



## INFORMAÇÕES GERAIS DO TRABALHO

**Título do Trabalho:** Investigação de abordagens heurísticas para resolução de projeto de redes eixo-raio com alocação simples

**Autor (es):** Rodrigo Ferreira de Brito; Bruno Nonato Gomes

**Palavras-chave:** Redes eixo-raio, Otimização combinatória, Heurística

**Campus:** Sabará

**Área do Conhecimento (CNPq):** Pesquisa Operacional

## RESUMO

Este artigo aborda o projeto de redes eixo-raio com alocação simples que são estruturas de redes alocando pontos de origem e destino indiretamente por nós concentradores. Tal modelo é muito utilizado em serviços de transportadoras, onde as cargas são alocadas a uma central que concentra o fluxo de demanda e fazem a redistribuição para outras centrais. Por se tratar de um problema NP-Difícil, propõe-se uma heurística para resolução do mesmo, composta por um eficiente fase de construção e 4 funções de vizinhança exploradas em buscas locais e perturbações. Os resultados reportados nos experimentos computacionais mostraram que a heurística proposta supera outro método, considerado estado da arte na literatura, tanto em qualidade de soluções quanto em tempo computacional. O algoritmo desenvolvido também foi aplicado a um estudo de caso considerando os municípios de um estado brasileiro. Resultados mostraram que o método foi capaz de projetar redes aplicáveis na prática.

## INTRODUÇÃO

Redes são utilizadas em várias situações e áreas de conhecimento, elas proporcionam melhorias organizacionais e são ótimos meios para otimização de custos. Atualmente as redes são aplicadas em diversos setores da indústria, principalmente em situações onde se é necessário conectar pontos e distribuir demanda.

Buscando otimizar custos na construção de uma rede, diversas topologias e modelos organizacionais vem sendo abordados, entre eles o modelo de redes eixo-raio (ER) vem se destacando por possuir grandes aplicações nos setores de transporte, telecomunicações, entre outros (Alumur e Kara, 2008).

De modo geral a rede ER é uma topologia onde a conexão entre os pares de origem e destino não é feita diretamente, e sim por pontos de transbordo, conhecidos como concentradores. Este formato vem sendo amplamente abordado por ser uma alternativa de configuração mais econômica na construção de redes (O'Kelly e Miller, 1994). Com isso, as redes do tipo ER reduzem significativamente o custo de instalação e gerenciamento da rede, além de permitir o usufruto da economia de escala ao consolidar os fluxos nos concentradores.

Um exemplo de aplicação das redes ER são empresas transportadoras de cargas fracionadas, tais empresas organizam suas entregas alocando pontos de distribuição em lugares estratégicos visando a redução de custos. A estratégia comumente adotada consiste em utilizar veículos de pequeno porte para transporte entre central e clientes, e veículos de maior porte para transportes de larga escala entre as centrais instaladas. Essa estratégia de agregação do fluxo de demanda proporciona economia às empresas, uma vez que as mesmas enviam maior fluxo de encomendas em conjunto por meio de um transporte único e mais econômico.

O objetivo da construção da rede ER é substituir o grande número de ligações diretas por um número menor de ligações indiretas através de nós concentradores. Os concentradores podem ser representados de diversas formas de acordo com o contexto que estiver inserido. Podem ser encontrado como *hubs*, depósitos, servidores, centrais, entre outros. Eles são encarregados de agregar e distribuir a



demanda dos demais nós da rede, que podem ser representados em um meio contextualizado como clientes, terminais, destinatários, entre outros.

A Figura 1 ilustra um exemplo de aplicação das redes do tipo ER, onde (a) representa uma rede malha, na qual todos os nós são interligados entre si, e em (b) tem-se a rede do tipo ER tradicional. Pode-se ver claramente que redes do tipo ER possuem menos conexões em relação a rede malha.

Além de reduzir muitas conexões, o

concentrador obriga que todo o fluxo passe por ele antes de alcançar o destino. A agregação de fluxo em um nó concentrador proporciona utilização do transporte de maneira mais eficiente, transmitindo maior volume de carga nas conexões entre nós concentradores, consequentemente reduzindo o custo de transporte por unidades.

