数学建模

浙江大学数学科学学院　谈之奕

tanzy@zju.edu.cn

浙江大学 ZheJiang University

运筹与统计

博弈论概述

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

博弈论

- 博弈论（对策论）（**game theory**）
  - 研究由一些带有相互竞争性质的主体所构成的体系的理论。它能以数字表示人的行为或为人的行为建立模式，研究对抗局势中最优的对抗策略和稳定局势，以及如何追求各方的最优策略和决定对策的结果，协助人们在一定规则范围内寻求最合理的行为方式

    ——《中国大百科全书（第二版）》
  - 数学的一个分支，用于分析竞争的形势，这种竞争的结果不仅依赖于个人自己的抉择及机会，而且还依赖于其他局中人的抉择。由于竞争结果依赖于所有局中人的行为，每个局中人都企图预测其他局中人的可能抉择，以确定自己的最佳对策。如何合理地进行这些相互依存的战略策划就是博弈论的主题

    ——《不列颠百科全书（国际中文版）》

田忌赛马

局	齐王	田忌	结果
1	$A+$	$A-$	齐王胜
2	$B+$	$B-$	齐王胜
3	$C+$	$C-$	齐王胜

3 : 0

局	齐王	田忌	结果
1	$A+$	$C-$	齐王胜
2	$B+$	$A-$	田忌胜
3	$C+$	$B-$	田忌胜

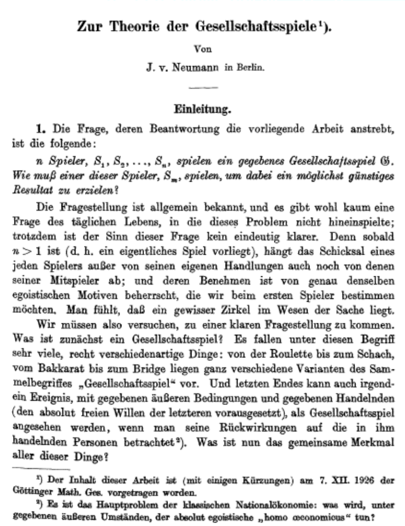
1 : 2

齊使者如梁，孫臏以刑徒陰見，說齊使。齊使以爲奇，竊載與之齊。齊將田忌善而客待之。忌數與齊諸公子馳逐重射。孫子見其馬足不甚相遠，馬有上、中、下輩。於是孫子謂田忌曰："君弟重射，臣能令君勝。"田忌信然之，與王及諸公子逐射千金。及臨質，孫子曰："今以君之下駟與彼上駟，取君上駟與彼中駟，取君中駟與彼下駟。"既馳三輩畢，而田忌一不勝而再勝，卒得王千金。於是忌進孫子於威王。威王問兵法，遂以爲師。

——《史记•孙子吴起列传》

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

博弈论



Zur Theorie der Gesellschaftsspiele[1]).

Von

J. v. Neumann in Berlin.

Einleitung.

1. Die Frage, deren Beantwortung die vorliegende Arbeit anstrebt, ist die folgende:

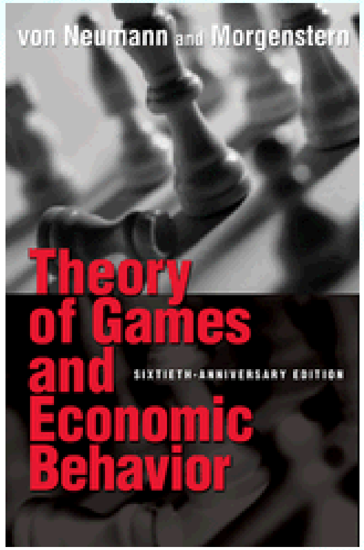
n Spieler, $S_1, S_2, \ldots, S_n$, spielen ein gegebenes Gesellschaftsspiel $\mathfrak{G}$. Wie muß einer dieser Spieler, S_m, spielen, um dabei ein möglichst günstiges Resultat zu erzielen?

Die Fragestellung ist allgemein bekannt, und es gibt wohl kaum eine Frage des täglichen Lebens, in die dieses Problem nicht hineinspielte; trotzdem ist der Sinn dieser Frage kein eindeutig klarer. Denn sobald $n > 1$ ist (d. h. ein eigentliches Spiel vorliegt), hängt das Schicksal eines jeden Spielers außer von seinen eigenen Handlungen auch noch von denen seiner Mitspieler ab; und deren Benehmen ist von genau denselben egoistischen Motiven beherrscht, die wir beim ersten Spieler bestimmen möchten. Man fühlt, daß ein gewisser Zirkel im Wesen der Sache liegt.

Wir müssen also versuchen, zu einer klaren Fragestellung zu kommen. Was ist zunächst ein Gesellschaftsspiel? Es fallen unter diesen Begriff sehr viele, recht verschiedenartige Dinge: von der Roulette bis zum Schach, vom Bakkarat bis zum Bridge liegen ganz verschiedene Varianten des Sammelbegriffes „Gesellschaftsspiel“ vor. Und letzten Endes kann auch irgendein Ereignis, mit gegebenen äußeren Bedingungen und gegebenen Handelnden (den absolut freien Willen der letzteren vorausgesetzt), als Gesellschaftsspiel angesehen werden, wenn man seine Rückwirkungen auf die in ihm handelnden Personen betrachtet[2]). Was ist nun das gemeinsame Merkmal aller dieser Dinge?

[1]) Der Inhalt dieser Arbeit ist (mit einigen Kürzungen) am 7. XII. 1926 der Göttinger Math. Ges. vorgetragen worden.

[2]) Es ist das Hauptproblem der klassischen Nationalökonomie: was wird, unter gegebenen äußeren Umständen, der absolut egoistische „homo œconomicus“ tun?



右：John von Neumann（1903－1957）
匈牙利裔美国数学家
左： Oskar Morgenstern（1902 –1977）
奥地利裔美国经济学家
Spring Lake, 1946

von Neumann, J., Morgenstern, O., *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944

von Neumann J. Zur theorie der gesellschaftsspiele. Mathematische annalen, 100(1), 295-320, 1928.

棋类游戏

- 棋类游戏（The game of chess）
  - 每盘比赛由白方先行，黑白双方交替走子，每方走子遵循一定的规则
  - 每盘比赛有白胜、黑胜、平局三种结果
  - 每盘比赛在有限步内终止
- 状态、局势和策略
  - 状态：棋盘上棋子和它们所在的位置
    - 开局状态 X_0
    - 比赛第 k 步，某一方走子，状态由 X_k 变为 X_{k+1}
  - 局势：从开局到第 k 步的状态序列 $(X_0, X_1, \cdots, X_k)$
  - 策略：对每个可能的局势 $(X_0, X_1, \cdots, X_k)$，将走子一方给出下一个状态 X_{k+1}

棋类游戏

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 策略与胜负
  - 初始状态和双方的策略S_W和 S_B，完全确定一盘比赛的进程和胜负
  - 白方制胜策略 S_W：对黑方的任意策略 S_B，由 S_W 和 S_B决定的比赛结果为白胜
  - 白方保平策略S_W：对黑方的任意策略 S_B，由 S_W 和 S_B决定的比赛结果为白胜或平局
- **von Neumann**定理
  - 对棋类游戏，以下三条有且恰有一条成立
    - 白方有一制胜策略
    - 黑方有一制胜策略
    - 双方有一保平策略

$$X_1 = S_W(X_0)$$

$$X_2 = S_B(X_0, X_1)$$

$$X_3 = S_W(X_0, X_1, X_2)$$

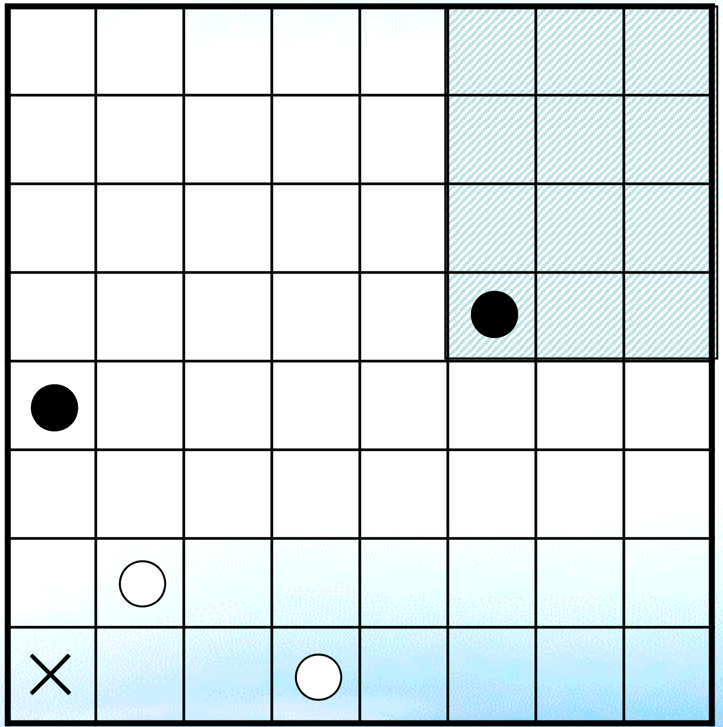
……

$$X_{2k+1} = S_W(X_0, X_1, X_2, \cdots, X_{2K})$$

$$X_{2k+2} = S_B(X_0, X_1, X_2, \cdots, X_{2K+1})$$

Chomp

- **Chomp游戏**
  - 一 m 行 n 列的棋盘，左下角的方格标为 $(1,1)$，右上角的方格标为 (n,m)，其余方格标号以此类推
  - 初始时棋盘为空，黑白双方轮流在棋盘的方格中摆子
  - 若格 (i_0, j_0) 中已有子，任一方不能在格 $(i, j), i \geq i_0, j \geq j_0$ 中摆子
  - 在格 $(1,1)$ 中摆子的一方失败
- 若 $n = m$，先手方有制胜策略
  - 第一步先手方在 $(2,2)$ 摆子
  - 若后手方选择 $(i,1)$，先手方选择 $(1,i)$



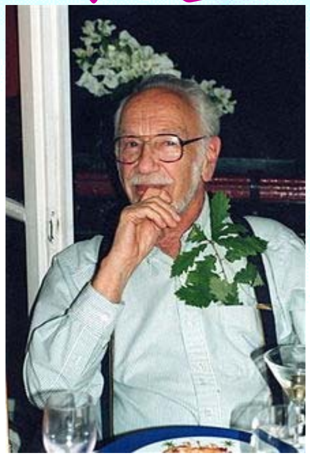
Chomp

- 若 $n \neq m$，先手方有制胜策略
  - 游戏符合**von Neumann**定理棋类游戏的条件
  - 游戏没有平局，或者先手方有制胜策略，或者后手方有制胜策略
  - 若后手方有制胜策略，则先手方有制胜策略　矛盾
    - 先手方第一步在 (n,m) 摆子，后手方按其制胜策略在(i_0, j_0)摆子，不论先手方后续如何摆子，后手方按其制胜策略均能获胜
    - 先手方第一步在 (i_0, j_0) 摆子，不论后手方后续如何摆子，先手方按后手方的制胜策略均能获胜，由此得到先手方的制胜策略

