浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

差分方程模型

浙江大学 谈之奕

差分方程

数学建模

MATH T

- 差分
  - 设 $y(n)=y_n$ 是依赖于整数变量 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 的函数，$\Delta y,\Delta^2 y,\Delta^3 y,\cdots$ 称为 y 的差分（difference）
- 差分方程（difference equation）
  - 含有未知函数的有限差分的方程
    - $F(n,y_n,\Delta y_n,\cdots,\Delta^m y_n)=0$
    - $F(n,y_n,y_{n+1},\cdots,y_{n+m})=0$
- m 阶线性差分方程
  - $a_m(n)y_{n+m}+\cdots+a_0(n)y_n=f_n$
    - 齐次：$f_n=0$
    - 常系数：$a_i(n)\equiv a_i, i=0,1,\cdots,m$

$$x_{n+1}=2x_n+3^n$$

$$2\cdot x_n=2\cdot 2x_{n-1}+2\cdot 3^{n-1}$$

$$2^2\cdot x_{n-1}=2^2\cdot 2x_{n-2}+2^2\cdot 3^{n-2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$2^{n-1}\cdot x_2=2^{n-1}\cdot 2x_1+2^{n-1}\cdot 3$$

$$x_{n+1}=2^n x_1+3\left(3^n-2^n\right)$$

$$3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^0+\left(\frac{2}{3}\right)^1+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$$

$$\Delta y=y_{n+1}-y_n$$

$$\Delta^2 y=\Delta(\Delta y)=\Delta(y_{n+1}-y_n)$$
$$=(y_{n+2}-y_{n+1})-(y_{n+1}-y_n)$$
$$=y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n$$

$$\Delta^3 y=\Delta(\Delta^2 y)=\Delta(y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n)$$
$$=y_{n+3}-3y_{n+2}+3y_{n+1}-y_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Delta^m y=\Delta(\Delta^{m-1}y)$$
$$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}y_{n+k}$$

金融

数学建模

MATH T

- 金融（finance）
  - 凡涉及货币供给、银行与非银行信用、证券交易、商业保险，以及以类似形式进行运作的所有交易行为的集合
- 金融工程（financial engineering）
  - 20世纪80年代末90年代初出现的一门工程性的新兴学科。它将工程思维引入金融领域，综合采用各种工程技术方法（主要有数学建模、数值计算、网络图解、仿真模拟等）设计、开发和实施新型的金融产品（包括金融工具、金融过程和金融服务），创造性地解决各种金融问题

《辞源》：中国出版的第一部较大型的语文兼百科性辞书，1915年由商务印书馆出版

《辞海》：中国一部兼收语词和百科词语的大型综合性辞书，1936年上海中华书局出版

“金融”，不见于任何古籍。作为一个词条，最早见于初版《辞源》和《辞海》，释义为“通过信用中介机构的货币资金融通”

利息与利率

数学建模

- 利息（interest）
  - 在借贷活动中，货币所有者（债权人）除收回到期贷款外，另从借款人（债务人）手中取得的收入
- 利息的计算方式
  - 单利（simple interest）
    - 在一定期间内只计算本金的利息，不计算利息的利息。即利息不能转化为本金一起作为计算下期利息的根
  - 复利（compound interest）
    - 经过一定期间将所生的利息并入本金再计算利息。它既计算本金的利息，也计算利息的利息。即利息也转化为本金同原来本金一起作为计算下期利息的根据
- 利率（interest rate）
  - 一定时期内利息量与本金的比率
  - 1个货币单位经过一个某种单位计息期产生的利息

贷放的货币金额（本金）（principal）为 P，利率为 r

记 t 个计息期后的利息量为 $C(t)$，本利和为 $S(t)$

单利：$C(t)=Prt$

$$S(t)=P(1+rt)$$

复利：$C(t)=P\left((1+r)^t-1\right)$

$$S(t)=P(1+r)^t$$

单利：1 1.1 1.2 1.3 2001

0.1 0.1 0.1

0.1 0.11 0.121

复利：1 1.1 1.21 1.331 6.1×10^{82}

基准利率

数学建模

MATH T

- 基准利率
  - 金融机构公布的存贷款利率一般为以年利率形式出现
  - 若名义利率为 $r^{(m)}$，每年计息 $m \in \mathbb{Q}$ 次，则单位计息期内的利率为 $\frac{r^{(m)}}{m}$，年实利率 r 满足

$$1+r=\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)^m$$

  - 金融机构一般通过对不同期限的存款设定不同的基准利率以鼓励长期存款

$$(1+0.015)(1+0.021\times 2)=1.05763<1.0825=1+0.0275\times 3$$

存款期限	基准利率	年计息数	单位计息期利率	年实利率
3个月	**1.10**	**4**	**0.275**	**1.105**
2年	**2.10**	**0.5**	**4.2**	**2.078**

存款		贷款	
活期	**0.35**	一年以内	**4.35**
三个月	**1.10**	一至五年	**4.75**
半年	**1.30**	五年以上	**4.90**
一年	**1.50**		
两年	**2.10**		
三年	**2.75**		

金融机构人民币存贷款基准利率表
（中国人民银行公布，2015年10月24日）

自然对数的底

- 数列$\{e_n\}$，$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
  - 数列$\{e_n\}$严格单调递增
    - $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n}$
      $=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}\cdot\frac{1}{n^n}$
      $=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$
    - $e_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$
      $+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right)>e_n$
  - 数列$\{e_n\}$有上界
    $e_n\le 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3$

数学建模

MATH T

$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m$? $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$

|| ||

$\left(\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}}\right)^r$ $\left(1+\frac{1}{i}\right)^i$ $\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}}\right)^r$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2.71828$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)^n=e$

Euler's number ~~Euler's constant~~

利息的计算方式

- 利息的计算方式
  - 若计息次数趋于无限，则实利率为（年）基准利率的指数函数
  - 以年、月、日为计算利息的期限单位的利率分别称为年率（annual interest rate）、月率（monthly interest rate）和日率（daily interest rate ）
    - 中国传统习惯用“分”和“厘”作为利率的单位，分时厘的10倍。“年息1厘”指年率为1%，“月息1厘”指月率为0.1%，“日息1厘”指日率为0.01%
    - 按《最高人民法院关于审理民间借贷案件适用法律若干问题的规定》（法释〔2015〕18号），借贷双方约定的利率未超过年利率24%，出借人请求借款人按照约定的利率支付利息的，人民法院应予支持。借贷双方约定的利率超过年利率36%，超过部分的利息约定无效

数学建模

MATH T

指数函数（exponential function）

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

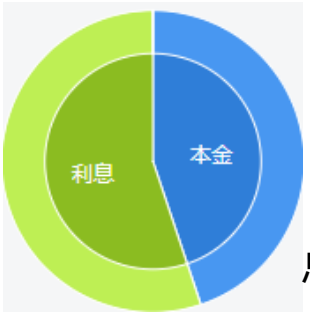
$$e^x = 1+\cfrac{x}{1-\cfrac{x}{x+2-\cfrac{2x}{x+3-\cfrac{3x}{x+4-\ddots}}}}$$

年金与按揭

数学建模

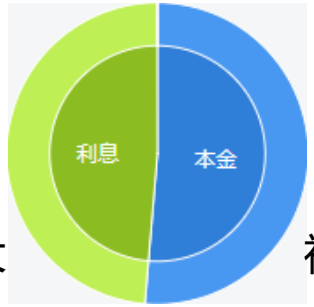
MATH T

- 年金与按揭
  - 年金（annuity）一般指以相等的时间间隔进行的一系列收付款行为
    - 养老金、年金保险、分期收（付）款、……
  - 按揭（mortgage）是银行抵押贷款业务的一种形式，通常特指住房抵押贷款
    - 贷方将房地产的法定权益转让给银行，并定期还本付息，还清后银行归还抵押品。若贷款者无力还贷，银行将处置抵押品以收回贷款



等额本息还款法

总还款额大



等额本金还款法

初期还款额大

商业贷款100万元，年利率6.3%，按月计息（月利率0.525%），贷款年限为30年360期

第1期	6,189.73	8,027.78
第2期	6,189.73	8,013.19
第3期	6,189.73	7,998.61
……	……	……
第358期	6,189.73	2,821.53
第359期	6,189.73	2,806.94
第360期	6,189.73	2,792.36
总还款额	2228302.04	1947625.00

货币的时间价值

按揭

数学建模

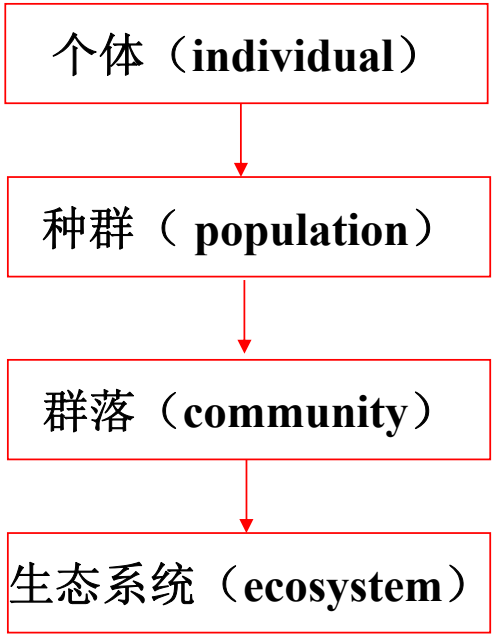
- 按揭
  - 贷款总额为 P_0，按月计息，月利率为 i，贷款期为 N 月
  - 等额本息还款法：每月还款额相等
    - 设每月还款额为 y，第 k 月还款后的应还贷款额 $P_k = P_{k-1}(1+i) - y, k = 1, \cdots, N$
    - $P_N = P_0(1+i)^N - y(1+(1+i)+\cdots+(1+i)^{N-1}) = P_0(1+i)^N - y\dfrac{1-(1+i)^N}{1-(1+i)}$
    - 第 N 月还款后贷款全部还清，$P_N = 0$，$y = \dfrac{(1+i)^N P_0 i}{(1+i)^N - 1}$
  - 等额本金还款法：每月归还相同数额本金和未归还本金在一月内新产生的利息
    - 每月归还本金 $\dfrac{P_0}{N}$，第 k 月还款后尚未归还的贷款本金为 $Q_k = \left(1 - \dfrac{k}{N}\right)P_0$
    - 第 k 月还款额 $y_k = \dfrac{P_0}{N} + iQ_{k-1}, k = 1, \cdots, N$

生态学

数学建模

MATH T

- 生态学（ecology）
  - 研究生物与环境及生物与生物之间相互关系的生物学分支学科
- 生态学的主要研究对象
  - 种群（population）：同种生物在一定空间范围内同时生活着所有个体的集群
  - 生物群落（biological community）：生活在一定生境中全部物种及其相互作用、彼此影响所构成的整体
  - 生态系统（ecosystem）：一定空间中的生物群落与其环境组成的系统，其中各成员借助能流和物质循环，形成一个有组织的功能复合体
- 种群动态（population dynamics）
  - 种群的消长以及种群消长与种群参数（如出生、死亡、迁入、迁出等）间的数量关系



