**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ, ΣΥΝΘΕΣΗ ΕΙΚΟΝΑΣ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΓΡΑΦΙΚΩΝ**

Τελική εργασία

Αριθμητική Βελτιστοποίηση

Γραμμικός Προγραμματισμός

Προβλήματα Μεταφοράς

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

ΦΟΙΤΗΤΡΙΑ: ΣΤΕΡΓΙΟΥ – ΚΑΨΑΛΗ ΒΑΣΙΛΙΚΗ

Α.Μ.: 180335

**ΑΘΗΝΑ, ΦΕΒΡΟΥΕΡΙΟΣ 2019**

# ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία θα γίνει μία σύντομη εισαγωγή του τι σημαίνει και που χρησιμεύει ο γραμμικός προγραμματισμός. Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν και θα επιλυθούν δύο προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού. Το πρώτο είναι ένα τυπικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, το οποίο θα επιλύσουμε με η βοήθεια του Excel και ειδικότερα της επέκτασής του, Solver, αφού πρώτα εξάγουμε την αντικειμενική συνάρτηση, τις μεταβλητές αποφάσεις και τους περιορισμούς του προβλήματος, έτσι ώστε να επιτύχουμε την βέλτιστη λύση. Το δεύτερο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, είναι πάνω σε μία ειδική μορφή του γραμμικού προγραμματισμού, τα προβλήματα μεταφοράς. Η επίλυση τους εξελίσσεται σε δύο φάσεις. Πρώτα υπολογίζεται μια αρχική λύση, όπου μπορεί να είναι και η βέλτιστη, με μια απλή τεχνική (π.χ. Βορειοδυτικής Γωνίας, Ελαχίστους Κόστους, Vogel). Έπειτα ελέγχεται και εκτιμάται η βέλτιστη λύση με την μέθοδο Stepping Stone.

# 

Contents

[ΠΕΡΙΛΗΨΗ 2](#_Toc2101107)

[ΕΙΣΑΓΩΓΗ 4](#_Toc2101108)

[Γ ραμμικός Προγραμματισμός 5](#_Toc2101109)

[Πρόβλημα μεταφοράς 10](#_Toc2101110)

[Βιβλιογραφία 20](#_Toc2101111)

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού ασχολούνται με καταστάσεις όπου ένας αριθμός πλουτοπαραγωγικών πηγών, όπως άνθρωποι, υλικά, μηχανές και ακίνητα τα οποία είναι διαθέσιμα πρέπει να συνδυαστούν για να παραχθούν ένα ή περισσότερα προϊόντα. Στην διαδικασία παραγωγής οι πηγές αυτές υπόκεινται σε περιορισμούς όπως στην συνολική ποσότητα των διαθέσιμων πηγών, τον αριθμό κάθε προϊόντος που παράγεται, τον αριθμό κάθε προϊόντος που διατίθεται. Σκοπός του γραμμικού προγραμματισμού είναι από όλες τις δυνατές κατανομές των πηγών να υπολογίσουμε εκείνη ή εκείνες οι οποίες μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν μια αριθμητική ποσότητα όπως το κέρδος ή το κόστος

Θεωρείται σαν μια από τις πιο σπουδαίες μαθηματικές ανακαλύψεις των μέσων χρόνων του εικοστού αιώνα και στις μέρες μας αποτελεί ένα μοντέλο ευρείας χρήσης για καθημερινά ζητήματα των περισσότερων μεσαίου και μεγάλου μεγέθους εμπορικών - βιομηχανικών εταιρειών.

Ο όρος «προγραμματισμός» δεν έχει την έννοια του «προγραμματισμού ηλεκτρονικών υπολογιστών» αλλά αυτήν του «σχεδιασμού». Ο γραμμικός προγραμματισμός ασχολείται με τη σχεδίαση των δραστηριοτήτων του συστήματος που περιγράφει για να προκύψει το άριστο αποτέλεσμα, το αποτέλεσμα δηλαδή εκείνο, που μεταξύ όλων των δυνατών εναλλακτικών λύσεων πραγματώνει τον προκαθορισμένο σκοπό κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Ο γραμμικός προγραμματισμός παρουσιάζει, επίσης, ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη θεωρητική πληροφορική. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση και την επίλυση πολλών συνδυαστικών προβλημάτων τα οποία εκ πρώτης όψεως δεν σχετίζονται με το γραμμικό προγραμματισμό.

Οι προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν για να διατυπωθεί ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι οι εξής:

1. Γραμμικότητα της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών

2. Διαιρετότητα των τιμών των μεταβλητών απόφασης

3. Βεβαιότητα ως προς τις τιμές των παραμέτρων.

# Γ ραμμικός Προγραμματισμός

Ο τρόπος ανάπτυξης ενός μαθηματικού προγράμματος:

Bήμα 1. Μεταβλητές απόφασης (decision variables)

Καθορίζουμε τις μεταβλητές, (ελεγχόμενες, μη ελεγχόμενες) εκφράζουσες τις άγνωστες, προς εκτίμηση, ποσότητες, αξίες του προβλήματος.