后手方必胜策略　1　2　3　4　后手胜

先手方必胜策略　1　2　3　先手胜

目前尚未找到具体的制胜策略，n, m 较小时的制胜策略可通过计算机求得



David Gale
（1921- 2008）
美国数学家、
经济学家

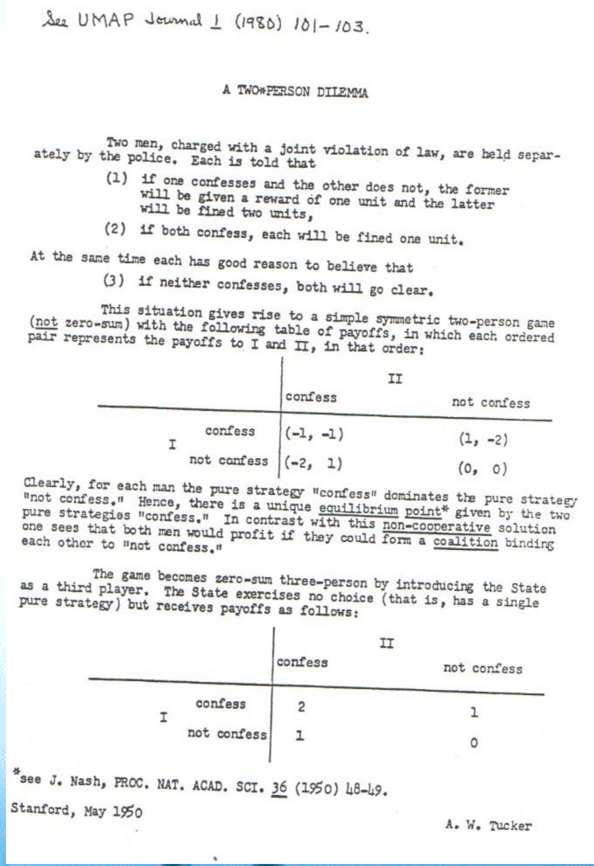
Gale D. A curious Nim-type game. *American Mathematical Monthly*, 81, 876–879, 1974

博弈的要素

- 参与者（player）：参与博弈的决策主体
- 策略（strategy）：参与者可以采取的行动方案
  - 某个参与者的策略全体组成策略集（strategy set）
- 局势（outcome）：所有参与者采取各自的行动后形成的状态
- 收益（payoff）：各个参与者在不同局势下获得的利益
- 规则（rule）：对参与者行动的先后顺序、参与者获知信息的多少等内容的具体规定

囚徒困境

- 囚徒困境（**Prisoner's Dilemma**）
  - 甲、乙两人共同犯罪，警方掌握了一部分犯罪事实，将他们带到警局分别讯问
    - 若两人均承认所有罪行，则各被判处**6**个月徒刑
    - 若一人认罪，一人不认罪，前者被轻判**1**个月徒刑，后者被重判**9**个月徒刑
    - 若两人均不认罪，则以部分罪行各被判处**2**个月徒刑



See UMAP Journal 1 (1980) 101–103.

A TWO-PERSON DILEMMA

Two men, charged with a joint violation of law, are held separately by the police. Each is told that

(1) if one confesses and the other does not, the former will be given a reward of one unit and the latter will be fined two units,

(2) if both confess, each will be fined one unit.

At the same time each has good reason to believe that

(3) if neither confesses, both will go clear.

This situation gives rise to a simple symmetric two-person game (not zero-sum) with the following table of payoffs, in which each ordered pair represents the payoffs to I and II, in that order:

		II: confess	II: not confess
I	confess	(-1, -1)	(1, -2)
	not confess	(-2, 1)	(0, 0)

Clearly, for each man the pure strategy "confess" dominates the pure strategy "not confess." Hence, there is a unique equilibrium point* given by the two pure strategies "confess." In contrast with this non-cooperative solution one sees that both men would profit if they could form a coalition binding each other to "not confess."

The game becomes zero-sum three-person by introducing the State as a third player. The State exercises no choice (that is, has a single pure strategy) but receives payoffs as follows:

		II: confess	II: not confess
I	confess	2	1
	not confess	1	0

*see J. Nash, PROC. NAT. ACAD. SCI. 36 (1950) 48-49.

Stanford, May 1950

A. W. Tucker

Tucker, A.W., A two-person dilemma, Unpublished Manuscript, 1950. Reprint, On jargon: The prisoner's dilemma. *UMAP Journal,* 1, 101, 1980.

囚徒困境

- 参与者：甲、乙
- 策略集（甲、乙）
  - 坦白、沉默

- 局势（收益）
  - 甲坦白 –1、乙沉默 –9
  - 甲沉默 –9、乙坦白 –1
  - 甲沉默 –2、乙沉默 –2
  - 甲坦白 –6、乙坦白 –6

囚徒乙

囚徒甲	甲 \ 乙	沉默	坦白
	沉默	$(-2, -2)$	$(-9, -1)$
	坦白	$(-1, -9)$	$(-6, -6)$

当参与者只有两个时，博弈可以用简洁的表格形式表示

囚徒困境

- 占优策略
  - 不论对方选择哪种策略，本人选择坦白均优于选择沉默
- 稳定局势
  - 双方坦白是一种稳定局势
  - 双方沉默、一方坦白一方沉默均不是稳定局势

囚徒甲 \ 囚徒乙	沉默	坦白
沉默	$(-2, -2)$	$(-9, -1)$
坦白	$(-1, -9)$	$(-6, -6)$

囚徒甲 \ 囚徒乙	沉默	坦白
沉默	$(-2, -2)$	$(-9, -1)$
坦白	$(-1, -9)$	$(-6, -6)$

博弈分类

数学建模

- 合作博弈（cooperative game）与非合作博弈（non-cooperative game）
  - 在合作博弈中，部分参与者可组成联盟（coalition）以获得更大收益；在非合作博弈中，参与者决策独立进行
- 静态博弈（static game）与动态博弈（dynamic game）
  - 在静态博弈中，所有参与者同时决策（或在决策时不知道其它参与者的决策）
- 完全信息（complete information）与不完全信息
  - 完全信息指所有参与者均掌握其它参与者的策略集、收益等信息
  - 完美信息（perfect information）指在动态博弈中所有参与者均掌握其它参与者之前已作的决策


浙江大学
ZheJiang University
运筹与统计
矩阵博弈

矩阵博弈

- 二人零和（**zero-sum**）有限博弈（完全信息静态博弈）
  - 参与者为两人：甲、乙
  - 每人的可行策略集为有限集，设甲、乙的策略集分别为$\{X_1, X_2, \cdots, X_m\}$和$\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\}$，所有的局势形如$(X_i, Y_j)$
  - 对任一局势，两人收益之和为零
- 博弈可用一个矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 来表示，称为收益矩阵（**payoff matrix**），其中 a_{ij} 为局势 (X_i, Y_j)下甲的收益，该局势下乙的收益为 $-a_{ij}$

极小极大原则

- 若甲选择策略 X_s，不论乙如何选择，其收益至少为 $\min\limits_{1\le t\le n} a_{st}$。甲可选择策略使其达到最大，其值为

$$\max_{1\le s\le m}\min_{1\le t\le n} a_{st}$$

收益矩阵每行元素最小值中的最大值

- 若乙选择策略 Y_t，不论甲如何选择，其收益至少为 $\min\limits_{1\le s\le m}(-a_{st})$。乙可选择策略使其达到最大，其值为 $\max\limits_{1\le t\le n}\min\limits_{1\le s\le m}(-a_{st}) = -\min\limits_{1\le t\le n}\max\limits_{1\le s\le m} a_{st}$

收益矩阵每列元素最大值中的最小值

鞍点

- $\max\limits_{1\le s\le m}\min\limits_{1\le t\le n} a_{st} \le \min\limits_{1\le t\le n}\max\limits_{1\le s\le m} a_{st}$
  - 设 $a_{ij} = \max\limits_{1\le s\le m}\min\limits_{1\le t\le n} a_{st}$，
    $a_{kl} = \min\limits_{1\le t\le n}\max\limits_{1\le s\le m} a_{st}$
- 若 $\max\limits_{1\le s\le m}\min\limits_{1\le t\le n} a_{st} = \min\limits_{1\le t\le n}\max\limits_{1\le s\le m} a_{st}$，则存在元素 a_{il}，它既是所在行的最小值，又是所在列的最大值，称为**鞍点**（**saddle point**）

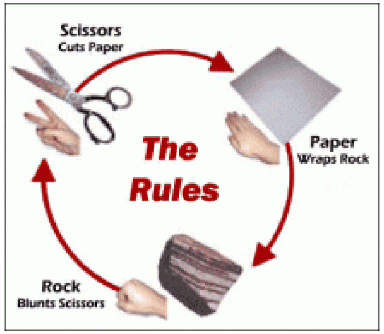
$$\boxed{\max\limits_{1\le s\le m}\min\limits_{1\le t\le n} a_{st} \qquad \min\limits_{1\le t\le n}\max\limits_{1\le s\le m} a_{st}}$$

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \le\cdots & a_{il} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \le\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kl} & \cdots & a_{kn} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{ml} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}$$

(X_i, Y_l)是稳定局势

矩阵博弈

$$\begin{pmatrix} 4 & \boxed{0} & 2 \\ 3 & \boxed{2} & 5 \\ \boxed{-5} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 石头 & 剪刀 & 布 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 石头 \\ 剪刀 \\ 布 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & \boxed{-1} \\ \boxed{-1} & 0 & 1 \\ 1 & \boxed{-1} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(X_2, Y_2)是稳定局势

$$\boxed{\max_{1\le s\le m}\min_{1\le t\le n} a_{st} = \min_{1\le t\le n}\max_{1\le s\le m} a_{st}}$$

稳定局势
不存在

混合策略

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 混合策略与期望收益
  - 若参与者可以以一定的概率分布选择若干个不同的策略，这样的策略称为混合策略（**mixed strategy**）；若参与者每次行动都选择某个确定的策略，这样的策略称为纯策略（**pure strategy**）
  - 甲以概率 x_i 选择策略 X_i，$i=1,\dots,m$，其中 $x_i \ge 0$，且 $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$，该混合策略也可用 m 维列向量 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$ 表示，类似地，乙的混合策略也可用 n 维列向量 $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$表示
  - 甲、乙的混合策略集分别为 $\mathbf{X}=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathbf{T}} \mid x_i \ge 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\right\}$ 和 $\mathbf{Y}=\left\{(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathbf{T}} \mid y_j \ge 0, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\right\}$
  - 若甲、乙采用的混合策略分别为 $\mathbf{x}\in\mathbf{X},\mathbf{y}\in\mathbf{Y}$，甲的期望收益（**expected payoff**）为 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{ij}$，乙的期望收益为 $-\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}$

极小极大定理

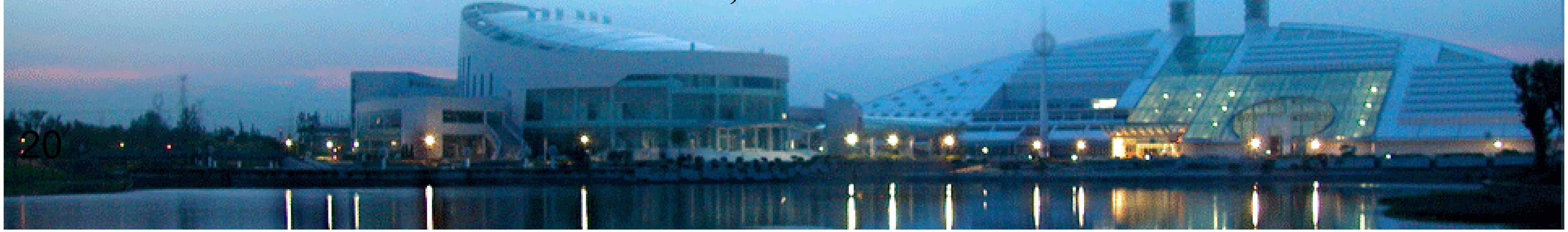
数学建模

- （**von Neumann极小极大定理**，**Minimax Theorem**）
  - 设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，则存在 $\mathbf{x}^*\in\mathbf{X},\mathbf{y}^*\in\mathbf{Y}$