离散单种种群模型

数学建模

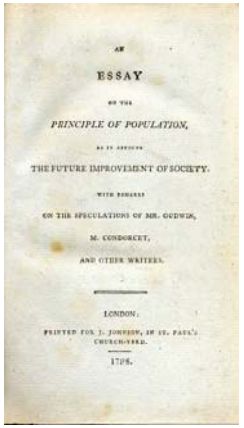
MATH T

- 离散单种种群模型
  - 现实种群只由一个世代构成，相继世代之间没有重叠
  - 记 x_n 为第 n 代个体数量。数列 $\{x_n\}$ 满足差分方程

    $x_{n+1} = f(x_n)$
- 指数增长模型
  - 每一代个体繁殖的个体数量与该代个体数量之比是一个常数
  - $x_{n+1} = rx_n$
  - $x_n = r^n x_0$
    - 若 $0 \le r < 1$，x_n 单调递减趋于 0 ，若 $r > 1$, x_n 单调递增趋于 $+\infty$

指数增长模型不适于描述较长时期的人口演变过程，但某地一个较短时间内的人口统计数据可能符合指数增长模型

栖息于草原季节性小水坑中的水生昆虫，每年雌虫产一次卵，卵孵化长成幼虫，蛹在泥中渡过旱季，到第二年才变为成虫



Thomas Robert Malthus
（1766－1834）
英国人口学家、经济学家

Malthus TR，*An Essay on the Principle of Population*，1798

Logistic模型

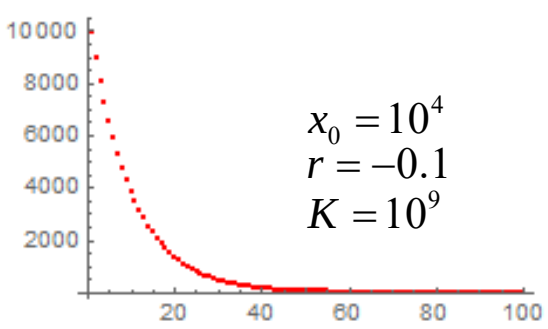
数学建模

MATH T

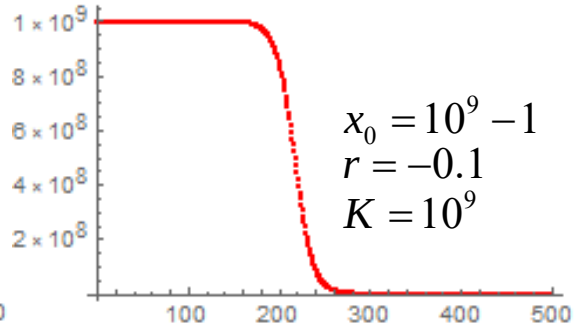
- Logistic模型
  - 种群增长率仅与种群数量有关，且是种群数量的递减函数
  - $$x_{n+1} = x_n + r x_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$$

    增长量 Δx_n

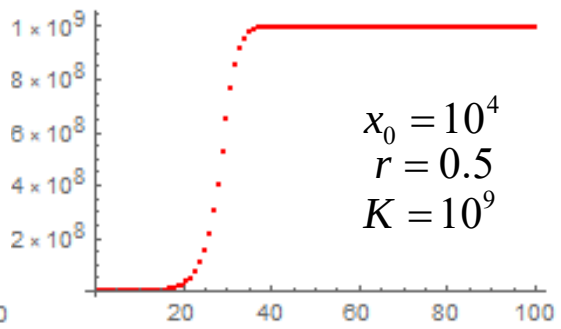
    增长率 $\dfrac{\Delta x_n}{x_n} = r\left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$
    - 内禀增长率（innate rate of increase）：r
    - 环境承载量（carrying capacity）：K



$x_0 = 10^4$
$r = -0.1$
$K = 10^9$



$x_0 = 10^9 - 1$
$r = -0.1$
$K = 10^9$



$x_0 = 10^4$
$r = 0.5$
$K = 10^9$

Pierre François Verhulst
（1804－1849）
比利时数学家

Verhulst PF, Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance Mathématique et Physique*. 10: 113–121, 1838.

平衡点

数学建模

MATH T

- 平衡点
  - 差分方程 $x_{n+1}=f(x_n)$ 满足 $f(x^*)=x^*$ 的点 x^* 称为平衡点（equilibrium point）
    - 若 $x_i=x^*$，则 $x_j=x^*, j\geq i$
  - 若只要初始点 x_0 与平衡点 x^* 充分接近，即有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$，则称平衡点 x^* 渐近稳定（asymptotic stable）

	渐近稳定	不稳定
	$\lvert f'(x^*)\rvert<1$	$\lvert f'(x^*)\rvert>1$
$f'(x^*)=1$	$f''(x^*)=0$且$f'''(x^*)<0$	$f''(x^*)\neq 0$或$f'''(x^*)>0$
$f'(x^*)=-1$	$-2f'''(x^*)<3\left(f''(x^*)\right)^2$	$-2f'''(x^*)>3\left(f''(x^*)\right)^2$
……		

$$x_{n+1}=x_n+rx_n\left(1-\frac{x_n}{K}\right)$$

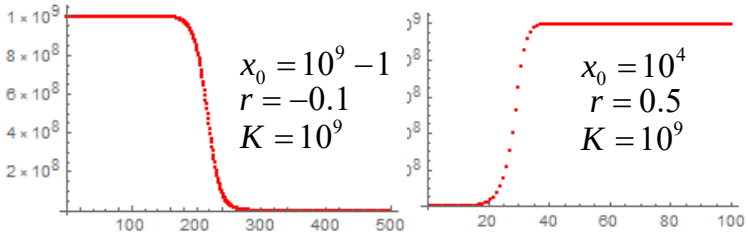
$$f(x)=(1+r)x-\frac{r}{K}x^2 \qquad x_1^*=0, x_2^*=K$$

$$f'(x)=(1+r)-\frac{2r}{K}x \qquad \begin{matrix} f'(0)=1+r \\ f'(K)=1-r \end{matrix}$$

$-2<r<0$　0 渐近稳定，K 不稳定

$0<r<2$　K 渐近稳定，0 不稳定

$r>2$　$0, K$ 不稳定



周期点

数学建模

MATH T

- 周期点
  - 差分方程 $x_{n+1}=f(x_n)$ 满足 $f_k(x^*)=x^*$ 的点 x^* 称为 k 周期点（k periodic point），这里 $f_k(x)$ 可通过以下方式定义，$f_1(x)=f(x)$，$f_k(x)=f(f_{k-1}(x))$
    - 差分方程 $x_{n+1}=f(x_n)$ 的 k 周期点即差分方程 $x_{n+1}=f_k(x_n)$ 的平衡点
    - 差分方程 $x_{n+1}=f(x_n)$ 的 k 周期点的渐近稳定性由差分方程 $x_{n+1}=f_k(x_n)$ 的平衡点的渐近稳定性所决定

$$f_k'(x^*)=f'(f_{k-1}(x^*))\,f'(f_{k-2}(x^*))\cdots f'(f_1(x^*))\,f'(x^*)$$

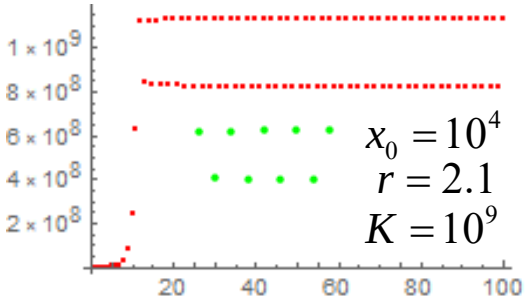
$$x_{n+1}=x_n+rx_n\left(1-\frac{x_n}{K}\right)$$

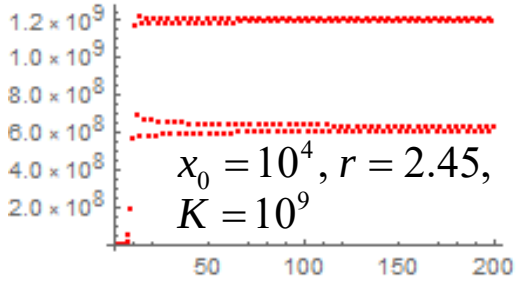
$$f(x)=(1+r)x-\frac{r}{K}x^2 \qquad x_1^*=0,\ x_2^*=K$$

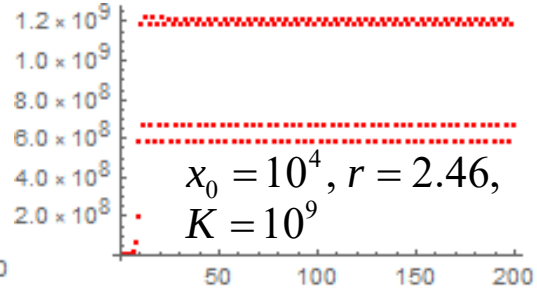
$$f'(x)=(1+r)-\frac{2r}{K}x \qquad f'(0)=1+r \qquad f'(K)=1-r$$

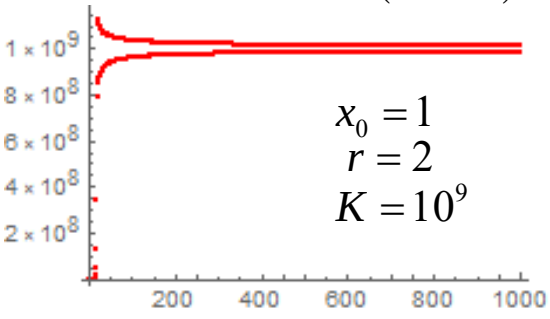
$$f''(x)=-\frac{2r}{K} \qquad f'''(x)=0 \qquad K \text{ 渐近稳定}$$

$$r=2 \qquad -2f'''(K)=0<3(f''(K))^2$$









Logistic模型

数学建模

MATH T

- Logistic模型的2-周期点
  - $f(x)=(1+r)x-\frac{r}{K}x^2$
  - $f_2(x)=f(f(x))=(1+r)\left((1+r)x-\frac{r}{K}x^2\right)-\frac{r}{K}\left((1+r)x-\frac{r}{K}x^2\right)^2$

    $=(1+r)^2x-\frac{r(1+r)(2+r)}{K}x^2+\frac{2r^2}{K^2}(1+r)x^3-\frac{r^3}{K^3}x^4$
    - $x=(1+r)^2x-\frac{r(1+r)(2+r)}{K}x^2+\frac{2r^2}{K^2}(1+r)x^3-\frac{r^3}{K^3}x^4$

      $\Rightarrow x\left(\frac{x}{K}-1\right)\left(r^2\left(\frac{x}{K}\right)^2-r(r+2)\frac{x}{K}+(r+2)\right)=0$

      $\Rightarrow x_+=\frac{(r+2)+\sqrt{r^2-4}}{2r}K, x_-=\frac{(r+2)-\sqrt{r^2-4}}{2r}K$
  - $x_{2k-1}=x_+, x_{2k}=x_-$，$f(x_+)=x_-, f(x_-)=x_+$
  - $f_2'(x_+)=f_2'(x_-)=5-r^2$
    - $2<r<\sqrt{6}$ 时2-周期点渐近稳定

$$f_2'(x)=(1+r)^2-\frac{2r(1+r)(2+r)}{K}x+\frac{6r^2}{K^2}(1+r)x^2-\frac{4r^3}{K^3}x^3$$