Βήμα 2. Αντικειμενική Συνάρτηση (objective function)

Περιγράφουμε τον στόχο και τα κριτήρια επιλογής της βέλτιστης λύσης.

Βήμα 3. Περιορισμοί (constraints)

Περιγράφουμε τους περιορισμούς και τις υποθέσεις του προβλήματος με μαθηματικές εκφράσεις.

**Πρόβλημα**

Μια μικρή βιομηχανία παράγει δύο τύπους ανταλλακτικών αυτοκινήτων. Προμηθεύεται πρώτη ύλη την οποία επεξεργάζεται (μηχανουργείο, τόρνος και φινίρισμα). Οι δυνατότητες του εργοστασίου ανά προϊόν και γραμμή παραγωγής δίδονται στον κάτωθι πίνακα.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Προϊόν Α** | **Προϊόν Β** |
| **Μηχανουργείο** | 25/ώρα | 40/ώρα |
| **Τόρνος** | 28/ώρα | 35/ώρα |
| **Φινίρισμα** | 35/ώρα | 25/ώρα |

Η δαπάνη πρώτης ύλης για το προϊόν Α είναι 2€, για το προϊόν Β 3€, ενώ η τιμή πώλησης είναι 5€ και 6€, αντιστοίχως. Η λειτουργική δαπάνη ανά ώρα λειτουργίας είναι 20€, 14€ και 17,5€ αντιστοίχως για το μηχανουργείο, τον τόρνο και το φινίρισμα. Να ευρεθεί το επίπεδο παραγωγής (πόσα προϊόντα Α και Β να παραχθούν) έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος.

**Επίλυση προβλήματος**

Αναζητάμε τις ποσότητες τεμαχίων προϊόντος Α και προϊόντος Β ανά ώρα.

Οπότε οι μεταβλητές απόφασης είναι ΧΑ και ΧΒ, για το προϊόν Α και Β αντίστοιχα.

Θέλουμε ακόμα, την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς του προβλήματος.

Μηχανουργείο

Παράγει 25 τεμάχια/ ώρα από το προϊόν Α

1 τεμάχιο Α παράγεται σε 1/25 της ώρας => ΧΑ /25 ώρες, παράγονται τα ΧΑ τεμάχια

Παράγει 40 τεμάχια/ ώρα από το προϊόν Β

1 τεμάχιο Β παράγεται σε 1/40 της ώρας => ΧΒ /40 ώρες, παράγονται τα ΧΒ τεμάχια

Συνολικός χρόνος Μηχανουργείο: ΧΑ / 25 + ΧΒ / 40 <= 1 ώρα

Τόρνος

Παράγει 28 τεμάχια/ ώρα από το προϊόν Α

1 τεμάχιο Α παράγεται σε 1/28 της ώρας => ΧΑ /28 ώρες, παράγονται τα ΧΑ τεμάχια

Παράγει 35 τεμάχια/ ώρα από το προϊόν Β

1 τεμάχιο Β παράγεται σε 1/35 της ώρας => ΧΒ /35 ώρες, παράγονται τα ΧΒ τεμάχια

Συνολικός χρόνος Τόρνος: ΧΑ / 28 + ΧΒ / 35 <= 1 ώρα

Φινίρισμα

Παράγει 35 τεμάχια/ ώρα από το προϊόν Α

1 τεμάχιο Α παράγεται σε 1/35 της ώρας => ΧΑ /35 ώρες, παράγονται τα ΧΑ τεμάχια

Παράγει 25 τεμάχια/ ώρα από το προϊόν Β

1 τεμάχιο Β παράγεται σε 1/25 της ώρας => ΧΒ /25 ώρες, παράγονται τα ΧΒ τεμάχια

Συνολικός χρόνος Μηχανουργείο: ΧΑ / 35 + ΧΒ / 25 <= 1 ώρα

Κόστος παραγωγής προϊόντος Α ανά τεμάχιο

Μηχανουργείο: Σε μία ώρα, 25 τεμάχια. Ωριαίο κόστος 20€. Κόστος ανά τεμάχιο: 20 / 25 €

Τόρνος: Σε μία ώρα, 28 τεμάχια. Ωριαίο κόστος 14€. Κόστος ανά τεμάχιο: 14 / 28 €

Φινίρισμα: Σε μία ώρα, 35 τεμάχια. Ωριαίο κόστος 17,5€. Κόστος ανά τεμάχιο: 17,5 / 35 €

Συνολικό κόστος παραγωγής προϊόντος Α, ΚΠΑ, ανά τεμάχιο:

ΚΠΑ = 20 / 25 + 14 / 28 + 17,5 / 35

Κόστος παραγωγής προϊόντος Β ανά τεμάχιο

Μηχανουργείο: Σε μία ώρα, 40 τεμάχια. Ωριαίο κόστος 20€. Κόστος ανά τεμάχιο: 20 / 40 €

