

VALENTIN HEIDER GYMNASIUM

JAHRGANG 2021/2023



Das SIR - Modell

W Seminar Mathematik:
Chaos, Fraktale und andere mathematische Faszinationen

Herr Jan Neuendorf

Nicolas Martin

8.11.2022

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen Des SIR-Modells	2
2.1	Entstehungsgeschichte	2
2.2	Voraussetzungen	2
2.3	Anwendung	3
3	Mathematischer Aufbau	4
3.1	Variablen des SIR Modells	4
3.2	Reproduktionsrate einer Infektion	5
3.3	Graphische Darstellung Des SIR-Modells	6
3.4	Variationen des SIR-Modells	7
3.4.1	Modell zur Berechnung von Infektionswellen	7
3.4.2	Modell mit dynamischer Gesamtbevölkerung	8
3.5	Berechenbare Werte des SIR-Modells	8
4	Fallbeispiele	9
4.1	Covid 19	9
4.2	Jährliche flu	9
5	Fazit	10
	Literatur	11

1 EINLEITUNG

Das *Covid-19* Virus hat in den letzten Jahren Eindrucksvoll bewiesen, wie schnell sich eine Epidemie ausbreiten und zur Pandemie werden kann, Sowie welche verheerende Wirkung ebensolche auf die gesamte Bevölkerung und Wirtschaft der Welt haben. Immer wieder teilten Experten in den Medien neue Verhaltens- und Hygieneregeln mit, durch welche die Verbreitung des Virus Verlangsamt werden konnte. Auch Prognosen über die Zukünftige Entwicklung der Pandemie wurden Veröffentlicht. Doch wie genau Berechnen Epidemiologen die Entwicklung einer Epidemie um Vorhersagen zu treffen und die geeignetsten Gegenmaßnahmen zur Eindämmung einer solchen zu ermitteln?

Diese Literaturarbeit soll zunächst das **SIR-Modell** mit allen Voraussetzungen Betrachten, Die Einhergehenden Differenzialgleichungen und die Basisreproduktionszahl Mathematisch Analysieren und unter Betrachtung der Flexibilität des Modells evaluieren. Des weiteren veranschaulicht die Arbeit das Mathematische Chaos des Modells ferner welche Veränderungen mit verschiedenen Abwandlungen der Formeln und Variablen Einhergehen. Die Präzision und Effektivität in der Anwendung soll durch Den Fall *Covid-19* verdeutlicht und mit der Jährlichen Influenza-Grippe verglichen werden. Ausgenommen Der Fallbeispiele und der Dynamischen Gesamtbevölkerung werden keine Abweichungen des Modells im Detail Besprochen.

2 GRUNDLAGEN DES SIR-MODELLS

Wenn man den Verlauf einer Epidemie von Anfang bis Ende anhand eines Mathematischen Modells beschreiben möchte, ist das **SIR-Modell** mit nur zwei Parametern und drei Differentialgleichungen in der einfachsten Form ideal, um sich einen groben Überblick zu verschaffen [3]. Im diesem Kapitel wird auf den Hintergrund, die Optionen und Limitierungen und die damit Einhergehenden Möglichkeiten der Anwendung des Modells eingegangen.

2.1 Entstehungsgeschichte

Das **Kermack-McKendrick Modell** ist die Bekannteste Ausführung des **SIR-Modells** welches von den Infektionsepidemiologen *William Ogilvy Kermack* und *Anderson Gray McKendrick* im Jahr 1927 Im Zusammenhang mit dem Artikel “*A contribution to the mathematical theory of epidemics*“ [1] im Auftrag der “*Royal Society London*“ Entwickelt und Veröffentlicht wurde [9].

