Chapitre 6 : Suites numériques (variations et limites)

1. Sens de variation d'une suite

1.1. Sens de variation d'une suite numérique

Définitions

(u_n) est une suite définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
Dire que (u_n) est **croissante** signifie que, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} \geq u_n}$.
Dire que (u_n) est **décroissante** signifie que, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} \leq u_n}$.

Vocabulaire : Si, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n}$, on dit que la suite (u_n) est **constante**.

Remarque : Lorsque la suite (u_n) est définie à partir du rang n_0, on compare u_n et u_{n+1} pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemples :

- (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 3n + 2$. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3(n+1) + 2 = 3n + 5$.
  Donc $u_{n+1} \geq u_n$. La suite (u_n) est croissante.
- (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_{n+1} = v_n - 2n^2$ avec $v_0 = 1$.
  Pour tout entier naturel n, $-2n^2 \leq 0$ donc $v_{n+1} \leq v_n$. La suite (v_n) est strictement décroissante.
- (w_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = (-1)^n$. $w_0 = 1$, $w_1 = -1$, $w_2 = 1$, $w_3 = -1$, …
  La suite (w_n) n'est ni croissante ni décroissante.

1.2. Etude du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

savoir

(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$. Si, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \geq 0}$, alors la suite (u_n) est **croissante**.
Si, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \leq 0}$, alors la suite (u_n) est **décroissante**.
En effet, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ équivaut à $u_{n+1} \geq u_n$.

Exemple : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n - 9 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2n - 9$.

Or, $2n - 9 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{9}{2} = 4{,}5$. Donc si $n \geq 5$, alors $2n - 9 > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n > 0$.

D'où la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang $n = 5$.

Sens de variation d'une suite arithmétique :
Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, on a $u_{n+1} - u_n = r$ pour tout entier naturel n.
Donc (u_n) est strictement croissante si $r > 0$, strictement décroissante si $r < 0$ et constante si $r = 0$.

1.3. Comparaison de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

savoir

On suppose que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.

Si, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1}$, alors la suite (u_n) est **croissante**.

Si, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1}$, alors la suite (u_n) est **décroissante**.

En effet, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ équivaut à $u_{n+1} \geq u_n$ car $u_n > 0$.

Exemple :

$u_n = \dfrac{5}{2^n} \Rightarrow u_n > 0$ pour tout entier naturel n et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{5}{2^{n+1}}}{\frac{5}{2^n}} = \dfrac{5}{2^{n+1}} \times \dfrac{2^n}{5} = \dfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ la suite (u_n) est décroissante.

Sens de variation d'une suite géométrique :
Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 (avec $q > 0$ et $u_0 > 0$).

Alors, pour tout entier naturel n, $u_n = q^n u_0$, donc $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

Le sens de variation dépend donc de la place de q par rapport à 1 :

- si $0 < q < 1$, alors (u_n) est strictement décroissante ;
- si $q > 1$, alors (u_n) est strictement croissante ;
- si $q = 1$, alors (u_n) est constante.

1.4. Suites du type $u_n = f(n)$

f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ et, pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.
Si la fonction f est **croissante** sur $[0 ; +\infty[$, alors la suite (u_n) est **croissante**.
Si la fonction f est **décroissante** sur $[0 ; +\infty[$, alors la suite (u_n) est **décroissante**.
En effet, si f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors de $n + 1 \geq n$, on déduit $f(n + 1) \geq f(n)$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_n$.

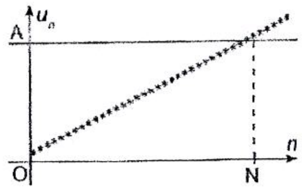
2. Notion de limite, finie ou infinie, d'une suite

2.1. Suite de limite $+\infty$

Exemple : (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1{,}5n + 5$.

u_n dépasse 10 à partir du rang $n = 4$.	u_n dépasse 100 à partir du rang $n = 64$.	u_n dépasse 1 000 à partir du rang $n = 664$.

Plus généralement, on démontre que, pour tout nombre réel A, aussi grand que l'on veut, u_n dépasse définitivement A à partir d'un certain rang N.



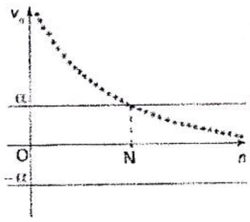
Pour traduire cette propriété, on dit que **la suite (u_n) a pour limite $+\infty$** et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2.2. Suite de limite 0

Exemple : (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{1}{n}$.

v_n appartient à l'intervalle $]-0{,}1 ; 0{,}1[$ à partir du rang $n = 11$.	v_n appartient à l'intervalle $]-0{,}05 ; 0{,}05[$ à partir du rang $n = 21$.	v_n appartient à l'intervalle $]-0{,}01 ; 0{,}01[$ à partir du rang $n = 101$.

Plus généralement, on démontre que, pour tout nombre réel strictement positif α, aussi proche de 0 que l'on veut, v_n appartient définitivement à l'intervalle $]-\alpha ; \alpha[$ à partir d'un certain rang N.



Pour traduire cette propriété, on dit que **la suite (v_n) a pour limite 0** et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Remarque :
Une suite peut avoir aussi pour limite un nombre réel autre que 0 ou avoir pour limite $-\infty$ ou enfin ne pas avoir de limite.