SCIENCES SU

Cours

Exercices corrigés

Jean-Pierre Escofier

Toute l'analyse de la Licence

2e ÉDITION

DUNOD

1.2.2 Sur les notations $\sum$ et $\prod$

Les notations $\sum$ et $\prod$ sont souvent utilisées pour écrire de manière ramassée des sommes et des produits. Étant donnés $n \geqslant 1$ éléments x_1, ..., x_n (réels, complexes...) leur somme s'écrit $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ ou :

$$\textstyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k\ , \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\ , \quad \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k$$

et leur produit $x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n$ ou :

$$\textstyle\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k\ , \displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k \text{ ou } \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k.$$

On lit au choix : somme ou sigma des x_k, produit ou pi des x_k, de 1 à n ou de $k = 1$ à $k = n$. L'indice k est *muet* et peut être changé en une autre lettre comme $i, j, l, m, p, q, \ldots$ sans changer la somme ou le produit des termes. Pour $n = 1,2,3$, les notations $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ et $x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n$ ont un petit désavantage, puisqu'elles supposent au moins quatre termes et doivent être interprétées.

Ces sommes et produits sont en fait définis par récurrence pour $n \geqslant 1$: la somme de $n+1$ éléments $x_1, \ldots, x_{n+1}$ est définie comme la somme des n premiers et du $n+1$-ième ; on a la relation :

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n+1} x_k = \left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k \right) + x_{n+1}\ ;$$

de même pour la définition du produit de $n+1$ éléments, donnée, pour $n \geqslant 1$, par :

$$\prod_{1 \leqslant k \leqslant n+1} x_k = \left(\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k \right) \times x_{n+1}.$$

La somme et le produit de la famille vide sont 0 et 1 par convention.

L'emploi de pointillés ou des signes $\sum$ et $\prod$ nécessite donc des raisonnements par récurrence, souvent évidents. On peut effectuer des changements d'indices, par exemple : $\sum_{0 \leqslant l \leqslant n} (l+1)^2 = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n+1} k^2$ en posant $k = l + 1$.

L'adoption de ces notations est assez récente (au XXe siècle, alors qu'Euler avait proposé le signe $\sum$ en 1755) ; on utilisait avant un langage moins précis, mais que tout le monde comprenait ; on pouvait parler, par exemple, de la famille des éléments $a, b, c, \ldots, l$ et de leur somme $a + b + c + \ldots + l$.

1.2.3 Somme de termes successifs d'une suite arithmétique

La suite arithmétique de raison r et de premier terme a est la suite $(a + kr)_{k \geqslant 0}$ (pour la notation, voir 5.1.1). La formule à connaître par cœur est la somme des entiers de 1 à n :

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On en déduit, par exemple, la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $(a+kr)$ avec $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (a+kr) = (n+1)a + \frac{n(n+1)}{2} r.$$

Attention, la première formule commence au rang $k = 1$, la seconde au rang $k = 0$.

1.2.4 Somme de termes successifs d'une suite géométrique

La suite géométrique de raison q et de premier terme a est la suite $(aq^k)_{k \geqslant 0}$ (pour la notation, voir 5.1.1). La formule à connaître est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique (q^n) de raison $q \neq 1$:

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} q^k = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Si $q = 1$, $\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} q^k = n + 1$.

1.2.5 Formule du binôme

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + b^n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

avec $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

La **factorielle** de n (on dit souvent : n factoriel) est définie par récurrence par $0! = 1$ et $(n+1)! = n! \times (n+1)$. C'est le produit des n premiers entiers. Les premières valeurs de $n!$, pour $n = 0, 1, 2, \ldots, 8$, sont 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5 040, 40 320.

Je préfère la notation C_n^k, pour *combinaisons* (dont l'initiale donne le C) de k éléments parmi n éléments, plutôt que $\binom{k}{n}$ qui doit se lire *k parmi n* sans que la notation vous y aide. Pour le calcul des coefficients, on peut aussi utiliser le triangle bien connu dit de Pascal [1], basé sur la formule :

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$$

1. Les Arabes le connaissaient vers l'an 1000, les Chinois en 1261 et il apparaît dans le *General Trattato* de Tartaglia en 1556 (les Italiens disent d'ailleurs : triangle de Tartaglia). Mais Pascal fait une étude approfondie du triangle et c'est là qu'il rédige le premier (peut-être) raisonnement par récurrence.