“The paper became a classic in infectious disease epidemiology and has been cited innumerable times“ [9]

Seit dem wird das **SIR-Modell** und Variationen Weltweit verwendet um den Verlauf verschiedenster Infektionen wie Beispielsweise Ebola, Masern und Influenza nachzuvollziehen und/oder Vorherzusagen. [8]

2.2 Voraussetzungen

Da das **SIR Modell** als relativ simpel gilt, kommt es mit einigen Voraussetzungen die erfüllt werden müssen damit es Anwendbar ist. Zuerst Muss die Gesamtbevölkerung N in drei Kategorien unterteilt werden:

- S : Suszeptibel (engl. Susceptible)
- I : Infiziert (engl. Infected)
- R : Entfernt (engl. Removed)

Wobei (S) alle Infizierbaren Individuen, (I) alle Infizierten und **gleichzeitig** Infektiösen und (R) alle Genesenen oder verstorbenen beinhaltet. Zu beachten ist das sich Individuen jeweils immer nur in Einer Population befinden können und sich Individuen der Population (R) kein weiteres mal Infizieren können da sie als Immun Gelten. Hierbei ist es Egal ob das Individuum Genesen oder Verstorben ist (vgl. Abb. 2.1) [3]. Alle Populationen Interagieren untereinander mit der selben Wahrscheinlichkeit die von nur zwei Parametern beta (β) und gamma (γ) Beeinflusst wird. β steht hier für die Übertragungsrate (engl. transmission rate) welche angibt, wie schnell

Individuen der Suszeptiblen Population in die Infizierte Population übergehen. γ hingegen stellt hier die Erholungsrate (engl. recovery rate) dar, und gibt an wie schnell die Population I sich erholt oder verstirbt. Es wird davon ausgegangen das N , β , γ **Konstant** und **Positiv** sind. Zu Beginn der Epidemie sei die Menge der Population R gleich Null, die Menge S ungefähr N und die Menge I ungefähr Null (Mindestens ein Individuum Infiziert), das das **SIR-Modell** von einer neuen Infektion ausgeht, zu welcher am Anfang keine Immunität existiert.

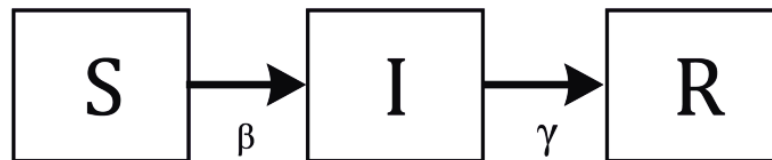


Abb. 2.1: SIR Gruppenverteilung

2.3 Anwendung

Das **SIR-Modell** in der hier dargestellten Form kann das Verhalten einer Epidemie anhand zwei unveränderlicher Parameter darstellen und zeigt so auf, wie lange es braucht, bis eine Bevölkerungsgruppe die Infektion überstanden hat. Auch die Menge an Personen, welche bis zum Ende in der Suszeptiblen Gruppe (S) verblieben sind, kann ermittelt werden. Eine große Limitierung des Modells findet sich in der Tatsache, dass es durch den einfachen Aufbau mit wenigen Parametern und Unrealistischen Voraussetzungen wie einer konstanten Bevölkerung oder der direkten Infektiosität von Individuen nur einen ungefähren Verlauf, jedoch keine präzise noch detaillierte Auskunft über Realszenarien bietet. Durch die Annahme, dass zu Beginn keine Immunität existiert, und die Parameter als konstant betrachtet werden, ist das Modell des Weiteren nicht zur Berechnung von Infektionswellen geeignet. Allerdings bildet das **SIR-Modell** eine Grundlage für komplexere Modelle, welche für bestimmte Infektionen und Umstände angepasst werden, und somit detailreiche Prognosen sowie Berichte über die Entwicklung bereitstellen können. So wird beispielsweise in *The SIR Model with Vital Dynamics* [5] durch Hinzufügen von Parametern für Geburten und Tode die Gesamtbevölkerung als dynamisch betrachtet, was bereits näher an ein Realbeispiel herankommt. Dieses Modell wird in 3.3 genauer beschrieben. Zusätzlich können die Gruppen erweitert oder entfernt werden, was dann zu Modellen wie dem **SIRS-Modell**, welches eine erneute Infektion ermöglicht und somit auch für Infektionswellen genutzt werden kann, dem **SEIR-Modell**, welches eine Personengruppe hinzufügt, die infiziert wurde, jedoch noch nicht ansteckend ist (E : Exposed), oder dem **SI-Modell**, in welchem Individuen keine Immunität aufbauen, führen kann. Ein weiterer Anwendungsgrund des Modells ist die Bestimmung der Basisreproduktionszahl (siehe 3.2), welche angibt, ob sich eine Infektion zu einer Epidemie entwickelt, sich endemisch hält oder auf Dauer ausstirbt [6]. So ist das

