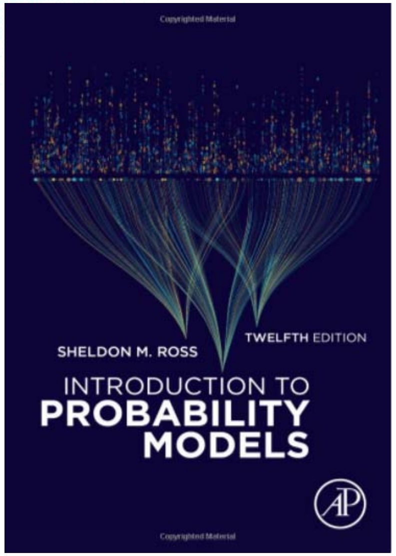
# 数学建模

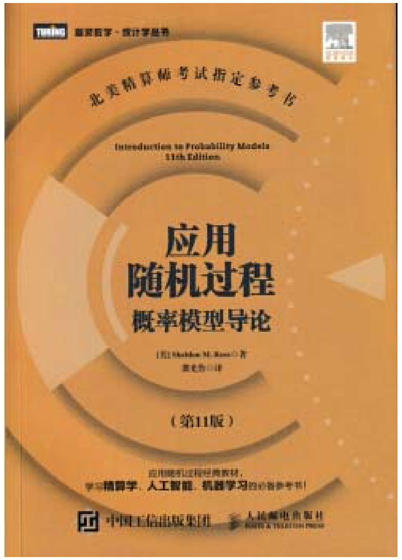
浙江大学数学科学学院　谈之奕

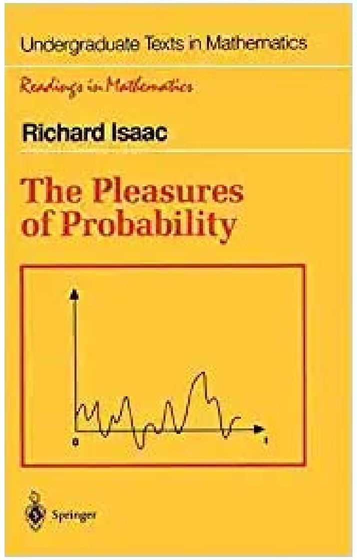
tanzy@zju.edu.cn

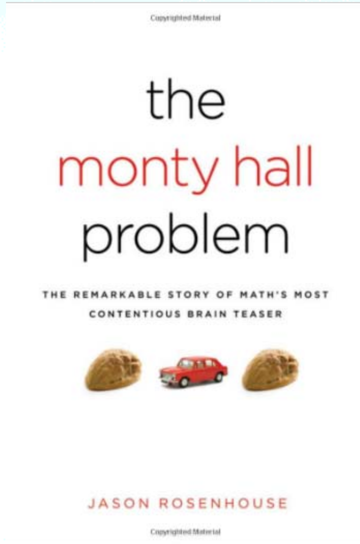
# 随机模型

浙江大学
ZheJiang University
数学建模




**Ross SM, *Introduction to Probability Models* (12th), Academic Press, 2019. (中译本：应用随机过程——概率模型导论（第11版），龚光鲁译，人民邮电出版社，2016年)**

**Isaac R, *The Pleasures of Probability*, Springer, 2016**

**Rosenhouse J, *The Monty Hall Problem: The Remarkable Story of Math's Most Contentious Brain Teaser*, Oxford University Press, 2009.**

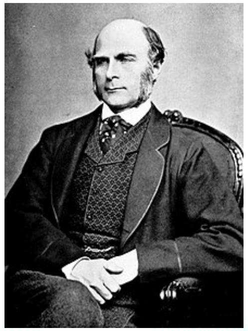
# 家族消亡问题

数学建模

- 家族消亡问题（**extinction of family names**）
  - **19**世纪中叶至**20**世纪初，先后有多位数学家注意到这样的社会现象：一个国家或地区的人口不断增加，但很多家族却消亡了，一些曾经显赫的姓氏不再出现。他们独立或相继地尝试用数学方法研究这一问题

**Irénée-Jules Bienaymé**
**（1796–1878）**
法国统计学家

**Antoine Augustin Cournot**
**（1801–1877）**
法国哲学家、数学家、经济学家



**Sir Francis Galton**
**（1822–1911）**
英国科学家

**Henry William Watson**
**（1827–1903）**
英国数学家

**Agner Krarup Erlang**
**（1878–1929）**
丹麦数学家、统计学家、工程师

# 家族消亡问题



- 函数 $f(x)$
  - 设每位家族成员至多有 $k$ 个后代，有 $i$ 个后代的概率为 $p_i$，$\sum_{i=0}^{k} p_i = 1$。每位家族成员后代数量相互独立
  - 定义函数 $f(x) = \sum_{i=0}^{k} p_i x^i$
    - $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0) = p_0$，$f(1) = 1$
    - $f'(x) > 0, x \in (0,1)$，$f(x)$严格单调递增
    - $f''(x) > 0, x \in (0,1)$，$f(x)$ 严格下凸
    - 某个家族成员没有后代的概率为 $p_0 = f(0) > 0$
    - 某个家族成员后代数量的期望为 $M = \sum_{i=0}^{k} i p_i = f'(1)$

# 家族消亡问题



- 函数 $f_n(x)$
  - 记 $x_n$ 为家族在第 $n$ 代的成员数。假设 $x_0=1$
    - $0 \le x_n \le k^n$
  - 记 $p_{j,n}=P\{x_n=j\}$，定义 $f_n(x)=\sum_{j=0}^{k^n} p_{j,n}x^j$
    - $p_{j,1}=p_j$，$f_1(x)=f(x)$
    - 若 $x_{n-1}=s$，其中第 $i$ 位成员的后代数为 $j_i$，$i=1,2,\ldots,s$
      - $0 \le j_i \le k$，$x_n=\sum_{i=1}^{s} j_i$
    - $p_{j,n}=\sum_{s=0}^{k^{n-1}} p_{s,n-1} \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_s)\in\Lambda_j} p_{j_1}p_{j_2}\ldots p_{j_s}$，其中 $\Lambda_j=\left\{(j_1,j_2,\cdots,j_s)\,|\,0\le j_i\le k, \sum_{i=0}^{s} j_i=j\right\}$

