Задание 5

Предположим, что в текущий момент времени мы выбираем $(m+1)$-ый конверт и кладем в него письмо, при том что до этого мы уже положили письма в m конвертов. Предположим, что подходящих писем, которые можно положить в текущий конверт не 1, а n, а всего конвертов N (Общий случай). Найдем вероятность того, что в k из m конвертов мы положили одно из нужных писем (событие A_k).

$$P(A_k) = \frac{C_n^k \times C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$$

- C_n^k - количество возможных положенных писем в конверты, совпадающих с $m+1$-ым конвертом;
- C_{N-n}^{m-k} - количество возможных положенных писем в конверты, отличные от $m+1$-го конверта;
- C_N^m - количество возможных вариантов положить письма в m конвертов из n штук.

Далее найдем вероятность всего события A, того, что в наш конверт попадет нужное письмо.

$$P(A) = \sum_{k=0}^{m} P(A|A_k) \times P(A_k) = \sum_{k=0}^{m} \frac{n-k}{N-m} \times \frac{C_n^k \times C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m} =$$
$$= \frac{n}{N} \times \sum_{k=0}^{m} \frac{C_{n-1}^k \times C_{N-n}^{m-k}}{C_{N-1}^m}$$

Известно, что:

$$\sum_{k=0}^{z} C_x^k \times C_y^{z-k} = C_{x+y}^z$$

Тогда:

$$\sum_{k=0}^{m} C_{n-1}^k \times C_{N-n}^{m-k} = C_{N-1}^m$$

В итоге получаем:

$$P(A) = \frac{n}{N} \times \frac{C_{N-1}^m}{C_{N-1}^m} = \frac{n}{N}$$

В нашем случае (N=n - количество конвертов, n = 1 - количество подходящих конвертов) вероятность того, что в какой-то конкретный конверт попадет нужное письмо не зависит от места в очереди, и равно:

$$P(A) = \frac{1}{n}$$

Получается, что мы имеем распределение Бернулли, с параметрами:

- $p = \frac{1}{n}$ - вероятность успеха на каждом шаге
- $n = n$ - количество испытаний

Тогда математическое ожидание можно будет равно:

$$E(m) = np = n \times \frac{1}{n} = 1$$

Также математическое ожидание можно получить через сумму индикаторов каждого события или по классическому определению математического ожидания.

Ответ: 1.