Modell als solches zwar nur als ein Mathematisches Idealverhältnis einer Epidemie von nutzen, doch ist es ein Essenzieller teil der Modernen Infektionsepidemiologie welches von Forschen auf der Ganzen Welt dafür genutzt wird, Virale Krankheiten zu dokumentieren und den Ausbruch in eine Epidemie zu verhindern [8].

3 MATHEMATISCHER AUFBAU

Nachdem die Wichtigsten Begriffe und Bedingungen für das **SIR-Modell** nun bekannt sind Widmet sich dieses Kapitel der Funktion und Zusammensetzung des Modells auf mathematischer Ebene, woraufhin der Fokus auf die Basisreproduktionszahl sowie auf einige Abweichungen des Modells gelegt wird, bis schlussendlich die Chaotischen Züge des Modells analysiert werden. Wenn eine konstante Bevölkerung N in drei Gruppen aufgeteilt wird kann N jetzt zu jedem Zeitpunkt (t) folgendermaßen definiert werden [8], [3]:

$$S_{(t)} + I_{(t)} + R_{(t)} = N$$

Oder Proportional:

$$S + I + R = 1$$

Wobei gilt: $S > 0$, $I > 0$, $R \geq 0$.

Während die Modell definierenden Parameter β und γ konstant sind, Verändern sich die Größen S , I und R im verlauf von t . Man spricht von einem Geschlossenen System [3].

3.1 Variablen des SIR Modells

Zunächst werden die Konstanten Parameter noch einmal genauer betrachtet: Die Erholungsrate γ Beeinflusst, wie lange die Infektion durchschnittlich anhält und wird folgendermaßen berechnet:

$$\gamma = \frac{1}{T}$$

Wenn also T drei Tagen entspricht, ist γ ein Drittel. Die Übertragungsrate β hingegen beschreibt, wie oft eine Begegnung der Gruppen S und I vorkommt, welche zu einer Infektion des Individuums der S Population führt [6]. Im Klassischen **SIR-Modell** wird von einer vollkommen Zufälligkeit der Kontakte ausgegangen, der Parameter kann durch weitere Faktoren wie Hygiene erweitert werden [6], [1].

Da das Modell die Veränderung nur in eine Richtung zulässt ($S \rightarrow I \rightarrow R$) lässt sich feststellen, dass die Menge S nur abnehmen, und die Menge R nur zunehmen kann, und beide von I beeinflusst werden. Anhand dieser Informationen lassen sich folgende nichtlineare Differenzialgleichungen für die Änderungsraten, also die Populationsgrößen Veränderung, zu dem Zeitpunkt t aufstellen:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = -\beta SI$$

Änderungsrate der Suszeptiblen Population $s'(t)$

Die Suszeptible und die Infizierte Population haben den Parameter β gemeinsam. S wird mit der Rate β eine Menge an Individuen abgezogen ($-\beta$) und dann I hinzugefügt. Da I aus mehreren Infizierten Individuen besteht, welche jeweils β viele Suszeptible anstecken können, wird βS mit I multipliziert. Die Population der Entfernten Individuen wird berechnet indem der Parameter γ mit I mal-genommen wird, da I mit der Rate γ Entfernt wird [1], [8]:

