Όνομα: **Valentin Ivanov**
AM: **1115 2014 00049**

ΥΣ02 Τεχνητή Νοημοσύνη
Χειμερινό Εξάμηνο 2016-2017
Εργασία Τέταρτη

1 μονάδα του συνολικού βαθμού στο μάθημα

Ημερομηνία Ανακοίνωσης: 23/12/2016

Ημερομηνίες Παράδοσης: 16/12/2016 στις 24:00

Αντιγραφή: Σε περίπτωση που προκύψουν φαινόμενα αντιγραφής, οι εμπλεκόμενοι θα βαθμολογηθούν στο μάθημα (όχι απλά στην εργασία!) με βαθμό μηδέν.

1. Θεωρήστε τον κόσμο που παριστάνεται από την εικόνα `gruffalo.jpg` που συνοδεύει την άσκηση και τις παρακάτω προτάσεις της λογικής πρώτης τάξης που αναφέρονται σ' αυτό τον κόσμο:

$$\phi_1: \ Animal(LittleMouse)$$

$$\phi_2: \ Animal(Gruffalo)$$

$$\phi_3: \ (\exists x)(\exists y)(Animal(x) \land Animal(y) \land Follows(x, y))$$

$$\phi_4: \ (\forall x)(\forall y)(Animal(x) \land Animal(y) \Rightarrow Follows(x, y))$$

Έχετε να απαντήσετε τις ακόλουθες ερωτήσεις:

(α') Να ορίσετε μια ερμηνεία I για το λεξιλόγιο των παραπάνω προτάσεων που περιγράφει με ακρίβεια την δοσμένη εικόνα (δηλαδή, η I μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσει νόημα στις παραπάνω προτάσεις).

(β') Ποιές από τις παραπάνω προτάσεις ικανοποιούνται από την I; Εξηγήστε λεπτομερώς χρησιμοποιώντας με ακρίβεια τους ορισμούς της ερμηνείας και της ικανοποίησης από τις διαφάνειες των διαλέξεων.

Απάντηση:

α)

- Σύμβολα σταθερών: $LittleMouse$, $Gruffalo$

- Σύμβολα κατηγορημάτων: $Animal(.)$, $Follows(.,.)$

Το πεδίο I είναι τα αντικείμενα που βλέπουμε στην εικόνα.

$|I| = \{littleMouse, gruffalo\}$

Η I κάνει τις εξής αντιστοιχίες στα σύμβολα σταθερών:

$$LittleMouse^I = littleMouse$$

,

$$Gruffalo^I = gruffalo$$

Η I αντιστοιχίζει στο μοναδιαίο σύμβολο κατηγορήματος $Animal$ τη παρακάτω μοναδιαία σχέση(δηλαδή αν κάποιο απο τα αντικείμενα είναι ζώο):

$$\{littleMouse, gruffalo\}$$

Η I αντιστοιχίζει στο διαδικό σύμβολο κατηγορήματος $Follows$ τη παρακάτω διαδική σχέση(όταν ένα αντικείμενο ακολουθεί το άλλο):

$$\{< gruffalo, littleMouse >\}$$

β) $\phi_1 : Animal(LittleMouse)$
$\models_I Animal(LittleMouse)[s]$ για οποιαδήποτε ανάθεση μεταβλητών s, γιατί:
$< s(LittleMouse) >= LittleMouse^I = littleMouse \in Animal^I$.
Αρά ικανοποιείται!

ομοίως η $\phi_2 : Animal(Gruffalo)$
$\models_I Animal(Gruffalo)[s]$ για οποιαδήποτε ανάθεση μεταβλητών s, γιατί:
$< s(Gruffalo) >= Gruffalo^I = gruffalo \in Animal^I$.
$\phi_2 : (\exists x)(\exists y)(Animal(x) \bigwedge Animal(y) \bigwedge Follows(x, y))$

Αρά ικανοποιείται!