# 家族消亡问题

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 函数 $f_n(x)$
  - $$f_n(x)=\sum_{j=0}^{k^n} p_{j,n}x^j=\sum_{j=0}^{k^n} x^j \sum_{s=0}^{k^{n-1}} p_{s,n-1} \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_s)\in\Lambda_j} p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_s}$$
    $$=\sum_{s=0}^{k^{n-1}} p_{s,n-1}\sum_{j=0}^{k^n}\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_s)\in\Lambda_j} p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_s}x^{j_1}x^{j_2}\cdots x^{j_s}$$
    $$=\sum_{s=0}^{k^{n-1}} p_{s,n-1}\left(\sum_{j_1=0}^{k} p_{j_1}x^{j_1}\right)\left(\sum_{j_2=0}^{k} p_{j_2}x^{j_2}\right)\cdots\left(\sum_{j_s=0}^{k} p_{j_s}x^{j_s}\right)$$
    $$=\sum_{s=0}^{k^{n-1}} p_{s,n-1}\left(\sum_{j=0}^{k} p_j x^j\right)^s=\sum_{s=0}^{k^{n-1}} p_{s,n-1}f(x)^s=f_{n-1}(f(x))$$
  - $$f_n(x)=f_{n-1}(f(x))=f_{n-2}(f(f(x)))=\cdots=\underbrace{f(f(\cdots f(f}_{n}(x))))=\cdots=f(f_{n-1}(x))$$

$$x^3+x^4+x^4+x^4+x^5+x^5+x^5+x^6$$

$$x^3+x^4+x^4+x^5+x^4+x^5+x^5+x^6$$

$$(x+x^2)(x+x^2)(x+x^2)$$

$$\boxed{f(x)=\sum_{i=0}^{k} p_i x^i \qquad f_n(x)=\sum_{j=0}^{k^n} p_{j,n}x^j \qquad p_{j,n}=\sum_{s=0}^{k^{n-1}} p_{s,n-1}\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_s)\in\Lambda_j} p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_s}}$$

# 家族消亡问题

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 第 $n$ 代家族成员数量的期望值 $\mathrm{E}(x_n)$
  - $\mathrm{E}(x_n)=\sum_{j=0}^{k^n} jp_{j,n} = f_n'(1)$
  - $f_n'(x) = f'(f_{n-1}(x))\, f_{n-1}'(x)$
  - $f_n'(1) = f'(f_{n-1}(1))\, f_{n-1}'(1)$
    $= f'(1)\, f_{n-1}'(1) = M\ f_{n-1}'(1)$
  - $\mathrm{E}(x_n) = f_n'(1) = M^n$

$$f_n(x)=\sum_{j=0}^{k^n} p_{j,n}x^j \qquad f(x)=f(f_{n-1}(x))$$

$$f(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2$$

$$f_2(x)=\frac{25}{64}+\frac{5}{16}x+\frac{7}{32}x^2+\frac{3}{16}x^3+\frac{1}{64}x^4$$

$$f_3(x)=\frac{7921}{16384}+\frac{445}{2048}x+\frac{723}{4096}x^2+\frac{159}{2048}x^3+\frac{267}{8192}x^4+\frac{19}{2048}x^5+\frac{11}{4096}x^6+\frac{1}{2048}x^7+\frac{1}{16384}x^8$$

$f_1(0)=0.250,\ f_2(0)=0.391,\ f_3(0)=0.483$

$f_4(0)=0.550,\ f_5(0)=0.601,\ f_6(0)=0.641$

$$f(x)=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x^3$$

$f_1(0)=0.125,\ f_2(0)=0.192,\ f_3(0)=0.231$

$f_4(0)=0.255,\ f_5(0)=0.271,\ f_6(0)=0.281$

# 家族消亡问题

数学建模

- 消亡概率 $\pi_n$
  - 记 $\pi_n = P\{x_n = 0\}$，即家族在第 $n$ 代消亡的概率
    - $\pi_n = f_n(0) = f(f_{n-1}(0)) = f(\pi_{n-1})$，$\pi_1 = f(0)$
    - $\{x_{n-1} = 0\} \subseteq \{x_n = 0\}$，$\pi_{n-1} \le \pi_n$
    - $\pi_n \le 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} \pi_n$ 存在，记为 $\pi_\infty$
  - $\pi_\infty$ 是方程 $f(x) = x$ 的最小正根
    - 在 $\pi_n = f(\pi_{n-1})$ 两边取极限，$\pi_\infty = f(\pi_\infty)$
    - 设另有 $f(x_0) = x_0 > 0$，$\pi_1 = f(0) < f(x_0) = x_0$，$\pi_2 = f(\pi_1) < f(x_0) = x_0$，归纳可得 $\pi_n < x_0$
    - 由极限保号性，$\pi_\infty \le x_0$

$f(x)$ 单调性

# 家族消亡问题

数学建模

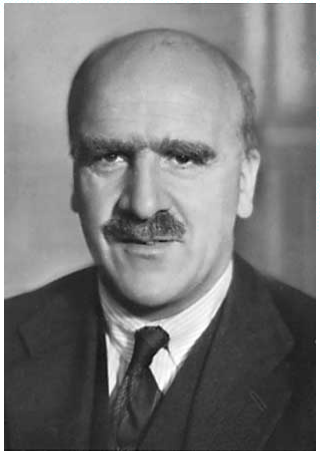
- 最终消亡概率 $\pi_\infty = 1$ 当且仅当 $M = f'(1) \le 1$
  - 方程 $f(x) = x$ 在 $(0,1)$ 内至多只有一个根
    - 若 $f(x) = x$ 在 $[0,1]$ 内有三个根 $x_1, x_2, x_3$，其中 $0 < x_1 < x_2 < x_3 \le 1$，
      $f(x_2) < \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} x_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} x_3 = x_2$　　$f(x)$ 凸性　　矛盾
  - 若 $M \le 1$，方程 $f(x) = x$ 在 $(0,1)$ 内无根
    - 由 $M = f'(1) \le 1$ 及 $f''(x) > 0, x \in (0,1)$，$f'(x) < 1, x \in (0,1)$
    - 由中值定理，对任意 $x \in (0,1)$，$\frac{1 - f(x)}{1 - x} = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = f'(\tau) < 1, x < \tau < 1$
  - 若 $\pi_\infty = 1$，则 $M \le 1$
    - 令 $g(x) = f(x) - x$，$g(0) > 0, g(1) = 0, g'(x) = f'(x) - 1$
    - 若 $M = f'(1) > 1$，则 $0 < g'(1) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{g(1) - g(1-\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{0 - g(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$
    - 存在 $\tau \in (0,1)$，$g(\tau) < 0$ 。由界值定理，$g(x)$ 在 $(0, \tau)$ 内有一根　　矛盾

