



ACADEMIA
DA ENGENHARIA
DE AVALIAÇÕES

Curso de Fatores

Fatores Aditivos Fundamentados

Luiz Droubi

Academia da Engenharia de Avaliações

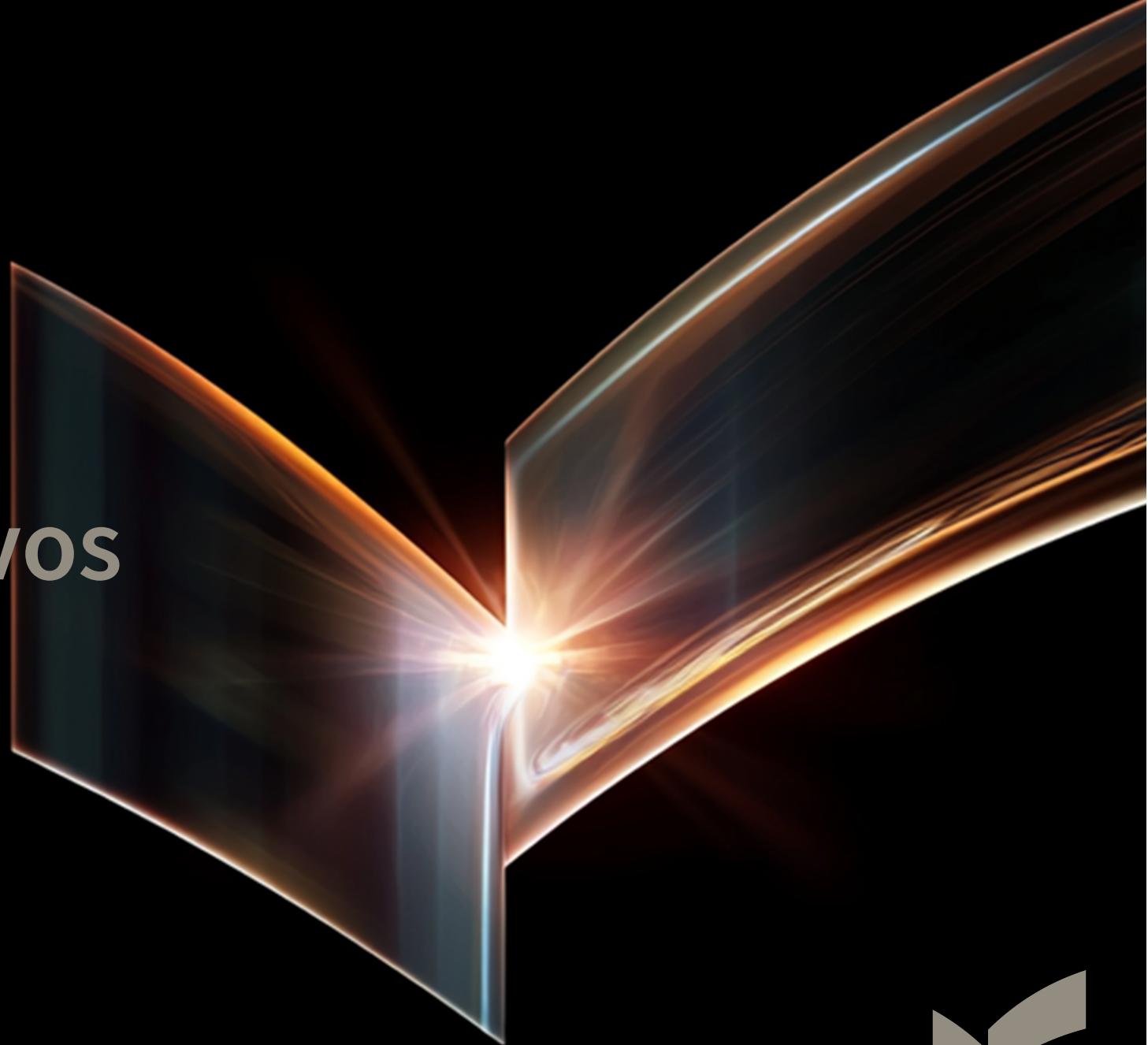
25 de julho de 2025

Índice

- Fatores Aditivos
- Exemplo
- Conclusão



Fatores Aditivos



Introdução

- Os fatores multiplicativos derivam de um modelo multiplicativo
 - $\widehat{PU} = \exp(\hat{\beta}_0) \cdot \exp(\hat{\beta}_1)^{X_1} \cdot \dots \cdot \exp(\hat{\beta}_k)^{X_k}$
- Da mesma maneira, os fatores aditivos, devem ser derivados de um modelo aditivo
 - $\widehat{PU} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \dots + \hat{\beta}_k X_k$
- Apesar dos erros no mercado imobiliário dificilmente aparecerem na forma aditiva
 - Não podemos sustentar que nenhum mercado imobiliário apresentam erros multiplicativos
- Ainda, existem técnicas que permitem o ajustamento de modelos com erros não-constantes
 - Ressuscitando MQP: Romano e Wolf (2017)
 - MQP na Engenharia de Avaliações: Droubi e Florencio (2024)



Introdução

- Trabalhar na escala original (PU) tem algumas vantagens
 - Ausência de distorções devido às transformações
 - Desnecessidade de retransformação da variável
 - Facilidade de interpretação dos coeficientes



