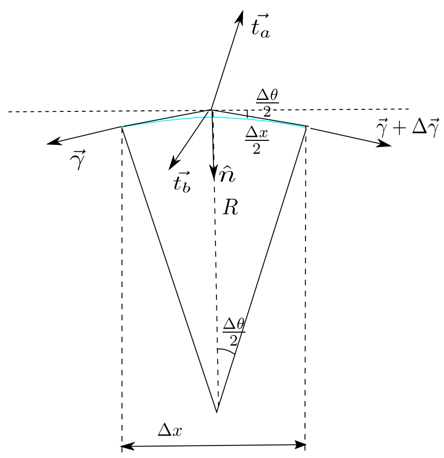
2. Tensione superficiale

Legge di Young-Laplace.

La superficie di interfaccia tra due liquidi può essere modellata come una membrana, una superficie bidimensionale all'interno della quale agisce una forza per unità di lunghezza, tangente alla superficie stessa. La forza per unità di superficie γ agente nella membrana viene definità *tensione superficiale*. La legge di Young-Laplace lega la tensione superficiale, il salto di pressione attraverso la superficie di interfaccia e la curvatura della superficie stessa. Nel caso di tensione superficiale costante, vale

$$p_b - p_a = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 2\gamma H \tag{2.1}$$

dove con R_1 e R_2 sono stati indicati i due raggi di curvatura della superficie e con H si è indicata la curvatura media.



Legge di Young-Laplace in due dimensioni.

Viene ricavata la legge di Young-Laplace in due dimensioni, scrivendo l'equilibrio di un elemento di membrana (monodimensionale) soggetta agli sforzi esercitati dai due fluidi su di essa e alla tensione superficiale al suo interno. L'equazione vettoriale di equilibrio viene proiettata in direzione normale e tangente alla superficie. La superficie nell'intorno di un punto, viene approssimata come un arco infinitesimo di una circonferenza, come in figura.

Si considera un elemento infinitesimo di superficie di dimensioni $\Delta x \sim R\Delta\theta$. Anche l'angolo $\Delta\theta$ è "piccolo" ($\cos\Delta\theta \sim 1$, $\sin\Delta\theta \sim \Delta\theta$, la dimensione dell'elemento di superficie è approssimabile con la sua proiezione su un piano normale a $\boldsymbol{\hat{n}}$, ...). Con R viene indicato il raggio di curvatura della superficie.

Si scrive l'equilibrio.

$$\boldsymbol{t_a}\Delta x + \boldsymbol{t_b}\Delta x - \boldsymbol{\gamma}(x) + \boldsymbol{\gamma}(x) + \Delta\boldsymbol{\gamma} = 0 \tag{2.2}$$

Proiettando nelle direzioni normale e tangente alla superficie,

$$\begin{aligned} (t_{an} + t_{bn})\Delta x + \gamma \sin\frac{\Delta\theta}{2} + (\gamma + \Delta\gamma)\sin\frac{\Delta\theta}{2} = 0 \\ (t_{at} + t_{bt})\Delta x - \gamma \cos\frac{\Delta\theta}{2} + (\gamma + \Delta\gamma)\cos\frac{\Delta\theta}{2} = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Inserendo i valori approssimati di $\sin\Delta\theta$ e $\cos\Delta\theta$, trascurando i termini di ordine superiore ($\Delta\gamma\Delta\theta$):

$$\begin{aligned} &(t_{an} + t_{bn})\Delta x + 2\gamma\frac{\Delta\theta}{2} = 0 \\ &(t_{at} + t_{bt})\Delta x + \Delta\gamma = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Se si può confondere la coordinata che descrive la superficie con la coordinata x, si può approssimare $\Delta\gamma \sim \frac{\partial\gamma}{\partial x}\Delta x$. Usando la relazione $\frac{\Delta x}{2} \sim R\frac{\Delta\theta}{2}$ e semplificando l'elemento Δx:

$$\begin{aligned} &(t_{an} + t_{bn}) + \frac{\gamma}{R} = 0 \\ &(t_{at} + t_{bt}) + \frac{\partial\gamma}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Nel caso in cui si consideri un problema di statica, lo sforzo **sul** fluido è dovuto solo al contributo di pressione, che agisce in direzione normale alla superficie: $\boldsymbol{t_a} = -P_a\boldsymbol{\hat{n}_a}$, $\boldsymbol{t_b} = -P_b\boldsymbol{\hat{n}_b}$. Lo sforzo che il fluido esercita sulla superficie di interfaccia è uguale in modulo e opposto in direzione. Le due normali sono tra di loro opposte: si sceglie di definire la normale $\boldsymbol{\hat{n}} = \boldsymbol{\hat{n}_a} = -\boldsymbol{\hat{n}_b}$. Di conseguenza, le componenti degli sforzi agenti sulla superficie di interfaccia, proiettati lungo $\boldsymbol{\hat{n}}$ e un versore tangente sono: $t_{an} = P_a$, $t_{bn} = -P_b$, $t_{at} = 0$, $t_{bn} = 0$. Se γ è costante (la tensione superficiale può avere gradienti non nulli a causa di gradienti di temperatura o di concentrazione), l'equilibrio in direzione tangente è identicamente soddisfatto.

$$P_a - P_b + \frac{\gamma}{R} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_b - P_a = \frac{\gamma}{R} \tag{2.6}$$

Estensione al caso 3D.
Per estendere la dimostrazione al caso 3D, nel quale la superficie è 2D, si procede in modo analogo a quanto nel paragrafo precedente. Va considerata la curvatura di una superficie e non di una curva (esistono due raggi di curvatura), ... Un utile primo riferimento di *geometria differenziale* di curve e superfici, è disponibile in rete seguendo il collegamento

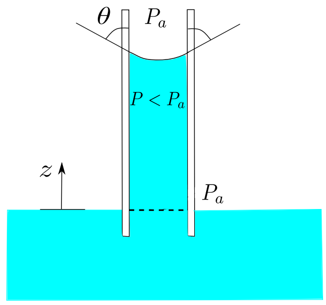
Differential Geometry, Shiffrin.

L'esistenza della tensione superificiale spiega il fenomeni della capillarità, l'esistenza dei menischi formati dalla superficie di separazione di due fluidi, il galleggiamento di insetti, graffette... sull'acqua, la formazione di superfici "minimali" di sapone, la bagnabilità delle superfici e la rottura di getti di piccolo diametro e la formazione di gocce. Infine, può essere utilizzata anche come mezzo non convenzionale di propulsione per barchette di carta

Boat without a motor - Marangoni effect

Esercizio 2.1 — Capillare. Sia θ l'angolo di contatto all'interfaccia tra aria, liquido e solido; sia γ la tensione superficiale tra aria e liquido; sia ρ la densità del liquido. Determinare l'altezza h dal liquido in una colonnina cilindrica di raggio $r = 0.5\ mm$ rispetto al livello nella vasca. Calcolare poi la pressione all'interno della colonnina. (Si può considerare valida l'approssimazione che la pressione agente sulla vasca e sulla superficie superiore del liquido all'interno della colonnina sia uguale).

Si considerino condizioni termodinamiche e materiale della colonnina tali che: se il liquido è acqua: $\rho = 999\ kg/m^3$, $\theta = 1°$, $\gamma = 0.073 N/m$. se il liquido è mercurio: $\rho = 13579\ kg/m^3$, $\theta = 140°$, $\gamma = 0.559 N/m$. ($h_{H_2O} = 2.97\ cm$, $P_{H_20} - P_0 = -291.95\ Pa$; $h_{Hg} = -1.28\ cm$, $P_{Hg} - P_0 = 1712.87\ Pa$) ■



Soluzione

Concetti. Tensione superficiale. Angolo di contatto. Capillarità. Menisco.

Svolgimento. Scrivendo l'equilibrio per il volume di fluido nel capillare si trova l'altezza h. Successivamente si trova la p usando la legge di Stevino. Infine si fanno osservazioni su angolo di contatto, menisco e salto di pressione all'interfaccia.

- Si scrive l'equilibrio del volume di fluido. Il problema è di statica. Le forze agenti sono la forza dovuta alla tensione superficiale (che agisce sul perimetro della superficie superiore) e la forza peso, poichè per ipotesi la pressione agente sulla superficie superiore è uguale alla pressione ambiente P_a; e quindi??? Perchè la componente verticale della risultante dovuta alla pressione esterna è zero??? Vedere immagine...).

$$F_\gamma = F_g \quad \Rightarrow \quad 2\pi r\gamma\cos\theta = \pi r^2 h\rho g \tag{2.7}$$

  E quindi:

$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h_{H_20} = 2.97\ cm \\ h_{Hg} = -1.28\ cm \end{cases} \tag{2.8}$$

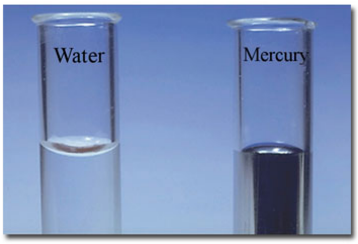
  Commenti sul risultato. L'effetto della capillarità è più evidente per tubi stretti (proporzionalità con $1/r$). La quota h può assumere sia valori positivi, sia valori negativi, in base al valore dell'angolo di contatto: $h \leq 0$, per $\theta \geq \pi/2$.

