Método interativo de Jacobi

solução de sistemas lineares

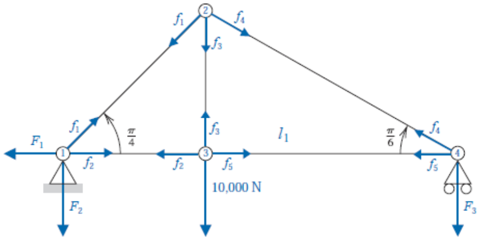
Israel P. Siqueira

September 6, 2016

Instituto de Física
Universidade de Brasília

Introdução

Motivação



①	$-F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} f_1 + f_2 = 0$	$\frac{\sqrt{2}}{2} f_1 - F_2 = 0$
②	$-\frac{\sqrt{2}}{2} f_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} f_4 = 0$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} f_1 - f_3 - \frac{1}{2} f_4 = 0$
③	$-f_2 + f_5 = 0$	$f_3 - 10{,}000 = 0$
④	$-\frac{\sqrt{3}}{2} f_4 - f_5 = 0$	$\frac{1}{2} f_4 - F_3 = 0$

Sistemas lineares podem ser escritos na forma:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Solução de Sistemas Lineares

Existem diversas formas de resolver um Sistema, entre elas podemos destacar:

- Substituição
- Eleminação Gaussiana
- Método de Jacobi
- Gauss-Seidel

Método de Jacobi

Método de Jacobi

O Método de Jacobi é baseado no método iterativo de ponto fixo para solução de raizes de equações, consiste em escrever um sistema *n x n* de equações na forma matricial:

$$A\mathbf{x} = c$$

e começar com um vetor $x_{(0)}$ e através de aproximações sucessivas o vetor $x_{(n)}$ irá convergir para a solução do problema.

Método de Jacobi

Primeiramente reescrevemos a matriz da forma:

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(-\frac{a_{ij}x_i}{a_{ii}}\right) + \frac{b_i}{a_{ii}} \tag{1}$$

para encontrar **x** basta chutar o vetor inicial e resolver para cada equação separadamente.

Exemplo

Exemplo

Pegamos o sistema dado por:

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 6 \\ -x_1 + 11x_2 = 25 \end{cases}$$

E reescrevemos de acordo com a equação (1) para obter:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_2}{10} + \frac{3}{5} \\ x_2 = \frac{x_1}{11} + \frac{25}{11} \end{cases}$$

fazendo $x_{(0)} = (0, 0)$ obtemos que $x_1 = \frac{3}{5}$ e $x_2 = \frac{25}{11}$
fazemos agora $x_{(1)} = (\frac{3}{5}, \frac{25}{11})$ e assim sucessivamente até obter a precisão desejada.

Gauss-Seidel

O algoritimo de Gauss-Seidel é muito similar ao algoritimo de Jacobi, tem sua convergência acelerada por usar a solução de x_i nos calculos de x_{i+1}

References I

Burden, R.L. and Faires J.D, Numerical Analysis