

# 浙江大学 2021 - 2022 学年秋冬学期

## 《 数学建模 》课程专项练习

姓名：\_\_\_\_\_ 学号：\_\_\_\_\_ 所属院系：\_\_\_\_\_

一、某航空公司计划在全国选择若干个机场组建基地。设在机场  $j$  组建基地所需费用为  $c_j, j = 1, \dots, n$ 。若该航空公司在机场  $i$  和机场  $j$  的基地组建完成，则可开通往返两地的航班并获得票款收益  $r_{ij}, 1 \leq i < j \leq n$ 。该航空公司基地组建费用预算上限为  $B$ ，应选择在哪些机场组建基地才能使获得的票款收益最大。试写出该问题的数学规划。

二、考虑下面的设施选址问题。现有  $n$  个居民小区需提供某项服务，有  $m$  处地点可用于开设服务点。在地点  $i$  开设服务点所需开设费用为  $f_i, i = 1, \dots, m$ 。设置在地点  $i$  的服务点为小区  $j$  提供服务所需的运营费用为  $c_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ 。现需选择若干地点开设服务点，并确定每个服务点的服务对象，使每个小区至少有一个服务点为其提供服务，并且总费用最小。试写出该问题的数学规划。

三、给定图  $G = (V, E)$ ，图的顶点着色问题要求给  $V$  中每个顶点着某一种颜色，且  $E$  中每一条边关联的两个顶点不着同一种颜色，并使得所用颜色数最少。试给出求解顶点着色问题的数学规划。

四、设有无向简单图  $G = (V, E)$ ，边  $v_i v_j \in E$  的权记为  $w_{ij}$ 。 $V$  的子集  $S, \bar{S}$  满足  $V = S \cup \bar{S}$ ， $S \cap \bar{S} = \emptyset$ 。令  $(S, \bar{S})$  表示所有一个端点在  $S$  中，另一个端点在  $\bar{S}$  中的边的全体，称为  $G$  的割， $(S, \bar{S})$  的权为  $(S, \bar{S})$  中所有边的权之和。求  $G$  的权最大的割的问题称为图的最大割问题（max cut）。试写出最大割问题的数学规划。

五、在数独游戏（Sudoku）中，81 个方格排列成 9 行 9 列的方块，该方块可划分成 9 个小方块，每个小方块由相邻 3 行 3 列共 9 个方格构成。现要求在每个方格中填入  $1, 2, \dots, 9$  共 9 个数字之一，使得每行、每列、每个小方块中填入的数字各不相同。为用数学规划求解数独游戏，定义决策变量

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{若第 } i \text{ 行第 } j \text{ 列方格所填数字为 } k, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad i, j, k = 1, 2, \dots, 9。$$

试写出求解该问题的数学规划。

六、现有一  $n$  行  $m$  列的棋盘，在棋盘的部分格子中各放有一颗麦子。现有一机器人从棋盘左上角的格子出发收集麦子。机器人只能从当前所在格子向下或向右移动一格，到达放有麦子的格子后，即能收集该格子中的麦子。现要求在机器人到达棋盘右下角的格子时，收集的麦子数量尽可能多。试给出求解该问题的多项式时间算法。

七、某同学有  $T$  天时间可用于复习  $n(n \leq T)$  门课程，每门课程至少需要一天时间复习，每天只能用于复习一门课程。设用  $j$  天复习课程  $i$  可使该门课程成绩提高  $p_{ij}$  分， $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, T - n + 1$ 。该同学应如何安排复习，可使所有课程的成绩提高总和尽可能大。

- (1) 试写出求解该问题的整数规划；
- (2) 试写出求解该问题的动态规划。

八、现有两个字母表  $\Sigma$  上的字符串  $X, Y$ ，通过在字符串中插入空格将它们变为长度相等的字符串  $X', Y'$ ，并比较  $X'$  和  $Y'$  中位于相同位置的字符。若相同位置两个字符不同，则称为一类误差；若两个字符一个为空格，另一个为非空格，则称为二类误差。若两个字符串所有位置出现的一类误差与二类误差总数分别为  $n_1$  和  $n_2$ ，两个字符串的 Needleman-Wunsch 误差定义为  $\alpha n_1 + \beta n_2$ 。例如对 AGGGCT 和 AGGCA 两个字符串，若在第二个字符串中插入空格使之成为 AGG — CA，Needleman-Wunsch 误差为  $\alpha + \beta$ 。序列比对问题（sequence alignment）希望给出一种空格插入方案，使两个字符串的 Needleman-Wunsch 误差最小。试给出求解该问题的动态规划，并估计其时间复杂度。

九、一单行道上有  $n$  个车位，按车行方向分别记为  $1, 2, \dots, n$ 。每个车位有空闲和占用两种状态，车位  $i$  空闲的概率为  $\alpha_i > 0$ ，且各车位是否空闲相互独立。车辆行进时至多只能看到车行前方最近的一个车位的状态。若在车位  $i$  上停车的效用为  $U_i > 0$ ，未在  $n$  个车位上停车的效用为  $0$ 。一车从该道路起点出发沿道路单向行驶，试寻找一停车策略，使期望效用达到最大。

(1) 记  $V_i, i = 1, \dots, n+1$  为驶过车位  $i-1$  后（车位  $0$  为道路起点）开始计划停车所可能获得的最大期望效用，试写出  $V_i$  所满足的递推关系；

(2) 令  $x_i = V_i - V_{i+1}, i = 1, \dots, n$ ，试写出求解该问题的以  $x_i$  为决策变量的数学规划。

十、滑雪场有  $m$  种不同大小的滑雪服，每种一套，尺码分别为  $l_1, l_2, \dots, l_m$ 。现有  $n (\leq m)$  名选手前往租赁，他们的身高分别为  $h_1, h_2, \dots, h_n$ 。现希望给出一种分配方案，使得每位选手身高与其获得的滑雪服尺码之差的绝对值之和尽可能小。

(1) 证明：存在一个最优解，身高最高的选手获得的滑雪服是所有已被分配的滑雪服中尺码最大的；

(2) 试写出求解该问题的动态规划，并估计其时间复杂度。