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^* = \max_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}\min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y} = \min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}}\max_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}$$

When George B. Dantzig first described a linear programming problem to John von Neumann in 1947, von Neumann immediately saw that the problem of finding an optimal strategy for a player of a matrix game (zero-sum two-person game) was a linear programming problem. But since there are two players in a matrix game, von Neumann suggested that linear-programming problems came in pairs. This conjecture was proved by David Gale, Harold W. Kuhn and Albert W. Tucker in 1948

——Nering, E.D., Tucker, A.W., *Linear Programming and Related Problems*, 1993



双矩阵博弈

- 若二人博弈不是零和的，双方的收益需用两个矩阵分别表示，称这样的博弈为双矩阵博弈（**bimatrix game**）
  - 囚徒困境即为双矩阵博弈
- **1964年，Lemke和Howson**给出了求双矩阵博弈稳定局势的算法，该算法需要指数时间

$(-2,-2)$	$(-9,-1)$
$(-1,-9)$	$(-6,-6)$

$$\begin{pmatrix} -2 & -9 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$$

从零和到双赢

Lemke, C. E., Howson, J. T., Equilibrium points of bimatrix games. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 12, 413–423, 1964

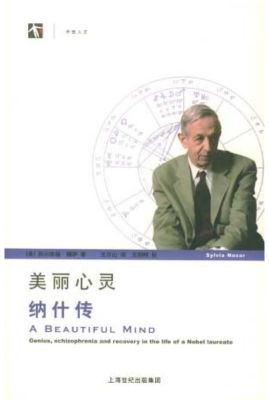
运筹与统计

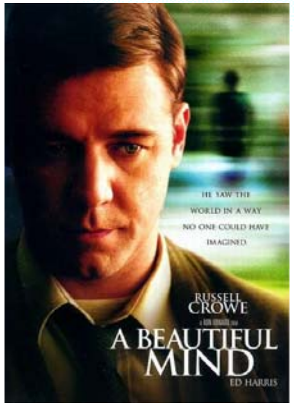
Nash均衡

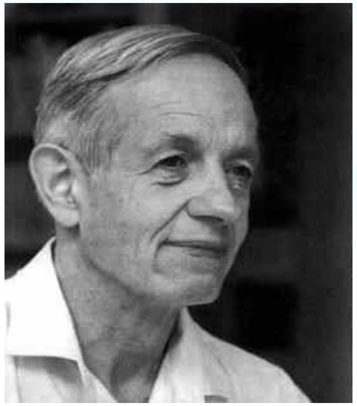
Nash均衡

数学建模

- **Nash 均衡（Nash equilibrium）**
  - （完全信息静态）博弈的某个局势，每一个理性的参与者都不会单独偏离它
  - 对每一个参与者，在其他参与者策略不变情况下，单独采取其他策略，收益不会增加







Nasar S. *A Beautiful Mind The Life of Mathematical Genius and Nobel Laureate John Nash*. Simon and Schuster, 2011

A Beautiful Mind, 2001年出品，Ron Howard导演，第74 届奥斯卡最佳影片奖

John Forbes Nash
（1928－2015）
美国数学家、经济学家
1994年Nobel经济学奖得主
2015年Abel奖得主

Nash均衡

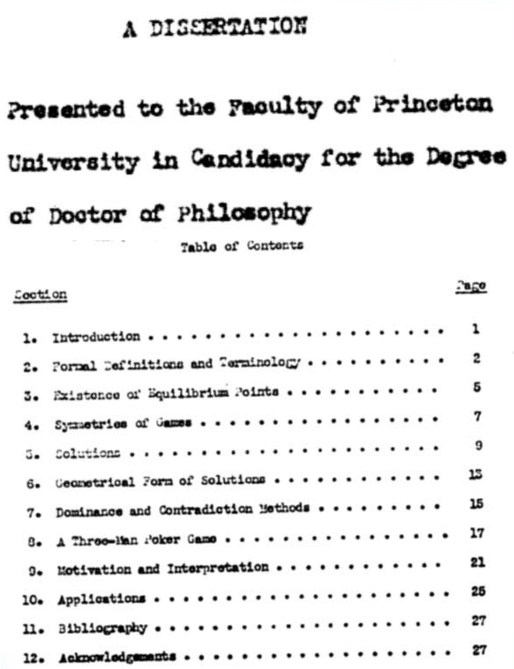
浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- **Nash 定理**
  - 若参与者有限，每位参与者的策略集均有限，收益函数均为实值函数，则博弈必存在混合策略意义下的Nash均衡

Nash, J. F., Jr., Equilibrium points in n-person games, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36, 48–49, 1950.

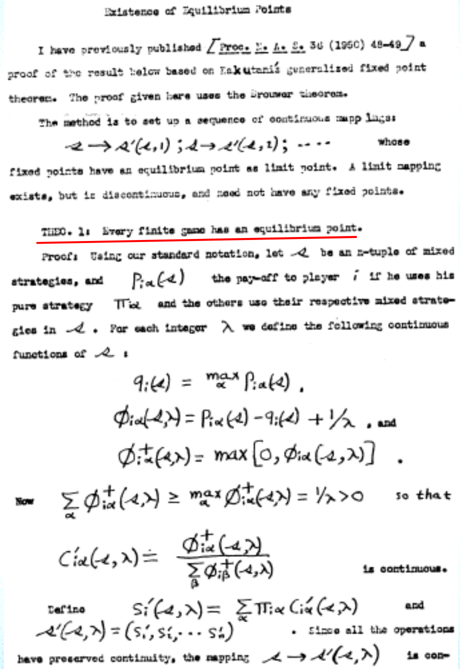
Nash, J. F., Jr., Non-Cooperative Games, *Annals of Mathematics, 54*, 286-295, 1951



A DISSERTATION

Presented to the Faculty of Princeton University in Candidacy for the Degree of Doctor of Philosophy

Table of Contents



Existence of Equilibrium Points

I have previously published [Proc. N. A. S. 36 (1950) 48–49] a proof of the result below based on Kakutani's generalized fixed point theorem. The proof given here uses the Brouwer theorem.

The method is to set up a sequence of continuous mappings:

$\mathscr{s} \to \mathscr{s}'(\mathscr{s},1)$; $\mathscr{s} \to \mathscr{s}'(\mathscr{s},2)$; $\cdots$ whose fixed points have an equilibrium point as limit point. A limit mapping exists, but is discontinuous, and need not have any fixed points.

THEO. 1: Every finite game has an equilibrium point.

Proof: Using our standard notation, let $\mathscr{s}$ be an n-tuple of mixed strategies, and $p_{i\alpha}(\mathscr{s})$ the pay-off to player i if he uses his pure strategy $\pi_{i\alpha}$ and the others use their respective mixed strategies in $\mathscr{s}$. For each integer λ we define the following continuous functions of $\mathscr{s}$:

$$q_i(\mathscr{s}) = \max_{\alpha} p_{i\alpha}(\mathscr{s}),$$

$$\phi_{i\alpha}(\mathscr{s},\lambda) = p_{i\alpha}(\mathscr{s}) - q_i(\mathscr{s}) + 1/\lambda, \text{ and}$$

$$\phi^+_{i\alpha}(\mathscr{s},\lambda) = \max[0, \phi_{i\alpha}(\mathscr{s},\lambda)].$$

Now $\sum_\alpha \phi^+_{i\alpha}(\mathscr{s},\lambda) \geq \max_\alpha \phi^+_{i\alpha}(\mathscr{s},\lambda) = 1/\lambda > 0$ so that

$$C'_{i\alpha}(\mathscr{s},\lambda) \doteq \frac{\phi^+_{i\alpha}(\mathscr{s},\lambda)}{\sum_\beta \phi^+_{i\beta}(\mathscr{s},\lambda)}$$ is continuous.

Define $s'_i(\mathscr{s},\lambda) = \sum_\alpha \pi_{i\alpha} C'_{i\alpha}(\mathscr{s},\lambda)$ and $\mathscr{s}'(\mathscr{s},\lambda) = (s'_1, s'_2, \cdots s'_n)$. Since all the operations have preserved continuity, the mapping $\mathscr{s} \to \mathscr{s}'(\mathscr{s},\lambda)$ is con-

Nash, J. F., Jr., *Non-cooperative games*, Thesis, Princeton University, 1950.

不动点定理

数学建模

- （**Brouwer**）设 $C\subset\mathbb{R}^n$ 是一个非空有界闭凸集，$f:C\to C$ 连续，则存在 $x^*\in C$，使得 $f(x^*)=x^*$
- （**Kakutani**）设 $C\subset\mathbb{R}^n$是一个非空有界闭凸集，$P_0(C)$是C中所有非空子集的集合，集值映射 $F:C\to P_0(C)$ 满足对任意 $x\in C$，$F(x)$ 是C中的非空闭凸集，且F在C上上半连续，则存在$x^*\in C$，使得 $x^*\in F(x^*)$

Luitzen Egbertus Jan Brouwer
（1881 - 1966）
荷兰数学家

Shizuo Kakutani
（角谷 静夫）
（1911 - 2004）
日本数学家

Kakutani S, A generalization of Brouwer's fixed point theorem. *Duke Mathematical Journal*, 8, 457–459, 1941.

最优反应函数

数学建模

- 设参与者 i 的策略集为A_i，收益函数为$u_i(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，其中 $a_i\in A_i$。用a_{-i}表示其他参与者的策略组合$(a_1,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_n)$
- 最优反应函数（**best response function**）
  - $B_i(a_{-i})=\left\{a_i^* \mid u_i(a_i^*,a_{-i})\ge u_i(a_i,a_{-i}),\forall a_i\in A_i\right\}$
  - 给定除参与者 i 外其他参与者的策略，参与者 i 选择其最优反应函数给出的集合中的策略可获得最大收益
  - 定义 $\mathscr{B}(a)=(B_1(a_{-1}),B_2(a_{-2}),\cdots,B_n(a_{-n}))$
- 局势 $\mathbf{a}^*=\left(a_1^*,a_2^*,\cdots,a_n^*\right)$为**Nash** 均衡的充要条件
  - $a_i^*\in B_i(a_{-i}^*),i=1,\cdots,n$ $\boxed{\mathbf{a}^*\in\mathscr{B}(\mathbf{a}^*)}$
  - 每位参与者的策略均是对其他参与者选择策略的一个最优反应

Nash 均衡

- 矩阵博弈的稳定局势即为Nash 均衡，Nash 定理是极小极大定理向多人博弈和非零和博弈的推广
- Nash 定理仍是一个存在性证明，求（近似）Nash 均衡的复杂性证明与算法设计是当前算法博弈论（Algorithmic Game Theory）的研究热点之一

Nash went to see von Neumann a few days after he passed his generals. …… Nash started to describe the proof he had in mind for an equilibrium in games of more than two players. But before he had gotten out more than a few disjointed sentences, von Neumann interrupted, jumped ahead to the yet unstated conclusion of Nash's argument, and said abruptly, "That's trivial, you know. That's just a fixed point theorem."