$\boxed{\pi_\infty \text{ 是方程 } f(x) = x \text{ 的最小正根}}$

# 分支过程

- 分支过程
  - 分支过程（**branching process**）是用于描述与某一群体繁殖和转换相关的现象的随机过程，其基本假定是个体的繁殖是相互独立的
  - 分支过程可用于描述传染病从极少感染者经过逐级传播到爆发的过程
  - **Fisher**和**Haldane**曾用分支过程研究基因变异后的形成的不利基因通过自然选择在后代中的保留问题

**Sir Ronald Aylmer Fisher**
**（1890–1962）**
英国统计学家、遗传学家



**John Burdon Sanderson Haldane**
**（1892–1964）**
英国遗传学家、生物统计学家

**Fisher RA. On the dominance ratio.** ***Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*****, 42: 321-341, 1923.**

**Haldane JBS. A mathematical theory of natural and artificial selection, V: selection and mutation.** ***Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*****, 838-844, 1927.**

# 招聘问题

数学建模

- $n$ 位求职者应聘某一职位，招聘方通过逐个面试予以考察
  - 应聘者的综合能力各不相同，通过面试可给出已面试的应聘者的综合能力大小顺序
- 应聘者以某一顺序接受面试，某个应聘者是否被录用必须在他面试结束后立即决定
  - 若录用，招聘即告结束，不再面试其他应聘者
  - 若不录用，招聘方继续面试下一位应聘者
  - 招聘方不得录用曾作出过不录用决定的应聘者
- 招聘方采用何种策略可使招聘到综合能力最强（第一名）的应聘者的概率最大

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

# 可行策略

- 备选者
  - 若目标为招聘到第一名的概率尽可能大，招聘方只会录用比之前所有应聘者均优的那位应聘者
- 策略 $s$
  - 从第 $s$ 位应聘者开始，录用首次出现的一名备选者
    - 若至最后一名应聘者面试时仍未有备选者出现，是否录用最后一名应聘者对结果没有影响

招聘方如何根据当前应聘者在所有已面试应聘者中的相对名次推测他是否为所有应聘者中的第一名

录用——后来者更好怎么办？不录用——后来者更差怎么办？

# 数学描述

数学建模

- 应聘者、绝对名次、相对名次
  - 应聘者中综合能力居于第 $i$ 名，$i=1,\cdots,n$ 的应聘者记为 $i$，$i$ 称为其绝对名次
  - 第 $i$ 位，$i=1,\cdots,n$ 接受面试的应聘者记为 $A_i$
    - $1\le A_i\le n$，$A_i=j$ 表示第 $i$ 位接受面试的应聘者绝对名次为 $j$
  - $A_i$ 在前 $i$ 位接受面试的应聘者在 $A_1,\cdots,A_i$ 中综合能力名次排名记为 $y_i$，称为 $A_i$ 的相对名次
    - $1\le y_i\le \min\{i,A_i\}$，若 $y_i=1$，则 $A_i$ 为一名备选者
    - 招聘方只能根据每位应聘者的相对名次进行决策
- 假设对 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列，应聘者以该顺序面试的概率均为 $\frac{1}{n!}$

# 实例演示

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1234 | 1 | | | |
| 1243 | 1 | | | |
| 1324 | 1 | | | |
| 1342 | 1 | | | |
| 1423 | 1 | | | |
| 1432 | 1 | | | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 2134 | 2 | 1 | | |
| 2143 | 2 | 1 | | |
| 2314 | 2 | 1 | 1 | |
| 2341 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 2413 | 2 | 1 | 1 | |
| 2431 | 2 | 1 | 1 | 1 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 3214 | 3 | 2 | 1 | |
| 3241 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| 3124 | 3 | 1 | | |
| 3142 | 3 | 1 | | |
| 3421 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| 3412 | 3 | 1 | 1 | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 4231 | 4 | 2 | 1 | 1 |
| 4213 | 4 | 2 | 1 | |
| 4321 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 4312 | 4 | 3 | 1 | |
| 4123 | 4 | 1 | | |
| 4132 | 4 | 1 | | |

策略 2 在24种可能顺序中有11次可录用到第一名，为最优策略

# 古典概型

- $p_n(s)$：采用策略 $s$ 录用到第一名的概率
  - 采用策略1，必录用 $A_1$，$p_n(1) = P(A_1 = 1) = \dfrac{1}{n}$
- $p_n^k(s)$：采用策略 $s$ 录用 $A_k(k \geq s)$，且为第一名 $(A_k = 1)$ 的概率
  - $A_s, \cdots, A_{k-1}$ 均不是备选者
  - 前 $k-1$ 位应聘者中的最佳者出现在前 $s-1$ 位应聘者中，否则他将先于 $A_k$ 被录用

# 古典概型

$$p_n^k(s)=\frac{1}{n}\cdot\frac{s-1}{k-1}$$

第一名出现在第 $k$ 位 → $\frac{1}{n}$

前 $k-1$位中的最佳者只能选择在前 $s-1$位 → $\frac{s-1}{k-1}$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $s$ | | | | $k$ | | |

前$k-1$位中的最佳者

第一名

选$k-1$位应聘者

前 $k-1$位中最佳者的可能位置数

其余$k-2$位的可能排列数

其余 $n-k$位的可能排列数

$$p_n^k(s)=\frac{\binom{n-1}{k-1}(s-1)(k-2)!(n-k)!}{n!}=\frac{(n-1)!(s-1)(k-2)!(n-k)!}{n!(k-1)!(n-k)!}=\frac{s-1}{n(k-1)}$$