Derivação de Fatores Aditivos



- Como bem observou Lima (2006), se na avaliação por fatores aditivos, temos:

■

$$\widehat{PU}_i = \overline{PU}_{hom} \cdot [1 + (F_{1i} - 1) + (F_{2i} - 1) + \dots + (F_{ki} - 1)]$$

- E na avaliação por regressão múltipla, temos:

■

$$\widehat{PU}_i = \hat{\beta}_0 . + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \dots + \hat{\beta}_k X_{ki}$$

-

$$\therefore \begin{cases} \hat{\beta}_0 = \overline{PU}_{hom} \\ F_{1i} = \hat{\beta}_1 / \hat{\beta}_0 . X_{1i} \\ F_{2i} = \hat{\beta}_2 / \hat{\beta}_0 . X_{2i} \\ \dots \\ F_{ki} = \hat{\beta}_k / \hat{\beta}_0 . X_{ki} \end{cases}$$

- Porém, quem disse que $\hat{\beta}_0 = \overline{PU}_{hom}$?

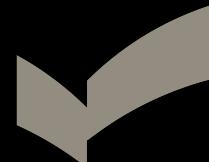
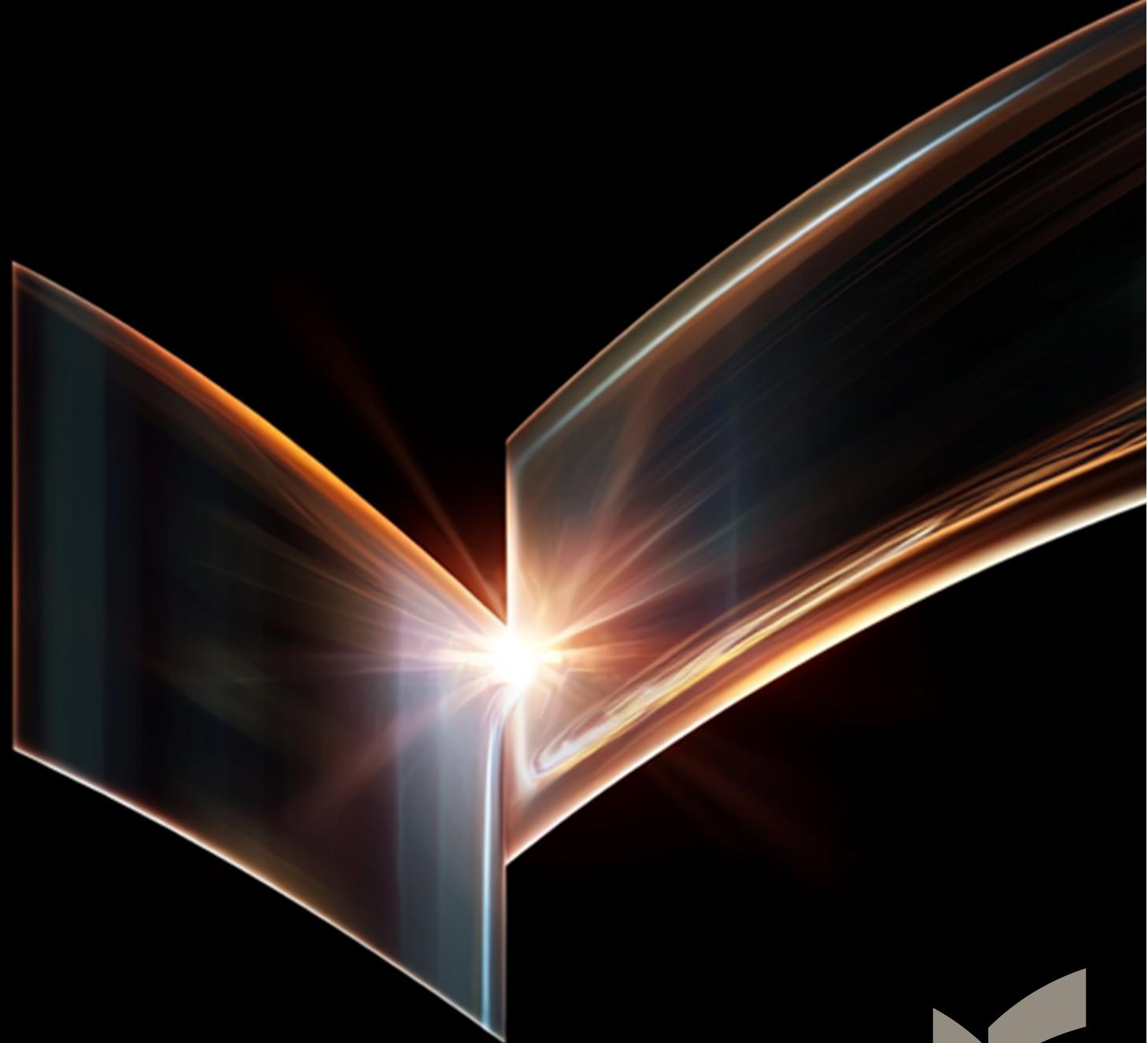


Derivação de Fatores Aditivos

- $\hat{\beta}_0 = \overline{PU}_{hom} \Leftrightarrow$ as variáveis explicativas estiverem centralizadas!



