VALENTIN HEIDER GYMNASIUM

# Das SIR - Modell

W Seminar Mathematik:

Chaos, Fraktale und andere mathematische Faszinationen

Nicolas Martin

8.11.2022

# Inhaltsverzeichnis

# 1 EINLEITUNG

Das *Covid-19* Virus hat in den letzten Jahren Eindrucksvoll bewiesen, wie schnell sich eine Epidemie ausbreiten und zur Pandemie werden kann, Sowie welche verheerende Wirkung ebensolche auf die gesamte Bevölkerung und Wirtschaft der Welt haben. Immer wieder teilten Experten in den Medien neue Verhaltens- und Hygieneregelungen mit, durch welche die Verbreitung des Virus Verlangsamt werden konnte. Auch Prognosen über die Zukünftige Entwicklung der Pandemie wurden Veröffentlicht. Doch wie genau Berechnen Epidemiologen die Entwicklung einer Epidemie um Vorhersagen zu treffen und die geeignetsten Gegenmaßnamen zur Eindämmung einer solchen zu ermitteln?

Diese Literaturarbeit soll zunächst das **SIR-Modell** mit allen Voraussetzungen Betrachten, Die Einhergehenden Differenzialgleichungen und die Basisreproduktionszahl Mathematisch Analysieren und unter Betrachtung der Flexibilität des Modells evaluieren. Des weiteren veranschaulicht die Arbeit das Mathematische Chaos des Modells ferner welche Veränderungen mit verschiedenen Änderungen der Formeln und Variablen Einhergehen. Die Präzision und Effektivität in der Anwendung soll durch Den Fall *Covid-19* verdeutlicht und mit HIER FALL EINFÜGEN verglichen werden. Ausgenommen Der Fallbeispiele und der Dynamischen Gesamtbevölkerung werden keine Abweichungen des Modells im Detail Besprochen.

# 2 GRUNDLAGEN DES SIR-MODELLS

Wenn man den Verlauf einer Epidemie von Anfang bis Ende anhand eines Mathematischen Modells beschreiben möchte, ist das **SIR-Modell** mit nur zwei Parametern und drei Differentialgleichungen in der einfachsten Form ideal, um sich einen groben Überblick zu verschaffen. [2, vgl.] Im diesem Kapitel wird auf den Hintergrund, die Optionen und Limitierungen und die damit Einhergehenden Möglichkeiten der Anwendung des Modells eingegangen.

## 2.1 Entstehungsgeschichte

Das **Kermack-McKendrick Modell** ist die Bekannteste Ausführung des **SIR-Modells** welches von den Infektionsepidemiologen *William Ogilvy Kermack* und *Anderson Gray McKendrick* im Jahr 1927 Im Zusammenhang mit dem Artikel *"A contribution to the mathematical theory of epidemics"* [1] im Auftrag der *"Royal Society London"* [6, s. 1] Entwickelt und Veröffentlicht wurde. [6, vgl.]

*"The paper became a classic in infectious disease epidemiology and has been cited innumerable times"* [6, s. 1]

Seit dem wird das **SIR-Modell** und Variationen Weltweit verwendet um den Verlauf verschiedenster Infektionen wie Beispielsweise Ebola, Masern und Influenza nachzuvollziehen und/oder Vorherzusagen. [5, vgl. s. 3]

## 2.2 Voraussetzungen

Da das **SIR Modell** als relativ simpel gilt, kommt es mit einigen Voraussetzungen die erfüllt werden müssen damit es Anwendbar ist. Zuerst Muss die Gesamtbevölkerung $N$ in drei Kategorien unterteilt werden:

- $S$: Suszeptibel (engl. Susceptible)
- $I$: Infiziert (engl. Infected)
- $R$: Entfernt (engl. Removed)
  *Keine Eindeutigen Fachtermini vorhanden*

Wobei ($S$) alle Infizierbaren Individuen, ($I$) alle Infizierten und **gleichzeitig** Infektiösen und ($R$) alle Genesenen oder verstorbenen beinhaltet. Zu beachten ist das sich Individuen jeweils immer nur in Einer Population befinden können und sich Individuen der Population ($R$) kein weiteres mal Infizieren können da sie als Immun Gelten. Hierbei ist es Egal ob das Individuum Genesen oder Verstorben ist.(vgl. Abb. 2.1) [2, vgl.] Alle Populationen Interagieren untereinander mit der selben Wahrscheinlichkeit die von nur zwei Parametern beta ($\beta$) und gamma ($\gamma$) Beeinflusst

wird. $\beta$ steht hier für die Übertragungsrate (engl. transmission rate) welche angibt, wie schnell Individuen der Suszeptiblen Population in die Infizierte Population übergehen. $\gamma$ hingegen stellt hier die Erholungsrate (engl. recovery rate) dar, und gibt an wie schnell die Population $I$ sich erholt oder verstirbt.
Es wird davon ausgegangen das $N$, $\beta$, $\gamma$ Konstant sind.


