# Решение модельных оптимизационных задач на графах средствами Excel

## Постановка задачи

Графовые методы часто используются при решении разнообразных задач как технического так и экономического характера [1–3]. При этом граф выступает в роли модели исследуемого объекта, а решение конкретной задачи сводится к поиску некоторого оптимального подмножества, пути, цикла, подграфа в этом графе.

В теории графов известно большое количество алгоритмов для самых разнообразных задач. Однако для их использования требуется специальное программное обеспечение, разработка которого доступна далеко не каждому пользователю. Возникает вопрос, возможно ли применение для некоторых из них какой-либо широко распространённой системы, не требующей навыков программирования?

В качестве таковой можно использовать Microsoft Excel имеющий надстройку *Поиск решения*, которая позволяет находить решение задачи линейного программирования [4, 5]. В этом случае оптимизационная задача на графе должна быть сведена к последней.

В данной работе рассматриваются задачи поиска кратчайшего пути, гамильтонова цикла и наименьшего доминирующего множества графа [1–3], для каждой из них предлагается линейная оптимизационная модель и алгоритм её реализации в Excel.

## Поиск кратчайшего пути

Пусть граф

$$G=(V, S) \tag{1}$$

задан множеством вершин $V=\{v_1,...,v_n\}$ и матрицей смежности $S=[s_{ij}]$ порядка $n$, где

$$s_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \text{ и } v_j \text{ соединены ребром;}\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{2}$$

Даны две произвольные вершины $v_{нач}$ и $v_{кон}$ из множества $V$. Необходимо найти кратчайший путь из $v_{нач}$ в $v_{кон}$, который бы проходил через минимальное количество рёбер графа. Пример кратчайшего пути между вершинами 1 и 6 изображён на рисунке 1 пунктиром.

Введём целочисленные переменные $x_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}$ ,где

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{кратчайший путь содержит переход из вершины } v_i \text{ в } v_j;\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

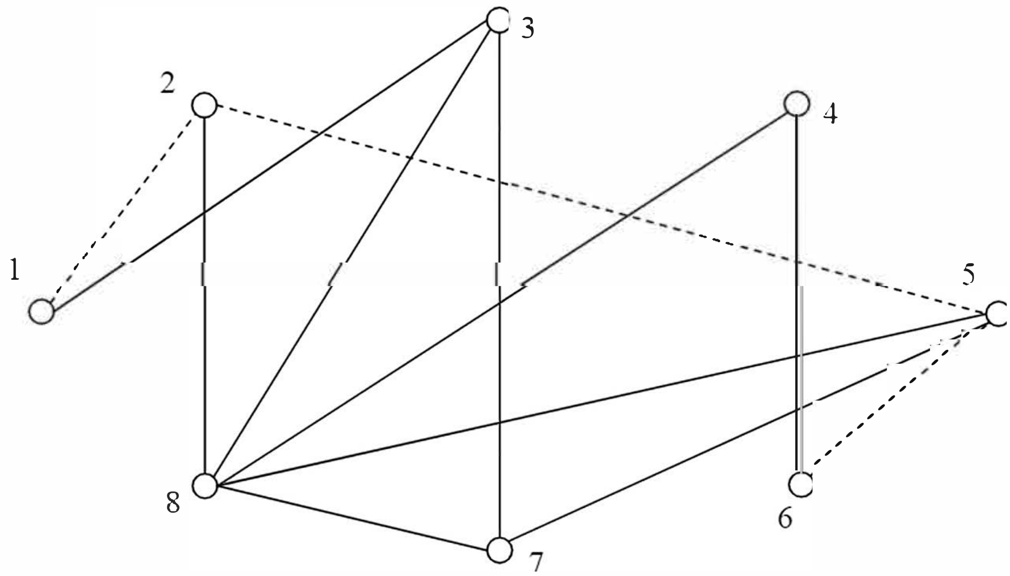


*Рисунок 1. Кратчайший путь*

Целевая функция имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_{ij} \to \min.$$

В ней вычисляется количество переходов между вершинами в кратчайшем пути. Минимизация означает, что решением является путь, содержащий минимальное количество переходов.