Exemplo



Dados

PT	PU	AP	PC	Idade	Ano	Vagas	Suites	DBM
497.080,8	5.585,18	89	Medio	17	_2018	1	1	685,00
675.000,0	9.782,61	69	Alto	10	_2018	2	1	412,36
260.100,0	2.737,89	95	Baixo	33	_2018	1	1	1.306,25
269.910,0	6.426,43	42	Baixo	27	_2018	1	0	925,64
315.000,0	4.256,76	74	Baixo	19	_2018	1	0	1.341,19
405.000,0	11.911,76	34	Baixo	15	_2018	1	0	343,16
409.500,0	4.178,57	98	Medio	30	_2018	1	1	1.239,75
495.000,0	2.964,07	167	Baixo	34	_2018	1	2	700,60
504.000,0	4.000,00	126	Baixo	31	_2018	1	1	1.172,53
513.000,0	6.840,00	75	Medio	33	_2018	1	2	83,95
247.500,0	3.214,29	77	Baixo	27	_2018	0	0	1.203,46
1.143.000,0	7.828,77	146	Alto	15	_2018	2	1	63,80
315.000,0	5.727,27	55	Baixo	30	_2018	1	0	82,83

PT	PU	AP	PC	Idade	Ano	Vagas	Suites	DBM
792.000,0	6.545,45	121	Alto	26	_2018	1	1	279,74
1.174.509,0	15.454,07	76	Medio	6	_2018	1	1	115,80



Modelo Aditivo

Termo	Est.	Erro	Est. t	p-valor	IC (80%)	
					Inf.	Sup.
(Intercept)	12.792,55	1.708,38	7,49	0,00	10.589,32	14.995,79
PCMedio	2.446,29	518,66	4,72	0,00	1.777,40	3.115,19
PCAlto	6.194,09	652,25	9,50	0,00	5.352,91	7.035,27
Ano_2022	3.615,43	357,41	10,12	0,00	3.154,49	4.076,36
log(Idade)	-1.057,00	234,69	-4,50	0,00	-1.359,67	-754,33
log(AP)	-1.245,31	439,01	-2,84	0,01	-1.811,48	-679,14