$\phi_3 : (\exists x)(\exists y)(Animal(x) \bigwedge Animal(y) \bigwedge Follows(x, y))[s]$

$Animal(Gruffalo)$ και $Animal(LittleMouse)$ ισχύουν απο πιο πάνω και:

$< s(Gruffalo), s(LittleMouse) >=< Gruffalo^I, LittleMouse^I >=$
$< gruffalo, littleMouse >\in Follows^I$

$\models_I ((Animal(Gruffalo) \bigwedge Animal(LittleMouse) \bigwedge Follows(Gruffalo, LittleMoyse))$
$[s(x/Gruffalo)][s(y/LittleMouse)]$

Αρά ικανοποιείται!
$\phi_4 : \forall(x)\forall(y)(Animal(x) \bigwedge Animal(y) \implies Follows(x, y))$

$< s(LittleMouse), s(Gruffalo) >=< LittleMouse^I, Gruffalo^I >=$
$< littleMouse, gruffalo >\notin Follows^I$

$\not\models_I (Animal(LittleMouse) \bigwedge Animal(Gruffalo) \implies Follows(LittleMouse, Gruffalo))$
$[s(x/LittleMouse)][s(x/Gruffalo)]$

Βλέπουμε ότι η I δεν ικανοποιεί την ϕ_4!

2. Για καθένα από τους παρακάτω ατομικούς τύπους της λογικής πρώτης τάξης, να δώσετε τον πιο γενικό ενοποιητή αν υπάρχει (αν όχι, να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει).
   - $P(x, x)$ και $P(G(F(v)), G(u))$
   - $P(x_1, G(x_2, x_3), x_2, B)$ και $P(G(H(A, x_5), x_2), x_1, H(A, x_4), x_4)$
   - $P(x_1, x_2, \ldots, x_n, F(y_0, y_0), \ldots, F(y_{n-1}, y_{n-1}), y_n)$ και $P(F(x_0, x_0), F(x_1, x_1), \ldots, F(x_{n-1}, x_{n-1}), y_1, \ldots, y_n, x_n)$

Απάντηση:

- mgu των εκφράσεων $P(x, x)$ και $P(G(F(v)), G(u))$ είναι ο $\{x/G(u), u/F(v)\}$

- mgu των εκφράσεων $P(x_1, G(x_2, x_3), x_2, B)$ και $P(G(H(A, x_5), x_2), x_1, H(A, x_4), x_4)$ είναι ο $\{x_1/G(H(A, B), H(A, B)), x_2/H(A, B), x_3/H(A, B), x_4/B, x_5/B\}$

- mgu των εκφράσεων αυτών είναι ο

$$\{y_0/x_0, x_1/F(x_0, x_0), y_1/x_1, x_2/F(x_1, x_1), y_2/x_2, x_3/F(x_2, x_2), ...x_n/F(x_{n-1}, x_{n-1})), y_n/x_n\}$$

3. Θεωρήστε τις παρακάτω προτάσεις στα Ελληνικά:

   i. Ο Κωστάκης, ο Γιωργάκης και η Ντορούλα είναι μέλη του πολιτικού κόμματος ΔΝΤ.

   ii. Κάθε μέλος του κόμματος ΔΝΤ που δεν είναι δεξιός, είναι φιλελεύθερος.

   iii. Στους δεξιούς δεν αρέσει ο σοσιαλισμός.

   iv. Σ' όποιον δεν αρέσει ο καπιταλισμός, δεν είναι φιλελεύθερος.

   v. Στον Κωστάκη δεν αρέσει ό,τι αρέσει στον Γιωργάκη, και του αρέσει ό,τι δεν αρέσει στον Γιωργάκη.

   vi. Στο Γιωργάκη αρέσει ο σοσιαλισμός και ο καπιταλισμός.

   vii. Υπάρχει ένα μέλος του ΔΝΤ που είναι φιλελεύθερος αλλά δεν είναι δεξιός.

   (α') Να μετατρέψετε τις παραπάνω προτάσεις (i)-(vi) σε λογικής πρώτης τάξης και να ονομάσετε τη βάση γνώσης που προκύπτει KB.

   Να μετατρέψετε την πρόταση (vii) σε λογική πρώτης τάξης και να ονομάσετε την πρόταση που προκύπτει ϕ.

   Σημείωση: Να εξηγήσετε με ακρίβεια τι παριστάνουν τα σύμβολα σταθερών, συναρτήσεων και κατηγορημάτων που θα χρησιμοποιήσετε.

   (β') Να χρησιμοποιήσετε ανάλυση (resolution) για να αποδείξετε ότι $KB \models \phi$;

   (γ') Να τροποποιήσετε την απόδειξη με ανάλυση που δώσατε στο (β') χρησιμοποιώντας λεκτικά απάντησης για να βρείτε το μέλος του ΔΝΤ που έχει την ιδιότητα που παριστάνει η ϕ.

