Задание 1

> Из множества $\{1, 2, ..., 97\}$ выбирают три числа. Какова вероятность, что из них можно составить арифметическую прогрессию?

Поскольку мы можем произвольно выбирать три числа из какого-то ограниченного диапазона, шаг арифметической прогрессии тоже ограничен, давайте его оценим.

Например, у нас есть три идущих подряд числа, то есть шаг равен 1, тогда всего таких сочетаний может быть ровно 95:

№ п.п.	Число 1	Число 2	Число 3
1	1	2	3
2	2	3	4
3	3	4	5
...			
95	95	96	97

Для шага, равного 2 таблица будет выглядеть следующим образом:

№ п.п.	Число 1	Число 2	Число 3
1	1	3	5
2	2	4	6
3	3	5	7
...			
93	93	95	97

Становится ясно, что количество всех сочетаний это арифметическая прогрессия от параметра шага, давайте докажем, что это так:

$$\begin{cases} a_1 \geq 1 \\ a_3 = a_1 + 2d \\ a_3 \leq 97 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \leq 97 - 2d \\ d \in [0; 48] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^{max} = 97 - 2d \\ d \in [0; 48] \end{cases}$$

Для упорядоченных членов прогрессии и неотрицательного шага справедлива система, приведенная выше. Из последнего неравенства следует, что a_1^{max} равномерно убывает по d с шагом 2, а вместе с ним общее число сочетаний, что и требовалось доказать.

Для каждого сочетания существует шесть вариантов размещений, а нам важно учитывать именно количество размещений, ведь выбирая числа из множества, мы получаем их в произвольном порядке, но можем расположить в нужном и получить прогрессию (если числа ее образуют, конечно). Составим итоговую таблицу для положительных d:

Шаг	Количество сочетаний	Количество размещений	Пример
1	95	570	1, 2,3
2	93	558	1, 3, 5
3	91	546	1, 4, 7
...			
48	1	6	1, 49, 97
Всего	2304	13824	-

Отдельно добавим комбинации, при которых все три числа равны (стационарная последовательность). Они не образуют 6 размещений, поэтому их просто прибавляем.

$$13824 + 97 = 13921$$

Теперь осталось найти вероятность по классическому определению:

$$P(A) = \frac{\text{'Хорошие случаи'}}{\text{Все случаи}} = \frac{13921}{97^3} = \frac{13921}{912673} \approx 0,015$$

A - событие “числа образуют арифметическую прогрессию”.

Ответ: 0,015.