# 概率计算

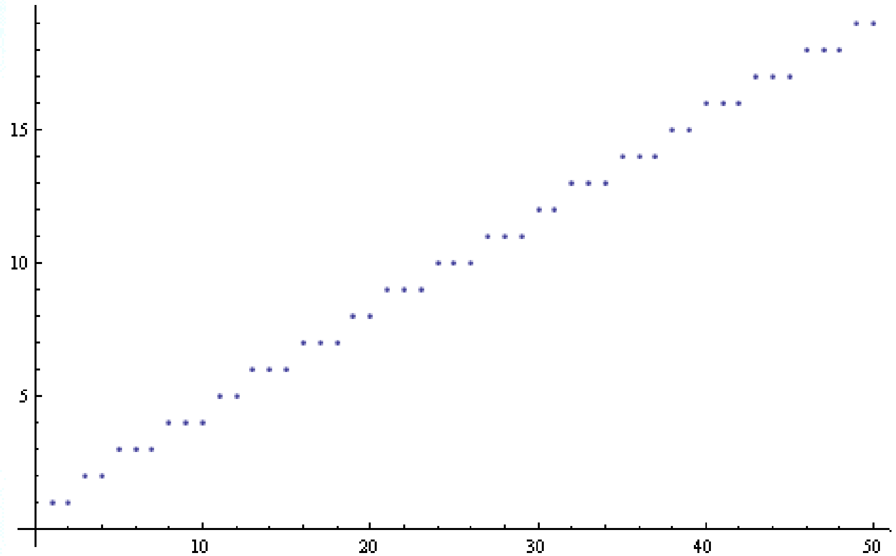
- $p_n(s)=\sum_{k=s}^{n} p_n^k(s)=\sum_{k=s}^{n}\frac{s-1}{n(k-1)}=\frac{s-1}{n}\sum_{k=s}^{n}\frac{1}{k-1}=\frac{s-1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k}$
  - $p_n(s)-p_n(s-1)=\frac{s-1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k}-\frac{s-2}{n}\sum_{k=s-2}^{n-1}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k}-\frac{1}{n}$
  - $p_n(s)-p_n(s+1)=\frac{s-1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k}-\frac{s}{n}\sum_{k=s}^{n-1}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\sum_{k=s}^{n-1}\frac{1}{k}$
- 令 $s^*=\min\left\{s \mid \sum_{k=s}^{n-1}\frac{1}{k}<1\right\}$
  - $s\ge s^*$时，$\sum_{k=s}^{n-1}\frac{1}{k}<1, p_n(s)>p_n(s+1)$，$s\le s^*$ 时 $\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k}\ge 1, p_n(s)\ge p_n(s-1)$
- 当 $s=s^*$时，$p_n(s)$ 达到最大值 $p_n(s^*)$

$$\boxed{p_n^k(s)=\frac{s-1}{n(k-1)}}$$

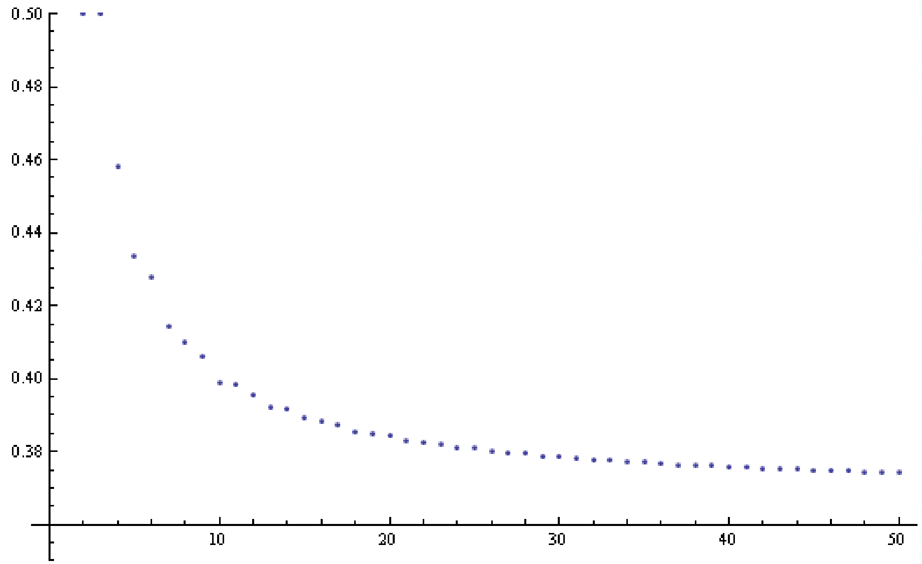
# 数值计算

浙江大学 ZheJiang University

数学建模




$s^*$ 图像




$p_n(s^*)$ 图像

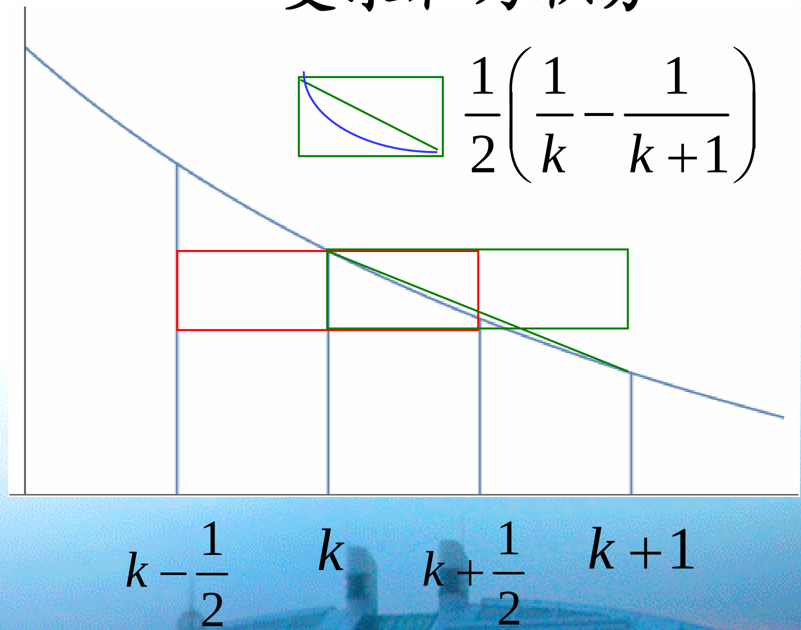
# $s^*$的估计

$$s^*=\min\left\{s\,\middle|\,\sum_{k=s}^{n-1}\frac{1}{k}<1\right\}$$

- $$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)<\frac{1}{k}<\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\frac{1}{x}dx$$
  - $f(x)=\frac{1}{x}$为下凸函数
  - 令 $F(k)=\frac{1}{k}-\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\frac{1}{x}dx=\frac{1}{k}-\ln\frac{2k+1}{2k-1}$
    - $$F'(k)=-\frac{1}{k^2}-\frac{2}{2k+1}+\frac{2}{2k-1}$$
      $$=\frac{1}{k^2(4k^2-1)}>0$$
    - $\lim\limits_{k\to\infty}F(k)=0$
  - $$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\frac{2k+1}{2k-1}}{\frac{1}{k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{2}{2k+1}-\frac{2}{2k-1}}{-\frac{1}{k^2}}=1$$

