Chapitre : Variations et courbes représentatives des fonctions

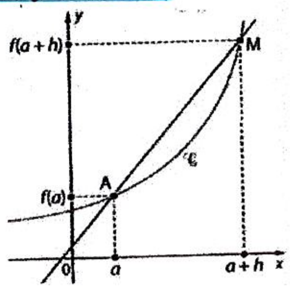
1. Lien entre le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et le signe de sa fonction dérivée

1.1. Du sens de variation d'une fonction au signe de la dérivée

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et sa dérivée f' sur I.

- Si f est **croissante** sur I, alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \geq 0$.
- Si f est **décroissante** sur I, alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \leq 0$.

Idée graphique de la démonstration pour f croissante :



Dans la figure ci-dessus, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f croissante sur I, a et $a + h$ sont deux réels quelconques de l'intervalle I avec h réel strictement positif. On s'intéresse à la droite passant par les points A(a ; $f(a)$) et M($a + h$; $f(a + h)$). Son coefficient directeur est égal à : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

On appelle $\varphi(h)$ ce coefficient directeur. Lorsque f est croissante sur I, cette sécante (AM) a un coefficient directeur positif et $\varphi(h)$ semble rester positif lorsque le point M se rapproche aussi près que l'on veut du point A, c'est-à-dire lorsque h s'approche aussi près que l'on veut de 0.

De plus, lorsque h s'approche aussi près de 0 que l'on veut, on sait que $\varphi(h)$ s'approche de $f'(a)$; on admet ainsi que, si f est croissante sur I, alors $f'(a)$ est positif pour tout réel a de I.

1.2. Du signe de la dérivée au sens de variation de la fonction

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et sa dérivée f' sur I.

- Si, pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$ sur I, alors f est **croissante** sur I.
- Si, pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$ sur I, alors f est **décroissante** sur I.

Les énoncés « $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x de I » et « f est croissante sur I » sont donc des énoncés équivalents.

Lorsque $f'(x)$ ne s'annule pas sur I ou bien seulement en quelques points de I, on dit que f est **strictement croissante** sur I.

Exemple : Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = -x^2 + 6x + 1 \Rightarrow f'(x) = -2x + 6$.

On construit un tableau de variation donnant à la fois le signe de $f'(x)$ et le sens de variation de f :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	10	↘	$-\infty$

Tableau de variation complet

1.3. Caractérisation des fonctions constantes

Propriété : Une fonction f est **constante** sur un intervalle I, si et seulement si, pour tout nombre réel x de I, on a : $f'(x) = 0$.

Démonstration :

- Si f est constante sur I, alors $f'(x) = 0$ pour tout réel x de I, d'après la formule de dérivation.
- Réciproquement, si $f'(x) = 0$ pour tout réel x de I, alors $f'(x) \geq 0$ sur I et donc f est croissante sur I d'après la propriété précédente.
  De même, si $f'(x) = 0$ pour tout réel x de I, alors $f'(x) \leq 0$ sur I et donc f est décroissante sur I d'après la même propriété.
  Puisque f est à la fois croissante et décroissante sur I, elle est constante sur I.

2. Nombre dérivé en un extremum d'une fonction

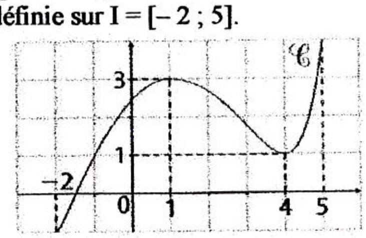
2.1. Extremum local d'une fonction

Définition : f est une fonction définie sur un intervalle I et c est un nombre réel de I.

Dire que $f(c)$ est un **maximum local** (respectivement **minimum local**) de f signifie qu'il existe un intervalle **ouvert J** inclus dans I et contenant c tel que, pour tout nombre réel x de J, $f(x) \leq f(c)$ (respectivement $f(x) \geq f(c)$).

On parle d'**extremum local** pour désigner soit un maximum local, soit un minimum local.

Exemple : f st une fonction définie sur I = [– 2 ; 5].



$f(1) = 3$ est un maximum local de f car, pour tout $x \in$ J =]– 2 ; 4[$\subset$ I, $f(x) \leq 3$; $f(4) = 1$ est un minimum local de f car, pour tout $x \in$ J' =]1 ; 5[$\subset$ I, $f(x) \geq 1$.