——Nasar, S., *A Beautiful Mind*

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

双人博弈

- **Battle of the Sexes**

男 \ 女	看球	逛街
看球	(3, 1)	(0, 0)
逛街	(0, 0)	(1, 3)

- **Chicken（hawk-dove）**

甲 \ 乙	避	冲
避	(0, 0)	(–1, 1)
冲	(1, –1)	(–5, –5)

- **Boxed Pigs**
  - 猪圈的一端有一个食槽，另一端安装了一个按钮。按一下按钮，将有10个单位的猪食进入食槽
  - 按按钮需要相当于两个单位的成本，并且由于需从按钮处回到食槽，吃食的数量也将减少

大 \ 小	按	等
按	(5, 1)	(4, 4)
等	(9, –1)	(0, 0)

Stag or Hare

浙江大学 ZheJiang University
数学建模

- 一群猎人相约去打猎，猎场中有鹿和兔两种动物，鹿的价值远大于兔的价值。每个猎人在打猎时只能专注于一种猎物，猎到某猎物后他即中止打猎
- 一头鹿需要所有人协力才能捕获，一只兔只要单人努力即可捕获，所有人协力获得的猎物收益由所有人平分
- 所有人捕鹿或所有人捕兔是两个Nash均衡

不用説遙远的将来，甚至連第二天的事情都不会想到。如果大家在捕一只鹿，每人都很知道应該忠实地守着自己的崗位。但是如果有一只兎从其中一人的眼前跑过，这个人一定会毫不迟疑地去追捕这只兎；当他捕到了兎以后，他的同伴們因此而沒有捕到他們的猎获物这件事，他会不大在意，这是无須怀疑的。

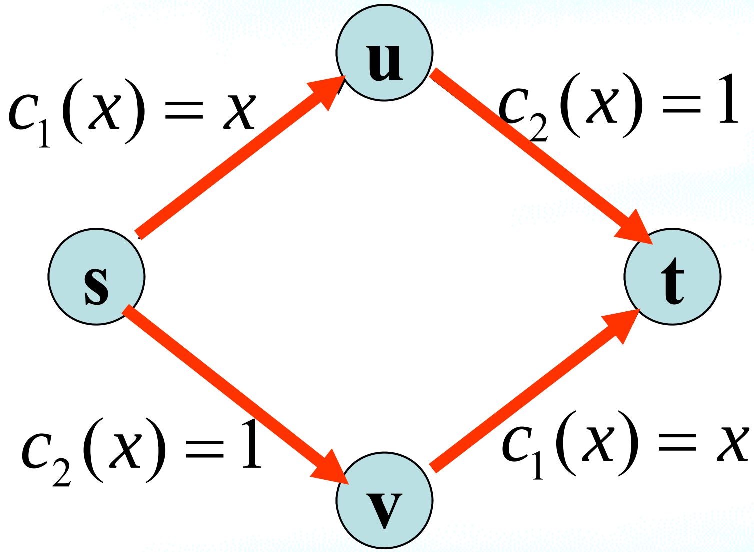
让•雅克•卢梭著：论人类不平等的起源和基础，**1755.**（李常山译，商务印书馆**1962**年版）

Braess 悖论

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 从 s 到 t 有s-u-t 和s-v-t两条道路，每个路段通行时间与路况有关，也与通过路段车流量有关
- 半数机动车选择 s-u-t 路，半数机动车选择s-v-t 路是一个Nash均衡，所有机动车行驶总时间为 $c_1\left(\frac{1}{2}\right)+c_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$

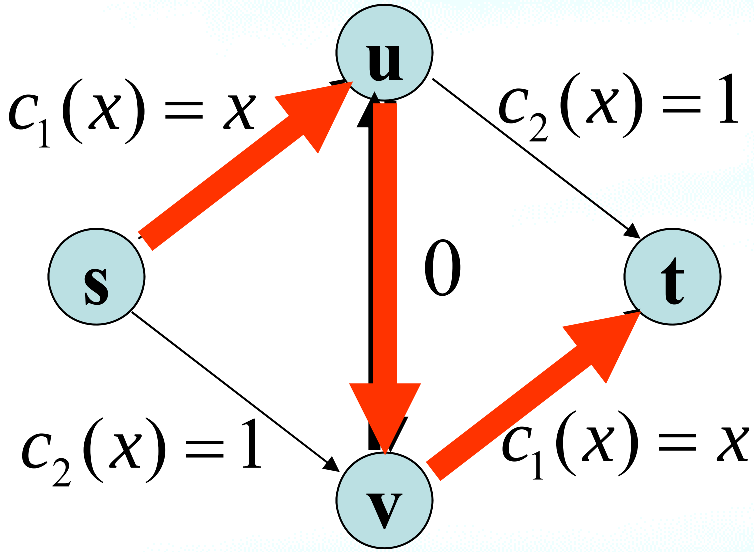


将车流量单位化为 [0,1] 间的数，$c(x)$表示该路段车流量为x时通过该路段需要的时间

Braess 悖论

- 新建一条从 **u** 到 **v**的双向快速通道，通行时间可忽略不计
- 所有机动车选择 **s-u-v-t**路为 **Nash** 均衡。所有机动车行驶总时间为 $2c_1(1)=2$
- **Nash** 均衡未必是每个参与者的最优选择，也未必是某种整体利益最优的局势

Inefficiency of Equilibria

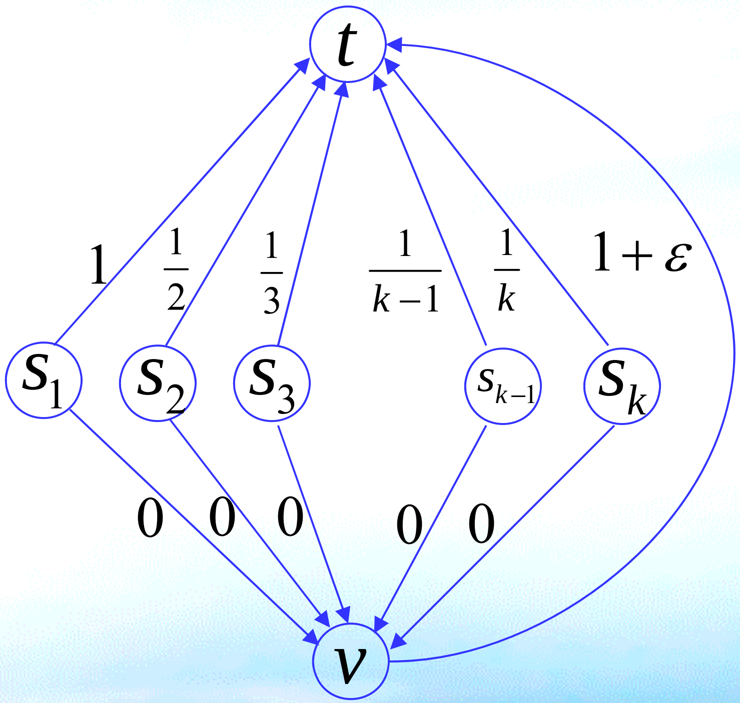


Braess, D., Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung. *Unternehmensforschung*, 12, 258–268, 1969. （英译版） On a Paradox of Traffic Planning, *Transportation Science*, 39, 446–450, 2005.

网络设计博弈

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- 现有一由若干节点和线路组成的通讯网络，每个使用者可借此网络建立两点之间的通讯联系，为此需向网络所有者购买线路使用权
- 每条线路价格不同。若多个使用者共同使用某线路，费用由这些使用者分摊
- k 个使用者，起点分别为 s_i，$i=1,\cdots,k$，终点均为 t
- 从所有使用者整体利益来看，使用者 i 选择 s_i-v-t 是最优的，总费用是 $1+\varepsilon$
- 使用者 i 选择 s_i-t 是唯一的一个**Nash**均衡，总费用为 $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}=O(\ln k)$



运筹与统计

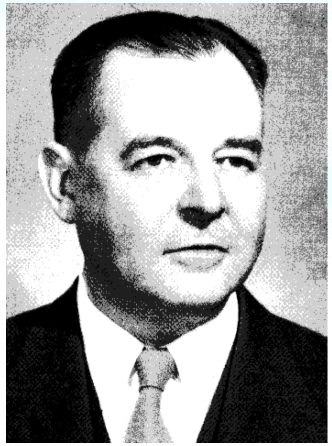
竞争与垄断

Hotelling模型

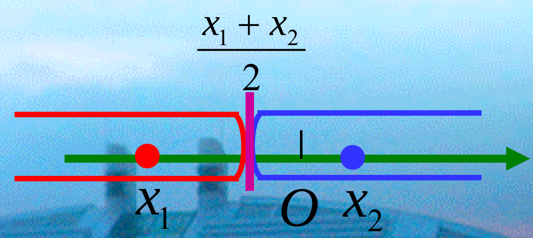
浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 选址问题
  - 现有两家快餐连锁店拟在一条街道上开设分店
  - 居民住宅分布在街道上，位于地点 O 左侧和右侧的居民各占一半。每人都会选择距他住址较近的一家快餐店就餐（若距离相等则随机选择一家）
  - 连锁店应在何处选址才能吸引到比另一家更多的顾客
- **Hotelling模型**
  - 街道抽象为实数轴，O 为原点，甲、乙两家连锁店的位置分别为 x_1, x_2
  - 若 $x_1 \le x_2$，位于 $\left(-\infty, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 的顾客将到快餐店甲就餐，位于 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, +\infty\right)$ 的顾客将到快餐店乙就餐



Harold Hotelling
（1895-1973 ）
美国数学家、经济学家、统计学家

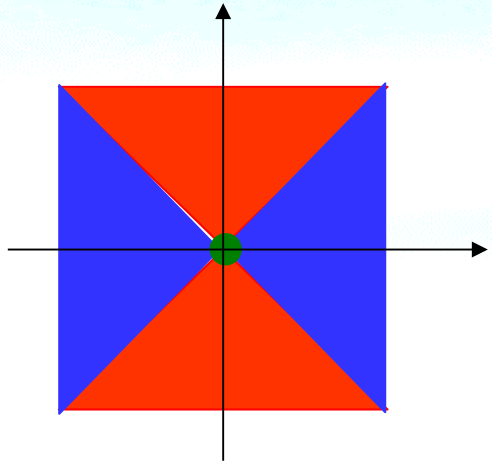


Hotelling 模型

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 客源区间
  - 若两家快餐店不在同一地点，以两者位置中点为界构成各自的客源区间，客源区间包含原点的快餐店拥有更多客源
  - 若两家快餐店在同一地点，两家快餐店平分客源
- 最优反应函数
  - $$B_1(x_2)=\begin{cases} x_2<x_1<-x_2, & x_2<0 \\ 0, & x_2=0 \\ -x_2<x_1<x_2, & x_2>0 \end{cases}$$
    $$B_2(x_1)=\begin{cases} x_1<x_2<-x_1, & x_1<0 \\ 0, & x_1=0 \\ -x_1<x_2<x_1, & x_1>0 \end{cases}$$