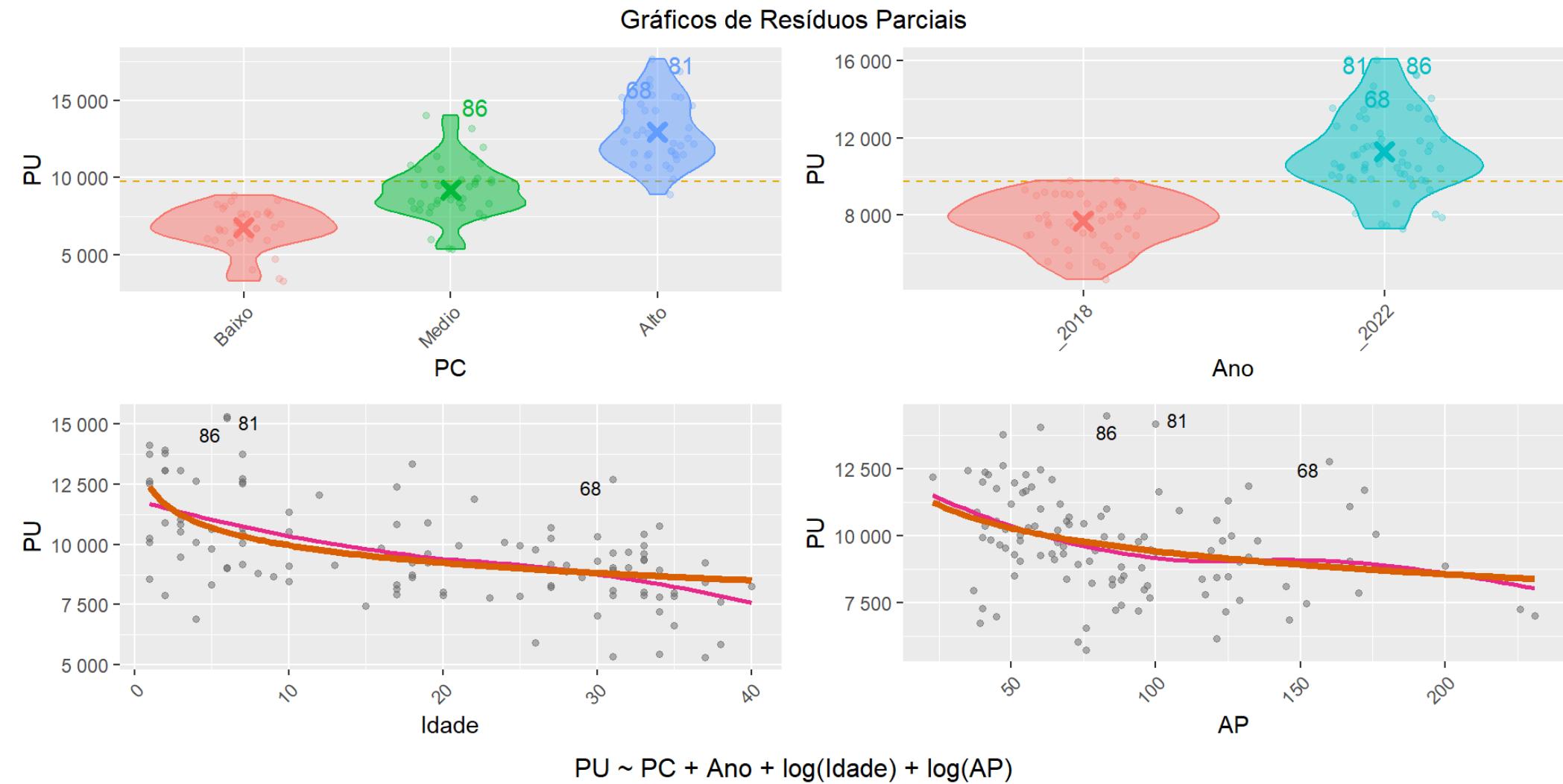
^a Dados: 111

^b R2: 0,84

^c R2aj: 0,84

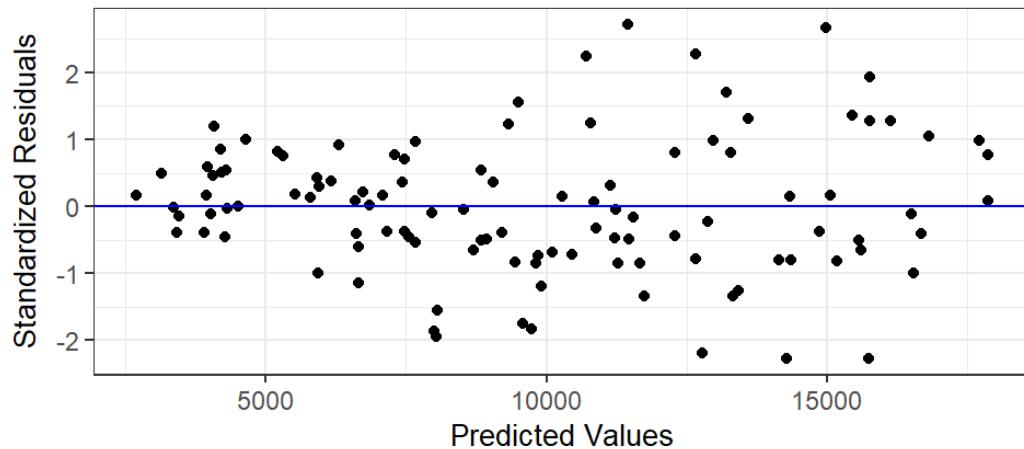


Gráficos do Modelo

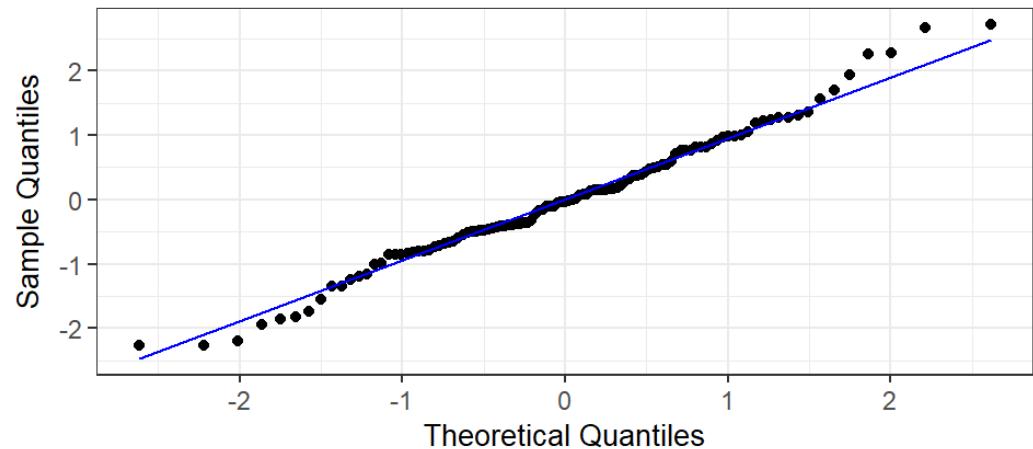


Diagnóstico do Modelo

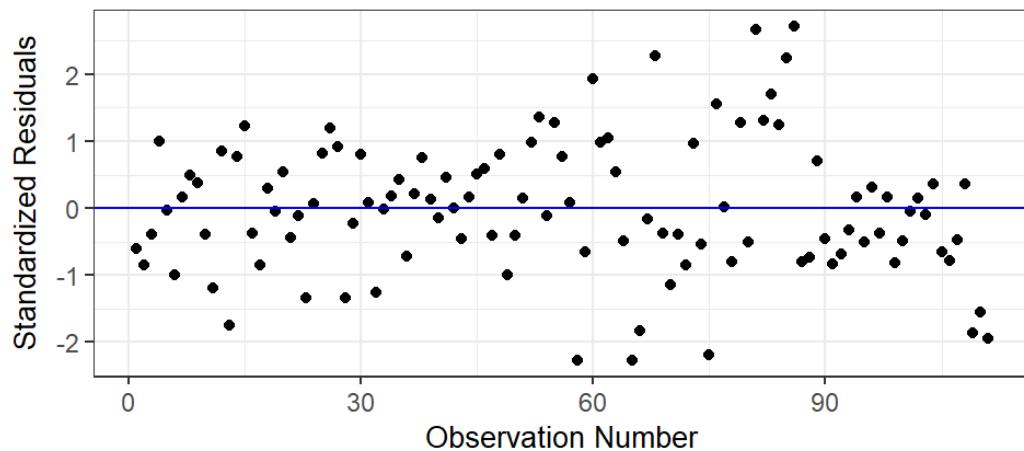
Residual Plot



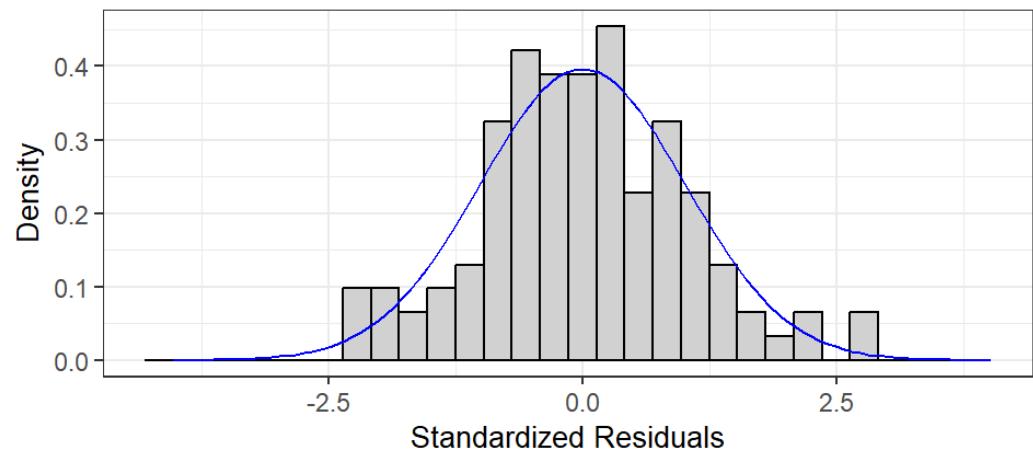
Q-Q Plot



Index Plot



Histogram



Modelo Aditivo Ponderado

- Aplicando pesos para um melhor ajuste:

Termo	Est.	Erro	Est. t	p-valor	IC (80%)	
					Inf.	Sup.
(Intercept)	13.640,28	1.428,26	9,55	0	11.798,30	15.482,26
PCMedio	2.308,43	411,96	5,60	0	1.777,13	2.839,73
PCAalto	5.842,87	547,35	10,67	0	5.136,97	6.548,77
Ano_2022	3.486,96	294,10	11,86	0	3.107,67	3.866,25
log(Idade)	-1.165,63	203,11	-5,74	0	-1.427,58	-903,69
log(AP)	-1.329,49	360,22	-3,69	0	-1.794,05	-864,93

