一、小剧场一排有n个座位。由于各排之间空隙较小，如果某座位已有人入座，则入座者必须起身才能让后来者通过该座位。若一与会者进入会场时该排有若干个座位可供其选择，则他以相等的概率选择其中一个座位就坐。

（1）若该排座位只有左侧一个入口，所有与会者一旦就坐就不愿起身让后来者通过。记E_n为该排最终入座人数的期望，试写出E_n满足的递推关系，并求E_n；

（2）若该排座位在左右两侧均有入口，所有与会者以p的概率起身让后来者通过，以$1-p$的概率不让后来者通过。记F_n为该排最终入座人数的期望，试写出F_n满足的递推关系。

二、n支球队进行比赛，每场比赛在两支球队之间进行，任意两支球队之间至多进行一场比赛，每支球队参与比赛的场数相同。记队i与队j比赛中，队i的得分为p_{ij}，队j的得分为p_{ji}，队i的分差为$q_{ij}=p_{ij}-p_{ji}$。与队i进行过比赛的球队集合记为T_i。约定$i\in T_i$，且$q_{ii}=0$。记$|T_1|=|T_2|=\cdots=|T_n|=l$。

A-B	5-10
A-D	57-45
B-C	10-7
C-D	3-10

（1）记s_i为队i在各场比赛中分差之和，即$s_i=\sum_{j\in T_i}q_{ij}$，$\mathbf{S}=(s_1,s_2,\cdots,s_n)^T$称为分差向量，可用来衡量各球队的实力。若四支球队之间的比赛结果如表所示，求向量$\mathbf{S}$；

（2）对任意$j\in T_i$，若$k\in T_j$，则称队i与队k之间进行了一场“二级比赛”，且在该场比赛中队i的分差为$q_{ij}+q_{jk}$。（队i可与自身进行二级比赛，队i与队j之间可以进行多场二级比赛）。记$s_i^{(2)}$为队i在所有可能的l^2场二级比赛中的分差之和，$\mathbf{S}^{(2)}=(s_1^{(2)},s_2^{(2)},\cdots,s_n^{(2)})^T$称为二级分差向量。对表中所示的比赛结果，求向量$\mathbf{S}^{(2)}$；

（3）定义矩阵$\mathbf{M}=(m_{ij})_{n\times n}$，其中$m_{ij}=\begin{cases}1, & 若\ j\in T_i,\\ 0, & 其他\end{cases}$，试给出由$\mathbf{M}$和$\mathbf{S}$计算$\mathbf{S}^{(2)}$的公式，并说明$\mathbf{M}^2$中各元素的含义。

（4）类似地，对任意整数r，可定义r级比赛和r级分差向量$\mathbf{S}^{(r)}$，试给出由$\mathbf{M}$和$\mathbf{S}$计算$\mathbf{S}^{(r)}$的公式。

三、某种硬币单枚质量为W克。现有N堆该种硬币，依次标记为$1,2,\cdots,N$。其中可能有若干堆，每堆均是伪币。所有伪币质量均相同，且不为W。伪币所在堆的指标集记为I。为求出I，现用一可精确测得质量的电子秤称量两次。第一次从每堆硬币中各取1枚，称得总质量为M_1克，第二次从第i堆硬币中取p^i枚，$i=1,2,\cdots,N$，称得总质量为M_2克，这里p为正整数（假设每堆硬币数量足够多）。

（1）试给出M_1,M_2和W的某个函数，其值仅与I和p有关，而与伪币的质量无关；

（2）为能用上述方法通过两次称量求出指标集I，p应满足什么条件？试给出某个满足条件的p值；并说明若取$p=2$，可能无法用上述方法通过两次称量求出I。

一、学校希望从n名学生中录取一名，学生以随机顺序逐个前来面试。通过面试可给出已面试者的综合素质高低顺序，某位学生是否被录取须在该学生面试后立即决定，在作出不录取决定后方能面试下一名学生。考虑到最优秀的学生可能在录取后选择其他学校，学校希望录取到所有考生中综合素质第二名的学生的概率尽可能大。

