

VALENTIN HEIDER GYMNASIUM



Das SIR - Modell

W Seminar Mathematik:
Chaos, Fraktale und andere mathematische Faszinationen

Nicolas Martin

8.11.2022

INHALTSVERZEICHNIS

1	Einleitung	1
2	Grundlagen Des SIR-Modells	2
2.1	Entstehungsgeschichte	2
2.2	Voraussetzungen	2
2.3	Anwendung	3
3	Mathematischer Aufbau	4
3.1	Variablen des SIR Modells	5
3.2	Basisreproduktionszahl	5
3.3	Beginn	6
3.4	Varianten	6
3.5	Einflussfaktoren	7
3.6	Chaos	8
4	Fallbeispiele	9
4.1	Covid 19	9
4.2	Jährliche flu	10
5	Fazit	11
6	Anhang	12

1 EINLEITUNG

Das *Covid-19* Virus hat in den letzten Jahren Eindrucksvoll bewiesen, wie schnell sich eine Epidemie ausbreiten und zur Pandemie werden kann, Sowie welche verheerende Wirkung ebensolche auf die gesamte Bevölkerung und Wirtschaft der Welt haben. Immer wieder teilen Experten in den Medien neue Verhaltens- und Hygieneregeln mit, durch welche die Verbreitung des Virus Verlangsamt werden konnte. Auch Prognosen über die Zukünftige Entwicklung der Pandemie wurden Veröffentlicht. Doch wie genau Berechnen Epidemiologen die Entwicklung einer Epidemie um Vorhersagen zu treffen und die geeignetsten Gegenmaßnahmen zur Eindämmung einer solchen zu ermitteln?

Diese Literaturarbeit soll zunächst das **SIR-Modell** mit allen Voraussetzungen Betrachten, Die Einhergehenden Differenzialgleichungen und die Basisreproduktionszahl Mathematisch Analysieren und unter Betrachtung der Flexibilität des Modells evaluieren. Des weiteren veranschaulicht die Arbeit das Mathematische Chaos des Modells ferner welche Veränderungen mit verschiedenen Abwandlungen der Formeln und Variablen Einhergehen. Die Präzision und Effektivität in der Anwendung soll durch Den Fall *Covid-19* verdeutlicht und mit HIER FALL EINFÜGEN verglichen werden. Ausgenommen Der Fallbeispiele und der Dynamischen Gesamtbevölkerung werden keine Abweichungen des Modells im Detail Besprochen.

2 GRUNDLAGEN DES SIR-MODELLS

Wenn man den Verlauf einer Epidemie von Anfang bis Ende anhand eines Mathematischen Modells beschreiben möchte, ist das **SIR-Modell** mit nur zwei Parametern und drei Differentialgleichungen in der einfachsten Form ideal, um sich einen groben Überblick zu verschaffen.

4 Im diesem Kapitel wird auf den Hintergrund, die Optionen und Limitierungen und die damit Einhergehenden Möglichkeiten der Anwendung des Modells eingegangen.

2.1 Entstehungsgeschichte

Das **Kermack-McKendrick Modell** ist die Bekannteste Ausführung des **SIR-Modells** welches von den Infektionsepidemiologen *William Ogilvy Kermack* und *Anderson Gray McKendrick* im Jahr 1927 Im Zusammenhang mit dem Artikel “*A contribution to the mathematical theory of epidemics*“ 7 im Auftrag der “*Royal Society London*“ 6 Entwickelt und Veröffentlicht wurde. 6

“*The paper became a classic in infectious disease epidemiology and has been cited innumerable times*“ 6

Seit dem wird das **SIR-Modell** und Variationen Weltweit verwendet um den Verlauf verschiedenster Infektionen wie Beispielsweise Ebola, Masern und Influenza nachzuvollziehen und/oder Vorherzusagen. 3

2.2 Voraussetzungen

Da das **SIR Modell** als relativ simpel gilt, kommt es mit einigen Voraussetzungen die erfüllt werden müssen damit es Anwendbar ist. Zuerst Muss die Gesamtbevölkerung N in drei Kategorien unterteilt werden:

- S : Suszeptibel (engl. Susceptible)
- I : Infiziert (engl. Infected)
- R : Entfernt (engl. Removed)

