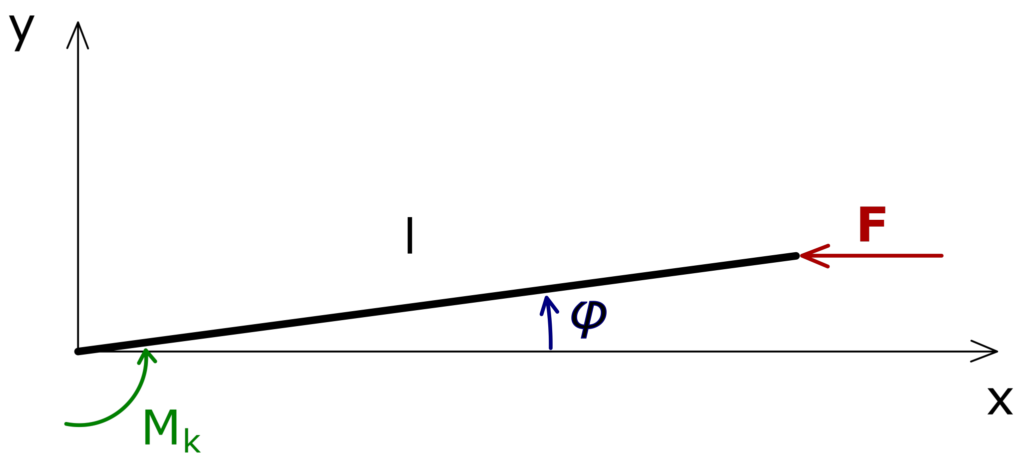
Munka dokumentáció

1. Kisebb rendszerek modellezése

1.1. 1DoF, csillapítatlan, nem követő erő



Jelölje a rugó merevségét k, a rúd hosszát l, az erő nagyságát F. Legyen $k > 0, l > 0, F > 0$
A rendszer konzervatív, és csillapítatlan, gerjesztetlen, ezért ha a potenciálfüggvénynek a $\varphi = 0$ pontban lokális minimuma van, akkor a $\varphi \to 0, \dot{\varphi} \to 0$, kezdeti állapotból induló rendszerek stabilak lesznek. A rúd tömege - tehetetlenségi nyomatéka a stabilitásra nincs, csak a rezgés frekvenciájára van hatással, ezért ezzel most nem foglalkozom.
A potenciálfüggvény az alábbi alakban írható fel felírható:

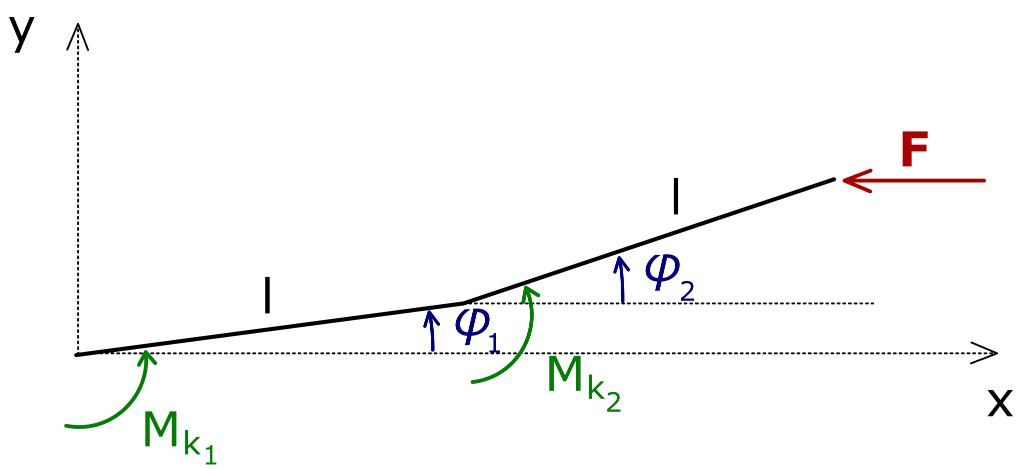
$$U(\varphi) = k/2 \cdot \varphi^2 + Fl \cdot (cos\varphi - 1) \tag{1}$$

$$U'(0) = k \cdot 0 - Fl \sin 0 = 0;\ U''(0) = k - Fl \cos 0 = k - Fl; \tag{2}$$

$$U'''(0) = \sin 0 = 0;\ U''''(0) = Fl \cos 0 = Fl \tag{3}$$

$k > 0, l > 0, F > 0$ Ezért $k[Nm/rad] \geq F[N] \cdot l[m]$ esetén a rendszer stabil $\varphi = 0$ körül, egyébb esetben instabil.

