Sujet 1

Questions de cours

1. Donner la définition d'une partie ouverte et d'une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
2. Une partie de $\mathbb{R}^2$ peut-elle être ni ouverte ni fermée ? Justifier.

Exercice

Étudier l'existence des limites suivantes :

- $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^3+y^3}$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$.
- $g(x,y) = \dfrac{xy+2x+y-2}{x+y-1}$ lorsque $(x,y) \to (1,0)$.
- $h(x,y) = \cos(x+y)$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$.

Sujet 2

Questions de cours

1. Formuler la seconde inégalité triangulaire.
2. Démontrer cette inégalité.

Exercice

Soit $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^5}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f (noté $\mathcal{D}_f$) ?
2. f est-elle continue sur $\mathcal{D}_f$?
3. Les applications partielles de f sont-elles continues ?

Sujet 3

Questions de cours

1. Que signifie que deux normes sont équivalentes ?
2. Donner un exemple de deux normes équivalentes sur $\mathbb{R}^2$. Justifier.

Exercice

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & -9x^2 - 16y^2 \end{array}$.

1. La fonction f est-elle définie et continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Déterminer toutes les lignes de niveaux de f.

Sujet 4

Questions de cours

1. Donner la définition d'une norme.
2. Donner la définition des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_{+\infty}$ de $\mathbb{R}^2$. Dessiner les boules unités associées à ces normes.

Exercice

Soit $f : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^4 + y^4}} \times \sin(x^4 + y^4)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. f peut-elle être prolongée par continuité en $(0, 0)$?

Sujet 5

Questions de cours

1. Donner la définition d'une distance.
2. Existe t-il une distance sur $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas induite par une norme ? Justifier.

Exercice

Soit $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} x^2 - 4y^2 & \text{si } x + 2y \geq 0 \\ x^2 + 4y^2 + 4xy & \text{si } x + 2y < 0 \end{cases}$.

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Sujet 6

Questions de cours

1. Donner la définition d'un disque ouvert et d'un disque fermé.
2. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 3|x| + 8|y| = 2\}$ représente t-il un cercle par rapport à une certaine norme ?

Exercice

Étudier l'existence des limites suivantes :

- $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^3 + y^3}$ lorsque $(x, y) \to (0, 0)$.
- $g(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y - 1}$ lorsque $(x, y) \to (0, 1)$.
- $h(x, y) = \tan(x^2 - y^2)$ lorsque $(x, y) \to (0, 0)$.

Sujet 7

Questions de cours

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et soit $A \subset \mathbb{R}^2$.

1. Donner la définition de l'image de A par f.
2. Si $A = \mathbb{R}^2$, y a t-il une différence entre le graphe de f et l'image de A par f ?

Exercice

1. Soit $N_1 : (x, y) \mapsto 4|x + y| - 3|x - y|$. N_1 est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$?
2. Soit $N_2 : (x, y) \mapsto 4\sqrt{x^2 + 5y^2}$. N_2 est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$?
3. Soit $N_3 : (x, y) \mapsto \left(|x|^3 + |y|^3\right)^{1/3}$. N_3 est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$?

Sujet 8

Questions de cours

1. Donner la définition d'une ligne de niveau d'une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles.
2. Tracer quelques lignes de niveaux de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & -x + y \end{array}$.

Exercice

Soit $N : (x, y) \mapsto \sqrt{9x^2 + 4y^2}$.

1. Déterminer le plus grand réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\alpha \|(x, y)\|_2 \leq N(x, y).$$
2. Déterminer le plus petit réel $\beta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$N(x, y) \leq \beta \|(x, y)\|_2.$$
3. Qu'en déduire ?

Sujet 9

Questions de cours

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Donner la définition des fonctions partielles de f.
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g : (x, y) \mapsto \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2 + 1}$.
   Quelles sont les fonctions partielles de g ?

Exercice

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $d : (u, v) \mapsto N(3u - 3v)$ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner la boule de centre $(2, 1)$ et de rayon 1 pour la distance d lorsque $N = \|\cdot\|_1$ puis lorsque $N = \|\cdot\|_2$.

Sujet 10

Questions de cours

1. Donner la définition d'une ligne de niveau d'une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles.
2. Tracer quelques lignes de niveaux de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 2x^2 + 2y \end{array}$.

Exercice

Soit $N : (x, y) \mapsto \displaystyle\int_0^1 |x + ty| \mathrm{d}t$.

Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Sujet 11

Questions de cours

1. Donner la définition d'une limite finie d'une fonction de deux variables en un point.
2. Donner un exemple d'une fonction définie au voisinage de $(0,0)$ n'admettant pas de limite en $(0,0)$.

Exercice

Soit $d : (u,v) \mapsto \dfrac{3}{\pi} \arctan(\|u-v\|_\infty)$. On admet que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

Exprimer de façon explicite l'ensemble des points de la boule unité fermée pour la distance d, puis dessiner cet ensemble.

Sujet 12

Questions de cours

1. Donner la définition de la continuité d'une fonction en un point.
2. Peut-on toujours prolonger une fonction par continuité en un point ? Justifier.

Exercice

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^2$.
Montrer que l'application $d : (u,v) \mapsto \dfrac{N(u-v)}{1+N(u-v)}$ définit une distance.