Wobei (S) alle Infizierbaren Individuen, (I) alle Infizierten und **gleichzeitig** Infektiösen und (R) alle Genesenen oder verstorbenen beinhaltet. Zu beachten ist das sich Individuen jeweils immer nur in Einer Population befinden können und sich Individuen der Population (R) kein weiteres mal Infizieren können da sie als Immun Gelten. Hierbei ist es Egal ob das Individuum Genesen oder Verstorben ist.(vgl. Abb. 2.1) 4 Alle Populationen Interagieren untereinander mit der selben Wahrscheinlichkeit die von nur zwei Parametern beta (β) und gamma (γ) Beeinflusst wird. β steht hier für die Übertragungsrate (engl. transmission rate) welche angibt, wie schnell Individuen der Suszeptiblen Population in die Infizierte Population übergehen. γ hingegen stellt

hier die Erholungsrate (engl. recovery rate) dar, und gibt an wie schnell die Population I sich erholt oder verstirbt. Es wird davon ausgegangen das N , β , γ **Konstant** und **Positiv** sind. Zu Beginn der Epidemie sei die Menge der Population R gleich Null, die Menge S ungefähr N und die Menge I ungefähr Null (Mindestens ein Individuum Infiziert), das das **SIR-Modell** von einer neuen Infektion ausgeht, zu welcher am Anfang keine Immunität existiert.



Abbildung 2.1: SIR Gruppenverteilung

2.3 Anwendung

Das **SIR-Modell** in der hier dargestellten Form kann das Verhalten einer Epidemie anhand zwei unveränderlicher Parameter darstellen und zeigt so auf, wie lange es braucht, bis eine Bevölkerungsgruppe die Infektion überstanden hat. Auch die Menge an Personen, welche bis zum Ende in der Suszeptiblen Gruppe (S) verblieben sind, kann ermittelt werden. Eine große Limitierung des Modells findet sich in der Tatsache, dass es durch den einfachen Aufbau mit wenigen Parametern und Unrealistischen Voraussetzungen wie einer konstanten Bevölkerung oder der direkten Infektiosität von Individuen nur einen ungefähren Verlauf, jedoch keine präzise noch detaillierte Auskunft über Realszenarien bietet. Durch die Annahme, dass zu Beginn keine Immunität existiert, und die Parameter als konstant betrachtet werden, ist das Modell des Weiteren nicht zur Berechnung von Infektionswellen geeignet. Allerdings bildet das **SIR-Modell** eine Grundlage für komplexere Modelle, welche für bestimmte Infektionen und Umstände angepasst werden, und somit detaillierte Prognosen sowie Berichte über die Entwicklung bereitstellen können. So wird beispielsweise in *"The SIR Model with Vital Dynamics"* ⁵ durch Hinzufügen von Parametern für Geburten und Tode die Gesamtbevölkerung als dynamisch betrachtet, was bereits näher an ein Realbeispiel herankommt. Dieses Modell wird in 3.3 genauer beschrieben. Zusätzlich können die Gruppen erweitert oder entfernt werden, was dann zu Modellen wie dem **SIRS-Modell**, welches eine erneute Infektion ermöglicht und somit auch für Infektionswellen genutzt werden kann, dem **SEIR-Modell**, welches eine Personengruppe hinzufügt, die infiziert wurde, jedoch noch nicht ansteckend ist (E : Exposed), oder dem **SI-Modell**, in welchem Individuen keine Immunität aufbauen, führen kann. Ein weiterer Anwendungsgrund des Modells ist die Bestimmung der Basisreproduktionszahl (siehe 3.2), welche angibt, ob sich eine Infektion zu einer Epidemie entwickelt, sich endemisch hält oder auf Dauer ausstirbt. ² So ist das Modell

als solches zwar nur als ein Mathematisches Idealverhältnis einer Epidemie von nutzen, doch ist es ein Essenzieller teil der Modernen Infektionsepidemiologie welches von Forschen auf der Ganzen Welt dafür genutzt wird, Virale Krankheiten zu dokumentieren und den Ausbruch in eine Epidemie zu verhindern. **3**

3 MATHEMATISCHER AUFBAU

Nachdem die Wichtigsten Begriffe und Bedingungen für das **SIR-Modell** nun bekannt sind Widmet sich dieses Kapitel der Funktion und Zusammensetzung des Modells auf mathematischer Ebene, woraufhin der Fokus auf die Basisreproduktionszahl sowie auf einige Abweichungen des Modells gelegt wird. Wenn eine konstante Bevölkerung N in drei Gruppen aufgeteilt wird kann N jetzt zu jedem Zeitpunkt (t) folgendermaßen definiert werden: **3, 4**

$$S_{(t)} + I_{(t)} + R_{(t)} = N$$

Während die Modell definierenden Parameter β und γ konstant sind, Verändern sich die Größen S , I und R im verlauf von t . Man spricht von einem Geschlossenen System.**4**

Das **SIR-Modell** kann auch graphisch dargestellt werden: In einem Koordinatensystem stellt die x-Achse die Zeit meist in Tagen, und die y-Achse die Bevölkerung dar. Drei Graphen zeigen die Änderung der Größe der jeweiligen Populationen auf. Wie diese Graphen berechnet werden wird in 3.1 Angesprochen. Auch hier gilt das zu jedem Zeitpunkt die Summe der Flächen die Größe N ergibt.(vgl. Abb. 3.1) Anhand dieser Grafik lässt sich auslesen wann das Wachstum der Epidemie endet, wann sie ausstirbt sowie die menge der Individuen die zu keinem Zeitpunkt infiziert waren.