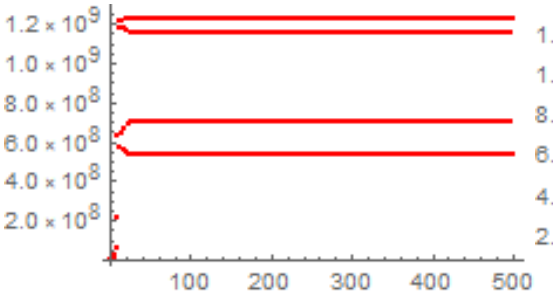
$$f_2'(x_+)=(1+r)^2-\frac{2r(1+r)}{K}x_+-\frac{2r(1+r)(1+r)}{K}x_+$$
$$+\frac{2r^2}{K^2}(1+r)x_+^2+\frac{4r^2}{K^2}(1+r)x_+^2-\frac{4r^3}{K^3}x_+^3$$
$$=(1+r)^2-\frac{2r(1+r)}{K}x_+-\frac{2r(1+r)}{K}\left((1+r)x_+-\frac{2r}{K}x_+^2\right)$$
$$+\frac{4r^2}{K^2}x_+\left((1+r)x_+-\frac{2r}{K}x_+^2\right)$$
$$=(1+r)^2-\frac{2r(1+r)}{K}x_+-\frac{2r(1+r)}{K}x_-+\frac{4r^2}{K^2}x_+x_-$$
$$=(1+r)^2-\frac{2r(1+r)}{K}\frac{(2+r)K}{r}+\frac{4r^2}{K^2}\frac{(2+r)K^2}{r^2}=5-r^2$$

Logistic模型

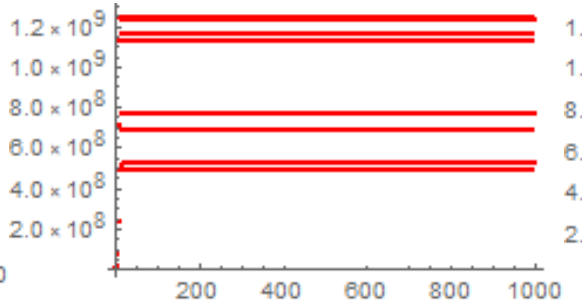
数学建模

MATH T

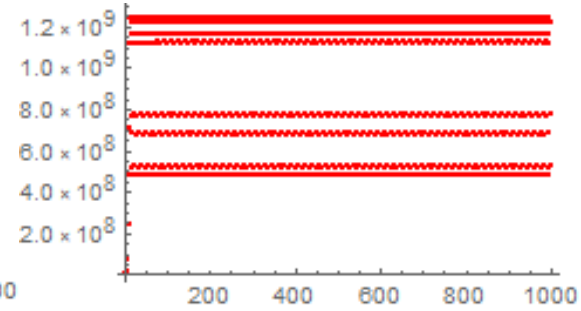
- Logistic模型



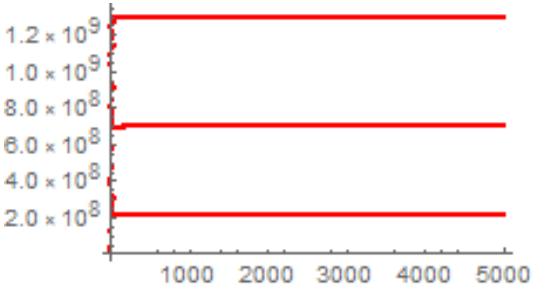
$x_0 = 10^4, r = 2.5, K = 10^9$



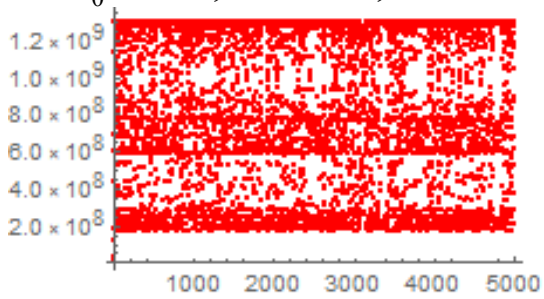
$x_0 = 10^4, r = 2.56, K = 10^9$



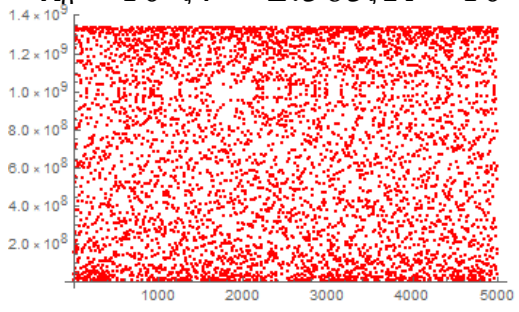
$x_0 = 10^4, r = 2.565, K = 10^9$



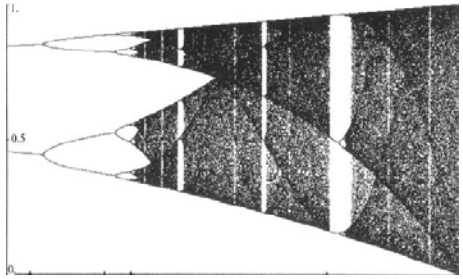
$x_0 = 10^4, r = \sqrt{8}, K = 10^9$

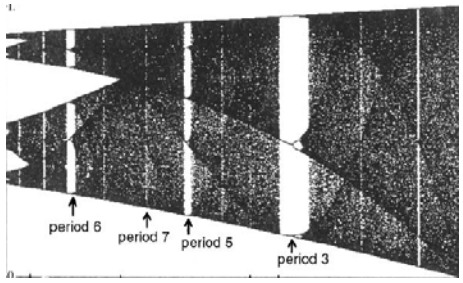


$x_0 = 10^4, r = 2.86, K = 10^9$



$x_0 = 10^4, r = 3, K = 10^9$





混沌

数学建模

MATH T

- 混沌
  - 二十世纪六十年代，Lorenz教授用一台简陋计算机计算与天气预报有关的三个简单非线性微分方程初值问题。他十分吃惊地看到与旧初始值仅仅相差约万分之一的新计算结果和原先预期的计算结果大相径庭，面貌全非
  - 1972 年， 美国马里兰大学气象学教授Allen Feller将Lorenz关于气象预测模型的那些在气象学家眼里理论性太强、 数学味太浓的论文递给了Yorke教授， 认为数学家们也许会感兴趣

Lorenz EN. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2): 130-141, 1963.

Edward Norton Lorenz
（1917－2008）
美国数学家、气象学家

James Alan Yorke
（1941－）
美国数学家、物理学家

丁玖，智者的困惑——混沌分形漫谈，高等教育出版社，2013

混沌

数学建模

MATH T

- 混沌
  - 1973 年 3 月，当李天岩来到Yorke的办公室时， Yorke对他说，I have a good idea for you，李天岩听完后说， “这将是《美国数学月刊》一个完美的工作。” 因为它所牵涉的语言非常基本。 两周后，运用他得心应手的微积分技巧，李天岩完全证明了定理
  - 文章写好后， 按照Yorke的意图，寄给了《美国数学月刊》。但不久文章被退回， 理由是该文过于研究性， 但编辑同意若作者能改写文章到一般学生都能看懂的地步，可以投回《美国数学月刊》
- Li-Yorke定理
  - 若实数轴一区间到其自身的连续函数 f 有一 3 周期点，则对任意正整数 k，f 有一 k 周期点
  - 存在不可数个的初始点， 函数从这些点出发的迭代点序列之最终走向将是杂乱无章， 无规律可循

李天岩
（1945－2020）
华裔数学家

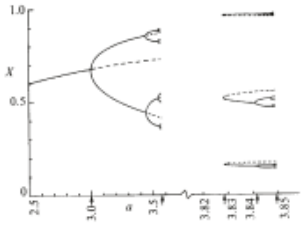
The American Mathematical Monthly，创刊于**1894**年，有很大影响的数学普及类期刊

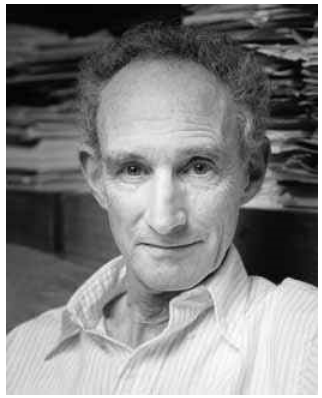
混沌

数学建模

MATH T

- 混沌
  - 在1974年普林斯顿大学的May教授最后一天在马里兰大学的演讲中，讲了Logistic模型的迭代：当参数从小到大变化时其迭代点序列之性态将变得愈来愈复杂。他十分困惑于对这一现象的解释，想像中也许是计算上的误差所造成的
  - Yorke听完May的演讲后， 在送他上飞机时， 把李天岩桌上躺了将近一年的文章给他看。 May看了文章的结果之后，极为吃惊，并认定此定理大大解释了他的疑问
  - Yorke从机场回来后立即找到李天岩说，应该马上改写这篇文章。文章在两个星期内改写完毕，三个月后被《美国数学月刊》接受，并刊登在 1975 年 12月份的那一期上





Robert McCredie May
（1936－ ）
澳大利亚生物学家
英国政府首席科学顾问
（UK GCSA）（1995-2000）

May RM. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261: 459-467, 1976.

Li TY, Yorke JA. Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10): 985-992, 1975.

混沌

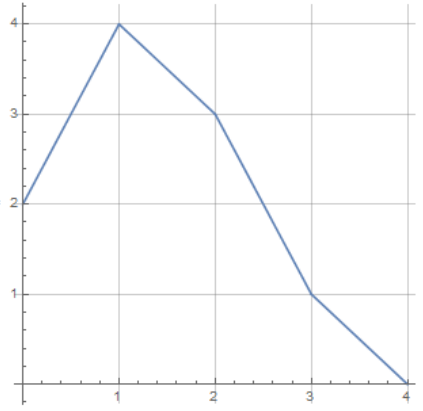
数学建模

MATH T

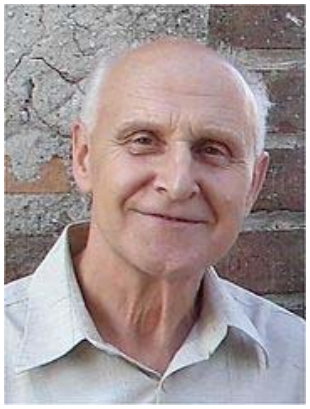
- 混沌
  - 几年后的一天，在东柏林一个国际会议上做完报告后， Yorke和同行去逛市容。在一条游艇上，一个从未谋面、不期而至的苏联人突然走近了他，急于想与他交谈一下。这位Sharkovsky教授早十来年就证明了较Li-Yorke定理第一部分似乎更为一般的结果
- Sharkovsky定理
  - 任意正整数 n 可唯一表示成 $n=2^s(2p+1)$，其中 $s, p\in\mathbb{N}$。所有正整数可据此排成一列，称为S型排序
  - 若实数轴一区间到其自身的连续函数 f 具有 k 周期点，在正整数S型排序中，k 先于 m，则 f 必有 m 周期点

Sharkovskii AN. Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself. *Ukrainian Mathematics Journal*, 16: 61–71, 1964.

$$3,5,7,9,\cdots,$$
$$2\cdot 3, 2\cdot 5, 2\cdot 7, 2\cdot 9,\cdots,$$
$$2^2\cdot 3, 2^2\cdot 5, 2^2\cdot 7, 2^2\cdot 9,\cdots,$$
$$\cdots\cdots,$$
$$\cdots, 2^5, 2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 1$$



