Chapitre : Fonction exponentielle

1. Définition de la fonction exponentielle

1.1. Théorème
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Remarque : L'existence et l'unicité d'une telle fonction sont admises.

1.2. Définition
Cette unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée fonction exponentielle et on la note exp :
$x \longmapsto \exp(x)$ (fonction introduite par Jean Bernoulli en 1694).
On a donc $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$. On admet que, pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.

2. Propriétés de la fonction exponentielle

2.1. Relation fonctionnelle
On admet la propriété suivante : pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$
(la fonction exponentielle transforme les sommes en produits).

2.2. Conséquences : propriétés algébriques
Pour tout réel x :
- $\exp(x) > 0$;
- $\exp(x)\exp(-x) = 1$ et donc $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
- pour tous réels x et y, $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- pour tout réel x et tout entier relatif n, $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$.

Démonstrations :
- $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \Rightarrow \exp(x) = \exp(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = \exp(\frac{x}{2})\exp(\frac{x}{2}) = [\exp(\frac{x}{2})]^2$ d'après la relation fonctionnelle
  $\Rightarrow \exp(x) \geq 0$ comme carré et comme $\exp(x) \neq 0$ pour tout réel x, $\exp(x) > 0$;
- $\exp(x)\exp(-x) = \exp[x + (-x)]$ d'après la relation fonctionnelle $\Rightarrow \exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1 \Rightarrow \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
  en divisant par $\exp(x) \neq 0$
- $\exp(x - y) = \exp[x + (-y)] = \exp(x)\exp(-y)$ d'après la relation fonctionnelle $\Rightarrow$ $\exp(x - y) = \exp(x)\dfrac{1}{\exp(y)}$ d'après le résultat précédent $\Rightarrow \exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$;
- on admet la dernière propriété

2.3. Nombre e et notation e^x
On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle : $\exp(1) = e$ (notation due à Leonhard Euler).
Avec la calculatrice, on trouve : $e \approx$ **2,718 281 828 46**.

Conséquence : Pour tout entier relatif n et tout réel x, on a vu dans les propriétés algébriques que : $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$.
D'où, pour $x = 1$, on a : $\exp(n) = [\exp(1)]^n = e^n$.
On convient donc de prolonger cette notation à tout réel x, soit : $\exp(x) = e^x$ (e^x se lit donc « exponentielle x » ou « exponentielle de x » ou « e exposant x »).

Notation : Soit x un réel, on note e^x l'image de x par la fonction exponentielle, $\exp(x) = e^x$.

Propriétés avec la notation e^x : Pour tous réel x, y et tout entier relatif n,
$e^0 = 1$; $e^x > 0$; $e^{x+y} = e^x \times e^y$; $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$; $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$; $(e^x)^n = e^{nx}$ (résultats conformes aux règles de calcul sur les puissances)

2.4. Lien avec les suites géométriques
Propriété : Pour tout réel a, la suite (e^{na}) est une suite géométrique.

Démonstration : On pose $u_n = e^{na}$ pour tout entier naturel n. On a alors $u_{n-1} = e^{(n-1)a} = e^{na-a} = e^{na} \times e^a$ d'après la relation fonctionnelle. D'où, $u_{n+1} = e^a \times u_n$ pour tout entier naturel n. Donc $(u_n) = (e^{na})$ est une suite géométrique de raison $q = e^a$ et de premier terme $u_0 = e^{0 \times a} = e^0 = 1$. D'où, $u_n = u_0 q^n \Rightarrow e^{na} = 1 \times (e^a)^n = (e^a)^n$ (on retrouve la dernière propriété algébrique).

3. Etude de la fonction exponentielle

3.1. Sens de variation

La fonction exponentielle est strictement croissante sur IR car $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pour tout réel x.

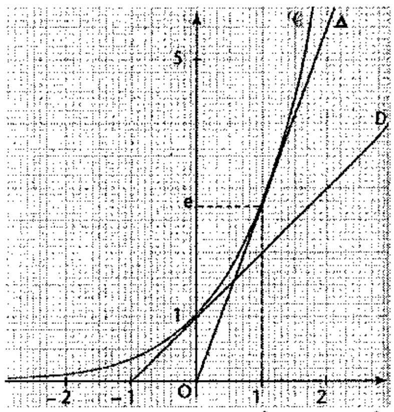
Conséquences : Pour tous réels a et b, $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$; $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.

3.2. Tableau de variation et courbe représentative

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x) = \exp(x) = e^x$		+		
$\exp(x) = e^x$	0 ↗	1	e	$+\infty$

Courbe représentative :



La tangente D au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = e^0(x - 0) + e^0 = x + 1$.

La tangente Δ au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = e^1(x - 1) + e^1 = ex$.

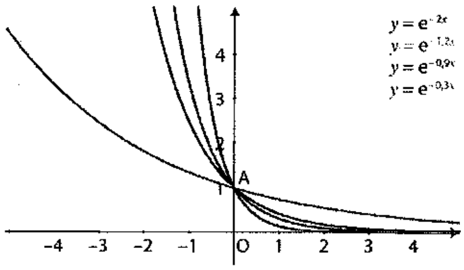
3.3. Fonctions $t \longrightarrow e^{-kt}$ et $t \longrightarrow e^{kt}$ (avec $k > 0$)

- Fonctions f_k définies sur IR par $f_k(t) = e^{-kt}$ avec k réel strictement positif. On a : $f_k'(t) = -ke^{-kt}$ en appliquant la dérivée de la fonction $x \longrightarrow g(ax + b)$ est la fonction $x \longrightarrow ag'(ax + b)$ avec $g = \exp$ et $g' = \exp' = \exp$, $a = -k$ et $b = 0$, $x = t$.

  Comme $k > 0$, $f_k'(t) < 0$ sur IR. D'où le tableau de variations :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_k'(t)$		−	
$f_k(t)$	$+\infty$ ↘	1	0

  Pour tout $k > 0$, les courbes représentatives des fonctions f_k passent par le point A (0 ; 1).



- Fonctions g_k définies sur IR par $g_k(t) = e^{kt}$ avec k réel strictement positif. On a : $g_k'(t) = ke^{kt}$ en appliquant la dérivée de la fonction $x \longrightarrow g(ax + b)$ est la fonction $x \longrightarrow ag'(ax + b)$ avec $g = \exp$ et $g' = \exp' = \exp$, $a = k$ et $b = 0$, $x = t$.

  Comme $k > 0$, $g_k'(t) > 0$ sur IR. D'où le tableau de variations :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$g_k'(t)$		+	
$g_k(t)$	0 ↗	1	$+\infty$

  Pour tout $k > 0$, les courbes représentatives des fonctions g_k passent par le point A (0 ; 1).