Ce document regroupe les mots-clés et concepts importants de chaque chapitre du module Ma122. Ils peuvent tous faire l'objet de questions de cours en Khôlles. La lecture de ce document vous permettra de parcourir rapidement les noms des principales notions à connaître ou avoir comprises, afin de vous aider à identifier ce qu'il vous reste à assimiler.

# 1 Introduction aux systèmes linéaires

(Un petit aperçu de quelques techniques de résolution de systèmes linéaires que vous allez aborder).

# 2 Théorie des systèmes linéaires

Équation linéaire, inconnues, système linéaire, coefficients, second membre, solution, ensemble des solutions, systèmes linéaires équivalents, systèmes homogènes.

# 3 Résolution par la méthode du pivot de Gauss

Système échelonné, système échelonné réduit, pivot, opérations élémentaires (3 opérations), méthode du pivot de Gauss (3 étapes).

# 4 Définition d'une matrice

Matrice, taille, coefficients, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, matrice carrée, diagonale, matrice nulle, somme de deux matrices, produit d'une matrice par un scalaire, opposée, différence, propriétés de l'addition (associatif, commutatif...)

# 5 Multiplication de matrices

Produit de deux matrices, propriétés du produit (associatif, non commutatif, distributif à gauche et à droite sur l'addition), matrice identité, symbole de Kronecker, puissances d'une matrice, formule du binôme de Newton pour des matrices carrées commutatives, matrice nilpotente.

# 6 Définition de l'inverse d'une matrice

Matrice inversible, inverse d'une matrice, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, unicité de l'inverse, inverse d'un produit de matrices inversibles.

# 7 Calcul de l'inverse d'une matrice

Formule de l'inverse d'une matrice $2 \times 2$ inversible, méthode d'inversion de Gauss d'une matrice carrée.

# 8 Inverse d'une matrice : systèmes linéaires et matrices élémentaires

Ecriture sous forme matricielle d'un système linéaire, matrices élémentaires (dilatation, transvection, transposition), matrices équivalentes par lignes, matrice échelonnée, matrice échelonnée réduite.

# 9 Matrices triangulaires, matrice transposée, matrices symétriques

Matrice triangulaire inférieure, matrice triangulaire supérieure, matrice diagonale, matrice transposée, opérations avec la transposée, trace d'une matrice, opérations avec la trace, matrice symétrique, matrice antisymétrique.

# 10 Vecteurs

Vecteurs de $\mathbb{R}^n$, opérations sur les vecteurs (somme, multiplication par un scalaire), vecteur nul, espace vectoriel, écriture en ligne ou en colonne, produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

# 11 Exemples d'applications linéaires dans $\mathbb{R}^n$

Application linéaire, matrice d'une application linéaire.

# 12 Propriétés des applications linéaires

La composition d'applications linéaires revient à faire un produit matriciel. Une application linéaire est bijective si et seulement si sa matrice associée est inversible. Caractérisation d'une application linéaire, vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^p$, expression de la matrice d'une application linéaire dans les bases canoniques.

# 13 Introduction aux espaces vectoriels

$\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$-EV), élément neutre, élément symétrique (ou opposé).

## 14 Propriétés d'un espace vectoriel

Loi interne, loi externe, vecteurs, scalaires. Commutativité, associativité, existence d'un élément neutre, existence d'un symétrique, distributivité. Quelques exemples (espaces de fonctions, de suites, de matrices, de polynômes).

## 15 Définition d'un sous-espace vectoriel

Sous-espace vectoriel (SEV), espace des solutions d'un système linéaire homogène = SEV de $\mathbb{R}^q$ (où $q$ est le nombre d'inconnues).

## 16 Combinaisons linéaires, caractérisation et intersection d'espaces vectoriels

Combinaison linéaire, coefficients d'une combinaison linéaire, vecteurs colinéaires, caractérisation d'un $\mathbb{K}$-EV par la notion de combinaison linéaire. L'intersection de deux SEV est un SEV.

## 17 Somme, sous-espace vectoriel engendré

Somme de deux SEV, somme directe, SEV supplémentaires dans un $\mathbb{K}$-EV. SEV engendré par un ensemble de vecteurs.

## 18 Définition d'une application linéaire

Application linéaire entre deux espaces vectoriels, application nulle et application identité. Endomorphisme.

## 19 Exemples d'applications linéaires

Dérivation, intégration, multiplication par $X$ pour les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, transposition de matrices, trace d'une matrice.

## 20 Image et noyau d'une application linéaire

Image directe de l'espace vectoriel de départ par une application linéaire $f$ (noté $\mathrm{Im}(f)$), l'image d'un SEV par une application linéaire est encore un SEV. Noyau d'une application linéaire $f$ (noté $\mathrm{Ker}(f)$), le noyau d'une application linéaire est un SEV de l'espace de départ. [$f$ injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$]. Isomorphisme d'espaces vectoriels, automorphisme d'un espace vectoriel $E$ (l'ensemble des automorphismes de $E$ se note $\mathrm{GL}(E)$).

## 21 Famille libre

Famille libre (ou vecteurs linéairement indépendants), famille liée (ou vecteurs linéairement dépendants).

## 22 Famille génératrice

Famille génératrice.

## 23 Base

Base = famille libre et génératrice, décomposition unique de tout vecteur comme combinaison linéaire des vecteurs de base, base canonique de $\mathbb{R}^n$, base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Théorème d'existence d'une base, théorème de la base incomplète.

## 24 Dimension d'un espace vectoriel

Dimension finie, théorème de la dimension, dimension, le cardinal de toute famille libre d'un EV de dimension $n$ est inférieur ou égal à $n$, le cardinal de toute famille génératrice d'un EV de dimention $n$ est supérieur ou égal à $n$.

## 25 Dimensions des sous-espaces vectoriels

Droite vectorielle, plan vectoriel, hyperplan. Théorème des quatre dimensions (appelée aussi "formule de Grassmann").

## 26 Rang d'une famille de vecteurs

Rang d'une famille de vecteurs, rang d'une matrice, matrice échelonnée en colonnes, opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice, $[A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = n]$, le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.

## 27 Applications linéaires en dimension finie

Rang d'une aplication linéaire, théorème du rang, théorème de bijection automatique pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie.

## 28 Matrice d'une application linéaire

Matrice d'une application linéaire entre deux bases.