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \gamma I$$

Änderungsrate der Entfernten Population $r'(t)$

Da alle Gleichungen zu jedem Zeitpunkt zusammen 1 ergeben müssen ($S + I + R = 1$) und I ein Faktor der anderen Gleichungen ist, kann $s'(t)$ durch Kombination der anderen Gleichung und Umkehrung der Parameter bestimmt werden [8], [3]:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \beta SI - \gamma I$$

Änderungsrate der Infizierten Population $s'(t)$

Hier bekommt I Zuwachs von S mit dem Parameter β und nimmt mit dem Parameter γ ab.

3.2 Reproduktionsrate einer Infektion

Wenn eine aktuelle Infektion mit dem **SIR-Modell** betrachtet wird, soll an erster Stelle erkenntlich gemacht wie sich die Infektion verhält oder verhalten wird. Es gibt drei Verhaltensweisen, die durch das **SIR-Modell** festgestellt werden können: Endemisch wird eine Infektion benannt, welche regelmäßig an einem Ort auftritt und einigermaßen konstante Infektionen aufweist. Epidemisch wird eine Infektion dann genannt, wenn sie an einem Ort unregelmäßig auftritt und schneller Neuinfektionen auftreten wie bereits Infizierte Genesen/Sterben, sich also verbreitet. Eine globale Epidemie wird als Pandemie bezeichnet und nicht separat von dem **SIR-Modell** erfasst. Das epidemische Verhalten wird in zwei Phasen aufgeteilt: die Ausbreitung und den Rückgang der epidemischen Phase. Das kommt daher, dass nach einer gewissen Zeit die Meisten

oder alle Individuen in die Infizierte oder Entfernte Population aufgerückt sind, sodass Neuinfektionen nicht mehr oder nur schwer möglich sind, sodass die Infektionswelle abflacht [8], [5]. Das **SIR-Modell** ermöglicht die Berechnung der sogenannten Basisreproduktionszahl r_0 welche zu Beginn der Infektion $t = 0$ das zukünftige Verhalten der Infektion angibt. Berechnet wird diese anhand der beiden Parameter β und γ da diese ja die zu und Abnahme der Population I beschreiben. Des Weiteren spielt auch die proportionale Größe von S eine Rolle, da zur Infektion ein Suszeptibles Individuum benötigt wird. Da zu Beginn des Modells S ungefähr 1 ist, kann dieser Faktor zur Berechnung der Basisreproduktionszahl vernachlässigt werden. Deshalb gilt Solange die Übertragungsrate β größer als die Erholungsrate γ ist nimmt die Menge der Population I zu. Die Rechnung dazu sieht folgendermaßen aus [9], [8]:

$$r_0 = \frac{\beta}{\gamma}$$

$r_0 > 1$ = Epidemisch, $r_0 \approx 1$ = Endemisch, $r_0 < 1$ = Rückgängig. Im Fall von $R = 2$ infiziert jedes Individuum der Population I zwei weitere Personen, bevor es in R übergeht. In diesem Fall wird von exponentiellem Wachstum gesprochen. Wenn man die derzeitige Reproduktionszahl eines Zeitpunkts t ermitteln möchte, um herauszufinden in welchem Zustand sich die Infektion befindet, muss die Änderungsrate von S berücksichtigt werden:

$$r_t = \frac{\beta S_t}{\gamma}$$

Mithilfe dieser Gleichung lässt sich beispielsweise erkennen, welchen Effekt getroffene Maßnahmen (Social Distancing, Impfung) auf die Ausbreitung der Infektion haben.