Τόρνος: Σε μία ώρα, 35 τεμάχια. Ωριαίο κόστος 14€. Κόστος ανά τεμάχιο: 14 / 35 €

Φινίρισμα: Σε μία ώρα, 25 τεμάχια. Ωριαίο κόστος 17,5€. Κόστος ανά τεμάχιο: 17,5 / 25 €

Συνολικό κόστος παραγωγής προϊόντος Β, ΚΠΒ, ανά τεμάχιο:

ΚΠΒ = 20 / 40 + 14 / 35 + 17,5 / 25

Κέρδος προϊόντος Α ανά τεμάχιο

Από την τιμή πώλησης 5€, θα αφαιρέσουμε την δαπάνη πρώτης ύλης ανά τεμάχιο προϊόντος Α συν το κόστος παραγωγής κάθε τεμαχίου. Το κέρδος ΚΑ, σε ευρώ, για κάθε τεμάχιο προϊόντος Α είναι:

ΚΑ = 5 – ( 2 + ΚΠΑ)

Κέρδος προϊόντος Β ανά τεμάχιο

Από την τιμή πώλησης 5€, θα αφαιρέσουμε την δαπάνη πρώτης ύλης ανά τεμάχιο προϊόντος Β συν το κόστος παραγωγής κάθε τεμαχίου. Το κέρδος ΚΒ, σε ευρώ, για κάθε τεμάχιο προϊόντος Β είναι:

ΚΒ = 5 – ( 3 + ΚΠΒ)

Συνολικό κέρδος παραγωγής

Επομένως, το συνολικό κέρδος παραγωγής, Γ, ανά ώρα είναι:

Κέρδος προϊόντος Α ανά τεμάχιο \* Ποσότητα τεμαχίων Προϊόντος Α +

Κέρδος προϊόντος Β ανά τεμάχιο \* Ποσότητα τεμαχίων Προϊόντος Β

Γ = ΚΑ \* ΧΑ + ΚΒ \* ΧΒ

Θέλουμε την μεγιστοποίηση του κέρδους, οπότε

Αντικειμενική συνάρτηση 🡪 MAX Γ = ΚΑ \* ΧΑ + ΚΒ \* ΧΒ

Μεταβλητές απόφασής 🡪 ΧΑ, ΧΒ

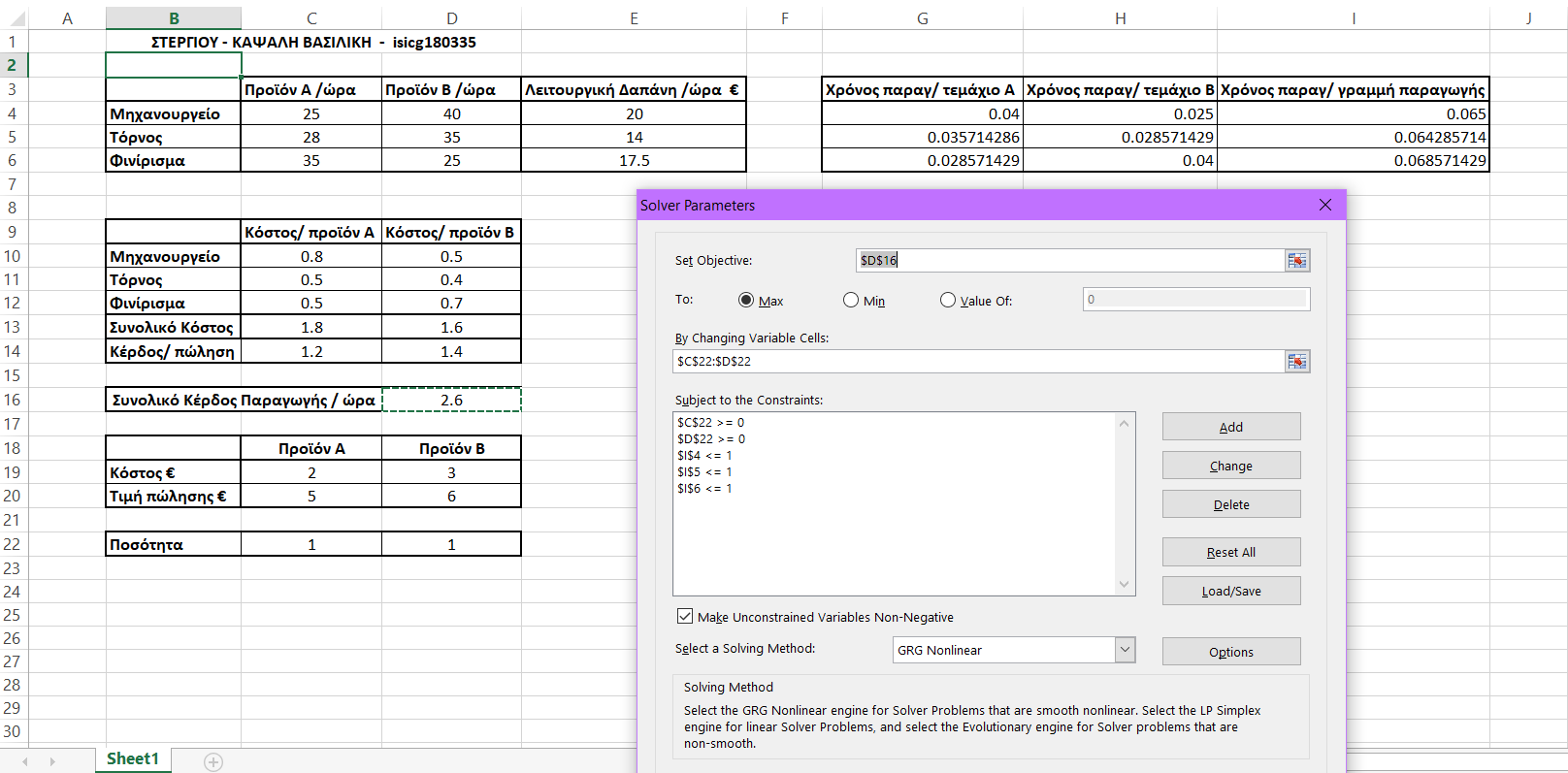
Περιορισμοί 🡪 ΧΑ, ΧΒ >= 0

ΧΑ / 25 + ΧΒ / 40 <= 1

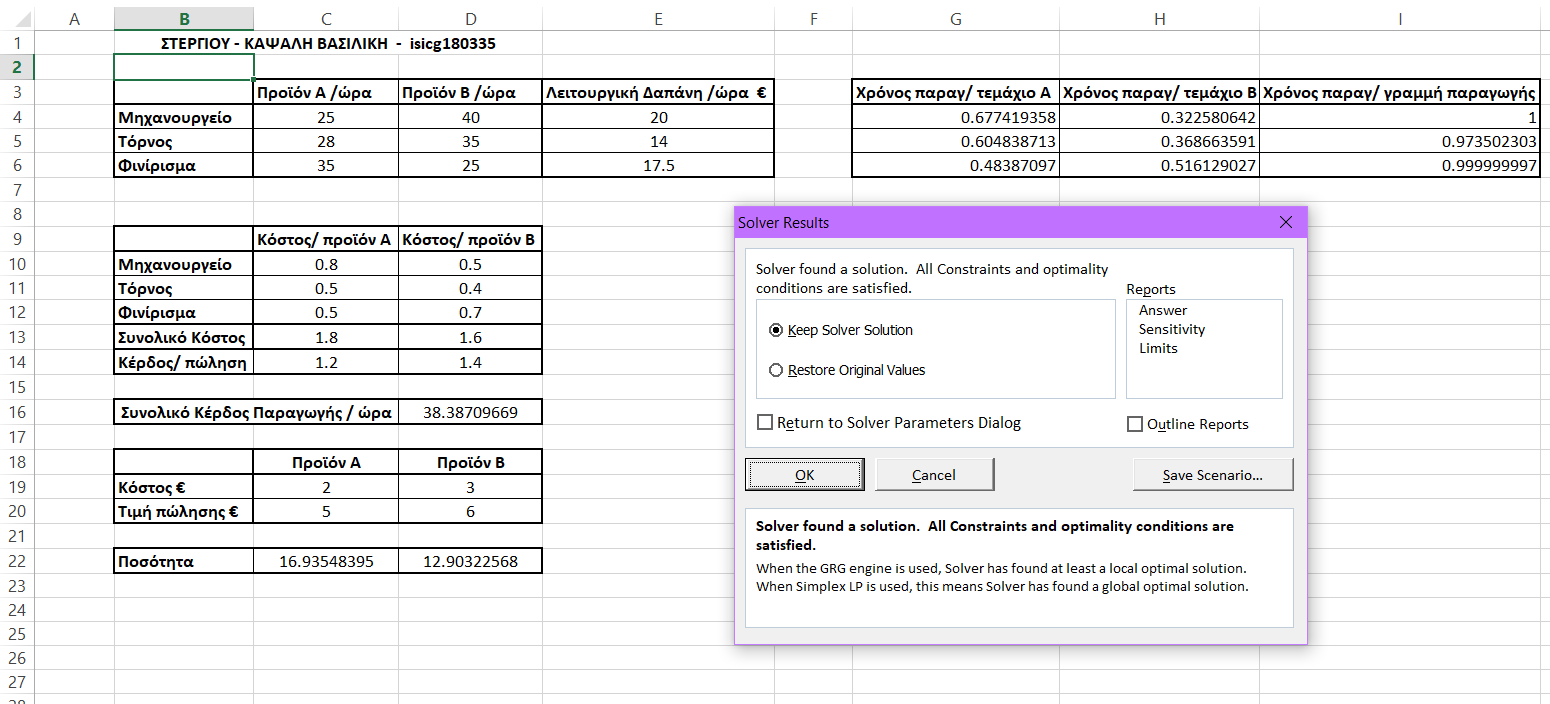
ΧΑ / 28 + ΧΒ / 35 <= 1

ΧΑ / 35 + ΧΒ / 25 <= 1

Εισάγουμε τα δεδομένα στο Solver του Excel, μαζί με τους περιορισμούς.