有5周期点但无3周期点的函数



Oleksandr Mykolayovych Sharkovsky
（1936－ ）
乌克兰数学家

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

数论模型

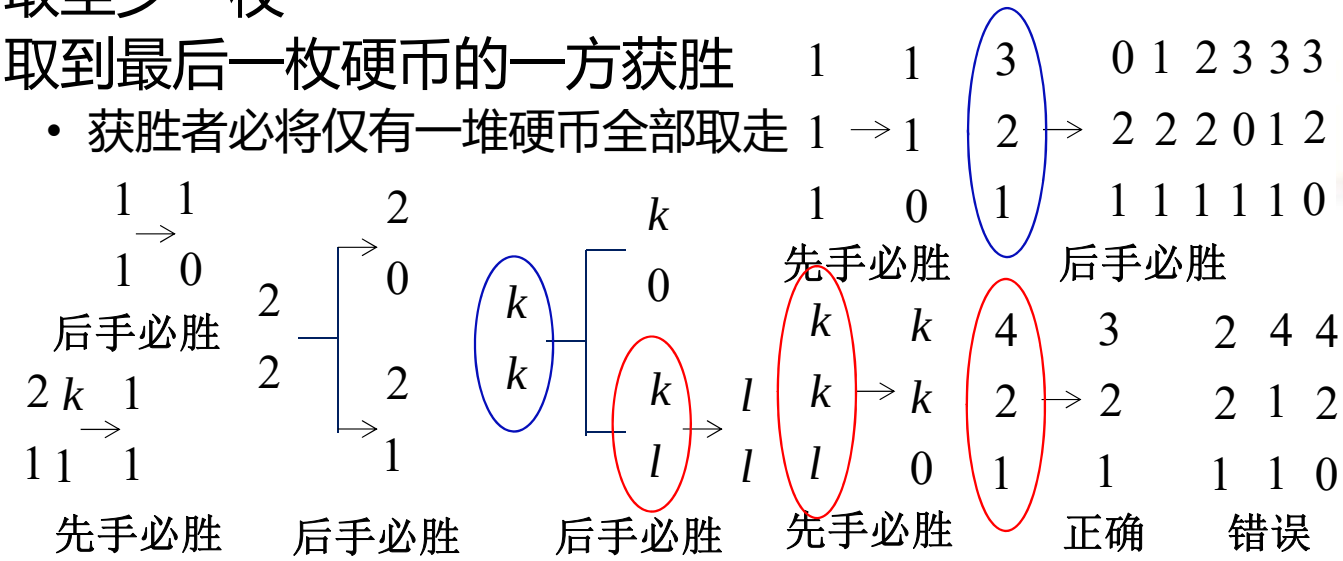
浙江大学 谈之奕

NIM游戏

数学建模

MATH T

- NIM游戏
  - 现有 n 堆硬币，每堆数量一定
  - 两人轮流取硬币，每次只能从其中一堆中取，每次取至少一枚
  - 取到最后一枚硬币的一方获胜
    - 获胜者必将仅有一堆硬币全部取走



nehmen: vt. 拿，取，拿起

nimm：nehmen的命令式

Charles Leonard Bouton
（1869-1922）
美国哈佛大学数学系副教授，**1898**年于德国莱比锡大学取得博士学位

Bouton CL. Nim, a game with a complete mathematical theory. *Annals of Mathematics*, 3: 35-39, 1901.

记数法

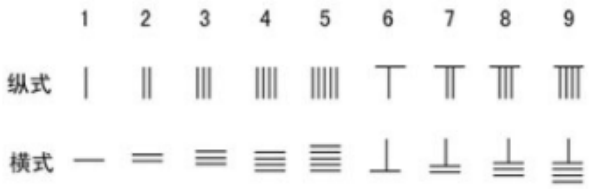
数学建模

MATH T

- 记数法（number system）
  - 记录或标志数目的方法
- 位值制记数法（positional numeral system）
  - 用一组有顺序的数字来表示一个数。每个数字所表示的大小，既取决于它本身的数值，又取决于它所在的位置
  - 十进制记数法

罗马数字	I	II	III	IV	V	VI	VII
含义	1	2	3	4	5	6	7
罗马数字	VIII	IX	X	L	C	D	M
含义	8	9	10	50	100	500	1000

巴比伦	六十进制
古印度	十进制
中国古代	十进制
玛雅人	二十进制



从右到左，纵横相间

CCLIX **259**

$259 = 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 9$

木楼式时刻更钟
[清]乾隆
故宫博物院藏

二进制

数学建模

MATH T

- 位值制记数法
  - 选定进位制的基底 b， 给定 $0,1,2,\cdots,b-1$共 b 个数码，任何一个自然数 N， 均可用某个以这些数码为系数的 b 的多项式表示出来

$$N = a_k \cdot b^k + a_{k-1} \cdot b^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot b + a_0$$

$$\Rightarrow (a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0)_b,\ a_0, a_1, \cdots, a_{k-1} \in \{0,1,\cdots,b-1\}$$

    - 任意数的 b 进制表示是唯一的
    - 任意两个不同数的 b 进制表示不同

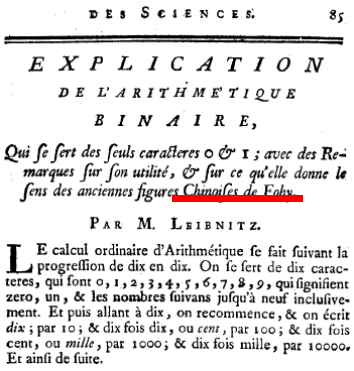
- 二进制（binary number system）
  - 基底为 2， 用数码 0 和 1 表示的记数法

二进制在电子计算机中得到了广泛的应用。计算机由逻辑电路组成，电路中通常只有两个状态：开关接通和断开。两种状态恰好可用 1和 0表示

$$0+0=0$$

$$0+1=1$$

$$1+1=10$$



DES SCIENCES. 85

EXPLICATION
DE L'ARITHMETIQUE
BINAIRE,

Qui ſe ſert des ſeuls caracteres 0 *&* 1 *; avec des Remarques ſur ſon utilité, & ſur ce qu'elle donne le ſens des anciennes figures Chinoiſes de Fohy.*

PAR M. LEIBNITZ.

LE calcul ordinaire d'Arithmétique ſe fait ſuivant la progreſſion de dix en dix. On ſe ſert de dix caracteres, qui ſont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, qui ſignifient zero, un, & les nombres ſuivans juſqu'à neuf inclusivement. Et puis allant à dix, on recommence, & on écrit *dix* ; par 10 ; & dix fois dix, ou *cent*, par 100 ; & dix fois cent, ou *mille*, par 1000 ; & dix fois mille, par 10000. Et ainſi de ſuite.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) 德国哲学家、数学家

Leibniz G, Explanation of binary arithmetic, which uses only the characters 1 and 0, with some remarks on its usefulness, and on the light it throws on the ancient Chinese figures of Fu Xi, *Memoires de mathématique et de physique de l'Académie royale des sciences*, *Académie royale des sciences*, 1703

NIM游戏

- “安全” 与 “不安全”
  - 将每堆硬币数表示为二进制，若它们每一位上数字之和为 0，则当前状态为安全的，否则为不安全
    - 取走最后一枚硬币前，状态为不安全的
  - 若当前状态安全，对任意取法，状态变为不安全
    - 在某堆硬币中取，该堆硬币数的二进制表示中至少有一位数字有变化
  - 若当前状态不安全，存在一种取法，状态变为安全
    - 按自左至右的顺序确定第一个数字之和不为 0 的位，寻找该位数字为 1 的堆，从该堆中取走若干枚使得状态变为安全
- 必胜策略
  - 己方取后，状态为安全的
    - 若初始状态不安全，先手方存在必胜策略
    - 若初始状态安全，后手方存在必胜策略

数学建模

MATH T

2	10	2	10
12	1100	12	1100
13	1101	13	1101
21	10101	3	11
	10110		0000

2	10	2	10
9	1001	9	1001
8	1000	13	1101
3	11	3	11
	0000		0101

数论

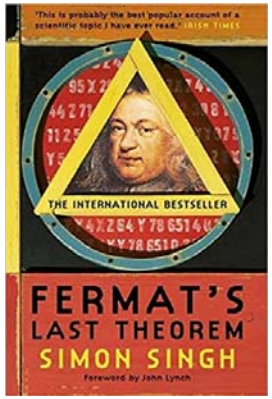
数学建模

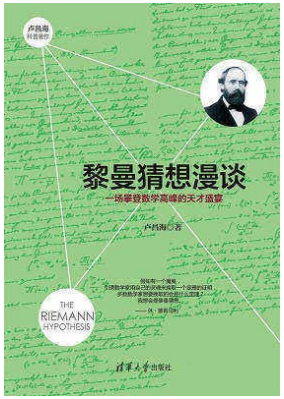
MATH T

- 数论（number theory）
  - 研究整数性质的数学分支
    - 数论问题的表述大多是算术的，但绝大多数问题用初等方法根本无法讨论。对数论的研究常常综合应用几何、代数和分析方法
    - 数论在计算机科学、信息科学、组合分析、密码学、计算数学、管理科学等领域获得广泛应用
    - 数论在中国古代有着悠久光辉的研究历史和成就，也是中国近代数学最早开拓并取得瞩目成就的数学研究领域之一

华罗庚 (1910-1985)　柯召 (1910-2002)　闵嗣鹤 (1913-1973)

王元 (1930-2021)　潘承洞 (1934-1997)　陈景润 (1933-1996)





Singh S, Fermat's Last Theorem, Harpercollins Pub Ltd, 2002(中译本：费马大定理-一个困惑了世间智者358年的谜，薛密译，广西师范大学出版社，2013)

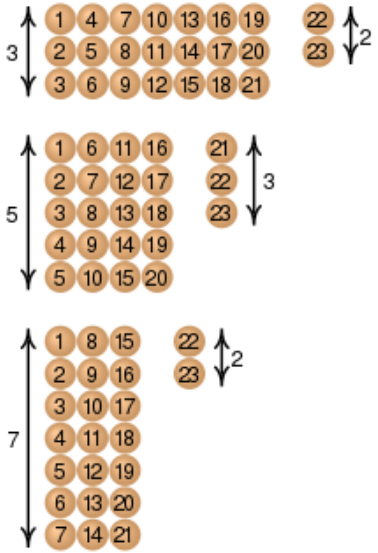
卢昌海，黎曼猜想漫谈：一场攀登数学高峰的天才盛宴，清华大学出版社，2016

中国剩余定理

数学建模

MATH T

- “物不知数”
  - 今有物，不知其数。三三数之，剩二；五五数之，剩三；七七数之，剩二。问：物几何？答曰：二十三
  - 术曰：三三数之，剩二，置一百四十；五五数之，剩三，置六十三；七七数之，剩二，置三十。并之，得二百三十三，以二百一十减之，即得
  - 凡三三数之，剩一，则置七十五；五五数之，剩一，则置二十一；七七数之，剩一，则置十五。一百六以上，以一百五减之，即得




孫子算經序
孫子曰夫算者天地之經緯萬生之元首五常之本末陰陽之父母星辰之建號三光之表裏五行之準平四時之終始萬物之祖宗六藝之綱紀稽叅倫之聚散考二氣之降升推寒暑之迭運步遠近之殊同觀天道精微之兆基察地理從橫之長短采神祇之所在極成敗之符驗窮道德之理究性命之情立規矩准方圓謹法度約尺丈立權衡平重輕剖毫釐析黍絫麻億