甲的最优策略

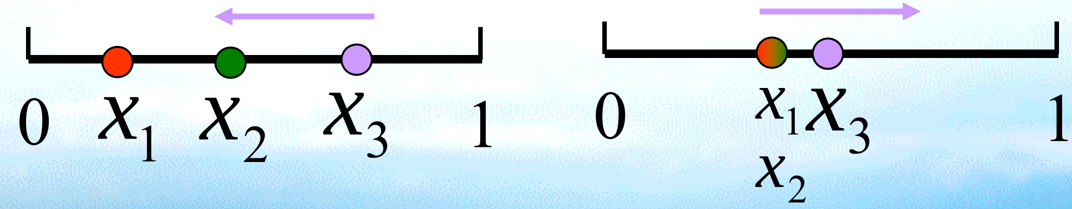
乙的最优策略

(0, 0) 是 Nash均衡，两家快餐店开在同一地点，平分客源

三方竞争

数学建模

- 现有第三家快餐店丙加入竞争，选址为 x_3
  - 若 $x_1 \le x_2 < x_3$， 则快餐店丙有向左移动靠近 x_1 和 x_2 的倾向
  - 若 $x_1 = x_2 = x_3$，则快餐店丙有向左或者向右移动离开 x_1 和 x_2 的倾向
- 三方竞争是不稳定的，Nash 均衡不存在



Cournot双头垄断

数学建模

- 两家垄断企业生产同一产品，生产单位产品的成本为常数 c
- 若市场上该产品供应量为Q，则产品销售价格为$M-Q$，其中$M \geq Q$为一常数
- 两家企业应如何选择各自的产量可使自身获益最大

其他形式的生产函数和供给函数

Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses (Cournot, 1838)

Antoine Augustin Cournot （1801－1877）
法国数学家、经济学家、哲学家

收益与策略

数学建模

- 设两家企业的产量分别为q_1, q_2，市场总供应量为q_1+q_2，产品价格为$M-(q_1+q_2)$
  - 企业 i 的收益

$$u_i(q_1,q_2)=\begin{cases} q_i(M-q_1-q_2-c), & q_1+q_2\le M, \\ -cq_i, & q_1+q_2>M. \end{cases}$$

  - 两企业的最优反应函数

$$B_1(q_2)=\begin{cases} \dfrac{M-q_2-c}{2}, & q_2\le M-c, \\ 0, & q_2>M-c. \end{cases} \qquad B_2(q_1)=\begin{cases} \dfrac{M-q_1-c}{2}, & q_1\le M-c, \\ 0, & q_1>M-c. \end{cases}$$

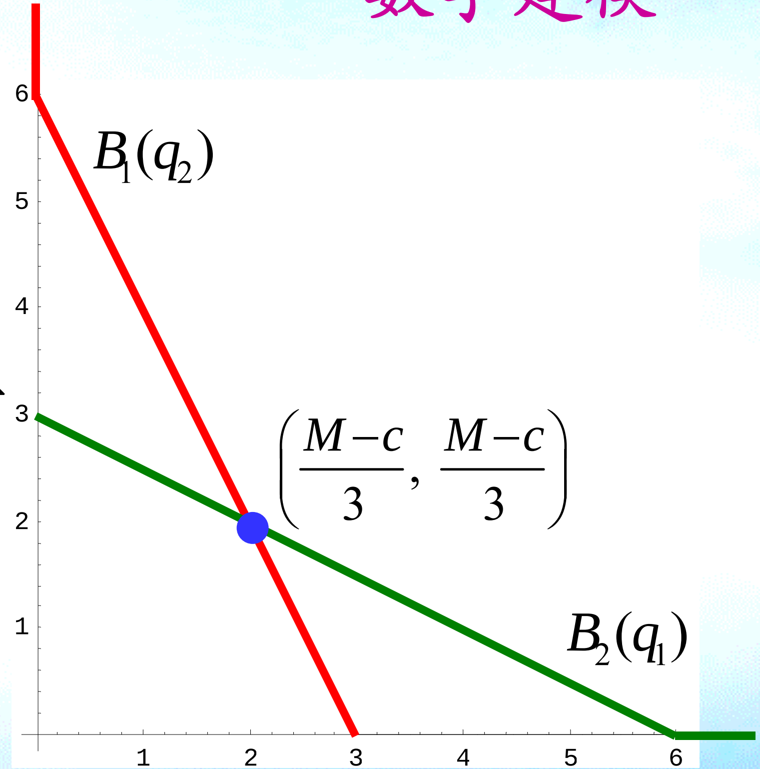
Nash 均衡

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{1}{2}(M - q_2^* - c) \\ q_2^* = \frac{1}{2}(M - q_1^* - c) \end{cases} \Rightarrow q_1^* = q_2^* = \frac{M-c}{3}$$

- $\left(\frac{M-c}{3}, \frac{M-c}{3}\right)$是 **Nash 均衡**，此时

  两家企业的收益均为$\frac{(M-c)^2}{9}$，

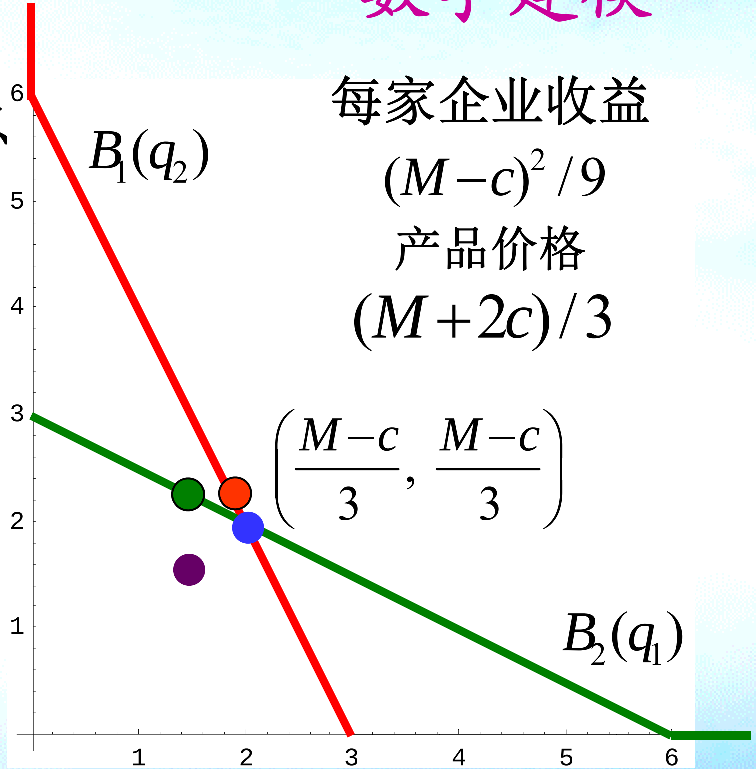
  产品价格为$\frac{M+2c}{3} > c$



$$B_1(q_2) = \begin{cases} \frac{M - q_2 - c}{2}, & q_2 \le M - c, \\ 0, & q_2 > M - c. \end{cases} \quad B_2(q_1) = \begin{cases} \frac{M - q_1 - c}{2}, & q_1 \le M - c, \\ 0, & q_1 > M - c. \end{cases}$$

联合和欺骗

- 若两家企业联合，总产量为 Q，总收益为 $Q(M-Q-c)$
  - 当 $Q=(M-c)/2$ 时两家企业总收益最大。此时每家企业只需生产$(M-c)/4$，收益为 $(M-c)^2/8$，产品价格为 $(M+c)/2>(M+2c)/3$
- 一家企业的产量为 $(M-c)/4$ 时，另一家企业的最优策略为 $3(M-c)/8$，收益为 $3(M-c)^2/16$，大于联合时的收益

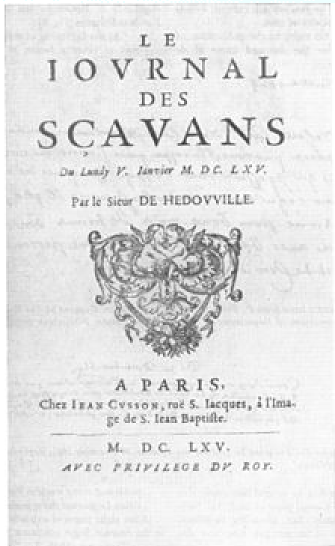


$$B_1(q_2)=\begin{cases}\dfrac{M-q_2-c}{2}, & q_2 \le M-c,\\ 0, & q_2 > M-c.\end{cases} \qquad B_2(q_1)=\begin{cases}\dfrac{M-q_1-c}{2}, & q_1 \le M-c,\\ 0, & q_1 > M-c.\end{cases}$$

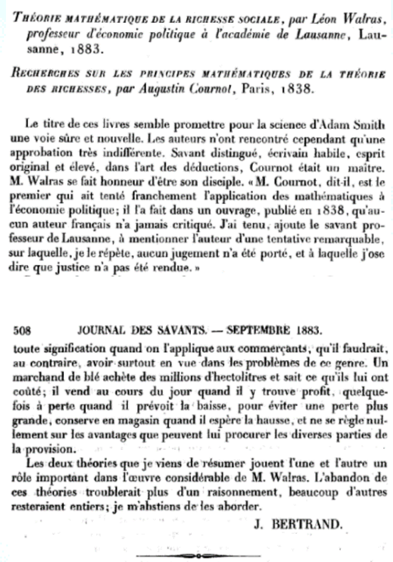
Bertrand 双头垄断

数学建模

- 两家垄断企业生产同一产品，生产单位产品的成本为常数 c
- 两家企业可自行确定产品价格，目标为自身获益最大
  - 消费者只会选择定价较低的企业生产的产品。若两企业定价相同，则市场份额由两企业平分
  - 若该产品最低售价为 p，则市场需求量为 $M-p$



LE
IOVRNAL
DES
SCAVANS
Du Lundy V. Ianvier M. DC. LXV.
Par le Sieur DE HEDOVVILLE.
A PARIS,
Chez IEAN CVSSON, ruë S. Iacques, à l'Image de S. Iean Baptiste.
M. DC. LXV.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.



Théorie mathématique de la richesse sociale, par Léon Walras, professeur d'économie politique à l'académie de Lausanne, Lausanne, 1883.

Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses, par Augustin Cournot, Paris, 1838.

Le titre de ces livres semble promettre pour la science d'Adam Smith une voie sûre et nouvelle. Les auteurs n'ont rencontré cependant qu'une approbation très indifférente. Savant distingué, écrivain habile, esprit original et élevé, dans l'art des déductions, Cournot était un maître. M. Walras se fait honneur d'être son disciple. « M. Cournot, dit-il, est le premier qui ait tenté franchement l'application des mathématiques à l'économie politique; il l'a fait dans un ouvrage, publié en 1838, qu'aucun auteur français n'a jamais critiqué. J'ai tenu, ajoute le savant professeur de Lausanne, à mentionner l'auteur d'une tentative remarquable, sur laquelle, je le répète, aucun jugement n'a été porté, et à laquelle j'ose dire que justice n'a pas été rendue. »

508 JOURNAL DES SAVANTS. — SEPTEMBRE 1883.

toute signification quand on l'applique aux commerçants, qu'il faudrait, au contraire, avoir surtout en vue dans les problèmes de ce genre. Un marchand de blé achète des millions d'hectolitres et sait ce qu'ils lui ont coûté; il vend au cours du jour quand il y trouve profit, quelquefois à perte quand il prévoit la baisse, pour éviter une perte plus grande, conserve en magasin quand il espère la hausse, et ne se règle nullement sur les avantages que peuvent lui procurer les diverses parties de la provision.

Les deux théories que je viens de résumer jouent l'une et l'autre un rôle important dans l'œuvre considérable de M. Walras. L'abandon de ces théories troublerait plus d'un raisonnement, beaucoup d'autres resteraient entiers; je m'abstiens de les aborder.

