivo.

$$\oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_f} s_n - \oint_{S_f} p \hat{\mathbf{n}} = \oint_{S_f} t_n \quad (1.115)$$

- Riscrittura del termine di contorno. Si indica con S_f il contorno fluido: questo è costituito dall'unione del contorno a contatto con il corpo S_c e quella "libera" S_l . Il contorno del corpo S_s è suddiviso nel contorno S_c a contatto con il fluido e nel contorno libero S_{cl} .

Nei passaggi successivi si ricava il legame tra sforzi sul contorno del dominio fluido e la forza agente sul corpo. Si usano le ipotesi che sulle superfici libere agisca solo la pressione ambiente. Si usa il fatto che l'integrale di una quantità costante per la normale su una superficie chiusa è nullo. Vengono definite le normali \mathbf{n} e \mathbf{n}_s come la normale uscente dal volume del fluido e quella uscente dal solido. Si definiscono \mathbf{t}_n e \mathbf{t}_{n_s} come lo sforzo agente sul fluido e quello agente sul solido. Si usa infine il fatto che $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_s$ (normali uscenti dai due domini, uguali e contrarie) e $\mathbf{t}_n = -\mathbf{t}_{n_s}$ sulla superficie in comune (sforzi agenti sulla superficie comune, uguali e contrari; principio di azione e reazione).

$$\begin{aligned}
 \oint_{S_f} \mathbf{t}_n &= \int_{S_l} \mathbf{t}_n + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = && (\mathbf{t}_n|_{S_l} = -p_a \mathbf{n}) \\
 &= - \int_{S_l} p_a \mathbf{n} + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = && \text{(somma e sottrazione di } \int_{S_c} p_a \mathbf{n} \text{)} \\
 &= - \underbrace{\int_{S_l} p_a \mathbf{n}}_{=0} - \int_{S_c} p_a \mathbf{n} + \int_{S_c} p_a \mathbf{n} + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = && (\mathbf{n} = -\mathbf{n}_s) \\
 &= - \int_{S_c} p_a \mathbf{n}_s + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = && (S_s = S_c \cup S_{cl} \text{ e } \int_{S_s} p_a \mathbf{n} = 0) \\
 &= \int_{S_{cl}} p_a \mathbf{n}_s + \int_{S_c} \mathbf{t}_n = && (\mathbf{t}_{n_s}|_{S_{cl}} = -p_a \mathbf{n}_s, \mathbf{t}_{n_s}|_{S_c} = -\mathbf{t}_n) \\
 &= - \int_{S_{cl}} \mathbf{t}_{n_s} - \int_{S_c} \mathbf{t}_{n_s} = \\
 &= - \int_{S_s} \mathbf{t}_{n_s} \\
 &= -\mathbf{R}
 \end{aligned} \tag{1.116}$$

- Sostituendo nell'equazione del bilancio della quantità di moto si ottiene:

$$\mathbf{R} = - \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{1.117}$$

- Data la simmetria del problema si riconosce che non ci può essere una componente orizzontale. I contributi nel bilancio della quantità di moto sulla superficie di contatto tra corpo e fluido e sulla superficie laterale del getto sono nulli poiché è nullo il flusso su tali superfici. I contributi sulle sezioni 'di uscita' sono uguali e contrari. Rimane quindi solo il contributo dalla sezione 'in ingresso'.

$$\mathbf{F} = - \oint_{S_f} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = - \oint_{S_{in}} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho U^2 H \hat{\mathbf{y}} \tag{1.118}$$

- Si scrive l'equilibrio del corpo $\mathbf{F} + M\mathbf{g} = 0$, con $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{y}}$. Da questo segue che $M = F/g = \frac{\rho U^2 H}{g}$.

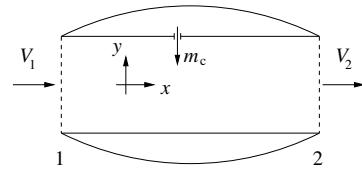
Osservazioni. Nell'elaborazione dei termini della quantità di moto è contenuta la forma della risultante delle forze sull'oggetto vista in classe.

Come giustamente osservato da qualcuno in classe, la massa è per unità di lunghezza, poichè stiamo considerando un caso bidimensionale.

Esercizio 1.5 — Motore a getto. Il motore a getto in figura è alimentato con una portata $\dot{m}_c = 1.1 \text{ kg/s}$ di carburante liquido iniettato in direzione ortogonale all'asse del motore. Calcolare la spinta T del motore ipotizzando che:

- il carburante vaporizzi e diffonda completamente;
- le sezioni di ingresso e uscita abbiano area uguale e pari ad $A = 0.5 \text{ m}^2$;
- sia l'aria in ingresso che i gas di scarico siano a pressione atmosferica $P_{atm} = 26400 \text{ Pa}$;
- la velocità di ingresso e di uscita siano uniformi sulle rispettive sezioni;
- siano note la densità dell'aria in ingresso $\rho_1 = 0.42 \text{ kg/m}^3$, la velocità di ingresso $V_1 = 240 \text{ m/s}$ e la velocità di efflusso $V_2 = 980 \text{ m/s}$.

($T = -38374\hat{x} \text{ N}$) ■



Soluzione

$$T = \rho V_1 A (V_2 - V_1) + V_2 \dot{m}_c . \quad (1.119)$$

Concetti. Bilanci integrali di massa e quantità di moto.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_V \mathbf{f} - \oint_{\partial V} p \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial V} \mathbf{s}_n & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (1.120)$$

Svolgimento. Ipotesi: Regime stazionario. Fluido non viscoso (?). Profilo costante di velocità. No gravità.

- Scrittura dei bilanci integrali con le semplificazioni opportune, derivanti dalle ipotesi.

$$\begin{cases} \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (1.121)$$

- Ulteriore semplificazione usando l'ipotesi di profili di velocità uniformi

$$\begin{cases} -\rho_1 V_1 A_1 - \dot{m}_c + \rho_2 V_2 A_2 = 0 \\ -\rho_1 \vec{V}_1 V_1 A_1 + \rho_2 \vec{V}_2 V_2 A_2 - \dot{m}_c \vec{v}_c = \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n \end{cases} \quad (1.122)$$

- Relazione tra l'integrale della pressione e la risultante delle forze agenti sul gomito, sfruttando il fatto che l'integrale della normale su tutta la superficie è identicamente nullo. Si identificano con S_1 la superficie di ingresso, S_2 la superficie di uscita, S_3 la superficie laterale interna del motore, S_{3_o} la superficie laterale esterna del motore.

$$\begin{aligned} \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n &= \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n + \underbrace{\oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_{3_o}} p_a \hat{\mathbf{n}}}_{=0} = \\ &= - \int_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \int_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_{3_o}} p_a \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_3} \mathbf{t}_n = \quad (p|_{S_1} = p|_{S_2} = p_a) \\ &= \int_{S_{3_o}} p_a \hat{\mathbf{n}} + \int_{S_3} \mathbf{t}_n = \\ &= \oint_{S_{eng}} \mathbf{t}_n = -\vec{F} \end{aligned}$$

(1.123)

- L'equazione della quantità di moto diventa quindi:

$$-\rho_1 \vec{V}_1 V_1 A_1 + \rho_2 \vec{V}_2 V_2 A_2 - \dot{m}_c \vec{v}_c = -\vec{F} \quad (1.124)$$

- Mettendo a sistema l'equazione del bilancio di massa e la proiezione in direzione orizzontale dell'equazione della quantità di moto (si assume che l'iniezione del combustibile, e quindi \vec{v}_c , sia perpendicolare all'asse x e quindi non compare nel bilancio della quantità di moto in direzione x):

$$\begin{cases} \rho_2 V_2 A = \rho_1 V_1 A + \dot{m}_c \\ -\rho_1 V_1^2 A + \rho_2 V_2^2 A = -F_x \end{cases} \quad (1.125)$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} F_x &= \rho_1 V_1^2 A - \rho_2 V_2^2 A = \\ &= \rho_1 V_1^2 A - (\rho_2 V_2 A) V_2 = \\ &= \rho_1 V_1^2 A - V_2 (\rho_1 V_1 A + \dot{m}_c) = \\ &= \rho_1 V_1 A (V_1 - V_2) - V_2 \dot{m}_c \end{aligned} \quad (1.126)$$

E la spinta coincide con la componente lungo x appena calcolata:

$$T = \rho_1 V_1 A (V_2 - V_1) + V_2 \dot{m}_c \quad (1.127)$$

La spinta risulta quindi: $T = -F_x = 38374 N$.

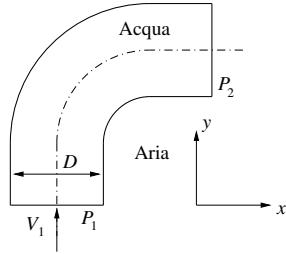
Interpretazione dei risultati e osservazioni.

In prima approssimazione, la spinta in un motore a getto è una funzione della portata d'aria e della differenza di velocità tra ingresso e uscita. Spesso in molte applicazioni il termine \dot{m}_c è trascurabile.

Ragionare in questo caso sulla validità dell'approssimazione $\mathbf{t}_n = -p \hat{\mathbf{n}}$ nella definizione della risultante delle forze sul motore.

Esercizio 1.6 — Gomito. Un condotto di sezione circolare avente diametro $D = 5 \text{ cm}$ forma un gomito con angolo di 90° . Nel condotto scorre acqua ($\rho = 999 \text{ kg/m}^3$) in regime stazionario con velocità $V = 0.5 \text{ m/s}$. All'esterno del condotto vi è atmosfera con pressione uniforme $P_{atm} = 101325 \text{ Pa}$; inoltre le pressioni all'ingresso e all'uscita del gomito sono uniformi sulla sezione ed entrambe pari a $P = 10^6 \text{ Pa}$. Calcolare la forza \mathbf{F} agente sul gomito.

$$(\mathbf{F} = -1765.03\hat{\mathbf{x}} + 1765.03\hat{\mathbf{y}} \text{ N}) \quad \blacksquare$$



Soluzione

Concetti. Bilanci integrali di massa e quantità di moto. ...

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_V \mathbf{F} - \oint_{\partial V} p \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial V} \mathbf{s}_n & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (1.128)$$

Svolgimento. Vengono fatte alcune ipotesi: regime stazionario, fluido incompressibile, fluido non viscoso, profili costanti di velocità, no gravità. Si scrivono i bilanci integrali semplificati, si riconoscono in essi e si calcolano le azioni scambiate con il corpo.

- Scrittura dei bilanci integrali opportunamente semplificati (ipotesi).

$$\begin{cases} \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (1.129)$$

- Ulteriore semplificazione usando l'ipotesi di densità costante e profili di velocità uniformi

$$\begin{cases} -V_1 A_1 + V_2 A_2 = 0 \\ -\rho \vec{V}_1 V_1 A_1 + \rho \vec{V}_2 V_2 A_2 = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n \end{cases} \Rightarrow V_1 = V_2 = V \quad (1.130)$$

- Relazione tra l'integrale degli sforzi sulla superficie e la risultante delle forze agenti sul gomito, sfruttando il fatto che l'integrale della normale su tutta la superficie è identicamente nullo. Si identificano con S_1 la superficie di ingresso, S_2 la superficie di uscita, S_3 la superficie laterale.

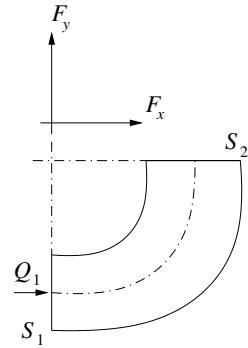
$$\begin{aligned} \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n &= \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n + \underbrace{\oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} p_a \hat{\mathbf{n}}}_{=0} = \\ &= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} + \underbrace{\oint_{S_3} (\mathbf{t}_n + p_a \hat{\mathbf{n}})}_{=-\mathbf{F}} = \\ &= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{F} \end{aligned} \quad (1.131)$$

- Proiezione lungo i due assi del sistema di riferimento della risultante delle forze agenti sul gomito (dopo averla inserita nell'equazione di bilancio della quantità di moto)

$$\begin{cases} F_x = -\rho V^2 A - (p_2 - p_a) A \\ F_y = \rho V^2 A + (p_1 - p_a) A \end{cases} \quad (1.132)$$

Esercizio 1.7 — Gomito. Si consideri la corrente stazionaria nel gomito a 90° di una galleria a vento a circuito chiuso di cui è mostrata in figura la sezione nel piano $x-y$. Siano assegnate le aree della sezione di ingresso, $S_1 = 16 \text{ m}^2$, e di uscita, $S_2 = 56 \text{ m}^2$, la portata in volume $Q_1 = 1600 \text{ m}^3/\text{s}$ e le pressioni nella sezione di ingresso, $P_1 = 1.05 \text{ bar}$, e nella sezione di uscita, $P_2 = 1.106 \text{ bar}$. Assumendo che il flusso d'aria sia incompressibile ($\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$) e che la velocità sulle sezioni di ingresso e uscita possa ritenersi uniforme, si determinino le componenti F_x ed F_y della spinta che esso esercita sul gomito, usando la convenzione indicata in figura.

$$(F_x = 1.876 \cdot 10^6 \text{ N}, F_y = -6.251 \cdot 10^6 \text{ N}) \quad \blacksquare$$



Soluzione

Concetti. Bilanci integrali di massa e quantità di moto.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_V \mathbf{f} - \oint_{\partial V} p \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial V} \mathbf{t}_s & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (1.133)$$

Svolgimento. Vengono fatte alcune ipotesi: regime stazionario, fluido incompressibile, fluido non viscoso, profili costanti di velocità, no gravità. Si scrivono i bilanci integrali semplificati, si riconoscono in essi e si calcolano le azioni scambiate con il corpo.

- Scrittura dei bilanci integrali con le semplificazioni opportune, derivanti dalle ipotesi.

$$\begin{cases} \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \oint_{\partial V} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (1.134)$$

- Ulteriore semplificazione usando l'ipotesi di densità costante e profili di velocità uniformi

$$\begin{cases} -V_1 A_1 + V_2 A_2 = 0 \\ -\rho \vec{V}_1 V_1 A_1 + \rho \vec{V}_2 V_2 A_2 = \oint_{\partial V} \mathbf{t}_n \end{cases} \Rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2 = Q \quad (1.135)$$

- Relazione tra l'integrale della pressione e la risultante delle forze agenti sul gomito, sfruttando il fatto che l'integrale della normale su tutta la superficie è identicamente nullo. Si identificano con S_1 la superficie di ingresso, S_2 la superficie di uscita, S_3 la superficie laterale.

$$\begin{aligned} \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} p \hat{\mathbf{n}} &= \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{t}_n + \oint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} p_a \hat{\mathbf{n}} = \\ &= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} + \underbrace{\oint_{S_3} (\mathbf{t}_n + p_a \hat{\mathbf{n}})}_{=-\mathbf{f}} = \\ &= - \oint_{S_1} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \oint_{S_2} (p - p_a) \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{f} \end{aligned} \quad (1.136)$$

- L'equazione della quantità di moto diventa quindi:

$$-\rho \mathbf{V}_1 V_1 A_1 + \rho \mathbf{V}_2 V_2 A_2 = -(p_1 - p_a) A_1 \hat{\mathbf{n}}_1 - (p_2 - p_a) A_2 \hat{\mathbf{n}}_2 - \mathbf{F} \quad (1.137)$$

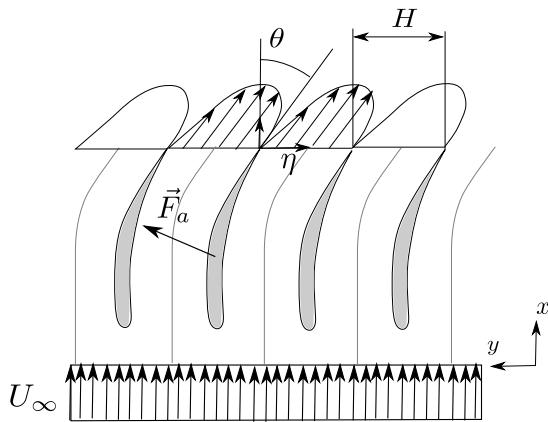
- Proiezione lungo i due assi del sistema di riferimento della risultante delle forze agenti sul gomito. Se si considera $p_a = 0$, i risultati numerici sono i seguenti:

$$\begin{cases} F_x = \rho \frac{Q^2}{A_1} + (p_1 - p_a) A_1 & \Rightarrow \quad F_x = 1.876 \cdot 10^6 N \\ F_y = -\rho \frac{Q^2}{A_2} - (p_2 - p_a) A_2 & \Rightarrow \quad F_y = -6.250 \cdot 10^6 N \end{cases} \quad (1.138)$$

Esercizio 1.8 — Profili in schiera. Un numero elevato di profili è disposto come in figura. Il profilo di ingresso è uniforme $\mathbf{u} = U_\infty \hat{\mathbf{x}}$, mentre il profilo di uscita ha andamento $\mathbf{u} = \beta U_\infty (\cos \theta \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta \hat{\mathbf{y}}) \sin \frac{\pi \eta}{H}$ in ogni canale (sia η la coordinata che descrive la sezione di uscita). Sulla sezione di ingresso la pressione media vale P_1 , sulla sezione di uscita P_2 .

Calcolare il fattore β del profilo di velocità in uscita e la risultante delle forze (per unità di apertura) agente sul singolo profilo.

(Risultati: $\beta = \frac{\pi}{2 \cos \theta}$, $\mathbf{F} = [(P_1 - P_2)H + \rho U^2 H ((1 - \pi^2/8) \hat{\mathbf{x}} + \pi^2/8 \tan \theta \hat{\mathbf{y}})]$) ■



Soluzione

Concetti. Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo. Simmetria.

- Ricavare il coefficiente β dal bilancio di massa
- Usare le ipotesi di simmetria nel bilancio di quantità di moto per annullare alcuni termini

Svolgimento.

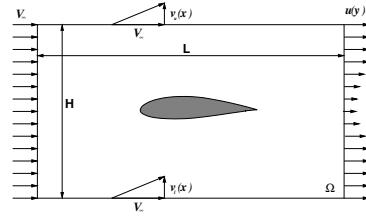
Si ricava il coefficiente β dal bilancio di massa in forma integrale. Si utilizza la simmetria del problema nel bilancio di quantità moto per ricavare le azioni sui profili.

Esercizio 1.9 — Difetto di scia: stima resistenza. Calcolare la resistenza di un profilo immerso in una corrente stazionaria con velocità asintotica \mathbf{V}_∞ , sapendo la distribuzione della componente di velocità $u(y)$ parallela a \mathbf{V}_∞ a valle del profilo e assumendo che:

- la pressione statica sul contorno del volume di controllo sia costante e pari a quella della corrente indisturbata a monte del profilo;
- sul lato superiore e inferiore del volume di controllo sia possibile trascurare la componente lungo l'asse x della perturbazione della velocità dovuta alla presenza del profilo:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{V}_\infty + \mathbf{u}, v) \simeq (\mathbf{V}_\infty, v).$$

$$(R = \int_0^H \rho u(y)[V_\infty - u(y)]dy.)$$



Soluzione

Concetti. Bilanci integrali di massa e quantità di moto. Equazioni di equilibrio (equazioni fondamentali della dinamica classica). Principio di azione e reazione. Integrale della normale su una superficie chiusa è identicamente nullo. Esperienza in laboratorio sul *difetto di scia*.

Svolgimento. Vengono scritti i bilanci integrali di massa e quantità di moto, opportunamente semplificati (ipotesi di stazionarietà $\frac{d}{dt} \equiv 0$, densità costante $\rho = \bar{\rho}$, ipotesi sulle condizioni sul bordo esterno del dominio); all'interno dei bilanci si possono riconoscere i termini legati alle azioni scambiate dal fluido con il profilo (l'incognita del problema); si sfrutta infine la geometria rettangolare del contorno esterno e le ipotesi su di esso per ottenere una forma ulteriormente semplificata dei bilanci e trovare la soluzione del problema.

- Scrittura e semplificazione dei bilanci di massa e quantità di moto.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(massa)} \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} + \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_{\partial\Omega} p \hat{\mathbf{n}} - \oint_{\partial\Omega} s \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{(quantità di moto)} \end{cases} \quad (1.139)$$

Nel problema, il contorno del dominio fluido $\partial\Omega$ è costituito dal bordo rettangolare γ_∞ lontano dal profilo e dal bordo γ_p coincidente con il profilo stesso. La forza \mathbf{F} agente sul profilo è l'integrale degli sforzi generati dal fluido (uguali e contrari agli sforzi agenti sul fluido) sul contorno del profilo. Inoltre si può fare l'ipotesi di sforzi viscosi nulli e pressione costante sul bordo esterno: l'integrale sul dominio esterno si riduce all'integrale della normale su una superficie chiusa ed è quindi nullo. Si può dunque scrivere:

$$\oint_{\partial\Omega} (-p \hat{\mathbf{n}} + s \hat{\mathbf{n}}) = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t}_n = \underbrace{\oint_{\gamma_p} \mathbf{t}_n}_{=-\mathbf{F}} + \underbrace{\oint_{\gamma_\infty} \mathbf{t}_n}_{=0} = -\mathbf{F} \quad (1.140)$$

Osservazione. A differenza di quanto fatto in classe, non è stata fatta l'ipotesi di fluido non viscoso; il contributo all'infinito si annulla con l'ipotesi di pressione costante all'infinito e sforzi viscosi trascurabili. Per ritrovarsi con gli appunti, sostituire \mathbf{t}_n con $-p \hat{\mathbf{n}}$.

Dopo aver fatto l'ipotesi di stazionarietà e aver inserito la definizione di \mathbf{F} appena data, le equazioni di bilancio possono essere scritte come:

$$\begin{cases} \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \mathbf{F} = - \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{cases} \quad (1.141)$$

Il bilancio di quantità di moto può essere scritto esplicitando e separando le componenti vettoriali.

$$\begin{aligned} F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} &= - \oint_{\partial\Omega} \rho (ux + vy) \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ &= -\hat{\mathbf{x}} \oint_{\partial\Omega} \rho u \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{y}} \oint_{\partial\Omega} \rho v \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (1.142)$$

- Scrittura delle equazioni di bilancio in componenti (sfruttando la geometria rettangolare del bordo esterno: γ_1 indica il bordo di sinistra, γ_2 il bordo inferiore, γ_3 quello di destra, γ_4 quello superiore).

Attenzione: la normale è quella uscente dal dominio fluido. Sul contorno del profilo, la normale è entrante nel profilo. In più: non fare confusione tra azioni del profilo agenti sul fluido e azioni del fluido agenti sul profilo!

$$\begin{cases} 0 = \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = - \int_{\gamma_1} \rho u - \int_{\gamma_2} \rho v + \int_{\gamma_3} \rho u + \int_{\gamma_4} \rho v \\ F_x = + \int_{\gamma_1} \rho u^2 + \int_{\gamma_2} \rho uv - \int_{\gamma_3} \rho u^2 - \int_{\gamma_4} \rho uv \\ F_y = + \int_{\gamma_1} \rho uv + \int_{\gamma_2} \rho v^2 - \int_{\gamma_3} \rho uv - \int_{\gamma_4} \rho v^2 \end{cases} \quad (1.143)$$

- Ipotesi sulla velocità sui lati orizzontali ($u|_{\gamma_2} = u|_{\gamma_4} = V_\infty$ costante), per poter ulteriormente semplificare il risultato.

$$\begin{cases} \int_{\gamma_2} \rho v - \int_{\gamma_4} \rho v = - \int_{\gamma_1} \rho u + \int_{\gamma_3} \rho u \\ F_x = + \int_{\gamma_1} \rho u^2 - \int_{\gamma_3} \rho u^2 + V_\infty \left[\int_{\gamma_2} \rho v - \int_{\gamma_4} \rho v \right] \end{cases} \quad (1.144)$$

E inserendo la prima nella seconda:

$$\begin{aligned} F_x &= \int_{\gamma_1} \rho u^2 - \int_{\gamma_3} \rho u^2 + V_\infty \left[- \int_{\gamma_1} \rho u + \int_{\gamma_3} \rho u \right] = \\ &= \int_{\gamma_1} \rho u (u - V_\infty) + \int_{\gamma_3} \rho u (V_\infty - u) = \quad (u|_{\gamma_1} = V_\infty \Rightarrow \text{il primo integrale è nullo}) \\ &= \int_{\gamma_3} \rho u (V_\infty - u) = \\ &= \int_0^H \rho u(y) (V_\infty - u(y)) dy \end{aligned} \quad (1.145)$$

Osservazioni. Tramite la misura del campo di velocità in galleria è possibile stimare la resistenza del corpo. Le condizioni di “aria libera” e in galleria sono diverse. In generale, in galleria il fluido è confinato dalle pareti di galleria, maggiormente “vincolato”. Inoltre sulle pareti della galleria esiste una condizione di adesione, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$: per la conservazione della massa, il rallentamento del fluido in corrispondenza delle pareti della galleria viene compensato da un incremento della velocità nella regione “più lontana” dalla parete, rispetto a un corpo in aria libera. Per tenere conto di effetti di **bloccaggio** dovuti al confinamento in galleria, è necessario compiere delle correzioni delle misure sperimentali.

Agli effetti di bloccaggio, vanno aggiunti gli effetti di **galleggiamento** dovuti al gradiente di pressione lungo la galleria, che danno un effetto di resistenza aggiuntiva. Inoltre è importante che la dimensione del corpo rispetto alla dimensione della galleria non sia né “troppo grosso” (per problemi di ‘bloccaggio’), né, di solito, “troppo piccolo” (per motivi di similitudine; ma sarà argomento di puntate successive del corso...). È importante avere in mente la necessità di prestare attenzione a questi aspetti, quando vengono svolte attività sperimentali. Ma questo sarà argomento di altri capitoli o di altri corsi...

Attività sperimentale: difetto di scia e volume di controllo.