- Si calcola la pressione nel fluido in cima alla colonnina sfruttando la legge di Stevino.

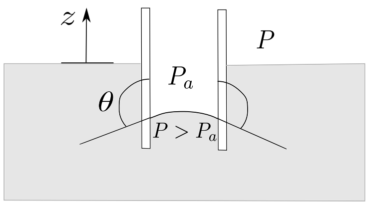
$$P = P_0 - \rho g h = P_0 - \frac{2\gamma\cos\theta}{r} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_{H_20} - P_0 = -291.95\ Pa \\ P_{Hg} - P_0 = 1712.87\ Pa \end{cases} \tag{2.9}$$

  Commenti sul risultato. $P - P_0 \leq 0$, per $\theta \leq \pi/2$. Al contrario $P - P_0 \geq 0$, per $\theta \geq \pi/2$. Questi risultati sono compatibili (meno male) con le relazioni tra curvatura (stretta parente del menisco e dell'angolo di contatto) e il salto di pressione.

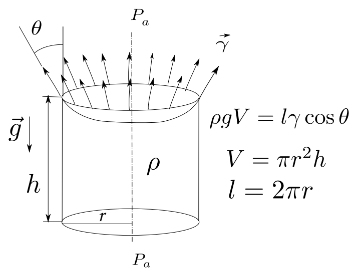
$\theta \leq \pi/2$	$h \geq 0$	$P \leq P_a$
$\theta \geq \pi/2$	$h \leq 0$	$P \geq P_a$



(a) *D*ifferenza tra il menisco formato dall'acqua e dal mercurio con aria e solido (quale?): diversa concavità della superficie.

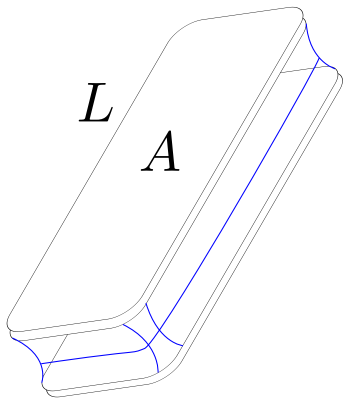


(b) *R*appresentazione del caso del problema in cui il liquido è mercurio: l'angolo di contatto è maggiore dell'angolo retto, la quota all'interno del capillare è minore di quella nella vasca. Il caso dell'acqua è rappresentato a finaco del testo del problema.



(c) *E*quilibrio del volume di fluido nella colonnina. La pressione atmosferica P_a non influenza l'equilibrio. Perchè?

Esercizio 2.2 — Attrazione di due superfici. Due lamine piane uguali parallele sono separate da una distanza d. Tra le lamine è presente un sottile strato di liquido. Sono note l'area della superficie A e il perimetro L delle due lamine, la pressione ambiente p_a, la tensione superficiale del liquido γ e l'angolo di contatto θ. Si chiede di determinare la componente perpendicolare alle lamine della forza agente su ciascuna delle due lamine. ■



Soluzione

Concetti. Tensione superficiale. Angolo di contatto.

Svolgimento. La condizione descritta nell'esercizio è una condizione equilibrio. La forza agente su una lamina è dovuta a due fenomeni: la tensione superficiale sul perimetro del fluido e la differenza di pressione tra fluido e ambiente. Si consideri positiva la forza se è una forza di attrazione.

$$F = F_\gamma + F_p \tag{2.10}$$

- Calcolo di F_γ.

$$F_\gamma = \gamma L \sin \gamma \tag{2.11}$$

- Calcolo di F_p. Il salto di pressione viene calcolato scrivendo l'equilibrio all'interfaccia.

$$F_p = (p_a - p)A \tag{2.12}$$

con:

$$(p_a - p)d = 2\gamma \cos \theta \tag{2.13}$$

- La componente totale richiesta risulta quindi:

$$F = \frac{2\gamma A \cos \theta}{d} + L\gamma \sin \theta \tag{2.14}$$