Βρίσκουμε την βέλτιστη λύση.



# Πρόβλημα μεταφοράς

Το πρόβλημα μεταφοράς είναι ένα από τα πρώτα είδη προβλημάτων που αναλύθηκαν με την χρήση του γραμμικού προγραμματισμού. Το γενικό πρόβλημα εμφανίστηκε όταν τα διαθέσιμα αγαθά αποθηκευμένα σε διάφορες πηγές έπρεπε να διανεμηθούν σε ποικίλους προορισμούς. Το πρόβλημα είναι να βρούμε τον βέλτιστο τρόπο μεταφοράς έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος μεταφοράς. Συγκεκριμένα, διαθέτουμε ποσότητες ενός ομοιόμορφου προϊόντος σε έναν αριθμό αποθηκών και θέλουμε να μεταφέρουμε καθορισμένες ποσότητες του προϊόντος σε έναν αριθμό από διαφορετικούς προορισμούς.

Το κόστος για την μεταφορά μιας μονάδας ποσότητας από οποιαδήποτε αποθήκη σε οποιοδήποτε κατάστημα είναι γνωστό, ενώ η μεταφορά από κάθε αποθήκη σε κάθε κατάστημα είναι δυνατή.

Θέλουμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο κόστος μεταφοράς από τις αποθήκες στα καταστήματα λιανικής πώλησης.

**Πρόβλημα**

Μια βιομηχανία διαθέτει τρία εργοστάσια στην Ευρώπη (Μόναχο, Λίβερπουλ, Μιλάνο) και τρία Κέντρα Αποθήκευσης και Διανομής (Πειραιεύς, Βαρκελώνη, Κωνσταντινούπολη). Η μεταφορά των προϊόντων γίνεται με κιβώτια. Στον ακόλουθο πίνακα δίδονται η δαπάνη μεταφοράς ανά εργοστάσιο προς προορισμό ανά κιβώτιο σε ευρώ. Επίσης, δίδεται η μηνιαία παραγωγή των εργοστασίων (σε κιβώτια) και η μηνιαία ζήτηση των προϊόντων στα κέντρα διανομής.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Πόλεις - Προορισμοί** | | |  |
| **Εργοστάσια** | **Πειραιεύς** | **Βαρκελώνη** | **Κωνσταντινούπολη** | **ΠΑΡΑΓΩΓΗ** |
| **Μόναχο** | *150* | *100* | *100* | ***110*** |
| **Λίβερπουλ** | *100* | *300* | *200* | ***160*** |
| **Μιλάνο** | *100* | *200* | *300* | ***150*** |
| **ΖΉΤΗΣΗ** | ***140*** | ***200*** | ***80*** | 420 |

Να υπολογίσετε το σχέδιο μεταφοράς των προϊόντων από τα εργοστάσια προς τα Κέντρα Αποθήκευσης και Διανομής έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η δαπάνη.

**Επίλυση προβλήματος**

Υπολογισμός αρχικής λύσης με τη τεχνική Βορειοδυτικής Γωνίας.

**Διαδρομή Μόναχο – Πειραιάς**

Ξεκινάμε από την πρώτη γραμμή και πρώτη στήλη, στη διαδρομή Μόναχο – Πειραιάς τοποθετώντας το μεγαλύτερο δυνατό φορτίο, οπότε καταχωρούμε 110 παραγωγή και ταυτόχρονα μειώνουμε τη ζήτηση σε 30 για Πειραιά. Έχουμε εξαντλήσει την ποσότητα παραγωγής από Μόναχο.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Πόλεις - Προορισμοί** | | |  |
| **Εργοστάσια** | **Πειραιεύς** | **Βαρκελώνη** | **Κωνσταντινούπολη** | **ΠΑΡΑΓΩΓΗ** |
| **Μόναχο** | *150* ***(110)*** | *100* | *100* | ***~~110-110=0~~*** |
| **Λίβερπουλ** | *100* | *300* | *200* | ***160*** |
| **Μιλάνο** | *100* | *200* | *300* | ***150*** |
| **ΖΉΤΗΣΗ** | **140-110*=30*** | ***200*** | ***80*** | 420 |

Για να καλύψουμε την ζήτηση του Πειραιά – άλλα 30 – θα χρειαστεί να πάρουμε και από άλλο εργοστάσιο.