L'esercizio svolto in precedenza risulta propedeutico per l'analisi dei dati ottenuti tramite alcune attività sperimentali, per ottenere delle risultanti di forze e momenti da misure del campo di velocità (e pressione, a volte) tramite i bilanci integrali. Le attività svolte nel mondo reale sono affette da imprecisioni e incertezze. La quantificazione (o almeno la stima) dell'incertezza del risultato di un'attività sperimentale è parte integrante del risultato stesso. I valori x_i , $i = 1 : N$ di grandezze misurate possono essere combinati per calcolare delle grandezze derivate $f(x_i)$. I *datasheet* che accompagnano uno strumento raccolgono anche le informazioni sulla sua incertezza di misura, spesso in forma di intervallo di confidenza o di scarto quadratico medio. L'incertezza sulle misure sperimentali x_i si propaga sul valore della funzione $f(x_i)$. Nell'ipotesi che le incertezze di misura sulle variabili d_i siano tra di loro indipendenti e non correlate, è possibile utilizzare la **formula RSS (root-sum-squares)** per la propagazione dell'incertezza. Se la misura x_i ha incertezza σ_{x_i} , una stima dell'incertezza su f vale

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 . \quad (1.146)$$

L'incertezza σ_f^2 sulla quantità f , obiettivo dell'attività sperimentale, è un indicatore della bontà del metodo sperimentale utilizzato ed del sistema di misura disponibile per tale attività. In generale, l'incertezza sulla grandezza desiderata deve essere “molto minore” della grandezza stessa: in caso contrario, l'apparato sperimentale risulterebbe indeguato all'esperimento. Essendo parte integrante del risultato, è buona regola indicare l'incertezza sui risultati delle attività sperimentali, ad esempio fornendone il valore numerico, il valore relativo alla misura o gli intervalli di confidenza sui grafici.

Risultante delle forze: bilancio di quantità di moto di un volume di controllo .

Esistono metodi sperimentali, come ad esempio la **PIV** (Particle Image Velocimetry o, in italiano, velocimetria a immagini di particelle), che permettono di ottenere il campo di velocità in un determinato istante all'interno di un dominio di misura, un piano bidimensionale o un volume tridimensionale. Il bilancio di quantità di moto del volume di controllo contenente un corpo solido permette poi di calcolare la risultante delle forze scambiate tra corpo e fluido.

Per semplicità, viene considerato un campo di moto bidimensionale, $\mathbf{u}(x, y) = u(x, y)\hat{x} + v(x, y)\hat{y}$. Ad esempio, il campo di moto attorno alla mezzeria di un'ala allungata senza freccia investita da una corrente con un angolo di incidenza ridotto è in buona approssimazione bidimensionale. In questo caso, misure PIV (PIV-2D-2C) forniscono le due componenti (2C) del campo di velocità nel piano (2D) di misura. Tramite il bilancio della quantità di moto del dominio bidimensionale, è possibile ottenere una stima della risultante delle forze (per unità di apertura) che esercita il fluido sul profilo di ala tagliato dal piano di misura. Considerando gli effetti viscosi trascurabili, al di fuori di regioni di dimensione ridotta nell'ambito di applicazioni aeronautiche (alto numero di Reynolds, strato limite

e scie sottili), il bilancio integrale della quantità di moto del fluido nel volume di misura fornisce, in un caso stazionario, la risultante delle forze \mathbf{R} agenti sul corpo,

$$\mathbf{R} = - \oint_S \rho u \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \oint_S p \hat{\mathbf{n}} , \quad (1.147)$$

avendo trascurato il contributo delle forze di volume. Nell'ipotesi, più che sensata per molte applicazioni aeronautiche, che sia valido il teorema di Bernoulli sulla frontiera S del volume di controllo, la pressione viene espressa in funzione della velocità locale e dello stato della corrente asintotica,

$$p = p_\infty + \rho \frac{|\mathbf{U}_\infty|^2}{2} - \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} . \quad (1.148)$$

Inserendo questa espressione della pressione nell'espressione della risultante delle forze ed eliminando gli integrali (nulli) su una superficie chiusa delle quantità costanti moltiplicate per la normale alla superficie, come ad esempio $\oint_S p_\infty \hat{\mathbf{n}}$, si può esprimere la risultante \mathbf{R} della forza aerodinamica agente sul corpo in funzione della sola velocità del fluido sulla frontiera S ,

$$\mathbf{R} = - \oint_S \rho u \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \hat{\mathbf{n}} . \quad (1.149)$$

Sotto queste ipotesi, la forza aerodinamica agente sul corpo, in questo esempio l'obiettivo della misura, è stata scritta unicamente come funzione del campo di velocità sulla superficie S , fornito come "risultato diretto" dell'attività sperimentale. Per semplicità, la densità del fluido viene considerata costante e nota senza incertezza: nel caso che anche il campo di densità fosse affetto da incertezza, la formula RSS permette di aggiungere abbastanza facilmente il suo effetto a quello dovuto all'incertezza sulla misura del campo di velocità.

Risultante delle forze: discretizzazione.

Per la sua natura, la PIV fornisce dei risultati discreti (non continui): di solito, il campo di velocità viene misurato sui nodi di una griglia cartesiana. Per il calcolo della risultante \mathbf{R} sono necessari solamente gli N_n nodi esterni \mathbf{x}_i , $i = 1 : N_n$, posti sul contorno della griglia. Il campo di velocità viene approssimato (linearmente, per semplicità) utilizzando un approccio simile a quello impiegato nella modellazione numerica a elementi finiti. Viene introdotto un insieme completo di funzioni di base $\phi_i(\mathbf{x})$, $i = 1 : N_n$, lineari a tratti sul contorno S , grazie alle quali è possibile scrivere l'approssimazione \mathbf{u}^h del campo di velocità

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{U}_i . \quad (1.150)$$

Utilizzando funzioni di base lagrangiane, per le quali il valore della funzione i -esima $\phi_i(\mathbf{x})$ è uguale a uno sul nodo i -esimo \mathbf{x}_i e zero sugli altri nodi,

$$\phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} \quad , \quad \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) = 1 , \forall i = 1 : N_n , \quad (1.151)$$

i coefficienti \mathbf{U}_i della (1.150) concidono con i valori nodali, $\mathbf{U}_i := \mathbf{u}(\mathbf{x}_i)$ ricavati nei punti \mathbf{x}_i tramite la misura sperimentale. Introducendo il campo di velocità approssimato $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$

nell'espressione della risultante delle forze, si ottiene una formula nella quale compaiono gli integrali di superficie del prodotto delle funzioni di base e del versore normale,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} \approx \mathbf{R}^h &= - \oint_S \rho \mathbf{u}^h \mathbf{u}^h \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \rho \frac{\mathbf{u}^h \cdot \mathbf{u}^h}{2} \hat{\mathbf{n}} = \\
 &= -\rho \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{U}_i \mathbf{U}_j \cdot \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \rho \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{U}_j \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \\
 &= -\rho \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{U}_i \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{I}_{ij} + \frac{1}{2} \rho \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{U}_j \mathbf{I}_{ij} ,
 \end{aligned} \tag{1.152}$$

dove sono stati introdotti i vettori $\mathbf{I}_{ij} = \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$, facilmente calcolabili in maniera analitica, come spiegato nella sezione §1.5.

Sensibilità della risultante al campo di velocità.

Per ricavare tramite la formula RSS l'incertezza sulla misura della risultante delle forze \mathbf{R} dall'incertezza sulle misure del campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, è necessario calcolare la variazione di \mathbf{R} rispetto al campo $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Perturbando il campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ con la variazione $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$, e trascurando i termini di ordine superiore al primo, dopo aver sottratto l'equazione "non perturbata", si ottiene la perturbazione della risultante delle forze $\delta \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} + \delta \mathbf{R} &= - \oint_S \rho (\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) (\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \frac{1}{2} \rho (\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) \hat{\mathbf{n}} \\
 \rightarrow \delta \mathbf{R} &= - \oint_S \rho [\mathbf{u} \hat{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \delta \mathbf{u}] + \oint_S \rho \hat{\mathbf{n}} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \\
 &= \oint_S \rho [-\mathbf{u} \otimes \hat{\mathbf{n}} - (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbb{I} + \hat{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{u}] \cdot \delta \mathbf{u} = \\
 &= \oint_S \nabla_u \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{u} = \\
 &= \oint_S \begin{bmatrix} \nabla_u R_x & \nabla_v R_x \\ \nabla_u R_y & \nabla_v R_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix} = \oint_S \begin{bmatrix} \nabla_u R_x \cdot \delta \mathbf{u} \\ \nabla_v R_y \cdot \delta \mathbf{u} \end{bmatrix} ,
 \end{aligned} \tag{1.153}$$

avendo introdotto il campo tensoriale della sensitività $\nabla_u \mathbf{R}(\mathbf{x})$ della risultante delle forze rispetto al campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ed evidenziato l'influenza delle due componenti del campo di velocità sulle due componenti di forza. L'equazione precedente può essere scritta con notazione indiciale

$$\delta R_i = \oint_S \nabla_{u_j} R_i \delta u_j = -\rho \oint_S [u_i n_j + u_k n_k \delta_{ij} - n_i u_j] \delta u_j , \tag{1.154}$$

o esplicitamente in coordinate cartesiane, per ricavare l'espressione della sensitività della componenti della forza dalle singole componenti del campo di velocità,

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \delta R_x = \rho \oint_S [-u n_x - u n_x - v n_y + u n_x] \delta u + \rho \oint_S [-u n_y + v n_x] \delta v \\ \delta R_y = \rho \oint_S [-v n_x + u n_y] \delta u + \rho \oint_S [-v n_y - u n_x - v n_y + v n_y] \delta v \end{cases} \\
 \rightarrow \begin{cases} \delta R_x = \rho \oint_S [-u n_x - v n_y] \delta u + \rho \oint_S [-u n_y + v n_x] \delta v = \oint_S \nabla_u R_x \delta u + \oint_S \nabla_v R_x \delta v \\ \delta R_y = \rho \oint_S [-v n_x + u n_y] \delta u + \rho \oint_S [-v n_y - u n_x] \delta v = \oint_S \nabla_u R_y \delta u + \oint_S \nabla_v R_y \delta v . \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1.155}$$

Sensitività della risultante alle misure di velocità.

Partendo dall'espansione (1.150) del campo di velocità, la variazione del campo $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ diventa

$$\delta \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) \delta \mathbf{U}_i , \quad (1.156)$$

avendo indicato con $\delta \mathbf{U}_i$ la variazione dei valori nodali del campo di velocità. Le funzioni di base sono note, e quindi la loro variazione è nulla.⁸ Introducendo l'espressione (1.156) di $\delta \mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ all'interno della formula (1.153) che lega la variazione $\delta \mathbf{R}$ alla variazione $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$,

$$\delta \mathbf{R} = \oint_S \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N_n} \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{U}_i = \sum_{i=1}^{N_n} \nabla_{\mathbf{U}_i} \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{U}_i , \quad (1.157)$$

si ricava l'espressione della sensitività $\nabla_{\mathbf{U}_i} \mathbf{R}$ della risultante delle forze rispetto alla misura di velocità \mathbf{U}_i , in funzione della sensitività $\nabla_{\mathbf{U}_i} \mathbf{R}(\mathbf{x})$ della risultante rispetto al campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ e alle funzioni di base $\phi_i(\mathbf{x})$,

$$\nabla_{\mathbf{U}_i} \mathbf{R} = \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R} . \quad (1.158)$$

La sensitività $\nabla_{\mathbf{U}_i} R_k$ della componente R_k della risultante delle forze rispetto alla misura \mathbf{U}_i è quindi

$$\nabla_{\mathbf{U}_i} R_k = \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{u}} R_k . \quad (1.159)$$

Sensitività della risultante alle misure di velocità: discretizzazione.

Inserendo l'approssimazione \mathbf{u}^h nella formula della sensitività $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R}$, è possibile calcolare la sensitività della risultante alle misure di velocità \mathbf{U}_i ,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{U}_i} \mathbf{R} &= \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R} = \\ &= \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \rho [-\mathbf{u} \otimes \hat{\mathbf{n}} - (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbb{I} + \hat{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{u}] = \\ &= \rho \sum_{j=1}^{N_n} \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) [-\mathbf{U}_j \otimes \hat{\mathbf{n}} - (\mathbf{U}_j \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbb{I} + \hat{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{U}_j] = \\ &= \rho \sum_{j=1}^{N_n} [-\mathbf{U}_j \otimes \mathbf{I}_{ij} - (\mathbf{U}_j \cdot \mathbf{I}_{ij}) \mathbb{I} + \mathbf{I}_{ij} \otimes \mathbf{U}_j] , \end{aligned} \quad (1.160)$$

avendo riconosciuto i vettori \mathbf{I}_{ij} definiti in precedenza. La sensitività della componente R_k alla misura \mathbf{U}_i vale

$$\nabla_{\mathbf{U}_i} R_k = \rho \sum_{j=1}^{N_n} [-U_{j,k} \mathbf{I}_{ij} - (\mathbf{U}_j \cdot \mathbf{I}_{ij}) \hat{\mathbf{e}}_k + I_{ij,k} \mathbf{U}_j] , \quad (1.161)$$

dove $\hat{\mathbf{e}}_k$ è il versore in direzione k e $U_{j,k}$, $I_{ij,k}$ le componenti in quella direzione della misura \mathbf{U}_i e del vettore \mathbf{I}_{ij} .

⁸L'operazione di variazione ha proprietà simili a quelle di derivazione. Ad esempio la variazione del prodotto di due funzioni vale $\delta(ab) = \delta a b + a \delta b$.

Osservazione 1.

Si può dimostrare che le sensitività $\nabla_{U_i} \mathbf{R}$ sono le componenti del gradiente della formula (1.152) che esprime \mathbf{R} come una funzione quadratica delle variabili U_i .

Osservazione 2.

Utilizzando la formula generale (1.160) o utilizzando la forma discretizzata delle espressioni (1.155), si può dimostrare che

$$\begin{aligned}\nabla_{U_{i,x}} R_x &= \nabla_{U_{i,y}} R_y = -\rho \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{I}_{ij} \\ -\nabla_{U_{i,y}} R_x &= \nabla_{U_{i,x}} R_y = -\rho \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{U}_j \times \mathbf{I}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}\tag{1.162}$$

Incertezza sulla risultante dall'incertezza sulla misura di velocità.

Utilizzando la formula del campo \mathbf{u}^h , viene calcolata la varianza $\sigma_{R_k}^2$ della componente R_k ,

$$\begin{aligned}\sigma_{R_k}^2 &= E[\delta R_k \delta R_k] = \rho^2 E \left[\oint_{S(\mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) \oint_{S(\mathbf{y})} \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{y}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{y}) \right] = \\ &= \oint_{S(\mathbf{x})} \oint_{S(\mathbf{y})} \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{x}) \cdot E[\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \delta \mathbf{u}(\mathbf{y})] \cdot \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{y}) \approx \\ &= \oint_{S(\mathbf{x})} \oint_{S(\mathbf{y})} \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{x}) \cdot \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{y}) E[\delta \mathbf{U}_i \otimes \delta \mathbf{U}_j] \cdot \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{y}),\end{aligned}\tag{1.163}$$

dove sono state indicate esplicitamente le variabili indipendenti \mathbf{x}, \mathbf{y} sulle quali devono essere svolte le integrazioni.

Si fa l'ipotesi che l'incertezza della misura della componente in un punto sia indipendente dalla misura delle altre componenti della velocità nello stesso punto e dalla velocità negli altri punti del dominio. Si ipotizza inoltre che l'incertezza sulla singola misura in tutto il dominio sia uguale a σ_U^2 su tutte le componenti della velocità. L'espressione dei valori attesi $E[\delta \mathbf{U}_i \otimes \delta \mathbf{U}_j]$ diventa quindi

$$E[\delta \mathbf{U}_i \otimes \delta \mathbf{U}_j] = \sigma_U^2 \delta_{ij} \mathbb{I}\tag{1.164}$$

e di conseguenza l'incertezza della componente di forza R_k ,

$$\begin{aligned}\sigma_{R_k}^2 &= \oint_{S(\mathbf{x})} \oint_{S(\mathbf{y})} \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{x}) \cdot \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{y}) \sigma_U^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{N_n} \left\{ \oint_{S(\mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) \right\} \cdot \left\{ \oint_{S(\mathbf{y})} \nabla_{\mathbf{u}} R_k(\mathbf{y}) \phi_i(\mathbf{y}) \right\} \sigma_U^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{N_n} \nabla_{\mathbf{U}_i} R_k \cdot \nabla_{\mathbf{U}_i} R_k \sigma_U^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{N_n} |\nabla_{\mathbf{U}_i} R_k|^2 \sigma_U^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{N_n} ((\nabla_{U_{i,x}} R_k)^2 + (\nabla_{U_{i,y}} R_k)^2) \sigma_U^2,\end{aligned}\tag{1.165}$$

avendo riconosciuto la sensitività $\nabla_{U_i} R_k$ della componente di forza R_k rispetto alla misura della velocità $\mathbf{U}_i = \mathbf{u}(\mathbf{x}_i)$.

Cenni sugli elementi finiti.

In questo paragrafo si fornisce qualche dettaglio sulla discretizzazione “a elementi finiti” usata nel calcolo della risultante aerodinamica e della sua incertezza. Un dominio S , come ad esempio la superficie di controllo del volume di controllo considerato, viene suddiviso negli elementi S_k , l'unione dei quali costituisce il dominio S

$$S = \bigcup_{k=1}^{N_e} S_k \quad (1.166)$$

e che non hanno punti in comune tra di loro se non i bordi. Vengono poi definite delle funzioni di base $\phi_i(\mathbf{x})$, grazie alle quali è possibile approssimare (sulle quali viene proiettata) una funzione generica

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) f_i . \quad (1.167)$$

La dipendenza dalla variabile spaziale \mathbf{x} è contenuta nelle funzioni di base $\phi(\mathbf{x})$, le quali vengono moltiplicate per i coefficienti f_i .

In generale, le funzioni $\phi_i(\mathbf{x})$ sono regolari a tratti, essendo regolari all'interno dei singoli elementi S_k e continue sui loro bordi. Nel metodo degli *elementi finiti*, le funzioni di base sono *a supporto compatto*, cioè sono diverse da zero solo su un dominio chiuso e limitato: il carattere “locale” delle singole funzioni di base viene sfruttato nel metodo degli elementi finiti per operare con matrici sparse, all'interno delle quali solo pochissimi elementi sono diversi da zero in ogni riga o colonna. Il supporto della funzione $\phi_i(\mathbf{x})$ è la parte di dominio al di fuori della quale la funzione è nulla. Nel metodo degli elementi finiti, il supporto di $\phi_i(\mathbf{x})$ è costituito dagli elementi S_k ai quali appartiene il nodo \mathbf{x}_i . Indichiamo il supporto di $\phi_i(\mathbf{x})$ con B_i .

Le funzioni di base vengono definite lagrangiane, se la funzione i -esima $\phi_i(\mathbf{x})$ è uguale a uno sul nodo i -esimo \mathbf{x}_i e zero sugli altri nodi,

$$\phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} \quad , \quad \sum_{i=1}^{N_n} \phi_i(\mathbf{x}) = 1 , \forall i = 1 : N_n . \quad (1.168)$$

In questo caso, i coefficienti f_i concidono con i valori nodali della funzione $f(\mathbf{x})$, $f_i := f(\mathbf{x}_i)$. Viene definita una *connettività* della griglia degli elementi finiti, che consiste in un elenco ordinato dell'indice dei nodi di ogni elemento: in questa maniera viene definita una numerazione locale dei nodi di ogni singolo elemento, che risulta utile nel calcolo degli integrali. Viene indicato con $I_k = \{i_{k1}, i_{k2}, \dots, i_{kn}\}$, l'elenco degli n nodi dell'elemento S_k .

In figura 1.1 è rappresentata una parte di una suddivisione in elementi finiti S_k di un dominio monodimensionale, sul quale sono definite delle funzioni di base lagrangiane, lineari a tratti, a supporto compatto: ad esempio, la funzione di base $\phi_{i2}(\mathbf{x})$ è diversa da zero solo sugli elementi S_{e1} e S_{e2} . Ogni elemento ha due nodi. Se viene definita la connettività nodi-elemento,

$$\begin{aligned} I_{e1} &= \{i_1, i_2\} , \\ I_{e2} &= \{i_2, i_3\} , \\ I_{e3} &= \{i_4, i_3\} , \end{aligned} \quad (1.169)$$

il nodo i_1 è il primo nodo (quello che ha l'indice = 1 nella numerazione locale) dell'elemento S_{e1} , il nodo i_2 è il secondo nodo di S_{e1} e il primo di S_{e2} , il nodo i_3 è il secondo nodo sia di S_{e2} sia di S_{e3} , il nodo i_4 è il primo nodo di S_{e3} .

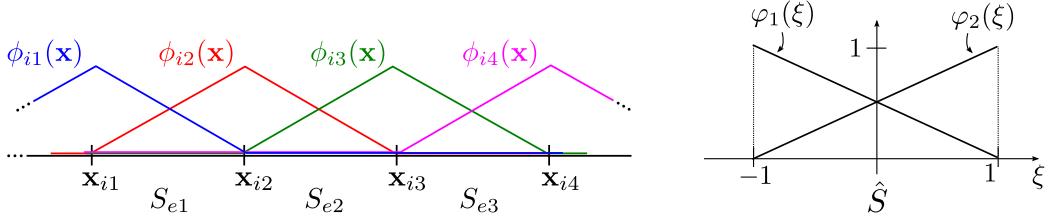


Figura 1.1: Esempio di funzioni di base lagrangiane lineari a tratti definite su un dominio monodimensionale.

Si utilizzano ora le proprietà della base di funzioni lineari a tratti $\phi_i(\mathbf{x})$ per calcolare i vettori \mathbf{I}_{ij} che compaiono nel calcolo della risultante delle forze e nella sua varianza,

$$\mathbf{I}_{ij} := \oint_S \phi_i(\mathbf{x}) \phi_j(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) . \quad (1.170)$$

Gli unici termini \mathbf{I}_{ij} che non sono nulli sono quelli in cui compaiono due funzioni, che hanno supporti a intersezione non nulla, $B_i \cap B_j \neq 0$. In questi termini, il dominio di integrazione può essere limitato alla sola intersezione dei supporti delle due funzioni, essendo il prodotto di queste nullo al di fuori di esso. Ad esempio, facendo riferimento alla figura 1.1, il termine $\mathbf{I}_{i2,i1}$ può essere riscritto come

$$\mathbf{I}_{i2,i1} = \oint_S \phi_{i2}(\mathbf{x}) \phi_{i1}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} = \int_{B_{i2} \cap B_{i1}} \phi_{i2}(\mathbf{x}) \phi_{i1}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} = \int_{S_{e1}} \phi_{i2}(\mathbf{x}) \phi_{i1}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} , \quad (1.171)$$

il termine $\mathbf{I}_{i2,i2}$ può essere riscritto come

$$\mathbf{I}_{i2,i2} = \oint_S \phi_{i2}(\mathbf{x}) \phi_{i2}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} = \int_{B_{i2}} \phi_{i2}(\mathbf{x}) \phi_{i2}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} = \int_{S_{e1} \cup S_{e2}} \phi_{i2}(\mathbf{x}) \phi_{i2}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{n}} , \quad (1.172)$$

mentre il termine $\mathbf{I}_{i2,i4}$ è nullo. Gli integrali sugli elementi S_i nello spazio “fisico” possono essere calcolati sull’elemento di riferimento \hat{S} , definito in $\xi \in [-1, 1]$. La trasformazione di coordinate che porta l’elemento di riferimento \hat{S} nell’elemento fisico S_k delimitato dai punti di coordinata x_{k1} e x_{k2} è

$$x = \frac{x_{k2} + x_{k1}}{2} + \frac{x_{k2} - x_{k1}}{2} \xi \quad (1.173)$$

e il suo “determinante” è

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{x_{k2} - x_{k1}}{2} = \frac{\ell_k}{2} . \quad (1.174)$$

Se si considera costante il versore normale $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}}$ sull’elemento finito S_{e1} e si utilizza la connettività nodi-griglia dell’esempio definita in (1.169), l’integrale $\mathbf{I}_{i2,i1}$ può essere trasformato nell’integrale sull’elemento di riferimento

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{i2,i1} &= \int_{S_{e1}} \phi_{i2}(x) \phi_{i1}(x) \hat{\mathbf{n}} dx = \int_{\hat{S}} \varphi_2(\xi) \varphi_1(\xi) \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}} = \\ &= \int_{\xi=-1}^1 \varphi_2(\xi) \varphi_1(\xi) \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}} , \end{aligned} \quad (1.175)$$

avendo riconosciuto il legame tra l’elemento S_{e1} nel dominio fisico e quello di riferimento \hat{S} , $\phi_i(x) = \phi_i(x(\xi)) = \varphi_{i^\ell}(\xi)$, dove è stato indicato con i^ℓ l’indice locale del nodo globale con indice i : dalla connettività dell’elemento S_{e1} risulta $i_1^\ell = 1$ $i_2^\ell = 2$. Il “determinante”

della trasformazione è noto e costante, $\partial x / \partial \xi|_{S_{e1}} = \ell_{S_{e1}}/2$. L'espressione delle funzioni sull'elemento locale è facilmente ricavabile. Le funzioni di base lagrangiane devono essere uguali a 1 in un nodo e zero in tutti gli altri. Considerando i punti $\xi = -1$ e $x = 1$ come primo e secondo nodo dell'elemento di riferimento \hat{S} , le funzioni definite sull'elemento di riferimento valgono

$$\varphi_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad , \quad \varphi_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) . \quad (1.176)$$

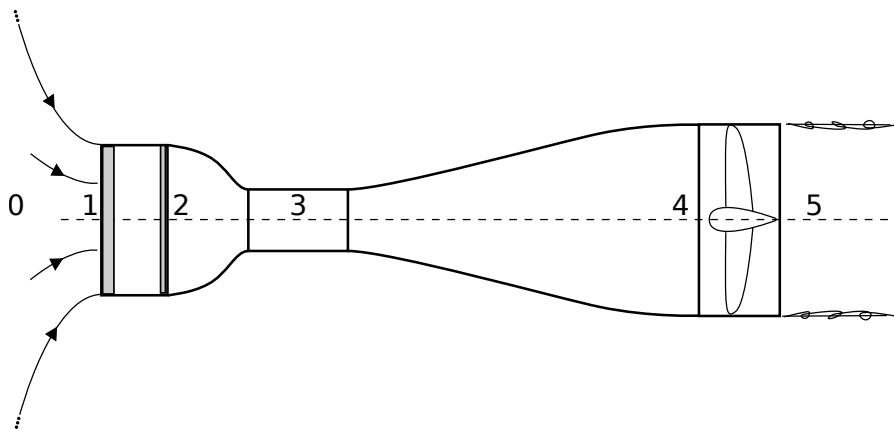
È immediato calcolare il valore degli integrali sull'elemento di riferimento,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi_1(\xi) \varphi_1(\xi) d\xi &= \frac{2}{3} \quad , \quad \int_{-1}^1 \varphi_1(\xi) \varphi_2(\xi) d\xi = \frac{1}{3} \\ \int_{-1}^1 \varphi_2(\xi) \varphi_1(\xi) d\xi &= \frac{1}{3} \quad , \quad \int_{-1}^1 \varphi_2(\xi) \varphi_2(\xi) d\xi = \frac{2}{3} . \end{aligned} \quad (1.177)$$

Questi valori vengono infine utilizzati nel calcolo dei vettori \mathbf{I}_{ij} . I vettori dell'esempio valgono

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{i2,i1} &= \int_{S_{e1}} \phi_{i2}(x) \phi_{i1}(x) \hat{\mathbf{n}} dx = \\ &= \int_{\xi=-1}^1 \varphi_2(\xi) \varphi_1(\xi) \left. \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|_{S_{e1}} d\xi \quad \hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}} = \frac{1}{3} \frac{\ell_{e1}}{2} \hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}} = \frac{\ell_{e1}}{6} \hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}} , \\ \mathbf{I}_{i2,i2} &= \int_{S_{e1} \cup S_{e2}} \phi_{i2}(x) \phi_{i2}(x) \hat{\mathbf{n}} dx = \\ &= \int_{S_{e1}} \phi_{i2}(x) \phi_{i2}(x) \hat{\mathbf{n}} dx + \int_{S_{e2}} \phi_{i2}(x) \phi_{i2}(x) \hat{\mathbf{n}} dx = \\ &= \int_{\xi=-1}^1 \varphi_2(\xi) \varphi_2(\xi) \left. \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|_{S_{e1}} d\xi \quad \hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}} + \int_{\xi=-1}^1 \varphi_1(\xi) \varphi_1(\xi) \left. \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|_{S_{e2}} d\xi \quad \hat{\mathbf{n}}_{S_{e2}} = \\ &= \frac{\ell_{e1}}{3} \hat{\mathbf{n}}_{S_{e1}} + \frac{\ell_{e2}}{3} \hat{\mathbf{n}}_{S_{e2}} . \end{aligned} \quad (1.178)$$

Esercizio 1.10 — Galleria a circuito aperto. Viene chiesto di determinare la potenza dei motori della galleria a circuito aperto rappresentata in figura, sapendo che la velocità massima desiderata nella sezione di prova è $V_{test} = 30 \text{ m/s}$, l'area della sezione di prova è $A_{test} = 1.0 \text{ m}^2$ e l'area della sezione in cui è alloggiato il ventilatore che mette in moto l'aria è $A_{fan} = 2.0 \text{ m}^2$. Si supponga che la corrente sia incompressibile e che la densità dell'aria sia $\rho = 1.1 \text{ kg/m}^3$. In una prima fase, si trascuri la caduta di pressione attraverso il nido d'ape e gli schermi presenti tra la sezione 1 e la sezione 2 del condotto. Successivamente si ripeta il calcolo con una caduta di pressione $P_1 - P_2 = k\rho U^2$, con $k = \dots$.



