О связности графа в мультипликативной модели

Рассмотрим мультипликативную модель случайного графа $G(n, \{\omega_i\})$, где:

- Каждой вершине i приписан вес $\omega_i \geq 0$ из распределения ω
- Вероятность наличия ребра между вершинами i и j равна $\omega_i \omega_j$

Теорема 1. *Если*

$$\mathbb{F}_\omega(x) = O\left(\frac{x^2}{|\ln x|^B}\right) \quad \textit{при } x \to 0, \textit{ то}$$

$$\mathbb{P}(G(n, \{\omega_i\}) \textit{ связен}) \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Доказательство. Найдём вероятность того, что $\forall i : \omega_i > q$:

$$\mathbb{P}\left[\omega_1 > q, ..., \omega_n > q\right] = (\mathbb{P}[\omega > q])^n = (1 - \mathbb{F}_\omega(q))^n$$

Пусть $q = \sqrt{\frac{c \cdot \ln n}{n}}$, $c > 1$. Тогда

$$(1 - \mathbb{F}_\omega(q))^n = \left(1 - \mathbb{F}_\omega\left(\sqrt{\frac{c \cdot \ln n}{n}}\right)\right)^n = \left(1 - O\left(\frac{\frac{c \cdot \ln n}{n}}{\left|\ln \sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right|^B}\right)\right)^n$$

Прологарифмируем:

$$\ln\left[(1 - \mathbb{F}_\omega(q))^n\right] = n \cdot \ln\left(1 - O\left(\frac{\frac{c \cdot \ln n}{n}}{\left|\ln \sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right|^B}\right)\right)$$

Используя асимптотику $\ln(1 - x) \sim -x$ при $x \to 0$, получаем:

$$n \cdot \ln\left(1 - O\left(\frac{\frac{c \cdot \ln n}{n}}{\left|\ln \sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right|^B}\right)\right) = -O\left(\frac{c \cdot \ln n}{\left|\ln \sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right|^B}\right) + o\left(\frac{c \cdot \ln n}{\left|\ln \sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right|^B}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c\cdot\ln n}{\left|\ln\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right|^B}\right)\sim\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{\left|\ln\ln n-\ln n\right|^B}\right)=\begin{cases}const, B=1\\ \infty, B<1\\ 0, B>1\end{cases}$$

Следовательно, при B > 1:

$$(1-\mathbb{F}_\omega(q))^n=\exp -O\left(\frac{c\cdot\ln n}{\left|\ln\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right|^B}\right)+o\left(\frac{c\cdot\ln n}{\left|\ln\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right|^B}\right)\xrightarrow{n\to\infty}1.$$

Таким образом,

$$\mathbb{P}\left[\omega_1>q,...,\omega_n>q\right]\to 1$$

Вспомним модель Эрдёша—Реньи $G(n,p)$, в которой вероятности появления рёбер фиксированы и равны p. Заметим, что вероятность связности в мультипликативной модели с ограниченными снизу весами $(\omega_i>q)$ не меньше, чем вероятность связности графа в модели Эрдёша—Реньи $G(n,q^2)=G\left(n,\frac{c\cdot\ln n}{n}\right)$.

Для такой модели известно, что при $n\to\infty$:

$$\mathbb{P}\left(G\left(n,\frac{c\cdot\ln n}{n}\right)\text{ связен}\right)\xrightarrow{n\to\infty}1$$

Следовательно,

$$\mathbb{P}(G(n,\{\omega_i\})\text{ связен})\xrightarrow{n\to\infty}1$$

$\square$