1.2.6 L'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Rappelons que la résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$ vient de la réécriture de l'équation sous la forme dite *canonique* :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Le discriminant de l'équation est $\Delta = b^2 - 4ac$. On a les trois cas :

- $\Delta < 0$: l'équation n'a aucune racine réelle ;
- $\Delta = 0$: l'équation a une racine réelle dite double $x_1 = -b/2a$ et s'écrit $a(x - x_1)^2 = 0$;
- $\Delta > 0$: l'équation a deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

On a donc :

$$x_1 + x_2 = -b/a, \ x_1 x_2 = c/a,$$

des relations qui viennent aussi de ce que l'équation s'écrit :

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0, \text{ soit } a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2] = 0.$$

Réciproquement, deux nombres réels de somme S et de produit P sont les racines de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

1.3 Rappels de trigonométrie

1.3.1 Définition géométrique des fonctions sinus, cosinus et tangente

Les fonctions trigonométriques sont définies à partir des points du cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1 et de centre O d'un plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$; on note A le point (1,0) (voir figure 1.1).

Soient a un réel et M le point de $\mathcal{C}$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}}) = a$ (a est en radians). On projette M en H sur $(x'x)$, en K sur $(y'y)$. On pose $\overline{OH} = \cos a$, $\overline{OK} = \sin a$. Si $a \neq \pi/2 \mod \pi$, la perpendiculaire en A à l'axe $x'Ox$ coupe (OM) en T et on pose $\tan a = \overline{AT}$.

On définit ainsi, via la géométrie, des fonctions **sinus**, $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, **cosinus**, $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ et **tangente**, $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$.

On définit aussi la **cotangente** comme l'inverse de la tangente :

$$\text{cotan} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ \text{cotan}\, x = \frac{1}{\tan x}.$$

La construction des fonctions trigonométriques dans les classes de lycée est basée sur la géométrie. Cela ne gênait personne, il y a 100 ans. Mais aujourd'hui, toute l'analyse est basée sur la construction des nombres réels que nous présenterons au chapitre 3. Les outils pour construire rigoureusement les fonctions trigonométriques ne seront mis au point qu'en 11.10 et 16.9. En attendant, nous utiliserons les fonctions trigonométriques et leurs propriétés telles que nous les connaissons.

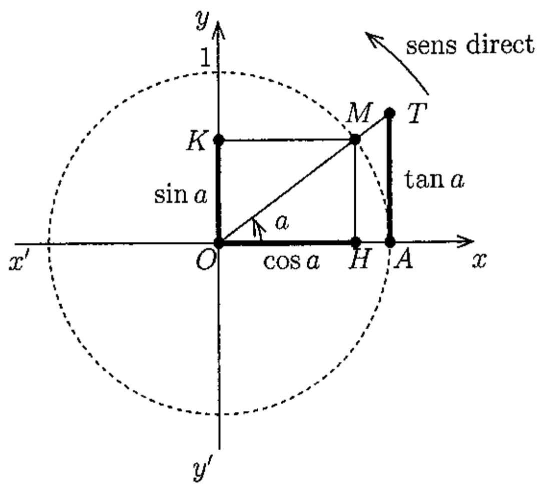

Figure 1.1 Définition géométrique du sinus, du cosinus et de la tangente.

1.3.2 Valeurs des fonctions trigonométriques

Le tableau de valeurs des fonctions trigonométriques pour cinq angles compris entre 0 et $\pi/2$ est à connaître (sans calculatrice !).

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	

1.3.3 Formules de trigonométrie

Les formules qui suivent n'ont parfois pas de sens pour certaines valeurs de la variable : par exemple, si $\tan x$ apparaît, il faut supposer $x \neq \pi/2 \bmod \pi$, etc.

