

## 2. Elektriajamite numbriline modelleerimine

### 2.1. Alalisvoolumootori käivitusprotsessi numbriline modelleerimine

#### Juhtseade ja juhtimisobjekt

Elektriajam kujutab endast keerukat elektromehaanilist süsteemi, mida võib tinglikult jagada juhtimisobjektiks ja juhtseadmeks. Juhtimisobjekti hulka kuuluvaks loeme kõik selle, mis on energeetiliselt või tehnoloogiliselt ette antud ning mida pole juhtimise ümberkorraldamisega võimalik muuta. Juhtseade peab tagama automaatselt juhtimisobjekti nõutava töö. Juhtimisobjektiks loetakse tavaliselt mootor koos ülekandemehhanismi ja töömasinaga, pooljuhtmuundur koos tüürplokiga ning ka kõik andurid, mis kuuluvad konstruktiivselt loetletud seadmete juurde. Juhtseadmesse kuuluvad kõik vahetult juhtimisega seotud süsteemi osad, mis on määratud juhtimisfunktsioonidega. Viimastest lähtudes võib juhtseadmes kasutada erinevaid riist- ja tarkvara elemente, regulaatoreid, muundureid jt. infotöötlusvahendeid.

#### Juhtimisobjekti diskreetne mudel

Esmalt vaatleme juhtimisobjekti ja selle osade modelleerimist sest juhtimisobjektist sõltuvad nõuded juhtseadmele.

Igat objekti saab modelleerida kahel erineval põhimõttel.

- 1) Esiteks, objekti matemaatilise mudeli võib koostada, lähtudes tema füüsikalisest tööpõhimõttest. Selleks tuleb põhjalikult kirjeldada tema üksikuid elemente ning nende vastastikuseid seoseid. See meetod on kasutatav juhul, kui objekt on suhteliselt lihtne, kui tema struktuur ja tööpõhimõte on täpselt teada.
- 2) Teiseks, objekti võib vaadelda kui "musta kasti", millel on teatud arv sisendeid ja väljundeid. Pärast seda kui objekti on põhjalikult uuritud ning katseliselt kindlaks tehtud tema sisend- ja väljundsuuruste vahelised funktsionaalsed seosed, saab neid matemaatiliste avaldistega lähendada (aproksimeerida). Sel meetodil leitud matemaatilised võrrandid on kasutatavad objekti mudelina.

Mõlemal meetodil leitud matemaatilisi mudeleid võib üle kanda reaalsesse maailma ning asendada füüsilise mudeliga.

Füüsiline mudel võib kujutada endast kas pidevatoimelist või diskreetset seadet. Matemaatilised võrrandid võib asendada ka nende lahendamise eeskirjaga ehk algoritmiga, mille järgi koostatakse objekti **programm-mudel**. Programmi kasutamiseks vajame aparatuuri selle täitmiseks. Programm-mudel võib sõltuvalt kasutatud **algoritmikeelest** ja selle iseärasustest olla rakendatav kas teatud kindla arvutitüübi (kindla mikrokontrolleri või signaaliprotsessori) või paljude eri tüüpi arvutite juures. Sellest tulenevalt on programm-mudel üldjuhul koostatud kindlaks otstarbeks.

Valdavalt on selliste mudelite näol tegemist tegemist etteantud ajaintervalliga tsükliliselt korratavate arvutustega.

## Diskreetimisest üldiselt

Kõigi diskreetsete mudelite korral on vaja valida kindlad baassuurused. Nendeks on diskreetsusaste ja ajaintervall. Mida väiksem on diskreetsusaste, seda täpsemalt saab pidevatoimelist suurust diskreetses mudelis kirjeldada. Samas kasvab aga erinevate võimalike diskreetsete väärtuste arv ning koos sellega süsteemis ülekantava info maht. Kui me tahame, et pidevatoimelise objekti diskreetne mudel säilitaks objekti kvalitatiivsed omadused, siis peavad diskreetsusaste ja integreerimisel kasutatav ajaintervall olema küllaltki väikesed (piisavalt väikesed aga mitte liiga väikesed).