Na literatura, as redes ER também são identificadas como um Problema de Localização de Concentradores (PLC), tendo o objetivo de minimizar o custo total de transporte entre entidades de uma rede. Tal problema pode possuir diferentes versões de acordo com as restrições fluxo, número de concentradores, custos fixo de instalação, entre outros (Aykin, 1994). Um estudo detalhado sobre as versões do PLC pode ser encontrado na revisão de Alumur e Kara (2008), onde são citados mais de 100 trabalhos com diferentes variações do problema.

O PLC foi introduzido por Goldman (1969), no entanto a primeira abordagem acerca do Problema de Localização de Concentradores Não Capacitado com Alocação Simples (do inglês, *Uncapacitated Single Allocation Hub Location Problem* - USAHLP) foi realizada por O'Kelly (1987). Nesse trabalho, os autores propuseram uma modelagem matemática com função objetivo quadrática. Outras formulações matemáticas envolvendo o PLC foram trabalhadas por Campbell (1994). O autor classifica o problema de acordo com a função objetivo, englobando o custo total de transporte, o custo fixo de instalação de concentradores e também tempo total de transporte.

Por se tratar de um problema NP-Difícil, abordagens exatas se tornam inviáveis para instâncias com grandes dimensões. Nesses casos, a determinação da solução ótima pode exigir grande esforço computacional. Diante disso, diversas abordagens heurísticas têm sido propostas para resolução do USAHLP.

Mais recentemente, Gomes et al. (2013) propôs uma abordagem evolucionária composta de um eficiente processo construtivo, novos operadores de cruzamento e mutação, além de um procedimento de busca local. Tal método mostrou-se muito eficaz aplicado às instâncias CAB e AP, superando 4 outros métodos evolucionários considerados estado da arte na literatura.

Uma revisão mais detalhada pode ser encontrada nos trabalhos de Alumur e Kara (2008) e Farahani et al. (2013), onde os autores realizaram estudos sobre o estado da arte dos principais trabalhos desenvolvidos até o momento.

Motivado pela dificuldade de resolução do problema, propõe-se uma heurística composta por uma fase de construção baseada na metaheurística *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* (GRASP) e quatro estruturas de vizinhanças exploradas em buscas locais e perturbações. O método implementado foi testado em instâncias padrão da literatura e comparado com a heurística de Gomes et al. (2013). Resultados mostraram a superioridade do algoritmo desenvolvido em qualidade de soluções e tempo de processamento. Além disso, o método implementado foi submetido às instâncias que simulam uma aplicação real com os municípios do estado de Minas Gerais. Nesse caso, a heurística proposta obteve soluções boas na prática, uma vez que distribui os concentradores igualmente por todo espaço territorial do estado.