Первая пара ограничений задаёт условия для начальной вершины пути $v_{нач}$. В искомом пути в эту вершину не должно быть входа, но должен быть один выход:

$$\sum_{i=1}^{n} s_{i\,нач} x_{i\,нач} = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} s_{нач\,j} x_{нач\,j} = 1.$$

Вторая пара ограничений задаёт условия для конечной вершины пути $x_{кон}$. В неё должен быть один вход, но не должно быть выхода:

$$\sum_{i=1}^{n} s_{i\,кон} x_{i\,кон} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} s_{кон\,j} x_{кон\,j} = 0.$$

Для всех остальных вершин (кроме $v_{нач}$ и $v_{кон}$) устанавливаются ограничения, задающие равенство количества входов и выходов в каждую из них в искомом кратчайшем пути:

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ik} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} s_{kj} x_{kj} = 0, \; k = \overline{1,n}, \; k \neq нач, \; k \neq кон.$$

Для каждой вершины количество входов не должно быть более одного:

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ik} x_{ik} \le 1, \quad k = \overline{1,n}.$$

Для каждой вершины количество выходов не должно превышать одного:

$$\sum_{j=1}^{n} s_{kj} x_{kj} \le 1, \quad k = \overline{1,n}.$$

Граничные условия устанавливают в качестве области допустимых значений переменных значения 0 или 1:

$$0 \le x_{ij} \le 1, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Подготовим данные для решения задачи на рабочем листе Excel в соответствии с рисунком 2.

Ячейки B3:I10 содержат матрицу смежности вершин графа, а ячейки B14:I21 – искомые переменные $x_{ij}$. В ячейки J14:J21 вписываются формулы для вычисления суммы произведений соответствующих строк матрицы смежности и матрицы переменных: СУММПРОИЗВ(B3:I3;B14:I14) … СУММПРОИЗВ(B10:I10;B21:I21). В ячейки B21:I21 вписываются формулы для вычисления суммы произведений соответствующих столбцов этих же матриц: СУММПРОИЗВ(B3:B10;B14:B21) … СУММПРОИЗВ(I3:I10;I14:I21). В ячейку J22 (на рисунке выделена штриховкой) введём формулу для вычисления целевой функции: СУММПРОИЗВ(B3:I10;B14:I21).

Откроем окно *Поиск решения* (пункт меню *Сервис/Поиск решения*) и установим следующие значения.

- Целевая ячейка – J22.
- Равной – минимальному значению.
- Изменяемые ячейки – B14:I21.
- Ограничения:

  B22 = 0; J14 = 1; G22 = 1; J19 = 0; J15:J18 = C22:F22; J20:J21 = H22:I22;

  J14:J21 ≤ 1; J14:J21 ≥ 0; B22:I22 ≤ 1; B22:I22 ≥ 0; B14:I21 = целое;

  B14:I21 ≥ 0; B14:I21 ≤ 1.
- Параметры – линейная модель.

После ввода всех параметров нажатием кнопки *Выполнить* находим решение. Возможны 2 результата:

- Кратчайший путь существует и найден. Нижняя часть таблицы преобразуется в соответствии с найденным решением. Её вид изображён на рисунке 3. Мы видим, что путь проходит через вершины $v_1 \to v_2 \to v_5 \to v_6$, что полностью совпадает с изображением на рисунке 1.

- Кратчайший путь не существует и не найден. В таком случае система выдаёт сообщение «Поиск не может найти подходящего решения».

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | Матрица смежности вершин графа | | | | | | | | | |
| 2 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | |
| 3 | 1 | | 1 | 1 | | | | | | | |
| 4 | 2 | 1 | | | | 1 | | | 1 | | |
| 5 | 3 | 1 | | | | | | 1 | 1 | | |
| 6 | 4 | | | | | | 1 | | 1 | | |
| 7 | 5 | | 1 | | | | 1 | 1 | 1 | | |
| 8 | 6 | | | | 1 | 1 | | | | | |
| 9 | 7 | | | 1 | | 1 | | | 1 | | |
| 10 | 8 | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | |
| 12 | | Искомые переменные | | | | | | | | | |
| 13 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | |
| 14 | 1 | | | | | | | | | 0 | |
| 15 | 2 | | | | | | | | | 0 | |
| 16 | 3 | | | | | | | | | 0 | |
| 17 | 4 | | | | | | | | | 0 | |
| 18 | 5 | | | | | | | | | 0 | |
| 19 | 6 | | | | | | | | | 0 | |
| 20 | 7 | | | | | | | | | 0 | |
| 21 | 8 | | | | | | | | | 0 | |
| 22 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 23 | | | | | | | | | | | |

*Рисунок 2. Данные для поиска кратчайшего пути*

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | | | | | | | | | | |
| 12 | | Искомые переменные | | | | | | | | |
| 13 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
| 14 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 15 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 16 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 17 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 18 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 19 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 21 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 22 | | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| 23 | | | | | | | | | | |

*Рисунок 3. Результат поиска кратчайшего пути*

**Поиск гамильтонова цикла**

Гамильтоновым циклом (или контуром) графа называется цикл, проходящий через все вершины графа ровно по одному разу. Для графа, изображённого на рисунке 1, существует гамильтонов цикл, проходящий через вершины 1→3→7→8→4→6→5→2→1.