1.2. 2DoF, csillapítatlan, nem követő erő



Jelölje a rugók merevségét $k_1 = k_2 = k > 0$, a rúdak hosszát $l_1 = l_2 = l > 0$, az erő nagyságát F. Legyen $k > 0, l > 0, F > 0$
A rendszer konzervatív, és csillapítatlan, gerjesztetlen, így az előző gondolatmenet alapján elég a potenciálfüggvényt vizsgálni.
A potenciálfüggvény az alábbi alakban írható fel felírható:

$$U(\boldsymbol{\varphi}) = k/2 \cdot \varphi_1^2 + k/2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + Fl \cdot (\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 - 2) \tag{4}$$

A potenciál függvény első, és második deriváltjai:

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\varphi}) = [k_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k\varphi_1 - k\varphi_2 - Fl\sin\varphi_1 \\ k\varphi_2 - k\varphi_1 - Fl\sin\varphi_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\varphi}) = [k_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k - Fl\cos\varphi_1 & -k \\ -k & k - Fl\cos\varphi_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, tehát $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0}$ a rendszernek egyensúlyi helyzete, $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{0})$ előjeles aldeterminánsainak előjelén múlik, hogy ez az egyensúlyi helyzet stabil-e.
$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{0})$ előjeles aldeterminánsai:

$$K_{aldet1} = 2k - Fl \tag{7}$$

$$K_{aldet2} = (2k - Fl)(k - Fl) - k^2 = k^2 - 3kFl + F^2l^2 \tag{8}$$

$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0}$ stabil pont ha:

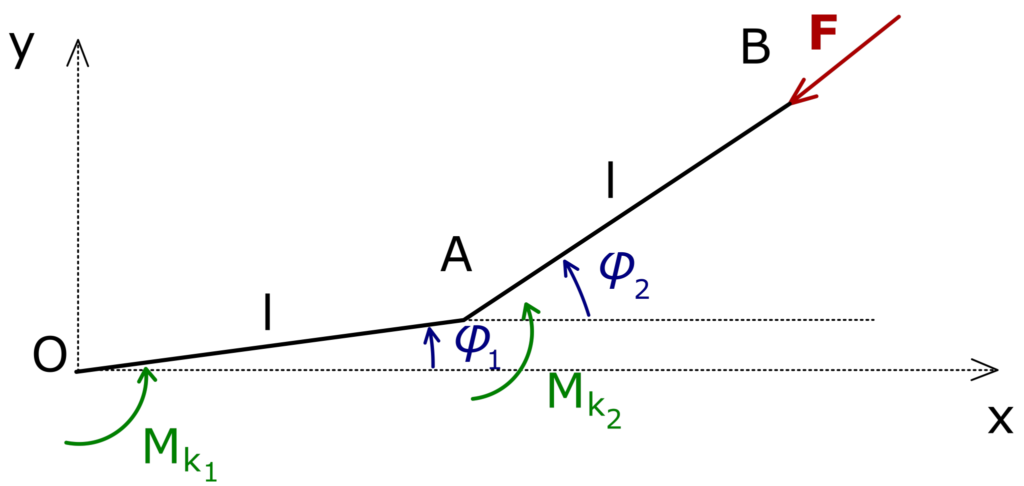
$$2k > Fl;\ k^2 - 3kFl + F^2l^2 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3k + \sqrt{5}k}{2} - Fl\right)\left(\frac{3k - \sqrt{5}k}{2} - Fl\right) > 0 \tag{9}$$

$k > 0, Fl > 0$ felhasználásával, és mivel $3 + \sqrt{5} > 4$

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2}k > Fl \Leftrightarrow 0{,}382k > Fl \tag{10}$$

0,382k>Fl esetén a rendszernek $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0}$ stabil pontja.