Abbildung 2.1: SIR Gruppenverteilung

## 2.3 Anwendung

Das **SIR-Modell** in der hier dargestellten Form kann das verhalten einer Epidemie anhand zwei unveränderlicher Parameter Darstellen und zeigt so auf wie lange es braucht, bis eine Bevölkerungsgruppe die Infektion überstanden hat. Auch die menge an Personen, welche bis zum Ende in der Suszeptiblen Gruppe ($S$) verblieben sind kann ermittelt werden. Worin das **SIR-Modell** allerdings am vielversprechendsten erscheint ist, das es die Grundlage für komplexere Modelle liefert, welche man präzise auf eine bestimmte Infektion anpassen kann. So wird beispielsweise in *"The SIR Model with Vital Dynamics"* [3, s. 132] durch hinzufügen von Parametern für Geburten und Tode die Gesamtbevölkerung als Dynamisch Betrachtet, was bereits näher an ein Realbeispiel herankommt. Dieses Modell wird in *3.3* Genauer Beschrieben.
Zusätzlich können die Gruppen erweitert oder entfernt werden, was dann zu Modellen wie dem **SIRS-Modell**, welches eine erneute Infektion ermöglicht, dem **SEIR-Modell**, welches eine Personengruppe hinzufügt die Infiziert wurde, jedoch noch nicht ansteckend ist($E$: Exposed) oder dem **SI-Modell**, in welchem Individuen keine Immunität aufbauen, führen kann.
Ein weiteres Ziel des Modells ist die Bestimmung der Basisreproduktionszahl(siehe *3.2*), welche angibt, ob sich eine Infektion zu einer Epidemie entwickelt, sich Endemisch hält oder auf Dauer ausstirbt. [4, vgl.]

# 3 MATHEMATISCHER AUFBAU

Big Ansage jajajaja
$N$ kann jetzt zu jeder Zeit ($t$) folgendermaßen definiert werden: [5]

$$S_{(t)} + I_{(t)} + R_{(t)} = N$$

## 3.1 Drei Differentialgleichungen

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = -\beta SI$$

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \beta SI - \gamma I$$

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \gamma I$$

## 3.2 Basisreproduktionszahl

$\mathrm{R}_0$

## 3.3 Varianten

dynamic vitals
νneugeburt
µtode
ϱImpfungen

## 3.4 Einflussfaktoren

impfung, distancing, Hygiene, Mutationen

## 3.5 Chaos

leicht veränderte startwerte, starke abweichung (100

# 4 FALLBEISPIELE

epic Explanation

## 4.1 Covid 19

FRAGE: Zitate vgl. 3 FRAGE: ToC Font, Font In general Kopfzeile Fußzeile

## 4.2 Jährliche flu

# 5 Fazit

# 6 ANHANG

dont forget graphic verzeichnis

# LITERATUR

[1] William Ogilvy Kermack und A. G. McKendrick. "A contribution to the mathematical theory of epidemics". In: (1927). URL: `https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1927.0118`.

[2] William G. Faris. *The SIR model of an epidemic*. Arizona: arxiv.org, 2021.

[3] Herbert W. Hethcote. "Three Basic Epidemiological Models". In: *Applied Mathematical Ecology*. Bd. 18. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1989, S. 119–144. ISBN: 978-3-642-61317-3.

[4] Alexander Kraemer. *Infektionsepidemiologie: Methoden, moderne Surveillance, mathematische Modelle, Global Public Health*. Berlin: Springer, 2003, S. 81–91. ISBN: 3642556124.

[5] Rahul Saxena und Mahipal Jadeja und Vikrant Bhateja. *Exploring Susceptible-Infectious-Recovered (SIR) Model for Covid-19 Investigation*. Lucknow: Springer, 2022. ISBN: 978-981-19-4174-0.

[6] D. Breda und O. Diekmann und W. F. de Graaf und A. Pugliese und R. Vermiglio. "On the formulation of epidemic models (an appraisal of Kermack and McKendrick)". In: *Journal of Biological Dynamics* (2012), S. 103–117.