J. BERTRAND.

Bertrand, J., Review of *Theorie mathematique de la richesse sociale* and of *Recherches sur les principles mathematiques de la theorie des richesses*; *Journal des Savants*, 67, 499–508, 1883

创刊于1665年，欧洲最早的学术期刊之一

价格与收益

- 设两家企业的价格分别为p_1, p_2，则企业 **1** 的市场份额和收益如下表所示

	市场份额	收益
$p_1 < p_2$	$M - p_1$	$(p_1 - c)(M - p_1)$
$p_1 = p_2$	$\dfrac{M - p_1}{2}$	$\dfrac{(p_1 - c)(M - p_1)}{2}$
$p_1 > p_2$	0	0

Joseph Louis François Bertrand
（1822－1900）
法国数学家

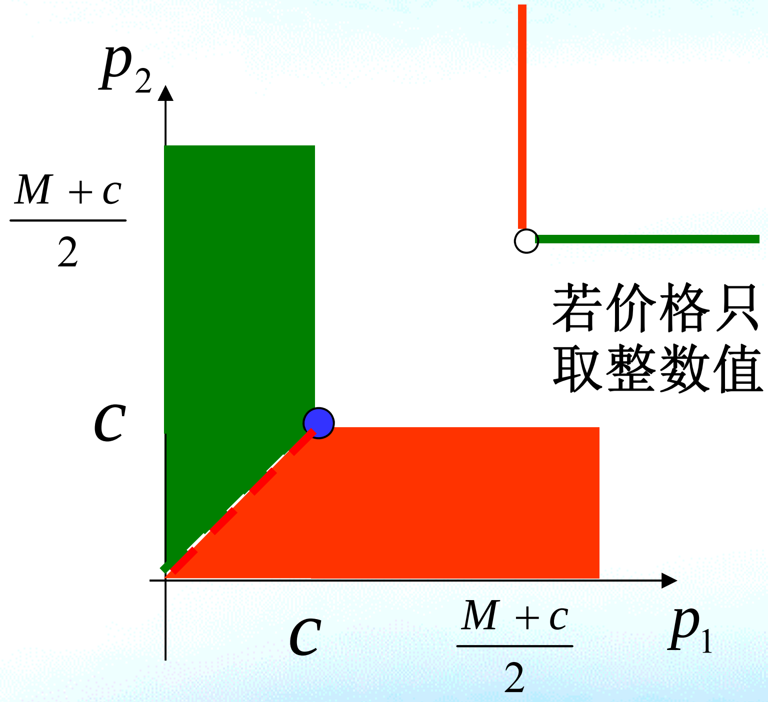
Nash均衡

数学建模

$$B_1(p_2)=\begin{cases}\{p_1 \mid p_1 > p_2\},\ p_2 < c\\ \{p_1 \mid p_1 \ge p_2\},\ p_2 = c\\ \varnothing, & c < p_2 \le \dfrac{M+c}{2}\\ \dfrac{M+c}{2}, & p_2 > \dfrac{M+c}{2}\end{cases}$$

- (c,c) 是唯一的一个**Nash**均衡。两家企业竞相压低价格，直至成本

$$u_1(p_1,p_2)=\begin{cases}(p_1-c)(M-p_1), & p_1 < p_2,\\ \dfrac{(p_1-c)(M-p_1)}{2}, & p_1 = p_2,\\ 0, & p_1 > p_2.\end{cases}$$



若价格只能取整数值？

1的最优策略

2的最优策略

运筹与统计

合作博弈

讨价还价

- 讨价还价（**bargaining**）问题
  - 两人协商分配一笔总额为**1**万元的资金，约定如果达成协议，双方可以按协议取走各自应得的部分；若未达成协议，则两人分文不得，资金收归他用
- 用 (x,y) 记甲、乙讨价还价后获得的资产。讨价还价后两人资产所有可能组成的集合记为 S，谈判破裂后两人可得的资产为 $d_0=(x_0,y_0)\in S$ 。一个讨价还价问题可用 $\langle S,d_0\rangle$ 来表示
  - $S=\{(x,y)\mid x+y\le 1且x\ge 0, y\ge 0\}$，$d_0=(0,0)$

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

讨价还价

- 讨价还价问题的解为一个函数 φ，对每个讨价还价问题 $\langle S, d_0 \rangle$，有一个唯一的 $d^* = (x^*, y^*) \in S$ 与之对应
  - 至少存在一 $(\bar{x}, \bar{y}) \in S$，使得 $\bar{x} > x_0$ 且 $\bar{y} > y_0$
  - S 为有界闭凸集
- **Nash**应用公理化思想，首次给出了讨价还价问题的一种解

THE BARGAINING PROBLEM[1]

BY JOHN F. NASH, JR.

A new treatment is presented of a classical economic problem, one which occurs in many forms, as bargaining, bilateral monopoly, etc. It may also be regarded as a nonzero-sum two-person game. In this treatment a few general assumptions are made concerning the behavior of a single individual and of a group of two individuals in certain economic environments. From these, the solution (in the sense of this paper) of the classical problem may be obtained. In the terms of game theory, values are found for the game.

INTRODUCTION

A TWO-PERSON bargaining situation involves two individuals who have the opportunity to collaborate for mutual benefit in more than one way. In the simpler case, which is the one considered in this paper, no action taken by one of the individuals without the consent of the other can affect the well-being of the other one.

The economic situations of monopoly versus monopsony, of state trading between two nations, and of negotiation between employer and labor union may be regarded as bargaining problems. It is the purpose of this paper to give a theoretical discussion of this problem and to obtain a definite "solution"—making, of course, certain idealizations in order to do so. A "solution" here means a determination of the amount of satisfaction each individual should expect to get from the situation, or, rather, a determination of how much it should be worth to each of these individuals to have this opportunity to bargain.

Nash, J. F., Jr., The Bargaining Problem. *Econometrica*, 18, 155–162, 1950.

公理与定理

浙江大学 ZheJiang University

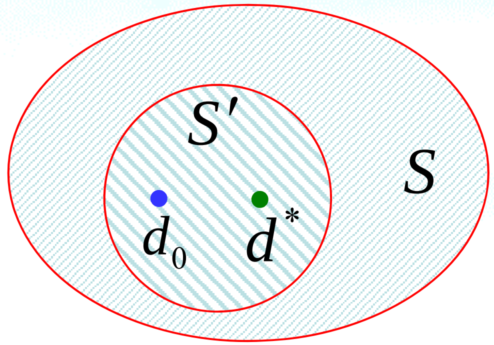
数学建模

- 设有讨价还价问题 $\langle S, d_0 \rangle$，其解为 $d^* = (x^*, y^*)$
  - 公理I（**Pareto**有效性）若 $d' = (x', y')$满足 $x' \geq x^*$，$y' \geq y^*$，且 $d' \neq d^*$，则 $d' \notin S$
  - 公理 II（对称性）若 $x_0 = y_0$ 且集合 S 是对称的，即若 $(x, y) \in S$，必有 $(y, x) \in S$，则 $x^* = y^*$
  - 公理III（仿射不变性）设 $\alpha_i > 0, \beta_i, i = 1, 2$ 为实数，记 $\tilde{S} = \{(\alpha_1 x + \beta_1, \alpha_2 y + \beta_2) \mid (x, y) \in S\}$，$\tilde{d}_0 = (\alpha_1 x_0 + \beta_1, \alpha_2 y_0 + \beta_2)$ 则讨价还价问题 $\langle \tilde{S}, \tilde{d}_0 \rangle$ 的解 $d^* = (\alpha_1 x^* + \beta_1, \alpha_2 y^* + \beta_2)$

公理与定理

数学建模

- 公理IV（无关选择独立性）
  设 $\langle S,d_0\rangle$，$\langle S',d_0\rangle$ 为两讨价还价问题且 $S'\subseteq S$，若 $\langle S,d_0\rangle$ 的解 $d^*\in S'$，则 $\langle S',d_0\rangle$ 的解也是 d^*



- 讨价还价问题 $\langle S,d_0\rangle$ 满足公理Ⅰ—Ⅳ的解是唯一的，即为非线性规划（NLP）的最优解

$$
\begin{aligned}
&\max \quad && (x-x_0)(y-y_0)\\
(\mathrm{NLP})\ &s.t. && (x,y)\in S,\\
& && x\ge x_0
\end{aligned}
$$

存在唯一性

数学建模

- $S\cap\{(x,y)\,|\,x\ge x_0\}$为有界闭集，二元连续函数$(x-x_0)(y-y_0)$最大值存在
- 若存在两个最优解$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$
  - $(x_1-x_0)(y_1-y_0)=(x_2-x_0)(y_2-y_0)$
    $\ge(\bar{x}-x_0)(\bar{y}-y_0)>0$

    $\Rightarrow x_1\ne x_0 \Rightarrow x_1>x_0 \qquad \Rightarrow x_1\ne x_2$
  - 不妨设$x_1<x_2$，则$y_1>y_2$，$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)\in S$ 凸性

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_0\right)\left(\frac{y_1+y_2}{2}-y_0\right)=(x_1-x_0)(y_1-y_0)+\frac{1}{4}(y_2-y_1)(x_1-x_2)$$
$$>(x_1-x_0)(y_1-y_0)$$

矛盾

$$\begin{aligned}\max\quad & (x-x_0)(y-y_0)\\ s.t.\quad & (x,y)\in S,\\ & x\ge x_0\end{aligned}$$

S为有界闭凸集，且存在$(\bar{x},\bar{y})\in S$，$\bar{x}>x_0$，$\bar{y}>y_0$

证明满足公理

数学建模

- 若另有 $(x',y')\neq(x^*,y^*)$ 满足 $x'\geq x^*, y'\geq y^*$
  $$(x'-x_0)(y'-y_0)>(x^*-x_0)(y^*-y_0)$$
- 若 $x_0=y_0$，则 $y^*>y_0=x_0$，(y^*,x^*) 也是最优解
- $$(\alpha_1 x+\beta_1-(\alpha_1 x_0+\beta_1))(\alpha_2 y+\beta_2-(\alpha_2 y_0+\beta_2))$$
  $$=\alpha_1\alpha_2(x-x_0)(y-y_0)$$
- **若(NLP1)的可行域包含在(NLP2)的可行域中，且(NLP2)的最优解是(NLP1)的可行解，则它也是(NLP1)的最优解**

$$\begin{aligned} \max \quad & (x-x_0)(y-y_0) \\ s.t. \quad & (x,y)\in S, \\ & x\geq x_0 \end{aligned}$$

S 为有界闭凸集，且存在 $(\bar{x},\bar{y})\in S$，$\bar{x}>x_0$，$\bar{y}>y_0$

(x^*,y^*) 是唯一的最优解，且 $x^*>x_0, y^*>y_0$

最优解的性质

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 对任意的 $(x,y)\in S$，$\dfrac{x-x^*}{x^*-x_0}\le\dfrac{y^*-y}{y^*-y_0}$
  - 若存在 $(x',y')\in S$，$\dfrac{x'-x^*}{x^*-x_0}>\dfrac{y^*-y'}{y^*-y_0}$

$$(x'',y'')=\varepsilon(x',y')+(1-\varepsilon)(x^*,y^*) \quad \text{凸性}$$

$$=(x^*+\varepsilon(x'-x^*),y^*+\varepsilon(y'-y^*))\in S$$

$$x''=x^*+\varepsilon(x'-x^*)\ge x_0$$

$$(x''-x_0)(y''-y_0)-(x^*-x_0)(y^*-y_0)$$

$$=\varepsilon\left((x^*-x_0)(y^*-y_0)\left(\frac{y'-y^*}{y^*-y_0}+\frac{x'-x^*}{x^*-x_0}\right)+\varepsilon(x'-x^*)(y'-y^*)\right)>0$$