2. 2DoF, csillapítatlan, követő erő



Jelölje a rugók merevségét $k_1 = k_2 = k > 0$, a rúdak tömegét $m_1 = m_2 = m > 0$, a rúdak hosszát $l_1 = l_2 = l > 0$, az erő nagyságát F. Legyen $k > 0, m > 0, l > 0, F > 0$
A rendszer mozgását a másodfokú Lagrange-egyenlet írja le.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_j} + \frac{\partial U}{\partial \varphi_j} = q_j \tag{11}$$

Ahol T a rendszer mozgási energiája, U a rugókban tárolt pontenciális energia, $\boldsymbol{Q}$ pedig a rendszer gerjesztése.

2.1. Mozgási energia, potenciálix energia valamint a gerjesztés felírása

Mozgási energia:

$$T(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2}\Theta_{1O}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}mv_{S_2}^2 + \frac{1}{2}\Theta_{2S_2}\dot{\varphi}_2^2, \tag{12}$$

Ahol:

$$\Theta_{1O} = \frac{1}{3}ml^2; \quad \Theta_{2s} = \frac{1}{12}ml^2; \quad v_{2s} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}_1 l \sin(\varphi_1) - \dot{\varphi}_2 \frac{l}{2}\sin(\varphi_2) \\ \dot{\varphi}_1 l \cos(\varphi_1) + \dot{\varphi}_2 \frac{l}{2}\cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$T(\boldsymbol{\varphi}) = ml^2\left(\frac{2}{3}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{6}\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right) \tag{14}$$

Potenciális energia:

$$U(\boldsymbol{\varphi}) = k/2 \cdot \varphi_1^2 + k/2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)^2 = k \cdot \varphi_1^2 + k/2 \cdot \varphi_2^2 - k \cdot \varphi_1\varphi_2 \tag{15}$$

Gerjesztés:

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\varphi}) = [q_j] = \left[\boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_B}{\partial \varphi_j}\right] \tag{16}$$

Ahol:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} -F\cos\varphi_2 \\ -F\sin\varphi_2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{r}_B = \begin{bmatrix} l(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) \\ l(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) \end{bmatrix}; \tag{17}$$

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} Fl\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

2.2. Linearizálás a $\boldsymbol{\varphi} = 0$ körül

A másodfajú Lagrange egyenlet linearizálásval kapott mátrix differenciálegyenlet:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{Q} \tag{19}$$

Tömegmátrix:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\varphi}) = [m_{ij}] = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i \partial \dot{\varphi}_j}\right] = \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} 4/3ml^2 & 1/2ml^2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ 1/2ml^2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) & 1/3ml^2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix} 4/3ml^2 & 1/2ml^2 \\ 1/2ml^2 & 1/3ml^2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Merevségi mátrix:

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\varphi}) = [k_{ij}] = \left[\frac{\partial U}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}\right] = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \tag{23}$$

Gerjesztés:

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\varphi}) \approx \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{0}) + \left[\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{\varphi}}\right] \boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} Fl & -Fl \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} := \boldsymbol{K}^{(F)} \boldsymbol{\varphi} \tag{24}$$

A $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0}$ pont kis környezetében $\boldsymbol{F}$ erő konzervatívank tekinthető.Lehetséges, hogy $\boldsymbol{F}$ erő $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0}$ pont kis környezetében, kismértékben ugyan, de növeli a rendszer energiáját, mely esetben a rendszer modellje semiképp sem lenne stabil. Azonban egy valós szerkezetnek mindig van csillapítása, melyet most az egyszerűség kedvéért 0-nak tekintek. Feltehető hogy $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0}$ pont megfelelően kis környezetében a rendszer energiájának $\boldsymbol{F}$ erő inkonzervativitása miatti növekedése kisebb mint a csillápítás miatti csökkenése, így ez az egyszerűsítés megtehető.
A rendszer stabilitásának megállapításához elegedő $\boldsymbol{F}$ erő hatását is figyelembevevő potenciálfüggvény vizsgálata.