《孫子算经》，中国数学著作。作者不详，约成书于公元400年前后。全书共三卷，卷上为预备知识，卷中下为应用题。图为宋刻本序

中国剩余定理

数学建模

MATH T

- “大衍求一术”
  - 秦九韶在《数书九章》中提出的解一次同余方程组的方法。对《孙子算经》中的“物不知数”题的一般情形给出了具体求解方法，证明了孙子定理
- 中国剩余定理（Chinese remainder theorem）
  - 18世纪中叶起，Euler，Lagrange，Gauss相继研究同余式问题。Gauss在1801年撰写的《Disquisitiones Arithmeticae》（算术研究）中给出了关于同余式解法的一般性定理
  - 1852年，英国传教士伟烈亚力（Alexander Wylie）将“大衍求一术”传至欧洲。孙子定理在国际上被称为中国剩余定理


欽定四庫全書
數學九章卷一上　宋　秦九韶　撰
大衍
按大衍術以各分數之奇零求各分數之總數
大而天行小而物數皆可御之其法有求元求
定求術求奇求衆求用之目大約以數之奇偶
為根而以諸數相度之盡不盡為用有求彼此
不能度盡之諸數者元數定數是也有求諸數
皆能度盡之一數者衍母數是也有求諸數皆
能度盡而一數不能度盡之數者各衍數是也
其不盡之數即奇數也有求二數相度餘一之
數者乘數是也有求二數相度餘一而諸數又
能度盡之數者用數是也求元數定數初與約
分法相似終變二數務使其等數為一蓋以一
為等數始能度盡二數是他數俱不能度盡二
數而二數相度益不能盡也以定數奇數求乘

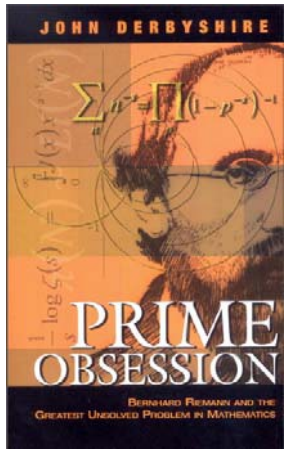
秦九韶（约1202-约1261），南宋数学家，字道古。淳祐七年（1247年），撰成《数书九章》。全书分9类，81题，是中国宋元数学高潮的代表作之一。图为四库全书版

整除

数学建模

MATH T

- 整除 $a|b$
  - 设 $a,b\in\mathbb{Z}$，$a\neq 0$。若存在 $q\in\mathbb{Z}$，使得 $b=aq$，则称
    - b 可被 a 整除
    - b 是 a 的倍数
    - a 是 b 的约数
- 素数（prime number）
  - 正整数 $p\neq 1$，除了 $\pm 1,\pm p$ 外没有其他的约数
- 最大公约数（Greatest Common Divisor，GCD）
  - 设 $a_1,\cdots,a_k$ 为整数，若 $d\mid a_i,i=1,\cdots,k$，则称 d 为 $a_1,\cdots,a_k$ 的公约数
  - 整数 $a_1,\cdots,a_k$ 的公约数中最大的称为 $a_1,\cdots,a_k$ 的最大公约数，记为 $(a_1,\cdots,a_k)$
- 互素
  - 若 $(a_1,\cdots,a_k)=1$，则称 $a_1,\cdots,a_k$ 互素



Derbyshire J, Prime obsession Bernhard Riemann and the greatest unsolved problem in Mathematics, Joseph Henry Press, 2002(中译本：素数之恋：黎曼和数学中的未解之谜，陈为蓬译，上海科技教育出版社，2018)

同余

数学建模

MATH T

- 同余
  - 设 $m \geq 1$，若 $m \mid (a-b)$，则称 a 同余于 b 模 m，记作 $a \equiv b \pmod{m}$

$18 \equiv 48 \pmod{10}$　　$48 \equiv 18 \pmod{10}$

$6 \cdot 3 \equiv 6 \cdot 8 \pmod{10}$　　$3 \equiv 8 \pmod{10}$

- 逆
  - 设 $m \geq 1$，若存在 c 使得 $a \cdot c \equiv 1 \pmod{m}$，则称 a 可逆，且 c 称为 a 对模 m 的逆，记为 $a^{-1} \pmod{m}$ 或 a^{-1}
  - a 可逆的充要条件是 $(a,m)=1$

$5 \cdot c \equiv 1 \pmod{10}$

- 一次同余方程
  - 当 $(a,m)=1$ 时，模 m 的一次同余方程 $ax \equiv b \pmod{m}$ 有解 $a^{-1}b$，小于 m 的非负整数解是唯一的

$a \cdot c + m \cdot k = 1$

$3 \cdot x \equiv 2 \pmod{8}$　　$6 \cdot x \equiv 2 \pmod{8}$　　$27^{-1} \pmod{64} = 19$

$3^{-1} \pmod{8} = 3$　　$x = 6, 14, 20, \cdots$　　$x = 3, 7$

奇　　定　　乘率

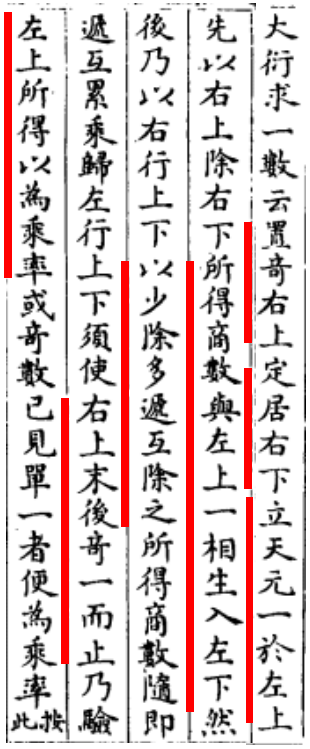
1	27
	64

1	27
2	10

5	7
2	10

5	7
7	3

19	1
7	3


大衍求一數云置奇右上定居右下立天元一於左上
先以右上除右下所得商數與左上一相生入左下然
後乃以右行上下以少除多遞互除之所得商數隨即
遞互累乘歸左行上下須使右上末後奇一而止乃驗
左上所得以為乘率或奇數已見單一者便為乘率此

中国剩余定理

数学建模

MATH T

- 中国剩余定理
  - 设 $m_1,\cdots,m_k$ 为两两互素的正整数，$a_1,\cdots,a_k$ 为任意整数，$x_j \equiv a_j \pmod{m_j}, 1 \le j \le k$ 称为一次同余方程组
  - 记 $m = m_1 \cdots m_k$，对任意 $1 \le j \le k$，记 $N_j = \dfrac{m}{m_j}$，N_j^{-1} 为 N_j 对模 m_j 的逆
  - 同余方程组小于 m 的非负整数解是唯一的，即为

$$x \equiv N_1 N_1^{-1} a_1 + \cdots + N_k N_k^{-1} a_k \pmod{m}$$

- “物不知数”

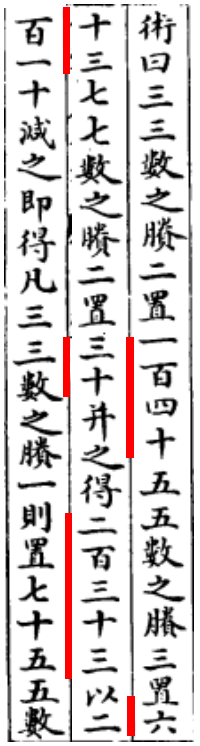
$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \end{cases} \qquad \begin{matrix} N_1 = 35 \\ N_2 = 21 \\ N_3 = 15 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} N_1^{-1} = 2 \\ N_2^{-1} = 1 \\ N_3^{-1} = 1 \end{matrix}$$

$$m = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 \qquad 35 \cdot 2 \cdot 2 + 21 \cdot 1 \cdot 3 + 15 \cdot 1 \cdot 2 = 233$$

$$x = 23 \equiv 233 \pmod{105}$$

三人同行七十稀，五树梅花廿一支，
七子团圆正半月，除百零五使得知。
——[明]程大位，《算法统宗》

三岁孩儿七十稀，五留廿一事尤奇。
七度上元重相会，寒食清明便可知。
——[宋]周密



秘密共享

数学建模

MATH T

- 门限机制 (threshold scheme) (t,n)
  - 在 n 人之间共享密钥 $K\in\mathbb{Z}$，其中任意 $t\le n$ 个人可求出 K，任何 $t-1$ 个人无法求出 K
- **Asmuth-Bloom门限机制**
  - 选取整数 p 与 $m_1,\cdots,m_n$ 满足
    - $p>K$ 且 p 与 $m_j, 1\le j\le n$ 互素，$m_1<\cdots<m_n$ 且 $m_1,\cdots,m_n$ 两两互素
    - $\dfrac{m_1\cdots m_t}{m_{n-t+2}\cdots m_n}>p$ 最小的 t 个数的乘积 / 最大的 $t-1$ 个数的乘积；任意 t 个数的乘积与任意 $t-1$ 个数的乘积之比大于 p
  - 选取整数 $0\le r\le \dfrac{m_1\cdots m_t}{p}-1$，$K'=K+r\cdot p\le K+m_1\cdots m_t-p<m_1\cdots m_t$
  - 令 $k_j\equiv K'\pmod{m_j}, 1\le j\le n$，将秘密份额 (share) (k_j,m_j) 告知第 j 人

Asmuth AC, Bloom J. A modular approach to key safeguarding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 29, 208-210, 1983.

$n=3,t=2$

$K=3\quad p=5$

$m_1=7,m_2=9,m_3=11$

$\dfrac{m_1\cdot m_2}{m_3}=\dfrac{7\cdot 9}{11}>5=p$

$r=9<\dfrac{7\cdot 9}{5}-1=\dfrac{m_1\cdot m_2}{p}-1$

$K'=3+9\cdot 5=48<7\cdot 9$

$6=k_1\equiv 48(\bmod 7)$

$3=k_2\equiv 48(\bmod 9)$

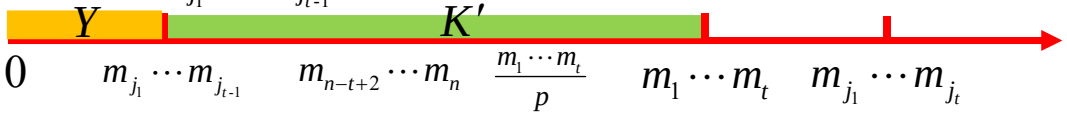
$4=k_3\equiv 48(\bmod 11)$

秘密共享

数学建模

MATH T

- **Asmuth-Bloom门限机制**
  - 一次同余方程组（I） $x \equiv k_j \pmod{m_j}, 1 \le j \le n$ 有唯一的非负整数解 $K' < m_1 \cdots m_t$
  - 若 t 个人 $j_1, \cdots, j_t$ 共享秘密份额 $(k_{j_i}, m_{j_i}), i = 1, \cdots, t$
    - 一次同余方程组（II） $x \equiv k_{j_i} \pmod{m_{j_i}},\ i = 1, \cdots, t$ 有唯一的小于 $m_{j_1} \cdots m_{j_t}$ 的正整数解 X
    - K' 也为一次同余方程组（I） $x \equiv k_{j_i} \pmod{m_{j_i}},\ i = 1, \cdots, t$ 的解，且 $K' < m_1 \cdots m_t < m_{j_1} \cdots m_{j_t}$。由解的唯一性，$X = K'$
  - 若 $t-1$ 个人 $j_1, \cdots, j_{t-1}$ 共享秘密份额 $(k_{j_i}, m_{j_i}), i = 1, \cdots, t-1$
    - 一次同余方程组（III） $x \equiv k_{j_i} \pmod{m_{j_i}},\ i = 1, \cdots, t-1$ 有唯一的小于 $m_{j_1} \cdots m_{j_{t-1}}$ 的正整数解 Y，方程组的所有解为 $Y + l \cdot m_{j_1} \cdots m_{j_{t-1}}, l \in \mathbb{Z}$，$K'$ 为这些解中的某一个