变求和为积分

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$



# $s^*$ 的估计

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- $1 \le \sum_{k=s^*-1}^{n-1} \frac{1}{k} < \int_{s^*-\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx = \ln \frac{2n-1}{2s^*-3} \Leftrightarrow e \le \frac{2n-1}{2s^*-3} \Leftrightarrow s^* \le \frac{1}{e}\left(n-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}$
- $1 > \sum_{k=s^*}^{n-1} \frac{1}{k} > \int_{s^*}^{n} \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^*}-\frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n}{s^*} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^*}-\frac{1}{n}\right)$

$$\Leftrightarrow e > \frac{n}{s^*} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^*}-\frac{1}{n}\right)} > \frac{n}{s^*}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^*}-\frac{1}{n}\right)\right) \ge \frac{n}{s^*}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{e}\left(n-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}-\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow s^* \ge \frac{n}{e}\left(1-\frac{1}{2n}\right)+\frac{n}{2n+3e-1} = \frac{1}{e}\left(n-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}-\frac{3e-1}{2(2n+3e-1)}$$

$$\boxed{s^* = \min\left\{ s \mid \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k} < 1 \right\}}$$

$$\boxed{\int_{k}^{k+1} \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) < \frac{1}{k} < \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx}$$

# Secretary Problem

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- $s^*$ 的值
  - $\frac{1}{e}\left(n-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}-\frac{3e-1}{2(2n+3e-1)} \le s^* \le \frac{1}{e}\left(n-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}$
  - $s^*$ 的上下界差距不超过 $1+\frac{3e-1}{2(2n+3e-1)} \approx 1+\frac{1.79}{n+1.79}$
  - $\lim_{n\to\infty}\frac{s^*}{n}=\frac{1}{e}$
- $p_n(s^*)$ 的值
  - $p_n(s^*)=\frac{s^*-1}{n}\sum_{k=s^*-1}^{n-1}\frac{1}{k}$
  - $\lim_{n\to\infty} p_n(s^*)=\frac{1}{e}$

$$\boxed{p_n(s)=\frac{s-1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k}}$$

$$\boxed{\ln\frac{n}{s^*-1}=\int_{s^*-1}^{n}\frac{1}{x}dx \le \sum_{k=s^*-1}^{n-1}\frac{1}{k} \le \int_{s^*-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\frac{1}{x}dx=\ln\frac{2n-1}{2s^*-1}}$$

# 两次选择

数学建模

- 招聘方可录用两名应聘者，但对每位应聘者聘用与否的决定仍需在该应聘者面试结束时给出
- 招聘方采用何种策略可使录用的两位应聘者中其中一位为第一名的概率尽可能大
- 策略 $(r,s)(s>r)$：
  - 录用自 $A_r$ 起首次出现的一名备选者，称为第一次录用
  - 若已录用一人，录用不早于 $A_s$ 的一名备选者，称为第二次录用

# 实例演示

浙江大学
ZheJiang University

数学建模

| | (1,3) | (2,3) |
|---|---|---|
| **1234** | 1 | |
| **1243** | 1 | |
| **1324** | 1 | |
| **1342** | 1 | |
| **1423** | 1 | |
| **1432** | 1 | |

| | (1,3) | (2,3) |
|---|---|---|
| **2134** | 2 | 1 |
| **2143** | 2 | 1 |
| **2314** | 2 1 | 1 |
| **2341** | 2 1 | 1 |
| **2413** | 2 1 | 1 |
| **2431** | 2 1 | 1 |

| | (1,3) | (2,3) |
|---|---|---|
| **3124** | 3 | 1 |
| **3142** | 3 | 1 |
| **3214** | 3 1 | 2 1 |
| **3241** | 3 1 | 2 1 |
| **3412** | 3 1 | 1 |
| **3421** | 3 2 | 2 1 |

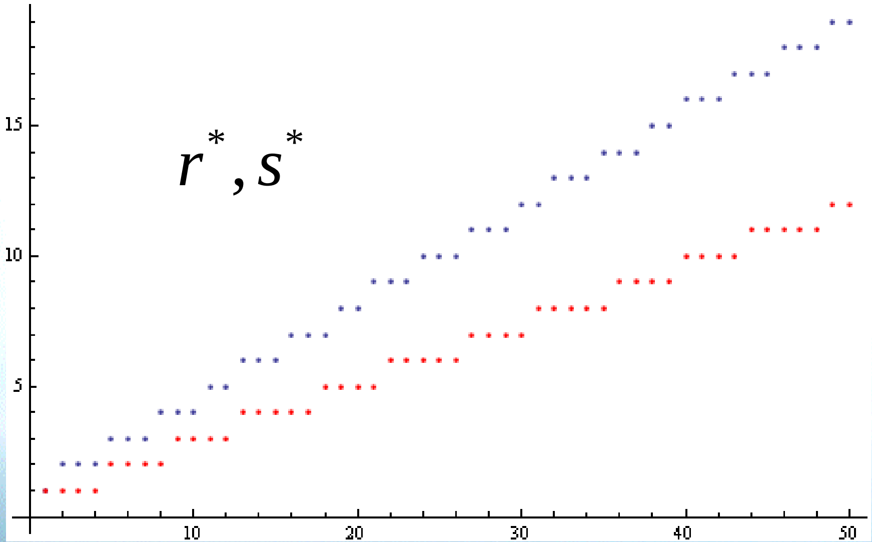
| | (1,3) | (2,3) |
|---|---|---|
| **4123** | 4 | 1 |
| **4132** | 4 | 1 |
| **4213** | 4 1 | 2 1 |
| **4231** | 4 1 | 2 1 |
| **4312** | 4 1 | 3 1 |
| **4321** | 4 2 | 3 2 |

