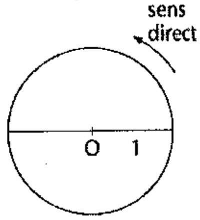
Chapitre : Fonctions trigonométriques

1. Cercle trigonométrique

1.1. Définition

Le **cercle trigonométrique** $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O, de rayon 1 et orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre appelé **sens direct**, ou sens trigonométrique ou sens positif, noté +.



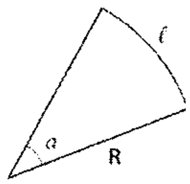
Remarque : le sens des aiguilles d'une montre est appelé **sens indirect**, ou sens négatif noté –.

1.2. Longueur d'arc

Propriété : La longueur d'un arc de cercle de rayon R et d'angle au centre de mesure a en degré ($0 \leq a \leq 360°$) est proportionnelle à a. On a donc le tableau de proportionnalité :

Longueur de l'arc	$2\pi R$	ℓ
Mesure de l'angle	360°	a

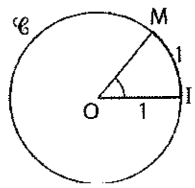
D'où, $\ell = \dfrac{2\pi R \times a}{360°} = R \times \dfrac{\pi \times a}{180°}$.



Exemple : La longueur d'un arc de cercle de rayon 1 cm et d'angle au centre de mesure 60° est $\ell = 1 \times \dfrac{\pi \times 60°}{180°} = \dfrac{\pi}{3} \approx 1{,}05$ cm.

1.3. Le radian

Définition : $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1. Le radian est la mesure de l'angle au centre qui intercepte sur le cercle $\mathscr{C}$ un arc de longueur 1.



Remarque : Le symbole du radian est rad.

Comme $\ell = R \times \dfrac{\pi \times a}{180°}$, on obtient $1 = 1 \times \dfrac{\pi \times 1 \text{ rad}}{180°} \Rightarrow 1 \text{ rad} = \dfrac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°$.

Propriété : Les mesures a en degrés et α en radians d'un même angle sont proportionnelles.
On a donc le tableau de proportionnalité :

Mesure en degrés	180°	a
Mesure en radians	π	α

D'où, $\dfrac{180°}{\pi} = \dfrac{a}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{180°} \times a$ ou $a = \dfrac{180°}{\pi} \times \alpha$.

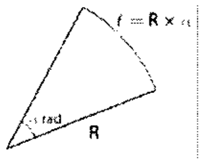
Exemples :

- Donner la mesure en radians d'un angle de 162° $\Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{180°} \times 162°$ rad $= \dfrac{9\pi}{10}$ rad.
- Donner la mesure en degrés d'un angle de $\dfrac{\pi}{8}$ rad $\Rightarrow a = \dfrac{180°}{\pi} \times \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{180°}{8} = 22{,}5°$.

Tableau de valeurs remarquables :

Mesure en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

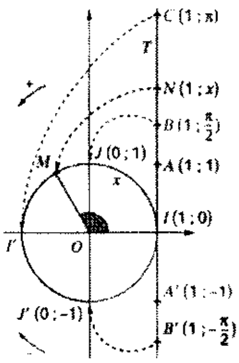
Conséquence :
Si on considère un cercle de centre O et de rayon R, la longueur ℓ de l'arc intercepté par l'angle au centre est : $\ell = R \times \frac{\pi \times a}{180°}$ si a est la mesure en degrés de l'angle. Comme $\alpha = \frac{\pi}{180°} \times a = \frac{\pi \times a}{180°}$, alors $\ell = R\ \alpha$ où α est la mesure en radians de l'angle ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$).



2. Enroulement de la droite des réels

2.1. Enroulement de $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique

(O ; I, J) est un repère orthonormé direct. On considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O et T sa tangente au point I (1 ; 0), appelée droite ou axe des réels.



Sur cette droite, on considère les points A (1 ; 1) et A' (1 ; – 1). On imagine qu'on « enroule » cette droite autour du cercle $\mathscr{C}$. La demi-droite [IA) va s'enrouler sur ce cercle dans le sens positif et la demi-droite [IA') dans le sens négatif.
À tout nombre réel x, on associe le point N de la tangente T de coordonnées (1 ; x) qui se superpose par enroulement sur un unique point M du cercle trigonométrique. M est appelé **point image de x sur le cercle $\mathscr{C}$.**
Remarque : Inversement, tout point M du cercle $\mathscr{C}$ est associé à un nombre réel x, où x est égal à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ d'origine I, d'extrémité M et parcouru dans le sens positif.

2.2. Propriété

Tout point M du cercle $\mathscr{C}$ associé à un nombre réel x est également associé à une infinité de réels de la forme $x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, correspondant au nombre $|k|$ de « tours » supplémentaires, dans le sens direct ou indirect.
Exemples :

- Donner un nombre réel positif et un nombre réel négatif ayant le même point image sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ que le nombre réel $\frac{\pi}{6}$.

  Le nombre réel positif $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$ et le nombre réel négatif $\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$ ont le même point image sur $\mathscr{C}$ que le nombre réel $\frac{\pi}{6}$.

