

VALENTIN HEIDER GYMNASIUM



Das SIR - Modell

W Seminar Mathematik:
Chaos, Fraktale und andere mathematische Faszinationen

Nicolas Martin

8.11.2022

INHALTSVERZEICHNIS

1	Einleitung	1
2	Das SIR-Modell	2
2.1	Entstehung	2
2.2	Voraussetzungen	2
2.3	Anwendung	3
3	Mathematischer Aufbau	4
3.1	Drei Differentialgleichungen	4
3.2	Basisreproduktionszahl	4
3.3	Varianten	4
3.4	Einflussfaktoren	4
3.5	Chaos	4
4	Fallbeispiele	5
4.1	Covid 19	5
4.2	Jährliche flu	5
5	Fazit	6
6	Anhang	7
	Literatur	8

1 EINLEITUNG

Das *Covid-19* Virus hat in den letzten Jahren Eindrucksvoll bewiesen, wie schnell sich eine Epidemie ausbreiten und zur Pandemie werden kann, Sowie welche verheerende Wirkung ebensolche auf die gesamte Bevölkerung und Wirtschaft der Welt haben. Immer wieder teilten Experten in den Medien neue Verhaltens- und Hygieneregeln mit durch welche die Verbreitung des Virus Vorhergesehen und Verlangsamt werden konnte. Auch Prognosen über die Zukünftige Entwicklung der Pandemie wurden Veröffentlicht. Doch wie genau Berechnen Epidemiologen die Entwicklung einer Epidemie um Vorhersagen zu treffen und die geeignetsten Gegenmaßnahmen zur Eindämmung einer solchen zu ermitteln?

Diese Literaturarbeit soll zunächst das **SIR-Modell** mit allen Voraussetzungen Betrachten, Die Einhergehenden Differenzialgleichungen und die Basisreproduktionszahl Mathematisch Analysieren und unter Betrachtung der Flexibilität des Modells evaluieren. Des weiteren veranschaulicht die Arbeit das Mathematische Chaos des Modells ferner welche Veränderungen mit verschiedenen Änderungen der Formeln und Variablen Einhergehen. Die Präzision und Effektivität in der Anwendung soll durch Den Fall *Covid-19* verdeutlicht und mit HIER FALL EINFÜGEN verglichen werden. Ausgenommen Der Fallbeispiele und der Dynamischen Gesamtbevölkerung werden keine Abweichungen des Modells im Detail Besprochen.

2 DAS SIR-MODELL

Wenn man den Verlauf einer Epidemie von Anfang bis Ende anhand eines Mathematischen Modells beschreiben möchte, ist das **SIR-Modell** mit nur zwei Parametern und drei Differentialgleichungen in der einfachsten Form ideal, um sich einen groben Überblick zu verschaffen. [Far21, vgl.] Im diesem Kapitel wird auf den Hintergrund, die Möglichkeiten und Limitierungen und die damit Einhergehenden Möglichkeiten der Anwendung des Modells eingegangen.

2.1 Entstehung

Das Kermack-McKendrick Modell ist eine Klassische Ausführung des **SIR-Modells** von den gleichnamigen Infektionsepidemiologen CONTINUE babab

babababbab

abababaaba

abababab

ababababab

ababababab

babababababbabab

bababababbab

2.2 Voraussetzungen

Die erste Bedingung für das SIR-Modell ist die Aufteilung der Gesamtbevölkerung N In drei Kategorien:

- S : Suszeptibel (engl. Susceptible)
- I : Infiziert (engl. Infected)
- R : Entfernt (engl. Removed)

Keine Eindeutigen Fachtermini vorhanden

Wobei (S) alle Infizierbaren Individuen, (I) alle Infizierten und gleichzeitig Infektiösen und (R) alle Genesenen oder verstorbenen beinhaltet. Zu beachten ist das sich Individuen jeweils immer nur in Einer Gruppe befinden können und sich Individuen der Gruppe (R) kein weiteres mal Infizieren können.(vgl. Abb. 2.1) Das Modell wird von nur zwei Parametern beta (β) und gamma (γ) Beeinflusst. β steht hier für die Übertragungsrate (engl. transmission rate) welche angibt, wie schnell Individuen der Suszeptiblen Gruppe in die Infizierte Gruppe übergehen. γ hingegen stellt hier die Erholungsrate (engl. recovery rate) dar, und gibt an wie schnell die Gruppe I sich erholt oder verstirbt.