Пусть имеется граф, заданный (1) и (2). Введём целочисленные переменные $x_{ij}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ ,где

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{гамильтонов цикл содержит переход из вершины } v_i \text{ в } v_j; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Целевая функция имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_{ij} = \text{n}.$$

В ней вычисляется количество переходов между вершинами. Равенство $n$ означает, что в искомом цикле должно быть столько же переходов, сколько вершин содержит граф.

Первая группа ограничений указывает, что в каждую вершину в гамильтоновом цикле должен быть только один вход:

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ik} x_{ik} = 1, \quad k = \overline{1,n}.$$

Вторая группа ограничений устанавливает, что из каждой вершины в гамильтоновом цикле должен быть только один выход:

$$\sum_{j=1}^{n} s_{kj} x_{kj} = 1, \quad k = \overline{1,n}.$$

Третья группа ограничений задаёт, что каждое ребро графа не может присутствовать в гамильтоновом цикле дважды:

$$x_{ij} + x_{ji} \le 1, \quad i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,n}.$$

Граничные условия устанавливают в качестве области допустимых значений переменных значения 0 или 1:

$$0 \le x_{ij} \le 1, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Подготовим данные для решения задачи на рабочем листе Excel в соответствии с рисунком 4. Эти данные можно разделить на несколько фрагментов.

- Ячейки B3:I10 содержат матрицу смежности вершин графа.
- Ячейки B12:I19 являются изменяемыми ячейками, значения которых подбираются системой при поиске оптимального решения;
- В ячейках J12:J19 вычисляются суммы произведений соответствующих строк матрицы смежности и блока изменяемых ячеек. Они содержат формулы: СУММПРОИЗВ(B3:I3;B12:I12) … СУММПРОИЗВ(B10:I10;B19:I19).

- В ячейках B20:I20 вычисляются суммы произведений соответствующих столбцов матрицы смежности и блока изменяемых ячеек. В них заносятся формулы: СУММПРОИЗВ(B3:B10;B12:B19) … СУММПРОИЗВ(I3:I10;I12:I19).
- Ячейка J20 является целевой и содержит формулу для вычисления значения целевой функции: СУММПРОИЗВ(B3:I10;B12:I19).
- Блок ячеек B22:I29 – транспонированная матрица изменяемых ячеек, который вычисляется по формуле: (=ТРАНСП(B12:I19).
- Последний блок B31:I38 – это сумма матрицы изменяемых ячеек и транспонированной матрицы.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | *Матрица смежности вершин графа* | | | | | | | | |
| 2 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | |
| 3 | 1 | | 1 | 1 | | | | | | | |
| 4 | 2 | 1 | | | | 1 | | | 1 | | |
| 5 | 3 | 1 | | | | | | 1 | 1 | | |
| 6 | 4 | | | | | | 1 | | 1 | | |
| 7 | 5 | | 1 | | | | 1 | 1 | 1 | | |
| 8 | 6 | | | | 1 | 1 | | | | | |
| 9 | 7 | | | 1 | | 1 | | | 1 | | |
| 10 | 8 | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | | | |
| 11 | | | *Изменяемые ячейки* | | | | | | | | |
| 12 | 1 | | | | | | | | | 0 | |
| 13 | 2 | | | | | | | | | 0 | |
| 14 | 3 | | | | | | | | | 0 | |
| 15 | 4 | | | | | | | | | 0 | |
| 16 | 5 | | | | | | | | | 0 | |
| 17 | 6 | | | | | | | | | 0 | |
| 18 | 7 | | | | | | | | | 0 | |
| 19 | 8 | | | | | | | | | 0 | |
| 20 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 21 | | | *Транспонированные изменяемые ячейки* | | | | | | | | |
| 22 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 23 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 24 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 25 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 26 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 27 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 28 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 29 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 30 | | | *Сумма двух предыдущих массивов* | | | | | | | | |
| 31 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 32 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 33 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 34 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 35 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 36 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 37 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 38 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 39 | | | | | | | | | | | |

*Рисунок 4. Данные для поиска гамильтонова цикла*

После ввода исходных данных в окне *Поиск решения* (пункт меню *Сервис/Поиск решения*) устанавливаются следующие параметры.