Απάντηση:

Μετατρέπω τις προτάσεις σε CNF μορφή (βγάζωντας το για καθε όπου υπάρχει, βλεπε αλγοριθμο μετατροπης σε CNF):

i) MemberIn(Kosta,DNT), MemberIn(George,DNT), MemberIn(Dora,DNT)

ii) $(\forall x)$((MemberIn(x,DNT) $\wedge$ ¬Right(x)) $\Rightarrow$ Free(x)) $\equiv$

$$\neg MemberIn(x, DNT) \vee Right(x) \vee Free(x)$$

iii) $(\forall x)(Right(x) \Rightarrow \neg Like(x, Soc)) \equiv$

$$\neg Right(x) \vee \neg Like(x, Soc)$$

iv) $(\forall x)(\neg Like(x, Cap) \Rightarrow \neg Free(x)) \equiv$

$$Like(x, Cap) \vee \neg Free(x)$$

v) $(\forall x)(Like(George, x) \Rightarrow \neg Like(Kosta, x)), \equiv$

$$\neg Like(George, x) \vee \neg Like(Kosta, x)$$

Η δευτερη πρόταση μεταφράζεται ως εξής:
$(\forall x)(\neg Like(George, x) \Rightarrow Like(Kosta, x)), \equiv$

$$Like(George, x) \vee Like(Kosta, x)$$

vi)

$$Like(George, Soc)$$
$$Like(George, Cap)$$

vii)

$$(\exists x)(MemberIn(x, DNT) \wedge Free(x) \wedge \neg Right(x))$$

β) Η παραπάνω προτάσεις(εκτός της τελευταίας = φ) αποτελούν την KB μου. Η εβδομη πρόταση είναι αυτή που ζητάμε να αποδείξουμε. Για να το κάνω αυτό θα προσθέσω την άρνηση της στην KB και θα φτάσω σε κενή φράση με τον κανόνα της ανάλυσης.
Έτσι θα αποδείξω ότι η πρόταση φ έπεται λογικά απο την KB.

Η άρνηση της φ είναι η εξής:

$$\neg(\exists x)\phi \equiv (\forall x)\neg\phi$$
$$(\forall x)\neg(MemberIn(x, DNT) \wedge Free(x) \wedge \neg Right(x))$$
$$(\forall x)(\neg MemberIn(x, DNT) \vee \neg Free(x) \vee Right(x))$$
$$\neg MemberIn(x, DNT) \vee \neg Free(x) \vee Right(x)$$

Προσθέτω αυτη την προτασηση στην KB.Τώρα θα φτάσω σε κενή φράση:

Απο την:

$$\neg MemberIn(x, DNT) \vee \neg Free(x) \vee Right(x)$$

και

$$\neg MemberIn(x, DNT) \vee Right(x) \vee Free(x)$$

με κανόνα ανάλυσης έχω:

$$\neg MemberIn(x, DNT) \vee Right(x)$$

Από την:

$$\neg MemberIn(x, DNT) \vee Right(x)$$

και

$$\neg Right(x) \vee \neg Like(x, Soc)$$

με κανόνα ανάλυσης έχω:

$$\neg MemberIn(x, DNT) \vee \neg Like(x, Soc)$$

Από
$$Like(George, Soc)$$
και
$$\neg MemberIn(x, DNT) \lor \neg Like(x, Soc)$$
με MGU $\sigma = \{x/George\}$ συμπαιράνουμε:
$$\neg MemberIn(George, DNT)$$
Από
$$\neg MemberIn(George, DNT)$$
και
$$MemberIn(George, DNT)$$
με MGU $\sigma = \{\}$ συμπαιράνουμε **τη κενή φράση**.
Αρά
$$KB \models \phi$$