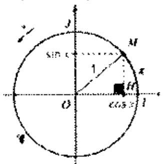
- Donner tous les nombres réels ayant le même point image sur le cercle $\mathscr{C}$ que le nombre réel $\frac{3\pi}{4}$.

  Les nombres réels qui ont le même point image sur le cercle $\mathscr{C}$ que le nombre réel $\frac{3\pi}{4}$ sont les nombres réels $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

3. Cosinus et sinus d'un nombre réel

3.1. Définitions

On considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé (O ; I, J).
Soit M le point de $\mathscr{C}$ associé à un réel x.
L'abscisse du point M dans le repère orthonormé (O ; I, J) est le cosinus du réel x, noté $\cos(x)$ ou $\cos x$.
L'ordonnée du point M dans le repère orthonormé (O ; I, J) est le sinus du réel x, noté $\sin(x)$ ou $\sin x$.
Les coordonnées du point M sont donc ($\cos x$; $\sin x$).



<u>Propriété</u> : Pour tout nombre réel x, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
En effet, comme le rayon de $\mathscr{C}$ est égal à 1, les coordonnées de M sont comprises entre -1 et 1.

3.2. Lien avec le cosinus et le sinus dans un triangle rectangle

Ces définitions sont cohérentes avec les définitions données dans un triangle rectangle pour le cosinus et le sinus d'un angle aigu. En effet, lorsque l'angle $\widehat{\text{IOM}}$ est aigu, dans le triangle OHM rectangle en H, on a ;

$\cos(\widehat{\text{IOM}}) = \cos(\widehat{\text{HOM}}) = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{\text{OH}}{\text{OM}} = \dfrac{\text{OH}}{1} = \text{OH} = \cos x$ et

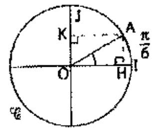
$\sin(\widehat{\text{IOM}}) = \sin(\widehat{\text{HOM}}) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{\text{HM}}{\text{OM}} = \dfrac{\text{HM}}{1} = \text{HM} = \sin x$.

<u>Propriété</u> : Pour tout nombre réel x, on a $\cos (x) + \sin (x) = 1$.
On note $\cos (x)$ le carré de $\cos x$: $\cos (x) = (\cos x)$ et $\sin (x)$ le carré de $\sin x$: $\sin (x) = (\sin x)$.
En effet, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OHM rectangle en H, on obtient : OM = OH + HM ,
soit $1 = (\cos x) + (\sin x) \Rightarrow \cos (x) + \sin (x) = 1$.

3.3. Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

On peut en faire la démonstration, par exemple, pour $x = \dfrac{\pi}{6}$:



On note A le point image du nombre réel $\dfrac{\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$. $\widehat{\text{IOA}} = \dfrac{180°}{6} = 30°$.

Donc OAH est un demi-triangle équilatéral. Alors, $\text{AH} = \dfrac{1}{2}\text{OA} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sin (30°) = \dfrac{1}{2}$.

D'après le théorème de Pythagore, $\text{OH}^2 = \text{OA}^2 - \text{AH}^2 = 1^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$. Donc $\text{OH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos (30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

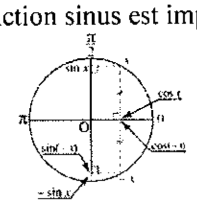
4. Fonctions cosinus et sinus

4.1. Définitions

- La fonction **cosinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe $\cos(x)$.
- La fonction **sinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe $\sin(x)$.

4.2. Parité

<u>Définitions</u> :
Une fonction f est paire lorsque pour tout réel x de son ensemble de définition $\mathscr{D}$, $-x$ appartient à $\mathscr{D}$ et $f(-x) = f(x)$.
Une fonction f est impaire lorsque pour tout réel x de son ensemble de définition $\mathscr{D}$, $-x$ appartient à $\mathscr{D}$ et $f(-x) = -f(x)$.
<u>Propriété</u> : Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.
En effet, pour tout réel x, les points associés à x et à $-x$ sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ ont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Ils ont donc des abscisses égales et des ordonnées opposées.
D'où, la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.



Conséquence graphique :
La courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
La courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère O.

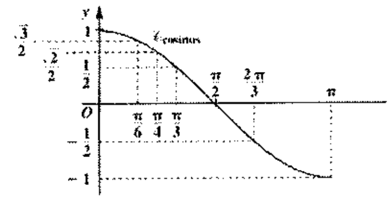
4.3. Périodicité

Aux points de la droite orientée d'abscisses x et $x + 2k\pi$ (avec k entier relatif), ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique. D'où, pour tout réel x, $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ (avec k entier relatif) : on dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques, de période 2π.

Conséquence graphique : Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont invariantes par toute translation de vecteur $k2\pi\vec{i}$ (avec k entier relatif).

4.4. Courbes représentatives

On construit la courbe représentative de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ à l'aide du cercle trigonométrique.