## Diskreetimiseks kasutatav ajaintervall

Kuigi paljud arvutisimulatsiooni paketid kasutavad muutuvat diskreetimis-ajaintervalli on lihtsamal juhul diskreetimiseks kasutatav ajaintervall konstantne suurus. Viimast eriti mikrokontrollerite jaoks koostatud algoritmides.

Runge-Kutta ehk Euleri meetodit kasutades (numbrilisel integreerimisel) tuleb ühelt poolt arvestada, et arvutuste täpsus suureneb koos ajaintervalli vähenemisega samas teiselt poolt suureneb sellega vajalike arvutuste maht. Mõlemad asjaolud on kasutatava ajaintervalli valikul olulised sest programmilist mudelit käitava aparatuuri jõudlus on piiratud.

Näiteid:

1. Kui diskreetsusaste moodustab ühe sajandiku mõõdetava suuruse maksimaalväärtusest, siis ei ületa mõõteviga 1%.
2. Saja erineva diskreetse väärtuse kirjeldamiseks peab edastataval kahendsõnal olema vähemalt 7 kohta (märgi arvestamisel 8).
3. See tähendab, et 7 -kohalisel kahendsõnal on  $2^7=128$  erinevat kombinatsiooni. Analoomiliselt võimaldab 10 -kohalisel kahendsõnal edastada  $2^{10} = 1024$  erinevat kombinatsiooni, s. o. vähemalt 1000 erinevat diskreetset väärtust, millega on tagatud, et mõõteviga ei ületa 0,1%.

## Mudeli mittelineaarsus

Tuleb aga arvestada seda, et mittelineaarsete seoste tõttu viga arvutuste käigus suureneb.

## Programmi arvutustsükkel ja diskreetimiseks kasutatav ajaintervall

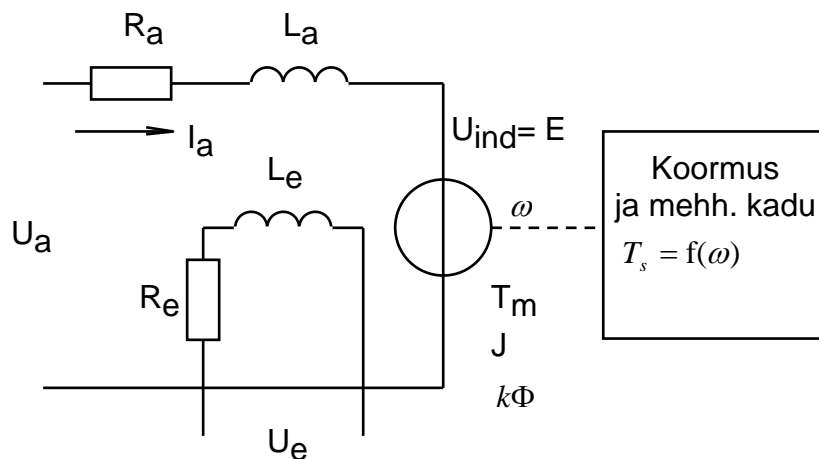
Teisalt kujutab ajaintervall endast arvutuste kordamise perioodi või on otseselt sellega seotud. Mida väiksem on ajaintervall, seda suurem on arvutuste kordamise "sagedus", seega ka arvutuste maht. Ajaintervalli vähendamisel hakkab mudel kasutama järjest enam arvuti tööaega. Kuna arvuti võimsus on piiratud, tuleb ajami modelleerimisel ja juhtimisel minna sageli toimekiiruse ja täpsuse valikul kompromissile.