γ) Η ερώτηση που ζητείται να απαντήσω είναι η εξής: ¨Ποίος είναι αυτός που ικανοποιεί την πρόταση φ;' (το ¨μελος ΔΝΤ είναι είδη μερος της πρότασης φ όποτε δεν το ξαναγράφω όπως δείχνει η εκφώνηση, το θθεωρώ αυτονόητο δηλαδή)
Θα χρησιμοποιήσω λεκτικά απάντησης. Έτσι έχω:
$$Ans(x) \lor \neg \phi$$
$$Ans(x) \lor \neg MemberIn(x, DNT) \lor \neg Free(x) \lor Right(x)$$
Από την
$$Ans(x) \lor \neg MemberIn(x, DNT) \lor \neg Free(x) \lor Right(x)$$
και
$$\neg MemberIn(x, DNT) \lor Right(x) \lor Free(x)$$
με κανόνα ανάλυσης έχω:
$$Ans(x) \lor \neg MemberIn(x, DNT) \lor Right(x)$$
Από την
$$Ans(x) \lor \neg MemberIn(x, DNT) \lor Right(x)$$
και
$$\neg Right(x) \lor \neg Like(x, Soc)$$
με κανόνα ανάλυσης έχω:
$$Ans(x) \lor \neg MemberIn(x, DNT) \lor \neg Like(x, Soc)$$
Από
$$Like(George, Soc)$$
και
$$Ans(x) \lor \neg MemberIn(x, DNT) \lor \neg Like(x, Soc)$$

με MGU $\sigma = \{x/George\}$ συμπαιράνουμε:

$$Ans(George) \vee \neg MemberIn(George, DNT)$$

Από

$$\neg MemberIn(George, DNT)$$

και

$$Ans(George) \vee \neg MemberIn(George, DNT)$$

με MGU $\sigma = \{\}$ συμπαιράνουμε

$$Ans(George)$$

Αρά ο $George$ είναι αυτός που ψάχνουμε.

4. Θεωρήστε τις παρακάτω προτάσεις της λογικής πρώτης τάξης:

$$A: \quad (\forall x)(\forall s)(\forall t)(In(x,s) \wedge In(x,t) \Leftrightarrow In(x, Intersection(s,t)))$$

$$B: \quad (\forall s)(\forall t)((\forall x)(In(x,s) \Rightarrow In(x,t)) \Rightarrow SubsetOf(s,t))$$

$$C: \quad (\forall s)(\forall t)SubsetOf(Intersection(s,t), s)$$

Για να καταλάβετε τι λένε διαισθητικά οι παραπάνω προτάσεις θεωρήστε ότι οι μεταβλητές s και t αναφέρονται σε σύνολα, η μεταβλητή x σε στοιχεία συνόλων, το κατηγόρημα In κωδικοποιεί τη σχέση 'ανήκει' (ένα στοιχείο σε ένα σύνολο), το κατηγόρημα $SubsetOf$ τη σχέση 'υποσύνολο', και το σύμβολο συνάρτησης $Intersection$ την τομή δύο συνόλων.

(α') Να δώσετε τη συζευκτική κανονική μορφή (CNF) των προτάσεων A, B και $\neg C$.

(β') Να χρησιμοποιήσετε ανάλυση (resolution) για να αποδείξετε ότι η πρόταση C είναι λογική συνέπεια των προτάσεων A και B.

Προσοχή: Αν η παραπάνω μετατροπή σε CNF δεν είναι σωστή, το ερώτημα αυτό δεν θα βαθμολογηθεί.

α) A:

$$(\forall x)(\forall s)(\forall t)(In(x,s) \wedge In(x,t) \iff In(x, Intersection(s,t)))$$

$$(\forall x)(\forall s)(\forall t)(((In(x,s) \wedge In(x,t)) \Rightarrow In(x, Intersection(s,t))) \wedge (In(x, Intersection(s,t)) \Rightarrow (In(x,s) \wedge In(x,t))))$$

$$(\forall x)(\forall s)(\forall t)((\neg(In(x,s) \wedge In(x,t)) \vee In(x, Intersection(s,t))) \wedge \neg(In(x, Intersection(s,t)) \vee (In(x,s) \wedge In(x,t))))$$

$$((\neg In(x,s) \vee \neg In(x,t) \vee In(x, Intersection(s,t))) \wedge (\neg(In(x, Intersection(s,t)) \vee (In(x,s) \wedge In(x,t)))))$$

$$((\neg In(x,s) \vee \neg In(x,t) \vee In(x, Intersection(s,t))) \wedge (\neg(In(x, Intersection(s,t)) \vee (In(x,s) \wedge (\neg(In(x, Intersection(s,t)) \vee In(x,t)))))$$

Όποτε στην τελική μορφή έχουμε τις προτάσεις:

- $\neg In(x,s) \vee \neg In(x,t) \vee In(x, Intersection(s,t)$
- $\neg In(x, Intersection(s,t)) \vee (In(x,s)$
- $\neg In(x, Intersection(s,t)) \vee In(x,t)$

B:

$(\forall s)(\forall t)((\forall x)(In(x,s) \Rightarrow In(x,t)) \Rightarrow SubsetOf(s,t))$

$(\forall s)(\forall t)((\forall x)(\neg(In(x,s) \Rightarrow In(x,t))) \vee SubsetOf(s,t))$

$(\forall s)(\forall t)((\forall x)(\neg(\neg In(x,s) \vee In(x,t))) \vee SubsetOf(s,t))$

$(\forall s)(\forall t)((\forall x)(In(x,s) \wedge \neg In(x,t)) \vee SubsetOf(s,t))$

$(In(x,s) \wedge \neg In(x,t)) \vee SubsetOf(s,t)$

$(In(x,s) \vee SubsetOf(s,t)) \wedge (\neg In(x,t) \vee SubsetOf(s,t))$

Όποτε στην τελική μορφή έχουμε τις προτάσεις:

- $In(x,s) \vee SubsetOf(s,t)$
- $\neg In(x,t) \vee SubsetOf(s,t)$

$\neg C$:
Εφαρμόζωντας την άρνηση στους καθολικους ποσοδείκτες και σταθερές $Skolem$ $S1, S2$ έχουμε:

$$\neg SubsetOf(Intersection(S1,S2),S1)$$

β) Για να αποδείξω οτι C έπεται απο τις A και B βάζω την άρνηση της στην KB και θα φτάσω και άπλι σε κενή πρόταση.
Απο

$$\neg SubsetOf(Intersection(S1,S2),S1)$$

και

$$In(x,s) \vee SubsetOf(s,t)$$

με $mgu\{s/Intersection(S1,S2), t/S1\}$ και κανόνα ανάλυσης έχουμε: (1)

$$In(x, Intersection(S1,S2))$$

Από την

$$\neg SubsetOf(Intersection(S1,S2),S1)$$

και

$$\neg In(x,t) \vee SubsetOf(s,t)$$

με $mgu\{s/Intersection(S1,S2), t/S1\}$ και κανόνα ανάλυσης έχουμε: (2)

$$\neg In(x,S1)$$

Από την (1) και A2

$$In(x, Intersection(S1,S2))$$

και

$$\neg In(x, Intersection(s,t)) \vee (In(x,s)$$

με $MGU = \{s/S1, t/S2\}$ και κανόνα ανάλυσης έχουμε (3)

$$In(x,S1)$$

Απο (2) και (3)

$$\neg In(x,S1)$$

και

$$In(x,S1)$$

με $MGU = \{\}$ φτάνουμε στην **κενή φραση**.
Αρά η C είναι λογική συνέπεια των A και B.

5. Να αναπαραστήσετε τις παρακάτω προτάσεις χρησιμοποιώντας φράσεις Horn (Horn clauses):

   - Η Ελένη είναι όμορφη.
   - Ο Γιάννης είναι όμορφος και πλούσιος.
   - Ο Πέτρος είναι μυώδης και πλούσιος.
   - Ο Τίμος είναι μυώδης και ευγενικός.

- Σε όλους τους άνδρες αρέσουν οι όμορφες γυναίκες.
- Όλοι οι πλούσιοι είναι ευτυχισμένοι.
- Όλοι οι άνδρες που τους αρέσει μια γυναίκα, στην οποία αρέσουν, είναι ευτυχισμένοι.
- Όλες οι γυναίκες που τους αρέσει ένας άνδρας, στον οποίο αρέσουν, είναι ευτυχισμένες.
- Στην Κατερίνα αρέσουν όλοι οι άνδρες, στους οποίους η ίδια αρέσει.
- Στην Ελένη αρέσουν όλοι οι άνδρες που είναι ευγενικοί και πλούσιοι ή μυώδεις και όμορφοι.

Να χρησιμοποιήσετε forward ή backward chaining για να βρείτε την απάντηση στις ερωτήσεις:

- Ποιός αρέσει σε ποιόν;
- Ποιός είναι ευτυχισμένος;

Παρατήρηση: Αν γνωρίζετε ήδη Prolog, μπορείτε να τη χρησιμοποιήσετε.

Απάντηση:
Αρχικά έγραψα τα παραπάνω ως κλασικές εκφράσεις $Horn$ που είναι διαζεύξεις με το πολυ ενα θετικό λεκτικό.
Ουσιαστικά όμως είναι όλα κάποιες συζεύξεις που μας δίνουν μια συνεπαγωγή.
Το λέω γιατί είναι πιο ευκολο στην απόδειξη να το σκεφτεί κανεις σαν συνεπαγωγή, όπως και στα παραδείγματα που υπάρχουν στις διαφάνειες.