Premières formules.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad 1 + \text{cotan}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Il faut savoir retrouver, en traçant un cercle trigonométrique dans un coin de son brouillon ou en réfléchissant un peu :

$$\sin(-x) = -\sin x,\ \cos(-x) = \cos x,\ \tan(-x) = -\tan(x),$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1/\tan x,$$

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x & \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x,\\
\sin(\pi - x) &= \sin x & \cos(\pi - x) &= -\cos x,\\
\sin(\pi + x) &= -\sin x & \cos(\pi + x) &= -\cos x.
\end{aligned}$$

Formules d'addition. Les formules pour $a - b$ se déduisent de celles pour $a + b$ en changeant b en $-b$:

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b & \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b,\\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a & \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a,\\
\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} & \tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.
\end{aligned}$$

Formules donnant les produits. Par addition ou soustraction des formules précédentes, on obtient :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]\ ;$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]\ ;$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)].$$

Formules donnant les sommes et les différences. En prenant les formules précédentes à l'envers avec $a = (p+q)/2$ et $b = (q-p)/2$:

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{q-p}{2}\ ;$$

$$\cos p - \cos q = 2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{q-p}{2}\ ;$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \ ;$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}.$$

Formules de duplication.

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a,$$

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}.$$

Formules en fonction de la tangente de l'arc moitié. En posant $t = \tan(a/2)$:

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan a = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Dérivées. Nous reverrons ce qui suit en 6.7.2 et 7.1.7. Les fonctions trigonométriques sont des fonctions continues, dérivables sur leur domaine de définition et leurs dérivées sont données par les formules :

$$\sin' x = \cos x \qquad \cos' x = -\sin x$$

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

On peut aussi écrire les dérivées du sinus et du cosinus sous la forme $\sin' x = \sin(x + \pi/2)$, $\cos' x = \cos(x + \pi/2)$, ce qui donne facilement une expression des dérivées successives du sinus et du cosinus :

$$\sin^{(n)} x = \sin(x + n\pi/2) \qquad \cos^{(n)} x = \cos(x + n\pi/2).$$

Inégalités.

$$\sin x < x \text{ pour } x > 0 \ ;$$

$$\sin x > 2x/\pi \text{ pour } 0 < x < \pi/2 \ ;$$

$$\tan x > x \text{ pour } 0 < x < \pi/2.$$

Transformation de $A \cos \omega t + B \sin \omega t$. On a souvent besoin en physique de transformer l'expression de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$, où A, B sont des réels non tous deux nuls. Comme $\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ sont des éléments de $[-1, 1]$ dont les carrés ont pour somme 1, il exis-

1.5 ÉCRITURE DES FORMULES

La recherche de la rigueur en analyse a poussé les mathématiciens du XIX^e siècle à élaborer une écriture de plus en plus formalisée des mathématiques, impossible à expliquer en quelques mots [3].

Bien sûr, ce n'est pas sous cette forme qu'on peut penser dans sa tête les problèmes de mathématiques : il faut prendre du recul, entrelacer des notions complexes et faire jouer ses neurones pour les comprendre. Mais on peut avoir besoin de revenir au langage formalisé, par exemple pour écrire correctement la négation (le contraire), d'une propriété [4]. Voici un bagage minimum.

Une formule mathématique s'écrit avec des symboles logiques, les symboles de la théorie dans laquelle on travaille et des lettres désignant les variables.

Voici un exemple de formule vraie de la théorie des nombres réels :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\big((x \geqslant 0) \Rightarrow \exists y(y^2 = x)\big) \ ;$$

elle signifie que, pour tout x réel, si $x \geqslant 0$, il existe un réel y de carré x.

1.5.1 Calculs avec les formules

Dans cette section, j'utilise des crochets pour isoler les formules de ce qui est du langage courant.

Les formules mathématiques se construisent avec :

➤ ou, et, non, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, qui sont des **connecteurs logiques** ;

➤ $\exists, \forall$, qui sont des **quantificateurs**.

On écrit souvent $[P(x)]$ si la formule $[P]$ dépend de x.