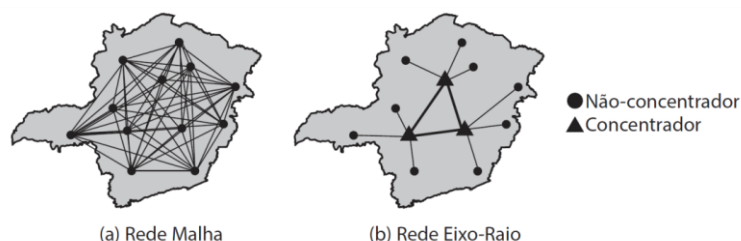


Figura 1: Exemplos de topologias de redes



## FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

O modelo matemático proposto por O'Kelly (1987) é baseado nas seguintes definições:  $N$  é o conjunto de  $n$  nós de uma rede, onde o parâmetro  $w_{ij}$  é o fluxo de demanda originado em  $i$  com destino a  $j$  ( $i, j \in N : i \neq j$ ), o qual é roteado por um ou dois concentradores instalados na rede. O custo de transporte por unidade de demanda nesse caminho é definido por  $c_{ijkm} = c_{ik} + \alpha c_{km} + c_{mj}$ , sendo  $0 \leq \alpha \leq 1$  o fator de desconto que representa a economia de escala nas conexões entre os concentradores. O custo fixo da instalação de um concentrador em um dado nó  $k \in N$  é dado pelo parâmetro  $f_k$ . A variável de decisão  $z_{ik} \in \{0,1\}$ ,  $\forall i, k \in N$ , indica a localização dos concentradores e a alocação dos nós aos concentradores instalados. Assim, se  $z_{ik} = 1$ , o nó  $i$  é atribuído ao concentrador  $k$ , e  $z_{ik} = 0$ , caso contrário. Além disso, se um concentrador é localizado no nó  $k$ ,  $z_{kk} = 1$ , senão  $z_{kk} = 0$ .

$$\text{Minimize } \sum_{k=1}^n f_k z_{kk} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{m \neq k}^n (w_{ij} c_{ijkm} + w_{ji} c_{ijmk}) z_{ik} z_{jm} \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{k=1}^n z_{ik} = 1, \quad \forall i \in N \quad (2)$$

$$z_{ik} \leq z_{kk}, \quad \forall i \neq k \in N \quad (3)$$

$$z_{ik} \in \{0,1\}, \quad \forall i, k \in N \quad (4)$$

A Equação (1) tem o objetivo de minimizar o custo total de operação da rede, composto pelo custo de transporte do fluxo de demanda e custo fixo de instalação dos concentradores. As restrições em (2) garantem que cada nó possa estar alocado a somente um concentrador. As restrições representadas por (3) permitem a alocação do nó  $i$  ao nó  $k$ , somente se  $k$  for um concentrador. As equações (4) são restrições de integralidade da variável  $z$ .

## HEURÍSTICA IMPLEMENTADA

O algoritmo proposto é composto por um eficiente método construtivo baseado no método *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* (GRASP), o método construtivo é capaz de gerar uma solução de boa qualidade que servirá como ponto de partida para o processo de exploração. Após isso, a solução inicialmente gerada é explorada através de uma estrutura sistemática composta por perturbações em vizinhanças aleatórias e um processo de busca local que organiza as 4 estruturas de vizinhanças abordadas de forma sequencial para exploração do espaço de busca. O Algoritmo 1 apresenta a estrutura geral do método implementado.

O método de busca local é realizado por meio da metaheurística Descida em Vizinhança Variável (VND) (Mladenovic e Hansen, 1997), que é aplicada com o intuito de buscar melhorias na solução corrente a cada iteração trabalhada. Em situações onde não é obtido melhoria, após a busca local, a solução corrente é submetida a um processo de buscas em vizinhanças variáveis (VNS) (Mladenovic e Hansen, 1997). O processo consiste em explorar a solução corrente em perturbações aleatórias, em conjunto com o VND aplicado em busca local. Desta forma, é possível explorar soluções cada vez mais distantes, proporcionando assim uma maior capacidade de escapar de ótimos locais (Mladenovic e Hansen, 1997).

---

### Algoritmo 1: Estrutura da heurística proposta

---

**Entrada:** Matriz de distâncias (C), Matriz de demanda (W), Custo Fixo de Instalação (F)

**Saída:** Solução S

**início**

$S \leftarrow$  Construir solução (S, C, W, F);

$S \leftarrow$  VND (S, C, W, F);

**repita**

$S1 \leftarrow$  Perturbação Troca de Função (S, C, W, F);

$S1 \leftarrow$  VND (S1, C, W, F);

**se**  $FO(S1) < FO(S)$  **então**

$S \leftarrow S1$ ;

**senão**

$S \leftarrow$  VNS (S, C, W, F);

**fim**

**até** Critério de parada;

Retorne S

**fim**

---



Dentre as vizinhanças abordadas pelo VNS, a perturbação Troca de Função (TF) se mostrou muito promissora, sendo capaz de conseguir boas melhorias em conjunto com o VND. Pelo fato do VNS apresentar uma alta complexidade computacional, foi proposta uma abordagem utilizando a perturbação TF a cada iteração, evitando assim a execução excessiva do VNS. O algoritmo finaliza após um número pré-estabelecido de iterações sem melhora, onde a quantidade definida é dependente do domínio do problema proposto e do grau de refinamento desejado.