$$\boldsymbol{Q}^{pot}(\boldsymbol{\varphi}) = [k_i] = \left[\frac{\partial U}{\partial \varphi_i}\right] = \begin{bmatrix} 2k\varphi_1 - k\varphi_2 \\ k\varphi_2 - k\varphi_1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$\boldsymbol{Q}^{pot}(\boldsymbol{0}) - \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \tag{26}$$

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{0})\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + (\boldsymbol{K}(\boldsymbol{0}) - \boldsymbol{K}^F)\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0} \tag{27}$$

Innen:

$$\boldsymbol{K}_0^* := \boldsymbol{K}(\boldsymbol{0}) - \boldsymbol{K}^F = \begin{bmatrix} 2k - Fl & -k + Fl \\ -k & k \end{bmatrix} \tag{28}$$

$\boldsymbol{K}_0^*$ előjeles aldeterminánsai:

$$K_0^* aldet1 = 2k - Fl \tag{29}$$

$$K_0^* aldet2 = (2k - Fl)(k) - (-k + Fl)(-k) = k^2 \tag{30}$$

$Fl > 2k$ esetén $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0}$ pont instabil. Azonban ez a módszer nem vizsgálja a növekvő ??? inkább nagy? amplitúdójú rezgéseket, ezért $2k > Fl$ szükséges, de nem elégséges feltétele a stabilitásnak. lokális stabilitás vizsgálat?
Itt arra gondoltam, hogy mivel a rendszernek nincs csillapítása, és a gerjesztése nem periodikus, ezért amikor konzervatívnak tekintettem F erőt, azzal egy olyan hibát tettem a modellembe ami integrálódhat is, ha a rendszer energiája szép lassan növekszik. Talán az alábbi megfogalmazás, a fenti kiegészítéssel jobb:
$2k > Fl$ esetén $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0}$ pont stabil. Azonban nagy a amplitúdójú rezgések, vizsgálatához a linearizálás nem alkalmas.

2.3. Követő és nem követő erő esetén, kis amplitúdójú lengések lengésképének összehasonlítása

Legyen mindkét esetben m=1[kg], l=0,1 [m], F=10[N], k=5 [Nm/rad], így $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0}$ midkét esetben stabil.
A sajátkörfrekvenciáknak (ω_n), és a hozzájuk tartozó sajátvektoroknak ($\boldsymbol{A}$) ki kell elégíteniük az alábbi mátrixegyenletet:

$$(-\omega_n^2 \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \tag{31}$$

Ahol:

$$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}; \quad A_1 := 1 \tag{32}$$

Egy mátrixot nem nullvektorral szorozva akkor kaphatunk nullvektort, ha a mátrix determinánsa 0. Tehát:

$$det(-\omega_n^2 \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}) = 0 \tag{33}$$

Innen kiszámolhatóak a sajátkörfrekvenciák, melyek számossága a rendszer szabadsági fokaival egyezik meg. ($\omega_{n1} \leq \omega_{n2}$) Ezeket visszahelyettesítve az első egyenletbe megkaphatjuk a sajátvektorokat.

Állandó erővel gerjesztett rendszer:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix} 4/3ml^2 & 1/2ml^2 \\ 1/2ml^2 & 1/3ml^2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{K}(\boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix} 2k - Fl & -k \\ -k & k - Fl \end{bmatrix} \tag{34}$$

$$\omega_{n1} = 9,13 [rad/s]; \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,46 \end{bmatrix} [rad] \tag{35}$$

$$\omega_{n2} = 82,30 [rad/s]; \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2,09 \end{bmatrix} [rad] \tag{36}$$

Furcsálom azt az eredményet. Én úgy éreztem, hogy az első sajátkörfrekvenciához tartozó lengésképnél lesz A_2 pozitív.