Soluzione

Concetti. Si studia la galleria a circuito aperto rappresentata in figura utilizzando i bilanci integrali scritti per alcuni volumi di controllo fissi, per ricavare l'andamento della velocità e della pressione all'interno della galleria e infine ricavare la potenza dei motori, necessaria per garantire le condizioni di progetto nella sezione di prova. Si ipotizza un funzionamento stazionario, si trascurano gli effetti viscosi nel volume e sulle pareti della galleria e le forze di volume. In particolare, grazie alle ipotesi fatte, si possono semplificare il bilancio di massa,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho = - \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \rightarrow \quad \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 , \quad (1.179)$$

e il bilancio dell'energia cinetica,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} &= - \oint_S \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \int_V \nabla \mathbf{u} : \mathbb{T} + \int_V \rho \mathbf{g} \\ &\rightarrow - \oint_S \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \oint_S \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} = 0 . \end{aligned} \quad (1.180)$$

Svolgimento. Viene svolta la prima parte dell'esercizio, trascurando le perdite di pressione che avvengono tra la sezione 1 e la sezione 2, a causa della presenza dei nidi d'ape e delle reti.

Si scrive il bilancio di massa per un volume di fluido che ha come superficie di contorno la superficie S_0 , la superficie laterale del tubo di flusso e una superficie S_i all'interno della galleria. Assumendo grandezze uniformi sulla sezione, si può scrivere

$$\rho A_0 U_0 = \rho A_i U_i , \quad (1.181)$$

cioè che il flusso di massa \dot{m} che attraversa le sezioni della galleria è costante. Se sono note le condizioni di progetto in camera di prova, da esser si può calcolare il flusso di massa,

$$\dot{m} = \rho A_3 U_3 = \rho A_{test} V_{test} = \dots . \quad (1.182)$$

Poiché la velocità all'infinito è nulla, $U_0 \rightarrow 0$, l'area della sezione all'infinito a monte deve tendere all'infinito $A_0 \rightarrow \infty$.

Si scrive poi il bilancio di energia cinetica per un volume di controllo che ha come contorno la superficie S_0 all'infinito a monte, dove viene aspirata l'aria in uno stato di quiete, la superficie laterale del tubo di flusso, la superficie interna della galleria e la sezione S_4 alla fine del divergente, poco prima dell'imbocco dei ventilatori. Poiché non ci sono organi meccanici in movimento, il termine $\oint_S \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u}$ è nullo, e assumendo grandezze fisiche costanti sulle sezioni si può scrivere,

$$\rho A_0 U_0 \left(\frac{U_0^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} \right) = \rho A_4 U_4 \left(\frac{U_4^2}{2} + \frac{P_4}{\rho} \right) . \quad (1.183)$$

Poiché il flusso di massa che attraversa le sezioni considerate è costante, il bilancio di energia cinetica si riduce a un'espressione che ricorda quella del teorema di Bernoulli, così come viene enunciato alle scuole superiori,

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho U_0^2 = P_4 + \frac{1}{2} \rho U_4^2 \quad \rightarrow \quad B_4 = B_0 = P_{atm} , \quad (1.184)$$

avendo introdotto la definizione del "binomio di Bernoulli", $B_i = P_i + \rho U_i^2 / 2$.

Si scrive poi il bilancio di energia cinetica per il volume fluido $V(t)$ che contiene il ventilatore, delimitato dalle superfici S_4 , S_5 e la superficie interna della galleria e dalla superficie (mobile!) del ventilatore. Il bilancio diventa

$$\int_{S_4} \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} + \int_{S_5} \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} = \int_{S_{fan}} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} , \quad (1.185)$$

essendo il termine a destra dell'uguale la potenza delle forze essercitata dal ventilatore sul fluido, contraria a quella esercitata dal fluido sul ventilatore, ma uguale a quella che deve fornire il motore elettrico per poter garantire la rotazione del ventalore stesso. Se si trascurano gli sforzi viscosi sulle superfici S_4 ed S_5 , $\mathbf{t}_n = \mathbf{s}_n - P \hat{\mathbf{n}}$, e se si esplicita la potenza che deve essere fornita dai motori, il bilancio diventa,

$$W_{mot} = \int_{S_4} \left(\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P \right) (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) + \int_{S_5} \left(\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + P \right) (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) , \quad (1.186)$$

e facendo l'ipotesi di grandezze fisiche costanti sulle sezioni,

$$W_{mot} = \rho A_5 U_5 \left(\frac{U_5^2}{2} + \frac{P_5}{\rho} \right) - \rho A_4 U_4 \left(\frac{U_4^2}{2} + \frac{P_4}{\rho} \right) = \dot{m} (B_5 - B_4) . \quad (1.187)$$

Ricordando che il "binomio di Bernoulli" nelle sezioni 1:4 è uguale al "binomio di Bernoulli" nella sezione S_0 , e quindi uguale alla pressione ambiente P_{atm} , nell'ipotesi che la pressione nella sezione S_5 sia uguale alla pressione atmosferica P_{atm} all'esterno del tubo di flusso, la potenza del motore diventa,

$$W_{mot} = \dot{m} \frac{U_5^2}{2} , \quad (1.188)$$

e, riferendosi alle grandezze fisiche in camera di prova, può essere scritta come

$$\begin{aligned} W_{mot} &= \dot{m} \left(\frac{A_{test}}{A_{fan}} \right)^2 \frac{V_{test}^2}{2} \\ \rightarrow \quad W_{mot} &= \frac{1}{2} \rho A_{test} \left(\frac{A_{test}}{A_{fan}} \right)^2 V_{test}^3 = \dots \text{kW} . \end{aligned} \quad (1.189)$$

La formula della potenza dei motori necessaria al funzionamento della galleria mette in evidenza la dipendenza dal cubo della velocità di prova e dal quadrato del rapporto tra l'area della sezione di prova e l'area della sezione all'imbocco delle ventole. Questo ultimo termine dovrebbe chiarire uno degli obiettivi del divergente della galleria: rallentare la corrente dopo la sezione di prova, per poter ridurre la potenza dei motori da installare per garantire il funzionamento dell'impianto.

Osservazione. Potrebbe suscitare qualche perplessità il fatto che la corrente in uscita dall'impianto con velocità $U_5 \simeq V_{fan}$ abbia una pressione uguale alla pressione ambiente, P_{atm} , come il fluido in quiete all'esterno del tubo di flusso. **Provando ad applicare il teorema di Bernoulli** tra un punto sulla sezione del tubo di flusso S_5 e un punto all'esterno del tubo di flusso,

$$P_5 + \frac{1}{2} \rho V_{fan}^2 = P_5^{out} \rightarrow P_{atm} + \frac{1}{2} \rho V_{fan}^2 = P_{atm} , \quad (1.190)$$

si giungerebbe alla conclusione che $V_{fan} = 0$. L'errore risiede nell'applicazione del teorema di Bernoulli nella formula vista alla scuola superiore (o in altri corsi universitari), nonostante alcune ipotesi (che verranno presentate nel prosieguo del corso) non siano rispettate. In particolare, per collegare un punto sulla sezione S_5 e un punto all'esterno del tubo di flusso viene attraversato uno strato di mescolamento tra la corrente in moto che esce dalla galleria e il fluido in quiete all'esterno: la presenza di questo strato di mescolamento, nel quale la corrente non è irrotazionale $\omega \neq 0$, fa cadere le ipotesi del teorema di Bernoulli e lo rende quindi inapplicabile. Tutte le parti evidenziate in rosso devono quindi essere considerate errate.

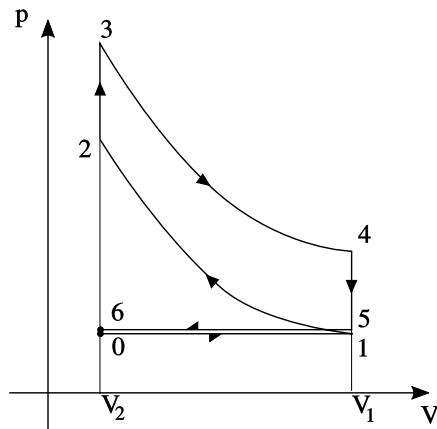
Esercizio 1.11 — Motore alternativo. Il funzionamento di un motore alternativo a benzina (a quattro tempi) può essere rappresentato in prima approssimazione con un ciclo termodinamico Otto ideale, rappresentato da una compressione adiabatica, una fase veloce di combustione a volume costante (nel punto morto superiore del moto del pistone, PMS) e un'espansione adiabatica. Le fasi di aspirazione e scarico dei gas combusti sono anch'essi ideali. L'aspirazione avviene a pressione costante durante il movimento del pistone dal PMS al punto morto inferiore (PMI). La fase di scarico avviene in due fasi: durante la prima fase la pressione diminuisce molto velocemente (approssimata da una trasformazione a volume costante) a causa dell'apertura della valvola di scarico quando il pistone si trova al PMI; durante la seconda fase i gas combusti sono spinti fuori dalla camera di combustione dal movimento ascendente del pistone che si riporta al PMS, per l'inizio del ciclo termodinamico successivo. Del motore sono noti:

- il rapporto di compressione, definito come il rapporto tra il volume massimo (pistone al PMI) e minimo (pistone al PMS) della camera di combustione, $r = V_1/V_2 = 10$;
- la cilindrata, definita come la corsa del pistone per l'area della sezione del cilindro, e uguale alla differenza $C = N(V_2 - V_1) = 1000 \text{ cc}$, essendo N il numero di cilindri del motore;
- le condizioni termodinamiche dell'aria all'aspirazione $P_0 = 85570 \text{ Pa}$, $T_0 = 25^\circ\text{C}$;
- il rapporto in massa tra benzina e aria, $f = m_f/m_a = 0.06$;
- il potere calorifico della benzina usata $\Delta h = 43 \text{ MJ}$;
- la pressione nel basamento del motore, $p_b = 150000 \text{ Pa}$ uniforme e costante. Si calcoli la potenza media erogata dal motore a un regime di rotazione di $\Omega = 3000 \text{ RPM}$, assumendo un rendimento meccanico $\eta = 0.8$. Si rappresenti l'aria come un gas bi-atomico perfetto ($\gamma = c_p/c_v = 1.4$) con costante dei gas $R = 287 \text{ J/(kg K)}$, e si trascuri l'effetto del carburante sul valore dei calori specifici e sulla massa presente all'interno della camera di combustione. Si trascurino inoltre gli scambi di calore per conduzione con l'esterno del cilindro durante la compressione e l'espansione (trasformazioni adiabatiche). Si trascurino i termini cinetici nell'energia totale in camera di combustione, facendo coincidere l'energia totale con l'energia interna $e^t = e = c_v T$, e si assuma che le variabili termodinamiche siano uniformi (costanti in spazio, non in tempo) in camera di combustione.

Soluzione

Concetti. Ogni fase del ciclo termodinamico viene analizzata con i bilanci integrali, per il volume corrispondente alla camera di combustione di un cilindro. Questo volume è un sistema aperto durante la fase di aspirazione e scarico (scambia massa con l'esterno), mentre è un sistema chiuso durante la compressione, la combustione e l'espansione (valvole chiuse, nessuno scambio di massa con l'esterno). Si calcola il lavoro svolto dal sistema durante un ciclo e si divide per il periodo per ricavare la potenza media.

Svolgimento. Conoscendo il numero dei cilindri $N = 3$, il rapporto di compressione r e la cilindrata C è possibile ricavare il valore del volume massimo V_1 e minimo V_2 della



camera di combustione.

$$\begin{cases} N(V_2 - V_1) = C \\ V_1/V_2 = r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_1 = \frac{r}{r-1} N \\ V_2 = \frac{1}{r-1} N \end{cases} \quad (1.191)$$

Si analizzano ora le fasi del ciclo termodinamico, fornendo una breve descrizione e ponendo attenzione allo scambio di massa (sistema chiuso/aperto), lavoro e calore con l'esterno.

- **Aspirazione**, $0 \rightarrow 1$: la prima fase del ciclo Otto è l'aspirazione. Durante la fase di aspirazione (ideale), la valvola di aspirazione è aperta e il sistema scambia massa con l'esterno: il pistone si sposta dal PMS al PMI e la camera di combustione si riempie d'aria a pressione e temperatura costante,

$$p_1 = p_0 \quad , \quad T_1 = T_0 \quad , \quad \rho_1 = \rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \quad (1.192)$$

La massa contenuta nella camera di combustione alla chiusura della valvola, in coincidenza del PMI, è

$$m = \rho_1 V_1 = \dots \quad (1.193)$$

Durante la fase di aspirazione, il pistone deve vincere la sovrapressione del basamento (di solito la pressione nel basamento è superiore a quella aspirata in camera di combustione). Dal PMS al PMI un pistone assorbe parte della potenza fornita dagli altri pistoni. Il lavoro che assorbe è $L_{01} = -(p_b - p_0) c$ (negativo poiché assorbito), essendo c la corsa del pistone e la differenza di pressione costante durante l'aspirazione. Questo lavoro assorbito durante l'aspirazione sarà uguale e contrario a quello fornito durante lo scarico ideale dei gas, che avviene alla stessa differenza di pressione con un moto opposto.

- **Compressione**, $1 \rightarrow 2$: la seconda fase del ciclo termodinamico è la compressione del fluido che avviene a causa del movimento verso l'alto del pistone. Il sistema è chiuso: le valvole sono chiuse e si ipotizza che non ci sia trafiletto (*blow-by*) tra il pistone e la superficie laterale del cilindro. Il bilancio di energia totale per il fluido contenuto all'interno del volume $V(t)$ (variabile nel tempo, a causa del moto del

pistone) della camera di combustione,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e^t + \oint_{S(t)} \rho e^t (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{S(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \rho r . \quad (1.194)$$

può essere semplificato, trascurando l'effetto delle forze di volume, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, trascurando la trasmissione del calore con l'esterno (trasformazione adiabatica), $\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, e non essendoci sorgenti di calore, $r = 0$. Inoltre non c'è flusso di massa attraverso il contorno $S(t)$ del volume, $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, e l'unica superficie in movimento della camera di combustione corrisponde al cielo (la faccia superiore) del pistone, S_c . Trascurando il contributo cinetico e approssimando l'energia totale $e^t = e + |\mathbf{u}|^2/2$ con l'energia interna e , il bilancio di energia diventa,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e = \int_{S_c(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} , \quad (1.195)$$

legando la derivata temporale dell'energia del fluido nella camera di combustione alla potenza delle forze esercitate dal pistone sul fluido. La potenza delle forze agenti sul pistone è uguale all'integrale superficiale del prodotto scalare vettore sforzo $\mathbf{t}_{n,s}$ agente sul solido per la velocità \mathbf{v} della superficie del solido,

$$\begin{aligned} W_{12} &= \oint_{S_s} \mathbf{t}_{n,s} \cdot \mathbf{v} = \int_{S_{s,c}} \mathbf{t}_{n,s} \cdot \mathbf{v} + \int_{S_{s,b}} \mathbf{t}_{n,s} \cdot \mathbf{v} + \int_{S_{s,lat}} \mathbf{t}_{n,s} \cdot \mathbf{v} = \\ &= - \int_{S_c} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \int_{S_{s,b}} p_b \hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{v} , \end{aligned} \quad (1.196)$$

avendo suddiviso la superficie del cilindro S_s come l'unione della superficie superiore $S_{s,c}$ (cielo), superficie laterale $S_{s,lat}$ (dal contributo nullo, per simmetria), e superficie inferiore $S_{s,b}$ esposta verso il basamento del motore, sulla quale agisce uno sforzo dovuto alla pressione p_b dell'ambiente all'interno del basamento. È stato indicata con $\hat{\mathbf{n}}_s$ la normale uscente dalla superficie del solido e con $\mathbf{t}_{n,s}$ il vettore sforzo agente su un punto della superficie del solido, uguale e contrario a quello agente sul fluido $\mathbf{t}_n = -\mathbf{t}_{n,s}$ per il principio di azione e reazione. Inoltre, le condizioni al contorno impongono che il fluido e il solido abbiano la stessa velocità $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ sulle superfici di contatto. Si può quindi riscrivere il bilancio di energia del fluido in funzione della potenza W_{12} trasmessa al pistone,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e = -W_{12} - p_b S_c v(t) = -W_{12} - p_b \frac{dV}{dt} , \quad (1.197)$$

essendo $v(t)$ la velocità del pistone, per ottenere la potenza trasmessa al pistone dal fluido (sarà una potenza richiesta, < 0),

$$\begin{aligned} W_{12}(t) &= -\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e - p_b \frac{dV}{dt} = \\ &= -\frac{d}{dt} (\rho V e) - p_b \frac{dV}{dt} = \\ &= -m \frac{de}{dt} - p_b \frac{dV}{dt} , \end{aligned} \quad (1.198)$$

nell'ipotesi di variabili termodinamiche uniformi nel volume, ricordando che la massa contenuta nella camera di combustione $m = \rho V$ rimane costante, essendo un sistema chiuso, se si trascura l'effetto di trafileamento tra le pareti di cilindro e pistone (ridotte

al minimo da fasce elastiche e anelli raschiaolio sul pistone e sovra-pressione nel basamento).

Integrando in tempo la potenza istantanea $W_{12}(t)$, tra il punto 1 e il punto 2 del ciclo, si ottiene il lavoro di compressione

$$L_{12} = -m(e_2 - e_1) - p_b(V_2 - V_1) . \quad (1.199)$$

Utilizzando la legge di stato dei gas perfetti $p = \rho RT$ e il legame tra le variabili termodinamiche durante una trasformazione adiabatica $p/\rho^\gamma = \text{cost}$, si ottiene

$$e_2 - e_1 = c_v(T_2 - T_1) = c_v T_1 \left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = c_v T_1 \left(r^{\gamma-1} - 1 \right) . \quad (1.200)$$

- **Combustione**, $2 \rightarrow 3$: la terza fase del ciclo termodinamico è la combustione. Viene iniettato il combustibile all'interno della camera di combustione, innescata dall'accensione di una candela in un motore a benzina classico. Durante l'iniezione del combustibile il sistema è aperto. In prima approssimazione si può trascurare la variazione di massa, $m + m_f = m(1 + f) \simeq m$. In prima approssimazione, si può rappresentare questa fase con una trasformazione isocora (volume costante) associata a un aumento di pressione e temperatura, a causa di una combustione (completa) veloce in corrispondenza del PMS. Il bilancio di energia che descrive questa fase diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e &= \int_{V(t)} \rho r \\ m \frac{de}{dt} = \dot{m}_f \Delta h &\rightarrow e_3 - e_2 = \frac{\dot{m}_f}{m} \Delta h = f \Delta h . \end{aligned} \quad (1.201)$$

Utilizzando l'espressione dell'energia interna $e = c_v T$,

$$c_v T_3 = c_v T_2 + f \Delta h . \quad (1.202)$$

- **Espansione**, $3 \rightarrow 4$: la quarta fase del ciclo è l'espansione. Trascurando gli scambi di calore con l'esterno, la trasformazione è adiabatica. Facendo le stesse ipotesi fatte per la fase di compressione, si ottiene un lavoro di espansione (fornito al pistone, > 0)

$$L_{34} = -m(e_4 - e_3) - p_b(V_4 - V_3) . \quad (1.203)$$

Utilizzando la legge di stato dei gas perfetti $p = \rho RT$ e il legame tra le variabili termodinamiche durante una trasformazione adiabatica $p/\rho^\gamma = \text{cost}$, si ottiene

$$\begin{aligned} e_4 - e_3 &= c_v(T_4 - T_3) = \\ &= c_v T_3 \left[\left(\frac{\rho_4}{\rho_3} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = \\ &= c_v T_3 \left(r^{-\gamma+1} - 1 \right) = \\ &= c_v T_2 \left(r^{-\gamma+1} - 1 \right) + f \Delta h \left(r^{-\gamma+1} - 1 \right) = \\ &= c_v T_1 \left(1 - r^{\gamma-1} \right) + f \Delta h \left(r^{-\gamma+1} - 1 \right) = . \end{aligned} \quad (1.204)$$

- **Scarico**, $4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 6$: la fase di scarico (libera) è considerata istantanea e quindi non viene compiuto lavoro da parte del fluido sul sistema meccanico. Durante la fase di scarico forzata, mentre si muove dal PMI al PMS, il pistone compie un lavoro $L_{46} = (p_b - p_0)c$, uguale e contrario a quello compiuto durante la fase di aspirazione se la pressione di aspirazione e di scarico sono uguali ($p_0 = p_1 = p_5$).

Il lavoro complessivo fornito dal fluido al sistema meccanico durante un ciclo è quindi uguale a

$$\begin{aligned} L &= L_{12} + L_{34} = \dots = \\ &= f m \Delta h \left(1 - r^{-\gamma+1} \right) . \end{aligned} \quad (1.205)$$

Il risultato ottenuto può essere facilmente interpretato in termini termodinamici, essendo $Q_{in} = f m \Delta h$ il calore fornito alla macchina termica e $\eta = 1 - r^{-\gamma+1}$ il rendimento del ciclo Otto espresso in funzione del rapporto di compressione r ,

$$L = \eta Q_{in} . \quad (1.206)$$

Nonostante il risultato ottenuto non sia nuovo, lo svolgimento dovrebbe fornire uno svolgimento più dettagliato che parta dai principi fisici, rappresentati dai bilanci integrali, ed evidenziare il ruolo delle ipotesi fatte per ricavare il risultato, come ad esempio l'assenza di flussi di calore durante la fase di compressione e espansione adiabatica.

