# Polinômios de Legendre

Israel P. Siqueira

August 23, 2016

Instituto de Física - UNB

# Equação de Legendre

# Equação de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

Equação diferencial de ordem 2 que aparece recorrentemente na solução de vários problemas físicos:

- Eletrodinâmica
- Mêcanica Quântica
- Equação de Laplace em coordenadas esféricas

A Solução desta equação é dada na forma dos Polinômios de Legendre.

# Polinômios de Legendre

Para encontrar a solução na forma dos Polinômios temos duas alternativas:

- Solução direta pelo método de série de potências
- Através de uma função geratriz

Primeiramente supomos uma solução do tipo:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

Substituindo na equação de Legendre podemos obter a relação de recorrência:

$$a_{j+2} = \frac{j(j+1) - \lambda}{(j+1)(j+2)} a_j$$

onde fazemos $a_0 \neq 0$ e $a_1 = 0$ para obter uma solução par e $a_0 = 0$ e $a_1 \neq 0$ para obter uma solução impar.

Aplicando um teste de convergência nesta série vemos que ela é convergente para $|x| < 1$ e falha quando $|x| = 1$

# Solução - Série de Potências

Para ter uma solução que converge nos extremos do intervalo precisamos ”truncar” a série, construindo um polinômio. Para truncar a série cujos coeficientes estão relacionados por uma fórmula de recorrência como a anterior devemos escolher:

$$\lambda = n(n+1)$$

Este polinômio é chamado de Polinômio de Legendre de ordem n e é simbolizado por $P_n(x)$.

# Solução - Série de Potências

Usualmente fazemos o polinômio de ordem mais alta ser dado por:

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

de modo que:

$$a_{n-2} = \frac{-n(n-1)}{2(2n-1)} a_n = -\frac{n(n-1)(2n)!}{2(2n-1)! 2^n (n!)^2} = -\frac{(2n-2)!}{2^n (n-1)!(n-2)!}$$

$$a_{n-4} = \frac{(2n-4)!}{2^n (n-2)!(n-4)!}$$

como podemos ver de modo geral, teremos:

$$a_{n-2k} = (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

assim a expressão final para o nosso Polinômio de Legendre fica:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

# Função Geratriz

Assim como outras funções especiais, os Polinômios de Legendre possuem uma função geratriz associada a eles, dada por:

$$g(x,t) = \frac{1}{(1-2xt+t^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

Derivando os dois lados em relação a **t** temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(x,t) = \frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}$$

Multiplicando os dois lados por $(1-2xt+t^2)$ e substituindo na função geratriz temos:

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - (t-x)\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)t^n = 0$$

expandindo os termos temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} + t^2\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}$$
$$-t\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n + x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0$$

# Função Geratriz

Reorganizando os indices e fatorando a expressão:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x)]t^n = 0$$

de onde obtemos a seguinte relação de recorrência:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = x(2n+1)P_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

Podemos reescrever esta euquação da forma:

$$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x) - \frac{1}{n+1}[xP_n(x) - P_{n-1}(x)]$$

# Outras relações de recorrência

$$(n+1)P_{n+1}(x) = x(2n+1)P_n(x) - nP_{n-1}(x) \tag{1}$$

$$P'_n(x) - 2xP'_{n-1}(x) + P'_{n-2}(x) = P_{n-1}(x) \tag{2}$$

$$(x^2-1)P'_n(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x) \tag{3}$$

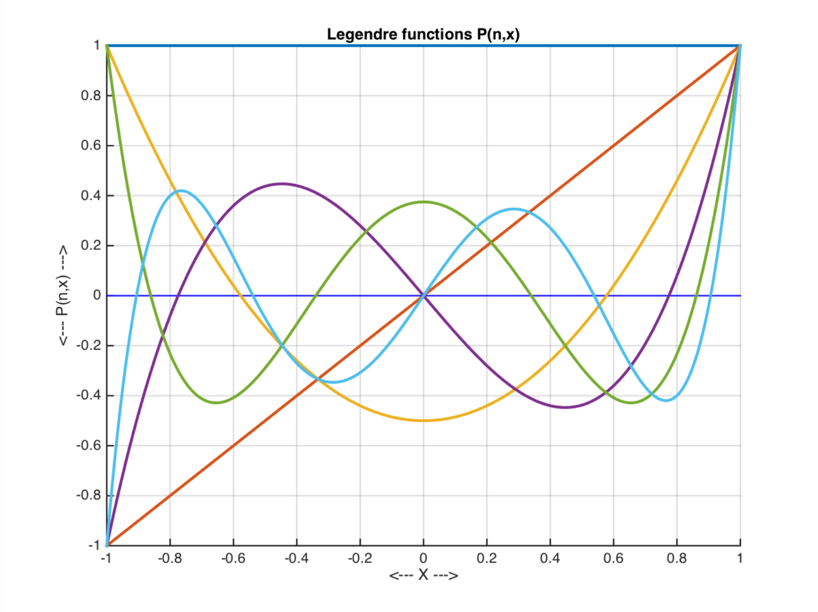
$$P'_{n-1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x) \tag{4}$$

# Tabela dos Polinômios de Legendre

**Table 1:** Polinômios de Legendre

| $P_n(x)$ | |
|---|---|
| $P_0(x) =$ | $1$ |
| $P_1(x) =$ | $x$ |
| $P_2(x) =$ | $\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ |
| $P_3(x) =$ | $\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ |
| $P_4(x) =$ | $\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$ |
| $P_5(x) =$ | $\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$ |

# Polinômios de Legendre



Com o propósito de testes de desempenho foi desenvolvido 3 algoritimos em python, cada um implementando uma das 3 relações de recorrência, os resultados estão na tabela abaixo:

**Table 2:** Polinômios de Legendre

| | |
|---|---|
| $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$ | 161 µs por iteração |
| $(n+1)P_{n+1}(x) = x(2n+1)P_n(x) - nP_{n-1}(x)$ | 39.3 µs por iteração |
| $P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x) - \frac{1}{n+1}[xP_n(x) - P_{n-1}(x)]$ | 15.8 µs per iteração |

# Referências


- Física Matemática, ARFKEN, George B., 2007
- Física Matemática, LSF, Olavo, 2016