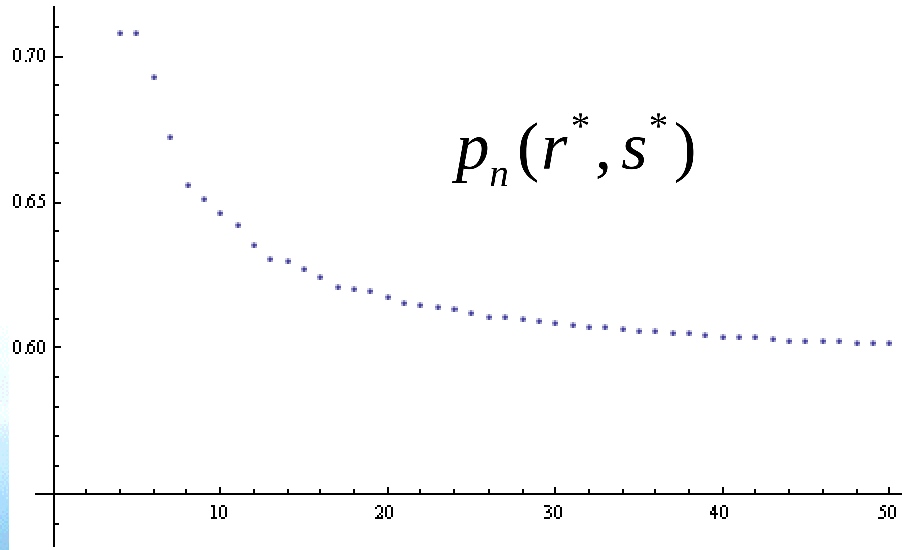
(1,3) 共**16**次 (2,3) 共**17**次

# 渐近估计

数学建模

- 两次选择
  - 当 $n$ 充分大时，最优策略为 $(e^{-\frac{3}{2}}n, e^{-1}n)$，录用到第一名的概率约为 0.5910

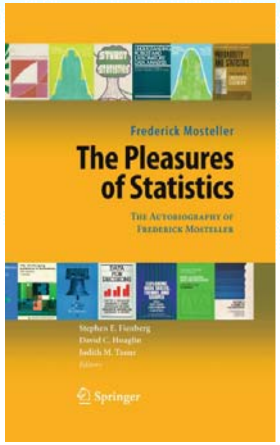


# 问题推广

数学建模

- 问题推广
  - 招聘方录用 $k$ 位应聘者，采用何种策略可使其中包含第一名的概率尽可能大
  - 招聘方录用一位应聘者，采用何种策略可使他为前 $k$ 名的概率尽可能大
- 第二个**Secretary Problem**
  - 若 $A_i$ 的分布已知，招聘方录用一位应聘者，采用何种策略可使他为第一名的概率尽可能大




**Frederick Mosteller**
**(1916-2006)**
美国统计学家

**Gilbert J P, Mosteller F. Recognizing the maximum of a sequence, *Journal of the American Statistical Association*, 61, 35-73, 1966.**

**Mosteller F. *The pleasures of statistics: The autobiography of Frederick Mosteller*. Springer, 2010.**

# 期望名次

浙江大学 ZheJiang University
数学建模

- 第三个**Secretary Problem**
  - 招聘方录用一位应聘者，采用何种策略可使录用者绝对名次期望值尽可能小
    - 招聘方依据 $y_1, y_2, \cdots, y_i$ 值决定是否录用应聘者 $A_i$
    - 招聘方可以录用 $y_i > 1$ 的非备选者
- 在录用相对名次为 $j$ 的应聘者 $A_i$ 情况下，被录用者绝对名次的期望值

$$\mathrm{E}(A_i \mid y_i = j) = \sum_{k=1}^{n} kP(A_i = k \mid y_i = j) = \sum_{k=1}^{n} \frac{kP(A_i = k, y_i = j)}{P(y_i = j)} = i\sum_{k=1}^{n} kP(A_i = k, y_i = j)$$

- $$P(y_i = 1) = P(y_i = 2) = \cdots = P(y_i = i) = \frac{1}{i}$$

# 条件概率

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

$$P(A_i=k,y_i=j)=\frac{\binom{k-1}{j-1}\binom{n-k}{i-j}(i-1)!(n-i)!}{n!}$$

$$=\frac{\binom{k-1}{j-1}\binom{n-k}{i-j}}{i\cdot\binom{n}{i}}$$

$$\mathrm{E}(A_i\mid y_i=j)=i\sum_{k=1}^{n}kP(A_i=k,y_i=j)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k\binom{k-1}{j-1}\binom{n-k}{i-j}}{\binom{n}{i}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{j\binom{k}{j}\binom{n-k}{i-j}}{\binom{n}{i}}=\frac{j}{\binom{n}{i}}\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{j}\binom{n-k}{i-j}$$

$A_i=k,y_i=j$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $k$ | | | |

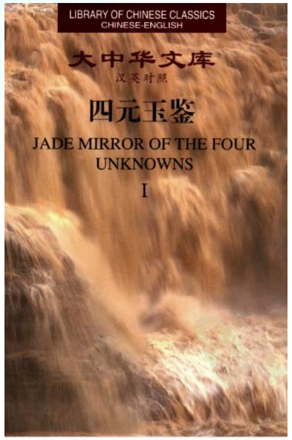
恰有 $j-1$ 位优于 $k$

前 $i$ 位中的第 $j$ 名

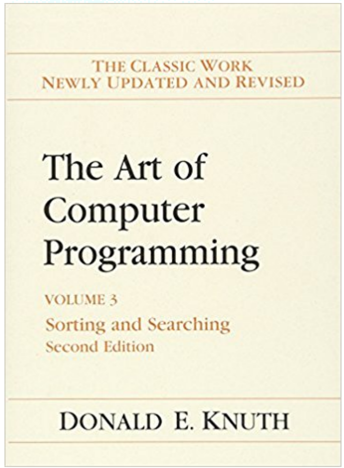
$(k\geq j,n-k\geq i-j)$

# Chu–Vandermonde Identity






《四元玉鉴》成书于1303年。全书分为28门，288题，是中国宋元数学高潮中水平最高的著作。




**I. Sums of products.** To complete our set of binomial-coefficient manipulations, we present the following very general identities, which are proved in the exercises at the end of this section. These formulas show how to sum over a product of two binomial coefficients, considering various places where the running variable $k$ might appear:

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}, \quad \text{integer } n. \tag{21}$$

$$\sum_k \binom{r}{m+k}\binom{s}{n+k} = \binom{r+s}{r-m+n}, \quad \text{integer } m,\ \text{integer } n,\ \text{integer } r \ge 0. \tag{22}$$