- Целевая ячейка – J20.
- Равной – значению 8.

- Изменяемые ячейки – B12:I19.
- Ограничения:

  J12:J19 = 1;  B20:I20 = 1; B22:I29 ≤ 1;

  B12:I19 = целое; B12:I19 ≥ 0; B12:I19 ≤ 1.
- Параметры – линейная модель,

Нажатием кнопки *Выполнить* отыскивается гамильтонов цикл. Возможны 2 исхода при поиске решения:

- Гамильтонов цикл существует и найден. Таблица изменяемых ячеек заполняется найденными значениями переменных линейной модели. Пример решения приведён на рисунке 5. Мы видим, что найден следующий цикл: 1→3→7→8→4→6→5→2→1.
- Гамильтонов цикл не существует и не найден. В таком случае система выдаёт сообщение «Поиск не может найти подходящего решения».

| 11 | | Изменяемые ячейки | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 13 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 14 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 15 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 16 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 17 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 18 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 19 | 8 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 20 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 8 |

*Рисунок 5. Найденный гамильтонов цикл*

**Поиск наименьшего доминирующего множества**

Одной из задач в теории графов является задача о часовых. Имеется несколько охраняемых объектов и известно, какие объекты находятся в прямой видимости друг от друга. Необходимо разместить на этих объектах минимальное количество часовых так, чтобы все охраняемые объекты находились в их прямой видимости.

Построим граф (1) и (2), в котором множеством вершин соответствует охраняемым объектам, а матрица смежности задаёт их видимость. Решение задачи о часовых сводится к нахождению наименьшего доминируюшего множества графа (или наименьшего внешне-устойчивого множества). Таким множеством называется подмножество $R \subseteq V$, которое содержит минимальное количество элементов и удовлетворяет условию:

$$(\forall v_i \in V-R)(\exists v_j \in R)(s_{ij}=1)$$

Пример наименьшего доминирующего множества изображён на рисунке 6. Входящие в него вершины залиты штриховкой.

Введём целочисленные переменные $x_i$, $i=\overline{1,n}$, где

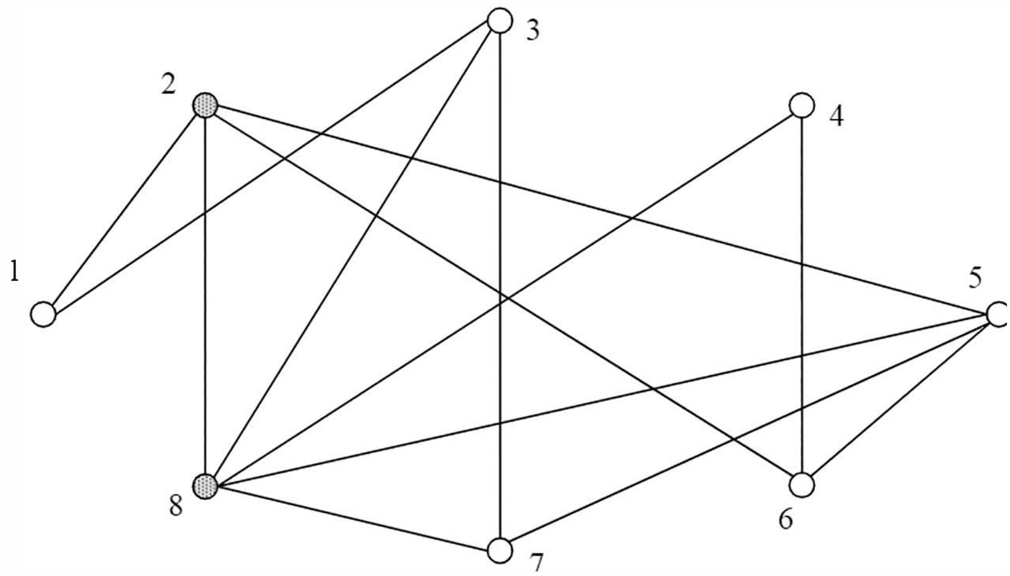


*Рисунок 6. Наименьшее доминирующее множество*

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{вершина } v_i \text{ входит в искомое множество;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Целевая функция имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \to \min .$$

В ней вычисляется количество вершин графа, включённых в доминирующее множество.

Ограничения описывают тот факт, что каждая вершина графа, не входящая в доминируюшее множество, должна быть видна из его вершин хотя бы один раз:

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ik} x_i \geq 1, \quad k = \overline{1, n}.$$

Граничные условия устанавливают в качестве области допустимых значений переменных значения 0 или 1:

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = \overline{1, n}.$$

Подготовим данные для решения задачи на рабочем листе Excel в соответствии с рисунком 7. Они состоят из четырёх блоков.