## PROCESSO DE CONTRUÇÃO

A estratégia de construção de soluções é baseada no processo construtivo do GRASP (Feo e Resende, 1995). Nessa estratégia, a solução é inicializada com somente um concentrador instalado, sendo submetida a um procedimento de melhoria, em que um novo concentrador é adicionado até que o custo total dessa mudança não resulte em redução de custo (Gomes et al., 2013).

O algoritmo define uma estrutura de seleção através da criação de uma lista gerada de possíveis concentradores. Desta forma, apenas os nós que estejam dentro de uma margem de aceitação definida são selecionados de forma iterativa até que não se tenha mais nós candidatos disponíveis, garantindo uma boa qualidade e velocidade no processo construtivo.

## ESTRUTURA DE VIZINHANÇAS

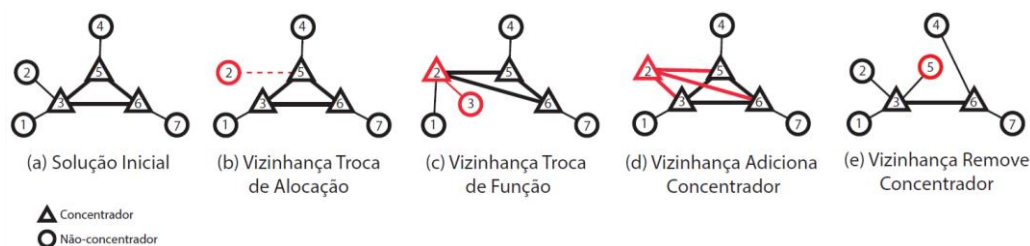


Figura 2: Vizinhanças

A presente seção descreve as estruturas de vizinhança exploradas nas buscas locais e perturbações utilizadas pelo VNS. As estruturas de vizinhança implementadas são ilustradas na Figura 2. Essas estruturas são exploradas tanto nos procedimentos de busca local, quanto nas perturbações.

**Vizinhança Troca Alocação (TA):** modifica as alocações dos nós não-concentradores, testando todas as possibilidades de alocação para cada nó da solução explorada. A Figura 2 (b) exemplifica um movimento dessa vizinhança, em que a alocação do nó 2 é trocada entre os concentradores 3 e 5.

**Vizinhança Troca Função (TF):** troca a função entre um nó não-concentrador e o concentrador a qual está alocado, ou seja, os nós invertem seus papéis. O movimento é realizado em todas as combinações possíveis para cada concentrador. A Figura 2 (c) exemplifica um movimento dessa vizinhança, onde os nós 2 e 3 trocam de função.

**Vizinhança Insere Concentrador (IC):** realiza a inserção de um novo concentrador na solução. A Figura 2 (d) mostra o movimento, onde o nó 2 passa a ser um novo concentrador da solução corrente.

**Vizinhança Remove Concentrador (RC):** realiza a remoção de concentradores, transformando em um nó não concentrador e alocando todos os nós aos concentradores mais próximos. A Figura 2 (e) mostra um exemplo onde o nó 5, que era um concentrador inicialmente, passa a ser um nó não-concentrador.

## RESULTADOS

Com o objetivo de avaliar o método proposto, realizou-se um estudo comparativo com o algoritmo de Gomes et al. (2013). Os algoritmos foram comparados em relação a eficiência para encontrar a solução ótima. Cabe lembrar que a solução ótima foi obtida pelo algoritmo de Benders do trabalho de Castro (2010).

Ambos os algoritmos foram implementados em C++, e os experimentos computacionais foram executados em um processador Intel Core i7-4510U 2.0GHz, 8GB RAM e sistema operacional Windows 8.1.