Per ottenere la potenza media fornita dal motore, bisogna moltiplicare il lavoro L fornito da un pistone per il numero N dei cilindri del motore e dividere per il periodo del ciclo $T = \frac{2\pi n}{\Omega^2}$, essendo Ω la velocità di rotazione dell'albero motore ed $n = 4$ il numero dei tempi del motore,

$$W = \frac{NL}{T} = \frac{\Omega}{n\pi} f \Delta h \rho_1 N V_1 \left(1 - r^{1-\gamma} \right) , \quad (1.207)$$

e introducendo la definizione di cilindrata,

$$W = \frac{NL}{T} = \frac{\Omega}{n\pi} f \Delta h \rho_1 C \frac{r}{r-1} \left(1 - r^{1-\gamma} \right) = 43.14 \text{ kW} = 58.6 \text{ CV} . \quad (1.208)$$

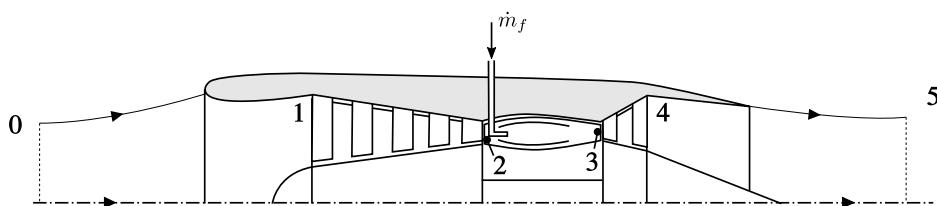
Esercizio 1.12 — Motore a getto. Un aereo vola alla velocità $V = 250 \text{ m/s}$ alla quota $z = 10000 \text{ m}$, dove la pressione e la temperatura atmosferica sono $P_0 = 26500 \text{ Pa}$ e $T_0 = 223.25 \text{ K}$, spinto dal motore a getto rappresentato in figura. Sapendo che:

- $0 \rightarrow 1$: la presa d'aria è progettata per ottenere una compressione adiabatica ideale (isentropica), con $P_1/P_0 = 1.5$;
- $1 \rightarrow 2$: il compressore ideale ha una sezione di ingresso $A_1 = \dots$ e produce un rapporto di pressione totale $P_2^t/P_1^t = 40.0$, tramite una trasformazione adiabatica ideale;
- $2 \rightarrow 3$: il combustore garantisce una perfetta combustione mantenendo costante la pressione totale al suo interno $P_2^t = P_3^t$; il flusso di calore prodotto dalla combustione è uguale a $\dot{Q}_c = \dot{m}_f \Delta h_c$, dove \dot{m}_f è il flusso di massa di combustibile e $\Delta h_c = 46 \text{ MJ/kg}$ il suo potere calorifico; la temperatura totale all'ingresso della turbina è $T_4^t = 1600 \text{ K}$;
- $3 \rightarrow 4$: nella turbina avviene un'espansione adiabatica ideale, in modo tale da garantire la potenza necessaria a mantenere in moto il compressore;
- $4 \rightarrow 5$: nell'ugello avviene un'espansione adiabatica ideale, che porta il gas a espandersi fino alla pressione ambiente $P_5 = P_0$.

Si considerino tutti i componenti meccanici ideali, si trascurino gli effetti viscosi dove possibile e si consideri l'aria e la miscela di gas combusti come un gas biatomico ideale, con costante dei gas $R = 287 \text{ J/(kg K)}$ e calori specifici costanti.

Viene chiesto di calcolare:

- il rapporto in massa tra flusso di combustibile e flusso di aria, $f = \dot{m}_f/\dot{m}_a$;
- la spinta T fornita dal motore.



Soluzione

Concetti. Durante lo svolgimento dell'esercizio vengono utilizzati i bilanci integrali di massa,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho + \oint_{S(t)} \rho(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 , \quad (1.209)$$

quantità di moto,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} + \oint_{S(t)} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V(t)} \mathbf{f} + \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n , \quad (1.210)$$

ed energia totale,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e^t + \oint_{S(t)} \rho e^t (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{V(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \oint_{S(t)} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{u} - \oint_{S(t)} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{V(t)} \rho r . \quad (1.211)$$

In particolare, il bilancio di quantità di moto permette di ricavare la formula della spinta del motore in funzione del flusso di quantità di moto attraverso un volume di controllo opportunamente scelto. Il bilancio di energia totale permette di analizzare i singoli componenti del motore.

Svolgimento. Per risolvere il problema, è necessario ricavare la spinta del motore in funzione della portata massica trattata e della differenza di velocità del fluido in ingresso e in uscita dal motore. Successivamente viene analizzato il sistema motore per calcolare la velocità di efflusso dei gas. Si considera il problema stazionario, con forze di volume \mathbf{f} trascurabili. Si svolge uno studio “quasi-1D” considerando variabili uniformi sulle varie sezioni del motore.

Formula della spinta.

Nell’ipotesi che la pressione dei gas in uscita dall’ugello sia uguale alla pressione ambiente, il bilancio di quantità di moto del fluido trattato dal motore permette di ottenere la stima della trazione generata dal motore,

$$T = \dot{m}_5 V_5 - \dot{m}_0 V_0 = \dot{m}_0 (V_5 - V_0) + \dot{m}_f V_5 . \quad (1.212)$$

Per ricavare la trazione T è necessario ricavare i valori del flusso di massa d’aria ingerito dal motore, il flusso di combustibile e la velocità di efflusso dei gas combusti, studiando in dettaglio il fluido all’interno del motore

Analisi del motore.

Si studia l’evoluzione della corrente che attraversa il motore.

- 0 → 1, presa d’aria: l’aria che approccia l’ingresso del compressore S_1 subisce una compressione libera adiabatica ideale. Dato lo stato termodinamico TD(0), con $\rho_0 = P_0/(RT_0) = 0.414 \text{ kg/m}^3$, e il rapporto di pressione P_1/P_0 , è possibile calcolare lo stato termodinamico TD(1):

$$P_1 = \left(\frac{P_1}{P_0} \right) P_0 = 39750 \text{ Pa} \quad , \quad \rho_1 = \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \rho_0 = 0.553 \text{ kg/m}^3 . \quad (1.213)$$

Una volta note la pressione e la densità, è possibile calcolare la temperatura e l’entalpia del fluido,

$$T_1 = \frac{P_1}{R T_1} = 250.67 \text{ K} \quad , \quad h_1 = c_P T_1 = 2.52 \cdot 10^5 \text{ J/kg} . \quad (1.214)$$

Si calcola ora il flusso di massa che entra nel volume,

$$\dot{m}_0 = \dot{m}_1 \quad , \quad \rho_0 V_0 A_0 = \rho_1 V_1 A_1 . \quad (1.215)$$

Si calcola il flusso di massa utilizzando la sezione 1. Poiché non ci sono organi meccanici che assorbono o forniscono potenza, non ci sono sorgenti di calore e possono essere trascurati gli effetti viscosi, tra le sezioni 0 e 1 si conserva il flusso di entalpia totale,

$$\dot{m}_0 h_0^t = \dot{m}_1 h_1^t \quad \rightarrow \quad h_0^t = h_1^t = h_1 + \frac{V_1^2}{2} = 2.56 \cdot 10^5 \text{ J/kg} . \quad (1.216)$$

$$\rightarrow \quad V_1 = \sqrt{2(h_0^t - h_1)} = 86.09 \text{ m/s} \quad (1.217)$$

$$\dot{m}_1 = \rho_1 A_1 V_1 = 47.57 \text{ kg/s}$$

- $1 \rightarrow 2$, compressore: lo stato termodinamico totale in uscita del compressore è legato allo stato totale in ingresso da una trasformazione isentropica,

$$P_2^t = \left(\frac{P_2^t}{P_1^t} \right) P_1^t = 1.67 \cdot 10^6 \text{ Pa} \quad , \quad T_2^t = \left(\frac{P_2^t}{P_1^t} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_1^t = 729.76 \text{ K} . \quad (1.218)$$

Trascurando gli effetti viscosi sulla superficie di ingresso e di uscita del compressore, in assenza di scambi di calore, la potenza fornita dal compressore al fluido vale

$$W_{12} = \dot{m}_1 (h_2^t - h_1^t) = 22.72 \text{ MW} . \quad (1.219)$$

- $2 \rightarrow 3$, combustore: la temperatura totale $T_3^t = \dots$ in ingresso alla turbina è un dato del problema determinato dai limiti tecnologici legati alla realizzazione delle palette del rotore della turbina e al fenomeno di creeping. Nel combustore non ci sono organi meccanici in movimento che forniscano o assorbano potenza dal fluido. Si trascurano gli effetti viscosi e le forze di volume. Se si ipotizza la combustione completa del comustibile iniettato come origine del calore generato e si trascura il flusso di entalpia totale attraverso l'iniettore, il bilancio di energia totale in regime stazionario diventa

$$\dot{m}_3 h_3^t - \dot{m}_2 h_2^t - \underbrace{\dot{m}_f h_f^t}_{\approx 0} = \dot{Q}_c = \dot{m}_f \Delta h_c . \quad (1.220)$$

Poiché il flusso di massa dei gas combusi uscenti dal combustore \dot{m}_3 è uguale alla somma del flusso d'aria \dot{m}_2 e il flusso di combustibile \dot{m}_f entranti,

$$\dot{m}_3 = \dot{m}_2 + \dot{m}_f , \quad (1.221)$$

il rapporto tra il flusso di massa del combustibile e dell'aria diventa,

$$f := \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_2} = \frac{h_3^t - h_2^t}{\Delta h_c - h_3^t} = \frac{T_3^t - T_2^t}{\Delta h_c / c_P - T_3^t} = 0.0197 . \quad (1.222)$$

Se si ipotizza che la pressione totale rimanga costante all'interno del combustore, lo stato termodinamico totale in uscita dal combustore è determinato dal valore della pressione e della temperatura totale, P_3^t e T_3^t ,

$$\rho_3^t = \frac{P_3^t}{RT_3^t} = 3.64 \text{ kg/m}^3 \quad , \quad h_3^t = c_P T_3^T = 1.61 \cdot 10^6 \text{ J/kg} . \quad (1.223)$$

- $3 \rightarrow 4$, turbina: la turbina deve generare la potenza W_{34} necessaria a muovere il compressore,

$$W_{12} + W_{34} = 0 . \quad (1.224)$$

Se si trascurano gli effetti viscosi e si ipotizza un processo adiabatico, la potenza della turbina è uguale alla differenza del flusso di entalpia totale tra l'uscita e l'ingresso della turbina,

$$W_{34} = \dot{m}_3 (h_4^t - h_3^t) . \quad (1.225)$$

L'entalpia totale all'uscita della turbina vale

$$h_4^t = h_3^t - \frac{1}{1+f}(h_2^t - h_1^t) = 1.13 \cdot 10^6 \text{ J/kg} \quad \rightarrow \quad T_4^t = 1124.6 \text{ K} . \quad (1.226)$$

La trasformazione isentropica lega lo stato termodinamico totale TD(3) in ingresso alla turbina allo stato termodinamico totale TD(4) in uscita,

$$\begin{aligned} P_4^t &= \left(\frac{T_4^t}{T_3^t}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} P_3^t = 4.87 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ \rho_4^t &= 1.51 \text{ kg/m}^3 . \end{aligned} \quad (1.227)$$

- 4 → 5, ugello: se si considera un'espansione libera nell'ugello ideale, trascurando gli effetti viscosi e gli scambi di calore, il bilancio dell'energia totale in assenza di organi meccanici che generino o assorbano potenza dal fluido equivale alla conservazione del flusso dell'entropia totale,

$$\dot{m}_4 h_4^t = \dot{m}_5 h_5^t \quad \rightarrow \quad h_4^t = h_5 + \frac{V_5^2}{2} \quad \rightarrow \quad V_5 = \sqrt{2(h_4^t - h_5)} \quad (1.228)$$

Se l'ugello non è bloccato la pressione dei gas in uscita è uguale alla pressione atmosferica, $P_5 = P_0$. La trasformazione isentropica tra 4 e 5, permette di ricavare lo stato termodinamico TD(5),

$$\begin{aligned} \rho_5 &= \left(\frac{P_5}{P_4^t}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \rho_4^t = 0.189 \text{ kg/m}^3 \\ T_5 &= 489.5 \text{ K} \quad \rightarrow \quad h_5 = 4.92 \cdot 10^5 \text{ J/kg}. \end{aligned} \quad (1.229)$$

La velocità di efflusso dei gas combusti vale quindi

$$V_5 = \sqrt{2(h_4^t - h_5)} = 1129.6 \text{ m/s.} \quad (1.230)$$

La spinta fornita dal motore in questa condizione di volo vale

$$T = \dot{m}_5 V_5 = 42.90 \text{ kN} . \quad (1.231)$$

2. Similitudine

2.1 Teorema di Buckingham

Il teorema di Buckingham afferma che un problema descritto da n variabili fisiche, le cui dimensioni fisiche coinvolgono k grandezze fondamentali, può essere espresso in funzione di $n - k$ gruppi adimensionali.

2.2 Equazioni di Navier–Stokes incomprimibili in forma adimensionale

Nelle equazioni incomprimibili di Navier–Stokes per un fluido a densità costante

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 , \end{cases} \quad (2.1)$$

compaiono 7 variabili fisiche ($\rho, \mathbf{u}, \mu, p, \mathbf{g}; \mathbf{r}, t$), le 2 variabili indipendenti spaziale \mathbf{r} e temporale t , e le 5 variabili dipendenti rappresentate dalla densità ρ , dal campo di velocità \mathbf{u} , dal coefficiente di viscosità dinamica μ , dal campo di pressione p e dal campo di forze di volume \mathbf{g} . Le dimensioni fisiche delle 7 variabili possono essere costruite con 3 grandezze fondamentali, la massa M , la lunghezza L e il tempo T . Ad esempio, le dimensioni fisiche della velocità sono $[\mathbf{u}] = L T^{-1}$ e quelle della densità sono $[\rho] = M L^{-3}$. Le dimensioni delle 7 variabili fisiche che compaiono nelle equazioni di Navier–Stokes incomprimibili sono raccolte nella tabella 2.1. Per poter formare i $7 - 3 = 4$ gruppi adimensionali che

	r	t	ρ	\mathbf{u}	μ	p	\mathbf{g}
M	0	0	1	0	1	1	0
L	1	0	-3	1	-1	-1	1
T	0	1	0	-1	-1	-2	-2

Tabella 2.1: Variabili fisiche e grandezze fondamentali.

caratterizzano il problema, è necessario scegliere 3 variabili fisiche (o combinazione di queste) che “contengano in maniera linearmente indipendente” tutte le 3 grandezze fondamentali del problema. Facendo riferimento alla tabella 2.1, le colonne relative alle variabili scelte per l’adimensionalizzazione devono formare dei vettori linearmente indipendenti tra di loro. Ad esempio, due scelte valide delle variabili da usare per l’adimensionalizzazione del problema sono:

- (ρ, U, L) , una densità, una velocità e una lunghezza di riferimento,
- (μ, U, L) , una viscosità, una velocità e una lunghezza di riferimento,

mentre una scelta non accettabile è una terna (T, U, L) formata da un tempo, una velocità e una lunghezza di riferimento, poichè non è possibile costruire dei gruppi adimensionali con le variabili fisiche che contengono la massa come grandezza fisica, come la densità, la pressione e il coefficiente di viscosità.

Tutte le variabili fisiche vengono espresse come il prodotto di una loro grandezza di riferimento, che contiene le dimensioni fisiche e viene indicata con la tilde, e la loro versione adimensionale, indicata con l’asterisco,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \tilde{L} \mathbf{r}^* \quad , \quad t = \tilde{T} t^* \quad , \quad \mathbf{u} = \tilde{U} \mathbf{u}^* \\ \rho &= \tilde{\rho} \rho^* \quad , \quad \mu = \tilde{\mu} \mu^* \quad , \quad p = \tilde{p} p^* \quad , \quad \mathbf{g} = \tilde{g} \mathbf{g}^*. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Per le equazioni di Navier–Stokes incomprimibili a proprietà costanti, è possibile scegliere il valore di riferimento della densità e della viscosità dinamica come il valore stesso delle variabili fisiche, $\tilde{\rho} = \rho$, $\tilde{\mu} = \mu$. In questo modo, il loro valore adimensionale è uguale a 1, $\rho^* = \mu^* = 1$. Nel caso del campo di forze di volume dovuto alla gravità, costante e diretto lungo la verticale, è possibile definire il valore di riferimento $\tilde{g} = |\mathbf{g}|$, cosicché il vettore \mathbf{g}^* è uguale e contrario al versore $\hat{\mathbf{z}}$ orientato in direzione verticale. Anche l’operatore *nabla* viene adimensionalizzato, $\nabla = \frac{1}{\tilde{L}} \nabla^*$. Le equazioni di Navier–Stokes possono essere scritte come

$$\begin{cases} \frac{\rho \tilde{U}}{\tilde{t}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho \tilde{U}^2}{\tilde{L}} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \frac{\mu \tilde{U}}{\tilde{L}^2} \Delta^* \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{p}}{\tilde{L}} \nabla^* p^* = -\rho g \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\tilde{U}}{\tilde{L}} \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 . \end{cases} \quad (2.3)$$

2.2.1 Adimensionalizzazione “ad alti numeri di Reynolds”

Se si scelgono $(\tilde{\rho}, \tilde{U}, \tilde{L})$ come grandezze di riferimento, dividendo l’equazione della quantità di moto per $\tilde{\rho} \tilde{U}^2 / \tilde{L}$ e il vincolo di incomprimibilità per \tilde{U} / \tilde{L} ,

$$\begin{cases} \frac{\tilde{L}}{\tilde{U} \tilde{t}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \frac{\mu}{\rho \tilde{U} \tilde{L}} \Delta^* \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{p}}{\rho \tilde{U}^2} \nabla^* p^* = -\frac{g \tilde{L}}{\tilde{U}^2} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 , \end{cases} \quad (2.4)$$

si possono riconoscere 4 numeri adimensionali:

- il numero di Strouhal, $St = \frac{\tilde{L}}{\tilde{U} \tilde{t}}$, che rappresenta il rapporto tra una scala dei tempi e la scala dei tempi \tilde{L}/\tilde{U} costruita con la lunghezza e la velocità di riferimento;
- il numero di Reynolds, $Re = \frac{\rho \tilde{U} \tilde{L}}{\mu}$, che rappresenta il rapporto tra gli effetti di inerzia e quelli viscosi;
- il numero di Eulero, $Eu = \frac{\tilde{p}}{\rho \tilde{U}^2}$, che rappresenta il rapporto tra la grandezza di riferimento della pressione e quella di un’energia cinetica del fluido;
- il numero di Froude, $Fr = \frac{\tilde{U}^2}{g \tilde{L}}$, che rappresenta il rapporto tra gli effetti di inerzia e quelli dovuti al campo di forze di volume.

Quando non esiste una scala dei tempi “indipendente” dal fenomeno fluidodinamico, è possibile scegliere il valore di riferimento del tempo $\tilde{t} = \tilde{L}/\tilde{U}$, in modo tale da ottenere un numero di Strouhal unitario. Per la natura stessa della “pressione” di moltiplicatore di Lagrange introdotto nelle equazioni di Navier–Stokes per imporre il vincolo di incompressibilità, è frequente che la pressione non abbia una scala indipendente nel regime incompressibile. È possibile quindi scegliere una scala di pressione $\tilde{p} = \rho\tilde{U}^2$, in modo tale da ottenere un numero di Eulero unitario,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \frac{1}{Re} \Delta^* \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* = -\frac{1}{Fr} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 . \end{cases} \quad (2.5)$$

Se le grandezze di riferimento sono rappresentative del problema, in modo tale da rendere gli ordini di grandezza delle variabili adimensionali paragonabili tra loro, il valore dei numeri adimensionali permette di valutare l’influenza dei termini. Ad esempio, per valori elevati del numero di Froude l’influenza delle forze di volume è ridotta. Per valori elevati del numero di Reynolds, l’influenza degli effetti viscosi diventa trascurabile nelle regioni del campo di moto nelle quali le derivate spaziali del campo di velocità sono piccole. Per applicazioni tipiche aeronomiche ad alti numeri di Reynolds, gli effetti viscosi saranno quindi trascurabili in gran parte del dominio, ad eccezione delle regioni di strato limite, all’interno delle quali la componente della velocità “parallela” alla parete ha una variazione elevata in direzione perpendicolare alla parete stessa. Se gli effetti delle forze di volume sono trascurabili ($Fr \rightarrow \infty$), le equazioni di Navier–Stokes incompressibili per problemi ad alti numeri di Reynolds ($Re \rightarrow \infty$) si riducono alle equazioni di Eulero incompressibili nelle regioni del dominio in cui gli effetti viscosi sono trascurabili,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* = \mathbf{0} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 . \end{cases} \quad (2.6)$$

2.2.2 Adimensionalizzazione “a bassi numeri di Reynolds”

Se si scelgono $(\tilde{\rho}, \tilde{U}, \tilde{L})$ come grandezze di riferimento, dividendo l’equazione della quantità di moto per $\tilde{\mu}\tilde{U}/\tilde{L}^2$ e il vincolo di incompressibilità per \tilde{U}/\tilde{L} , le equazioni di Navier–Stokes diventano

$$\begin{cases} \frac{\rho\tilde{L}^2}{\mu\tilde{t}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho\tilde{U}\tilde{L}}{\mu} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \Delta^* \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{p}\tilde{L}}{\mu\tilde{U}} \nabla^* p^* = -\frac{\rho g\tilde{L}^2}{\mu\tilde{U}} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 . \end{cases} \quad (2.7)$$

Se gli effetti delle forze di volume sono trascurabili rispetto agli effetti viscosi e non ci sono scale indipendenti di tempo e pressione, le equazioni di Navier–Stokes in forma adimensionale diventano

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + Re(\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \Delta^* \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* = \mathbf{0} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 . \end{cases} \quad (2.8)$$

Per correnti nelle quali il numero di Reynolds caratteristico tende a zero, note come *creeping flow*, il termine non lineare diventa trascurabile e le equazioni di Navier–Stokes si riducono alle equazioni di Stokes,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} - \Delta^* \mathbf{u}^* + \nabla^* p^* = \mathbf{0} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 . \end{cases} \quad (2.9)$$

2.3 Equazione di continuità e numero di Mach

La forma adimensionale dell'equazione di continuità permette di valutare i limiti dell'approssimazione di corrente incomprimibile, che soddisfa il vincolo cinematico di incomprimibilità $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. L'equazione della massa viene scritta in forma convettiva,

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}. \quad (2.10)$$

Ricordando che lo stato termodinamico di un sistema monocomponente monofase è definito da due variabili termodinamiche, il campo di pressione p viene espresso in funzione del campo di densità ρ e di entropia s , come $p(\rho, s)$. Il differenziale di questa relazione,

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho ds, \quad (2.11)$$

può essere utilizzato per esprimere la derivata materiale della densità in funzione delle derivate materiali di pressione ed entropia,

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{(\partial p / \partial \rho)_s} \frac{Dp}{Dt} - \frac{(\partial p / \partial \rho)_\rho}{(\partial p / \partial \rho)_s} \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{c^2} \frac{Dp}{Dt} - \frac{(\partial p / \partial s)_\rho}{c^2} \frac{Ds}{Dt}, \quad (2.12)$$

avendo riconosciuto il quadrato della velocità del suono $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$. L'equazione della massa diventa quindi

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{Dp}{Dt} - \frac{(\partial p / \partial s)_\rho}{\rho c^2} \frac{Ds}{Dt}. \quad (2.13)$$

Per processi isentropici (o per i quali il secondo termine a destra dell'uguale è trascurabile), l'equazione della massa si riduce a

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{Dp}{Dt}. \quad (2.14)$$

Utilizzando i valori di densità $\tilde{\rho}$, velocità \tilde{U} e lunghezza \tilde{L} caratteristici della corrente per costruire la scala dei tempi $\tilde{t} = \tilde{L}/\tilde{U}$ e per la pressione $\tilde{p} = \tilde{\rho}\tilde{U}^2$, si ottiene l'equazione della massa in forma adimensionale,

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = -\frac{M^2}{\rho^*} \frac{Dp^*}{Dt^*}, \quad (2.15)$$

nella quale si è iconosciuto il numero di Mach caratteristico della corrente, $M = \frac{\tilde{U}}{c}$, definito come il rapporto tra una velocità caratteristica e la velocità del suono in uno stato termodinamico di riferimento della corrente. È immediato osservare che l'equazione di continuità della massa si riduce al vincolo di incomprimibilità quando il numero di Mach assume valori ridotti (e il campo di pressione non ha variazioni rapide).

2.4 Equazioni di Navier–Stokes in sistemi di riferimento non inerziali

Equazioni di Navier–Stokes

In un sistema di riferimento inerziale¹ le equazioni di Navier–Stokes governano la dinamica di una corrente incomprimibile di un fluido a proprietà costanti

$$\begin{cases} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

¹ Per noi, un **sistema di riferimento inerziale** è un sistema di riferimento rispetto al quale le equazioni della fisica assumono la loro forma più semplice, senza che compaiano termini di trascinamento, come ad esempio i termini di Coriolis.

dove l'operatore di derivata materiale applicata al campo di velocità coincide con il campo di accelerazione delle particelle,

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} . \quad (2.17)$$

Cinematica relativa

Sia dato un sistema di riferimento ortonormale inerziale I e un sistema di riferimento non inerziale J , con origine O_I e O_J rispettivamente. La velocità e l'accelerazione di O_J definite nel sistema di riferimento inerziale sono \mathbf{u}_{O_J} , \mathbf{a}_{O_J} , mentre vengono indicate con $\boldsymbol{\Omega}_{J/I}$ e $\boldsymbol{\alpha}_{J/I}$ la velocità e l'accelerazione angolare del sistema di riferimento J rispetto al sistema I . Si può esprimere la posizione di un punto P nel sistema di riferimento I come

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O_J} + \mathbf{r}^J , \quad (2.18)$$

avendo indicato ... Dalla derivata temporale della posizione di P , si ottiene la velocità

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{O_J} + \mathbf{u}^J + \boldsymbol{\Omega}_{J/I} \times \mathbf{r}^J , \quad (2.19)$$

avendo indicato ... Dalla derivata temporale della velocità di P , si ottiene l'accelerazione

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{O_J} + \mathbf{a}^J + \boldsymbol{\alpha}_{J/I} \times \mathbf{r}^J + 2 \boldsymbol{\Omega}_{J/I} \times \mathbf{u}^J + \boldsymbol{\Omega}_{J/I} \times (\boldsymbol{\Omega}_{J/I} \times \mathbf{r}^J) , \quad (2.20)$$

avendo indicato ...