- $Pretty(Eleni)$
- $Pretty(Gianni)$
  $Rich(Gianni)$
- $Muscle(Petros)$
  $Rich(Petros)$
- $Muscle(Timos)$
  $Gentle(Timos)$
- $\neg Man(x) \lor \neg Woman(y) \lor \neg Pretty(y) \lor Likes(x, y)$
  $Man(x) \land Woman(y) \land Pretty(y) \Rightarrow Likes(x, y)$
- $\neg Rich(x) \lor Happy(x)$
  $Rich(x) \Rightarrow Happy(x)$
- $\neg Man(x) \lor \neg Woman(y) \lor \neg Likes(x, y) \lor \neg Likes(y, x) \lor Happy(x)$
  $Man(x) \land Woman(y) \land Likes(x, y)) \land Likes(y, x) \Rightarrow Happy(x)$
- $\neg Man(x) \lor \neg Woman(y) \lor \neg Likes(x, y) \lor \neg Likes(y, x) \lor Happy(y)$
  $Man(x) \land Woman(y) \land Likes(x, y) \land Likes(y, x) \Rightarrow Happy(y)$
- $\neg Man(x) \lor \neg Likes(x, Kate) \lor Likes(Kate, x)$
  $Man(x) \land Likes(x, Kate) \Rightarrow Likes(Kate, x)$

- $(\forall x)(Man(x) \wedge ((Gentle(x) \wedge Rich(x)) \vee (Pretty(x_{\wedge} Muscle(x)))) \Rightarrow Likes(Eleni, x)$
  $(\forall x)(\neg Man(x) \vee ((\neg Gentle(x) \vee \neg Rich(x)) \wedge (\neg Pretty(x_{\vee} \neg Muscle(x)))) \vee Likes(Eleni, x)$
  $(\forall x)((\neg Man(x) \vee (\neg Gentle(x) \vee \neg Rich(x)) \wedge (\neg Man(x) \vee \neg Pretty(x_{\vee} \neg Muscle(x))) \vee Likes(Eleni, x)$
  Έτσι πέρνω τις ακόλουθες δυο φράσεις $Horn$:

  $$\neg Man(x) \vee \neg Gentle(x) \vee \neg Rich(x) \vee Likes(Eleni, x)$$

  και

  $$\neg Man(x) \vee \neg Pretty(x) \vee \neg Muscle(x) \vee Likes(Eleni, x)$$

Επιπλέον έχω αυτονόητα και τις προτάσεις:

$$Woman(Eleni), Woman(Katerina), Man(Petros), Man(Timos), Man(Giannis)$$

Θα χρησιμοποιήσω τον αλγόριθμο $forward\ chaining$ για να βγάλω τα συμπεράσματα που θέλω.
Απο τις προτάσεις: $Man(Petros)$, $Man(Timos)$, $Man(Giannis)$, $Pretty(Eleni)$, $Woman(Eleni)$ και την

$$Man(x) \wedge Woman(y) \wedge Pretty(y) \Rightarrow Likes(x, y)$$

με αντικατάσταση $\{x/Petros, y/Eleni\}$ συμπαιράνουμε οτι

$$Likes(Petros, Eleni)$$

Ομοίως με αντικαταστάσεις $\{x/Timos, y/Eleni\}$ και $\{x/Giannis, y/Eleni\}$ συμπεράνουμε οτι:

$$Likes(Giannis, Eleni)$$

και

$$Likes(Timos, Eleni)$$

Αρά βγάλαμε οτι σε όλους τους αντρες αρέσει η Ελένη η οποία είναι ωραία. (δεν χριαζόταν τοσο λογική για να το σκεφτοαν κάποιος :))

Τωρά απο τις προτάσεις: $Rich(Giannis)$ και $Rich(Petros)$ και την

$$Rich(x) \Rightarrow Happy(x)$$

με αντικαταστάσεις $\{x/Petros\}$ και $\{x/Giannis\}$ θα συμπαιράνουμε πως:

$$Happy(Petros)$$

και

$$Happy(Giannis)$$

Δεν έχουμε παραπάνω πληροφορίες για την Κατερίνα όποτε αυτή δεν αρέσει σε κανέναν.
Στα γουστα της Ελένης δεν ταιριάζει κανένας απο τους τρεις άντρες αρα στην Ελενη δεν αρέσει κανένας.
Εφοσον δεν υπάρχουν άτομα που να αρέσουν ο ένας στον άλλον δεν υπάρχουν ευτιχισμένοι για αυτό το λόγο.
Όποτε οι μόνοι ευτιχισμένοι είναι οι πλούσιοι (κατι που απέδειξα πιο πάνω).