## Alalisvoolumootori lihtsustatud lineaarne käitumuslik mudel

Alalisvoolumootori tööd on otstarbekas modelleerida lähtudes tema füüsilisest tööpõhimõttest. Eeldusel, et ergutusvoog on konstantne, kirjeldavad mootori tööd järgmised võrrandid:

$$\begin{aligned}
U &= i \cdot R + L \frac{di}{dt} + E; \\
E &= k\Phi \cdot \omega; \\
J \frac{d\omega}{dt} &= T_m - T_s; \\
T_m &= k\Phi \cdot i; \\
T_s &= f(\omega); \\
\omega &= \frac{d\varphi}{dt},
\end{aligned} \tag{2.1}$$

kus  $U$  - ankrupinge,  $i$  - ankruvool,  $R$  - ankruahela takistus,  $L$  - ankruahela induktiivsus,  $E$  - vastuelektromotoorjõud,  $k\Phi$  - masina konstant,  $J$  - mootori völli taandatud inertsimoment,  $\omega$  - pöörlemiskiirus,  $T_m$  - mootori moment,  $T_s$  - koormusmoment,  $\varphi$  - völli pöördenurk. Võrranditest on näha, et ankruvool sõltub nii pingest kui ka vastuelektromotoorjõust, viimane omakorda aga pöörlemiskiirusest. Vool määrab mootori poolt arendatava pöörlemomendi, millest sõltub völli liikumise iseloom ja järelikult ka pöörlemiskiirus. Nii on kõik suurused vastastikuses seoses ning alalisvoolumootori näol on tegemist mitmeli-sidusa juhtimisobjektiga.



Joonis 2.1. Koormatud alalisvoolumootori aseskeem

Ajami elektromehaaniliste ja elektromagnetiliste protsesside lähemal uurimisel selgub, et vaatamata vastastikusele seosele toimuvad eri protsessid erineva intensiivsusega ning lihtsustatult võib neid vaadelda teineteisest sõltumatult. Näiteks, võib eeldada, et mingi lühikese ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul on mootori pöörlemisest tingitud vastuelektromotoorjõu  $E$  muutus sedavõrd väike, et ei avalda oluliselt mõju mootori ankruahela voolule.

### Koostame diferentsiaalvõrrandite põhjal diferentsvõrrandid

Kui ajaintervall  $\Delta t$  on küllalt väike, siis selle kestel toimunud voolu juurdekasv on voolu endaga võrreldes väike ( $\Delta i \ll i$ ) ja avaldub võrrandist:

$$\Delta i_i = \frac{U - k\Phi \cdot \omega_i - i \cdot R}{L} \cdot \Delta t_i, \quad (2.2)$$

kus  $\omega_i$  - pöörlemiskiirus ajaintervalli  $\Delta t_i$  algul. Pärast  $\Delta t_i$  möödumist on vool  $i_i$  kasvanud  $\Delta i_i$  võrra ning uus voolu väärtus leitakse võrrandist:

$$i_{i+1} = i_i + \Delta i_i. \quad (2.3)$$

Analoogiliselt saab arvutada pöörlemiskiiruse  $\omega_i$  juurdekasvu  $\Delta \omega_i$  eeldusel, et vool  $i_i$  ning järelikult ka sellest tingitud mootori moment muutuvad ajavahemiku  $\Delta t_i$  jooksul vähe.

$$\Delta \omega_i = \frac{k\Phi i - T_S(\omega_i)}{J} \Delta t_i, \quad (2.4)$$

kus  $k\Phi i = T_{Mi}$  - mootori moment ja  $T_S(\omega_i)$  - koormusmoment ajaintervalli  $\Delta t_i$  algul. Pärast  $\Delta t_i$  möödumist on pöörlemiskiirus  $\omega_i$  suurenenud juurdekasvu  $\Delta \omega_i$  võrra.

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \Delta \omega_i. \quad (2.5)$$

Võlli pöördenurga juurdekasv leitakse võrrandist:

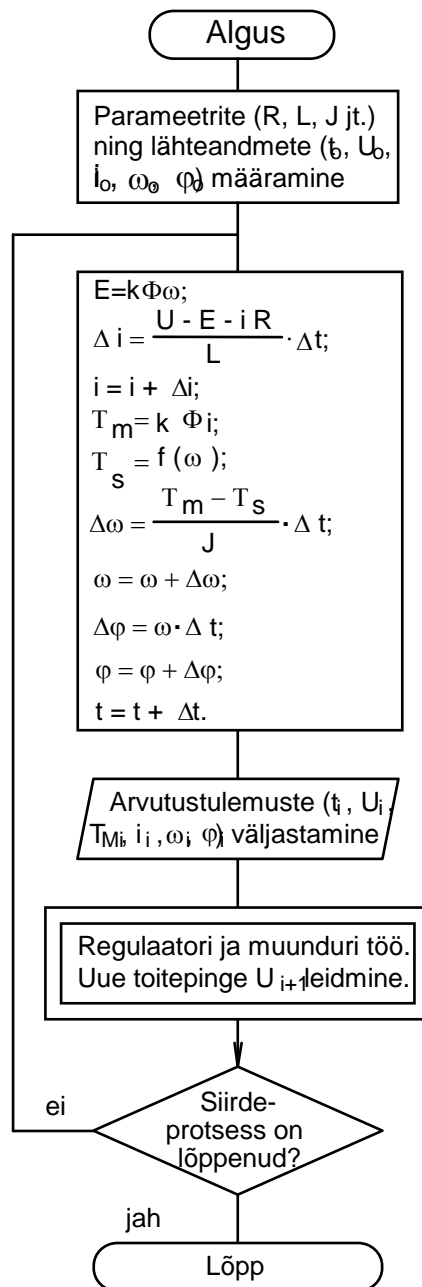
$$\Delta \varphi_i = \omega_i \cdot \Delta t_i \quad (2.6)$$

ning pöördenurk pärast ajaintervalli  $\Delta t_i$  möödumist

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \Delta \varphi_i. \quad (2.7)$$

Eeldusel, et  $\Delta t$  on küllalt väike, saab alalisvoolumootori tööd kirjeldava mitmeli-sidusa võrrandisüsteemi taandada diskreetsele järjestikulisele arvutuseeskirjale ehk algoritmile ning leida sel teel mootori tööd iseloomustavad suurused.

Alalisvoolumootori elektriliste ja mehhaaniliste suuruste muutumist ajas ehk nende siirdeprotsesse saab lihtsustatult arvutada järgmise algoritmiga:



Joonis 2.2. Alalisvoolumootori modelleerimise algoritm

Eespool toodud algoritmi saab kasutada pingega juhitava alalisvoolumootori siirdeprotsesside  $i = f(t)$ ,  $T_m = f(t)$ ,  $\omega = f(t)$  ja  $\varphi = f(t)$  arvutamiseks nii avatud kui ka suletud juhtimissüsteemi korral. Avatud süsteemi korral toimub tsükli kordamine kohe pärast arvutustulemuste väljastamist. Suletud süsteemi korral tuleb lisaks mootorile modelleerida ka regulaatori ja pooljuhtmuunduri tööd ning leida igas tsükli uus toitepinge  $U_{i+1}$  väärtus, mis on järgmise tsükli arvutuste aluseks. Arvutus lõpetatakse tingimusel, et siirdeprotsess on lõppenud ning mootori väljundsuurused stabiliseerunud.

### Euleri meetod

Eelnevalt toodud näites on kasutatud diferentsiaalvõrrandite numbrilise lahendamise kõige lihtsamat meetodit, ehk nn. esimest järku Runge-Kutta ehk Euleri meetodit.

Võrrandi  $y' = f(x, y)$  ja algtingimuse  $y(x_0) = y_0$  korral saab funktsiooni järgmise väärtuse leida valemist:

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0) \cdot f(x_0, y_0). \quad (2.8)$$

Valemi viga on võrdeline argumendi juurdekasvu ruuduga  $(x_1 - x_0)^2$ .

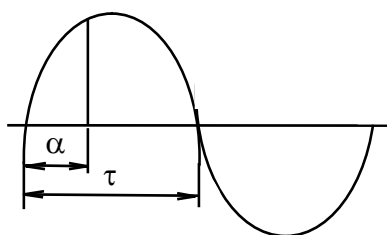
Diferentsiaalvõrrandite numbriliseks lahendamiseks võib kasutada ka kõrgema järgu Runge-Kutta meetodeid, mis tagavad arvutuste suurema täpsuse. Arvutusvalemid on aga sel juhul keerukamad (Vt. M. Levin, S. Ulm, Arvutusmeetodite käsiraamat, lk. 178-180.).