（1）分别记f_k和g_k为综合素质在前k名面试的学生中居于第一名和第二名的学生在所有学生中居于第二名的概率。求f_k和g_k；

（2）记v_k为不录取前k名学生后，采用最优策略可能录取到综合素质第二名的学生的概率的最大值。试写出v_k满足的递推关系；

（3）求v_k，并给出相应的最优策略。

二、一种体育彩票以A,B两队之间的r场比赛结果为竞猜对象，每场比赛有胜、负两种结果，投注时需竞猜所有场次的获胜队，每位彩民投注额均为1。比赛全部结束后，猜中场次最多的彩民平分全部投注额。若所有彩民猜中的场次数均相等，则投注额由所有彩民平分。

（1）设$r=1$，只有甲、乙两人投注。已知A获胜的概率为$a\ge\frac{1}{2}$，乙投注“A获胜”的概率为$p\in[0,1]$。分别求甲投注“A获胜”和“B获胜”时，他能获得的期望收益；

（2）设$r=1$，共有包括甲在内的$N+1$人投注。已知A获胜的概率为$a\ge\frac{1}{2}$，除甲外的其余N人投注“A获胜”的概率均为$p\in[0,1]$。试问a和p满足何种条件时，甲投注“A获胜”可使其期望收益较大；

（3）设$r=2$，共有包括甲在内的$N+1$人投注，N为一充分大的数。已知每场比赛A获胜的概率略大于$\frac{1}{2}$，除甲外的其余N人均投注“B获胜两场”。试问此时甲应如何投注可使其期望收益较大。

三、n支球队通过淘汰赛决出冠军。赛程分为r轮，第l轮共有m_l场比赛，$l=1,2,\cdots,r$，r和$m_1,m_2,\cdots,m_r$的值由赛制规定。每场比赛在两支球队间进行，比赛结果为一支球队获胜，一支球队落败，落败的球队被淘汰。同一轮中的各场比赛同时进行，一支球队不能参加同一轮的两场比赛，不同轮的比赛先后进行。每轮所有比赛的对阵双方在该轮开始前从所有当前未被淘汰的球队中以完全随机的方式选出。只有一支球队未被淘汰时赛程结束，该球队即为冠军。

记队i的水平值为v_i，$i=1,\cdots,n$，设队i与队j比赛时，队i获胜的概率为$\frac{v_i}{v_i+v_j}$，队j获胜的概率为$\frac{v_j}{v_i+v_j}$。记$n=2^s+k$，其中s,k为正整数，$0\le k<2^s$。设$v_1>v=v_2=\cdots=v_n>0$。

（1）试给出为保证赛制可行$m_1,m_2,\cdots,m_r$应满足的条件；

（2）问$n=4$时共有多少种不同的赛制。采用哪种赛制可使队1获得冠军的概率最大，采用哪种赛制可使队1获得冠军的概率最小；

（3）若$m_1=k$，求队1在第一轮结束后未被淘汰的概率f_1，若$m_1=j<k,m_2=k-j$，求队1在第二轮结束后未被淘汰的概率f_2，并证明$f_1-f_2>0$；

（4）证明：$r=s+1$且$m_1=k,m_l=2^{s-l+1},l=2,3,\cdots,s+1$的赛制对队$1$最为有利。

一、某地从某时起开始持续降雪，单位时间内降雪量为一定值。降雪一段时间后，一台扫雪车从一条直线型道路上的某处出发，沿道路行进清除积雪。假设扫雪车能清除所经过路面上宽为W的区域内的所有积雪，且每小时能清除的积雪量为常数K。

（1）以扫雪车出发时间为零时刻，分别记$x(t)$和$y(t)$为t时刻道路上积雪的厚度和扫雪车经过的距离。试写出$x(t)$和$y(t)$满足的微分方程；

（2）已知扫雪车出发后的第一个小时经过的距离为第二个小时经过的距离的两倍，求降雪开始的时间。

二、一商船试图逃避海盗追逐。记t时刻商船和海盗的位置分别为$(x_a(t), y_a(t))$与$(x_b(t), y_b(t))$，商船和海盗的速度分别为$v_a(t)$与$v_b(t)$，航向与 x 轴正向夹角分别为$\alpha(t)$与$\beta(t)$。在零时刻商船位于$(0,0)$处，海盗位于(x_0, y_0)处，其中$x_0 \ge 0, y_0 \le 0$。商船始终在第一象限内（含坐标轴正向）行驶，海盗可观测到商船的位置并随时调整航向。记$r(t)$为t时刻商船和海盗的距离，$\theta(t)$为t时刻连接商船和海盗的直线与 x 轴正向的夹角。