有界

矛盾

$$\begin{aligned}\max\quad &(x-x_0)(y-y_0)\\ s.t.\quad &(x,y)\in S,\\ &x\ge x_0\end{aligned}$$

S 为有界闭凸集，且存在 $(\bar{x},\bar{y})\in S$，$\bar{x}>x_0$，$\bar{y}>y_0$

(x^*,y^*) 是唯一的最优解，且 $x^*>x_0,y^*>y_0$

最优解的性质

数学建模

- 令 $\mathscr{D}=\left\{(x,y)\,|\,\frac{x-x^*}{x^*-x_0}\le\frac{y^*-y}{y^*-y_0}\right\}=\left\{(x,y)\,|\,\frac{x-x_0}{x^*-x_0}+\frac{y-y_0}{y^*-y_0}\le 2\right\}$
  - 作仿射变换 $u(x)=\frac{x-x_0}{x^*-x_0},v(y)=\frac{y-y_0}{y^*-y_0}$

$\tilde{\mathscr{D}}=\{(u,v)\,|\,u+v\le 2\}$

$\langle S,d_0\rangle \xrightarrow[\text{公理IV}]{S\subseteq\mathscr{D}} \langle\mathscr{D},d_0\rangle \xrightarrow[\text{公理III}]{} \langle\tilde{\mathscr{D}},(0,0)\rangle$

$\xrightarrow[\text{公理II}]{}$ 解在直线 $u=v$ 上

$\xrightarrow[\text{公理I}]{}$ 解为 $(u,v)=(1,1)$ $\longrightarrow$ 解为 (x^*,y^*)

> S 为有界闭凸集，且存在 $(x,y)\in S$，$x>x_0$，$y>y_0$

> (x^*,y^*) 是唯一的最优解，且 $x^*>x_0,y^*>y_0$

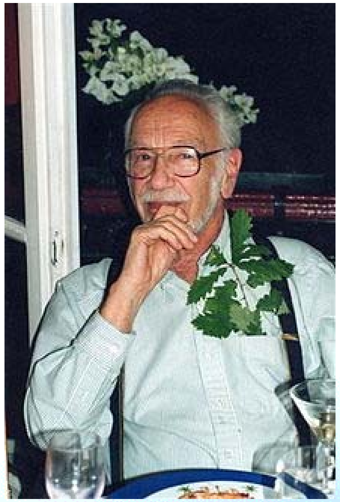
> 对任意的 $(x,y)\in S$，
> $$\frac{x-x^*}{x^*-x_0}\le\frac{y^*-y}{y^*-y_0}$$

Nobel Prize 2012

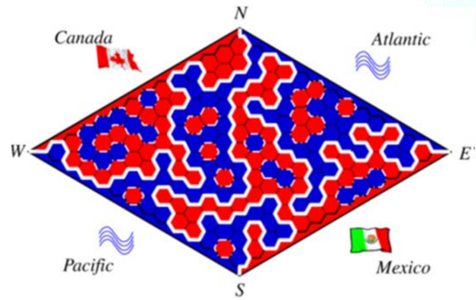
- **Prize motivation: for the theory of stable allocations and the practice of market design**

Lloyd Stowell Shapley
（1923 -2016）
美国数学家、经济学家

Alvin Elliot Roth
（1951 - ）
美国经济学家



David Gale
（1921 - 2008）
美国数学家、经济学家



Gale D. Topological games at Princeton, a mathematical memoir. *Games and Economic Behavior*, 66(2): 647-656, 2009.

稳定婚姻问题

- 现有 n 名男士 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 和 n 名女士 $w_1,w_2,\cdots,w_n$。每位男士有一偏好顺序可对所有女士按其满意度进行排序，每位女士有一偏好顺序可对所有男士按其满意度进行排序
  - $w \succ_m w'$ 表示在男士 m 的偏好顺序中，w 优于 w'
- n 个配对 $(m_{i_1},w_{j_1}),(m_{i_2},w_{j_2}),\cdots,(m_{i_n},w_{j_n})$ 组成的集合称为一组婚姻（**marriage**），其中 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 和 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的两个排列
- 婚姻 $\mathcal{M}$ 称为不稳定（**unstable**）的，若存在不稳定组合 $\langle m_i,w_l\rangle$，$(m_i,w_j),(m_k,w_l)\in\mathcal{M}$，但 $w_l \succ_{m_i} w_j$，$m_i \succ_{w_l} m_k$
- 若一组婚姻不存在不稳定组合，则称为稳定（**stable**）的

稳定婚姻问题

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

$$m_1: w_2\ \ w_1\ \ w_3 \mid w_1: m_1\ \ m_3\ \ m_2$$

$$m_2: w_1\ \ w_2\ \ w_3 \mid w_2: m_3\ \ m_1\ \ m_2$$

$$m_3: w_1\ \ w_2\ \ w_3 \mid w_3: m_1\ \ m_2\ \ m_3$$

稳定婚姻　不稳定婚姻

稳定婚姻	不稳定婚姻	
$(m_1,\ w_1)$	$(m_1,\ w_1)$	$m_1 \succ_{w_2} m_2$
$(m_2,\ w_3)$	$(m_2,\ w_2)$	$w_2 \succ_{m_1} w_1$
$(m_3,\ w_2)$	$(m_3,\ w_3)$	

THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY

THE OFFICIAL JOURNAL OF THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA, INC.

VOLUME 69　NUMBER 1

CONTENTS

JANUARY　1962

COLLEGE ADMISSIONS AND THE STABILITY OF MARRIAGE

D. GALE* AND L. S. SHAPLEY, Brown University and the RAND Corporation

1. Introduction. The problem with which we shall be concerned relates to the following typical situation: A college is considering a set of n applicants of which it can admit a quota of only q. Having evaluated their qualifications, the admissions office must decide which ones to admit. The procedure of offering admission only to the q best-qualified applicants will not generally be satisfactory, for it cannot be assumed that all who are offered admission will accept. Accordingly, in order for a college to receive q acceptances, it will generally have to offer to admit more than q applicants. The problem of determining how many and which ones to admit requires some rather involved guesswork. It may not be known (a) whether a given applicant has also applied elsewhere; if this is known it may not be known (b) how he ranks the colleges to which he has applied; even if this is known it will not be known (c) which of the other colleges will offer to admit him. A result of all this uncertainty is that colleges can expect only that the entering class will come reasonably close in numbers to the desired quota, and be reasonably close to the attainable optimum in quality.

The usual admissions procedure presents problems for the applicants as well as the colleges. An applicant who is asked to list in his application all other colleges applied for in order of preference may feel, perhaps not without reason, that by telling a college it is, say, his third choice he will be hurting his chances of being admitted.

Gale, D., Shapley, L. S., College Admissions and the Stability of Marriage, *The American Mathematical Monthly*, 69, 9-15, 1962

算法

数学建模

- “男士选择，女士决定”（**deferred acceptance algorithm**）
  - 每位男士都选择他最钟爱的女士
  - 如果有女士被两位或者以上的男士选择，则这几位男士中除了她最喜欢的之外，对其他男士都表示拒绝
  - 被拒绝的那些男士转而考虑他（们）的除被拒绝之外的最满意女士。如果存在冲突（包括和之前选择某女士的男士发生冲突），则再由相应的女士决定拒绝哪些男士
  - 以上过程持续进行，直至不再出现冲突为止

$$m_1 : w_2 \ w_1 \ w_3 \mid w_1 : m_1 \ m_3 \ m_2$$

$$m_2 : \cancel{w_1} \ \cancel{w_2} \ w_3 \mid w_2 : m_3 \ m_1 \ m_2$$

$$m_3 : w_1 \ w_2 \ w_3 \mid w_3 : m_1 \ m_2 \ m_3$$

$$m_1 : w_2$$

$$m_2 : \cancel{w_1} \ \cancel{w_2} \ w_3$$

$$m_3 : w_1$$

算法

数学建模

- 算法终止时给出一组婚姻。既不会出现冲突，也不会出现有女士未被男士选择情形
  - m和m'同时选择w，m'被拒绝；w'未被任意男士选择
  - 由于算法终止，m'已被所有女士，包括 w'拒绝
  - w'曾被优于m'的男士选择，算法终止时不会未被任意男士选择 矛盾

由于男士女士人数相等，两者必同时发生

- 算法给出的婚姻$\mathscr{M}$是稳定的
  - $\langle m, w'\rangle$ 是不稳定配对, $(m,w),(m',w')\in\mathscr{M}, w'\succ_m w, m\succ_{w'} m'$
  - m曾选择w'，但被w'拒绝
  - 存在男士m'', $m''\succ_{w'} m$，由于$(m',w')\in\mathscr{M}$，故$m'\succ_{w'} m''$

$\Rightarrow m'\succ_{w'} m$ 矛盾

- 算法时间复杂性为$O(n^2)$
  - 任一男士不会多次选择同一女士

稳定婚姻数量

$m_1: w_1 \quad w_2 \cdots$	$w_1: \cdots m_1$	(m_1, w_1)	(m_1, w_2)
$m_2: w_2 \quad w_1 \cdots$	$w_2: \cdots m_2$	(m_2, w_2)	(m_2, w_1)
$m_3: w_3 \quad w_4 \cdots$	$w_3: \cdots m_3$	(m_3, w_3)	(m_3, w_3)
$m_4: w_4 \quad w_3 \cdots$	$w_4: \cdots m_4$	(m_4, w_4)	(m_4, w_4)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m_{2k-1}: w_{2k-1} w_{2k} \cdots$	$w_{2k-1}: \cdots m_{2k-1}$	(m_{2k-1}, w_{2k-1})	(m_{2k-1}, w_{2k-1})
$m_{2k}: w_{2k} w_{2k-1} \cdots$	$w_{2k}: \cdots m_{2k}$	(m_{2k}, w_{2k})	(m_{2k}, w_{2k})

所有稳定婚姻数量至少为 2^k

最优性

浙江大学 ZheJiang University
数学建模

- 称一组稳定婚姻是男方最优（**man-optimal**）的，如果在该组婚姻中，每位男士都认为其配偶不比任何一组稳定婚姻中他的配偶来的差
  - 男方最优的稳定婚姻若存在，必是唯一的
- “男士选择，女士决定”算法给出的婚姻是男方最优的

归纳法

  - 由于每位男士按照偏好从优到劣的顺序选择，只需证明任一被拒绝的配对不会出现在任何一组稳定婚姻中

最优性

- 男士 m 被女士 w 拒绝是算法运行过程中首次出现的男士被女士拒绝的情况
  - 存在男士 $m', m' \succ_w m$，且 w 位于 m 和 m' 偏好顺序的首位
  - 若 $(m,w),(m',w') \in \mathcal{M}$，则 $\langle m',w \rangle$ 为不稳定组合，$\mathcal{M}$ 不稳定
- 男士 m 被女士 w 拒绝。在此之前所有被拒绝的配对不会出现在任一组稳定婚姻中
  - 存在男士 m' 选择 w，$m' \succ_w m$
  - 若 $(m,w),(m',w') \in \mathcal{M}$
    - $w' \succ_{m'} w$，则 m' 在之前必被 w' 拒绝。由归纳假设，(m',w') 不会出现在稳定婚姻中，$\mathcal{M}$ 不稳定
    - $w \succ_{m'} w'$，则 $\langle m',w \rangle$ 为不稳定组合，$\mathcal{M}$ 不稳定