**Διαδρομή Λίβερπουλ – Πειραιάς**

Από Λίβερπουλ θα πάρουμε 30 και θα καλύψουμε την ζήτηση του Πειραιά. Μειώνουμε την παραγωγή του Λίβερπουλ από 160 σε 130. Καλύψαμε την ζήτησή για Πειραιά.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Πόλεις - Προορισμοί** | | |  |
| **Εργοστάσια** | **Πειραιεύς** | **Βαρκελώνη** | **Κωνσταντινούπολη** | **ΠΑΡΑΓΩΓΗ** |
| **Μόναχο** | *150* ***(110)*** | *100* | *100* | ***~~110-110=0~~*** |
| **Λίβερπουλ** | *100* ***(30)*** | *300* | *200* | ***160-30=130*** |
| **Μιλάνο** | *100* | *200* | *300* | ***150*** |
| **ΖΉΤΗΣΗ** | **~~140-110~~*~~=30~~***  **~~30-30=0~~** | ***200*** | ***80*** | 420 |

**Διαδρομή Λίβερπουλ – Βαρκελώνη**

Συνεχίζουμε στη δίπλα στήλη, στην ίδια γραμμή, ώστε να καλύψουμε την ζήτηση στο επόμενο εργοστάσιο Βαρκελώνη.

Δίνουμε τα 130 που έχουν μείνει από εργοστάσιο Λίβερπουλ και έτσι εξαντλούμε την παραγωγή του. Μειώνουμε την ζήτηση της Βαρκελώνης σε 70 από 200.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Πόλεις - Προορισμοί** | | |  |
| **Εργοστάσια** | **Πειραιεύς** | **Βαρκελώνη** | **Κωνσταντινούπολη** | **ΠΑΡΑΓΩΓΗ** |
| **Μόναχο** | *150* ***(110)*** | *100* | *100* | ***~~110-110=0~~*** |
| **Λίβερπουλ** | *100* ***(30)*** | *300* ***(130)*** | *200* | ***~~160-30=130~~***  ***~~130-130=0~~*** |
| **Μιλάνο** | *100* | *200* | *300* | ***150*** |
| **ΖΉΤΗΣΗ** | **~~140-110~~*~~=30~~***  **~~30-30=0~~** | ***200-130=70*** | ***80*** | 420 |

**Διαδρομή Μιλάνο – Βαρκελώνη**

Προχωράμε στο επόμενο εργοστάσιο, Μιλάνο, για να καλύψουμε την ζήτηση για τον προορισμό Βαρκελώνη. Παίρνουμε από Μιλάνο τα υπόλοιπα 70 που μας λείπουν για να καλύψουμε την ζήτηση στη Βαρκελώνη, και μειώνουμε την παραγωγή του Μιλάνου σε 80 από 150. Καλύψαμε την ζήτηση για Βαρκελώνη.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Πόλεις - Προορισμοί** | | |  |
| **Εργοστάσια** | **Πειραιεύς** | **Βαρκελώνη** | **Κωνσταντινούπολη** | **ΠΑΡΑΓΩΓΗ** |
| **Μόναχο** | *150* ***(110)*** | *100* | *100* | ***~~110-110=0~~*** |
| **Λίβερπουλ** | *100* ***(30)*** | *300* ***(130)*** | *200* | ***~~160-30=130~~***  ***~~130-130=0~~*** |
| **Μιλάνο** | *100* | *200* ***(70)*** | *300* | ***150-70=80*** |
| **ΖΉΤΗΣΗ** | **~~140-110~~*~~=30~~***  **~~30-30=0~~** | ***~~200-130=70~~***  ***~~70-70=(0)~~*** | ***80*** | 420 |

**Διαδρομή Μιλάνο – Κωνσταντινούπολη**

Συνεχίζουμε στη διπλανή στήλη, για τη κάλυψη της ζήτησης στη Κωνσταντινούπολη. Δίνουμε τα 80 υπολειπόμενα της παραγωγής του Μιλάνου στη Κωνσταντινούπολη και καλύπτουμε την ζήτηση της.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Πόλεις - Προορισμοί** | | |  |
| **Εργοστάσια** | **Πειραιεύς** | **Βαρκελώνη** | **Κωνσταντινούπολη** | **ΠΑΡΑΓΩΓΗ** |
| **Μόναχο** | *150* ***(110)*** | *100* | *100* | ***~~110-110=0~~*** |
| **Λίβερπουλ** | *100* ***(30)*** | *300* ***(130)*** | *200* | ***~~160-30=130~~***  ***~~130-130=0~~*** |
| **Μιλάνο** | *100* | *200* ***(70)*** | *300* ***(80)*** | ***~~150-70=80~~***  ***~~80-80=0~~*** |
| **ΖΉΤΗΣΗ** | **~~140-110~~*~~=30~~***  **~~30-30=0~~** | ***~~200-130=70~~***  ***~~70-70=(0)~~*** | ***~~80-80=0~~*** | 420 |

**Συνολικό κόστος:** 150\*110 + 100\*30 + 300\*130 + 200\*70 + 300\*80 = **96500 €**

Αυτή είναι η αρχική μας λύση με την τεχνική Βορειοδυτικής Γωνίας.

Στη συνέχεια εκτιμάται η βέλτιστη λύση με την μέθοδο Stepping Stone.