Equazioni di Navier–Stokes in un sistema di riferimento non inerziale

Si possono quindi riscrivere le equazioni di Navier–Stokes, utilizzando le grandezze cinematiche riferite al sistema di riferimento non inerziale, mettendo in evidenza i contributi non inerziali e lasciando cadere i pedici J/I della velocità e dell'accelerazione angolare

$$\begin{cases} \rho \mathbf{a}^J = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \\ \quad - \rho [\mathbf{a}_{O_J} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}^J + 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}^J + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^J)] , \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \end{cases} \quad (2.21)$$

In questa espressione delle equazioni compare ancora la velocità \mathbf{u} riferita al sistema di riferimento inerziale, nel contributo viscoso della quantità di moto e nel vincolo di incompatibilità. Per riportartici a un'espressione delle equazioni di Navier–Stokes dove compaiano solo grandezze cinematiche riferite al sistema non inerziale, utilizziamo le formule (2.18, 2.19) nel laplaciano e nella divergenza di \mathbf{u} , ricordando che la velocità $\mathbf{u}_{O_J}(t)$ dell'origine e la velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}(t)$ del sistema non inerziale sono solo funzioni del tempo che non dipendono dallo spazio, e che quindi le loro derivate spaziali sono nulle. La divergenza della velocità diventa quindi

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \nabla \cdot (\mathbf{u}_{O_J} + \mathbf{u}^J + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^J) \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{u}^J + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O_J})) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Il termine $\nabla \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{O_J})$ è nullo poiché il contenuto della parentesi non dipende dallo spazio, ma solo dal tempo. Anche il termine $\nabla \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ risulta nullo, come si può dimostrare facilmente utilizzando un sistema di coordinate ortogonali e i simboli di Ricci per esprimere

il prodotto vettoriale,²

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \partial_i (\epsilon_{ijk} \Omega_j r_k) = \epsilon_{ijk} \Omega_j \partial_i r_k = \epsilon_{ijk} \Omega_j \delta_{ik} = \epsilon_{iji} \Omega_j = 0 , \quad (2.24)$$

poiché i simboli di Ricci con indici ripetuti sono identicamente nulli. Di conseguenza, la divergenza del campo di velocità \mathbf{u}^J riferito al sistema di riferimento non inerziale è uguale alla divergenza del campo di velocità \mathbf{u} riferito al sistema di riferimento inerziale,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}^J . \quad (2.25)$$

Non dovrebbe essere difficile trovare l'espressione del laplaciano, una volta osservato il grado della dipendenza dallo spazio nell'espressione (2.18): il termine \mathbf{u}_{O_J} non dipende dallo spazio, mentre il termine $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^J = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O_J})$ ha una dipendenza *affine* (e non *lineare*, poiché c'è un termine costante) dalla posizione nello spazio. Ricordandosi che il laplaciano è la somma delle derivate spaziali del secondo ordine (in un sistema di coordinate cartesiane), dovrebbe essere chiaro che il laplaciano di questi due termini è nullo e che quindi vale,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \Delta (\mathbf{u}_{O_J} + \mathbf{u}^J + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^J) = \\ &= \Delta (\mathbf{u}_{O_J} + \mathbf{u}^J + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O_J})) = \Delta \mathbf{u}^J \end{aligned} \quad (2.26)$$

Utilizzando le due relazioni ottenute per la divergenza e il laplaciano del campo di velocità, si può ora riscrivere le equazioni di Navier–Stokes riferite a un sistema di riferimento non inerziale, utilizzando unicamente le grandezze cinematiche relative a questo sistema di riferimento,

$$\begin{cases} \rho \mathbf{a}^J = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}^J + \\ \quad - \rho [\mathbf{a}_{O_J} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}^J + 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}^J + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^J)] , \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^J = 0 . \end{cases} \quad (2.27)$$

Alcune osservazioni sulla natura tensoriale delle equazioni

Tranne le grandezze cinematiche che descrivono il moto del sistema di riferimento non inerziale e le grandezze cinematiche che descrivono il moto del fluido relativo a questo sistema di riferimento, tutti gli oggetti che compaiono nelle equazioni vettoriali sono indipendenti dal sistema di riferimento utilizzato per descrivere il problema. In una notazione vettoriale ha quindi poco senso indicare in maniera diversa questi termini, a partire dagli operatori differenziali.

TODO: Relazione tra le coordinate e tra i vettori delle basi ortogonali

TODO: Variabili indipendenti delle funzioni

TODO: Calcolo in componenti del gradiente e del laplaciano “espressi nel sistema di riferimento non inerziale”

² Chi non ci crede, o non è familiare con i simboli di Ricci, può calcolare il prodotto vettoriale $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ utilizzando un sistema cartesiano

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = (\Omega_y z - \Omega_z y) \hat{\mathbf{x}} + (\Omega_z x - \Omega_x z) \hat{\mathbf{y}} + (\Omega_x y - \Omega_y x) \hat{\mathbf{z}} , \quad (2.23)$$

e verificare immediatamente che $\nabla \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = 0$, poiché nessuna componente del vettore dipende dalla coordinata spaziale corrispondente.

2.4.1 Equazioni in forma adimensionale

Si ricava ora la forma adimensionale delle equazioni, in un sistema di riferimento con origine fissa, $\mathbf{u}_{O_J} = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}_{O_J} = \mathbf{0}$, e in rotazione con velocità angolare costante, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$,

$$\begin{cases} \rho \mathbf{a}^J = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}^J - 2 \rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}^J - \rho \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^J) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^J = 0 . \end{cases} \quad (2.28)$$

Lasciamo cadere l'apice J su tutte le grandezze cinematiche relative al sistema di riferimento non inerziale. Aggiungendo il modulo Ω della velocità angolare del sistema di riferimento, $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\boldsymbol{\Omega}}$, alle grandezze di riferimento $(\tilde{\rho}, \tilde{U}, \tilde{L})$, usate per creare anche le scale *non indipendenti* di tempo $\tilde{T} = \tilde{L}/\tilde{U}$, di accelerazione $\tilde{A} = \tilde{U}^2/\tilde{L}$ e di pressione $\tilde{p} = \tilde{\rho}\tilde{U}^2$, si può scrivere

$$\frac{\rho \tilde{U}^2}{\tilde{L}} \mathbf{a}^* = \rho g \hat{\mathbf{g}} - \frac{\tilde{\rho} \tilde{U}^2}{\tilde{L}} \nabla^* p^* + \frac{\mu \tilde{U}}{\tilde{L}^2} \Delta^* \mathbf{u}^* - 2\rho \Omega \tilde{U} \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{u}^* + \rho \Omega^2 \tilde{L} \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times (\hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}^*) , \quad (2.29)$$

e, dividendo tutti i termini per $\rho \tilde{U}^2/\tilde{L}$,

$$\mathbf{a}^* = \frac{g \tilde{L}}{\tilde{U}^2} \hat{\mathbf{g}} - \nabla^* p^* + \frac{\mu}{\rho \tilde{U} \tilde{L}} \Delta^* \mathbf{u}^* - 2 \frac{\Omega \tilde{L}}{\tilde{U}} \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{u}^* + \frac{\Omega^2 \tilde{L}^2}{\tilde{U}^2} \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times (\hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}^*) , \quad (2.30)$$

si possono riconoscere i numeri adimensionali caratteristici del problema,

- il numero di Reynolds $Re = \frac{\rho \tilde{U} \tilde{L}}{\mu}$, che rappresenta il rapporto tra gli effetti inerziali e gli effetti viscosi;
 - il numero di Froude, $Fr = \frac{\tilde{U}^2}{g \tilde{L}}$, che rappresenta il rapporto tra gli effetti inerziali e quelli legati al campo di forze di volume (ad esempio, gli effetti gravitazionali se \mathbf{g} è il campo di forze gravitazionale);
 - il numero di Rossby, $Ro = \frac{\tilde{U}}{\Omega \tilde{L}}$ rappresenta il rapporto tra gli effetti inerziali e gli effetti “di trascinamento” dovuti al moto del sistema di riferimento non inerziale;
- e riscrivere le equazioni in forma adimensionale,

$$\begin{cases} \mathbf{a}^* = \frac{1}{Fr} \hat{\mathbf{g}} - \nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \Delta^* \mathbf{u}^* - \frac{2}{Ro} \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{u}^* + \frac{1}{Ro^2} \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times (\hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}^*) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0 . \end{cases} \quad (2.31)$$

TODO. Utilizzando il valore della velocità angolare della Terra, $\Omega_T = 7.27 \cdot 10^{-5} s^{-1}$, è possibile valutare gli effetti di Coriolis sul moto di una corrente e riconoscere la scala di tempo $\tilde{L}/\tilde{U} \sim 1/\Omega$ dei fenomeni fisici per i quali gli effetti di Coriolis sono rilevanti.³

2.5 Equazioni di Boussinesq e numeri di Prandtl, Rayleigh e Grashof

2.5.1 Equazioni di Boussinesq

Le equazioni di Boussinesq sono un modello approssimato delle equazioni complete del moto dei fluidi, ricavato sotto le ipotesi che:

- il contributo di dissipazione nell’equazione dell’energia sia trascurabile;

³ La scala dei tempi deve essere circa uguale all’ inverso della velocità angolare del sistema non inerziale, $\tilde{L}/\tilde{U} \sim 1/\Omega$, affinché il numero di Rossby sia circa uguale a 1 e che quindi i termini di “trascinamento” siano dello stesso ordine dei termini di pressione. Se il numero di Rossby è molto maggiore di 1 gli effetti non inerziali saranno irrilevanti, mentre se il numero di Rossby è molto minore di 1, il problema sarà dominato da tali effetti.

- la densità dipenda linearmente dalla temperatura nel termine di forze di volume nell'equazione della quantità di moto.

La variazione della densità in funzione della densità diventa quindi

$$d\rho(P, T) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T dP + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P dT \approx \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P dT = -\rho_0 \alpha dT \quad (2.32)$$

$$\rightarrow \rho = \rho_0 (1 - \alpha (T - T_0)) , \quad (2.33)$$

dove le derivate sono calcolate nello stato termodinamico di riferimento, (ρ_0, T_0) , ed è stato introdotto il coefficiente di dilatazione termica

$$\alpha = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P . \quad (2.34)$$

Introducendo le approssimazioni elencate, l'espressione dell'energia interna $e = c_v T$ e la legge di Fourier per il flusso di calore per conduzione, $\mathbf{q} = -k \nabla T$, nelle equazioni complete per una corrente incompressibile di un fluido newtoniano,

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla P = \rho \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla e = 2\mu \mathbb{D} : \mathbb{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} , \end{cases} \quad (2.35)$$

si ottengono le equazioni di Boussinesq

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P = (1 - \alpha(T - T_0)) \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = D \nabla^2 T , \end{cases} \quad (2.36)$$

avendo definito il coefficiente di diffusione termica $D = \frac{k}{\rho_0 c_v}$.

2.5.2 Equazioni di Boussinesq: problema bidimensionale tra due superfici piane

Condizioni al contorno

Si considera ora la corrente che si sviluppa tra due superfici piane orizzontali infinite, a distanza h l'una dall'altra, mantenute a temperatura costante: la temperatura vale T_w sulla superficie inferiore e T_c sulla superficie superiore. Viene definita la differenza di temperatura $\Delta T = T_w - T_c$.

Se le due superfici considerate sono superfici solide, la velocità su di esse è nulla. Se le due superfici sono superfici "libere" (di simmetria, a sforzo nullo) si annulla la derivata normale della velocità. Prendendo un sistema di assi ortogonali, con l'origine in corrispondenza della superficie inferiore, con l'asse x parallelo e l'asse z perpendicolare alla superficie, si possono riassumere così le condizioni al contorno,

$$\text{wall: } \begin{cases} T(x, z=0) = T_w \\ T(x, z=h) = T_c \\ \mathbf{u}(x, z=0) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}(x, z=h) = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{free: } \begin{cases} T(x, z=0) = T_w , \quad T(x, z=h) = T_c \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x, z=0) = 0 , \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, z=h) = 0 \\ w(x, z=0) = 0 , \quad w(x, z=h) = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

Non ci sono condizioni al contorno in x , poiché la direzione è omogenea. Considereremo qui solo il problema con le condizioni al contorno "free".

Soluzione stazionaria non convettiva

Esiste una soluzione stazionaria ($\partial/\partial t = 0$) del problema con fluido in quiete ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$). Il vincolo di incompressibilità è soddisfatto identicamente. Sfruttando l'omogeneità della direzione x , la soluzione stazionaria indipendente dalla coordinata x soddisfa le equazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_0} \frac{dP}{dz} = \alpha g(T - T_0) \\ \frac{d^2T}{dz^2} = 0 , \end{cases} \quad (2.38)$$

dotate delle opportune condizioni al contorno. La soluzione stazionaria del problema è

$$\begin{cases} \bar{T}(z) = T_w + (T_c - T_w) \frac{z}{h} = T_w - \Delta T \frac{z}{h} \\ \bar{P}(z) = P_w + \alpha \rho_0 g \left[(T_w - T_0)z - \frac{1}{2} \Delta T \frac{z^2}{h} \right] , \end{cases} \quad (2.39)$$

avendo indicato con P_w il valore della pressione in corrispondenza della superficie inferiore a $z = 0$.

Equazione delle fluttuazioni

Viene definita la fluttuazione di temperatura $\tau(x, z)$,

$$\begin{aligned} \tau(x, z) &= T(x, z) - \bar{T}(z) = T(x, z) - T_w + \Delta T \frac{z}{h} \\ \rightarrow \quad T(x, z) - T_w &= \tau(x, z) - \Delta T \frac{z}{h} . \end{aligned} \quad (2.40)$$

Scegliendo la superficie inferiore a $z = 0$ per definire la condizione termodinamica di riferimento, $T_0 = T_w$. le equazioni di Boussinesq diventano

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P = \left(1 - \alpha \tau + \Delta T \frac{z}{h} \right) \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau + w \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = D \nabla^2 \tau . \end{cases} \quad (2.41)$$

Inoltre è possibile raccogliere il primo e il terzo termine delle forze di galleggiamento sotto lo stesso operatore di gradiente che opera sul campo di pressione. Infatti, è possibile scrivere il termine di galleggiamento come

$$\left(1 - \alpha \tau + \Delta T \frac{z}{h} \right) \mathbf{g} = \alpha \tau g \hat{\mathbf{z}} - \nabla \left(g z + \Delta T \frac{z^2}{2h} \right) . \quad (2.42)$$

Definendo una “pressione generalizzata” P' ,

$$P' = P + \rho_0 g z + \rho_0 \Delta T \frac{z^2}{2h} , \quad (2.43)$$

le equazioni di Boussinesq diventano

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P' = \alpha g \tau \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau - \frac{\Delta T}{h} w = D \nabla^2 \tau , \end{cases} \quad (2.44)$$

e le condizioni al contorno della temperatura vengono espresse anch'esse in funzione di τ ,

$$\tau(x, z = 0) = \tau(x, z = h) = 0 . \quad (2.45)$$

	\mathbf{x}	t	\mathbf{u}	τ	P'	ρ_0	ν	D	α	g	h	ΔT
M					1	1						
L	1	1		-1	-3	2	2			1	1	
T		1	-1		-2		-1	-1			-2	
Θ				1					-1			1

Tabella 2.2: Teorema di Buckingham. Grandezze dimensionali e unità fisiche.

2.5.3 Equazioni di Boussinesq in forma adimensionale

Si ricava la forma adimensionale delle equazioni (2.44) e delle condizioni al contorno (2.45) utilizzando il teorema π di Buckingham.

Nel problema di Boussinesq compaiono 12 grandezze dimensionali (13 se si volesse considerare la componente w della velocità \mathbf{u} in maniera indipendente),

$$\underbrace{\mathbf{x}, t}_{\text{tar. indip. campi } f(\mathbf{x},t)} \ , \ \underbrace{\mathbf{u}, \tau, P'}_{\text{propr. del fluido e del problema}} \ , \ \underbrace{\rho_0, \nu, D, \alpha, g}_{\text{dominio e condizioni al contorno}} \ , \ \underbrace{h, \Delta T}_{\text{dominio e condizioni al contorno}} \ , \quad (2.46)$$

e 4 grandezze fisiche fondamentali: massa M , lunghezza L , tempo T e temperatura Θ . Secondo il teorema di Buckingham, il problema può quindi essere caratterizzato da 8 numeri adimensionali. Utilizzando la stessa scala di lunghezze per adimensionalizzare \mathbf{x} e h e la stessa scala di temperature per adimensionalizzare τ e ΔT , sono sufficienti 6 numeri adimensionali.

È necessario scegliere 4 grandezze fisiche di riferimento indipendenti e, possibilmente, rappresentative del problema con le quali adimensionalizzare le altre. Il problema della convezione non forzata descritto dalle equazioni di Boussinesq è caratterizzato dalla differenza di temperatura ΔT e dalla distanza h delle superfici, dal fluido considerato e dall'intensità delle forze di volume. I campi di velocità \mathbf{u} , di “temperatura” τ e di “pressione” P' sono un risultato, una conseguenza, delle condizioni al contorno e del fluido impiegato: non esistono scale di velocità e pressione indipendenti, mentre il campo di temperatura può essere scalato sulla differenza ΔT . Non esiste nemmeno una scala indipendente dei tempi, poiché l’evoluzione del sistema è determinata dalle condizioni al contorno e dal fluido utilizzato.

Come grandezze dimensionali di riferimento indipendenti e caratteristiche del problema vengono scelte la densità del fluido, il coefficiente di diffusione termica, la distanza tra le superfici e la loro differenza di temperatura:

$$\tilde{\rho} = \rho_0, \quad \tilde{D} = D, \quad \tilde{L} = h, \quad \tilde{\Theta} = \Delta T . \quad (2.47)$$

Ora è possibile scrivere ogni grandezza dimensionale come prodotto di una grandezza omogenea di riferimento (dimensionale) e del suo valore adimensionale. Si può quindi scrivere,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \tilde{L}\mathbf{x}^* \ , \quad t = \tilde{T}t^* \\ \mathbf{u} &= \tilde{U}\mathbf{u}^* \ , \quad \tau = \tilde{\Theta}\tau^* \ , \quad P' = \tilde{P}P^{*'} \\ \rho_0 &= \tilde{\rho}\rho_0^* \ , \quad \nu = \tilde{\nu}\nu^* \ , \quad D = \tilde{D}D^* \ , \quad \alpha = \tilde{\alpha}\alpha^* \ , \quad g = \tilde{g}g^* \\ h &= \tilde{L}h^* \ , \quad \Delta T = \tilde{\Theta}\Delta T^* , \end{aligned} \quad (2.48)$$

avendo utilizzato la stessa scala di lunghezza \tilde{L} come riferimento per la coordinata spaziale indipendente \mathbf{x} e la distanza h tra le due superfici, e la stessa scala di temperatura $\tilde{\Theta}$

come riferimento per il campo di temperatura τ e la differenza di temperatura tra le due superfici ΔT , come anticipato in precedenza. Le 12 grandezze dimensionali sono state adimensionalizzate usando 10 scale di riferimento: da queste è possibile ricavare 6 numeri adimensionali con cui descrivere il problema. Inserendo le espressioni (2.48) nel problema di Boussinesq (2.44), si ricava

$$\begin{cases} \frac{\tilde{U}}{\tilde{T}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\tilde{U}^2}{\tilde{L}} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \frac{\tilde{\nu} \tilde{U}}{\tilde{L}^2} \nu^* \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho} \tilde{L}} \frac{1}{\rho_0^*} \nabla P^{*'} = \tilde{\alpha} \tilde{g} \tilde{\theta} \alpha^* g^* \tau^* \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\tilde{U}}{\tilde{L}} \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \\ \frac{\tilde{\Theta}}{\tilde{T}} \frac{\partial \tau^*}{\partial t^*} + \frac{\tilde{U} \tilde{\Theta}}{\tilde{L}} \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \tau^* - \frac{\tilde{U} \tilde{\Theta}}{\tilde{L}} \frac{\Delta T^*}{h^*} w^* = \frac{\tilde{D} \tilde{\Theta}}{\tilde{L}^2} D^* \nabla^{*2} \tau^*, \end{cases} \quad (2.49)$$

con le condizioni al contorno “free”

$$\text{free: } \begin{cases} \tilde{\Theta} \tau^* (\tilde{L} x^*, \tilde{L} z^* = 0) = 0 & , \quad \tilde{\Theta} \tau^* (\tilde{L} x^*, \tilde{L} z^* = \tilde{L} h^*) = 0 \\ \frac{\tilde{U}}{\tilde{L}} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} (\tilde{L} x^*, \tilde{L} z^* = 0) = 0 & , \quad \frac{\tilde{U}}{\tilde{L}} \frac{\partial u}{\partial z^*} (\tilde{L} x^*, \tilde{L} z^* = \tilde{L} h^*) = 0 \\ \tilde{U} w^* (\tilde{L} x^*, \tilde{L} z^* = 0) = 0 & , \quad \tilde{U} w^* (\tilde{L} x^*, \tilde{L} z^* = \tilde{L} h^*) = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

Con un abuso di notazione, d’ora in poi si indicano le grandezze adimensionali senza asterisco e i campi adimensionali vengono definiti come funzione delle variabili indipendenti adimensionali,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{U} \mathbf{u}^*(\tilde{L} x^*, \tilde{T} t^*) \rightarrow \tilde{U} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (2.51)$$

Le grandezze di riferimento delle grandezze costanti vengono scelte coincidenti con la grandezza stessa, cosicché le grandezze adimensionali relative sono uguali a 1,

$$\begin{cases} \rho_0 = \tilde{\rho} & , \quad \nu = \tilde{\nu} & , \quad D = \tilde{D} & , \quad \alpha = \tilde{\alpha} & , \quad g = \tilde{g} \\ h = \tilde{L} & , \quad \Delta T = \tilde{\Theta} & . \end{cases} \quad (2.52)$$

Dividendo l’equazione della quantità di moto per $\tilde{\nu} \tilde{U} / \tilde{L}^2$, il vincolo di incompressibilità per \tilde{U} / \tilde{L} e l’equazione dell’energia per $\tilde{D} \tilde{\Theta} / \tilde{L}^2$, il problema di Boussinesq diventa

$$\begin{cases} \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{\nu} \tilde{T}} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\tilde{U} \tilde{L}}{\tilde{\nu}} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{\tilde{P} \tilde{L}}{\tilde{\rho} \tilde{\nu} \tilde{U}} \nabla P^{*'} = \frac{\tilde{\alpha} \tilde{g} \tilde{\Theta} \tilde{L}^2}{\tilde{\nu} \tilde{U}} \tau^* \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \\ \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{D} \tilde{T}} \frac{\partial \tau^*}{\partial t^*} + \frac{\tilde{U} \tilde{L}}{\tilde{D}} \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \tau^* - \frac{\tilde{U} \tilde{L}}{\tilde{D}} w^* = \nabla^{*2} \tau^*, \end{cases} \quad (2.53)$$

con le condizioni al contorno “free”

$$\text{free: } \begin{cases} \tau^*(x^*, z^* = 0) = 0 & , \quad \tau^*(x^*, z^* = 1) = 0 \\ \frac{\partial u^*}{\partial z^*}(x^*, z^* = 0) = 0 & , \quad \frac{\partial u}{\partial z^*}(x^*, z^* = 1) = 0 \\ w^*(x^*, z^* = 0) = 0 & , \quad w^*(x^*, z^* = 1) = 0. \end{cases} \quad (2.54)$$

Nel problema (2.53-2.54) compaiono 6 numeri adimensionali. Siamo arrivati al risultato previsto dal teorema di Buckingham. Prima di andare avanti, conviene comunque fare un’osservazione. Solo 5 dei 6 numeri adimensionali trovati sono tra di loro indipendenti: in particolare solo 3 dei 4 numeri adimensionali

$$\pi_1 = \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{D} \tilde{T}}, \quad \pi_2 = \frac{\tilde{U} \tilde{L}}{\tilde{D}}, \quad \pi_3 = \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{\nu} \tilde{T}}, \quad \hat{\pi}_4 = \frac{\tilde{U} \tilde{L}}{\tilde{\nu}} = \pi_2 \frac{\pi_3}{\pi_1} \quad (2.55)$$

sono linearmente indipendenti. Sembra di aver commesso un errore poiché abbiamo trovato una contraddizione del teorema di Buckingham. L'apparente errore si nasconde nel termine adimensionale $\frac{\tilde{\alpha}\tilde{g}\tilde{\theta}\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{U}}$. Questo termine infatti è il prodotto dei numeri adimensionali $\tilde{\alpha}\tilde{\theta}$ e $\frac{\tilde{g}\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{U}}$. I sei numeri adimensionali indipendenti che caratterizzano il problema sono quindi

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{D}\tilde{T}} , \quad \pi_2 = \frac{\tilde{U}\tilde{L}}{\tilde{D}} , \quad \pi_3 = \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{T}} \\ \pi_4 &= \frac{\tilde{P}\tilde{L}}{\tilde{\rho}\tilde{\nu}\tilde{U}} , \quad \pi_5 = \tilde{\alpha}\tilde{\Theta} , \quad \pi_6 = \frac{\tilde{g}\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{U}} .\end{aligned}\quad (2.56)$$

Poiché il coefficiente di dilatazione termica α e la forza per unità di volume g compiono sempre attraverso il loro prodotto, questo si può considerare come un'unica variabile, αg . In questo caso, i 5 numeri adimensionali che descrivono il problema composto dalle 9 (10-1) scale di riferimento sono

$$\pi'_1 = \pi_1, \quad \pi'_2 = \pi_2, \quad \pi'_3 = \pi_3, \quad \pi'_4 = \pi_4, \quad \pi'_5 = \pi_5\pi_6 . \quad (2.57)$$

Non essendoci scale di velocità, tempo e pressione indipendenti, è possibile definire queste scale a partire dalle 4 grandezze fisiche di riferimento \tilde{L} , $\Delta\tilde{T}$, $\tilde{\rho}$, \tilde{D} , imponendo il valore unitario di alcuni parametri adimensionali,

$$\begin{aligned}\pi'_1 &= 1 \quad \rightarrow \quad \tilde{T} = \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{D}} \\ \pi'_2 &= 1 \quad \rightarrow \quad \tilde{U} = \frac{\tilde{D}}{\tilde{L}} \\ \pi'_4 &= 1 \quad \rightarrow \quad \tilde{P} = \frac{\tilde{\rho}\tilde{\nu}\tilde{U}}{\tilde{L}} .\end{aligned}\quad (2.58)$$