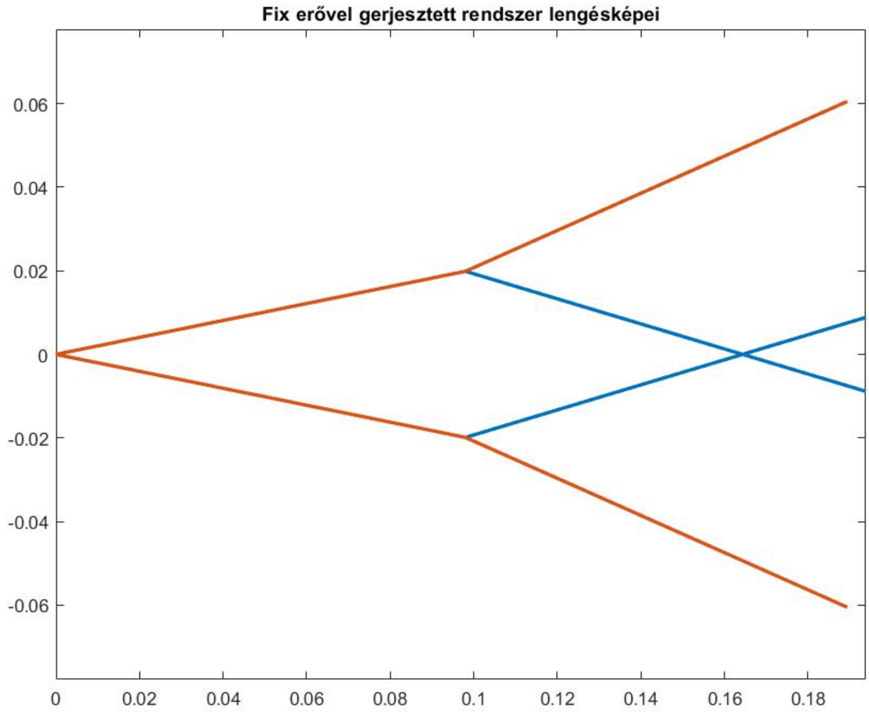
Követő erővel gerjesztett rendszer:

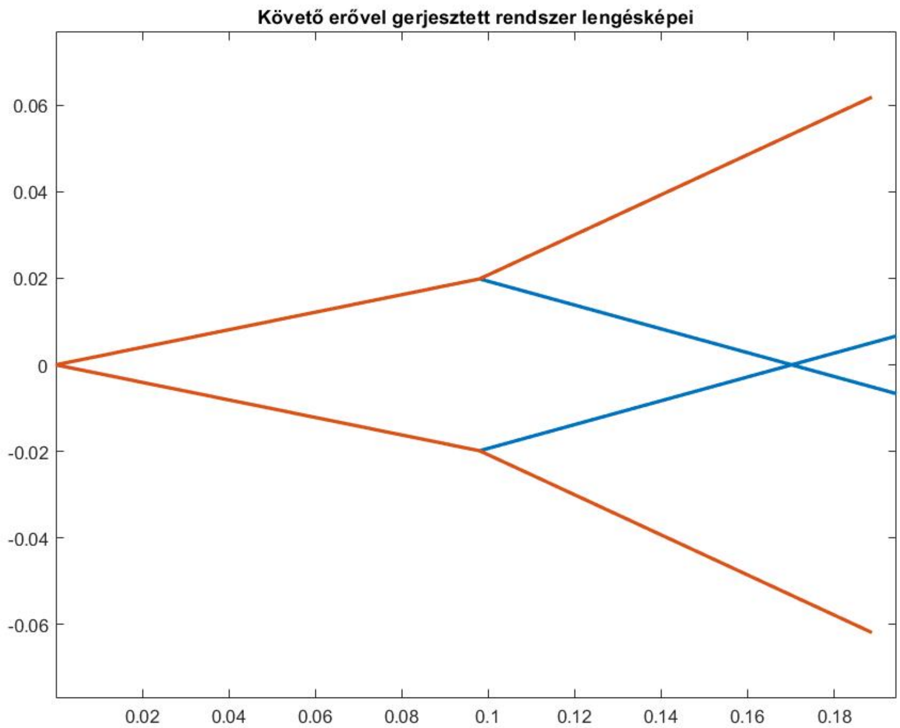
$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix} 4/3ml^2 & 1/2ml^2 \\ 1/2ml^2 & 1/3ml^2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{K}_0^* = \begin{bmatrix} 2k - Fl & -k + Fl \\ -k & k \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$\omega_{n1} = 13,45 [rad/s]; \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,34 \end{bmatrix} [rad] \tag{38}$$