Es wird davon ausgegangen das N, β, γ Konstant sind.



Abbildung 2.1: SIR Gruppenverteilung

2.3 Anwendung

Das **SIR-Modell** in der hier dargestellten Form kann das Verhalten einer Epidemie anhand zwei unveränderlicher Parameter darstellen und zeigt so auf, wie lange es braucht, bis eine Bevölkerungsgruppe die Infektion überstanden hat. Auch die Menge an Personen, welche bis zum Ende in der Suszeptiblen Gruppe (S) verblieben sind, kann ermittelt werden. Worin das **SIR-Modell** allerdings am vielversprechendsten erscheint, ist, dass es die Grundlage für komplexere Modelle liefert, welche man präzise auf eine bestimmte Infektion anpassen kann. So wird beispielsweise in *"The SIR Model with Vital Dynamics"* [Het89, S. 132] durch Hinzufügen von Parametern für Geburten und Tode die Gesamtbevölkerung als dynamisch betrachtet, was bereits näher an ein Realbeispiel herankommt. Dieses Modell wird in 3.3 genauer beschrieben.

Zusätzlich können die Gruppen erweitert oder entfernt werden, was dann zu Modellen wie dem **SIRS-Modell**, welches eine erneute Infektion ermöglicht, dem **SEIR-Modell**, welches eine Personengruppe hinzufügt, die infiziert wurde, jedoch noch nicht ansteckend ist (E : Exposed) oder dem **SI-Modell**, in welchem Individuen keine Immunität aufbauen, führen kann.

Ein weiteres Ziel des Modells ist die Bestimmung der Basisreproduktionszahl (siehe 3.2), welche angibt, ob sich eine Infektion zu einer Epidemie entwickelt, sich endemisch hält oder auf Dauer ausstirbt. [Kra03, vgl.]

3 MATHEMATISCHER AUFBAU

Big Ansage jajajaja

N kann jetzt zu jeder Zeit (t) folgendermaßen definiert werden: [Rah22]

$$S_{(t)} + I_{(t)} + R_{(t)} = N$$

3.1 Drei Differentialgleichungen

3.2 Basisreproduktionszahl

3.3 Varianten

dynamic vitals

3.4 Einflussfaktoren

impfung, distancing, Hygiene, Mutationen

3.5 Chaos

leicht veränderte startwerte, starke abweichung (100

4 FALLBEISPIELE

epic Explanation

4.1 Covid 19

4.2 Jährliche flu

5 FAZIT

6 ANHANG

LITERATUR

- [Far21] William G. Faris. *The SIR model of an epidemic*. Arizona: arxiv.org, 2021.
- [Het89] Herbert W. Hethcote. “Three Basic Epidemiological Models”. In: *Applied Mathematical Ecology*. Bd. 18. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1989, S. 119–144. ISBN: 978-3-642-61317-3.
- [Kra03] Alexander Kraemer. *Infektionsepidemiologie: Methoden, moderne Surveillance, mathematische Modelle, Global Public Health*. Berlin: Springer, 2003, S. 81–91. ISBN: 3642556124.
- [Rah22] Vikrant Bhateja Rahul Saxena Mahipal Jadeja. *Exploring Susceptible-Infectious-Recovered (SIR) Model for Covid-19 Investigation*. Lucknow: Springer, 2022. ISBN: 978-981-19-4174-0.