3.3 Graphische Darstellung Des SIR-Modells

Ein essenzieller Part des **SIR-Modells** ist die graphische Darstellung des Infektionsverlaufs um eine visuelle Übersicht der Epidemie für die Allgemeinheit, und das schnelle Auslesen von Daten an spezifischen Punkten zu haben. In einem Koordinatensystem stellt die x-Achse die Zeit in Tagen, und die y-Achse die Bevölkerungsanzahl dar. Drei Graphen der in 3.1 angesprochenen Differenzialgleichungen zeigen die Änderung der Größe der jeweiligen Population auf. Auch hier gilt das zu jedem Zeitpunkt die Summe der Flächen die Größe N ergibt welche so eine horizontale Asymptote für die Graphen bildet (Abb. 3.1). Die Startwerte der Gruppen an $t = 0$ sind: $S_0 \approx 1, I_0 \approx 0$ wobei: $S_0 < 1, I_0 > 0$ sodass beide zusammen die Menge 1 ergeben [3]. Da zu Beginn kein Individuum Immunität besitzt und sich mindestens eine infizierte Person in der Bevölkerung befinden muss, um den Ausbruch auszulösen. Daher gilt: $R_0 = 0, R_0 \geq 0$ (nicht zu verwechseln mit der Basisreproduktionszahl r_0). Anhand dieser Grafik lässt sich auslesen wann das Wachstum der Epidemie endet, wann sie ausstirbt sowie die Menge der Individuen die zu keinem Zeitpunkt infiziert waren [4].

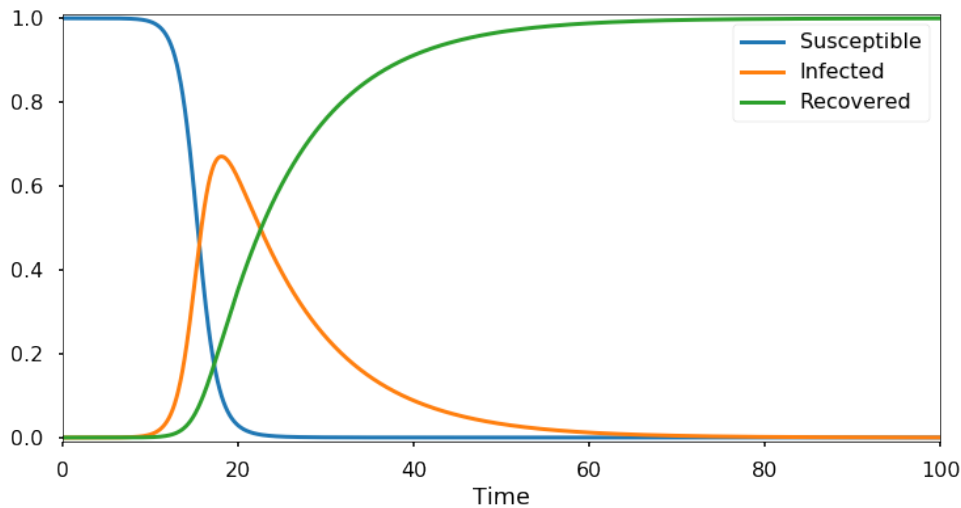


Abb. 3.1: SIR Infektionsverlauf

3.4 Variationen des SIR-Modells

Nachdem die Grundlegenden Rechnungen und Parameter des **SIR-Modells** nun bekannt sind, werden im folgenden einige gängige Variationen des Modells genauer betrachtet. Wie bereits Erwähnt ist das Modell prädestiniert dafür, verändert oder erweitert zu werden um akkuratere Berechnungen zu Epidemien zu ermöglichen. Diese Veränderungen können das hinzufügen weiterer Populationen, Parameter, sowie das anpassen der Startbedingungen beinhalten [5].