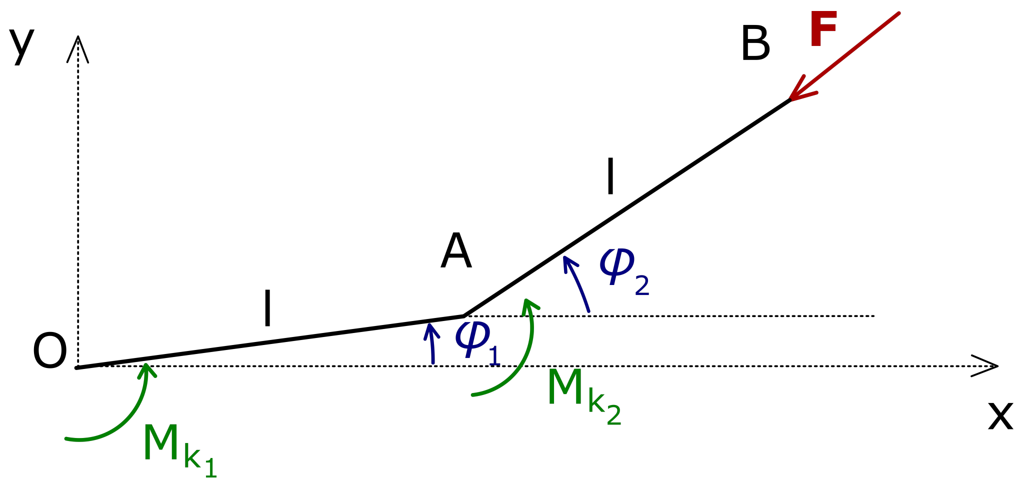
$$\omega_{n2} = 84,29 [rad/s]; \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.17 \end{bmatrix} [rad] \tag{39}$$

A következő ábrákat sehogy sem tudtam szépre megcsinálni. Újra tervezem írni a scriptet pythonban. Ott nagyobb szabadságom van az ábrázolásban. A kék vonalak jelzik az első míg a pirosak a második sajátkörfrekvenciához tartozó lengésképeket.


Fix erővel gerjesztett rendszer lengésképei
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0.12
0.14
0.16
0.18


Követő erővel gerjesztett rendszer lengésképei
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0.12
0.14
0.16
0.18

2.4. Másodfokú Laplace egyenlet kifejtése



Másodfokú Laplace egyenlet:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} = q_i \tag{40}$$

A mozgási energia, pottenciális energia, és gerjesztés függvények:

$$T(\boldsymbol{\varphi}) = ml^2 \left(\frac{2}{3}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{6}\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right) \tag{41}$$

$$U(\boldsymbol{\varphi}) = k \cdot \varphi_1^2 + k/2 \cdot \varphi_2^2 - k \cdot \varphi_1\varphi_2 \tag{42}$$

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} Fl\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{43}$$

Az egyenlet kifejtése
i=1:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = ml^2 \left(\frac{4}{3}\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right) \tag{44}$$

$$-\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = ml^2 \left(\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right) \tag{45}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = 2k\varphi_1 - k\varphi_2 \tag{46}$$

$$q_1 = Fl\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{47}$$

i=2:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = ml^2 \left(\frac{1}{3}\ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right) \tag{48}$$

$$-\frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = -ml^2 \left(\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right) \tag{49}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = k\varphi_2 - k\varphi_1 \tag{50}$$

$$q_2 = 0 \tag{51}$$

A kifejtett egyenletrendszer:

$$\begin{cases} ml^2\left(\frac{4}{3}\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}_2\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right) + \dot{\varphi}_2^2\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right) + 2k\varphi_1 - k\varphi_2 = Fl\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right) \\ ml^2\left(\frac{1}{3}\ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}_1\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right) - \dot{\varphi}_1^2\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right) + k\varphi_2 - k\varphi_1 = 0 \end{cases} \tag{52}$$