## 2.2 Toitemuunduri hilistumise numbriline modelleerimine

Elektrijamite toitemuundurites muudetakse mootori pinget ja voolu laiusimpulss-reguleerimise (PWM) põhimõttel. Sellest tingituna tekib juhtimisahelas hilistumine. Viimase suurus sõltub laiusimpulssmodulatsiooni kandesagedusest (impulsside perioodist) ning tagasisideahela toimekiirusest.

### a) Türistoridega või sümistoridega alaldid, vahelduvpingeregulaatorid ja dimmerid

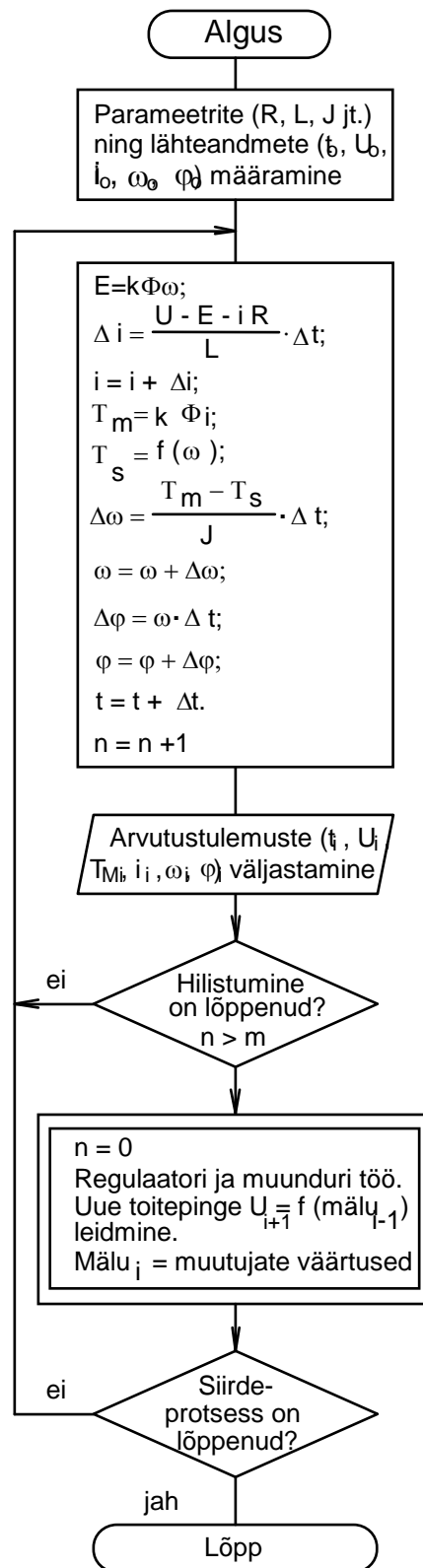
Võrgust kommuteeritavate seadmete (türistoralaldite) korral on modulatsiooni kandesagedus määratud võrgu sagedusega ning muutub vahemikus 0,0033 sekundist kolmefaasilise sildalaldi korral kuni 0,02 sekundini ühefaasilise poolperioodalaldi korral.



Joonis 2.3 Hilistumine türistormuunduris

### b) Pulsilaiusmodulatsioon (PWM)

Transistor laiusimpulssregulaatorite korral on modulatsiooni kandesagedus tavaliselt suurem - alates 1 kHz kuni 100 kHz. Suurema kandesageduse korral on ka laiusimpulssreguleerimisest tulenev hilistumine väiksem.