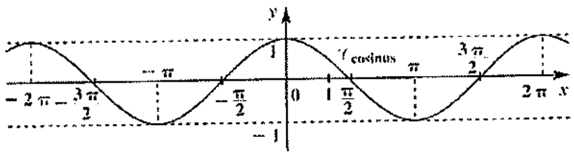


On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$\pi/2$		π
$\cos(x)$	1	↘	0	↘	-1

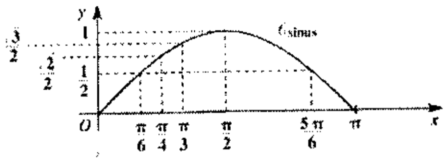
Propriété : La fonction cosinus est décroissante sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

Par symétrie d'axe $(y' y)$ car la fonction cosinus est paire et par translations de vecteur $k2\pi\vec{i}$ (avec k entier relatif), on obtient la courbe de la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$:



Cette courbe est appelée une sinusoïde.

On construit la courbe représentative de la fonction sinus sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ à l'aide du cercle trigonométrique.

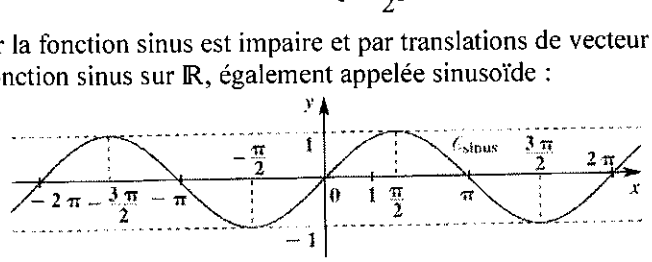


On obtient le tableau de variations suivant :

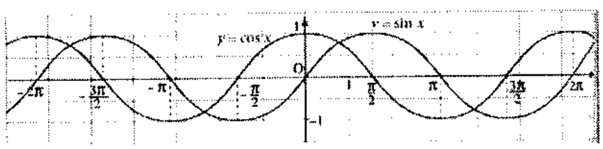
x	0		$\pi/2$		π
$\sin(x)$	0	↗	1	↘	0

Propriété : La fonction sinus est croissante sur l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ et décroissante sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2} ; \pi]$.

Par symétrie de centre O car la fonction sinus est impaire et par translations de vecteur $k2\pi\vec{i}$ (avec k entier relatif), on obtient la courbe de la fonction sinus sur $\mathbb{R}$, également appelée sinusoïde :

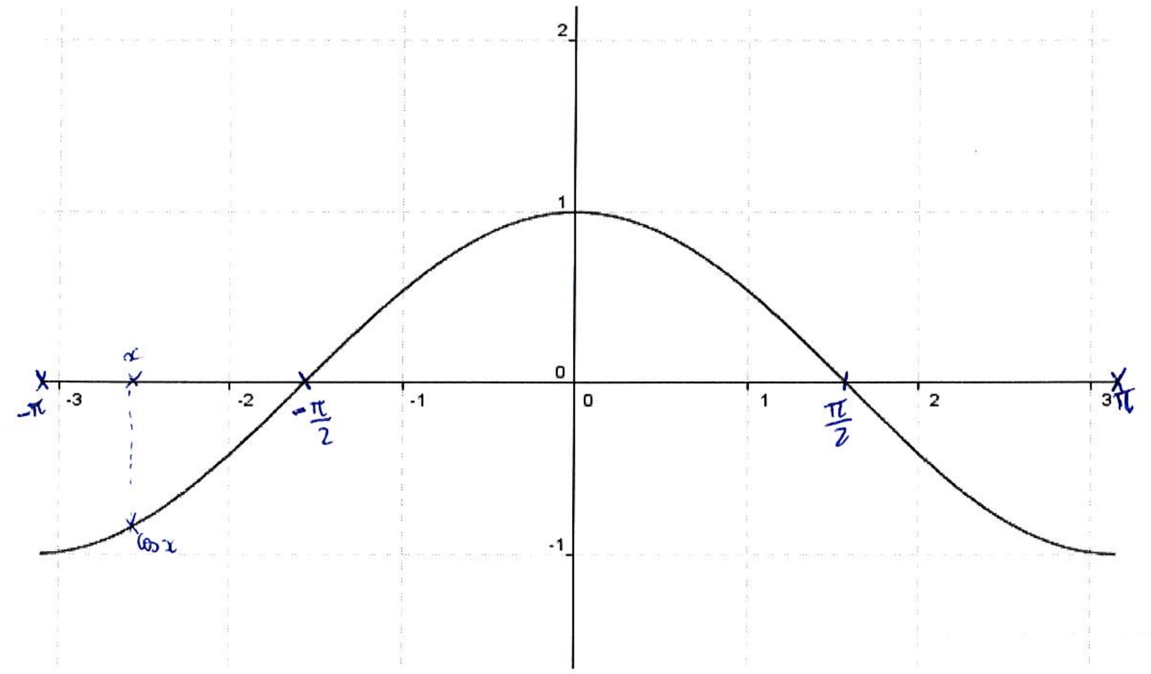


Remarque :



Dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la sinusoïde représentative de la fonction sinus est l'image de la sinusoïde représentative de la fonction cosinus par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

Graphe de la fonction cosinus sur [- π ; π] :



Graphe de la fonction sinus sur [- π ; π] :