Задание 4

Найдите экстремальные значения функции z, зависящей от x и y, для которой справедливо соотношение: $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2)$, где $a = const,\ a \neq 0$.

Перепишем функцию в другом виде:

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - a^2(x^2+y^2-z^2) = 0 \tag{1}$$

Запишем необходимое условие экстремума функции, то есть возьмем производные и приравняем их к нулю (для этого предположим, что $z(x,y)$ - дифференцируемое решение уравнения (1):

$$\begin{gathered}(1)^{'}_x: \quad 2(x^2+y^2+z^2)(2x+2zz^{'}_x) - a^2(2x-2zz^{'}_x) = 0\\ (1)^{'}_y: \quad 2(x^2+y^2+z^2)(2y+2zz^{'}_y) - a^2(2y-2zz^{'}_y) = 0\end{gathered}$$

В точках экстремума производная функции равна нулю, поэтому нам следует решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}2(x^2+y^2+z^2)(2x+2zz^{'}_x) - a^2(2x-2zz^{'}_x) = 0\\ 2(x^2+y^2+z^2)(2y+2zz^{'}_y) - a^2(2y-2zz^{'}_y) = 0\\ z^{'}_x = z^{'}_y = 0\\ (x^2+y^2+z^2)^2 - a^2(x^2+y^2-z^2) = 0\end{cases}$$

Начнем с первых трех:

$$\begin{cases}2(x^2+y^2+z^2)(2x) - a^2(2x) = 0\\ 2(x^2+y^2+z^2)(2y) - a^2(2y) = 0\end{cases}$$

Отдельно выделим критическую точку $(0;0)$, а пока рассмотрим функцию без нее, поэтому делим выражения на $2x$ и $2y$ соответсвенно и получаем:

$$2(x^2+y^2+z^2) = a^2$$

Или же:

$$z^2 = \frac{a^2}{2} - x^2 - y^2$$

Подставляем равенство в функцию и получаем

$$\begin{gathered}(x^2+y^2+\frac{a^2}{2}-x^2-y^2)^2 = a^2(x^2+y^2-\frac{a^2}{2}+x^2+y^2)\\ \frac{a^4}{4} = a^2(2x^2+2y^2-\frac{a^2}{2})\\ \frac{3a^2}{4} = 2x^2+2y^2\\ x^2+y^2 = \frac{3a^2}{8}\end{gathered}$$

Кривая $x^2+y^2 = \frac{3a^2}{8}$ задает множество критических точек исходной функции. Найдем ее значение:

$$\begin{gathered}\left(\frac{3a^2}{8}+z^2\right)^2 = a^2\left(\frac{3a^2}{8}-z^2\right)\\ a^2 = b\\ x^2 = w,\ w > 0\\ w^2 + \frac{7b}{4}w - \frac{15b^2}{64} = 0\\ D = \frac{4b^2}{16} + \frac{15b^2}{16} = 4b^2\\ w = \frac{-\frac{7b}{4} \pm 2b}{2}\end{gathered}$$

С учетом всех условий обратной заменой получаем:

$$z = \pm\frac{a}{2\sqrt{2}}$$

Найдем значение функции в точке $(0;0)$:

$$\left(0+z^2\right)^2 = a^2\left(0-z^2\right)$$
$$z=0$$

Проверим, существует ли функция в окрестности найденных нами точек, применяя теорему о неявной функции: найдем вектор градиент.

$$(1)_z^{'} = 2(x^2+y^2+z^2)(2z) - a^2(-2z) = 4z(x^2+y^2+z^2) + 2a^2z$$

1. Точка (0;0;0)

$$\nabla f(0;0;0) = (0\ 0\ 0)$$

Производная по z не равна нулю, условие теоремы не выполняется, следовательно, точка не является экстремальный.

2. Кривая $x^2+y^2=\frac{3a^2}{8},\ z=\frac{a}{2\sqrt{2}}$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{7a^3+2\sqrt{2}a}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Производная по z отлична от нуля, следовательно функция существует и диффиренцируема в точке.

3. Кривая $x^2+y^2=\frac{3a^2}{8},\ z=-\frac{a}{2\sqrt{2}}$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{7a^3+2\sqrt{2}a}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Производная по z отлична от нуля, следовательно функция существует и диффиренцируема в точке.

Осталось проверить множества точек на достаточное условие и определить характер точек.

$$(1)_{xx}^{''} : 2(x^2+y^2+z^2)(2+2(z_x^{'})^2+2zz_{xx}^{''}) + 2(2x+2zz_x^{'})(2x+2zz_x^{'}) - a^2(2-2z(z_{xx}^{''})-2z(z_x^{'})^2) = 0$$
$$(1)_{yy}^{''} : 2(x^2+y^2+z^2)(2+2(z_y^{'})^2+2zz_{yy}^{''}) + 2(2y+2zz_y^{'})(2y+2zz_y^{'}) - a^2(2-2z(z_{yy}^{''})-2z(z_y^{'})^2) = 0$$
$$(1)_{xy}^{''} : 4(x^2+y^2+z^2)(zz_{xy}^{''}+z_x^{'}z_y^{'}) + 2(2y+2zz_y^{'})(2x+2zz_x^{'}) + 2a^2(z_x^{'}z_y^{'}+zz_{xy}^{''}) = 0$$

1. Кривая $x^2+y^2=\frac{3a^2}{8},\ z=\frac{a}{2\sqrt{2}}$

$$A = z_{xx}^{''} = -\frac{8x^2}{a^3\sqrt{2}}$$
$$C = z_{yy}^{''} = -\frac{8y^2}{a^3\sqrt{2}}$$
$$B = z_{xy}^{''} = -\frac{8xy}{a^3\sqrt{2}}$$
$$A \le 0$$
$$AC-B^2 \ge 0$$

По критерию Сильвестра функция принимает максимальное значение на кривой, а сами точки на кривой являются точками максимума.

2. Кривая $x^2+y^2=\frac{3a^2}{8},\ z=-\frac{a}{2\sqrt{2}}$

$$A = z_{xx}^{''} = \frac{8x^2}{a^3\sqrt{2}}$$
$$C = z_{yy}^{''} = \frac{8y^2}{a^3\sqrt{2}}$$
$$B = z_{xy}^{''} = \frac{8xy}{a^3\sqrt{2}}$$
$$A \ge 0$$
$$AC-B^2 \ge 0$$

По критерию Сильвестра функция принимает минимальное значение на кривой, а сами точки на кривой являются точками минимума.

Ответ:

- $x^2+y^2=\frac{3a^2}{8},\ z=\frac{a}{2\sqrt{2}}$ - множество точек максимума;

- $x^2 + y^2 = \frac{3a^2}{8},\ z = -\frac{a}{2\sqrt{2}}$ - множество точек минимума.