（1）试写出$x_a(t), y_a(t), x_b(t), y_b(t)$所满足的微分方程；

（2）为使$r(t)$减小最快，海盗应选择怎样的航向；

（3）若$v_a(t) \equiv v_a, v_b(t) \equiv \lambda v_a$，其中$\lambda$为参数，且海盗采用（2）中航向，试写出$r(t)$和$\theta(t)$所满足的微分方程；

（4）若$\alpha(t) \equiv 0$，且海盗采用（2）中航向，试写出$r(t)$和$\theta(t)$的关系，并在$\lambda = 1$时求出$r(t)$和$\theta(t)$。

三、一球状水滴，初始半径为$a \ge 0$，在$t = 0$时刻以初速度$v = 0$在重力作用下穿过均匀的云层下落，吸收水蒸气后仍保持球状，但半径逐渐增大。记t时刻水滴的质量、半径和速度分别为$m(t), r(t)$和$v(t)$，ρ为水的密度，g为重力加速度，空气阻力不计。

（1）假设单位时间内，水滴质量增加值与其表面积成正比，比例系数为c。试写出$r(t)$的表达式和$v(t)$满足的微分方程；求出$v(t)$的表达式，并证明$v(t) = \frac{gt}{4}\left(1 + \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^3}{r^3}\right)$。

（2）假设单位时间内，水滴质量增加值与其大圆面积和速度的乘积成正比，比例系数为k。试写出$r(t)$满足的微分方程。

一、某风电场现有风机 124 台，每台风机每天的发电量事先已知。为安全生产需要，风机每年需进行两次停机维护，两次维护之间的连续工作时间不超过 270 天。每台风机每次维护需一组维修人员连续工作 2 天。同时风电场每天需有一组维修人员值班以应对突发情况。风电场现有 4 组维修人员可从事值班或维护工作，每组维修人员连续工作时间（值班或维护）不超过 6 天。给出维修人员的排班方案与风机维修计划，使各组维修人员的工作任务相对均衡，且风电场具有较好的经济效益。试建立该问题的数学模型，并写出求解该问题的数学规划。

二、考虑如下的小游戏：玩家凭借一张地图，利用初始资金购买一定数量的水和食物（包括食品和其他日常用品），从起点出发，在沙漠中行走。途中会遇到不同的天气，也可在矿山、村庄补充资金或资源，目标是在规定时间内到达终点，并保留尽可能多的资金。试写出求解该问题的数学规划。

游戏的基本规则如下：

（1）以天为基本时间单位，游戏的开始时间为第 0 天，玩家位于起点。玩家必须在截止日期或之前到达终点，到达终点后该玩家的游戏结束。

（2）穿越沙漠需水和食物两种资源，它们的最小计量单位均为箱。每天玩家拥有的水和食物质量之和不能超过负重上限。若未到达终点而水或食物已耗尽，视为游戏失败。

（3）每天的天气为“晴朗”、“高温”、“沙暴”三种状况之一，沙漠中所有区域的天气相同。在整个游戏时段内每天天气状况事先全部已知。

（4）每天玩家可从地图中的某个区域到达与之相邻的另一个区域，也可在原地停留。沙暴日必须在原地停留。

（5）玩家在原地停留一天消耗的资源数量称为基础消耗量，行走一天消耗的资源数量为基础消耗量的2倍。

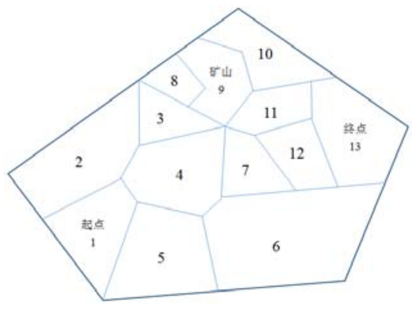
（6）玩家第 0 天可在起点处用初始资金以基准价格购买水和食物。玩家可在起点停留或回到起点，但不能多次在起点购买资源。

（7）玩家在矿山停留时，可通过挖矿获得资金，挖矿一天获得的资金量称为基础收益。如果挖矿，消耗的资源数量为基础消耗量的3倍；如果不挖矿，消耗的资源数量为基础消耗量。到达矿山当天不能挖矿。沙暴日也可挖矿。