^a Dados: 111

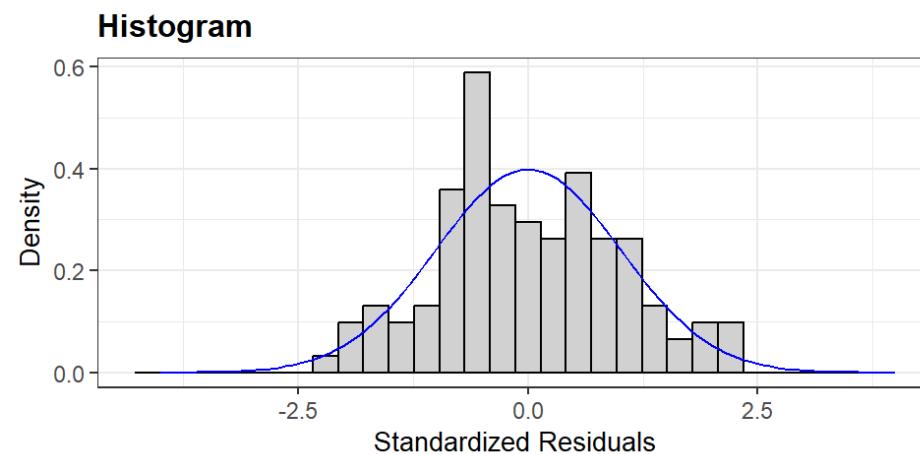
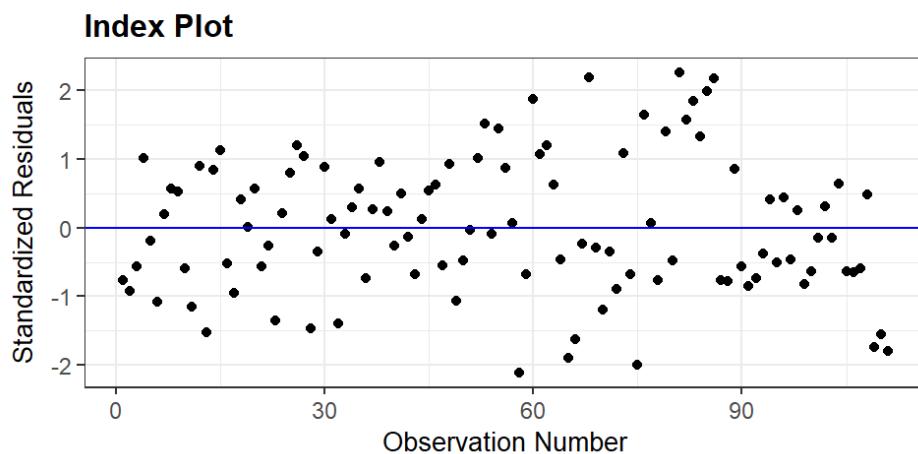
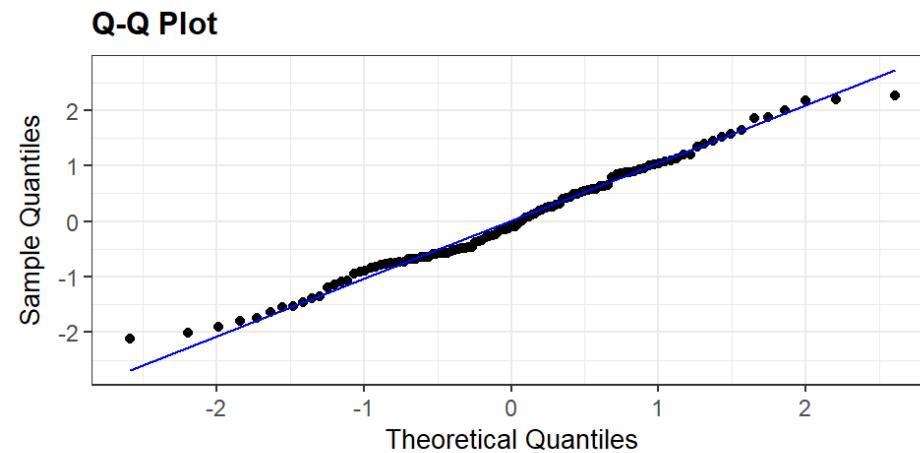
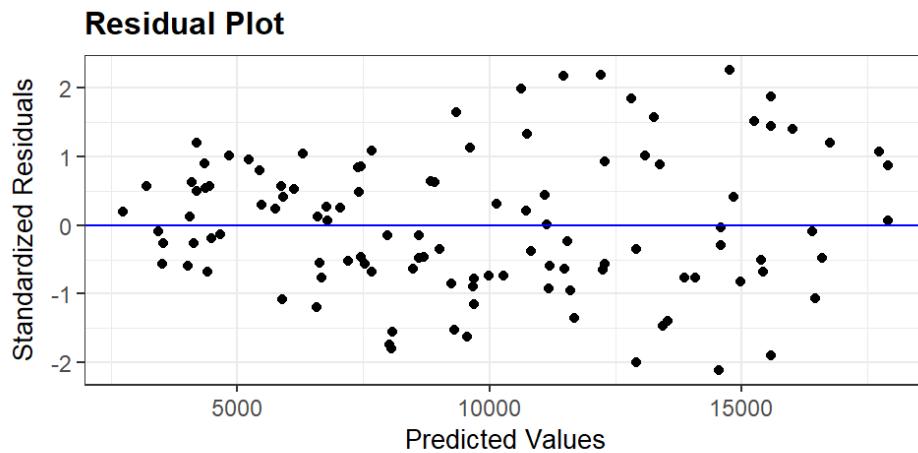
^b R2: 0,89

^c R2aj: 0,88

- Observe-se a melhora no R^2 !



Diagnóstico do Modelo Aditivo Ponderado



- Melhor pero no mucho!
 - Aceitável!



Modelo Aditivo Ponderado Centralizado

Termo	Est.	Erro	Est. t	p-valor	IC (80%)	
					Inf.	Sup.
(Intercept)	4.833,79	413,56	11,69	0	4.300,44	5.367,14
PCMedio	2.308,43	411,96	5,60	0	1.777,13	2.839,73
PCAalto	5.842,87	547,35	10,67	0	5.136,97	6.548,77
Ano_2022	3.486,96	294,10	11,86	0	3.107,67	3.866,25
log(Idade/10)	-1.165,63	203,11	-5,74	0	-1.427,58	-903,69
log(AP/100)	-1.329,49	360,22	-3,69	0	-1.794,05	-864,93

^a Dados: 111

^b R2: 0,89

^c R2aj: 0,88



Interpretação das variáveis



- Para uma derivação formal dos fatores, podem ser utilizadas as derivadas parciais da equação de regressão em relação a cada termo.
-

$$PU = 4.833,8 + 2.0308,4 \cdot PCMedio + 5.842,9 \cdot PCAuto + 3.487,0 \cdot Ano2022 - 1.065,6 \cdot \ln(Idade/10) - 1.329,5 \cdot \ln(AP/100)$$

- $\overline{PU}_{Hom} = 4.833,80$
- Para a variável *Ano*:
 -
- $$\frac{\partial PU(PC, Ano, Idade, AP)}{\partial Ano} = \frac{\partial 3.487,0 \cdot Ano}{\partial Ano} = 3.487$$
- $\therefore \delta PU = 3.039.\delta Ano$
 - Ou seja: se a var. *Ano* passa de 2018 (nível de referência) para 2022, então o PU aumenta em R\$ 3.487,0/m².



