Método interativo de Gauss-Seidel

Resolução de sistemas lineares

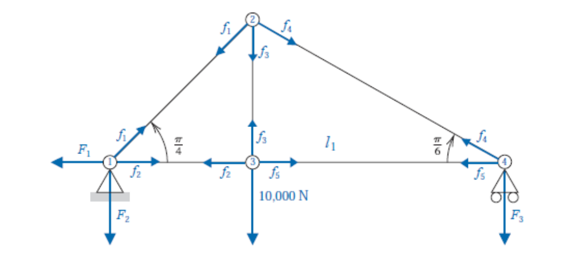
Israel P. Siqueira

September 13, 2016

Instituto de Física
Universidade de Brasília

Introdução

Motivação



①	$-F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} f_1 + f_2 = 0$	$\frac{\sqrt{2}}{2} f_1 - F_2 = 0$
②	$-\frac{\sqrt{2}}{2} f_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} f_4 = 0$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} f_1 - f_3 - \frac{1}{2} f_4 = 0$
③	$-f_2 + f_5 = 0$	$f_3 - 10{,}000 = 0$
④	$-\frac{\sqrt{3}}{2} f_4 - f_5 = 0$	$\frac{1}{2} f_4 - F_3 = 0$

Sistemas Lineares

Sistemas lineares podem ser escritos na forma:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Solução de Sistemas Lineares

Existem diversas formas de resolver um Sistema, entre elas podemos destacar:

- Substituição
- Eleminação Gaussiana
- Método de Jacobi
- Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel

O Método de Gauss-Seidel é baseado no método de Jacobi, um aprimoramento deste para tentar uma convergência mais rápida do sistema linear. O método consiste em chutar apenas o valor de x_1 e usar este valor aproximado para calcular x_j

Método de Gauss-Seidel

No método de jacobi reescrevemos a matriz da forma:

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(-\frac{a_{ij}x_i}{a_{ii}}\right) + \frac{b_i}{a_{ii}} \tag{1}$$

E 'chutamos' um vetor inicial da forma $\mathbf{x} = [x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots x_{(n)}]$ a cada iteração um novo vetor é calculado até convergir (ou não) para a solução do problema.

Método de Gauss-Seidel

No método de Gauss-Seidel reescrevemos a matriz da forma:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[-\sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij} x_j^{(k)}) - \sum_{j=i+1}^{n} (a_{ij} x_j^{(k-1)}) + b_i \right],$$

Desta forma precisamos apenas 'chutar' o valor de x_1 e a cada iteração calculamos o próximo x_i usando os valores anteriores.

Exemplo

Exemplo

Pegamos o sistema dado por:

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 6 \\ -x_1 + 11x_2 = 25 \end{cases}$$

E reescrevemos de acordo com a equação (1) para obter:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_2}{10} + \frac{3}{5} \\ x_2 = \frac{x_1}{11} + \frac{25}{11} \end{cases}$$

fazendo $x_1 = 0$ obtemos que $x_1 = \frac{3}{5}$, substituindo na equação para x_2 temos que $x_2 = \frac{128}{55}$
e usamos o novo valor de x_2 para calcular x_1 e assim sucessivamente até obter a precisão desejada.

Gauss-Seidel

O algoritimo de Gauss-Seidel é muito similar ao algoritimo de Jacobi e tem sua convergência acelerada por usar a solução de x_i nos calculos de x_{i+1} mas apesar de na grande maioria dos casos o algoritimo de Gauss-Seidel seja superior ao de Jacobi em alguns casos ele falha enquanto o de Jacobi converge.

Exemplo

O sistema dado por:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

O Método de Gauss-Seidel falha após 25 iterações enquanto o método de Jacobi converge.

References I

Burden, R.L. and Faires J.D, Numerical Analysis