Nos experimentos utilizou-se a base de dados *Australian Post* (AP) (Ernst e Krishnamoorthy, 1996), com instâncias de  $|N| = \{10, 20, \dots, 100, 130, 150, 170, 200\}$ , e  $\alpha = \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$  como fatores de desconto. Assim, tem-se 56 configurações diferentes que foram executadas 10 vezes por cada algoritmo.

Após intenso processo de calibração, os parâmetros do algoritmo foram configurados da seguinte forma. Na fase de construção definiu-se  $\lambda = 5\%$ . O critério de parada do algoritmo principal foi definido por um limite de 20 iterações sem melhoria. A sequência de vizinhanças utilizadas pelo VND e VNS é:  $V = \{TA, TF, IC, RC\}$ .

Nos experimentos, as seguintes métricas foram computadas: GapMed, GapMin e #Best. Para isso, calcula-se a porcentagem relativa de desvio entre a solução ótima de cada instância e as soluções retornadas pelos métodos. Considerando todas as execuções de cada método, GapMin representa o desvio relativo entre a solução ótima e a melhor solução retornada pelo método e GapMed o desvio relativo entre a solução ótima e a média das soluções retornadas pelo método. Além disso, #Best denota o número vezes em que a solução ótima foi encontrado pelo método para cada instância.

	GapMin	GapMed	#Best	Tempo Médio(s)
Heur. Proposta	0,0039	0,0353	448	29,3119
Gomes et al. (2013)	0,1997	0,3153	211	70,1561

Tabela 1: Heurística proposta x Gomes et al. (2013)

A Tabela 1 reporta a eficiência do método proposto em relação ao AG proposto por Gomes et al. (2013). A heurística proposta se mostrou superior em todas as métricas apresentadas, principalmente em qualidade das soluções para instâncias de maior escala, alcançando os valores ótimos da literatura na maioria dos casos apresentados. O método desenvolvido não alcançou a solução ótima em somente 3 instâncias: AP150-6, AP150-8 e AP170-6.

Em relação à tempo computacional, a heurística proposta também foi superior ao AG para pequenas e médias instâncias, em alguns casos sendo até 10 vezes mais rápida. Para instâncias de maior escala, ambos os métodos apresentaram valores próximos.

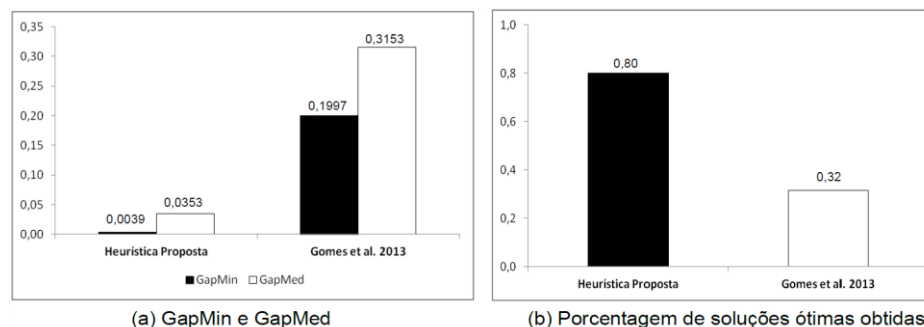


Figura 3: Heurística Proposta x Gomes et al. (2013).

método da literatura, retornando média de GaMed bem menor que a média de GapMin do AG. Isso demonstra a performance efetiva e homogênea diante das 56 instâncias testadas. A Figura 3 (b) mostra um comparativo da capacidade das heurísticas em encontrar os valores ótimos considerando todas as execuções. Percebe-se claramente que a heurística proposta se mostrou superior, alcançando a solução ótima em 80% das 560 execuções de instâncias testadas, ao contrário do AG que alcançou o valor ótimo em apenas 32% das vezes.