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s+k}{n}(-1)^{r-k} = \binom{s}{n-r}, \quad \text{integer } n,\ \text{integer } r \ge 0. \tag{23}$$

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{r-k}{m}\binom{s}{k-t}(-1)^{k-t} = \binom{r-t-s}{r-t-m}, \quad \text{integer } t \ge 0,\ \text{integer } r \ge 0,\ \text{integer } m \ge 0. \tag{24}$$

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{r-k}{m}\binom{s+k}{n} = \binom{r+s+1}{m+n+1}, \quad \text{integer } n \ge \text{integer } s \ge 0,\ \text{integer } m \ge 0,\ \text{integer } r \ge 0. \tag{25}$$

$$\sum_{k\ge 0} \binom{r-tk}{k}\binom{s-t(n-k)}{n-k}\frac{r}{r-tk} = \binom{r+s-tn}{n}, \quad \text{integer } n. \tag{26}$$

Of these identities, Eq. (21) is by far the most important, and it should be memorized. One way to remember it is to interpret the right-hand side as the number of ways to select $n$ people from among $r$ men and $s$ women; each term on the left is the number of ways to choose $k$ of the men and $n-k$ of the women. Equation (21) is commonly called Vandermonde's convolution, since A. Vandermonde published it in *Mém. Acad. Roy. Sciences Paris* (1772), 489–498. However, it had appeared already in Shih-Chieh Chu's 1303 treatise mentioned earlier [see J. Needham, *Science and Civilization in China* **3** (Cambridge University Press, 1959), 138–139].

朱世杰(约1249-1314)，元代数学家，燕（今北京或其附近）人。主要著作有《算学启蒙》和《四元玉鉴》。朱世杰在“天元术”、“二元术”、“三元术”基础上，创造了“四元术”，即四元高次方程组解法。

**Knuth DE. *The Art of Computer Programming*. Vol. 1. Addison-Wesley, 1997.**

# 三角垛

数学建模

- 三角垛
  - 茭草垛
  - 三角垛(落一形垛)
  - 撒星形垛(三角落一形垛)
  - 三角撒星形垛(撒星更落一形垛)
  - 三角撒星更落一形垛

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2!}n(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2!}i(i+1) = \frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3!}i(i+1)(i+2) = \frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4!}i(i+1)(i+2)(i+3) = \frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{5!}i(i+1)(i+2)(i+3)(i+4) = \frac{1}{6!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$$

$$\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)=8568 \qquad n^5+10n^4+35n^3+50n^2+24n=1028160$$

“茭草形段” 之四:

今有茭草八千五百六十八束，欲令撒星更落一形垛之，問底子幾何?

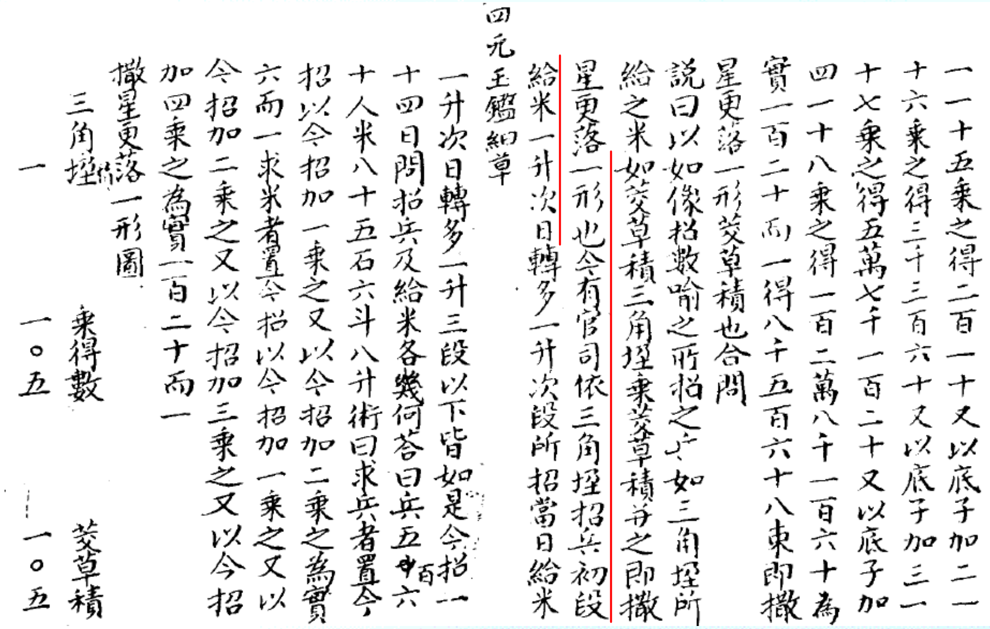
答曰：一十四束。

術曰：立天元一為撒星更落一底子，如積求之，得一百二萬八千一百六十為益實，二十四為從方，五十為從上廉，三十五為從二廉，一十為從三廉，一為正隅。四乘方開之，合問。

# 朱世杰—范德蒙恒等式

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

钱宝琮
**(1892-1974)**
浙江嘉兴人
数学史家、天文史家、数学教育家
浙江大学数学系首任系主任


一一十五乘之得二百一十又以底子加二一
十六乘之得三千三百六十又以底子加三一
十七乘之得五萬七千一百二十又以底子加
四一十八乘之得一百二萬八千一百六十為
實一百二十而一得八千五百六十八東即撒
星叓落一形茭草積也合問
說曰以如像招數喻之所招之亣如三角垛所
給之米如茭草積三角垛乘茭草積亦之即撒
星叓落一形也今有官司依三角垛招兵初段
給米一升次日轉多一升次段所招當日給米
四元玉鑑細草
一升次日轉多一升三段以下皆如是今招一
十四日問招兵及給米各幾何荅曰兵五百六
十人米八十五石六斗八升術曰求兵者置今
招以今招加一乘之又以今招加二乘之為實
六而一求米者置今招以今招加一乘之又以
今招加二乘之又以今招加三乘之又以今招
加四乘之為實一百二十而一
撒星叓落一形圖
三角垛 乘得數 茭草積
一 一〇五 一〇五

**[清]罗士琳撰《四元玉鉴细草》**

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+2}{3}\binom{n+2-k}{2}=\binom{n+4}{5}$$

