Clasa a XII-a C

Manual, pag 102

$C3$ | e) $f \in \mathbb{C}[X]$.

$f = (m^3+m)x^3 + mx^2 + (m^2+1)x + 1$

Rădăcinile expresiei m^3+m ($m^3+m=0$ și $m^2+1=0$)

$m^3+m = m(m^2+1) = 0 \Leftrightarrow m_1 = 0$ și

$a = 1$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow \Delta = -4 \Rightarrow -\Delta = 4$

$b = 0$

$c = 1$ $\quad m_{2,3} = \dfrac{0 \pm i\sqrt{-\Delta}}{2 \cdot 1} = \dfrac{\pm i\sqrt{4}}{2} \Rightarrow m_2 = i$

$m_3 = -i$

$f = (m^3+m)\cdot x^3 + m x^2 + (m^2+1)x + 1$

$(0, -i, i)$

(I) $m = 0 \Rightarrow f = 0\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + 1\cdot x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f = x+1 \Rightarrow \text{grad } f = 1$

(II) $m = -i \Rightarrow f = 0\cdot x^3 - i x^2 + 0\cdot x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f = -i\cdot x^2 + 1 \Rightarrow \text{grad } f = 2$

(III) $m = i \Rightarrow f = 0\cdot x^3 + i\cdot x^2 + 0\cdot x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f = i\cdot x^2 + 1 \Rightarrow \text{grad } f = 2$

(IV) $m \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i\} \Rightarrow \text{grad } f = 3$.

Valoarea unui polinom într-un punct

$f \in K[X]$,
$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 \cdot X + a_0$
$\alpha \in K$

Valoarea polinomului f în pct α - se obține înlocuind pe X cu pct α:

$$\boxed{f(\alpha) = a_n \cdot \alpha^n + a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \alpha + a_0}$$

Ex: (1) $f = 3X^4 - 5X^3 + 6X - 4$

$\alpha = 1$; $f(1) = 3 \cdot 1^4 - 5 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1 - 4 =$
$= 3 - 5 + 6 - 4 = 0$ (1 = răd.)

Def: Se numește RĂDĂCINĂ a polinomului f o valoare a lui x pentru care polinomul este egal cu 0.

Obs: Un polinom are un număr de rădăcini egal cu gradul polinomului.

a) $f_1 = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \Rightarrow 3$ răd (x_1, x_2, x_3)

b) $f_2 = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 \Rightarrow 4$ răd (x_1, x_2, x_3, x_4)

$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \Rightarrow n$ rădăcini

$x_1, x_2, \dots, x_n$

$(\forall) i = \overline{1,n}$, $\boxed{f(x_i) = 0}$

Operații cu polinoame

- adunare, scădere (opusul unui polin.)
- înmulțire cu o constantă
- înmulțirea a două polinoame
- împărțirea

Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$; $f = x^2 + x - 2$

$g = 2x^2 + x + 1$

$f + g = x^2 + x - 2 + 2x^2 + x + 1 = 3x^2 + 2x - 1$

$g + f = 2x^2 + x + 1 + x^2 + x - 2 = 3x^2 + 2x - 1$

$f - g = x^2 + x - 2 - (2x^2 + x + 1) =$

$= x^2 + x - 2 - 2x^2 - x - 1 = -x^2 - 3$

$g - f = 2x^2 + x + 1 - (x^2 + x - 2) =$

$= 2x^2 + x + 1 - x^2 - x + 2 = x^2 + 3$

$$\boxed{f - g = -(g - f)}$$

- opusul unui polinom f este $-f$

$f = x^2 + x - 2 \Rightarrow -f = -(x^2 + x - 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow -f = -x^2 - x + 2$

Înmulțirea:

$f = x^2 - x + 1$; $g = 2x^2 + x - 3$

$f \cdot g = (x^2 - x + 1) \cdot (2x^2 + x - 3) =$

$= x^2 \cdot 2x^2 + x^2 \cdot x + x^2 \cdot (-3) + (-x) \cdot 2x^2 +$

$+ (-x) \cdot x + (-x) \cdot (-3) + 1 \cdot 2x^2 + 1 \cdot x + 1 \cdot (-3) =$

$= 2x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x^3 - x^2 + 3x + 2x^2 + x - 3 =$

$= 2x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 3$

$g \cdot f = \ldots$ TEMA