$K' = K + r \cdot p < m_1 \cdots m_t, \quad k_j \equiv K' \pmod{m_j}, 1 \le j \le n \quad K \equiv K' \pmod{p}$

$n = 3, t = 2$

[redacted]

$p = 5 \quad m_1 = 7, m_2 = 9, m_3 = 11$

$k_1 = 6, k_2 = 3, k_3 = 4$

$\begin{cases} x \equiv 6 \pmod 7 & N_1 = 11 \quad N_1^{-1} = 2 \\ x \equiv 4 \pmod{11} & N_2 = 7 \quad N_2^{-1} = 8 \end{cases}$

$11 \cdot 2 \cdot 6 + 7 \cdot 8 \cdot 4 = 356$

$K' = X = 48 \equiv 356 \pmod{77}$

$\{x \equiv 4 \pmod{11}$

$K' = 4, 15, 26, 37, 48, 59, \cdots$

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

随机模型

浙江大学 谈之奕

随机性

数学建模

MATH T

- 随机性（randomness）
  - 偶然性的一种形式，具有某一概率的事件集合中的各个事件所表现出来的不确定性
    - 可重复性：事件可以在基本相同的条件下重复进行。只有单一的偶然过程而无法判定它的可重复性则不称为随机事件
    - 多样性：在基本相同条件下某事件可能以多种方式表现出来，事先不能确定它以何种特定方式发生。只有唯一可能性的过程不是随机事件
    - 概率性：事先可以预见该事件以各种方式出现的所有可能性，预见它以某种特定方式出现的概率。在重复发生时没有确定概率的现象不是同一过程的随机事件
- 必然性与偶然性
  - 揭示客观事物发生、发展和灭亡趋势的一对范畴
    - 必然性（necessity）：客观事物联系和发展中一定要发生的、确定不移的趋势
    - 偶然性（contingency）：客观事物联系发展中并非确定发生的，可以这样出现也可以那样出现的不确定趋势

概率论

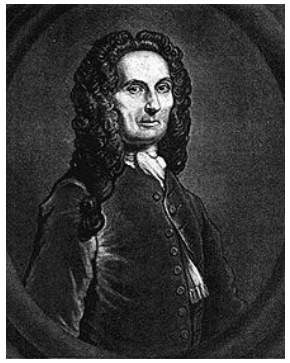
数学建模

MATH T

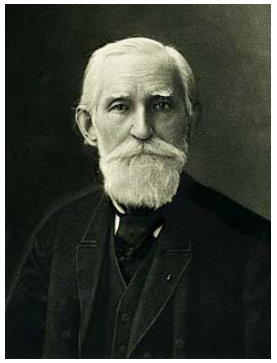
- 概率论（probability theory）
  - 研究随机现象数量规律的数学分支

Gerolamo Cardano
（1501 –1576）
意大利数学家

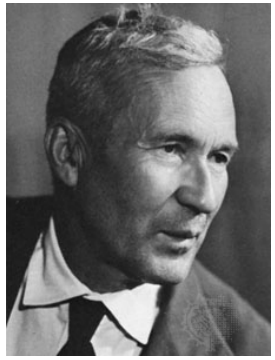
Christiaan Huygens
（1629 –1695）
荷兰数学家、物理学家、天文学家



Abraham de Moivre
（1667 –1754）
法国数学家



Pafnuty Lvovich Chebyshev
（1821 –1894）
俄罗斯数学家



Andrey Nikolaevich Kolmogorov
（1903 –1987）
苏联数学家

博弈问题 → 组合计算 → 分析方法 → 公理化体系

Pascal, Fermat

Jacob Bernoulli, Laplace, Markov, Lyapunov

A. H. 施利亚耶夫，概率（全两卷），周概容译，高等教育出版社，2008

A. H. 施利亚耶夫，随机金融数学基础（全两卷），史树中译，高等教育出版社，2013

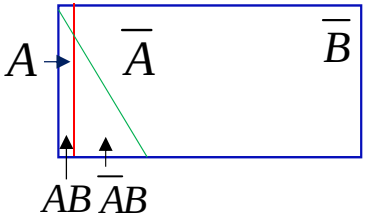
Bayes公式

数学建模

MATH T

- Bayes公式
  - 设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是样本空间的一个分划，且对任意 i，$P(A_i)>0$，则对任意事件 B，只要 $P(B)>0$

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)}$$



- 检测
  - 疾病检测方法的性能指标
    - 灵敏度（sensitivity）p：患病者被检测为患病的概率 $P(B|A)$
    - 特异度（specificity）q：未患病者被检测为未患病的概率 $P(\overline{B}|\overline{A})$
  - 被检测为患病的情况下患病的概率
    - 记 A 为患病，B 为被检测为患病
    - 设疾病的发病率为 r

$$r=0.005, p=0.95, q=0.99$$

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})}=\frac{pr}{pr+(1-q)(1-r)}=\frac{95}{294}\approx 0.323$$

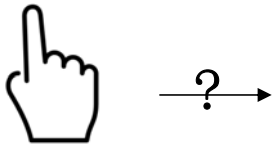
Thomas Bayes
（1701 –1761）
英国数学家

The Monty Hall Problem

数学建模

MATH T

- The Monty Hall Problem
  - 舞台上有三扇道具门，其中一扇门后置有一辆汽车，另两扇门后各置有一头山羊。竞猜者可任选其中一扇门并获赠门后物品
  - 竞猜者选择了其中一扇门后，主持人打开了另两扇门中的一扇，门后面是一头山羊
    - 主持人知道汽车所在位置。他打开的门既不是竞猜者选择的，也不是后置汽车的。若有两扇门符合以上要求，他以相同概率选择其中一扇
  - 主持人允许竞猜者改变之前的选择，竞猜者为增加获得汽车的可能性，是否应该改变当前的选择



Monty Hall问题，最早由美国统计学家Steve Selvin以通讯形式在1975年的The American Statistician期刊上提出并解决。1990年，专栏作家、《吉尼斯世界纪录》认定的具有最高智商的Marilyn vos Savant在美国Parade杂志专栏“Ask Marilyn”中回答了读者提出的这一问题，引起广泛讨论，成为概率论中的著名问题

Monty Hall（1921 – 2017），美国电视节目主持人、制片人，长期担任综艺节目Let’s Make a Deal主持人

The Monty Hall Problem

数学建模

- The Monty Hall Problem
  - 假设竞猜者初次选择1号门，汽车位于1、2、3号门后的概率相同
  - 若竞猜者不改变选择，则获得汽车的概率为 $\frac{1}{3}$
  - 若竞猜者改变选择，则获得汽车的概率为 $\frac{2}{3}$

竞猜者初次选择的门	汽车位置		主持人打开		竞猜者再次选择的门	获赠物品	竞猜者再次选择的门	获赠物品
	门	概率	门	概率				
1	1	1/3	2	1/6	1	汽车	3	山羊
			3	1/6			2	山羊
	2	1/3	3	1/3	1	山羊	2	汽车
	3	1/3	2	1/3	1	山羊	3	汽车

The Monty Hall Problem

数学建模

- The Monty Hall Problem
  - 假设竞猜者初次选择1号门
  - 记 C_i 为事件“汽车位于 i 号门后”，$P(C_1)=P(C_2)=P(C_3)=\frac{1}{3}$
  - 假设主持人打开2号门。记 M 为事件“主持人打开2号门”
    - $P(M|C_1)=\frac{1}{2}$，$P(M|C_2)=0$，$P(M|C_3)=1$
  - 若竞猜者不改变选择，获得汽车的概率为

$$P(C_1|M)=\frac{P(M|C_1)P(C_1)}{P(M|C_1)P(C_1)+P(M|C_2)P(C_2)+P(M|C_3)P(C_3)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$$

  - 若竞猜者改变选择，选择3号门，获得汽车的概率为

$$P(C_3|M)=\frac{P(M|C_3)P(C_3)}{P(M|C_1)P(C_1)+P(M|C_2)P(C_2)+P(M|C_3)P(C_3)}=\frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}$$

The Monty Hall Problem

数学建模

- 被蒙在鼓里的主持人
  - 主持人不知道汽车所在位置。他在竞猜者选择后以相同概率打开另两扇门中的一扇，后面是一头山羊
  - 假设竞猜者初次选择1号门，主持人打开2号门
    - 记 M 为事件“主持人打开2号门，门后是一头山羊”
    - $P(M|C_1)=\frac{1}{2}$，$P(M|C_2)=0$，$P(M|C_3)=\frac{1}{2}$
  - 若竞猜者不改变选择，获得汽车的概率为

$$P(C_1|M)=\frac{P(M|C_1)P(C_1)}{P(M|C_1)P(C_1)+P(M|C_2)P(C_2)+P(M|C_3)P(C_3)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

  - 若竞猜者改变选择，选择3号门，获得汽车的概率为

$$P(C_3|M)=\frac{P(M|C_3)P(C_3)}{P(M|C_1)P(C_1)+P(M|C_2)P(C_2)+P(M|C_3)P(C_3)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

The Monty Hall Problem

数学建模

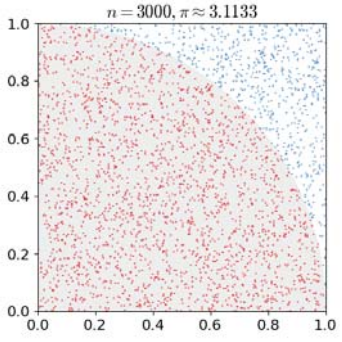
MATH T

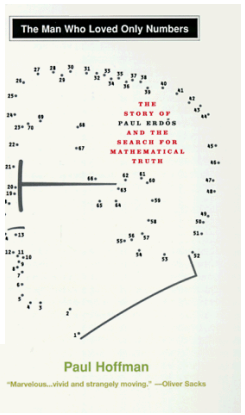
6

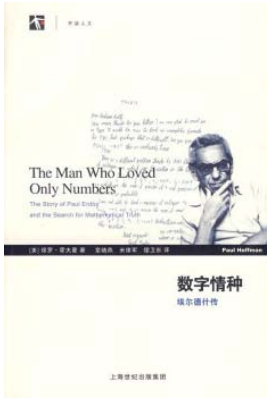
GETTING THE GOAT 得了一只羊

瓦兹索尼把有关蒙迪·霍尔难题的情况告诉了埃尔德什。“我告诉埃尔德什答案是换一扇门，”瓦兹索尼说道，“然后满以为可以转到下一个话题。可令我吃惊的是，埃尔德什说，‘不，那不可能。换不换门应该没什么不同。’这时我对提出这个问题感到后悔，因为我有这样的经历，即人们会因这个答案而变得很激动，从而使得我们的谈话不欢而散。在根本就不可能从容了结此事的情况下，我给他画了一个我在大学的《量化管理技术》上学到的树形分析结果。”瓦兹索尼画出分析树，与萨万特曾经制作的那张罗列可能结果的表格不无相似之处，但这并没有说服他。“真是没办法，”瓦兹索尼说道。“我

瓦兹索尼在他的个人电脑上用蒙特卡罗法模拟蒙迪·霍尔难题。从来都不怎么用电脑的埃尔德什，现在却看着电脑随机地在“换门”和“不换门”之间作出选择。数百次的试验结果证明，换门时赢的概率是不换门的2倍，这时埃尔德什才不得不承认自己错了。但这种模拟并不比用计算机证明四色定理更让人满意：它没有揭示为什么换一下门会更好一些。埃尔德什对瓦兹索尼的解释还是不够满意。他准备走了。