3.4.1 Modell zur Berechnung von Infektionswellen

Wie am Beispiel *Covid-19* zu erkennen ist, gibt es Epidemien die keine oder nur Temporäre Immunität erlauben, was bedeutet, das Infektionswellen entstehen in welchen die Infektion ausbricht und wieder zurückgeht. Um das **SIR-Modell** für eine solche Situation anzupassen, kann Entweder die Entfernte Gruppe durch eine Susceptible ersetzt werden was **SIS-Modell** genannt wird, oder eine weitere Susceptible Gruppe zu einem **SIRS-Modell** angefügt werden. Die Startbedingungen und Parameter für das **SIS-Modell** bleiben dieselben des **SIR-Modells**. Aus den Drei Differentialgleichungen werden zwei:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = -\beta SI + \gamma I$$

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \beta SI - \gamma I$$

S nimmt mit der Infektionsrate β ab, bekommt jedoch die Menge der Erholungsrate γ dazu, während für I das genaue Gegenteil gilt. Individuen bewegen sich so von S zu I in einem ewigen Kreislauf [5]. Das **SIRS-Modell** wird eingesetzt, wenn eine nur temporäre Immunität besteht, wie es bei *Covid-19* der Fall ist. Diese Variation des Modells führt den Parameter ϵ als durchschnittliche Immunitätsdauer ein. Hier werden die Änderungsraten angepasst indem Individuen

von R mit der rate ε zu S übergehen, was erneut in einem Kreislaufmodell Endet [2]:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta S}{\Delta t} &= -\beta SI + \varepsilon R \\ \frac{\Delta I}{\Delta t} &= \beta SI - \gamma I \\ \frac{\Delta T}{\Delta t} &= \gamma I - \varepsilon R\end{aligned}$$

3.4.2 Modell mit dynamischer Gesamtbevölkerung

In der Realität gibt es eine Menge Faktoren, welche die Bevölkerung nicht konstant halten. Das **SIR-Modell** mit **Dynamischer Bevölkerung** versucht durch die erweiterten Parameter ν für Geburten und μ für Todesfälle einige der wichtigsten Faktoren einer dynamischen Bevölkerung miteinzubeziehen. Neugeburten werden in die Suszeptible Population eingeordnet, während Tode in jeder Population präsent sind. Dementsprechend werden diese Parameter zu den Änderungsraten hinzugefügt oder abgezogen [2]:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta S}{\Delta t} &= -\beta SI + \nu - \mu S \\ \frac{\Delta I}{\Delta t} &= \beta SI - \mu I \\ \frac{\Delta R}{\Delta t} &= -\beta SI - \mu R\end{aligned}$$

Die meisten Modelle, welche eine Epidemie über einen längeren Zeitraum beobachten verwenden diese Version.

3.5 Berechenbare Werte des SIR-Modells

Es gibt eine Menge wertvoller Daten, die durch den Gebrauch des **SIR-Modells** oder dessen Derivate errechnet werden können. Wenn in einer Bevölkerung eine gewisse Anzahl an Personen Immunität gegen eine Infektion aufweisen, kann sich die Epidemie nicht länger verbreiten und kann zur Ausrottung der Krankheit führen, obwohl S noch eine Menge an Individuen beinhaltet. Dieses Phänomen wird Herdenimmunität oder Herdenschutz genannt. Sie kann durch die Epidemie selbst auftreten, wenn ein Großteil der Bevölkerung durch einmalige Infektion immun ist, oder durch Impfungen beschleunigt werden [8]. Die Wichtigkeit dieses Schwellenwerts hat sich während des Ausbruchs von *Covid-19* gezeigt, in welchem versucht wurde, möglichst schnell durch Impfungen den Herdenschutz zu erreichen [7]. Anhand des **SIR-Modells** lässt sich berechnen, wann die Epidemie selbst den Herdenschutz auslöst, in dem der Zeitpunkt von I_{max} bestimmt wird. Auch die Menge von I_{max} lässt sich errechnen, was aufgrund der Komplexität der Formeln in dieser Arbeit nicht behandelt wird. Einfacher zu er-