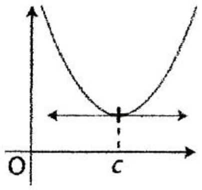
Remarque : si f est monotone, les extremums sont atteints aux bornes de l'intervalle.

2.2. Extremum local et dérivée

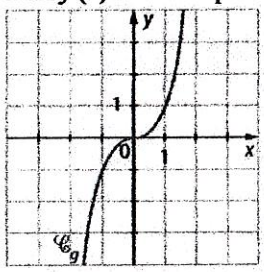
Propriété (admise) : f est une fonction dérivable sur un intervalle I et c est un nombre réel de I.
Si $f(c)$ est un extremum local de f, alors $f'(c) = 0$.

Remarques :

- Si $f(c)$ est un extremum local, alors **la tangente** à la courbe représentative de f admet au point d'abscisse c est **parallèle à l'axe des abscisses** (on dit aussi **horizontale**). On schématise souvent cette tangente horizontale de la façon suivante :



- La réciproque de cette propriété est fausse. Par exemple, la fonction cube f a une dérivée qui s'annule en 0 car $f'(x) = 3x^2$ et donc $f'(0) = 3 \times 0^2 = 0$ mais $f(0) = 0$ n'est pas un extremum local de f.



Le fait que la dérivée s'annule est une condition nécessaire mais pas suffisante pour qu'une fonction admette un extremum local.

Propriété (admise) : f est une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et c est un nombre réel de I qui n'est pas une extrémité de I.
Si f' s'annule en c changeant de signe, alors $f(c)$ est un extremum local de f.

Exemples :

- La fonction carré f a une dérivée qui s'annule en 0 en changeant de signe puisque $f'(x) = 2x$.
  Donc f admet un extremum local en 0.
- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-30	↗	$+\infty$

f' s'annule en 0 en changeant de signe $\Rightarrow f(0) = 2$ est un extremum local et, d'après le tableau, il s'agit d'un maximum local.
f' s'annule en 4 en changeant de signe $\Rightarrow f(4) = -30$ est un extremum local et, d'après le tableau, il s'agit d'un minimum local.

Sur un intervalle $]a\,;b[$ contenant c, on peut se trouver dans l'une des situations ci-dessous.

x	a		c		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(c)$	↗	

$f(c)$ est un minimum local.

x	a		c		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f(c)$	↘	

$f(c)$ est un **maximum local.**

3. Fonctions polynômes du second degré

3.1. Sens de variation de la fonction $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$)

f est une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2ax + b$. Le signe d'une fonction affine permet de dire que $f'(x)$ s'annule en $-\dfrac{b}{2a}$ en changeant de signe. Donc f admet un extremum en $-\dfrac{b}{2a}$.

Propriété :

- Cas où $a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗	

- Cas où $a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘	

3.2. Courbe représentative de la fonction $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$)

Définition : Dans un repère orthogonal, la courbe représentative $\mathscr{P}$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) est une **parabole de sommet S** $\left(-\frac{b}{2a}\,;f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$. On rappelle que $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Propriété : Cette parabole admet la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ pour **axe de symétrie.**

Démonstration : Pour tout nombre réel x, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ (forme canonique de $f(x)$). On note h un nombre réel.

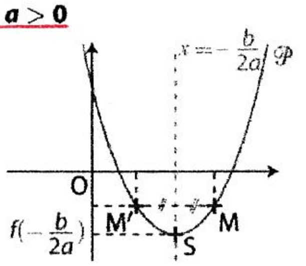
M est le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse $-\frac{b}{2a} + h$. Son ordonnée est $f\left(-\frac{b}{2a} + h\right) = a\left(\left(-\frac{b}{2a} + h + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = ah^2 - \frac{\Delta}{4a}\right.$.

M' est le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse $-\frac{b}{2a} - h$. Son ordonnée est $f\left(-\frac{b}{2a} - h\right) = a\left(\left(-\frac{b}{2a} - h + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = ah^2 - \frac{\Delta}{4a}\right.$.

Les points M et M' sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Comme c'est le cas pour tout nombre réel h, cette droite est axe de symétrie de la parabole $\mathscr{P}$.

- **Cas où $a > 0$**



- **Cas où $a < 0$**