(图片来自网络)

Hoffman P, *The Man Who Loved Only Numbers: The Story of Paul Erdos and the Search for Mathematical Truth*, Hyperion, 1999 (中译本：数字情种——埃尔德什传，章晓燕、米绪军、缪卫东译，上海世纪出版集团，2009)

Paul Erdős（1913 –1996）匈牙利数学家 1983年Wolf奖得主

随机变量

数学建模

MATH T

- 随机变量（random variable）
  - 定义在样本空间上的实值函数。是随机试验结果的量的表示
  - 只能取有限个或可数个数值的随机变量称为离散型随机变量。可能取值为一个区间内所有实数的随机变量称为连续型随机变量
- 离散型分布
  - 离散型随机变量取值的概率规律称为离散型分布
  - 设离散型随机变量 X 所有可能取值为 $x_1, x_2, \cdots$，对任意的 i，$P(X = x_i) = p_i$，其中 $\{p_i\}$ 满足
    - $p_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots$
    - $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

离散分布列 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}$

抛掷两枚硬币

$$S = \begin{Bmatrix} (\mathrm{H},\mathrm{H}), (\mathrm{H},\mathrm{T}), \\ (\mathrm{T},\mathrm{H}), (\mathrm{T},\mathrm{T}) \end{Bmatrix}$$

X：出现正面的硬币枚数

X	0	1	2
事件	(T,T)	(H,T) (T,H)	(H,H)
分布	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

离散型分布

数学建模

- Bernoulli试验
  - 独立、重复地多次进行同一项随机试验，每次试验的结果只有两种可能
  - 设一次随机试验的结果有“成功”和“失败”两种，“成功”的概率为 p

二项分布 (binomial distribution)	n 次Bernoulli试验中，成功的次数	$P(X=i)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}, i=0,1,\cdots,n$
几何分布 (geometric distribution)	进行Bernoulli试验，首次出现成功所需的试验次数	$P(X=i)=(1-p)^{i-1}p, i=1,2,\cdots$
负二项分布 (negative binomial distribution)	进行Bernoulli试验，累计出现 r 次成功所需的试验次数	$P(X=i)=\binom{i-1}{r-1}p^r(1-p)^{i-r}, i=r,r+1,\cdots$
超几何分布 (hypergeometric distribution)	已知 N 件产品中有 M 件不合格品。随机抽取 s 件产品中的不合格数	$P(X=i)=\dfrac{\binom{M}{i}\binom{N-M}{s-i}}{\binom{N}{s}}, i=0,1,\cdots,s$

数学期望

数学建模

- 几何分布的数学期望
  - $P(X=i)=(1-p)^{i-1}p, i=1,2,\cdots$
  - 利用离散分布列
    - $E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot P(X=i)=\sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1}p \qquad i=1+(i-1)$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i-1}p+\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)(1-p)^{i-1}p$$

$$=1+(1-p)\sum_{i=2}^{\infty}(i-1)(1-p)^{i-2}p$$

$$=1+(1-p)\sum_{l=1}^{\infty} l(1-p)^{l-1}p=1+(1-p)E(X)\Rightarrow E(X)=\frac{1}{p}$$

  - 利用条件期望
    - 定义随机变量 $Y=\begin{cases}1 & \text{第一次试验成功}\\ 0 & \text{第一次试验失败}\end{cases}$, $P(Y=1)=p$
    - $E(X|Y=1)=1, E(X|Y=0)=1+E(X)$
    - $E(X)=E(X|Y=1)P(Y=1)+E(X|Y=0)P(Y=0)$

$$=p\cdot 1+(1-p)(1+E(X))=1+(1-p)E(X)$$

对随机变量 Y 的任一确定值 y，随机变量 X 的所有可能取值 $x_1, x_2, \cdots$，连同条件概率 $P(X=x_i|Y=y)$ 构成离散分布列

在 $Y=y$ 条件下，X 的条件期望为

$$E(X|Y=y)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X=x_i|Y=y)$$

当 Y 的取值变动时，$E(X|Y)$ 也为一随机变量，且 $E(E(X|Y))=E(X)$

$$E(E(X|Y))=\sum_{j=1}^{\infty} E(X|Y=y_j)P(Y=y_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X=x_i|Y=y_j)P(Y=y_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X=x_i, Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X=x_i)=E(X)$$

赠券收集问题

数学建模

MATH T

- 赠券收集问题（Coupon collector's problem）
  - 一套赠券共有 N 种，商家在每件商品中随机放入一张赠券。集齐全套赠券平均需购买多少件商品
    - 假设每件商品中放入各种赠券的概率相同
  - 定义随机变量 X 为“集齐全套赠券需购买的商品件数”，$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot P(X=i)$
    - 记 B_i 为事件“购买 i 件商品后集齐全套赠券”
      - 记 A_i^j 为事件“购买 i 件商品后收集到第 j 种赠券”

$$P\left(A_i^j\right)=1-P\left(\overline{A_i^j}\right)=1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^i$$

$$P\left(B_i\right)=P\left(A_i^1A_i^2\cdots A_i^N\right)$$

西湖十景（图片来自网络）

苏堤春晓	花港观鱼	双峰插云	雷峰夕照	南屏晚钟
柳浪闻莺	三潭印月	曲院风荷	平湖秋月	断桥残雪

概率的加法原理

数学建模

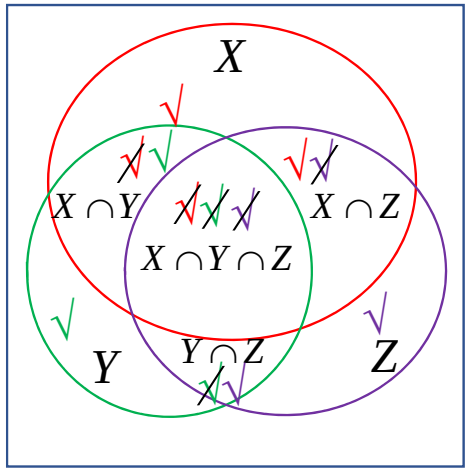
MATH T

- De Morgan定律
  - 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为集合 S 的 n 个子集，则
    - $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$
    - $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$
- 容斥原理（inclusion–exclusion principle）
  - 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为集合 S 的 n 个有限子集，则

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|A_i\right| - \sum_{1 \le i < j \le n} \left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \cdots + (-1)^{n-1} \left|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right|$$

- 概率的加法原理
  - 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件，则

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) - \sum_{1 \le i < j \le n} P\left(A_i \cap A_j\right) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) + \cdots + (-1)^{n-1} P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right)$$



$$\begin{aligned}\left|X \cup Y \cup Z\right| &= \left(\left|X\right| + \left|Y\right| + \left|Z\right|\right) \\ &\quad - \left(\left|X \cap Y\right| + \left|Y \cap Z\right| + \left|X \cap Z\right|\right) \\ &\quad + \left|X \cap Y \cap Z\right|\end{aligned}$$

赠券收集问题

数学建模

MATH T

- 赠券收集问题
  - $P(B_i)=P\left(A_i^1A_i^2\cdots A_i^N\right)=1-P\left(\overline{A_i^1A_i^2\cdots A_i^N}\right)=1-P\left(\overline{A_i^1}\cup\overline{A_i^2}\cup\cdots\cup\overline{A_i^N}\right)$
  - $P\left(\overline{A_i^1}\cup\overline{A_i^2}\cup\cdots\cup\overline{A_i^N}\right)=\sum_{j=1}^{N}P\left(\overline{A_i^j}\right)-\sum_{1\le j<k\le N}P\left(\overline{A_i^j}\cap\overline{A_i^k}\right)$ $\binom{N}{2}$

    $+\cdots+\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_l\le N}P\left(\overline{A_i^{j_1}}\cap\overline{A_i^{j_2}}\cap\cdots\cap\overline{A_i^{j_l}}\right)$ $\binom{N}{l}$

    $+\cdots+(-1)^{N-1}P\left(\overline{A_i^1}\cap\overline{A_i^2}\cap\cdots\cap\overline{A_i^N}\right)$
    - 对任意 $1\le j<k\le N$，$P\left(\overline{A_i^j}\cap\overline{A_i^k}\right)=\left(1-\frac{2}{N}\right)^i$
    - 对任意 $1\le l\le N$，$1\le j_1<j_2<\cdots<j_l\le N$，$P\left(\overline{A_i^{j_1}}\cap\overline{A_i^{j_2}}\cap\cdots\cap\overline{A_i^{j_l}}\right)=\left(1-\frac{l}{N}\right)^i$
  - $P(B_i)=1-\sum_{l=1}^{N}(-1)^{l-1}\binom{N}{l}\left(1-\frac{l}{N}\right)^i=\sum_{l=0}^{N}(-1)^l\binom{N}{l}\left(1-\frac{l}{N}\right)^i$

B_i：购买 i 件商品后收集到所有赠券

A_i^j：购买 i 件商品后收集到第 j 种赠券

$\overline{A_i^j}$：购买 i 件商品后未收集到第 j 种赠券

$\overline{A_i^j}\cap\overline{A_i^k}$：购买 i 件商品后未收集到第 j 种和第 k 种赠券

赠券收集问题

数学建模

MATH T

- 赠券收集问题
  - 随机变量 X 为“集齐全套赠券购买的商品件数”，定义随机变量 Y_k 为“从收集到 $k-1$ 种赠券到 k 种赠券购买的商品件数”
  - $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$
  - $E(X) = E(Y_1) + E(Y_2) + \cdots + E(Y_n) = \sum_{k=1}^{N} \frac{N}{N-k+1} = N\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$

	B_{20}	B_{40}	B_{50}	B_{100}	B_{200}	$E(X)$
西湖十景	0.2147	0.8580	0.9491	0.9997	1.0000	29.2897
十二生肖	0.0513	0.6732	0.8523	0.9980	1.0000	37.2385
二十四节气		0.0018	0.0262	0.7025	0.9952	90.6230
五十六个民族				2.40×10^{-6}	0.1960	258.242
水浒一百单八将					8.99×10^{-11}	568.509

$X = 10$

$Y_1 = 1 \quad Y_2 = 1 \quad Y_3 = 3 \quad Y_4 = 5$

$Y_k = j$：先购买的 $j-1$ 件商品中的赠券均为已收集到的 $k-1$ 种中的一种，第 j 件商品中有未收集到的 $N-k+1$ 种赠券中的一种

几何分布

$$p = \frac{N-k+1}{N} \quad E(Y_k) = \frac{N}{N-k+1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} i \sum_{l=0}^{N} (-1)^l \binom{N}{l} \left(1-\frac{l}{N}\right)^i = N\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$$

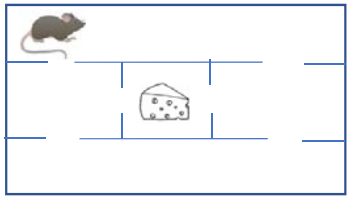
随机过程

数学建模

MATH T

- 随机过程（stochastic process）
  - 描述随机现象随时间推移而演化的一类数学模型
  - 一族随机变量 $\{X(t), t \in T\}$，其中 t 是参数，T 为参数集
    - T 为整数集的随机过程称为随机序列
- Markov过程
  - 在已知目前的状态（现在）的条件下，它未来的演变（将来）不依赖于它以往的演变（过去）
  - 随机序列 $\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$，$X_n$ 只能取有限个或可数个数值
    - $P\{X_{n+1} = i_{n+1}\}$ 只与 X_n 有关，而与 $X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots, X_0$ 无关
    - 对任意 $n \geq 0$和一列状态 $i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}, i_n, i_{n+1}$，

$$P\{X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n\} = P\{X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n\}$$



Andrey Andreyevich Markov
（1856 –1922）
俄罗斯数学家

赌徒破产问题

数学建模

MATH T

- 赌徒破产问题（Gambler's Ruin）
  - 一个赌徒在初始时拥有 h 个单位财富。在每局赌博中以概率 p 赢一个单位财富，以概率 $q=1-p$ 输一个单位财富。各局赌博结果独立
  - 赌徒在财富达到 N 个单位或 0 个单位（破产）时停止赌博
  - 求赌徒破产的概率

Blaise Pascal
（1623 –1662）
法国数学家、物理学家

A,B两人玩一种游戏，初始时两人各有12分。一次掷三枚骰子，若点数恰为11则A胜B负，点数恰为14则B胜A负，其他点数不分胜负。对出现胜负的一次投掷，胜一方增1分，负一方减1分。分数先为0分的一方失败。求双方获胜的概率之比

$$150094635296999121:129746337890625 = 3^{36}:3^{12}5^{12}$$

Huygens C, Oeuvres complètes. Tome I: Correspondance 1638-1656 Nijhoff, 1888.
No 342, Christiaan Huygens à P. de Carcavy. 12 octobre 1656.