mitteln hingegen ist die Größe von S_0 damit sich keine Epidemie ausbreiten kann, da sie einen Einfluss auf die Basisreproduktionszahl hat, welche wiederum über das Verhalten einer Infektion entscheidet. Dazu muss nur beachtet werden dass in diesem Fall bei der Berechnung der Basisreproduktionszahl r_0 Die Startmenge von S_0 nicht vernachlässigt werden darf, da sie nicht der ungefähren Gesamtbevölkerung entspricht [1], [7]:

$$r_o = \frac{\beta S_0}{\gamma}$$

Weitere erfassbare Werte beinhalten die Menge der Suszeptiblen Population nach Ende der Epidemie sowie die Menge der meisten Neuinfektionen an einem Tag, auf welche nicht im Detail eingegangen wird. Eine der nützlichsten Funktionen des **SIR-Modells** ist die Evaluierung der Auswirkung von Maßnahmen wie der Kontaktvermeidung und Ereignissen wie Mutationen auf den Verlauf der Epidemie. Das ist von Nutzen um die Effektivität von einzelnen Maßnahmen in Erfahrung zu bringen. Das wird meistens erreicht, indem die Übertragungsrate β verändert wird, da diese alle Faktoren der Übertragungs- und Infektionswahrscheinlichkeit beinhaltet [2], [9], [10].

4 FALLBEISPIELE

Mit dem Verständnis des Grundsätzlichen mathematischen Aufbaus des **SIR-Modells** soll nun der Fall *Covid-19* anhand des Modells genauer analysiert, und mit ZWEITEM FALL verglichen werden. Hiermit soll demonstriert werden, wie flexibel und exakt das Modell in Realszenarien erscheint, und welche Unterscheidungen zwischen verschiedenen Epidemien bestehen.

4.1 Covid 19

4.2 Jährliche flu

5 FAZIT

LITERATUR

- [1] William Ogilvy Kermack und A. G. McKendrick. *A contribution to the mathematical theory of epidemics*. London: Royal Society, 1927.
- [2] Regina G. Dolgoarshinnykh. *SAMPLE PATH LARGE DEVIATIONS FOR SIRS EPIDEMIC PROCESSES*. 2004.
- [3] William G. Faris. *The SIR model of an epidemic*. Arizona: arxiv.org, 2021.
- [4] Marcus Hellwig. *SIR - Modell durch eine neue Dichte untersttzt: Handlungsdokument fr ein angepasstes COVID Management*. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2022.
- [5] Herbert W. Hethcote. “Three Basic Epidemiological Models”. In: *Applied Mathematical Ecology*. Bd. 18. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1989, S. 119–144.
- [6] Alexander Kraemer. *Infektionsepidemiologie: Methoden, moderne Surveillance, mathematische Modelle, Global Public Health*. Berlin: Springer, 2003, S. 81–91.
- [7] David Smith und Lang Moore. *The SIR Model for Spread of Disease - Herd Immunity*. Mathematical Association of America, 2004.
- [8] Rahul Saxena und Mahipal Jadeja und Vikrant Bhateja. *Exploring Susceptible-Infectious-Recovered (SIR) Model for Covid-19 Investigation*. Lucknow: Springer, 2022.
- [9] D. Breda und O. Diekmann und W. F. de Graaf und A. Pugliese und R. Vermiglio. *On the formulation of epidemic models (an appraisal of Kermack and McKendrick)*. Taylor Francis, 2012, S. 103–117.
- [10] Suzanne M. ORegan und Thomas C. Kelly und Andrei Korobeinikov. *Chaos in a seasonally perturbed SIR model: avian influenza in a seabird colony as a paradigm*. Springer, 2013.

Abbildungsverzeichnis

2.1	SIR Gruppenverteilung,	
	https://www.researchgate.net/figure/SIR-model-flowchart_fig8_318394911 . . .	3
3.1	SIR Infektionsverlauf,	
	https://www.davidketcheson.info/2020/03/17/SIR_model.html	7