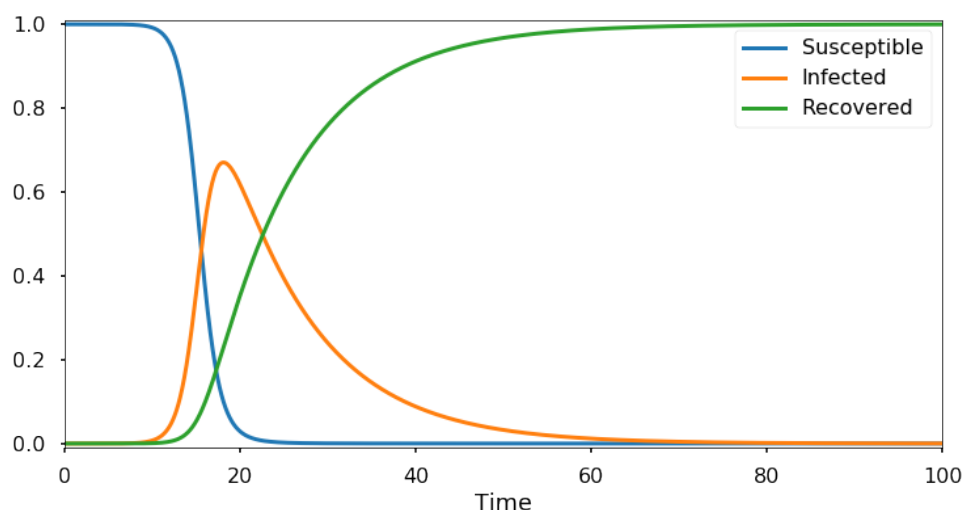


Abbildung 3.1: SIR Infektionsverlauf

3.1 Variablen des SIR Modells

Die abhängigen Variablen $S = S(t)$, $I = I(t)$ und $R = R(t)$ stellen die Menge an Individuen in der jeweiligen Gruppe zu einem Zeitpunkt t dar. Wenn diese nun durch die Konstante N geteilt werden, ergeben sich die neuen Variablen $s(t)$, $i(t)$ und $r(t)$, welche die Änderung einer Population in Abhängigkeit zu einem Zeitpunkt t angeben.

Zur Formulierung des Modells werden drei Differenzialgleichungen verwendet, welche die Änderungsrate der jeweiligen Population beschreiben, also wie schnell sich Individuen der Suszeptiblen Gruppe in die Infizierte, und von der Infizierten zu der Entfernten Population übergehen. Diese Arbeit verwendet die von Kermack und McKendrick aufgestellten Versionen, welche folgendermaßen aufgestellt werden:³

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = -\beta SI$$

Änderungsrate der Suszeptiblen Population

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \beta SI - \gamma I$$

Änderungsrate der Infizierten Population

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \gamma I$$

Änderungsrate der Entfernten Population ⁷

Die Suszeptible und die Infizierte Population haben den Parameter β gemeinsam. S wird mit der Rate β eine Menge an Individuen abgezogen (minus) und dann I hinzugefügt. Das selbe Prinzip ist auf I und R durch den Faktor γ anwendbar.^{3, 4} Erkennbar ist, dass S und R von I beeinflusst werden, welche als einzige Gleichung beide Parameter beinhaltet. So ist es möglich $R(t)$ jederzeit durch das Subtrahieren der Mengen $S(t)$ und $I(t)$ von der Gesamtmenge $N = 1$ zu erhalten: ⁵

$$R(t) = 1 - S(t) - I(t)$$

3.2 Basisreproduktionszahl

R_0

3.3 Beginn

$S = 1$

3.4 Varianten

dynamic vitals

ν neugeburt

μ tode

ρ Impfungen

3.5 Einflussfaktoren

impfung, distancing, Hygiene, Mutationen

3.6 Chaos

leicht veränderte startwerte, starke abweichung (100

4 FALLBEISPIELE

epic Explanation

4.1 Covid 19

FRAGE: Zitate vgl. 3 FRAGE: ToC Font, Font In general Kopfzeile Fußzeile

4.2 Jährliche flu

5 FAZIT

6 ANHANG

dont forget graphic verzeichnis