（8）玩家经过或在村庄停留时可用剩余的初始资金或挖矿获得的资金随时购买水和食物，每箱价格为基准价格的 2 倍。

数据格式示例（数学规划需能解决一般情形）

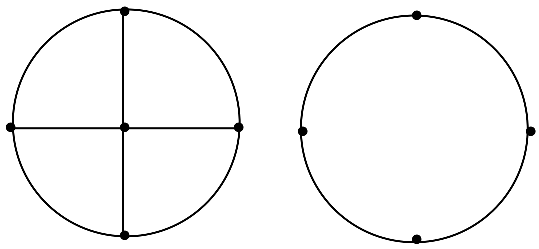
负重上限1200千克			初始资金10000元		
截止日期第10天			基础收益1000元		
资源	每箱质量（千克）	基准价格（元/箱）	基础消耗量（箱）		
			晴朗	高温	沙暴
水	3	5	5	8	10
食物	2	10	7	6	10



天气状况：

日期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
天气	高温	高温	晴朗	沙暴	晴朗	高温	沙暴	晴朗	高温	高温

一、考虑图上的**警察与小偷游戏**（cop and robber game）。给定连通无向图$G=(V,E)$。游戏开始前，每位警察先占据图中一个顶点，小偷再选择图中一个顶点。随后警察和小偷轮流行动，在每一轮中，所有警察先行动，小偷后行动。每次行动可沿图上一条边从一个顶点到达另一个顶点，也可原地不动。



警察和小偷都了解图的形状并能在行动前看到其他人的位置。若在某次行动后，某个警察和小偷位于同一顶点，则称警察抓获小偷。对某个图G，不论警察和小偷的初始位置为何以及小偷如何行动，警察总能采取相应的行动方案在有限轮后抓获小偷所需的最少警察数称为图G的警察数（cop-number），记为$c(G)$。

（1）分别求轮W_4和圈C_4的警察数；

（2）证明：若$c(G)=1$，必存在顶点u,w，使得$N(u)\cup\{u\}\subseteq N(w)\cup\{w\}$，这里$N(v)$是图中与$v$有边相连的顶点集；

（3）试通过建立该问题与图论中某问题的联系给出$c(G)$的一个上界；

（4）设在G中没有长度为 3 或 4 的圈，G的最小度$\delta(G)=d$。证明：（ i ）若警察数不超过$d-1$，则不论警察选择哪些顶点，小偷总可以选择某个顶点使得警察无法在第一轮抓获小偷；（ ii ）若警察数不超过$d-1$，小偷至第$t-1$轮警察行动后仍未被抓获，则他总可以采取某种行动，使得在第t轮仍未被抓获；（iii）$c(G)\ge\delta(G)$。

二、中世纪英国学者 Alcuin 在他的著作中给出了下面的过河问题。现有n件物品需用一艘船从河的左岸运至右岸。两件不同的物品之间可能存在排斥性，即它们不能同时位于河的一侧，除非此时船也在河的这一侧。用图$G=(V,E)$表示物品之间的排斥性。V中每个顶点表示一件物品，两个顶点之间有边相连当且仅当这两个顶点表示的物品是排斥的。所有物品和船的一种状态可用三元组(V_L,V_R,b)表示，其中V_L,V_R分别代表位于河左岸和右岸的物品集，且有$V_L\cup V_R=V$，$V_L\cap V_R=\varnothing$，$b\in\{左,右\}$表示船所在的位置。船从左岸到达右岸，或从右岸到达左岸的过程称为一次运输。每次运输时船至多装载k件物品，k称为船的容量。现要求给出一由多次运输组成的可行运输方案，将所有物品从左岸运到右岸。

（1）请用图论语言表示一次允许的运输过程导致的状态变化，进而完整描述上述问题。

（2）记$\beta(G)$为G的最小顶点覆盖所包含顶点的数目，k^*为G的 **Alcuin 数**，即存在可行运输方案时船容量的最小值，证明$\beta(G)\le k^*\le\beta(G)+1$。

（3）设X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2为V的子集，$X=X_1\cup X_2\cup X_3$，$Y=V\setminus X$，这些子集满足以下条件：