Άσκηση 6. Σας δίνω τα αρχεία εισόδου-εξόδου απο τον *prover*9.

7. **(Bonus.)** Θεωρήστε τις παρακάτω προτάσεις στα Ελληνικά:

> Ο Γιάννης, η Μαρία, ο Γιώργος και η Ελένη είναι τα μοναδικά μέλη του συνδέσμου 'Γάβροι όλου του κόσμου ενωθείτε'. Ο Γιάννης είναι σύζυγος της Μαρίας. Ο Γιώργος είναι αδερφός της Ελένης. Ο σύζυγος ή η σύζυγος κάθε μέλους ενός συνδέσμου είναι επίσης μέλος του συνδέσμου αυτού.

Από τις παραπάνω προτάσεις, πολλοί άνθρωποι εύκολα θα συμπέραιναν ότι η Ελένη δεν είναι παντρεμένη. Μπορούμε όμως να το συμπεράνουμε χρησιμοποιώντας έννοιες της λογικής πρώτης τάξης; Ας το δοκιμάσουμε:

(α') Να μετατρέψετε τις παραπάνω προτάσεις σε λογική πρώτης τάξης και να ονομάσετε τη βάση γνώσης που προκύπτει KB.

Να μετατρέψετε την πρόταση 'Η Ελένη δεν είναι παντρεμένη' σε λογική πρώτης τάξης και να ονομάσετε την πρόταση που προκύπτει ϕ.

Σημείωση: Να εξηγήσετε με ακρίβεια τι παριστάνουν τα σύμβολα σταθερών, συναρτήσεων και κατηγορημάτων που θα χρησιμοποιήσετε.

(β') Να αποδείξετε χρησιμοποιώντας έννοιες της σημασιολογίας της λογικής πρώτης τάξης ότι από τη βάση γνώσης KB **δεν** έπεται λογικά η πρόταση ϕ (δηλαδή, $KB \not\models \phi$).

(γ') Ποιές προτάσεις της λογικής πρώτης τάξης πρέπει να προστεθούν στην KB ώστε να ισχύει ότι $KB \models \phi$;

(δ') Να χρησιμοποιήσετε το λογισμικό απόδειξης θεωρημάτων prover 9 για να αποδείξετε τη σχέση λογικής συνεπαγωγής του (γ').

Σημείωση: Μπορείτε εναλλακτικά να το αποδείξετε με χαρτί και μολύβι αλλά θα είναι κουραστικό!

Απάντηση: (α)
Τα σύμβολα κατηγορημάτων που χρησιμοποιώ είναι τα:
(1) $GavrosMember(x)$ - ο x είναι μέλος του συνδέσμου ¨Γαβροι όλοι ενωθείται¨.
(2) $Siblings(x, y)$ - ο x έχει αδελφική σχέση με τον y.
(3) $Spouse(x, y)$ - ο x έχει συζηγική σχέση με τον y.

KB

$(\forall x)((x = John \lor x = Mary \lor x = George \lor x = Eleni) \Leftrightarrow GavrosMember(x))$
$Spouse(Mary, John)$
$Siblings(Eleni, George)$
$(\forall x)(\forall y)(GavrosMember(x) \land Spouse(x, y) \Rightarrow GavrosMember(y)$

$\underline{\phi}$
$(\forall x)(\neg Spouse(Eleni, x))$

(β) Απο θεώρημα: KB $\models_I \phi$ ανν ο τύπος $KB \wedge \neg\phi$ είναι μη ικανοποιήσιμος.
όπου $\neg\phi$:
$(\exists x)(Spouse(Eleni, x))$
Αυτό όμως βλέπουμε ότι δεν ισχύει καθώς ο τύπος είναι ικανοποιήσιμος:
Με απλή αντικατάσταση στην συγκεκριμένη περιπτωσή πυο έχουμε λίγα δεδομένα μπορούμε να συμπεράνουμε οτι:
$Spouse(Eleni, Marry)$
$Spouse(Eleni, John)$
$Spouse(Eleni, George)$ και
$Spouse(Eleni, Eleni)$.