Interpretação das variáveis (2)

- Para a variável *Idade*:

$$\frac{\partial PU(PC, Ano, Idade, AP)}{\partial Idade} = \frac{\partial -1.065,6 \cdot \ln(Idade/10)}{\partial Idade} = -\frac{1.065,6}{Idade}$$

- $\therefore \delta PU = -1.065,6 \cdot \delta Idade$
- Ou seja, se a Idade do avaliado varia 1 ano, para 11 anos ($\delta Idade = 1$), então
 $\delta PU \approx -\frac{-1.065,6}{10} \cdot 11 = + R\$ -1.065,6/m^2$
 - Deve-se reparar que a derivada muda em função da idade
 - De 11 para 12 anos a variação será menor!
- Ou seja, o impacto da variável *Idade* é não-linear
 - A única maneira de se ajustar um fator é através da transformação *ln*



Interpretação das variáveis (3)

- Para a variável AP:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial PU(PC, Ano, Idade, AP)}{\partial AP} &= \frac{\partial -1.329,50 \cdot \ln(AP/100)}{\partial AP} \\ \bullet \quad \frac{\partial PU}{\partial AP} &= -\frac{1.329,50}{(AP)} \end{aligned}$$

- O aumento de 1% em AP corresponde:

- $\delta AP/AP = 1\% \rightarrow \delta PU = -1.329,50 \cdot 1\% \approx R\$ - 13,29/m^2$
- Cuidado: a interpretação acima vale para pequenos percentuais de variação!
- O fator área deve ser calculado: $F_{Area} = -1.329,5 \cdot \ln(AP/100)$
- Por exemplo: para um imóvel com área igual a 150 m^2 :
- $F_{Area} = -1.329,5 \cdot \ln(150/100) \approx -539,0 \text{ R\$/m}^2$



IMPORTANTE!

- Não é possível utilizar fatores do tipo: $\left(\frac{X_{imóvel}}{X_{paradigma}} \right)^\alpha$ de forma aditiva!!!
- Um fator do tipo $\left(\frac{X_{imóvel}}{X_{paradigma}} \right)^\alpha$ somente pode advir de um modelo multiplicativo!
- Por exemplo:
 - Um Fator Testada do tipo:

○

$$F_t = \left(\frac{T_i}{T_p} \right)^{0,10}$$

- De onde viria?



IMPORTANTE!

<http://www.valoristica.com.br>



- Só poderia advir de um modelo de regressão do tipo:

-

$$\ln(\widehat{PU}) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \ln(T_i/12) + \dots + \hat{\beta}_k (X_k/c_k)$$

- Então o Fator Testada seria:

-

$$F_t = \left(\frac{T_i}{12} \right)^{\hat{\beta}_1}$$

- Na forma aditiva as variáveis transformadas para o \ln tem fator na forma:

-

$$\frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\beta}_0^*} \cdot \ln(X_k/c_k) + 1$$



Derivação de Fatores Aditivos

Com o método de Lima (2006) ajustado

- Fator Padrão Construtivo:

■

$$F_{PC} = \begin{cases} 4.833,8/4.833,8 = 1,00 & \text{se } PC = Baixo \\ (4.833,8 + 2.308,4)/4.833,8 = 1,48 & \text{se } PC = Medio \\ (4.833,8 + 5.842,9)/4.833,8 = 2,21 & \text{se } PC = Alto \end{cases}$$

- Fator Ano:

■

$$F_{Ano} = \begin{cases} 4.833,8/4.833,8 = 1,00 & \text{se } Ano = 2018 \\ (4.833,8 + 3.487,0)/4.833,8 = 1,72 & \text{se } Ano = 2022 \end{cases}$$



Derivação de Fatores Aditivos

Com o método de Lima (2006) ajustado

- Fator AP:

$$\bullet F_{AP} = \frac{\beta_{AP}}{\beta_0} \cdot \ln(AP_i/AP_p) + 1$$

$$\bullet F_{AP} = \frac{-1.329,5}{4.833,8} \cdot \ln(AP_i/100) + 1$$

$$\bullet F_{AP} = -0,275 \cdot \ln(AP_i/100) + 1$$

- Fator Idade:

$$\bullet F_{Idade} = \frac{\beta_{Idade}}{\beta_0} \cdot \ln(Idade_i/Idade_p) + 1$$

$$\bullet F_{Idade} = \frac{-1.165,6}{4.833,8} \cdot \ln(Idade_i/10) + 1$$

$$\bullet F_{Idade} = -0,24 \cdot \ln(Idade_i/10) + 1$$



Aplicação de Fatores Aditivos

- Se o imóvel paradigma (100m², ano 2018, 10 anos de idade, PC Baixo) tem valor unitário de mercado igual a R\$ 4.833,80/m²

- Quanto vale um apartamento de 200m², 5 anos de idade, PC Médio, no ano de 2022?

- $\widehat{PU}_i = 4.833,8[1 + [(F_{AP} - 1) + (F_{Idade} - 1) + (F_{Ano} - 1) + (F_{PC} - 1)]]$

- $F_{AP} = -0,275 \ln(200/100) + 1 \approx 0,81$

- $F_{Idade} = -0,24 \ln(5/10) \approx 1,17$

- $F_{Ano} = 1,72$ (2022)

- $F_{PC} = 1,48$ (Médio)

- $\widehat{PU}_i = 4.833,8[1 + [(0,81 - 1) + (1,17 - 1) + (1,72 - 1) + (1,48 - 1)]]$