À partir de la formule $[P]$ et de la formule $[Q]$, par exemple $|x - a| < \delta$, $f(x) \geqslant A$, on peut construire d'autres formules :

- $[P$ ou $Q]$;
- $[P$ et $Q]$;
- $[P \Rightarrow Q]$ (qui se lit P **implique** Q) ;
- $[P \Leftrightarrow Q]$ (qui se lit P **équivaut** à Q ou P est **équivalente** à Q) ;

---

3. Nous sommes tellement habitués à notre logique que nous ne pensons pas qu'il puisse en exister d'autres. Cependant, la logique dite intuitionniste de Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) propose une autre approche des démonstrations mathématiques où le principe du tiers exclus est rejeté et où les objets manipulés doivent être explicitement construits ; on parle de mathématiques constructives. Des textes d'Henri Lombardi, disponibles sur son site ou dans la revue *Repères-IREM*, peuvent en donner une idée.

4. La vérification de démonstrations mathématiques sur ordinateurs a fait récemment d'énormes progrès. On a pu obtenir la certification des preuves de théorèmes comme celles du théorème des quatre couleurs en 2004 et, fin 2012, d'un résultat sur les groupes datant de 1963 et ayant nécessité plus de 200 pages de démonstrations : un travail de 12 personnes pendant six ans, des calculs énormes, un exploit ! Pour la conjecture de Kepler sur les empilements de sphères, voir [ESC3].

- [non P] (la **négation** de P) ;
- $[(\forall x)(P(x))]$ (qui se lit : pour tout x, on a $P(x)$) ;
- $[(\exists x)(P(x))]$ (qui se lit : il existe un x tel que $P(x)$; plusieurs x distincts peuvent vérifier $P(x)$ quand la formule est vraie).

Certaines formules sont équivalentes, comme les suivantes :

- [non(non P)] est équivalente à [P] ;
- [P et Q] est équivalente à [non((non P) ou (non Q))] ;
- [$P \Rightarrow Q$] est équivalente à [Q ou (non P)] ;
- [$P \Rightarrow Q$] est aussi équivalente à [non $Q \Rightarrow$ non P] appelée **contraposée** de [$P \Rightarrow Q$].
- [$P \Leftrightarrow Q$] est équivalente à [($P \Rightarrow Q$) et ($Q \Rightarrow P$)] ;
- $[(\exists x)(P(x))]$ est équivalente à [non $((\forall x)$(non $P(x)))$].
- $[(\forall x)(P(x))]$ est équivalente à [non $((\exists x)$(non $P(x)))$].

Avec ces règles, on voit, par exemple, que :

- la négation de [$P \Rightarrow Q$] est [(non Q) et P] ;
- la négation de $[(\forall x)(P(x))]$ est $[(\exists x)$(non $(P(x)))]$;
- la négation de $[(\exists x)(P(x))]$ est $[(\forall x)$(non $(P(x)))]$.

On peut dire ces deux dernières propriétés en langage courant :

➤ nier qu'une propriété soit vraie pour tout x équivaut à dire qu'il existe un x (un seul suffit) pour lequel la propriété n'est pas vraie ;

➤ nier qu'il existe un x vérifiant une propriété équivaut à dire qu'elle est fausse pour tout x.

On utilise les abréviations :

- $[(\forall x \in A)(P(x))]$ pour $[(\forall x)((x \in A) \Rightarrow P(x))]$;
- $[(\exists x \in A)(P(x))$ pour $[(\exists x)((x \in A)$ et $P(x))]$.

Leurs négations sont respectivement :

- $[(\exists x \in A)$(non $P(x))]$;
- $[(\forall x \in A)$(non $P(x))]$.

1.5.2 Sous-ensembles définis par des formules

Dans un ensemble E, une formule $[P(x)]$ permet de définir l'ensemble A des éléments x de E ayant la propriété $[P]$.

Si A est l'ensemble des éléments de E vérifiant la propriété $[P]$ et B l'ensemble des éléments de E vérifiant la propriété $[Q]$:

- $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E vérifiant la propriété [P ou Q], c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E vérifiant l'une ou l'autre de ces deux proprié-