

Master 2 CSMI : EDP2
Rapport TP2
Résolution numérique de Saint-Venant

Romain Vallet

January 3, 2021

1 Question

Les codes programmant les résolutions numériques sont sur un github (https://github.com/ValletRomain/edp_2) sur la branche TP2.

Malheureusement, je n'ai pas eu le temps de les faire fonctionner correctement. Mes codes ne fournissent pas les bon résultats.

1.

Voici le graphique du solveur de Riemann :

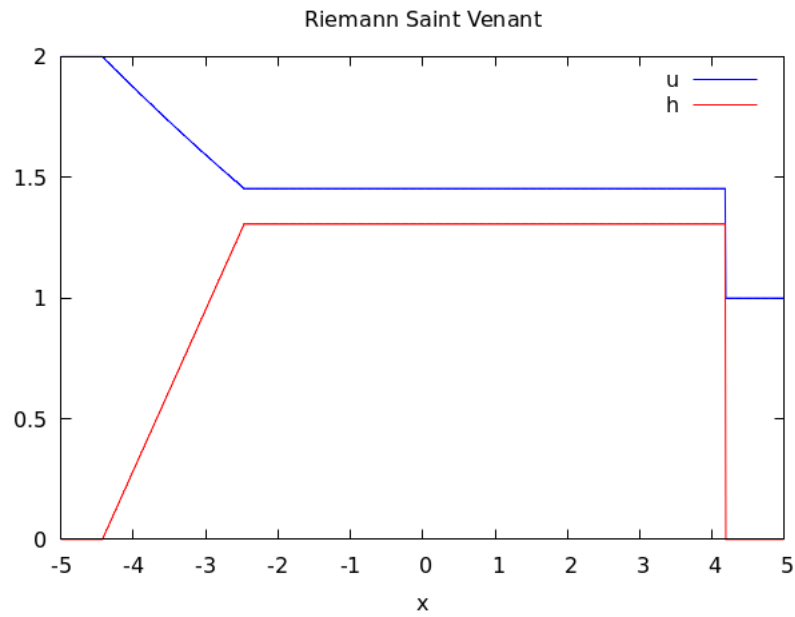


Figure 1: Solveur de Riemann

2.

Je vous présente mon résultat pour le problème mais il est loins d'être satisfaisant.

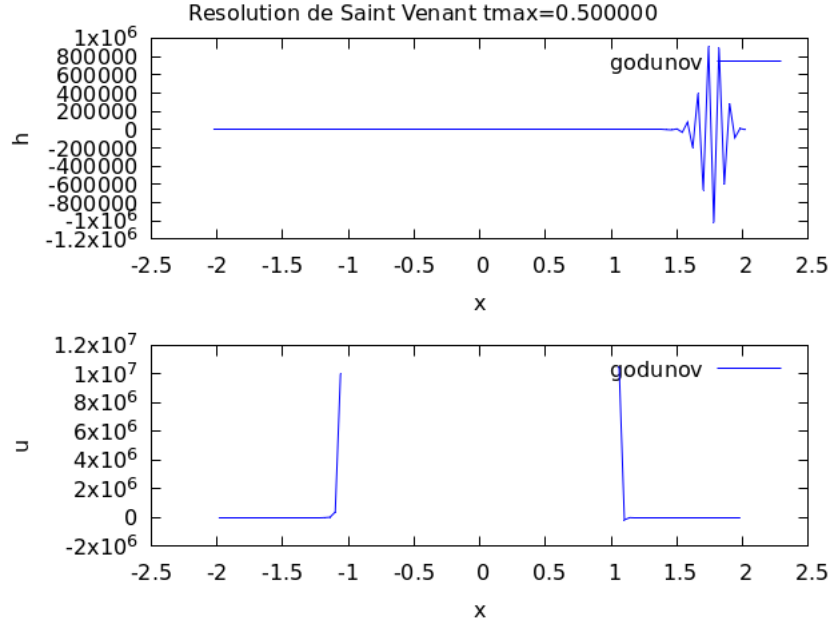


Figure 2: Résultat méthode de godunov (en premier h puis u)

3.

Nous pouvons poser comme conditions au bords :

$$\begin{cases} u_0^n = -u_1^n \\ h_0^n = h_1^n \\ u_N^n = -u_{N-1}^n \\ h_N^n = h_{N-1}^n \end{cases}$$

4.

5.

Nous posons $A(w) = f'(w) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{pmatrix}$

Avec les valeurs propres de $A(w)$: $\lambda_1(w) = u - \sqrt{gh}$ et $\lambda_2(w) = u + \sqrt{gh}$.