Joonis 2.4. Hilistumisega protsessi modelleerimise algoritm



## 2.3 Arvregulaatorite numbriline modelleerimine

Traditsiooniliselt kasutatakse ajamites operatsioonivõimendite (analooglülituste) baasil ehitatud proportsionaalseid, integraalseid ja diferentsiaalseid ning mitmesuguseid kombineeritud regulaatoreid ehk lühendatud P, I, D, PI, PD ja PID regulaatoreid. (Vt. Tööstusrobotid. Ajamid ja nende elemendid, lk. 118-121.) Raaljuhtimise korral on nende analoogideks vastavad arvregulaatorid. Arvregulaatorite sisend- ja väljundfunktsioone esitatakse diskreetsete väärtuste jadana, kus muutujate hetkväärtused on fikseeritud ajaintervalli  $\Delta t$  järel.

Selliste arvregulaatorite algoritmides on funktsiooni aja järgi tuletiste asemel vastavat järku **diferentsfunktsioonid**, integraalide asemel aga **summafunktsioonid**. Regulaatori väljundfunktsioon iseloomustab väljundsuuruse sõltuvust sisendsuurest.

### Pidevast ajast diskreetsele ajale üleminek

Näiteks, pidevatoimelise proportsionaalregulaatori ehk regulaatori tööd kirjeldab väljundfunktsioon

$$U_{reg} = K_p \cdot DU(t), \quad (2.8)$$

kus  $K_p$  on regulaatori ülekandetegur,  $\Delta U(t)$  - sisendsignaali muutus. Diskreetse regulaatori korral tuleb pidev aeg  $t$  asendada diskreetse ajaga  $n$ , mis kujutab endast järjestikulise ajaintervallide järjekorranumbrit.

$$U_{reg} = K_p \cdot DU(n) \quad (2.9)$$

### Reguleerimisvea arvutus diskreetses ajas

Negatiivse tagasisidega süsteemis kujutab regulaatori sisendsuurus  $\Delta U(n)$  endast seadesignaali ja tagasisidesignaali vahet.

$$DU(n) = U_s(n) - U_{ts}(n) \quad (2.10)$$

### Proportsionaalne regulaator diskreetses ajas

Diskreetse regulaatori väljundfunktsioon

$$U_{reg}(n) = K_p \cdot [U_s(n) - U_{ts}(n)] \quad (2.11)$$

### Integraalne regulaator diskreetses ajas

Analoogiliselt on avaldatav ka integraal- ehk I regulaatori väljundfunktsioon

$$U_{reg}(n) = K_i \cdot \sum_{j=0}^n [U_s(j) - U_{ts}(j)] \quad (2.12)$$

### PI-regulaator diskreetses ajas

Ajamite juhtimisel leiavad kõige enam kasutamist PI regulaatorid, millel on nii proportsionaalse kui ka integreeriva regulaatori omadused. Diskreetse PI regulaatori väljundfunktsioon

$$U_{reg}(n) = K_p \cdot [U_s(n) - U_{ts}(n)] + K_i \cdot \sum_{j=0}^n [U_s(j) - U_{ts}(j)], \quad (2.13)$$

kus võrrandi parempoolse avaldise esimene liige vastab P regulaatorile, teine aga I regulaatorile.

### D-regulaator diskreetses ajas

Diskreetse diferentsiaalregulaatori ehk D regulaatori tööd kirjeldab väljundfunktsioon

$$U_{reg}(n) = K_d \cdot [U_s(n) - U_{ts}(n)] - [U_s(n-1) - U_{ts}(n-1)] \quad (2.14)$$

Kui regulaatori sisendis toimiv seadesignaal ei muutu, siis avaldub regulaatori väljundfunktsioon järgmiselt:

$$U_{reg}(n) = -K_d \cdot [U_{ts}(n) - U_{ts}(n-1)]. \quad (2.15)$$

Viimasest võrrandist järeldub, et regulaatori väljundsignaal ei sõltu seadesignaalist ning on määratud ainult tagasisidesignaali muutumise kiirusega.