钱宝琮，朱世杰垛积术广义. 学艺. 第**4**卷第**7**号, **1923**

杜石然，朱世杰研究，《宋元数学史论文集》（钱宝琮编），科学出版社, **1966**，**166-209**页

罗见今，朱世杰—范德蒙公式的发展简介，数学传播，**32(4), 66-71, 2008**

# 组合恒等式

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- 生成函数（**generating function**）法
  - $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{l=0}^{\infty}x^l$$
  - $$\frac{1}{(1-x)^{p+1}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+p)(l+p-1)\cdots(l+1)}{p\cdot(p-1)\cdots 1}x^l=\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+p}{p}x^l$$
  - $$\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+i+1}{i+1}x^l=\frac{1}{(1-x)^{i+2}}=\frac{1}{(1-x)^{j+1}}\frac{1}{(1-x)^{i-j+1}}=\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+j}{j}x^l\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+i-j}{i-j}x^l$$
  - 比较两端 $x^{n-i}$ 项系数
    - $$\binom{n+1}{i+1}=\sum_{k=0}^{n-i}\binom{k+j}{j}\binom{n-k-j}{i-j}=\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}\binom{n-k}{i-j}$$

# 从期望到决策

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 期望
  - 在录用相对名次为$y_i$的应聘者$A_i$情况下，录用者绝对名次的期望值为

$$E(A_i \mid y_i = j) = \frac{j}{\binom{n}{i}} \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j} = \frac{j}{\binom{n}{i}} \binom{n+1}{i+1} = \frac{n+1}{i+1} j$$

- 决策
  - 面试$A_i$后招聘方可作录用和不录用两种决策
    - 若录用$A_i$，招聘结束
    - 若不录用$A_i$，继续面试$A_{i+1}$

$$\boxed{\binom{n+1}{i+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j}}$$

# 递推

- 令 $U(j,i)$ 为面试相对名次 $y_i = j$ 的 $A_i$ 时可能取得的最优绝对名次期望值
  - 录用 $A_i$ ：$U(j,i)=\dfrac{n+1}{i+1}j$
  - 若不录用 $A_i$ ，$y_{i+1}=k$ 的概率为 $\dfrac{1}{i+1}$：$U(j,i)=\dfrac{1}{i+1}\sum_{k=1}^{i+1}U(k,i+1)$
  - $U(j,i)=\min\left\{\dfrac{n+1}{i+1}j,\dfrac{1}{i+1}\sum_{k=1}^{i+1}U(k,i+1)\right\}$ 录用与否由两值大小比较决定
  - 面试 $A_n$ 时，相对名次即为绝对名次，招聘方必定录用，$U(j,n)=j, j=1,\cdots,n$
  - 自首位应聘者面试起，招聘方采用正确决策所能得到的最优绝对名次期望值为 $U(1,1)$

# 递推



- 从 $U(j,i)$ 到 $C_{i-1}$
  - 令 $C_{i-1}=\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}U(k,i)$ ，则 $U(j,i)=\min\left\{\frac{n+1}{i+1}j, C_i\right\}$
  - 令 $s_i=\left\lfloor\frac{C_i(i+1)}{n+1}\right\rfloor, i=n-1,\cdots,1$ ，$\frac{n+1}{i+1}j\le C_i$当且仅当 $j\le s_i$
  - $C_{i-1}=\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}U(j,i)=\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}\min\left\{\frac{n+1}{i+1}j, C_i\right\}$
    $=\frac{1}{i}\left(\frac{n+1}{i+1}(1+\cdots+s_i)+(i-s_i)C_i\right)=\frac{1}{i}\left(\frac{n+1}{i+1}\cdot\frac{s_i(1+s_i)}{2}+(i-s_i)C_i\right)$
  - $C_{n-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}U(k,n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}j=\frac{n+1}{2}$， $U(1,1)=C_0$

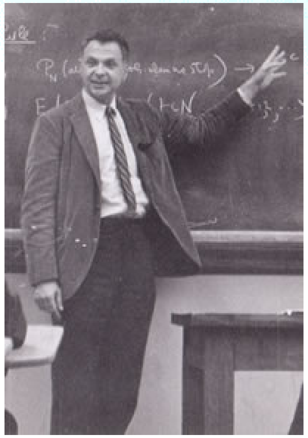
录用与否由两值大小比较决定

$$U(j,i)=\min\left\{\frac{n+1}{i+1}j, \frac{1}{i+1}\sum_{k=1}^{i+1}U(k,i+1)\right\} \qquad U(j,n)=j, j=1,\cdots,n$$

# 最优决策

数学建模

- 最优策略 $(s_n = n)$
  - 面试 $A_i$ 时，若 $y_i \le s_i$，则录用 $A_i$，否则继续面试 $A_{i+1}$
- 数值结果
  - $n = 4$ 时，$C_3 = \frac{5}{2}, C_2 = \frac{25}{12}, C_1 = \frac{15}{8}, C_0 = \frac{15}{8}$，$s_4 = 4, s_3 = 2, s_2 = 1, s_1 = 0$
  - 记 $\tau_n$ 为应聘者数量为 $n$ 时的最优名次期望 $\tau_{10} = 2.56, \tau_{100} = 3.60, \tau_{1000} = 3.83$
    - $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j+2}{j}\right)^{\frac{1}{j}+1} \approx 3.8695$




**Herbert Ellis Robbins**
**(1915-2001)**
美国数学家

**Courant R, Robbins H, *What Is Mathematics?An Elementary Approach to Ideas and Methods*, 1941年初版(中译本：左平、张饴慈译，复旦大学出版社2005年)**

**Chow YS, Moriguti S, Robbins H, Samuels SM, Optimal selection based on relative rank (the “secretary problem”), *Israel Journal of Mathematics*, 2, 81-90, 1964**

# 问题推广

数学建模

- 第四个**Secretary Problem**（**Robbins**问题）
  - 若 $A_i$ 的分布已知，招聘方录用一位应聘者，采用何种策略可使录用者绝对名次期望值尽可能小
- 其他推广
  - 招聘方拟录用某应聘者时，应聘者以 $p(0<p<1)$的概率接受聘用
  - 招聘方可以录用在当前面试者之前第 $r$个接受面试的应聘者，应聘者仍然接受聘用的概率为 $q(r)$，$q(r)$为 $r$的非增函数
  - 应聘者数目为一随机变量

**Freeman PR. The secretary problem and its extensions: A review. *International Statistical Review*, 51: 189-206, 1983.**


浙江大学
ZheJiang University
谢 谢