**Εκτίμηση Βέλτιστης Λύσης – Stepping Stone**

Για κάθε μη χρησιμοποιημένη διαδρομή που προκύπτει από την παραπάνω τεχνική, βρίσκουμε κλειστούς βρόγχους χρησιμοποιημένων διαδρομών που να αρχίζουν και τελειώνουν στην υπό εξέταση διαδρομή.

Αρχίζοντας με + και σε κάθε κελί του βρόγχου, βάζουμε εναλλάξ + και – με τη σειρά που σχεδιάζεται ο βρόχος.

Υπολογίζουμε την οριακή μεταβολή του κόστους, προσθέτοντας τα κόστη των διαδρομών με + και αφαιρώντας τα κόστη των διαδρομών με -.

Όπου προκύπτει αρνητική μεταβολή τότε στη χρησιμοποιημένη διαδρομή αναθέτουμε την επιτρεπτή ποσότητα και αφαιρούμε και προσθέτουμε στις διαδρομές του βρόγχου αντίστοιχα τις ποσότητες, με βάση τα πρόσημα.

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να μην βρίσκουμε διαδρομή (μη χρησιμοποιημένη) με αρνητική οριακή μεταβολή.

Οι μη χρησιμοποιημένες διαδρομές, που προέκυψαν, είναι οι εξής 4:

Διαδρομή Μόναχο - Βαρκελώνη

Διαδρομή Μόναχο - Κωνσταντινούπολη

Διαδρομή Λίβερπουλ - Κωνσταντινούπολη

Διαδρομή Μιλάνο - Πειραιάς

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Πόλεις - Προορισμοί** | | |  |
| **Εργοστάσια** | **Πειραιεύς** | **Βαρκελώνη** | **Κωνσταντινούπολη** | **ΠΑΡΑΓΩΓΗ** |
| **Μόναχο** | *150* ***(110)*** | *100* | *100* | ***~~110-110=0~~*** |
| **Λίβερπουλ** | *100* ***(30)*** | *300* ***(130)*** | *200* | ***~~160-30=130~~***  ***~~130-130=0~~*** |
| **Μιλάνο** | *100* | *200* ***(70)*** | *300* ***(80)*** | ***~~150-70=80~~***  ***~~80-80=0~~*** |
| **ΖΉΤΗΣΗ** | **~~140-110~~*~~=30~~***  **~~30-30=0~~** | ***~~200-130=70~~***  ***~~70-70=(0)~~*** | ***~~80-80=0~~*** | 420 |

**Stepping Stone (1)**

Διαδρομή Μόναχο - Βαρκελώνη

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Πόλεις - Προορισμοί** | | |  |
| **Εργοστάσια** | **Πειραιεύς** | **Βαρκελώνη** | **Κωνσταντινούπολη** | **ΠΑΡΑΓΩΓΗ** |
| **Μόναχο** | *150 (110) -* | *100* + | *100* | ***110*** |
| **Λίβερπουλ** | *100 (30) +* | *300 (130) -* | *200* | ***160*** |
| **Μιλάνο** | *100* | *200 (70)* | *300 (80)* | ***150*** |
| **ΖΉΤΗΣΗ** | **140** | ***200*** | ***80*** | 420 |

**Οριακή μεταβολή κόστους:** 100 – 300 + 100 – 150 = - 250

Η οριακή μεταβολή του κόστους είναι αρνητική, οπότε αναθέτουμε την επιτρεπτή ποσότητα 110, στη χρησιμοποιημένη διαδρομή, και την αφαιρούμε ή την προσθέτουμε στις διαδρομές του βρόγχου με βάση τα πρόσημα.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Πόλεις - Προορισμοί** | | |  |
| **Εργοστάσια** | **Πειραιεύς** | **Βαρκελώνη** | **Κωνσταντινούπολη** | **ΠΑΡΑΓΩΓΗ** |
| **Μόναχο** | *150 (110 – 110 = 0)* | *100(110)* | *100* | ***110*** |
| **Λίβερπουλ** | *100 (30 + 110 = 140)* | *300 (130-110 = 20)* | *200* | ***160*** |
| **Μιλάνο** | *100* | *200 (70)* | *300 (80)* | ***150*** |
| **ΖΉΤΗΣΗ** | **140** | ***200*** | ***80*** | 420 |

**Stepping Stone (2)**

Διαδρομή Μόναχο - Κωνσταντινούπολη

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Πόλεις - Προορισμοί** | | |  |
| **Εργοστάσια** | **Πειραιεύς** | **Βαρκελώνη** | **Κωνσταντινούπολη** | **ΠΑΡΑΓΩΓΗ** |
| **Μόναχο** | *150* | *100 (110) -* | *100 +* | ***110*** |
| **Λίβερπουλ** | *100 (140)* | *300 (20)* | *200* | ***160*** |
| **Μιλάνο** | *100* | *200 (70) +* | *300 (80) -* | ***150*** |
| **ΖΉΤΗΣΗ** | **140** | ***200*** | ***80*** | 420 |