### PID regulaator diskreetses ajas

P, I ja D regulaatorite ühendamisel saadakse PID regulaator, mille väljundfunktsiooni võib esitada kolme liidetava summana.

$$U_{reg}(n) = K_p \cdot [U_s(n) - U_{ts}(n)] + K_i \cdot \sum_{j=0}^n [U_s(j) - U_{ts}(j)] + \\ -K_d \cdot [U_{ts}(n) - U_{ts}(n-1)] \quad (2.16)$$

### Regulaatori häälestamine

PID regulaator häälestatakse võimendustegurite  $K_p$ ,  $K_i$  ja  $K_d$  valikuga. On võimalik luua regulaator, mille väljundfunktsioonis on ülekaalus üks selle komponentidest, kas P, I või D regulaator, kuid võib ka erinevate regulaatorite toimed omavahel tasakaalustada. Siirdeprotsesside kiirendamiseks (forsseerimiseks) tuleb suurendada  $K_p$  või  $K_d$ . Süsteemi staatiline viga väheneb aga  $K_i$  ja  $K_p$  suurendamisel. Teiselt poolt on võimendustegurite suurendamisel oht, et süsteem muutub mittestabiilseks ning seal tekivad sumbumatud isevõnkumised.

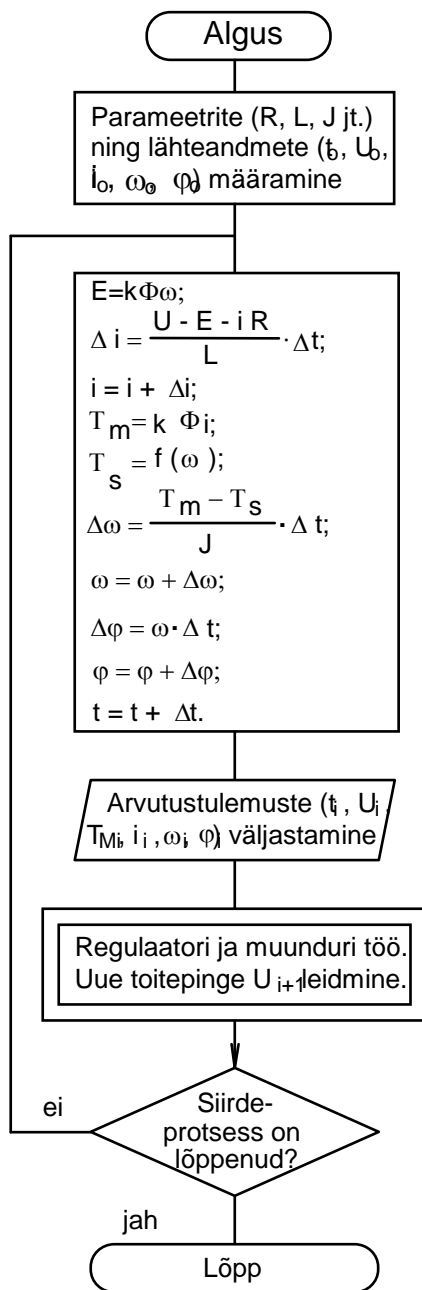
## **Tagasisideahela mõõtetulemuse ja juhttoime ja hilistumisega seonduvad probleemid**

Kuna arvregulaator toimib diskreetsete ajaintervallide järel, siis tekib süsteemis paratamatult hilistumine. Suletud diskreetses juhtimissüsteemis põhjustab hilistumine väljundsuuruse võnkumist ning järelikult halvendab süsteemi töö kvaliteeti. Hilistumisprobleemi võib vaadelda kahest seisukohast: esiteks selle modelleerimise ja teiseks hilistumise korrigeeriva regulaatori seisukohast.

Hilistumise modelleerimisel tuleb arvestada asjaolu, et ajami olekut iseloomustavate suuruste mõõtmise ning regulaatori poolt väljastatava juhttoime vahel tekib viivitus, mille jooksul ajam töötab edasi ja tema tegelik olek ei vasta enam mõõdetule.

## 2.5 Suletud juhtimissüsteemiga alalisvooluajami numbriline modelleerimine

Suletud juhtimissüsteemiga ajamite töö numbriliseks modelleerimiseks on vaja ühendada tervikuks mootori ning arvregulaatorite algoritmid.



Joonis 2.8. Suletud juhtimissüsteemiga alalisvooluajami modelleerimine