Nous posons la vitesse $\lambda = \max(\rho(A(w_L), \rho(A(w_R)))) = \max(|u_L| + \sqrt{gh_L}, |u_R| + \sqrt{gh_R})$

Le flux de Rusanov devient :

$$\begin{aligned} f(w_L, w_R) &= \frac{f(w_L) + f(w_R)}{2} - \frac{\lambda}{2}(w_R - w_L) \\ &= \left(\frac{\frac{h_L u_L + h_R u_R}{2} - \frac{\lambda}{2}(h_R - h_L)}{\frac{h_L u_L^2 + \frac{gh_L^2}{2} + h_R u_R^2 + \frac{gh_R^2}{2}}{2} - \frac{\lambda}{2}(h_R u_R - h_L u_L)} \right) \end{aligned}$$

6.

Nous remplaçons le solveur de Riemann exact par un solveur de Riemann approché.

Nous avons l'équation :

$$\partial_t y + B(y) \partial_x y = 0 \text{ avec } y = \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}, B(y) = \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}$$

Nous remplaçons l'équation du solveur de Riemann avec $\bar{y} = \frac{y_L + y_R}{2}$:

$$\begin{cases} \partial_t y + B(y) \partial_x y = 0 \\ y(x, 0) = \begin{cases} y_L & \text{si } x < 0 \\ y_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \partial_t y + B(\bar{y}) \partial_x y = 0 \\ y(x, 0) = \begin{cases} y_L & \text{si } x < 0 \\ y_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Pour résoudre cette nouvelle équation, nous supposons que $B = B(\bar{y})$ est diagonalisable $B = P^{-1}DP$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Donc, nous avons :

$$\begin{aligned} \partial_t y + P^{-1}DP \partial_x y &= 0 \\ \partial_t (Py) + D \partial_x (Py) &= 0 \end{aligned}$$

Résoudre le problème de Riemann simplifié revient à résoudre avec le changement de variable $z = Py = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \partial_t z + D \partial_x z &= 0 \\ \implies \begin{cases} \partial_t z_1 + \lambda_1 \partial_x z_1 = 0 \\ \partial_t z_2 + \lambda_2 \partial_x z_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Résoudre le problème de Riemann simplifié revient à résoudre deux problèmes de Riemann pour l'équation de transport en 1 dimension.

Le solveur de Riemann pour une équation de transport en 1 dimension s'écrit :

$$R(u_L, u_R, 0) = \frac{u_L + u_R}{2} - \frac{\text{sgn}(c)}{2} (u_R - u_L)$$

Nous pouvons reporter ce résultat pour l'équation de Saint-Venant, le solveur simplifié s'écrit :

$$\tilde{R}(y_L, y_R, 0) = \frac{y_L + y_R}{2} - \frac{\text{sgn}(B)}{2} (y_R - y_L)$$

Avec sgn tel que $\text{sgn}(B) = \text{sign}(P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P) = P^{-1} \begin{pmatrix} \text{sgn}(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \text{sgn}(\lambda_2) \end{pmatrix} P$

Pour le cas de l'équation de Saint-Venant :

$$B(\bar{y}) = \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{h} \\ g & \bar{u} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P$$

Avec :

- $\lambda_1 = \bar{u} - \sqrt{g\bar{h}}$
- $\lambda_2 = \bar{u} + \sqrt{g\bar{h}}$
- $P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\bar{h}} & \sqrt{\bar{h}} \\ \sqrt{\bar{g}} & \sqrt{\bar{g}} \end{pmatrix}$

Alors :

$$\text{sgn}(B(\bar{y})) = \begin{cases} I & \text{si } \lambda_1, \lambda_2 > 0 \\ -I & \text{si } \lambda_1, \lambda_2 < 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0 \end{cases}$$

Remarque : $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$ est impossible.

Le solveur de Riemann devient :

$$\tilde{R}(y_L, y_R, 0) \begin{cases} y_L & \text{si } \lambda_1, \lambda_2 > 0 \\ y_R & \text{si } \lambda_1, \lambda_2 < 0 \\ y^* & \text{si } \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Avec } y^* = \begin{pmatrix} \frac{h_L + h_R}{2} - \frac{\bar{h}}{2\sqrt{g\bar{h}}}(u_R - u_L) \\ \frac{u_R + u_L}{2} - \frac{g}{2\sqrt{g\bar{h}}}(h_R - h_L) \end{pmatrix}$$

Conclusion : le flux de la méthode VFRoe est $f(y_L, y_R) = \tilde{R}(y_L, y_R, 0)$.