- $\widehat{PU}_i = 4.833,8[1 - 0,19 + 0,17 + 0,72 + 0,48]$

- $\widehat{PU}_i = 4.833,8 \cdot 2,18 = 10.537,68$





<http://www.valoristica.com.br>

Comparação com previsões do modelo

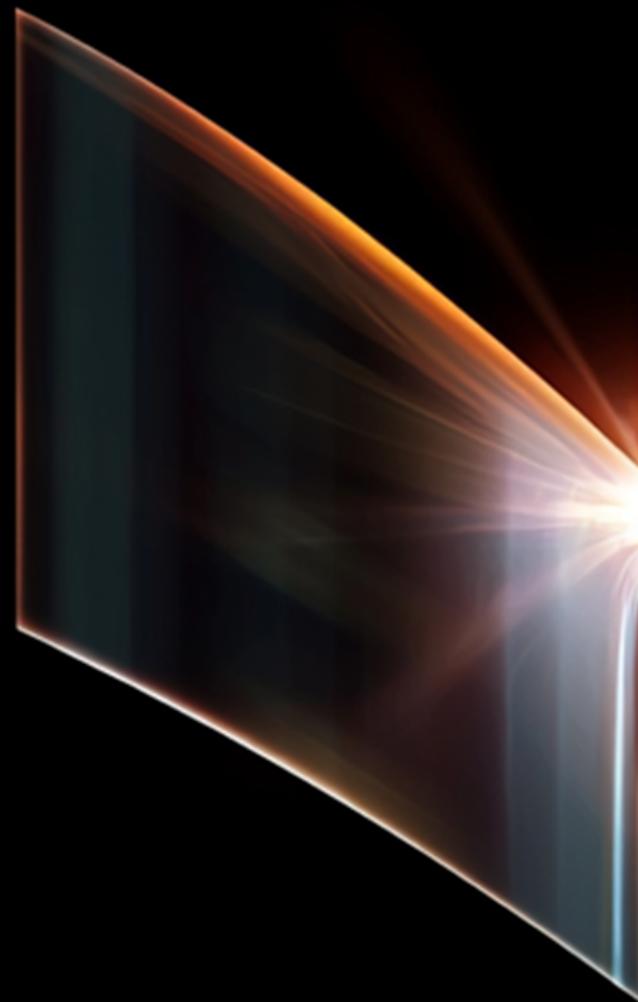
```
1 predict(fitCenter, newdata = list(PC = "Medio", Ano = "_2022", Idade = 5, AP = 200))
```

```
1  
10515.6
```

- Arredondamentos à parte, o método de Lima (2006) funciona!
 - Porém, deve-se perceber: só funcionou porque o modelo de regressão foi ajustado de forma centralizada no imóvel paradigma.
 - Assim, o valor de $\hat{\beta}_0$ igualou-se ao valor do imóvel paradigma e permitiu a estimativa consistente dos fatores de homogeneização!



Conclusão



Conclusão

- Este é um modelo ruim, além de mal comunicado:
 - $VU = -566,45 - 3,0555 \cdot 10^{-9} \cdot A^3 + 548,17 \cdot \text{Setor Urbano}^{0,5} + 143,27 \cdot \ln(Frete) + 1,45 \cdot \ln(\text{Distância}) - 0,0983 \cdot \ln(D) + 0,3735 \cdot \ln(T) + 1,68^I$
- Este é um bom modelo, porém ainda mal comunicado:
 - $\ln(\hat{PU}) = 4,768 - 0,2703 \cdot \ln(A) + 0,2339 \cdot \ln(\%T) - 0,0983 \cdot \ln(D) + 0,3735 \cdot \ln(T) + 1,45^G \cdot 1,68^I$
- Este é um bom modelo, porém melhor comunicado:
 - $\hat{PU} = 117,68 \cdot A^{-0,270} \cdot (\%T)^{0,234} \cdot D^{-0,098} \cdot 1,45^G \cdot 1,68^I$
- A centralização dos dados melhora a comunicação:
 - $\hat{PU} = 3,10 \cdot (A/1500)^{-0,270} \cdot (\%T/25\%)^{0,234} \cdot (D - 100)^{-0,098} \cdot 1,45^G \cdot 1,68^I$
- Argumento que o modelo poderia ser assim exposto, para o melhor entendimento do cliente (F é a função de transformação)
 - $\hat{PU} = 3,10 \cdot F_{\text{Area}} \cdot F_{\%Terreno} \cdot F_{\text{Distância}} \cdot F_{\text{Garagem}} \cdot F_{\text{Idade}}$





<http://www.valoristica.com.br>

Conclusão

- Os fatores de homogeneização continuam úteis!
- Com os novos estudos, agora estão se tornando também consistentes!
- A centralização de variáveis é importante para garantir uma estimativa consistente dos fatores de homogeneização
- A independência ou correlação entre os regressores é importante para fins de definir se um fator pode ser ajustado através de uma regressão simples
- A clareza do Tratamento por Fatores deve ser trazida para o Tratamento Científico
- E a consistência do Tratamento Científico deve ser levada para o Tratamento por Fatores!



Referências

- Droubi, Luiz Fernando Palin, e Lutemberg de Araújo Florencio. 2024. «Mínimos Quadrados Ponderados: vantagens e aplicação na Engenharia de Avaliações». *Revista Valorem* 1 (1): 33–41. <https://revistavalorem.com/index.php/home/article/view/24>.
- Lima, Gilson Pereira de Andrade. 2006. «Homogeneização por Fatores na Forma Aditiva, Multiplicativa ou Mista? Imposição Normativa ou Resposta do Mercado?» *XIII COBREAP*.
- Romano, Joseph P., e Michael Wolf. 2017. «Resurrecting weighted least squares». *Journal of Econometrics* 197 (1): 1–19. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2016.10.003>.