## ESTUDO DE CASO – MUNICÍPIOS DE MINAS GERAIS

A Figura 3 (a) apresenta uma comparação acerca da média do GapMin e GapMed alcançado pelas heurísticas. Nota-se que o algoritmo do presente trabalho possui comportamento extremamente robusto em comparação com o





Diversas empresas do ramo de transporte e telecomunicações utilizam redes ER na configuração

de suas redes logísticas, porém grande parte dessas empresas projetam e/ou atualizam suas redes de forma empírica, ou seja, não utilizam métodos computacionais para auxiliar nessa tarefa. Motivado por esse contexto e com o objetivo de mostrar que a utilização de métodos computacionais auxiliam na obtenção de soluções eficientes, uma simulação de aplicação real ao cenário brasileiro é proposta. Essa simulação envolve um estudo de caso com todos os

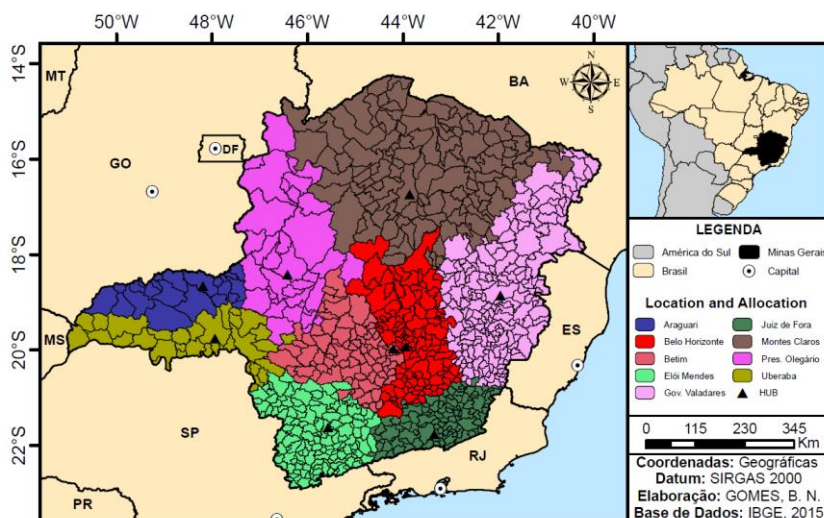


Figura 4: Rede ER considerando os 853 municípios de Minas Gerais

853 municípios do estado de Minas Gerais, considerando dados reais de distância rodoviária e demanda baseada no Produto Interno Bruto (PIB) e população de cada município. Os dados foram obtidos a partir de dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 2011) e API do Google Maps (Google, 2013). Nessa simulação, os custos fixos de instalação dos concentradores e a demanda entre cada par de municípios são geradas através de regressão linear envolvendo os dados de PIB e população. Os custos de transporte das demandas entre os municípios são representados pela distância rodoviária entre os mesmos.

A Figura 4 mostra a rede projetada pela heurística para os 853 municípios de Minas Gerais. Pela figura, percebe-se que a solução projetada possui boa distribuição em relação à instalação dos concentradores e alocação dos municípios aos concentradores instalados, dividindo bem o espaço territorial do estado. Pela distribuição das instalações e alocações, vê-se que os projetos das redes retornados pelo método proposto podem possuir boa aplicabilidade na prática, principalmente para instâncias de grande dimensão, sendo uma ótima alternativa em detrimento à soluções empíricas diversas vezes utilizadas pelas empresas.

Um projeto bem elaborado se torna ainda mais importante, devido à pressão existente em relação à diminuição dos custos, aumento do nível de serviço prestado, horários cada vez mais apertados, além da exigência de melhoria da qualidade de vida dos motoristas e mudanças rápidas nas condições econômicas. Portanto as redes projetadas pelo algoritmo desenvolvido nesse trabalho demonstram boa aplicabilidade na prática e podem resultar em melhorias significativas no desempenho logístico e financeiro de empresas que atuam nesse ramo.

## CONCLUSÕES

Nesse artigo propôs-se uma eficiente heurística iterativa para o projeto de redes ER com alocação simples. O método se mostrou muito robusto em comparação com o método de Gomes et al. (2013), superando-o tanto em qualidade das soluções quanto em tempo computacional. Além disso, o algoritmo foi capaz de alcançar em 80% das execuções o valor ótimo das instâncias AP testadas.