（ i ）X_1,X_2,X_3两两不交，X为G的独立集；

（ ii ）$|Y|\le k$，Y_1,Y_2为Y的非空子集；

（iii）$X_1\cup Y_1$和$X_2\cup Y_2$为G的独立集；

（iv）$|Y_1|+|Y_2|\ge|X_3|$

试设计一可行运输方案，并证明其运输次数不超过$2|V|+1$。

一、两位旅客乘坐某航空公司航班后各丢失一件行李。为协商赔偿数额，航空公司与他们约定如下方案。两人同时分别在纸上写下行李的估价 x_1, x_2，其中 $x_i, i=1,2$ 为整数且 $2 \le x_i \le B$，B 为某个整数。若 $x_1 = x_2$，则两位旅客均将获得数额为 x_1 的赔偿；若 $x_i > x_j$，其中 $i, j \in \{1,2\}$ 且 $i \ne j$，则写下 x_j 的旅客将获得 $x_j + k$ 的赔偿，而另一位写下 x_i 的旅客将获得 $x_j - k$ 的赔偿，这里 $k > 1$。试求出该博弈所有的纯策略 Nash 均衡。

二、城市某处公共设施发生损坏，n 位市民同时发现了这一情况。每位市民有两种策略，参与维修和视而不见。由于损坏程度较轻，只要有一人参与维修设施即可复原。设施复原对每位市民带来的收益均为 v，而参与维修的市民均付出代价 c。设 $v > c > 0$。

（1）试建立该问题的博弈模型，并求出所有纯策略意义下的 Nash 均衡。

（2）用 (p,q) 表示如下的混合策略：以概率 p 参与维修，以概率 $q = 1-p$ 视而不见。试分别求出第 $1,2,\cdots,n-1$ 位市民均采用策略 (p,q)，第 n 位市民采用纯策略“参与维修”和纯策略“视而不见”时他的期望收益。

（3）称一 Nash 均衡为**对称**的，若在该 Nash 均衡中，所有参与者采用的策略（纯策略或混合策略）均相同。求该博弈所有混合策略意义下的对称 Nash 均衡，并说明其结果反映了什么样的社会现象。

三、某委员会将就一草案进行表决，委员会组成人员中有 k 位支持，m 位反对。每位委员可以选择到现场按本人意愿投票，也可以选择弃权。若投支持票人数多于投反对票人数，则该草案获得通过；若投反对票人数多于投支持票人数，则该草案被否决；若投支持票人数与投反对票人数相等，则该草案延期再议。对支持该草案的委员，草案通过、延期再议、否决的收益分别为 2、1、0；对反对该草案的委员，草案通过、延期再议、否决的收益分别为 0、1、2。到现场投票的委员另需付出的投票成本为 $c, 0 < c < 1$。

（1）试分别求 $k = m$ 和 $k < m$ 时所有的纯策略 Nash 均衡；

（2）设 $k \le m$。考虑下面的局势：反对该草案的委员中有 k 位到现场投票，$m-k$ 位弃权；支持该草案的每一位委员均以概率 p 到现场投票。试分别求该局势下反对该草案的委员中到现场投票者和弃权者的期望收益；以及在其它 $k+m-1$ 位委员策略不变时，其中一位反对该草案的委员由到现场投票改为弃权，或由弃权改为到现场投票时他的期望收益；

（3）求 p 的值，使（2）中所述局势为一混合策略 Nash 均衡。

浙江大学 2021－2022 学年秋冬学期

《　　数学建模　　》课程专项练习

姓名：________________学号：________________所属院系：____________________

一、某航空公司计划在全国选择若干个机场组建基地。设在机场 j 组建基地所需费用为 $c_j, j=1,\cdots,n$。若该航空公司在机场 i 和机场 j 的基地组建完成，则可开通往返两地的航班并获得票款收益 $r_{ij}, 1\le i<j\le n$。该航空公司基地组建费用预算上限为 B，应选择在哪些机场组建基地才能使获得的票款收益最大。试写出该问题的数学规划。

二、考虑下面的设施选址问题。现有 n 个居民小区需提供某项服务，有 m 处地点可用于开设服务点。在地点 i 开设服务点所需开设费用为 f_i，$i=1,\cdots,m$。设置在地点 i 的服务点为小区 j 提供服务所需的运营费用为 c_{ij}，$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$。现需选择若干地点开设服务点，并确定每个服务点的服务对象，使每个小区至少有一个服务点为其提供服务，并且总费用最小。试写出该问题的数学规划。

三、给定图$G=(V,E)$，图的顶点着色问题要求给V中每个顶点着某一种颜色，且E中每一条边关联的两个顶点不着同一种颜色，并使得所用颜色数最少。试给出求解顶点着色问题的数学规划。