Gli unici due parametri adimensionali caratteristici del problema rimangono

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \pi'_3 = \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{L}^2/\tilde{D}} \quad \rightarrow \quad \Pi_1 = \frac{\tilde{D}}{\tilde{\nu}} = \frac{1}{Pr} \\ \Pi_5 &= \pi'_5 = \frac{\tilde{\alpha}\tilde{\Theta}\tilde{g}\tilde{L}^2}{\tilde{\nu}\tilde{D}/\tilde{L}} \quad \rightarrow \quad \Pi_5 = \frac{\tilde{\alpha}\tilde{g}\tilde{\Theta}\tilde{L}^3}{\tilde{\nu}\tilde{D}} = Ra = \\ &\quad = \frac{\tilde{\alpha}\tilde{g}\tilde{\Theta}\tilde{L}^3}{\tilde{\nu}^2} \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{D}} = Gr\,Pr ,\end{aligned}\quad (2.59)$$

nei quali si possono riconoscere i numeri di Prandtl, Pr , di Rayleigh, Ra , e di Grashof, Gr . La forma adimensionale del problema di Boussinesq tra due superfici piane è quindi

$$\begin{cases} \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] - \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla P' = Ra \tau \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau - w = \nabla^2 \tau , \end{cases} \quad (2.60)$$

con le condizioni al contorno “free”

$$\text{free: } \begin{cases} \tau(x, z=0) = 0 & , \quad \tau(x, z=1) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x, z=0) = 0 & , \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, z=1) = 0 \\ w(x, z=0) = 0 & , \quad w(x, z=1) = 0 . \end{cases} \quad (2.61)$$

2.5.4 Equazione della vorticità e funzione di corrente nell'approssimazione di Boussinesq

Dall'equazione della quantità di moto in (2.60) è possibile ricavare l'equazione della vorticità, applicandole l'operatore di rotore. Poichè il problema è piano e bidimensionale, il campo di vorticità ha componente non nulla solo fuori dal piano xz . Utilizzando un sistema di coordinate cartesiano, il campo di vorticità $\boldsymbol{\omega}(x, z, t) = \xi(x, z, t)\hat{y}$ soddisfa l'equazione

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \xi \right] - \nabla^2 \xi = -Ra \frac{\partial \tau}{\partial x} . \quad (2.62)$$

Si può poi introdurre la funzione di corrente ψ ,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} , \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} , \quad (2.63)$$

in modo tale da soddisfare identicamente il vincolo di incompatibilità. La componente y del campo di vorticità diventa

$$\xi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \nabla^2 \psi , \quad (2.64)$$

e il termine advettivo di una funzione f qualsiasi può essere scritta come un determinante,

$$\mathbf{u} \cdot \nabla f = u \frac{\partial f}{\partial x} + w \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} = \begin{vmatrix} f_x & f_z \\ \psi_x & \psi_z \end{vmatrix} =: \frac{\partial(f, \psi)}{\partial(x, z)} . \quad (2.65)$$

Il sistema di equazioni del problema di Boussinesq diventa quindi

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial(\xi, \psi)}{\partial(x, z)} = Pr \nabla^2 \xi - Pr Ra \frac{\partial \tau}{\partial x} \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial(\tau, \psi)}{\partial(x, z)} = \nabla^2 \tau + w . \end{cases} \quad (2.66)$$

2.5.5 Approssimazione di Fourier–Galerkin del problema di Boussinesq

Utilizzando la geometria del dominio, è possibile espandere le funzioni che compaiono nelle equazioni (2.66) come somma di prodotti di funzioni armoniche in x e z , la cui ampiezza dipende dal tempo

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= \sum_m \sum_k a_{m,k}(t) \sin(m\pi z + \phi_m^a) \sin(k\pi x + \phi_k^a) \\ \tau(x, z, t) &= \sum_m \sum_k b_{m,k}(t) \sin(m\pi z + \phi_m^b) \sin(k\pi x + \phi_k^b) . \end{aligned} \quad (2.67)$$

Le condizioni al contorno (2.61) del problema con due superfici infinite “free” impongono che la componente $w = -\partial \psi / \partial x$ e la derivata $\partial u / \partial z = \partial^2 \psi / \partial z^2$ siano nulle per $z = 0, 1$ per ogni istante temporale e per ogni valore di x . Le condizioni al contorno su w impongono le seguenti condizioni sull'espansione armonica delle funzioni,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{z=0} = \sum_m \sum_k k\pi a_{m,k}(t) \sin \phi_m^a \cos(k\pi x + \phi_k^a) \\ &\quad \rightarrow \quad \phi_m^a = 0 , \\ 0 &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{z=1} = \sum_m \sum_k k\pi a_{m,k}(t) \sin m\pi \cos(k\pi x + \phi_k^a) \\ &\quad \rightarrow \quad m \in \mathbb{Z} . \end{aligned} \quad (2.68)$$

Le stesse condizioni derivano dalle condizioni al contorno su $\partial u / \partial z$. Le condizioni al contorno sulla temperatura in impongono le seguenti condizioni sull'espansione armonica della funzione τ

$$\begin{aligned} 0 = \tau|_{z=0} &= \sum_m \sum_k b_{m,k}(t) \sin \phi_m^b \sin(k\pi x + \phi_k^b) \\ &\rightarrow \quad \phi_m^b = 0 , \\ 0 = \tau|_{z=1} &= \sum_m \sum_k b_{m,k}(t) \sin m\pi \sin(k\pi x + \phi_k^b) \\ &\rightarrow \quad m \in \mathbb{Z} . \end{aligned} \quad (2.69)$$

A causa dell'omogeneità della direzione x , nella quale il dominio è infinito, non ci sono condizioni sul numero d'onda k , che può assumere tutti i valori $\in \mathbb{R}$, e sulla fase delle armoniche in x . Le espansioni (2.67) possono quindi essere scritte come

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_k a_{m,k}^1(t) \sin(m\pi z) \sin(k\pi x) + a_{m,k}^2(t) \sin(m\pi z) \cos(k\pi x) \\ \tau(x, z, t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_k b_{m,k}^1(t) \sin(m\pi z) \sin(k\pi x) + b_{m,k}^2(t) \sin(m\pi z) \cos(k\pi x) . \end{aligned} \quad (2.70)$$

2.5.6 Dal problema di Boussinesq al modello di Lorenz

Le espansioni (2.70) possono essere *brutalmente* troncate per ottenere un modello dinamico di dimensione $N_d = 3$ partendo dal modello continuo, che ha dimensione infinita. Le espansioni (2.70) vengono troncate mantenendo solo 3 termini

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= a(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x) \\ \tau(x, z, t) &= b(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x) + c(t) \sin(2\pi z) , \end{aligned} \quad (2.71)$$

avendo definito $a(t) = a_{1,k}^1(t)$, $b(t) = b_{1,k}^2(t)$, $c(t) = b_{2,0}^1(t)$. Usando le espansioni (2.71), la componente y del campo di vorticità $\xi = \nabla^2 \psi$ diventa

$$\xi = -\pi^2(1+k^2)\psi = -\pi^2(1+k^2)a(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x) \quad (2.72)$$

I due determinanti che compaiono nelle equazioni (2.66) valgono

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\xi, \psi)}{\partial(x, z)} &= \left[-\pi^3 k (1+k^2) a(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x) \right] [a(t)\pi \cos(\pi z) \sin(k\pi x)] + \\ &- \left[-\pi^3 (1+k^2) a(t) \cos(\pi z) \sin(k\pi x) \right] [a(t)\pi k \sin(\pi z) \cos(k\pi x)] = 0 , \end{aligned} \quad (2.73)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\tau, \psi)}{\partial(x, z)} &= [-\pi k b(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x)] [a(t)\pi \cos(\pi z) \sin(k\pi x)] + \\ &- [\pi b(t) \cos(\pi z) \cos(k\pi x) + 2\pi c(t) \cos(2\pi z)] [a(t)\pi k \sin(\pi z) \cos(k\pi x)] = \\ &= -k\pi^2 a(t) b(t) \frac{\sin(2\pi z)}{2} - 2k\pi^2 a(t) c(t) \sin(\pi z) \cos(2\pi z) \cos(k\pi x) . \end{aligned} \quad (2.74)$$

I laplaciani che compaiono nelle equazioni (2.66) valgono

$$\nabla^2 \xi = -\pi^2(1+k^2)\xi = \pi^4(1+k^2)^2 a(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x) , \quad (2.75)$$

e

$$\nabla^2 \tau = -\pi^2(1+k^2)b(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x) - 4\pi^2 c(t) \sin(2\pi x). \quad (2.76)$$

Il numero di Prantl viene indicato come $Pr = \sigma$, il numero di Rayleigh come $Ra = R$. Inserendo le espansioni (2.71) all'interno delle equazioni (2.66), il problema troncato di Boussinesq diventa,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sigma\pi^2(1+k^2)\dot{a}(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x) = \sigma\pi^4(1+k^2)^2 a(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x) + \\ \quad + \sigma R \pi k b(t) \sin(\pi z) \sin(k\pi x) \\ \dot{b}(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x) + \dot{c}(t) \sin(2\pi x) + \\ \quad - k\pi^2 a(t) b(t) \frac{\sin(2\pi z)}{2} - 2k\pi^2 a(t) c(t) \sin(\pi z) \cos(2\pi z) \cos(k\pi x) = \\ = -\pi^2(1+k^2)b(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x) - 4\pi^2 c(t) \sin(2\pi x) + \\ \quad - \pi k a(t) \sin(\pi z) \cos(k\pi x). \end{array} \right. \quad (2.77)$$

Raccogliendo il termine $\sin(\pi z) \sin(k\pi x)$ nell'equazione della vorticità si ottiene l'equazione

$$-\pi^2(1+k^2)\dot{a} = \sigma\pi^4(1+k^2)^2 a(t) + \sigma R \pi k b(t). \quad (2.78)$$

L'equazione della temperatura viene "proiettata" sulle funzioni di base $\sin(\pi z) \cos(k\pi x)$ e $\sin(2\pi x)$ e sfruttando l'ortogonalità delle funzioni armoniche. La proiezione consiste nella moltiplicazione dell'equazione per le funzioni di base $\sin(\pi z) \cos(k\pi x)$ e nell'integrazione in $(x, z) \in [0, \frac{2}{k}] \times [0, 1]$. Usando il valore degli integrali,

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{2/k} \sin(k\pi x)^2 dx &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{2/k} [1 - \cos(2k\pi x)] dx = \frac{1}{k} \\ \int_{x=0}^{2/k} \sin(k\pi x) \cos(k\pi x) dx &= \frac{1}{k\pi} \int_{x=0}^{2/k} \sin(k\pi x) d(\sin(k\pi x)) = 0 \\ \int_{x=0}^{2/k} \cos(k\pi x)^2 dx &= \frac{1}{k}, \end{aligned} \quad (2.79)$$

e degli integrali

$$\begin{aligned} \int_{z=0}^1 \sin(\pi z)^2 dz &= \frac{1}{2} \int_{z=0}^1 [1 - \cos(2\pi z)] dz = \frac{1}{2} \\ \int_{z=0}^1 \sin(\pi z) \sin(\pi z) \cos(2\pi z) dz &= \frac{1}{2} \int_{z=0}^1 [1 - \cos(2\pi z)] \cos(2\pi z) dz = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{z=0}^1 \cos^2(2\pi z) dz = -\frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

La proiezione dell'equazione della vorticità sulla funzione $\sin(\pi z) \cos(k\pi x)$ è

$$\frac{1}{2}\dot{b}(t) - \frac{1}{4}2k\pi^2 a(t)c(t) = -\frac{1}{2}\pi^2(1+k^2)b(t) - \frac{1}{2}\pi k a(t), \quad (2.81)$$

mentre la proiezione dell'equazione della vorticità sulla funzione $\sin(2\pi z)$ è

$$\frac{1}{k}\dot{c}(t) - \frac{1}{k}\frac{\pi^2 k}{2}a(t)b(t) = -\frac{1}{k}4\pi^2 c(t). \quad (2.82)$$

Le equazioni diventano quindi

$$\begin{cases} -\pi^2(1+k^2)\dot{a} = \sigma\pi^4(1+k^2)^2a(t) + \sigma R \pi k b(t) \\ \dot{b} = -\pi^2(1+k^2)b(t) + \pi^2 k a(t)c(t) - \pi k a(t) \\ \dot{c} = \frac{\pi^2 k}{2}a(t)b(t) - 4\pi^2 c(t) . \end{cases} \quad (2.83)$$

Partendo da queste equazioni, si introduce qualche cambio di variabile per riportarsi all'espressione classica del sistema di Lorenz. Viene introdotto il tempo $t' = \pi^2(k^2 + 1)t$, cosicché

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{dt'}{dt} \frac{df}{dt'} = \pi^2(k^2 + 1) \frac{df}{dt'} . \quad (2.84)$$

Con un abuso di notazione, d'ora in poi si indica (\cdot) la derivata rispetto a t' . La stessa variabile t' viene indicata con t . Le equazioni diventano

$$\begin{cases} \dot{a}(t) = \sigma a(t) + \sigma R \frac{k}{\pi^3(k^2 + 1)^2} b(t) \\ \dot{b}(t) = -b(t) + \frac{k}{k^2 + 1} a(t)c(t) - \frac{k}{\pi(k^2 + 1)} a(t) \\ \dot{c}(t) = \frac{k}{2(k^2 + 1)} a(t)b(t) - \frac{4}{k^2 + 1} c(t) . \end{cases} \quad (2.85)$$

Viene definito infine il cambio di variabili

$$\begin{cases} X(t) = \frac{k}{\sqrt{2}(k^2 + 1)} a(t) \\ Y(t) = \frac{k}{\sqrt{2}(k^2 + 1)} \left[-\frac{Rk}{\pi^3(k^2 + 1)^2} \right] b(t) \\ Z(t) = \left[-\frac{Rk^2}{\pi^3(k^2 + 1)} \right] c(t) \end{cases} \quad (2.86)$$

che porta alla forma classica del sistema dinamico di Lorenz

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} = -Y + \rho X - XZ \\ \dot{Z} = -\beta Z + XY , \end{cases} \quad (2.87)$$

avendo definito i parametri

$$\rho = \frac{Rk^2}{\pi^4(k^2 + 1)^2} \quad , \quad \beta = \frac{4}{k^2 + 1} . \quad (2.88)$$

2.5.7 Alcuni concetti di stabilità

Prima di indagare il sistema di Lorenz vengono introdotti alcuni concetti utili per studiare la stabilità di un generico sistema dinamico,

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(x(t), t) \quad , \quad x(0) = x_0 . \quad (2.89)$$

Alcuni di questi concetti non sono nuovi; tutte queste definizioni verranno usate (e risulteranno più chiare) nella sezione successiva dedicata al sistema di Lorenz.

Spazio delle fasi e stati di un sistema. Lo spazio delle fasi è uno spazio nel quale i punti rappresentano i possibili stati del sistema. Lo stato di un sistema dinamico è identificato dal valore delle sue variabili di stato, ovvero le variabili che lo descrivono in maniera esaustiva da poterne prevederne l'evoluzione.⁴ L'evoluzione libera di un sistema dinamico viene descritta dalle traiettorie nel suo spazio delle fasi.

Equilibri e cicli limite. Un equilibrio \bar{x} del sistema è una soluzione stazionaria delle equazioni del sistema dinamico, cioè

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\bar{x}) . \quad (2.90)$$

Un ciclo limite di periodo T è una traiettoria periodica del sistema, tale per cui

$$x(t+T) = x(t) \quad , \quad \forall t , \quad (2.91)$$

rappresentata nello spazio delle fasi da un'orbita chiusa (e isolata).

Stabilità alla Lyapunov. Lo studio di stabilità alla Lyapunov riguarda l'evoluzione locale del sistema dinamico con **condizioni iniziali perturbate**. Qualitativamente, un punto di equilibrio è stabile se, partendo da uno stato “vicino” all’equilibrio, lo stato del sistema rimane per sempre “vicino” all’equilibrio. Inoltre, l’equilibrio è asintoticamente stabile se lo stato converge verso il punto di equilibrio, $x \rightarrow \bar{x}$ per $t \rightarrow \infty$.

La stabilità di Lyapunov di un equilibrio può essere indagata attraverso l’analisi degli autovalori del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio.

Stabilità strutturale. La stabilità strutturale considera l’evoluzione del sistema in seguito a perturbazioni del sistema stesso. Un sistema dinamico è strutturalmente stabile se le traiettorie nel suo spazio delle fasi non cambiano qualitativamente: ad esempio, in un sistema strutturalmente stabile alla perturbazione di un parametro, non cambiano il numero dei punti di equilibrio e cicli limite.

2.5.8 Sistema dinamico di Lorenz

In questa sezione si descrive, senza nessuna pretesa di completezza, lo studio di stabilità del sistema dinamico di Lorenz,

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} = -Y + \rho X - XZ \\ \dot{Z} = -\beta Z + XY , \end{cases} \quad (2.92)$$

come primo esempio di studio di stabilità di un sistema fluidodinamico. Si studia la stabilità del sistema di Lorenz al variare del parametro ρ , mantenendo costante il valore dei

⁴Conoscendo lo stato del sistema **con esattezza** è possibile descrivere l’evoluzione libera del sistema, in assenza di perturbazioni e forze esterne. In fondo a questa sezione, sarà più chiara la necessità di conoscere *con esattezza* lo stato iniziale del sistema, per prevederne l’evoluzione.

parametri σ e β . Lorenz usò come valori $\sigma = 10$ e $\beta = 8/3$. Il numero di Prandtl assume un valore paragonabile a quello dell'acqua alla temperatura di $20^\circ C$, che vale circa $Pr \approx 7$. Il numero di Prandtl per l'aria e altri gas vale circa 0.7. Il valore $\beta = 8/3$ corrisponde a un numero d'onda fondamentale in direzione x uguale a $\frac{k}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{\beta} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.3536$.

Punti di equilibrio

I punti di equilibrio del sistema di Lorenz soddisfano le equazioni stazionarie

$$\begin{cases} 0 = -\sigma X + \sigma Y & \rightarrow Y = X \\ 0 = -Y + \rho X - XZ & \searrow \\ 0 = -\beta Z + XY & \rightarrow X^2 = \beta Z \quad \nearrow \end{cases} \rightarrow X[X^2 - (\rho - 1)] = 0 \quad (2.93)$$

L'equazione $X(X^2 - \rho) = 0$ ha una sola soluzione reale se $\rho < 1$, tre soluzioni per $\rho \geq 1$. Quindi per valori di $\rho < 1$ esiste un unico punto di equilibrio,

$$\mathbf{E1}: (\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{Z}_1) = (0, 0, 0). \quad (2.94)$$

Per valori di $\rho \geq 1$ esistono tre punti di equilibrio,

$$\begin{aligned} \mathbf{E1}: & (\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{Z}_1) = (0, 0, 0), \\ \mathbf{E2}: & (\bar{X}_2, \bar{Y}_2, \bar{Z}_2) = (-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1), \\ \mathbf{E3}: & (\bar{X}_3, \bar{Y}_3, \bar{Z}_3) = (+\sqrt{\beta(\rho - 1)}, +\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1). \end{aligned} \quad (2.95)$$

I campi di velocità e temperatura degli equilibri del sistema fisico corrispondenti ai punti di equilibrio del sistema di Lorenz sono raffigurati in figura (2.1). L'equilibrio **E1** rappresenta la soluzione statica, il cui campo di velocità è nullo: non sono presenti moti convettivi e la trasmissione della temperatura avviene solo per conduzione (diffusione). Questo equilibrio è stabile per valori del parametro $\rho < 1$. Per valori $\rho > 1$ questo equilibrio diventa instabile e nascono i due equilibri “simmetrici” **E2,3** che rappresentano dei moti convettivi stabili, traslati tra di loro di metà della lunghezza d'onda $\frac{k}{2}$: i moti convettivi tendono a portare il fluido caldo dalla parete inferiore (a temperatura maggiore, per $\rho > 0$, corrispondente a $Ra > 0$, e quindi $\Delta T = T_w - T_c > 0$) verso la parete superiore. La nascita di due equilibri stabili in corrispondenza di un cambio di stabilità di un equilibrio esistente è caratteristico dei sistemi dotati di simmetria.⁵ Questo cambiamento qualitativo nel piano delle fasi, corrisponde alla *biforcazione pitchfork* che verrà descritta, almeno brevemente, nelle sezioni successive.

I moti convettivi rappresentati dagli equilibri **E2,3** contribuiscono al mescolamento del fluido e a una maggiore trasmissione del calore tra le due superfici. Calcolando il flusso di calore trasmesso attraverso le superfici che delimitano il dominio in $z = 0$ e $z = 1$, si può verificare che la convezione è un fenomeno fisico più efficiente per la trasmissione del calore nei fluidi rispetto alla conduzione. Per esempio, il problema della trasmissione del calore tra due superfici parallele separate da un fluido si trova nella costruzione di infissi con **doppi vetri**: lo scopo dei doppi vetri separati da una sottile intercapedine d'aria è quello di sfruttare l'aria (ferma!) come ottimo isolante termico. L'intercapedine tra i due vetri deve essere sufficiente piccola da impedire la nascita dei moti convettivi,

⁵ Un esempio strutturale è quello della trave caricata di punta a compressione. Per valori limitati del carico esiste un'unica soluzione, stabile, rappresentata dalla trave senza freccia. Quando il carico di compressione supera il valore critico, questa soluzione diventa instabile. Nel problema piano, nascono due configurazioni di equilibrio stabili del sistema strutturale: la trave può inflettersi (in maniera indifferente in assenza di imperfezioni) verso destra o verso sinistra.

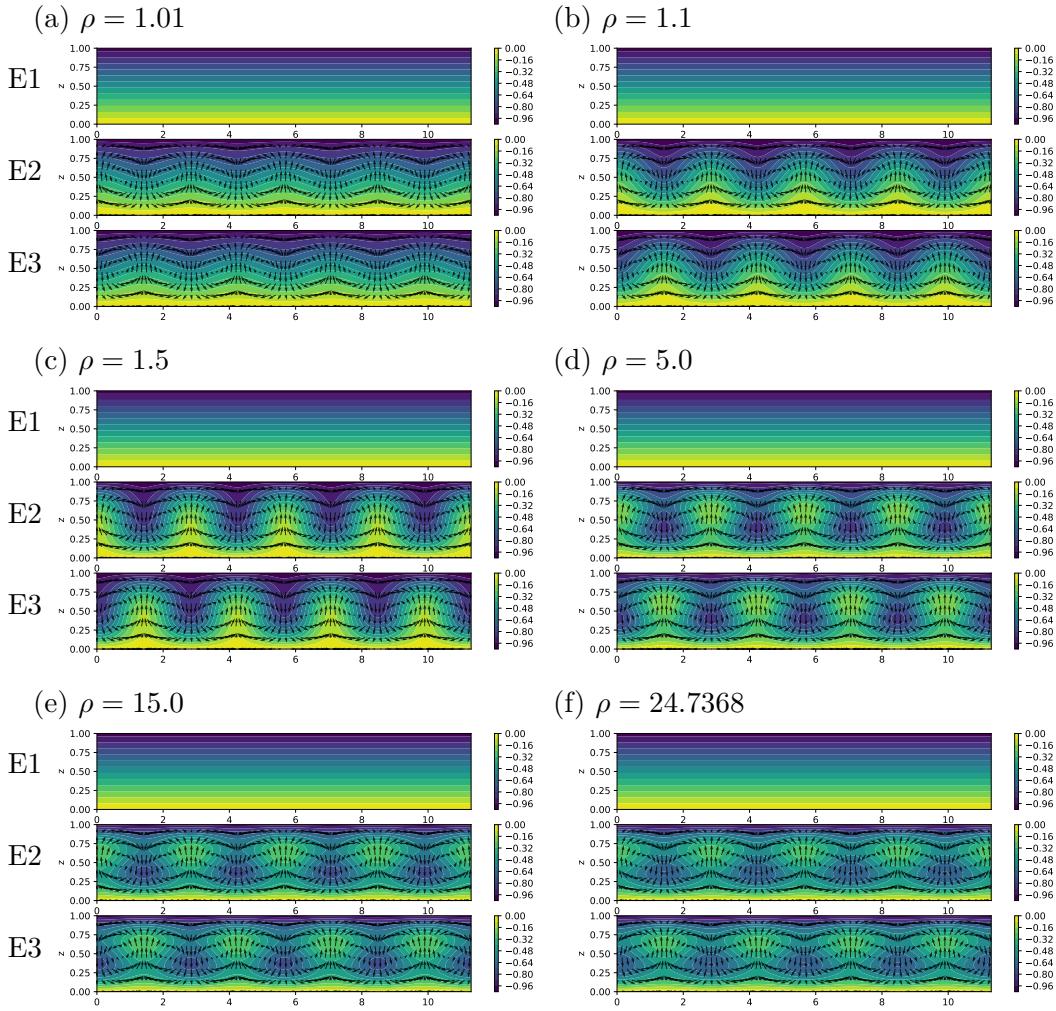


Figura 2.1: Equilibri del sistema di Lorenz per diversi valori del parametro $\rho > 1$. Il campo vettoriale della velocità è sovrapposto al campo di temperatura “scalato” $\tilde{T} = \frac{T(x,z) - T_w}{\delta T}$, i cui valori al contorno sono $\tilde{T}_w = 0$ sulla superficie inferiore a $z = 0$ e $\tilde{T}_c = -1$ sulla superficie superiore a $z = 1$.

che ridurrebbero l’efficienza dell’infisso (e l’efficienza energetica della casa). Le soluzioni convettive nel problema di Lorenz nascono quando il parametro ρ supera il valore critico $\rho_{cr} = 1$. Il parametro ρ è proporzionale al numero di Rayleigh,

$$\rho \sim Ra = \frac{\alpha g \Delta T h^3}{\nu D} , \quad (2.96)$$

e quindi proporzionale al cubo della distanza tra le due superfici, $\rho \sim h^3$. Si ricava la stessa conclusione utilizzata nella costruzione dei doppi vetri: per distanze h tra le due superfici limitate, il parametro ρ è inferiore del valore critico e l’unica soluzione stabile esistente è quella isolante di fluido in quiete.