Uma vez comprovada a eficiência do método, o mesmo foi submetido à um estudo de caso considerando os municípios do estado de Minas Gerais. Nesse estudo, simulou-se instâncias reais baseadas nas informações de distância, demanda e PIB dos municípios do estado. Pelos experimentos realizados, o algoritmo se mostrou capaz projetar boas redes, distribuindo os concentradores e alocando os municípios igualmente por todo o território do estado.



## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- ALUMUR, S.; KARA, B. Y. Network hub location problems: The state of the art. **European Journal of Operational Research**, v. 190, n. 1, p. 1 – 21, 2008. ISSN 0377-2217.
- AYKIN, T. Lagrangian relaxation based approaches to capacitated hub-and-spoke network design problem. **European Journal of Operational Research**, v. 79, n. 33, p. 501–523, 1994.
- CAMPBELL, J. F. Integer programming formulations of discrete hub location problems. **European Journal of Operational Research**, v. 72, n. 2, p. 387 – 405, 1994. ISSN 0377-2217.
- CASTRO, R. R. M. **Sistemas eixo-raio de alocação simples: Modelos e Algoritmos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2010.
- ERNST, A.; KRISHINAMOORTHY, M. Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem. **Location Science**, v. 4, n. 3, p. 139 – 154, 1996.
- FARAHANI, R. Z. et al. Hub location problems: A review of models, classification, solution techniques, and applications. **Computers & Industrial Engineering**, v. 64, p. 1096–1109, 2013.
- FEO, T. A.; RESENDE, M. G. C. Greedy randomized adaptive search procedures. **Journal of Global Optimization**, v. 6, p. 109–133, 1995.
- GOLDMAN, A. Optimal location for centers in a network. **Transportation Science**, v. 3, p. 352–360, 1969.
- GOMES, B. et al. An efficient genetic algorithm for the design of hub-and-spoke networks. **Communications Letters, IEEE**, v. 17, n. 4, p. 793 – 796, 2013.
- GOOGLE. **A API da Matriz de distâncias do Google**. [S.l.: s.n.], 2013. Disponível em: <<https://developers.google.com/maps/documentation/distancematrix/>>. Acesso em: 15 maio 2015, 16:12.
- IBGE. **Sistema IBGE de Recuperação Automática - SIDRA**. [S.l.: s.n.], 2011. Disponível em: <[www.sidra.ibge.gov.br](http://www.sidra.ibge.gov.br)>. Acesso em: 14 maio 2015, 09:22.
- MLADENOVIC, N.; HANSEN, P. A variable neighborhood search. **Computers and Operations Research**, v. 24, p. 1097–1100, 1997.
- O'KELLY, M. E. A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. **European Journal of Operational Research**, v. 32, n. 3, p. 393 – 404, 1987. ISSN 0377-2217.
- O'KELLY, M. E.; MILLER, H. J. The hub network design problem: A review and synthesis. **Journal of Transport Geography**, v. 2, n. 1, p. 31 – 40, 1994. ISSN 0966-6923.

## Participação em Congressos, publicações e/ou pedidos de proteção intelectual:

Durante o desenvolvimento do projeto de pesquisa foram submetidos e apresentados diversos trabalhos em congressos e periódicos tanto nacionais como internacionais.

Apresentação de pôster no *I Brazilian Congress of Young Researchers in Pure and Applied Mathematics* que ocorreu na USP em dezembro de 2014 na cidade de São Paulo.

Em agosto de 2015 foi publicado e apresentado um artigo completo no XLVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, que ocorreu em Porto de Galinhas.

Também foi publicado um artigo completo no XXXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. Congresso internacional que ocorreu em novembro de 2015 no Rio de Janeiro.

Além disso, o projeto de pesquisa foi exposto e apresentado em alguns eventos realizados pelo IFMG Campus Sabará, tais como as Feiras de Ciência e Tecnologia dos anos de 2014 e 2015 e também no Encontro Anual de Tecnologia da Informação (EATI) realizado em 2016.