递推关系

数学建模

MATH T

- 递推关系
  - $\begin{cases} A_h - A_{h+1} = r\left(A_{h-1} - A_h\right), 1 \le h \le N-1 \\ A_0, A_N \text{ 已知} \end{cases}$
    - 当 $r \neq 1$ 时，$A_h = \dfrac{r^h - r^N}{1-r^N} A_0 + \dfrac{1-r^h}{1-r^N} A_N$
      - 若 $A_0 = 0, A_N = 1$，$A_h = \dfrac{1-r^h}{1-r^N}$
    - 当 $r = 1$ 时，$A_h = \dfrac{N-h}{N} A_0 + \dfrac{h}{N} A_N$
      - 若 $A_0 = 0, A_N = 1$，$A_h = \dfrac{h}{N}$

$$A_h - A_N = (N-h)(A_0 - A_1)$$
$$A_0 - A_N = N(A_0 - A_1)$$
$$\frac{A_h - A_N}{A_0 - A_N} = \frac{N-h}{N} \Rightarrow A_h = \frac{N-h}{N} A_0 + \frac{h}{N} A_N$$

$$A_0 - A_1 = r^0 (A_0 - A_1)$$
$$A_1 - A_2 = r(A_0 - A_1)$$
$$A_2 - A_3 = r(A_1 - A_2) = r^2 (A_0 - A_1)$$
$$\cdots\cdots$$
$$A_h - A_{h+1} = r(A_{h-1} - A_h) = r^h (A_0 - A_1)$$
$$\cdots\cdots$$
$$A_{N-1} - A_N = r(A_{N-2} - A_{N-1}) = r^{N-1} (A_0 - A_1)$$

$$A_h - A_N = \left(r^h + \cdots + r^{N-1}\right)(A_0 - A_1)$$
$$= \frac{r^h \left(1 - r^{N-h}\right)}{1-r} (A_0 - A_1) = \frac{r^h - r^N}{1-r} (A_0 - A_1)$$
$$A_0 - A_N = \frac{1-r^N}{1-r} (A_0 - A_1)$$
$$\frac{A_h - A_N}{A_0 - A_N} = \frac{r^h - r^N}{1-r^N} \Rightarrow A_h = \frac{r^h - r^N}{1-r^N} A_0 + \frac{1-r^h}{1-r^N} A_N$$

赌徒破产问题

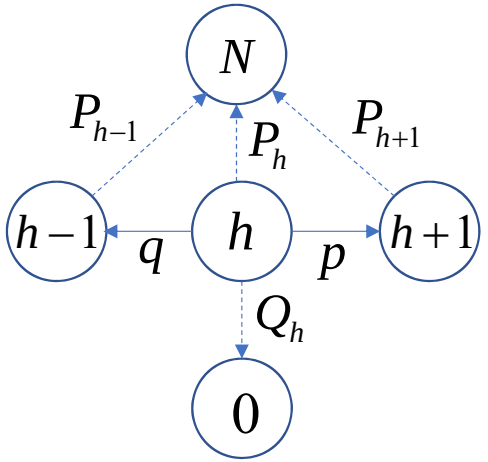
数学建模

MATH T

- 赌徒破产问题
  - 记 P_h 和 Q_h 分别为赌徒初始财富为 h 个单位时，财富最终达到 N 个单位的和 0 个单位的概率
    - $P_N=1, P_0=0, Q_N=0, Q_0=1$
  - $P_h=pP_{h+1}+qP_{h-1}$，$1\le h\le N-1$
    - $P_h-P_{h+1}=\dfrac{q}{p}\left(P_{h-1}-P_h\right)$
    - $$P_h=\begin{cases}\dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^h-1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N-1} & p\neq q\\ \dfrac{h}{N} & p=q\end{cases}$$

$$\begin{cases}A_h-A_{h+1}=r\left(A_{h-1}-A_h\right), 1\le h\le N-1\\ A_0=0, A_N=1\end{cases}$$

$$A_h=\begin{cases}\dfrac{1-r^h}{1-r^N} & r\neq 1\\ \dfrac{h}{N} & r=1\end{cases}$$



赌徒破产问题

数学建模

MATH T

- 赌徒破产问题
  - 设想赌徒与另一位在初始时拥有 $N-h$ 个单位财富的虚拟赌徒赌博。在每局赌博中虚拟赌徒以概率 q 赢一个单位财富，以概率 p 输一个单位财富。赌徒破产时，虚拟赌徒财富达到 N 个单位
  - $Q_h + P_h = 1$，赌博不会永不终止
  - 当 N 充分大时，$Q_h \to \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\right)^h, & p > q \\ 1, & p \le q \end{cases}$。即使赌博是“公平”的，赌徒终将破产

$$P_h = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^h - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} & p \neq q \\ \dfrac{h}{N} & p = q \end{cases}$$

p	0.5	0.5	0.45	0.45	0.45	0.4	0.4
h	10	10	10	20	10	10	10
N	20	100	20	40	15	15	11
Q_h	0.5	0.9	0.8815	0.9822	0.6662	0.8703	0.3372

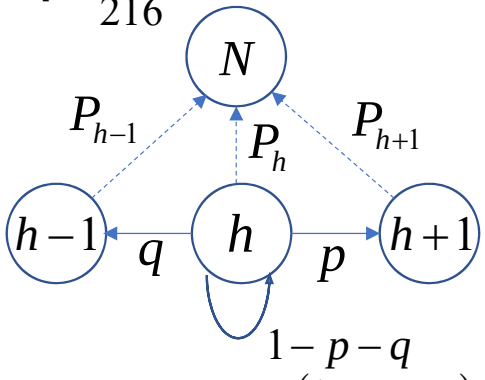
$$Q_h = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{p}{q}\right)^h - 1}{\left(\frac{p}{q}\right)^N - 1} = \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^h - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} & p \neq q \\ \dfrac{N-h}{N} & p = q \end{cases}$$

赌徒破产问题

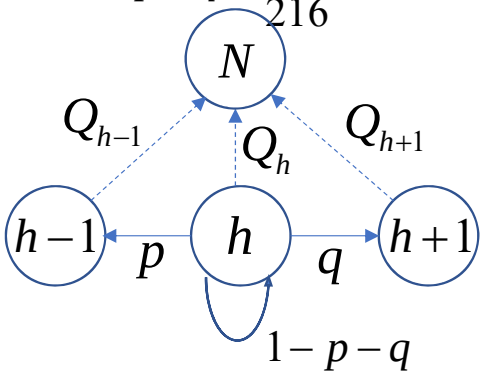
数学建模

MATH T

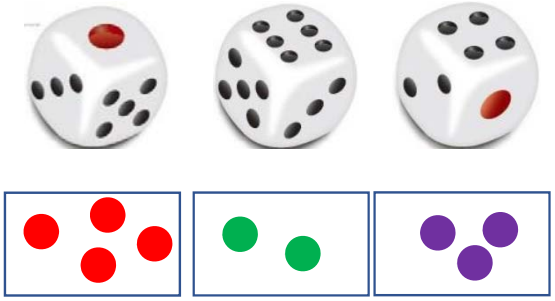
- **Pascal问题**
  - 掷三枚骰子，点数恰为 j 的概率
    - $$\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)\cdot\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)\cdot\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)$$
      $$=x^3+3x^4+6x^5+10x^6+15x^7+21x^8+25x^9+27x^{10}$$
      $$+27x^{11}+25x^{12}+21x^{13}+15x^{14}+10x^{15}+6x^{16}+3x^{17}+x^{18}$$
  - 一次投掷，A胜的概率为 $p=\frac{27}{216}$，B胜的概率为 $q=\frac{15}{216}$，不分胜负的概率为 $1-p-q=\frac{174}{216}$

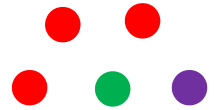


$$P_h=pP_{h+1}+qP_{h-1}+(1-p-q)P_h$$



$$Q_h=qQ_{h+1}+pQ_{h-1}+(1-p-q)Q_h$$





$$5=\begin{cases}3+1+1\\2+1+2\\2+2+1\\1+1+3\\1+2+2\end{cases}$$

$$\left(x+x^2+x^3+x^4\right)\cdot\left(x+x^2\right)\cdot\left(x+x^2+x^3\right)$$
$$=x^3+3x^4+5x^5+6x^6+5x^7+3x^8+x^9$$

赌徒破产问题

数学建模

MATH T

- **Pascal问题**
  - 记 P_h 和 Q_h 分别为A,B初始得分为 h 时，最终获胜的概率
    - $P_{24}=1, P_0=0, Q_{24}=1, Q_0=0$
  - $P_h = pP_{h+1} + qP_{h-1} + (1-p-q)P_h \ , 1 \le h \le 23$
    - $P_h - P_{h+1} = \frac{q}{p}(P_{h-1} - P_h)$
  - $Q_h = qQ_{h+1} + pQ_{h-1} + (1-p-q)Q_h, 1 \le h \le 23$
    - $Q_h - Q_{h+1} = \frac{p}{q}(Q_{h-1} - Q_h)$
  - $P_{12} = \dfrac{\left(\frac{15}{27}\right)^{12} - 1}{\left(\frac{15}{27}\right)^{24} - 1} = \dfrac{282429536481}{282673677106}$ $\quad Q_{12} = \dfrac{\left(\frac{27}{15}\right)^{12} - 1}{\left(\frac{27}{15}\right)^{24} - 1} = \dfrac{244140625}{282673677106}$

$$\frac{150094635296999121}{129746337890625} = \frac{282429536481}{244140625} = \frac{3^{24}}{5^{12}}$$

$$P_h = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^h - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{24} - 1} \qquad Q_h = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^h - 1}{\left(\frac{p}{q}\right)^{24} - 1}$$

$$\begin{cases} A_h - A_{h+1} = r\left(A_{h-1} - A_h\right), \\ \qquad\qquad 1 \le h \le N-1 \\ A_0 = 0, A_N = 1 \end{cases}$$

$$A_h = \begin{cases} \dfrac{1-r^h}{1-r^N} & r \ne 1 \\ \dfrac{h}{N} & r = 1 \end{cases}$$


谢　谢