浙江大学 ZheJiang University
数学建模

最劣性

- 男方最优的稳定婚姻必是女方最劣的，即在该组婚姻中，每位女士都认为其配偶不比任何一组稳定婚姻中她的配偶来的好
  - $\mathcal{M}$ 为男方最优稳定婚姻，$(m,w)\in\mathcal{M}$，若 $m \succ_w m'$，(m',w) 不会出现在任一组稳定婚姻中
  - 设 $\mathcal{M}'$ 为另一组稳定婚姻，$(m',w)\in\mathcal{M}',(m,w'')\in\mathcal{M}'$
    - 若 $w'' \succ_m w$，$\mathcal{M}$ 不为男方最优稳定婚姻
    - 若 $w \succ_m w''$，则 $\langle m,w\rangle$ 为不稳定组合，$\mathcal{M}'$ 不稳定
- “女士选择，男士决定”算法给出的婚姻是女方最优、男方最劣的

稳定室友问题

- 稳定室友问题（**Stable roommate problem**）
  - 某培训班有 $2n$ 名男性学员，两人合住一间标准间。每名学员有一偏好顺序可对其它 $2n-1$ 名学员进行排序。是否存在一组稳定的房间安排方案

$c_1: c_2\ c_3\ c_4$

$c_2: c_3\ c_1\ c_4$

$c_3: c_1\ c_2\ c_4$

$c_4:$ 任意

$$\begin{matrix}(c_1, c_2)\\(c_3, c_4)\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}(c_3, c_2)\\(c_1, c_4)\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}(c_2, c_4)\\(c_1, c_3)\end{matrix}$$

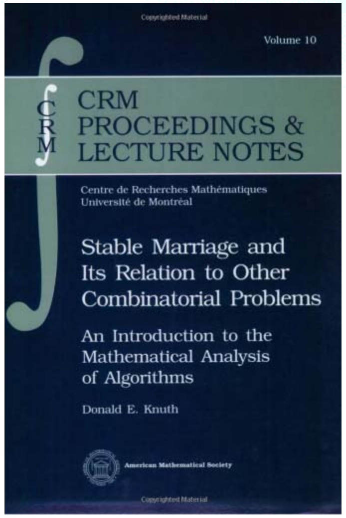
稳定的安排方案未必存在

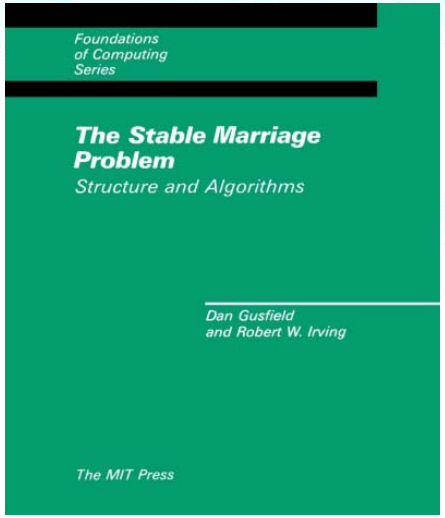
稳定室友问题

浙江大学 ZheJiang University
数学建模

- 存在一时间复杂性为 $O(n^2)$ 的算法判断稳定的安排方案是否存在，并在存在时给出一组稳定的安排方案

男士和女士数目不同，存在不可接受组合，或出现对多人的满意度相同（**tie**）的情形





Gusfield, D. M., Irving, R. W., *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*, The MIT Press, 2003

Knuth, D. R., *Stable Marriage and Its Relation to Other Combinatorial Problems: An Introduction to the Mathematical Analysis of Algorithms*, The American Mathematical Society, 1996.

三维稳定婚姻问题

- 现有分别由 n 名男士、n 名女士、n 件礼物组成的集合 M, W, D。任一集合中的每个元素对由另两个集合中元素两两组合而成的 n^2 个配对有给定的偏好顺序
- 一组三维婚姻为三元组的集合

$$\mathcal{M} = \{(m_i, w_i, d_i) \mid i = 1, \cdots, n,\ \bigcup_{i=1}^{n} m_i = M,\ \bigcup_{i=1}^{n} w_i = W,\ \bigcup_{i=1}^{n} d_i = D\}$$

- 三维婚姻稳定，若对任一三元组 $(m, w, d) \notin \mathcal{M}$，若 $(m, w_1, d_1), (m_2, w, d_2), (m_3, w_3, d) \in \mathcal{M}$，则必有

$$(w_1, d_1) \succ_m (w, d),\ (m_2, d_2) \succ_w (m, d),\ (m_3, w_3) \succ_d (m, w)$$

三维稳定婚姻问题

浙江大学 ZheJiang University 数学建模

- 三维稳定婚姻未必存在。判断是否存在一组三维稳定婚姻是$\mathcal{NP}$-完全的

$m_1:(w_1d_2)\,(w_1d_1)\,(w_2d_2)\,(w_2d_1)$

$m_2:(w_2d_2)\,(w_1d_1)\,(w_2d_1)\,(w_1d_2)$

$w_1:(m_2d_1)\,(m_1d_2)\,(m_1d_1)\,(m_2d_2)$

$w_2:(m_2d_1)\,(m_1d_1)\,(m_2d_2)\,(m_1d_2)$

$d_1:(m_1w_2)\,(m_1w_1)\,(m_2w_1)\,(m_2w_2)$

$d_2:(m_1w_1)\,(m_2w_2)\,(m_1w_2)\,(m_2w_1)$

所有可能的婚姻	不稳定组合
$(m_1,w_1,d_1)\ (m_2,w_2,d_2)$	$\langle m_1,w_1,d_2\rangle$
$(m_1,w_1,d_2)\ (m_2,w_2,d_1)$	$\langle m_2,w_1,d_1\rangle$
$(m_1,w_2,d_1)\ (m_2,w_1,d_2)$	$\langle m_1,w_1,d_2\rangle$
$(m_1,w_2,d_2)\ (m_2,w_1,d_1)$	$\langle m_2,w_2,d_2\rangle$

NRMP

- 根据美国医生培养制度，医学院毕业生取得学位后需作为医院的住院医生（**Resident,** 旧称**Intern**）经过为期三年的实习期
- 二十世纪初期，医院和毕业生之间的双向选择呈无序状态
  - 医院为争夺毕业生，竞相提前开展招聘计划
  - 医院在给予毕业生职位时仅留极短时间供其考虑，以避免被毕业生拒绝后无法找到其它人选
- 通过**NRMP**计划实现双向选择的医院和毕业生曾达到**95%**。**Roth**研究后发现该计划使用的算法本质上与**Gale-Shapley**算法等价，能给出稳定分配方案是其成功的主要原因

NRMP
National Resident Matching Program

The National Resident Matching Program (NRMP) is a private, not-for-profit corporation established in 1952 to provide a uniform date of appointment to positions in graduate medical education (GME) in the United States.

稳定分配问题

- “医院－毕业生”分配是多对一分配，每所医院存在招收毕业生数量的上界　　　　稳定的定义?
- 毕业生中的配偶对医院存在联合的偏好顺序，稳定分配未必存在

H_1	H_2	H_3	H_4
s_4	s_4	s_2	s_2
s_2	s_3	s_3	s_4
s_1	s_2	s_1	s_1
s_3	s_1	s_4	s_3

(H_1, s_1)　(H_2, s_2)

(H_3, s_3)　(H_4, s_4)

$\langle H_2, s_4 \rangle$

$\{s_1, s_2\}$	$\{s_3, s_4\}$
H_1H_2	H_4H_2
H_4H_1	H_4H_3
H_4H_3	H_4H_1
H_4H_2	H_3H_1
H_1H_4	H_3H_2
H_1H_3	H_3H_4
H_3H_4	H_2H_4
H_3H_1	H_2H_1
H_3H_2	H_2H_3
H_2H_3	H_1H_2
H_2H_4	H_1H_4
H_2H_1	H_1H_3

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

欺骗

- 对稳定婚姻问题，若使用男方最优算法，女方可以通过提供虚假偏好获得更好的一组稳定婚姻。

$$m_1 : \cancel{w_2}\ w_1\ w_3 \mid w_1 : m_1\ m_2\ m_3$$

$$m_2 : \cancel{w_1}\ \cancel{w_2}\ w_3 \mid w_2 : m_3\ m_1\ m_2$$

$$m_3 : \cancel{w_1}\ w_2\ w_3 \mid w_3 : m_1\ m_2\ m_3$$

稳定婚姻

(m_1, w_2)

(m_2, w_3)

(m_3, w_1)

w_1 的配偶在其偏好顺序中居第二位

$$m_1 : \cancel{w_2}\ w_1$$

$$m_2 : \cancel{w_1}\ \cancel{w_2}\ w_3$$

$$m_3 : \cancel{w_1}\ w_2$$

(m_1, w_1)

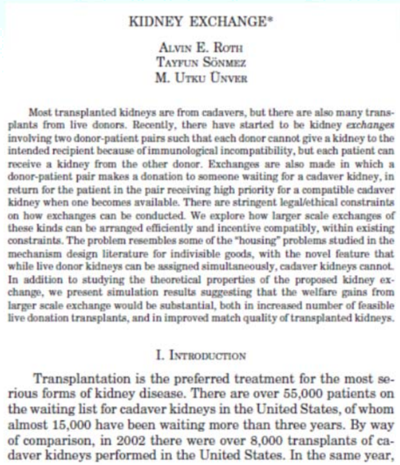
(m_2, w_3)

(m_3, w_2)

w_1 的配偶在其偏好顺序中居第一位

欺骗

- 是否存在一种算法，能使参与者真实表达意愿，即参与者不会因为虚假表达意愿而获益
- 对任一稳定婚姻问题的算法，都存在部分参与者可通过提供虚假偏好顺序而获得更好的一组稳定婚姻
- 对给出男（女）方最优稳定婚姻的算法，男（女）方不可能通过提供虚假偏好顺序获得更好的一组稳定婚姻


KIDNEY EXCHANGE*

Alvin E. Roth
Tayfun Sönmez
M. Utku Ünver

Most transplanted kidneys are from cadavers, but there are also many transplants from live donors. Recently, there have started to be kidney *exchanges* involving two donor-patient pairs such that each donor cannot give a kidney to the intended recipient because of immunological incompatibility, but each patient can receive a kidney from the other donor. Exchanges are also made in which a donor-patient pair makes a donation to someone waiting for a cadaver kidney, in return for the patient in the pair receiving high priority for a compatible cadaver kidney when one becomes available. There are stringent legal/ethical constraints on how exchanges can be conducted. We explore how larger scale exchanges of these kinds can be arranged efficiently and incentive compatibly, within existing constraints. The problem resembles some of the "housing" problems studied in the mechanism design literature for indivisible goods, with the novel feature that while live donor kidneys can be assigned simultaneously, cadaver kidneys cannot. In addition to studying the theoretical properties of the proposed kidney exchange, we present simulation results suggesting that the welfare gains from larger scale exchange would be substantial, both in increased number of feasible live donation transplants, and in improved match quality of transplanted kidneys.

I. Introduction

Transplantation is the preferred treatment for the most serious forms of kidney disease. There are over 55,000 patients on the waiting list for cadaver kidneys in the United States, of whom almost 15,000 have been waiting more than three years. By way of comparison, in 2002 there were over 8,000 transplants of cadaver kidneys performed in the United States. In the same year,

Roth, A. E., The Economics of Matching: Stability and Incentives. *Mathematics of Operations Research*, 7, 617-628, 1982.

Roth, A.E., Sonmez, T., Unver, M.U., Kidney exchange, *Quarterly Journal of Economics*, 119, 457–488, 2004.


浙江大学
ZheJiang University
谢 谢