四、设有无向简单图$G=(V,E)$，边$v_iv_j \in E$的权记为w_{ij}。V的子集$S,\bar{S}$满足$V=S\cup\bar{S}$，$S\cap\bar{S}=\varnothing$。令$(S,\bar{S})$表示所有一个端点在S中，另一个端点在$\bar{S}$中的边的全体，称为G的**割**，$(S,\bar{S})$的权为$(S,\bar{S})$中所有边的权之和。求G的权最大的割的问题称为图的**最大割问题**（max cut）。试写出最大割问题的数学规划。

五、在数独游戏（Soduku）中，81 个方格排列成 9 行 9 列的方块，该方块可划分成 9 个小方块，每个小方块由相邻 3 行 3 列共 9 个方格构成。现要求在每个方格中填入$1,2,\cdots,9$共 9 个数字之一，使得每行、每列、每个小方块中填入的数字各不相同。为用数学规划求解数独游戏，定义决策变量

$$x_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{若第 } i \text{ 行第 } j \text{ 列方格所填数字为 } k,\\ 0, & \text{其他，}\end{cases} \quad i,j,k=1,2,\cdots,9 \text{。}$$

试写出求解该问题的数学规划。

六、现有一n行m列的棋盘，在棋盘的部分格子中各放有一颗麦子。现有一机器人从棋盘左上角的格子出发收集麦子。机器人只能从当前所在格子向下或向右移动一格，到达放有麦子的格子后，即能收集该格子中的麦子。现要求在机器人到达棋盘右下角的格子时，收集的麦子数量尽可能多。试给出求解该问题的多项式时间算法。

七、某同学有 T 天时间可用于复习 $n(n \le T)$ 门课程，每门课程至少需要一天时间复习，每天只能用于复习一门课程。设用 j 天复习课程 i 可使该门课程成绩提高 p_{ij} 分，$i = 1, \cdots, n,\ j = 1, \cdots, T - n + 1$。该同学应如何安排复习，可使所有课程的成绩提高总和尽可能大。

（1） 试写出求解该问题的整数规划；

（2） 试写出求解该问题的动态规划。

八、现有两个字母表 Σ 上的字符串 X, Y，通过在字符串中插入空格将它们变为长度相等的字符串 X', Y'，并比较 X' 和 Y' 中位于相同位置的字符。若相同位置两个字符不同，则称为一类误差；若两个字符一个为空格，另一个为非空格，则称为二类误差。若两个字符串所有位置出现的一类误差与二类误差总数分别为 n_1 和 n_2，两个字符串的 Needleman-Wunsch 误差定义为 $\alpha n_1 + \beta n_2$。例如对 AGGGCT 和 AGGCA 两个字符串，若在第二个字符串中插入空格使之成为 AGG－CA， Needleman-Wunsch 误差为 $\alpha + \beta$。序列比对问题（sequence alignment）希望给出一种空格插入方案，使两个字符串的 Needleman-Wunsch 误差最小。试给出求解该问题的动态规划，并估计其时间复杂度。

九、一单行道上有 n 个车位，按车行方向分别记为 $1,2,\cdots,n$。每个车位有空闲和占用两种状态，车位 i 空闲的概率为 $\alpha_i>0$，且各车位是否空闲相互独立。车辆行进时至多只能看到车行前方最近的一个车位的状态。若在车位 i 上停车的效用为 $U_i>0$，未在 n 个车位上停车的效用为 0。一车从该道路起点出发沿道路单向行驶，试寻找一停车策略，使期望效用达到最大。

（1）记 $V_i, i=1,\cdots,n+1$ 为驶过车位 $i-1$ 后（车位 0 为道路起点）开始计划停车所可能获得的最大期望效用，试写出 V_i 所满足的递推关系；

（2）令 $x_i=V_i-V_{i+1}$，$i=1,\cdots,n$，试写出求解该问题的以 x_i 为决策变量的数学规划。

十、滑雪场有 m 种不同大小的滑雪服，每种一套，尺码分别为 $l_1, l_2, \ldots, l_m$。现有 $n(\le m)$ 名选手前往租赁，他们的身高分别为 $h_1, h_2, \ldots, h_n$。现希望给出一种分配方案，使得每位选手身高与其获得的滑雪服尺码之差的绝对值之和尽可能小。

（1）证明：存在一个最优解，身高最高的选手获得的滑雪服是所有已被分配的滑雪服中尺码最大的；

（2）试写出求解该问题的动态规划，并估计其时间复杂度。