Prima di studiare la stabilità locale “alla Lyapunov” dei punti di equilibrio, riprendendo la definizione di *stabilità strutturale* si scopre che il sistema di Lorenz non è strutturalmente stabile a perturbazioni del valore di ρ , quando $\rho = 1$: infatti per $\rho < 1$ esiste un solo punto di equilibrio, per $\rho > 1$ esistono tre punti di equilibrio e di conseguenza le traiettorie nel piano delle fasi subiscono un cambiamento qualitativo.

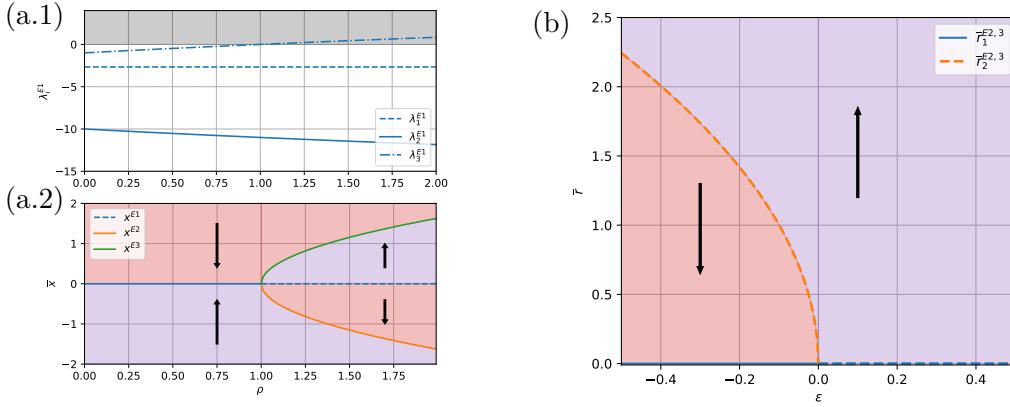


Figura 2.2: Diagrammi di biforcazione. (a) Biforcazione pitchfork per $\rho = 1$: (a.1) luogo delle radici dell'equilibrio **E1** e (a.2) diagramma di biforcazione. Per $\rho = 1$ l'equilibrio **E1** diventa instabile e nascono i due equilibri stabili **E2,3**. (b) Biforcazione di Hopf degli equilibri **E2,2**: diagramma di biforcazione, rappresentato utilizzando la forma normale. Per $\varepsilon = 0$, $\rho = 24.7368$, il ciclo limite instabile collassa sull'equilibrio stabile, che diventa instabile.

Stabilità dell'equilibrio **E1**

Si studia la stabilità “alla Lyapunov” dell’equilibrio **E1**: $(0, 0, 0)$. Linearizzando il sistema non lineare di Lorenz attorno all’equilibrio **E1**, si ottiene il sistema linearizzato

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}, \quad \delta\dot{x} = \mathbf{J}|_{\mathbf{E}1} \delta\mathbf{x} \quad (2.97)$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}) = -(\beta + \lambda)[(\sigma + \lambda)(1 + \lambda) - \sigma\rho] = \\ &= -(\beta + \lambda)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - \rho)]. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Gli autovalori del sistema linearizzato attorno al primo equilibrio sono quindi

$$\lambda_1^{E1} = -\beta, \quad \lambda_{2,3}^{E1} = -\frac{\sigma+1}{2} \mp \frac{\sqrt{(\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-\rho)}}{2}. \quad (2.99)$$

Per valori positivi dei parametri, tutti gli autovalori sono reali. Gli autovalori λ_1^{E1} e λ_2^{E1} sono negativi per ogni valore di ρ , mentre l’autovalore λ_3^{E1} cambia segno per $\rho = 1$, come mostrato in figura (2.2)(a.1). L’analisi lineare di stabilità permette di concludere che l’equilibrio **E1** è linearmente stabile per $\rho < 1$ e instabile per $\rho > 1$, mentre non permette di affermare nulla sul caso $\rho = 1$.

Stabilità degli equilibri **E2, E3**

Per valori di $\rho \geq 1$ esistono i due equilibri **E2, E3**. Si studia la loro stabilità “alla Lyapunov” tramite lo studio degli autovalori del sistema linearizzato attorno ai punti di equilibrio,

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \pm\sqrt{\beta(\rho-1)} & \pm\sqrt{\beta(\rho-1)} & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}, \quad \delta\dot{x} = \mathbf{J}|_{\mathbf{E}2,3} \delta\mathbf{x}. \quad (2.100)$$

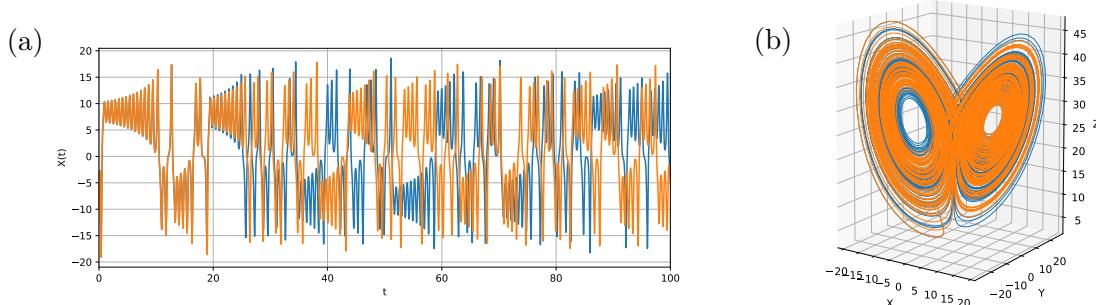


Figura 2.3: Dinamica caotica del sistema di Lorenz per $\rho = 24.74$: evoluzione del sistema con condizioni iniziali $\mathbf{x}_0^{(1)} = (-10, 10, 1)$, in blu, e $\mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(1)} + 1.0 \cdot 10^{-9}$, in arancione. (a) Evoluzione temporale della variabile $X(t)$: partendo da due condizioni iniziali “vicine”, le due traiettorie del sistema si discostano in maniera “non banale”. Il sistema dimostra un’evoluzione non periodica, estremamente sensibile alle condizioni iniziali e quindi caotica. (b) Attrattore di Lorenz nello spazio delle fasi: le traiettorie nello spazio delle fasi rivelano la presenza di un attrattore, “nelle vicinanze” del quale si svolge la dinamica asintotica del sistema.

Si può dimostrare (con il criterio di Routh-Hurwitz analiticamente, o calcolandone numericamente il valore) che i due punti di equilibrio sono stabili se $\rho < \frac{\sigma(\sigma+\beta+3)}{\sigma-1-\beta} \approx 24.7368$, utilizzando i valori $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$.

Biforcazioni, cicli limite e attrattori strani

L’analisi degli autovalori del sistema linearizzato attorno ai punti di equilibrio permette di determinarne le caratteristiche locali quando gli autovalori hanno parte reale diversa da zero. In corrispondenza del cambio di stabilità di un punto di equilibrio e/o della comparsa/scomparsa di punti di equilibrio (ma non solo!), le traiettorie nello spazio delle fasi del sistema subiscono un cambiamento qualitativo: il sistema non è strutturalmente stabile e si verifica una **biforcazione**.

Per studiare la stabilità locale di un equilibrio in presenza di autovalori a parte reale nulla è necessario costruire un’approssimazione non lineare del sistema. Si considera un punto di equilibrio per il quale il sistema linearizzato non ha autovalori instabili, ha N_s autovalori stabili e N_c autovalori a parte reale nulla e si vuole determinare l’evoluzione del sistema nelle vicinanze del punto di equilibrio. Si può dimostrare che la dinamica del sistema $N = N_s + N_c$ -dimensionale si riduce velocemente alla dinamica di un sistema N_c dimensionale: le N_s dinamiche asintoticamente stabili associate agli autovalori con parte reale negativa tendono asintoticamente ad annullarsi nell’intorno dell’equilibrio, mentre rimangono solo le dinamiche associate alle N_c dinamiche marginalmente stabili.

Si può usare un’espansione polinomiale per approssimare il sistema non lineare originale e costruire la **varietà centrale**, cioè la regione dello spazio delle fasi nella quale si svolgono le dinamiche marginalmente stabili.

Ad esempio, quando $\rho = 1$ il sistema di Lorenz nell’intorno dell’equilibrio **E1** (e dei nascenti equilibri **E2,3**) può essere ricondotto alla dinamica del sistema monodimensionale

$$\dot{a}(t) = f(a(t)) = a(t)[\alpha\varepsilon - \beta a(t)^2] \quad , \quad \text{con } \varepsilon := \rho - 1 \quad , \quad (2.101)$$

con $\alpha \approx 0.909$ e $\beta \approx 0.170$. Questo sistema coincide alla **forma normale** della biforcazione, cioè il sistema più semplice in grado di descrivere il cambiamento qualitativo del sistema. Lo studio della forma normale della biforcazione rivela l'esistenza di un unico equilibrio stabile $\bar{a}_1 = 0.0$ per $\epsilon \leq 0$, cioè $\rho \leq 1$. Per $\rho > 1$ l'equilibrio \bar{a}_1 diventa instabile e nascono due equilibri stabili $\bar{a}_{2,3} = \mp\sqrt{\alpha\epsilon/\beta}$. L'equazione (2.101) rappresenta la forma normale di una *biforcazione pitchfork*. Poiché $\beta > 0$, la biforcazione si definisce *supercritica*.

Analogamente, quando $\rho \approx 24.7368$ i due equilibri **E2,3** cambiano stabilità: u coppia di autovalori complessi coniugati attraversano l'asse immaginario e la loro parte reale diventa positiva. Questo tipo di instabilità strutturale viene definita *biforcazione di Hopf*: cambia la stabilità del punto di equilibrio considerato e nasce/sparisce un ciclo limite nel suo intorno (il ciclo limite nasce da o riduce al punto di equilibrio). L'approssimazione alla varietà centrale del sistema attorno a uno dei due equilibri conduce al sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = \alpha_r r\varepsilon - \beta_r r^3 \\ \dot{\theta}(t) = \omega + \alpha_i \varepsilon + \beta_i r^2 \end{cases}, \quad \text{con } \varepsilon := \rho - 24.7368, \quad (2.102)$$

dove è stata utilizzata la rappresentazione polare complessa $a(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ della variabile $a(t)$ che descrive la dinamica del sistema ridotta alla varietà centrale. Il parametro $\omega = 9.6245$ coincide con la parte immaginaria degli autovalori marginalmente stabili e gli altri parametri valgono:

$$\begin{aligned} \alpha_r &= 0.0302 & \beta_r &= -0.003 \\ \alpha_i &= 0.1815 & \beta_i &= -0.028. \end{aligned} \quad (2.103)$$

La prima equazione delle (2.102) è identica all'equazione che descrive la biforcazione pitchfork. In questo caso, però, il coefficiente β_r è minore di zero. Questo tipo di biforcazione si definisce *subcritica*. Si può facilmente dimostrare che per $\varepsilon < 0$ esistono due (il raggio r di una rappresentazione polare deve essere ≥ 0) equilibri

$$\bar{r}_1 = 0, \quad \bar{r}_2 = \sqrt{-\alpha_r \varepsilon / \beta_r}. \quad (2.104)$$

Il primo equilibrio dell'equazione in r corrisponde a un punto fisso, poiché il raggio è nullo. Il secondo equilibrio corrisponde al raggio \bar{r}_2 del ciclo limite esistente per $\varepsilon < 0$. Si dimostra quindi che un ciclo limite instabile coesiste con ognuno dei due punti di equilibri stabili **E2,3** per $\varepsilon < 0$ (cioè $\rho < 24.7368$), almeno in un intervallo finito di valori di ρ . Quando $\varepsilon = 0$ (cioè $\rho < 24.7368$), il ciclo limite instabile si riduce al punto di equilibrio. Per $\varepsilon > 0$ il punto di equilibrio diventa instabile, mentre scompare il ciclo limite.

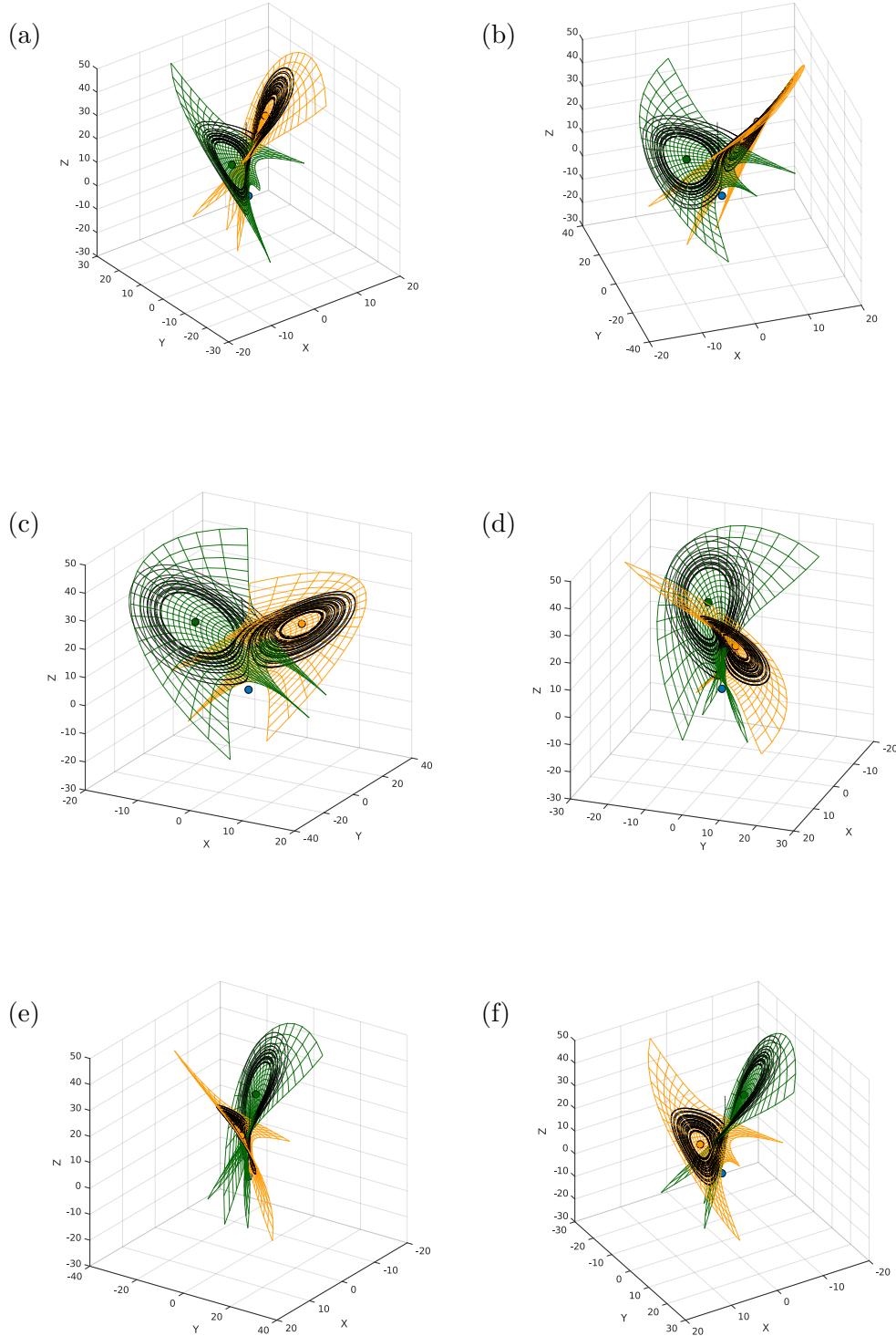


Figura 2.4: Evoluzione del sistema di Lorenz per $\rho = 24.7368$ nel piano delle fasi. Dinamica caotica, equilibri (**E1** in azzurro, **E2** in arancione e **E3** in verde) e varietà centrali dei due equilibri marginalmente stabili **E2,3**. La dinamica asintotica del sistema caotica del sistema alterna in maniera irregolare delle oscillazioni attorno ai due equilibri instabili sulle “nelle vicinanze” delle rispettive varietà centrali.

Rimangono aperte alcune questioni: è possibile descrivere i cicli limite esistenti per (alcuni) valori del parametro $\rho < 24.7368$? Qual è l'evoluzione del sistema per valori di $\rho > 24.7368$? Ha senso utilizzare il modello di Lorenz, un brutale troncamento di un sistema continuo che dà origine a un sistema tridimensionale, per descrivere l'evoluzione del sistema fisico per valori crescenti del numero di Rayleigh Ra , e quindi del parametro ρ ?

Partendo dall'espressione approssimata del ciclo limite ottenuta dalla forma normale della biforcazione di Hopf per $\rho \lesssim 24.7368$ è possibile calcolare la forma del ciclo limite per valori inferiori del parametro, tramite tecniche di **continuazione**: negli algoritmi di continuazione la soluzione di un problema, nota per un valore del parametro, viene utilizzata per stimare la guess iniziale dello stesso problema per un valore diverso del parametro. In particolare, per identificare la traiettoria periodica corrispondente a un ciclo limite si può utilizzare una tecnica di **bilanciamento armonico**: la traiettoria periodica viene scritta come serie di Fourier, della quale è necessario determinare i coefficienti.

Per valori di $\rho > 24.7368$ non esistono punti di equilibrio stabili punti di equilibrio stabili e non esistono cicli limite stabili. La dinamica del sistema rimane confinata in una regione limitata dello spazio delle fasi, senza divergere. L'evoluzione del sistema rappresentata in figura (2.3) dimostra l'elevata sensibilità della soluzione alle condizioni iniziali e l'assenza di equilibri o dinamiche periodiche stabili, caratteristici di un **regime caotico**. L'evoluzione di lungo tempo del sistema avviene “nelle vicinanze” dell'attrattore di Lorenz, del quale si può intuire la forma grazie alle traiettorie rappresentate in figura (2.3)(b). La figura (2.4) rappresenta la traiettoria del sistema di Lorenz e le *varietà centrali* dei due equilibri **E2,3** marginalmente stabili per $\rho = 24.7368$. Qualitativamente, lo stato del sistema viene attratto su queste superfici, lungo le direzioni stabili. Su queste superfici poi, si può osservare la dinamica marginalmente stabile (di dimensione ridotta: per il sistema di Lorenz, di dimensione 2, invece della dimensione 3 del sistema completo) del sistema: lo stato del sistema inizialmente oscilla attorno all'equilibrio **E2** (ad esempio), prima di essere attratta in maniera “difficilmente prevedibile” dalla varietà centrale dell'equilibrio **E3** e iniziare ad oscillare attorno a quest'ultimo equilibrio.

L'approssimazione di Lorenz di dimensioni ridotte del sistema fisico continuo (e quindi di dimensione infinita) perde significato all'aumentare del numero di Rayleigh: all'aumentare del numero di Rayleigh infatti si attivano delle dinamiche più complesse, di dimensione maggiore, non descrivibili a un sistema tridimensionale.

Esercizio 2.1 — Similitudine ad alta velocità: missile. Un missile vola alla quota di 7000 m, dove la densità dell'aria è $\rho = 0.59 \text{ kg/m}^3$ e la sua temperatura è $T = -30.45^\circ\text{C}$, alla velocità costante $V_v = 505 \text{ km/h}$.

Determinare:

- il fattore di scala geometrico $\lambda = L_m/L_v$,
- la velocità dell'aria V_m ,

necessari per riprodurre correttamente i coefficienti aerodinamici del missile in una galleria del vento che operi a condizioni atmosferiche standard ($\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$, $p = 101325 \text{ Pa}$, $T = 15^\circ\text{C}$).

$$(V_m = 152.8 \text{ m/s}, \lambda = 0.507)$$

■

Soluzione

Concetti. Similitudine fluidodinamica: numeri di Reynolds e di Mach.

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} \quad , \quad M = \frac{U}{c} . \quad (2.105)$$

Formula di Sutherland per la viscosità dinamica **dei gas**,

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \frac{C + T_0}{C + T} . \quad (2.106)$$

Svolgimento. Assumendo che l'aria si comporti come gas ideale, per il quale vale l'equazione di stato $p = \rho RT$, la velocità del suono vale $c = \sqrt{\gamma RT}$, dove $\gamma = c_p/c_v$ è il rapporto dei calori specifici a pressione e volume costante, che vale $\gamma = 1.4$ per un gas biatomico. La costante del gas R è definita come il rapporto tra la costante universale dei gas \mathcal{R} e la massa molare M_m , $R = \mathcal{R}/M_m$. La massa molare dell'aria secca vale $M_m = 28.96 \text{ kg/kmol}$ e la sua costante R vale

$$R = \frac{\mathcal{R}}{M_m} = \frac{8314.4 \text{ J/(kmol K)}}{28.97 \text{ kg/kmol}} = 287.0 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} . \quad (2.107)$$

La velocità del suono nell'aria alle condizioni termodinamiche del problema vale $c = 312.3 \text{ m/s}$. Il numero di Mach caratteristico della corrente è quindi $M = 0.45$ e gli effetti di comprimibilità non possono essere trascurati, poiché il numero di Mach è maggiore della valore convenzionale 0.3 che identifica il limite della validità dell'approssimazione di fluido incomprimibile. Per ottenere la similitudine tra problema reale e quello modellato (di dimensioni ridotte) è necessaria la similitudine geometrica e l'uguaglianza dei numeri adimensionali che caratterizzano il problema, il numero di Reynolds Re e il numero di Mach M .

$$\begin{cases} M_1 = M_2 \\ Re_1 = Re_2 \end{cases} . \quad (2.108)$$

Utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti,

$$\begin{cases} \frac{V_v}{\sqrt{\gamma R T_v}} = \frac{V_m}{\sqrt{\gamma R T_m}} \\ \frac{\rho_v V_v L_v}{\mu(T_v)} = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu(T_m)} \end{cases} \quad (2.109)$$

Risolvendo il sistema, si ottiene l'espressione delle incognite

$$\begin{cases} V_m = V_v \sqrt{\frac{T_m}{T_v}} \\ \lambda = \frac{L_m}{L_v} = \frac{\rho_v}{\rho_m} \sqrt{\frac{T_v}{T_m}} \frac{\mu(T_m)}{\mu(T_v)} \end{cases} \quad (2.110)$$

Per trovare i valori ancora incogniti della viscosità dinamica si usa la formula di Sutherland: per l'aria i coefficienti sono $T_0 = 288K$, $C = 110.4K$. Si ottengono i valori numerici $V_m = 152.8m/s$, $\lambda = 0.507$.

Osservazioni. Non è sempre possibile imporre l'uguaglianza di Re e M . Si pensi ad esempio a un'applicazione in aria in condizioni standard e prove sul modello in galleria ad aria in condizioni standard. Per ottenere l'uguaglianza dei numeri di Mach, bisogna avere la stessa velocità caratteristica (poichè la celerità del suono è la stessa tra condizione reale e modello). Avendo uguagliato le velocità caratteristiche ed essendo uguali le variabili termodinamiche ρ e μ , si ottiene l'uguaglianza della dimensione caratteristica del modello. Questo significa che sarebbe necessario avere un modello in scala 1:1 per soddisfare la similitudine utilizzando nella prova sperimentale lo stesso fluido nelle stesse condizioni termodinamiche delle condizioni "al vero". Per limiti tecnologici e di costi, dovuti alle dimensioni degli apparati sperimentali, spesso è necessario utilizzare un modello in scala dell'originale. Esistono gallerie controllate in pressione per variare lo stato termodinamico dell'aria di prova e gallerie che utilizzando acqua come fluido di prova: entrambe queste scelte comportano complicazioni nel progetto e nell'utilizzo dell'impianto, traducibile spesso in costi elevati.

Allora per quale numero adimensionale o secondo quale combinazione dei numeri adimensionali conviene ottenere la similitudine? "Arte", esperienza e alcuni "espedienti" sperimentali, che non sono oggetto di questo corso hanno lo scopo di ottenere risultati rappresentativi del problema al vero, anche se la perfetta similitudine non è soddisfatta.

Esercizio 2.2 — Similitudine ad alta velocità: velivolo. Un aeromobile vola nell'alta atmosfera a velocità costante $V_v = 252 \text{ m/s}$, in condizioni di densità ρ_v e temperatura T_v assegnate: $\rho_v = 0.424 \text{ kg/m}^3$, $T_v = -50.3^\circ\text{C}$.

Determinare la velocità, la densità e la pressione dell'aria da utilizzarsi in una galleria del vento pressurizzata che operi alla temperatura di 15°C per ottenere la similitudine dinamica corretta con un modello in scala ridotta $\lambda = 0.2$.

$$(V_m = 286.6 \text{ m/s}, \rho_m = 2.292 \text{ kg/m}^3, p_m = 189560 \text{ Pa}) \quad \blacksquare$$

Soluzione

Concetti. Similitudine fluidodinamica: numeri di Reynolds e di Mach.