Λόγω των ελλιπής δεδομένων δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα παραπάνω δεν ισχύουν και μπορούμε μαλιστα να φτάσουμε στο συμπέρασμα οτι η Ελένη είναι παντρεμένη ακόμα και με τον εαυτό της!

γ Για να έπεται η φ απο την KB πρέπε ιαν προστεθούν ακόμα οι πληροφορίες:
1.¨Τα αδέρφια δεν μπορεί να είναι σύζηγοι μεταξύ τους.'

$$(\forall x)(\forall y)(Siblings(x, y) \Rightarrow \neg Spouse(x, y))$$

2.'Οταν κάποιος είναι παντρεμένος με κάποιον άλλον είναι παντρεμένος μονο με αυτόν. Δηλαδή δεν μπoροεί κάποιος είναι συζηγος 2 διαφορετικών ανθρώπων.'

$$(\forall x)(\forall y)(Spouse(x, y) \Rightarrow \neg(\exists z)(z \neq y \wedge Spouse(x, z)))$$

3.¨Δεν μπορεί να είσαι συζηγος με τον εαυτό σου.'

$$(\forall x)(\neg Spouse(x, x))$$

Επιπλέον εγω βάζω και τις προτάσεις:
4.Εχεις αδελφική σχέση με κάποιον αν και μόνο αν αυτός έχει αδεφλική σσχέση με σενα.

$$(\forall x)(\forall y)(Sibilings(x, y) \Leftrightarrow Siblings(y, x))$$

5.Εχεις συζηγηκοί σχέση με κάποιον αν και μόνο αν αυτός έχει συζηγηκή σχέση με σένα.

$$(\forall x)(\forall y)(Spouse(x, y) \Leftrightarrow Spouse(y, x))$$

Με τις παραπάνω πληροφορίες στην KB μπορούμε τώρα με συμπερασμό πρώτης τάξης να αποδείξουμε ότι η φ έπεται απο την KB.
Το έχω κάνει με τον $prover9$ προσθέθωντας και τις 5 παραπάνω προτάσεις στην πρόταση και κάνει την απόδειξη.
Σας δίνω και τα αποτελέσματα.

8. **(Bonus.)** Θεωρήστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις της λογικής πρώτης τάξης. Είναι η πρόταση έγκυρη (valid); Αν ναι, δώστε μια απόδειξη χρησιμοποιώντας κατάλληλες σημασιολογικές έννοιες της λογικής πρώτης τάξης. Αν όχι, δώστε ένα αντιπαράδειγμα.

    (α′) $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$

    (β′) $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \Rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$

Απόδειξη

Ξεκινάμε απο την υπόθεση (πρώτο μέλος) δηλαδή ότι:
$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$
Χρησιμοποιωντας τον κανόνα του καθολικού προσδιορισμού παίρνουμε:
$P(S) \wedge Q(S)$
Έπειτα με απαλοιφή της σύζευξης πέρνουμε τις προτάσεις:
$P(S)$ και $Q(S)$

Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι
$\exists x P(x)$
Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι
$\exists x Q(x)$

Συνεπώς απο τελικά έχουμε:
$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$

(β)$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \Rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω ότι η πρόταση είναι έγκυρη.
Θα δείξω ότι **δεν** είναι έγκυρη
Αντιπαράδειγμα

Έστω τα μοναδιαία κατηγορήματα:
$Happy(x)$:Ο x είναι χαρούμενος
$Rich(x)$::Ο x είναι πλούσιος

Έστω επίσης η εξής βάση γνώσης:
[1]$Pretty(Eleni)$
[2]$\neg Smart(Eleni)$
[3]$\neg Pretty(Gianna)$
[4]$Smart(Gianna)$

Τότε απο [1],[4] έχουμε ότι με $MGU's$ $\{x/Eleni\}$ και αντοίστοιχα $\{x/Gianna\}$
[5]$(\exists x)Prety(x)$
[6]$(\exists x)Smart(x)$

Οπότε απο την υπόθεση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι
$(\exists \mathbf{x})(\mathbf{Pretty}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{Smart}(\mathbf{x}))$
Αυτό όμως είναι λάθος,καθώς βλέπουμε στην KB ότι δεν υπάρχει κάποιος που να είναι και όμορφος και έξυπνος.