1. Ячейки B3:I10 содержат матрицу непосредственной видимости вершин графа. Она получается из матрицы смежности добавлением единиц по главной диагонали. Это вполне оправдано и означает, что каждый объект виден сам из себя.
2. Переменные располагаются в ячейках K3:K10. Они выступают в качестве изменяемых ячеек, при помоши которых система подбирает оптимальное решение.

3. В ячейках B12:I12 вычисляется, из какого числа вершин доминирующего множества видна каждая вершина графа. Они содержат формулы: СУММПРОИЗВ(B3:B10;$K$3:$K$10) … СУММПРОИЗВ(I3:I10;$K$3:$K$10).
4. Ячейка K12 выступает в качестве целевой ячейки и содержит формулу вычисления целевой функции: СУММ(K3:K10)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | Матрица видимости вершин графа | | | | | | | | Переменные | |
| 2 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | | |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | 0 | |
| 4 | 2 | 1 | 1 | | | 1 | 1 | | 1 | | 1 | |
| 5 | 3 | 1 | | 1 | | | | 1 | 1 | | 0 | |
| 6 | 4 | | | | 1 | | 1 | | 1 | | 0 | |
| 7 | 5 | | 1 | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 0 | |
| 8 | 6 | | 1 | | 1 | 1 | 1 | | | | 0 | |
| 9 | 7 | | | 1 | | 1 | | 1 | 1 | | 0 | |
| 10 | 8 | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | | 1 | |
| 11 | | | Общая видимость вершин графа | | | | | | | | ЦФ | |
| 12 | | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | | 2 | |
| 13 | | | | | | | | | | | | |

*Рисунок 7. Данные для поиска наименьшего доминирующего множества*

После ввода исходных данных в окне *Поиск решения* (пункт меню *Сервис/Поиск решения*) устанавливаются следующие параметры.

- Целевая ячейка – K12.
- Равной – минимальному значению.
- Изменяемые ячейки – K3:K10.
- Ограничения:

  B12:I12 $\geq$ 1; K3:K10 = целое; K3:K10 $\geq$ 0; K3:K10 $\leq$ 1.
- Параметры – линейная модель,

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | Матрица видимости вершин графа | | | | | | | | Переменные | |
| 2 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | | |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | 0 | |
| 4 | 2 | 1 | 1 | | | 1 | 1 | | 1 | | 1 | |
| 5 | 3 | 1 | | 1 | | | | 1 | 1 | | 0 | |
| 6 | 4 | | | | 1 | | 1 | | 1 | | 0 | |
| 7 | 5 | | 1 | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 0 | |
| 8 | 6 | | 1 | | 1 | 1 | 1 | | | | 0 | |
| 9 | 7 | | | 1 | | 1 | | 1 | 1 | | 0 | |
| 10 | 8 | | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | | 1 | |
| 11 | | | Общая видимость вершин графа | | | | | | | | ЦФ | |
| 12 | | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | | 2 | |
| 13 | | | | | | | | | | | | |

*Рисунок 8. Результат поиска наименьшего доминирующего множества*

Наименьшее доминирующее множество графа (решение задачи о часовых) отыскивается нажатием кнопки *Выполнить*. Результат решения изображён на рисунке 8. Он совпадает с изображением на рисунке 6.

**Выводы**

В работе предложен метод решения задач поиска кратчайшего пути, гамильтонова цикла и наименьшего доминирующего множества в графе путём сведения их к линейной оптимизационной задаче, а также предложена методология поиска решения в системе Excel.

Рассмотренные методы имеют ограничения, связанные с ограничением количества изменяемых ячеек в Excel, которых может быть не более 200. Таким образом, поиск кратчайшего пути и гамильтонова цикла возможен на графах с количеством вершин не более 14, а наименьшего доминирующего множества – не более 200. Кроме того, гамильтонов цикл отыскивается только в графах, для которых невозможно построить разбиение множества вершин на классы (по 3 и более вершины в классе) таким образом, чтобы для каждого класса в графе существовал цикл.

**Литература**


1. Зыков А.А. Основы теории графов – М: Вузовская книга, 2004.
2. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы – М: Мир, 1984.
3. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах – М: Мир, 1981.
4. Попов А.А. Excel: практическое руководство – М: ДЕСС КОМ, 2000.
5. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. СПб.: BHV-СПб, 1997.