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} \quad , \quad M = \frac{U}{c} . \quad (2.111)$$

Formula di Sutherland per la viscosità dinamica **dei gas**,

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \frac{C + T_0}{C + T} . \quad (2.112)$$

Svolgimento. Assumendo che l'aria si comporti come gas ideale, per il quale vale l'equazione di stato $p = \rho RT$, la velocità del suono vale $c = \sqrt{\gamma RT}$, dove $\gamma = c_p/c_v$ è il rapporto dei calori specifici a pressione e volume costante, che vale $\gamma = 1.4$ per un gas biatomico. La costante del gas R è definita come il rapporto tra la costante universale dei gas \mathcal{R} e la massa molare M_m , $R = \mathcal{R}/M_m$. La massa molare dell'aria secca vale $M_m = 28.96 \text{ kg/kmol}$ e la sua costante R vale

$$R = \frac{\mathcal{R}}{M_m} = \frac{8314.4 \text{ J/(kmol K)}}{28.97 \text{ kg/kmol}} = 287.0 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} . \quad (2.113)$$

La velocità del suono nell'aria alle condizioni termodinamiche del problema vale $c = 299.2 \text{ m/s}$. Il numero di Mach caratteristico della corrente è quindi $M = 0.84$ e gli effetti di comprimibilità non possono essere trascurati, poiché il numero di Mach è maggiore della valore convenzionale 0.3 che identifica il limite della validità dell'approssimazione di fluido incomprimibile. Per ottenere la similitudine tra problema reale e quello modellato (di dimensioni ridotte) è necessaria la similitudine geometrica e l'uguaglianza dei numeri adimensionali che caratterizzano il problema, il numero di Reynolds Re e il numero di Mach M .

$$\begin{cases} M_1 = M_2 \\ Re_1 = Re_2 \end{cases} . \quad (2.114)$$

Utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti,

$$\begin{cases} \frac{V_v}{\sqrt{\gamma RT_v}} = \frac{V_m}{\sqrt{\gamma RT_m}} \\ \frac{\rho_v V_v L_v}{\mu(T_v)} = \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu(T_m)} \end{cases} \quad (2.115)$$

Risolvendo il sistema, si ottiene l'espressione delle incognite:

$$\Rightarrow \begin{cases} V_m = V_v \sqrt{\frac{T_m}{T_v}} \\ \rho_m = \frac{1}{\lambda} \rho_v \sqrt{\frac{T_v}{T_m}} \frac{\mu(T_m)}{\mu(T_v)} \\ P_m = \rho_m R T_m = \frac{1}{\lambda} \frac{\mu(T_m)}{\mu(T_v)} \rho_v R \sqrt{T_v T_m} \end{cases} \quad (2.116)$$

Per trovare i valori ancora incogniti della viscosità dinamica si usa la formula di Sutherland: per l'aria i coefficienti sono $T_0 = 288K$, $C = 110.4K$. Si ottengono i valori numerici $V_m = 286.6 \text{ m/s}$, $\rho_m = 2.292 \text{ kg/m}^3$, $p_m = 189560 \text{ Pa}$.

Esercizio 2.3 — Similitudine a bassa velocità: sottomarino. La velocità di pattugliamento di un sottomarino vale $V_v = 2.5 \text{ m/s}$. Considerando che il sottomarino si muova in acqua in condizioni standard, a quale velocità deve essere provato un modello in scala $\lambda = 1/10$, avendo a disposizione rispettivamente:

- una galleria ad acqua in condizioni standard,
- una galleria ad aria a pressione di 10 bar e temperatura di 30°C ?

Se la resistenza al vero vale $D_v = 6000 \text{ N}$, quanto vale la resistenza sui modelli in scala nei due casi?

(Galleria ad aria: $V_m = 35.17 \text{ m/s}$, $D_m = 136.1 \text{ N}$. Galleria ad acqua: $V_m = 25 \text{ m/s}$, $D_m = 6000 \text{ N}$.) ■

Soluzione

Concetti. Similitudine fluidodinamica per correnti incomprimibili, numero di Reynolds,

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu}. \quad (2.117)$$

Formula di Sutherland per la viscosità dinamica **dei gas**,

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \frac{C + T_0}{C + T}. \quad (2.118)$$

Azioni agenti sul modello e coefficienti di forza.

Svolgimento. La velocità sul modello si trova tramite l'uguaglianza dei numeri di Reynolds,

$$\frac{\rho_v U_v L_v}{\mu_v} = \frac{\rho_m U_m L_m}{\mu_m} \rightarrow U_m = U_v \frac{\rho_v L_v}{\rho_m L_m} \cdot \frac{\mu_m}{\mu_v} \quad (2.119)$$

Per trovare la viscosità dell'aria viene utilizzata la formula di Sutherland (per l'aria i coefficienti sono $T_0 = 288K$, $C = 110.4K$, $\mu_0 = 18.27 \mu\text{Pas}$). Il coefficiente di viscosità dinamica dell'acqua in condizioni standard è dell'ordine di 10^{-3} kg/(m s) .

La forza agente aerodinamica agente sul corpo, la cui superficie esterna è indicata con S , è la risultante degli sforzi di superficie esterna del corpo S_b ,

$$\mathbf{F} = \oint_S \mathbf{t}_n = \oint_S -p \hat{\mathbf{n}} + \mu [\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (2.120)$$

Vengono scelte la densità caratteristica del fluido ρ , una velocità caratteristica della corrente U e una lunghezza caratteristica del problema L , per definire la scala della pressione $P = \rho U^2$. Raccogliendo le dimensioni fisiche fuori dal segno di integrale è quindi possibile scrivere,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \oint_{S_b} -P p^* \hat{\mathbf{n}} + \frac{\mu U}{L} [\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*] \hat{\mathbf{n}} = && (P = \rho U^2, dS = L^2 dS^*) \\ &= \rho U^2 L^2 \oint_{S_b^*} -p^* \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{Re} [\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*] \hat{\mathbf{n}} = && (2.121) \\ &= \frac{1}{2} \rho U^2 S \mathbf{c}_F(Re), \end{aligned}$$

avendo introdotto il coefficiente di forza \mathbf{c}_F ,

$$\mathbf{c}_F = 2 \frac{L^2}{S} \oint_{S_b^*} -p^* \hat{\mathbf{n}} + \frac{1}{Re} [\nabla^* \mathbf{u}^* + \nabla^{*T} \mathbf{u}^*] \hat{\mathbf{n}} \quad (2.122)$$

che può dipendere dalle variabili fisiche solo attraverso i numeri adimensionali del problema (in questo caso solo da Re , per problemi comprimibili anche da M) e che rappresenta la forza agente sul corpo adimensionalizzata con la pressione dinamica $\frac{1}{2}\rho U^2$ e con una superficie di riferimento del corpo S . La superficie di riferimento S scala con L^2 ($S = aL^2$, a costante).

Si può scrivere la risultante delle forze sul modello e al vero come

$$\begin{cases} \mathbf{F}_m = \frac{1}{2}\rho_m U_m^2 S_m^2 \mathbf{c}_F(Re_m) \\ \mathbf{F}_v = \frac{1}{2}\rho_v U_v^2 S_v^2 \mathbf{c}_F(Re_v) . \end{cases} \quad (2.123)$$

Poichè è soddisfatta la similitudine fluidodinamica, i valori dei coefficienti di forza del modello e “al vero” sono uguali. Si può quindi scrivere

$$\mathbf{F}_m = \frac{\rho_m}{\rho_v} \left(\frac{U_m}{U_v} \right)^2 \left(\frac{S_m}{S_v} \right) \mathbf{F}_v = \frac{\rho_m}{\rho_v} \left(\frac{U_m}{U_v} \right)^2 \left(\frac{L_m}{L_v} \right)^2 \mathbf{F}_v = \frac{\rho_m}{\rho_v} \left(\frac{U_m}{U_v} \right)^2 \lambda^2 \mathbf{F}_v , \quad (2.124)$$

Nel caso della galleria ad acqua, nella quale il fluido è lo stesso e nello stesso stato termodinamico della situazione reale ($\rho_m = \rho_v$, $\mu_m = \mu_v$), l’uguaglianza dei numeri di Reynolds si semplifica in

$$\frac{\rho_m U_m L_m}{\mu_m} = \frac{\rho_v U_v L_v}{\mu_v} \quad \rightarrow \quad U_m L_m = U_v L_v . \quad (2.125)$$

Quindi, in questo caso la forza agente sul modello di galleria coincide con la forza agente sul corpo nella situazione reale,

$$\mathbf{F}_m^{H_2O,s} = \mathbf{F}_v^{H_2O,s} . \quad (2.126)$$

Esercizio 2.4 — Getto: codice numerico adimensionale. Si vuole studiare con la corrente di aria che esce da un ugello verticale di diametro $\tilde{D} = 0.01 \text{ m}$, nell'intervallo di velocità di riferimento $\tilde{U} \in [1, 10] \text{ m/s}$. Si ha a disposizione un codice numerico che risolve le equazioni in forma adimensionale, in cui non è possibile variare le condizioni al contorno, e una sola griglia di calcolo. Si chiede di:

- determinare l'intervallo di numeri di Reynolds Re da inserire nel codice, sapendo che la velocità di riferimento nel codice è $U = 1$ e il diametro nella griglia vale $D = 1$.
- la frequenza \tilde{f} di rilascio di vortici quando $\tilde{U} = 1 \text{ m/s}$, sapendo che la frequenza estratta dai risultati numerici è $f = 0.2$;
- stimare l'errore compiuto dal codice nel trascurare l'effetto della gravità.

■

Soluzione

Concetti. Similitudine fluidodinamica. Numeri di Reynolds e Froude. Ordini di grandezza dei termini.

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} \quad , \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}} \quad (2.127)$$

Svolgimento.

- Affinchè le simulazioni numeriche siano rappresentative della corrente incomprimibile che si vuole studiare, è necessario che ci sia similitudine fluidodinamica tra i due casi: bisogna impostare l'uguaglianza dei numeri di Reynolds

$$Re = \frac{\tilde{U} \tilde{D}}{\tilde{\nu}} \approx \frac{(1 \div 10) \text{ m/s} \times 10^{-2} \text{ m}}{10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 10^3 \div 10^4 . \quad (2.128)$$

- Se la frequenza adimensionale ottenuta dalla simulazione numerica è $f = 0.2$, la frequenza dimensionale viene ottenuta dall'uguaglianza dei numeri di Strouhal, cioè “ri-dimensionalizzando” f con le grandezze di riferimento usate per l'adimensionalizzazione (U, L, ρ).

$$\frac{f D}{U} = \frac{\tilde{f} \tilde{D}}{\tilde{U}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{f} = f \frac{\tilde{U}}{\tilde{D}} = 0.2 \times \frac{1 \text{ m/s}}{10^{-2} \text{ m}} = 20 \text{ s}^{-1} . \quad (2.129)$$

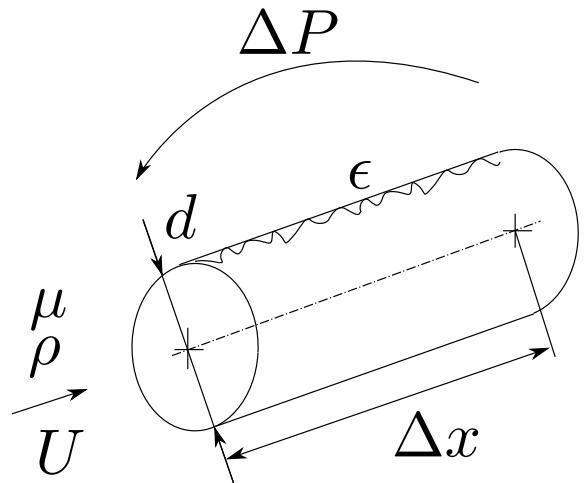
- Per quantificare l'effetto della gravità, si calcola il valore del numero di Froude. Nelle equazioni di Navier-Stokes adimensionali, compare il numero adimensionale $gD/U^2 = 1/Fr^2$ davanti ai termini di forze di volume. Più questo numero è “piccolo”, più gli effetti delle forze di volume sono ridotti.

$$\begin{cases} U = 1 \text{ m/s} & : \quad 1/Fr^2 \approx 10^{-1} \\ U = 10 \text{ m/s} & : \quad 1/Fr^2 \approx 10^{-3} \end{cases} \quad (2.130)$$

Esercizio 2.5 — Gradiente di pressione in tubi cilindrici. Si deve progettare un condotto che trasporti un fluido con densità ρ_1 e viscosità μ_1 , di diametro d_1 e lunghezza L_1 . Si suppone che la rugosità della superficie interna del condotto possa essere descritta interamente dall'altezza media ϵ_1 delle asperità. Il condotto deve garantire una portata massica Q_1 . Viene realizzato un modello in scala $\lambda = d_2/d_1$ del condotto di lunghezza L_2 , nel quale viene fatto scorrere lo stesso fluido alle stesse condizioni termodinamiche. Si chiede di determinare:

- la finitura superficiale della superficie interna del modello, in termini di dimensione caratteristica della rugosità ϵ_2 ;
- la velocità media di prova U_2 ;
- la differenza di pressione da imporre alle estremità del condotto al vero, conoscendo che la differenza di pressione ΔP_2 misurata in laboratorio.

Si supponga il fluido incompressibile. ■



Soluzione

Concetti. Teorema di Buckingham. Similitudine fluidodinamica.

Svolgimento. Il problema è caratterizzato dal fluido utilizzato, dalla geometria del condotto e dal gradiente di pressione necessario a garantire la portata desiderata. Si può scrivere in maniera implicita

$$f\left(\frac{\Delta P}{\Delta x}, U, \rho, \mu, d, \epsilon\right) = 0 \quad (2.131)$$

avendo scelto come grandezza fisica caratteristica del problema il gradiente di pressione $\frac{\Delta P}{\Delta x}$ e non il salto di pressione e la lunghezza del tubo prese indipendentemente. Il teorema di Buckingham garantisce che il problema può essere caratterizzato da 3 numeri adimensionali (6 grandezze fisiche - 3 grandezze fondamentali (M,L,T)). Se si scelgono ρ , U , d come grandezze di riferimento, si possono costruire i tre numeri adimensionali come

$$\pi_1 = \frac{\Delta P}{\Delta x} \frac{d}{\rho U^2} = f_D \quad \pi_2 = \frac{\mu}{\rho U d} = 1/Re \quad \pi_3 = \frac{\epsilon}{d} = \epsilon' \quad (2.132)$$

Il problema può essere quindi scritto in forma implicita come:

$$g(f_D, Re, \epsilon') = 0. \quad (2.133)$$

Esplicitando f_D :

$$f_D = h(Re, \epsilon') \quad \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{\rho U^2}{d} f_D(Re, \epsilon'). \quad (2.134)$$

Affinchè sia verificata la similitudine fluidodinamica, ci deve essere l'uguaglianza dei numeri di Reynolds Re e delle rugosità adimensionalizzate ϵ' .

- Dall'uguaglianza delle rugosità adimensionali

$$\epsilon'_1 = \epsilon'_2 =: \epsilon' \Rightarrow \epsilon_2 = \epsilon_1 \frac{d_2}{d_1} = \lambda \epsilon_1. \quad (2.135)$$

Per il modello è quindi necessaria una lavorazione che garantisca una finitura superficiale migliore rispetto al condotto al vero ($\lambda \leq 1$).

- La velocità media al vero U_1 viene ricavata grazie alla richiesta della portata desiderata.

$$U_1 = \frac{Q}{\rho \frac{\pi}{4} d_1^2} \quad (2.136)$$

Per ottenere la similitudine fluidodinamica si impone l'uguaglianza dei numeri di Reynolds

$$Re_1 = Re_2 =: Re \Rightarrow U_2 = U_1 \frac{\rho_1 d_1 \nu_2}{\rho_2 d_2 \nu_1} = U_1 \frac{d_1}{d_2} \quad (2.137)$$

poichè la densità e la viscosità del fluido “di prova” sono le stesse di quelle del fluido “al vero”.

- Il rapporto tra la differenza di pressione ΔP_2 misurata sul condotto modello e la lunghezza del condotto modello L_2 permette di stimare il gradiente di pressione $\frac{\Delta P}{\Delta x} \Big|_2 = \frac{\Delta P_2}{L_2}$. Sfruttando ancora una volta la similitudine fluidodinamica

$$\begin{cases} \frac{\Delta P_2}{L_2} = \frac{\rho_2 U_2^2}{d_2} f_D(Re, \epsilon') \\ \frac{\Delta P_1}{L_1} = \frac{\rho_1 U_1^2}{d_1} f_D(Re, \epsilon') \end{cases} \Rightarrow \Delta P_1 = \Delta P_2 \frac{\rho_1 U_1^2}{\rho_2 U_2^2} \frac{d_2}{d_1} \frac{L_1}{L_2} \quad (2.138)$$

Dall'uguaglianza delle densità $\rho_1/\rho_2 = 1$; dall'uguaglianza dei numeri di Reynolds (e delle densità e viscosità) $U_1^2/U_2^2 = d_2^2/d_1^2$. La formula può quindi essere semplificata

$$\Delta P_1 = \Delta P_2 \frac{d_2^3}{d_1^3} \frac{L_1}{L_2} = \Delta P_2 \lambda^3 \frac{L_1}{L_2} \quad (2.139)$$

Diagramma di Moody.

Il diagramma di Moody riporta il coefficiente f_D in funzione del numero di Re e della rugosità del tubo. Si possono individuare due regimi estremi del problema. Per “basse velocità” (o meglio, bassi numeri di Reynolds), si può intuire che gli effetti della viscosità prevalgano sugli effetti inerziali; inoltre, gli effetti della rugosità sono minimi. Si può quindi pensare che il problema sia indipendente dalla densità del fluido e dalla rugosità del tubo e descrivibile in forma implicita come

$$f_L(\Delta P/\Delta x, \mu, U, d) = 0 \quad (2.140)$$

Si può descrivere il problema solo con un numero adimensionale. Scegliendo μ, U, d come grandezze di riferimento, si può scrivere

$$\pi_{1,L} = \frac{\Delta P}{\Delta x} \frac{d^2}{\mu U} \quad (2.141)$$

Il problema può essere scritto in forma implicita $g_L(\pi_{1,L}) = 0$. Poichè la funzione g_L dipende solo dal coefficiente $\pi_{1,L}$, il coefficiente $\pi_{1,L}$ deve essere costante. Il gradiente di pressione può essere scritto

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = \pi_{1,L} \frac{\mu U}{d^2} = \frac{\rho U^2}{d} f_D \quad (2.142)$$

avendo usato la definizione di f_D introdotta nell'equazione (2.132). È quindi possibile stimare l'andamento del coefficiente f_D , per bassi numeri di Reynolds, invertendo l'equazione precedente. Si scopre che il coefficiente f_D è inversamente proporzionale al numero di Reynolds.

$$f_D = \pi_{1,L} \frac{\mu}{\rho U d} = \pi_{1,L} \frac{1}{Re} \quad (2.143)$$

. Per bassi numeri di Reynolds, il parametro f_D in funzione di Re mostra un andamento lineare in un diagramma con assi logaritmici, a conferma della correttezza della stima appena svolta.

Si può ragionare in maniera analoga per il regime di moto estremo opposto, dove gli effetti della viscosità sono trascurabili. Si scopre che il coefficiente f_D è funzione solo della rugosità adimensionale ϵ' , mentre non dipende dal numero di Reynolds. Per alti numeri di Reynolds, il parametro f_D è descritto da curve che tendono a un valore costante, che dipende dal valore della rugosità adimensionale ϵ' .

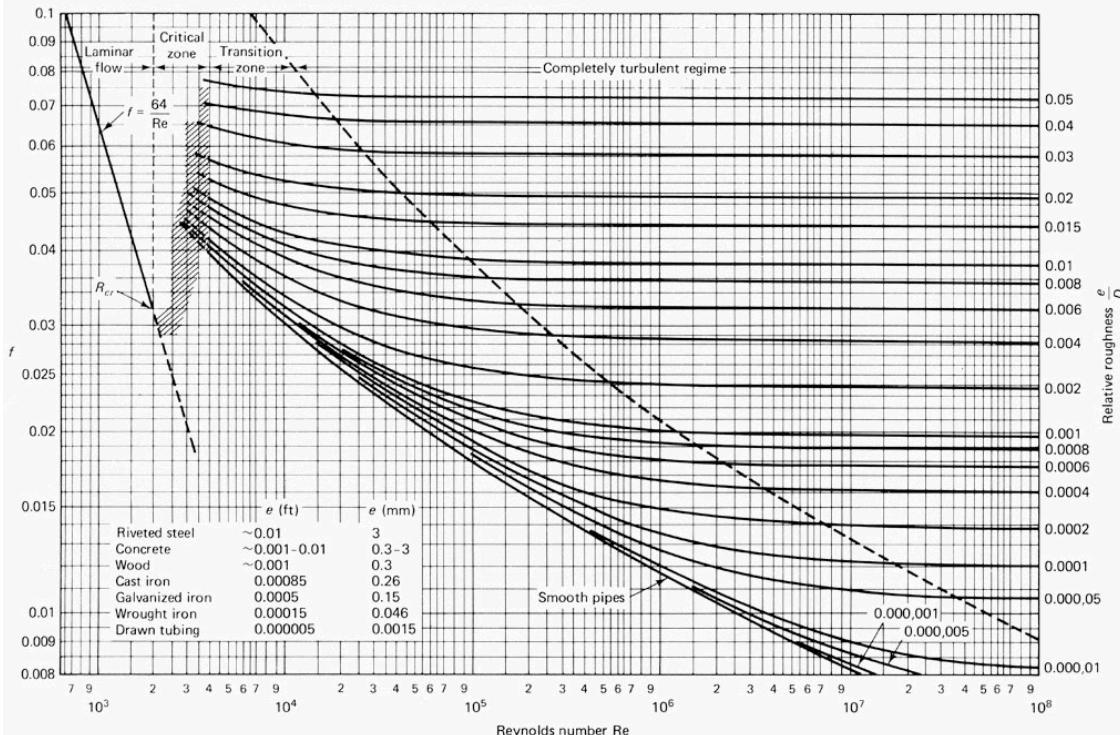
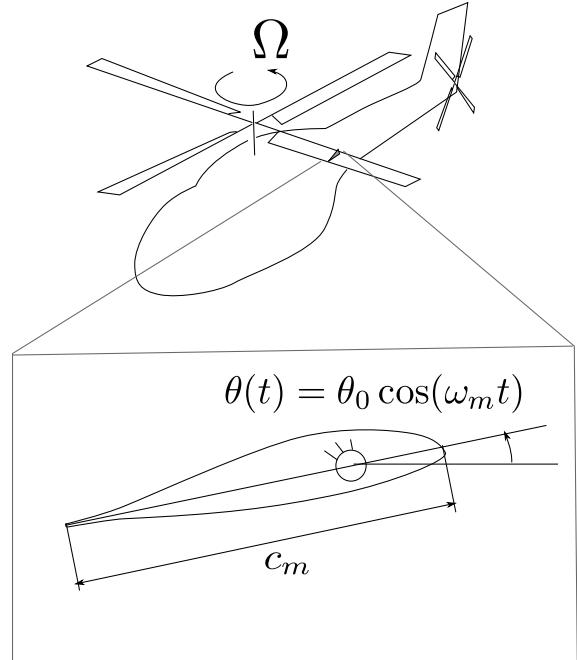


Figure 7.13 Moody diagram. (From L. F. Moody, *Trans. ASME*, Vol. 66, 1944.)

Esercizio 2.6 — Profilo oscillante. L'obiettivo di una prova in galleria è lo studio del campo di moto attorno a una pala di elicottero, in particolare attorno alla sezione che si trova a metà della lunghezza della pala, $R_v = 6.85 \text{ m}$. Il rotore dell'elicottero ruota con una velocità angolare Ω_v , tale da avere una velocità $U_{tip} = 200 \text{ m/s}$ (per evitare il regime supersonico). La corda della pala nella sezione analizzata è $c_v = 0.30 \text{ m}$. Il modello di galleria a circuito aperto è costituito da una superficie alare, incernierata su un asse perpendicolare alla direzione del vento di galleria, in corrispondenza dell'asse "di comando del passo". Sapendo che la massima velocità raggiungibile nell'impianto utilizzato è $U_m = 50 \text{ m/s}$, si chiede di determinare:

- la corda del modello c_m , per ottenere la similitudine in Re e di commentare gli effetti di comprimibilità;
- la frequenza di oscillazione ω_m da imporre al profilo per simulare il cambio di incidenza dovuti ai comandi di passo collettivo e ciclico;
- una stima della potenza dell'impianto necessaria a svolgere la prova, conoscendo le dimensioni della camera di prova rettangolare, $b = 1.5 \text{ m}$, $h = 1.0 \text{ m}$.



Soluzione

Concetti. Similitudine fluidodinamica. Comando elicottero. Stima potenza galleria del vento.

Svolgimento.

- Per ottenere la similitudine in Re , è necessario uguagliare i numeri di Reynolds ottenuti con le grandezze dimensionali caratteristiche del problema. La lunghezza di riferimento è la corda. La velocità di riferimento è la velocità che investe il profilo della pala considerato; nella prova di galleria è la velocità di galleria U_m , nella realtà è la velocità relativa dovuta alla rotazione della pala (alla quale deve essere sovrapposto il moto dell'elicottero, in caso di avanzamento, qui ipotizzato nullo): $U_v = \Omega R_v / 2 = U_{tip} / 2$. Il fluido è sempre aria.

$$\frac{U_v c_v}{\nu} = \frac{U_m c_m}{\nu} \quad \Rightarrow \quad c_m = c_v \frac{U_{tip}}{2 U_m} = 0.60 \text{ m} \quad (2.144)$$

In questo esempio, per avere similitudine in Re serve un modello con una corda maggiore della corda reale.

Gli effetti di comprimibilità possono essere valutati calcolando il numero di Mach. Il numero di Mach per la sezione di pala considerata nella realtà è $M_v \approx 100/340 \approx 0.3$, limite convenzionale per potere trascurare gli effetti di comprimibilità. Per la prova in galleria $M_m \approx 0.15$.

- Il comando di passo ciclico è periodico e armonico con frequenza $\Omega_v = U_{tip}/R_v = 29.19 \text{ s}^{-1}$. Per essere in similitudine con la realtà è necessario avere uguaglianza dei numeri di Strouhal (o *frequenze ridotte*, indicate da strutturisti e aeroelastici con k).

$$\frac{\Omega c_v}{U_v} = \frac{\omega_m c_m}{U_m} \quad \Rightarrow \quad \omega_m = \Omega \frac{c_v}{c_m} \frac{U_m}{U_v} = \Omega \left(\frac{U_m}{U_v} \right)^2 \quad (2.145)$$

- In un impianto a galleria aperta si può ricavare la formula per la stima della potenza necessaria da un bilancio integrale di energia cinetica

$$P \approx \frac{1}{2} \rho U^3 A . \quad (2.146)$$