**Οριακή μεταβολή κόστους:** 100 – 100 + 200 – 300 = - 100

Η οριακή μεταβολή του κόστους είναι αρνητική, οπότε αναθέτουμε την επιτρεπτή ποσότητα 80, στη χρησιμοποιημένη διαδρομή, και την αφαιρούμε ή την προσθέτουμε στις διαδρομές του βρόγχου με βάση τα πρόσημα.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Πόλεις - Προορισμοί** | | |  |
| **Εργοστάσια** | **Πειραιεύς** | **Βαρκελώνη** | **Κωνσταντινούπολη** | **ΠΑΡΑΓΩΓΗ** |
| **Μόναχο** | *150* | *100 (110-80=30)* | *100 (80)* | ***110*** |
| **Λίβερπουλ** | *100 (140)* | *300 (20)* | *200* | ***160*** |
| **Μιλάνο** | *100* | *200 (70+80=150)* | *300 (80-80=0)* | ***150*** |
| **ΖΉΤΗΣΗ** | **140** | ***200*** | ***80*** | 420 |

**Stepping Stone (3)**

Διαδρομή Λίβερπουλ - Κωνσταντινούπολη

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Πόλεις - Προορισμοί** | | |  |
| **Εργοστάσια** | **Πειραιεύς** | **Βαρκελώνη** | **Κωνσταντινούπολη** | **ΠΑΡΑΓΩΓΗ** |
| **Μόναχο** | *150* | *100 (30) +* | *100 (80) -* | ***110*** |
| **Λίβερπουλ** | *100 (140)* | *300 (20)* *-* | *200 +* | ***160*** |
| **Μιλάνο** | *100* | *200 (150)* | *300* | ***150*** |
| **ΖΉΤΗΣΗ** | **140** | ***200*** | ***80*** | 420 |

**Οριακή μεταβολή κόστους:** 200 – 100 + 100 – 300 = - 100

Η οριακή μεταβολή του κόστους είναι αρνητική, οπότε αναθέτουμε την επιτρεπτή ποσότητα 20, στη χρησιμοποιημένη διαδρομή, και την αφαιρούμε ή την προσθέτουμε στις διαδρομές του βρόγχου με βάση τα πρόσημα.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Πόλεις - Προορισμοί** | | |  |
| **Εργοστάσια** | **Πειραιεύς** | **Βαρκελώνη** | **Κωνσταντινούπολη** | **ΠΑΡΑΓΩΓΗ** |
| **Μόναχο** | *150* | *100 (30+20=50)* | *100 (80-20=60)* | ***110*** |
| **Λίβερπουλ** | *100 (140)* | *300 (20-20=0****)*** | *200 (20)* | ***160*** |
| **Μιλάνο** | *100* | *200 (150)* | *300* | ***150*** |
| **ΖΉΤΗΣΗ** | **140** | ***200*** | ***80*** | 420 |

**Stepping Stone (4)**

Διαδρομή Μιλάνο - Πειραιάς

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Πόλεις - Προορισμοί** | | |  |
| **Εργοστάσια** | **Πειραιεύς** | **Βαρκελώνη** | **Κωνσταντινούπολη** | **ΠΑΡΑΓΩΓΗ** |
| **Μόναχο** | *150* | *100 (50) +* | *100 (60) -* | ***110*** |
| **Λίβερπουλ** | *100 (140) -* | *300* | *200 (20) +* | ***160*** |
| **Μιλάνο** | *100 +* | *200 (150) -* | *300* | ***150*** |
| **ΖΉΤΗΣΗ** | **140** | ***200*** | ***80*** | 420 |

**Οριακή μεταβολή κόστους:** 100 – 100 + 200 – 100 + 100 – 200 = 0

Η οριακή μεταβολή του κόστους είναι μηδενική και δε χρειάζεται να κάνουμε κάτι περαιτέρω.

Επομένως η τελική κατανομή των ποσοτήτων είναι:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Πόλεις - Προορισμοί** | | |  |
| **Εργοστάσια** | **Πειραιεύς** | **Βαρκελώνη** | **Κωνσταντινούπολη** | **ΠΑΡΑΓΩΓΗ** |
| **Μόναχο** | *150* | *100 (50)* | *100 (60)* | ***110*** |
| **Λίβερπουλ** | *100 (140)* | *300* | *200 (20)* | ***160*** |
| **Μιλάνο** | *100* | *200 (150)* | *300* | ***150*** |
| **ΖΉΤΗΣΗ** | **140** | ***200*** | ***80*** | 420 |

**Βέλτιστο Κόστος:** 100\*140+100\*50+200\*150+100\*60+200\*20= **59000 €**

# Βιβλιογραφία

Δρακόπουλος, Β. Αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης. Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Υπολογιστών. Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής.

Σπυριδάκος, Α. Επιχειρησιακή Έρευνα/Διοικητική Επιστήμη Προβλήματα Μεταφοράς.

Κολέτσος. Γραμμικός προγραμματισμός. Ανακτήθηκε Φεβρουάριο 2019, από

<http://www.math.ntua.gr/~coletsos/Documents/paradeigmata.pdf>